



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ-5 (ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ)

ПАНОВ
ТАРАС ЕВГЕНЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ-5
ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Последняя редакция: 25 июня 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
Список литературы	2
1. Симплициальные гомологии	4
1.1. Симплициальные комплексы и триангуляции	4
1.2. Полусимплициальные комплексы	5
1.3. Симплициальные гомологии	7
Задачи и упражнения	8
2. Сингулярные гомологии	9
2.1. Определение и первые свойства	9
2.2. Функториальность и гомотопическая инвариантность	11
2.3. Длинная точная последовательность гомологий	13
2.4. Относительные группы гомологий и точная последовательность пары	15
2.5. Теорема вырезания и её следствия	16
2.6. Доказательство теоремы вырезания	18
2.7. Точная последовательность Майера–Виеториса	21
2.8. Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий	22
Задачи и упражнения	24
3. Клеточные гомологии	26
3.1. Клеточный цепной комплекс и его гомологии	26
3.2. Явный вид граничного гомоморфизма	28
3.3. Эйлерова характеристика	29
Задачи и упражнения	30
4. Фундаментальная группа и гомологии	31
Задачи и упражнения	33
5. Гомологии с коэффициентами и когомологии	33
5.1. Определения и основные свойства	33
5.2. Коэффициентные точные последовательности	35
5.3. Функторы Tor и Ext	37
5.4. Формулы универсальных коэффициентов	38
Задачи и упражнения	41
6. Кольцо когомологий	42
6.1. Произведение Колмогорова–Александера.	42
6.2. Относительные произведения и \times -произведение	45
6.3. Клеточное определение умножения	45
6.4. Формула Кюннета	46
6.5. Кольца когомологий тора и проективных пространств	50
Задачи и упражнения	52
7. Двойственность Пуанкаре	52
7.1. Гладкие и топологические многообразия	52
7.2. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс	53
7.3. Степень отображения многообразий	56
7.4. \sim -произведение и изоморфизмы двойственности	57
7.5. Когомологии с компактными носителями	58
7.6. Связь с умножением. Сигнатура	61
7.7. Двойственность для многообразий с краем	62

Задачи и упражнения	64
8. Векторные расслоения	65
8.1. Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения	65
8.2. Касательное и нормальное расслоение	68
8.3. Многообразия Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта	70
8.4. Классификация векторных расслоений	72
Задачи и упражнения	74
9. Характеристические классы Штифеля–Уитни и Чженя	75
9.1. Теорема Лере–Хирша	75
9.2. Определение и свойства характеристических классов	76
9.3. Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов	80
9.4. Когомологии многообразий Грассмана	82
9.5. Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением	85
9.6. Препятствия к вложениям и погружениям многообразий	86
Задачи и упражнения	87
10. Класс Эйлера и класс Тома	89
10.1. Ориентируемые векторные расслоения	89
10.2. Класс Тома и изоморфизм Тома	90
10.3. Определение класса Эйлера, его свойства	93
10.4. Связь с двойственностью Пуанкаре и эйлеровой характеристикой	94
Задачи и упражнения	100
11. Классы Понтрягина	101
11.1. Общее понятие характеристического класса	101
11.2. Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя	102
11.3. Кватернионные классы Понтрягина	103
11.4. Классы Понтрягина вещественных расслоений	105
11.5. Классы Понтрягина ориентированных расслоений	106
Задачи и упражнения	109

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс лекций на специальном потоке «Фундаментальная математика и математическая физика» на механико-математическом факультете МГУ (4-й курс, 8-й семестр). Включает основы теории гомологий и теорию характеристических классов.

Данный текст доступен на странице Т. Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: <http://higeom.math.msu.ru/people/taras/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [БТ] Р. Ботт, Л. В. Ту. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*. Москва, Наука, 1989.
- [ДНФ] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения*. Москва, Наука, 1986.

- [Ле] С. Ленг. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*. Москва, «Мир», 1967.
- [МС] Дж. Милнор, Дж. Сташефф. *Характеристические классы*, с приложением работы Дж. Манкрса «Элементарная дифференциальная топология». Москва, Мир, 1979.
- [Ми] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения*. Москва, Наука, 1984.
- [Топ1] Т. Е. Панов. *Топология-1. Курс лекций*.
<http://higeom.math.msu.su/people/taras/#teaching>
- [Ст] Р. Стонг. *Заметки по теории кобордизмов*. Москва, Мир, 1973.
- [ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Москва, Наука, 1989.
- [Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.
- [На] А. Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. <http://math.cornell.edu/~hatcher/>

1. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ

1.1. Симплициальные комплексы и триангуляции. Мы уже встречались с понятиями симплекса и симплициального комплекса при доказательстве теоремы о клеточной аппроксимации.

Напомним, что n -мерный *симплекс* — это выпуклая оболочка набора из $n+1$ точек v_0, v_1, \dots, v_n в некотором евклидовом пространстве \mathbb{R}^N , не лежащих в одной $(n-1)$ -мерной плоскости (где под плоскостью мы подразумеваем аффинное подпространство). Эквивалентное условие состоит в том, что векторы $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ линейно независимы. Точки v_0, v_1, \dots, v_n называются *вершинами* симплекса, а сам симплекс мы будем обозначать $[v_0, \dots, v_n]$. Выпуклые оболочки поднаборов множества вершин симплекса называются его *гранями*. Грани являются симплексами размерности $\leq n$.

Пример 1.1. *Правильный* n -мерный симплекс — это множество

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1 \text{ и } t_i \geq 0 \text{ для всех } i \right\}.$$

Его вершинами являются концы единичных векторов вдоль координатных осей.

Далее вершины симплексов мы будем всегда считать упорядоченными и под « n -мерным симплексом» будем иметь в виду « n -мерный симплекс с указанным порядком его вершин». Вершины граней симплекса всегда будут упорядочиваться согласно их порядку в большем симплексе.

Задание порядка вершин определяет канонический линейный гомеоморфизм правильного n -мерного симплекса Δ^n на любой n -мерный симплекс $[v_0, \dots, v_n]$, сохраняющий порядок вершин, а именно

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_i t_i v_i.$$

Коэффициенты t_0, \dots, t_n называются *барицентрическими координатами* точки $\sum_i t_i v_i$ в симплексе $[v_0, \dots, v_n]$.

Объединение всех собственных граней симплекса Δ^n называется его *границей* и обозначается $\partial\Delta^n$. Внутренность $\Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ симплекса Δ^n называется *открытым симплексом* и обозначается $\dot{\Delta}^n$. При этом для $n=0$ принимается соглашение, что внутренность 0-симплекса (точки) совпадает с ним самим.

Напомним, что *симплициальный комплекс* — это такой конечный набор симплексов произвольной размерности в некотором \mathbb{R}^N , что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Подмножество K евклидова пространства \mathbb{R}^N *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют (конечный) симплициальный комплекс. *Триангуляцией* топологического пространства X называется гомеоморфизм $f: K \rightarrow X$ между некоторым триангулированным подмножеством $K \subset \mathbb{R}^N$ и X . Часто говорят, что на пространстве X *задана структура симплициального комплекса*, имея в виду, что задана его триангуляция. (Можно также рассматривать симплициальные комплексы и триангуляции, состоящие из бесконечного числа симплексов, но в этом случае естественная топология на них не является индуцированной из \mathbb{R}^N , её определение будет дано в следующем параграфе.)

Таким образом, триангуляция пространства X задаётся набором отображений $\sigma_\alpha: \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$ (ограничений гомеоморфизма $f: K \rightarrow X$ на симплексы множества $K \subset \mathbb{R}^N$) и каждая точка пространства X содержится в образе ровно одного ограничения $\sigma_\alpha|_{\Delta^{n_\alpha}}$ на внутренность симплекса. Другими словами, X представлено в виде несвязного объединения гомеоморфных образов внутренностей симплексов.

Пример 1.2.

1. Граница n -мерного симплекса Δ^n задаёт триангуляцию $(n-1)$ -мерной сферы. В частности, граница тетраэдра задаёт триангуляцию 2-мерной сферы. Другими примерами триангуляций 2-мерной сферы являются границы октаэдра или икосаэдра, а также граница любого 3-мерного многогранника, у которого все 2-мерные грани — треугольники (такие многогранники называются *симплициальными*).

2. На рис. 1 а) показана триангуляция тора T^2 с 9 вершинами. На рис. 1 б) показана триангуляция тора T^2 с 7 вершинами. Противоположные стороны квадратов отождествляются в соответствии со стрелками.

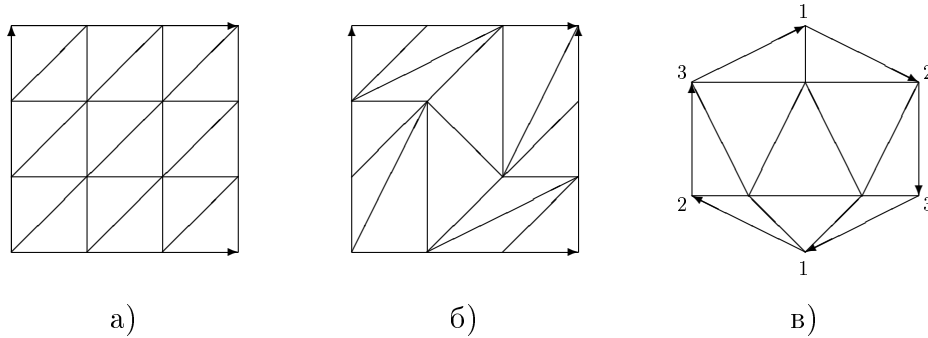


РИС. 1. Триангуляции тора T^2 и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

3. На рис. 1 в) показана триангуляция проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с 6 вершинами. На границе многоугольника производятся отождествления в соответствии со стрелками и нумерацией вершин.

Триангуляции на рис. 1 б) и в) минимальны по числу вершин (задача).

В классическом подходе симплициальные гомологии пространств определялись через их триангуляции. Однако мы видим, что даже для простых двумерных поверхностей триангуляции содержат большое количество симплексов, что приводит к громоздким вычислениям. Обобщение понятия симплициального комплекса, при котором симплексы могут приклеиваться друг к другу по части границы, а не только по одному симплексу, приводит к более экономным разбиениям пространств на симплексы. Примеры изображены на рис. 2, а определение приводится в следующем параграфе.

1.2. Полусимплициальные комплексы. Структура *полусимплициального комплекса* на пространстве X — это такой набор отображений $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$, где n зависит от индекса α , что выполняются следующие условия:

- а) ограничение $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ инъективно, и каждая точка пространства X содержится в образе ровно одного такого ограничения $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$;
- б) каждое ограничение отображения σ_α на грань симплекса Δ^n — это одно из отображений $\sigma_\beta: \Delta^k \rightarrow X$, $k \leq n$;

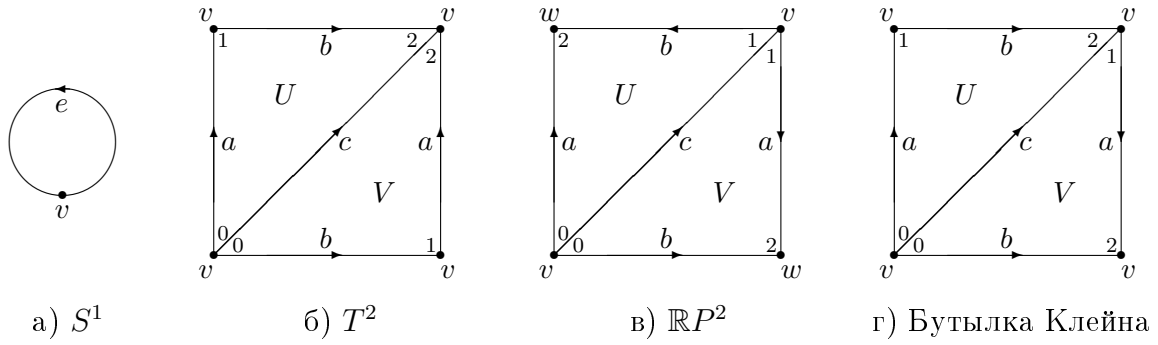


Рис. 2. Полусимплициальные комплексы

в) множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ открыто в Δ^n для всех σ_α .

Если каждое отображение $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ инъективно, количество этих отображений конечно и пересечение любых двух симплексов $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ и $\sigma_\beta(\Delta^m)$ в X является гранью каждого из них (возможно, пустой), то все симплексы можно вложить в одно пространство \mathbb{R}^N так, что $\bigcup_\alpha \Delta^n$ станет симплициальным комплексом, а X — триангулированным пространством. В этом случае условие в) выполнено автоматически. Если же количество симплексов $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ бесконечно, то условие в) даёт «правильный» способ введения топологии на $\bigcup_\alpha \Delta^n$, не зависящий от вложений в \mathbb{R}^N . См. задачи 1.10 и 1.11. Таким образом, бесконечные симплициальные комплексы (триангуляции) — это полусимплициальные комплексы, в которых все отображения σ_α инъективны и все пересечения $\sigma_\alpha(\Delta^n) \cap \sigma_\beta(\Delta^m)$ являются гранями.

Из условия в) следует, что X можно построить как факторпространство набора непересекающихся симплексов Δ_α^n , по одному для каждого отображения $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$. Отсюда следует, что пространство X должно быть хаусдорфовым, а каждое ограничение $\sigma_\alpha|_{\Delta_\alpha^n}$ является гомеоморфизмом на свой образ, который поэтому является открытым симплексом в X (задача). Тем самым открытые симплексы $\sigma_\alpha|_{\Delta_\alpha^n}$ задают клеточное разбиение пространства X . Однако полусимплициальные комплексы образуют весьма ограниченный класс клеточных пространств.

Пример 1.3.

1. На рис. 1.1 а) изображено полусимплициальное разбиение окружности с одной вершиной v и одним ребром (1-мерным симплексом) e .

2. На рис. 1.1 б) изображено полусимплициальное разбиение тора с одной вершиной v , тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками (2-мерными симплексами) U, V . Рёбра ориентируются в соответствии с порядком отображаемых вершин симплексов, от меньшей к большей. Например, U является образом треугольника $\Delta^2 = [012]$, при этом ребро $[01]$ отображается в a , ребро $[12]$ в b , ребро $[02]$ в c и все три вершины $0, 1, 2$ переходят в v .

3. На рис. 1.1 в) изображено полусимплициальное разбиение проективной плоскости с двумя вершинами v, w , тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V . Здесь отображение из $\Delta^2 = [012]$, соответствующее треугольнику U , устроено так: вершины 0 и 1 переходят в v , а 2 в w .

4. На рис. 1.1 г) изображено полусимплициальное разбиение бутылки Клейна с одной вершиной v , тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V .

1.3. Симплициальные гомологии. Пусть X — полусимплициальный комплекс. Определим свободную абелеву группу $\Delta_n(X)$, порождённую n -мерными симплексами $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ комплекса X . Элементы группы $\Delta_n(X)$ называются n -мерными *симплициальными цепями* для X . Каждая симплициальная цепь может быть записана в виде конечной формальной суммы $\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha$ с коэффициентами $k_\alpha \in \mathbb{Z}$.

Определим *граничный гомоморфизм* $\partial_n: \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$, задав его значения на элементах базиса $\sigma_\alpha: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$:

$$(1) \quad \partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]},$$

где $\sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$ обозначает $(n-1)$ -мерную грань симплекса σ_α , получаемую опусканием i -й вершины v_i . Например,

$$\begin{aligned} \partial_1[v_0, v_1] &= [v_1] - [v_0], \\ \partial_2[v_0, v_1, v_2] &= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]. \end{aligned}$$

Выбор знаков обусловлен согласованием ориентаций, задаваемых порядком вершин, на симплексе и его гранях.

Лемма 1.4. *Композиция $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ является нулевым отображением.*

Доказательство. Из соотношения (1) вытекает, что

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]}.$$

Последние две суммы сокращаются, так как после перестановки i и j во второй сумме она становится первой суммой со знаком минус. \square

Тем самым мы находимся в следующей алгебраической ситуации. Имеется последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

причём $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ для всех n . Такая последовательность $C_\bullet = \{C_n, \partial_n\}$ называется *цепным комплексом*. Из равенства $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ следует, что $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{Ker } \partial_n$. Поэтому мы можем определить n -ю *группу гомологий* цепного комплекса как факторгруппу $H_n = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$. Элементы ядра $\text{Ker } \partial_n$ называются *циклами*, а элементы образа $\text{Im } \partial_{n+1}$ — *границами*. Элементы группы H_n называются *классами гомологий*. Класс гомологий цикла $c \in \text{Ker } \partial_n$ обозначается через $[c]$. Два цикла, представляющие один и тот же класс гомологий, называются *гомологичными*. Это означает, что их разность является границей.

Возвращаясь к случаю $C_n = \Delta_n(X)$, группу гомологий $\text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ будем обозначать $H_n^\Delta(X)$ и называть n -й *группой симплициальных гомологий* комплекса X .

Пример 1.5. Пусть $X = S^1$ с одной вершиной v и одним ребром e , см. рис. 1.1 а). Тогда обе группы $\Delta_0(X)$ и $\Delta_1(X)$ равны \mathbb{Z} , а граничное отображение ∂_1 нулевое, так как $\partial_1 e = v - v$. Кроме того, $\Delta_n(S^1) = 0$ при $n \geq 2$, так как в этих размерностях нет симплексов. Следовательно,

$$H_n^\Delta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

Пример 1.6. Пусть $X = T^2$ — тор с одной вершиной v , тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V , см. рис. 1.1 б). Как и в предыдущем примере, $\partial_1 = 0$, поэтому $H_0^\Delta(T^2) = \mathbb{Z}$. Так как $\partial_2 U = [12] - [02] + [01] = b - c + a = \partial_2 V$, а $a, b, a + b - c$ — базис группы $\partial_1(T^2)$, получаем, что $H_1^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисными классами гомологий $[a]$ и $[b]$. Так как трёхмерных симплексов нет, $H_2^\Delta(T^2) = \text{Ker } \partial_2$, а группа $\text{Ker } \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ порождена циклом $U - L$. Таким образом,

$$H_n^\Delta(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{при } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, 2, \\ 0 & \text{при } n \geq 3. \end{cases}$$

Пример 1.7. Пусть $X = \mathbb{R}P^2$ с двумя вершинами v, w , тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V , см. рис. 1.1 в). Тогда группа $\text{Im } \partial_1$ порождена цепью $w - v$, поэтому $H_0^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$, причём в качестве образующей можно взять $[v]$ или $[w]$. Так как $\partial_2 U = -a + b + c$ и $\partial_2 V = a - b + c$, мы видим, что $\text{Ker } \partial_2 = 0$, поэтому $H_2^\Delta(\mathbb{R}P^2) = 0$. Далее, $\text{Ker } \partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисом $a - b$ и c . Отсюда видно, что $\text{Im } \partial_2$ является подгруппой индекса 2 в $\text{Ker } \partial_1$, так как в качестве базиса в $\text{Ker } \partial_1$ можно взять $a - b + c$ и c , а в качестве базиса в $\text{Im } \partial_2$ можно взять $a - b + c$ и $(-a + b + c) + (a - b + c) = 2c$. Таким образом, $H_1^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ и мы имеем

$$H_n^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

Симплициальные гомологии в действительности являются топологическими инвариантами пространства X , т.е. не зависят от способа его разбиения на симплексы. Более того, группы симплициальных гомологий гомотопически эквивалентных пространств одинаковы. Для того чтобы доказать эти свойства, мы определим другой тип гомологий пространств — группы сингулярных гомологий, определение которых не будет использовать разбиение пространства на симплексы. Затем мы докажем, что группы симплициальных и сингулярных гомологий полусимплициального комплекса совпадают.

Задачи и упражнения.

1.8. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7, а в триангуляции проективной плоскости — 6.

1.9. Постройте какую-нибудь триангуляцию бутылки Клейна. Какое минимальное число вершин у такой триангуляции?

1.10. Пусть I_k — отрезок единичной длины на плоскости \mathbb{R}^2 с концами $(0, 0)$ и $(\cos \frac{2\pi}{k}, \sin \frac{2\pi}{k})$. Определим $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ как подпространство в \mathbb{R}^2 с индуцированной топологией. Пусть $\sigma_k: \Delta^1 \rightarrow Y$ — линейное отображение отрезка Δ^1 на I_k . Докажите, что семейство отображений σ_k вместе с их ограничениями на вершины удовлетворяет условиям а) и б) из определения полусимплициального комплекса, но не удовлетворяет условию в). Таким образом, пространство Y представляет собой бесконечное объединение симплексов в \mathbb{R}^2 , примыкающих друг к другу по граням, но не является полусимплициальным комплексом.

1.11. Рассмотрим букет счётного числа отрезков $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1$. (По определению букет — это факторпространство $(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1)/(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k)$.) Докажите, что инъективные отображения $\sigma_k: \Delta_k^1 \rightarrow X$ вместе с их ограничениями на вершины задают на X структуру бесконечного (полу)симплициального комплекса, но X не вкладывается в \mathbb{R}^N ни для какого N (т.е. не гомеоморфно подмножеству \mathbb{R}^N с индуцированной топологией).

1.12. Докажите, что структура полусимплициального комплекса на пространстве X задаёт на нем структуру клеточного пространства.

1.13. Приведите пример клеточного разбиения пространства, которое не является структурой полусимплициального комплекса.

1.14. Пусть $X = S^1 \cup_{\varphi} D^2$ — клеточное пространство, получаемое приклеиванием к окружности S^1 (разбитой на две клетки) двумерной клетки по отображению $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ степени 3, $z \mapsto z^3$. Пространство X можно получить из треугольника отождествлением трёх его сторон в одну в соответствии с направлениями стрелок



на рисунке: \triangleleft . Задают ли характеристические отображения $\Delta^0 \rightarrow X$, $\Delta^1 \rightarrow X$ и $\Delta^2 \rightarrow X$ данного клеточного разбиения структуру полусимплициального комплекса?

1.15. Вычислите симплициальные гомологии бутылки Клейна, воспользовавшись структурой полусимплициального комплекса.

1.16. Вычислите симплициальные гомологии двумерной сферы S^2 , воспользовавшись триангуляцией или структурой полусимплициального комплекса.

2. СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ

2.1. Определение и первые свойства. *Сингулярным n -мерным симплексом* (или просто *n -симплексом*) в пространстве X называется непрерывное отображение $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Определим свободную абелеву группу $C_n(X)$, порождённую множеством сингулярных n -мерных симплексов в X . Элементы группы $C_n(X)$, называемые *сингулярными n -мерными цепями*, являются конечными формальными суммами $\sum_i k_i \sigma_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}$ и $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$. Граничное отображение $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ задаётся той же формулой, что и для симплициальных цепей:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]},$$

где $\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ — сингулярный симплекс.

Мы часто будем писать просто ∂ вместо ∂_n . Так же как и для симплициальных цепей, доказывается, что $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, т.е. $\partial^2 = 0$. Таким образом, можно определить группу *сингулярных гомологий* $H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$.

Из определения очевидно, что гомеоморфные пространства имеют одинаковые группы сингулярных гомологий H_n , в отличие от ситуации с симплициальными гомологиями H_n^{Δ} . С другой стороны, так как число сингулярных n -мерных симплексов в X обычно несчётно, группы цепей $C_n(X)$ столь велики, что непонятно, почему для конечного симплициального комплекса X группа сингулярных гомологий $H_n(X)$ должна быть конечно порожденной и нулевой при $n > \dim X$. Эти свойства были тривиальны для симплициальных гомологий.

Сингулярные гомологии в действительности можно рассматривать как частный случай симплициальных гомологий при помощи следующей конструкции. Для произвольного пространства X определим *полный сингулярный комплекс* $S(X)$ как полусимплициальный комплекс, имеющий по одному симплексу для каждого сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Из определений ясно, что $H_n^{\Delta}(S(X)) = H_n(X)$ для всех n . Комплекс $S(X)$ задаёт на X структуру полусимплициального комплекса. Эта конструкция обладает свойством функториальности (т.е. отображение $X \rightarrow Y$ индуцирует отображение $S(X) \rightarrow S(Y)$, переводящее симплексы в симплексы), однако комплекс $S(X)$ слишком велик, чтобы его можно было использовать для явных вычислений.

Перейдём к описанию простейших свойств сингулярных гомологий.

Предложение 2.1. *Если пространство X представлено в виде объединения $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ компонент линейной связности, то $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$.*

Доказательство. Так как образ сингулярного симплекса линейно связан, мы имеем $C_n(X) = \bigoplus_{\alpha} C_n(X_{\alpha})$. Граничное отображение ∂_n сохраняет это разложение, т.е. $\partial_n C_n(X_{\alpha}) \subset C_{n-1}(X_{\alpha})$, поэтому подпространства $\text{Ker } \partial_n$ и $\text{Im } \partial_n$ аналогично раскладываются в прямую сумму. Отсюда следует разложение для гомологий. \square

Для дальнейшего нам понадобится следующая модификация сингулярного цепного комплекса. Определим гомоморфизм *аугментации* $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ по формуле $\varepsilon(\sum_i k_i \sigma_i) = \sum_i k_i$. Теперь рассмотрим последовательность

$$(2) \quad \dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Мы имеем $\varepsilon \partial_1 = 0$, так как для любого 1-симплекса $\sigma: [v_0, v_1] \rightarrow X$ выполнено $\varepsilon \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]}) = 1 - 1 = 0$. Следовательно, (2) является цепным комплексом, называемым *аугментированным сингулярным цепным комплексом* для X . Его гомологии называются *приведёнными группами гомологий* и обозначаются $\tilde{H}_n(X)$.

Так как аугментация ε обращается в нуль на $\text{Im } \partial_1$, она индуцирует отображение $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ с ядром $\tilde{H}_0(X)$. Следовательно,

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X)$ при $n > 0$.

Предложение 2.2. *Если пространство X линейно связно, то $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, т.е. $\tilde{H}_0(X) = 0$.*

Доказательство. Чтобы доказать, что $\tilde{H}_0(X) = 0$, достаточно убедиться, что $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im } \partial_1$, см. (2). Пусть $\varepsilon(\sum_i k_i \sigma_i) = 0$, т.е. $\sum_i k_i = 0$. Сингулярные 0-симплексы $\sigma_i: [v_0] \rightarrow X$ — это просто точки в X . Для каждого σ_i выберем путь $\tau_i: I \rightarrow X$ из фиксированной точки $x_0 \in X$ в точку $\sigma_i(v_0)$. Пусть σ_0 — сингулярный 0-симплекс с образом x_0 . Каждый путь τ_i можно рассматривать как сингулярный 1-симплекс $\tau_i: [v_0, v_1] \rightarrow X$, причём $\partial \tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Мы имеем

$$\partial\left(\sum_i k_i \tau_i\right) = \sum_i k_i \sigma_i - \sum_i k_i \sigma_0 = \sum_i k_i \sigma_i,$$

так как $\sum_i k_i = 0$. Следовательно, $\sum_i k_i \sigma_i$ — граница, а значит, $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im } \partial_1$. \square

Предложение 2.3. *Гомологии точки $X = pt$ имеют вид $H_0(pt) = \mathbb{Z}$ и $H_n(pt) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Для $X = pt$ имеется единственный сингулярный n -симплекс σ_n для любого n , причём

$$\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечётно или } n = 0, \\ \sigma_{n-1}, & \text{если } n \text{ чётно и } n \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, сингулярный цепной комплекс для $X = pt$ имеет вид

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

а его гомологии тривиальны, за исключением $H_0 \cong \mathbb{Z}$. \square

2.2. Фунториальность и гомотопическая инвариантность. Здесь мы покажем, что гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. Для этого мы сначала убедимся, что гомологии являются функтором из категории топологических пространств в категорию абелевых групп, т.е. непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. Затем мы докажем, что f_* является изоморфизмом, если f — гомотопическая эквивалентность.

Для отображения $f: X \rightarrow Y$ определим гомоморфизм цепей $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, взяв композицию сингулярных симплексов $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ с f , т.е. $f_\#(\sigma) = f\sigma: \Delta^n \rightarrow Y$, с последующим продолжением по линейности. При этом $f_\#\partial = \partial f_\#$, так как

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}\right) = \sum_i (-1)^i f\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} = \partial f_\#(\sigma).$$

Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Эта ситуация описывается следующими алгебраическими понятиями. Пусть $C_\bullet = \{C_n, \partial\}$ и $C'_\bullet = \{C'_n, \partial\}$ — два цепных комплекса. Набор гомоморфизмов $f = \{f_n: C_n \rightarrow C'_n, n \geq 0\}$ называется *цепным отображением* цепного комплекса C_\bullet в цепной комплекс C'_\bullet , если выполнены соотношения $f_n \partial = \partial f_n$.

Предложение 2.4. *Цепное отображение $f: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ индуцирует гомоморфизмы групп гомологий этих комплексов, $f_*: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$, причём*

- а) $(fg)_* = f_* g_*$ для композиции отображений $C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$;
- б) $(\text{id})_* = \text{id}$, где id обозначает тождественное отображение.

Доказательство. Из соотношения $f\partial = \partial f$ вытекает, что f переводит циклы в циклы (из равенства $\partial c = 0$ следует, что $\partial f(c) = f(\partial c) = 0$) и переводит границы в границы (так как $f(\partial b) = \partial f(b)$). Следовательно, f индуцирует гомоморфизм $f_*: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$. Свойства а) и б) очевидны. \square

Возвращаясь к топологической ситуации, мы получаем, что отображение топологических пространств $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизмы их групп сингулярных

гомологий $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, удовлетворяющие соотношениям а) и б) из предложения 2.4. Это свойство и называется функториальностью групп гомологий.

Далее мы покажем, что гомотопные отображения пространств индуцируют одинаковые гомоморфизмы их групп гомологий. Пусть $F: X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия между отображениями $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$. Для сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ рассмотрим композицию $\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times \text{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$. Это отображение вместе с разбиением призмы $\Delta^n \times I$ на симплексы даст сингулярную $(n+1)$ -мерную цепь в Y . Тем самым мы построим гомоморфизм $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$, который является алгебраическим аналогом гомотопии. Его формальное определение заключается в следующем.

Два цепных отображения $f: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ и $g: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ называются *цепно гомотопными*, если существует набор гомоморфизмов $P = \{P_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}, n \geq 0\}$ (называемый *цепной гомотопией* между f и g), удовлетворяющих соотношениям

$$\partial P + P\partial = g - f.$$

Это описывается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow g-f & \swarrow P_n & \downarrow & \swarrow P_{n-1} & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Геометрический смысл соотношения цепной гомотопии поясняется ниже в доказательстве теоремы 2.6.

Предложение 2.5. *Цепно гомотопные отображения $f, g: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ индуцируют один и тот же гомоморфизм гомологий: $f_* = g_*$.*

Доказательство. Если $c \in C_n$ — цикл, то $g(c) - f(c) = \partial P(c) + P\partial(c) = \partial P(c)$, так как $\partial c = 0$. Таким образом, $g(c) - f(c)$ — граница, т.е. $g_*[c] - f_*[c] = 0$. \square

Теперь мы снова вернёмся к сингулярным гомологиям.

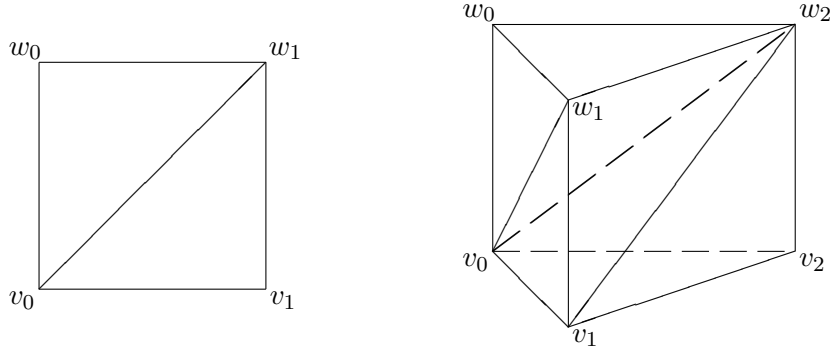
Теорема 2.6. *Гомотопные отображения пространств $f, g: X \rightarrow Y$ индуцируют один и тот же гомоморфизм сингулярных гомологий: $f_* = g_*$.*

Доказательство. Для доказательства мы построим цепную гомотопию $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ между $f_\#$ и $g_\#$. Нам понадобится триангуляция (разбиение на симплексы) призмы $\Delta^n \times I$. Пусть v_0, \dots, v_n — вершины основания $\Delta^n \times \{0\}$, а w_0, \dots, w_n — вершины основания $\Delta^n \times \{1\}$. Наша триангуляция призмы $\Delta^n \times I$ имеет $n+1$ симплексов размерности $n+1$, каждый из которых имеет вид $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$, $i = 0, \dots, n$. Можно проверить (задача), что это действительно симплициальный комплекс. Случай $n = 1$ и $n = 2$ показаны на рис. 3.

Пусть теперь дана гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ между отображениями f и g . Определим *призменные операторы* $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ по формуле

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]},$$

где $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, а $F \circ (\sigma \times \text{id})$ — композиция $\Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$. Мы покажем, что призменные операторы задают цепную гомотопию между $f_\#$ и $g_\#$, т.е. удовлетворяют

Рис. 3. Триангуляция призмы $\Delta^n \times I$.

соотношению

$$\partial P = g_{\#} - f_{\#} - P\partial.$$

Геометрически левая часть этого соотношения представляет границу призмы, а три члена в правой части представляют верхнее основание $\Delta^n \times \{1\}$, нижнее основание $\Delta^n \times \{0\}$ и боковую поверхность $\partial\Delta^n \times I$ призмы. Для доказательства соотношения проведём вычисление:

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) = & \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} + \\ & + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]}. \end{aligned}$$

Члены с $i = j$ в этих двух суммах взаимно сокращаются, за исключением членов $F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[\widehat{v}_0, w_0, \dots, w_n]} = g \circ \sigma = g_{\#}(\sigma)$ и $-F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_n, \widehat{w}_n]} = -f \circ \sigma = -f_{\#}(\sigma)$.

Члены с $i \neq j$ — это в точности $-P\partial(\sigma)$, так как

$$\begin{aligned} P\partial(\sigma) = & \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} + \\ & + \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}. \end{aligned}$$

Мы доказали, что P — это цепная гомотопия между $f_{\#}$ и $g_{\#}$, а значит, $f_* = g_*$. \square

Из теоремы 2.6 и свойств а), б) из предложения 2.4 немедленно вытекает

Следствие 2.7. Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то индуцированное отображение гомологий $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ является изоморфизмом для любого n .

Следствие 2.8. Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. В частности, если X стягиваемо, то $\widetilde{H}_n(X) = 0$ для любого n .

2.3. Длинная точная последовательность гомологий. Напомним, что последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

называется *точной*, если $\text{Ker } f_n = \text{Im } f_{n+1}$ для любого n . Такая последовательность является цепным комплексом с тривиальными группами гомологий.

Точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

называется *короткой точной последовательностью*. В ней гомоморфизм f инъективен, g сюръективен и $C \cong B/\text{Im } f$.

Коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

в которой строки являются цепными комплексами, а столбцы — короткими точными последовательностями групп, называется *короткой точной последовательностью цепных комплексов*. Мы будем использовать обозначение $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \rightarrow 0$. Так как отображения i и j в короткой последовательности являются цепными, они индуцируют гомоморфизмы групп гомологий $H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j} H_n(C_\bullet)$.

Далее мы опишем ещё один гомоморфизм $\partial: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$, называемый *граничным гомоморфизмом*. Рассмотрим класс гомологий $[c] \in H_n(C_\bullet)$, представленный циклом $c \in C_n$. Так как j — эпиморфизм, $c = j(b)$ для некоторого $b \in B_n$. Тогда $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, т.е. $\partial b \in \text{Ker } j = \text{Im } i$. Следовательно, $\partial b = i(a)$ для некоторого $a \in A_{n-1}$. При этом $\partial a = 0$, так как $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial \partial b = 0$, а i — мономорфизм. Теперь определим $\partial[c] = [a]$. Необходимо проверить, что полученное отображение $\partial: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ определено корректно (т.е. не зависит от произвола в выборе c , b и a) и является гомоморфизмом. Эти проверки мы оставляем в качестве задачи.

Вот одна из первых теорем гомологической алгебры.

Теорема 2.9. *Короткая точная последовательность цепных комплексов*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \longrightarrow 0$$

индуцирует «длинную» точную последовательность групп гомологий:

$$\dots \longrightarrow H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B_\bullet) \longrightarrow \dots$$

Доказательство. Рассуждения, используемые при доказательстве, называются «диаграммным поиском». Необходимо доказать 6 включений.

$\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$. Действительно, равенство $ji = 0$ влечёт $j_*i_* = 0$.

$\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial$. Если $[c] \in \text{Im } j_*$, то $c = j(b)$, где $\partial b = 0$. Так как при определении граничного гомоморфизма мы полагаем $i(a) = \partial b$, получаем $a = 0$, т.е. $\partial[c] = [a] = 0$.

$\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i_*$. Пусть $[a] = \partial[c]$. Тогда $i(a) = \partial b$, а значит, $i_*[a] = [\partial b] = 0$.

$\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$. Пусть $j_*[b] = 0$. Тогда $j(b) = \partial c'$ для некоторого $c' \in C_{n+1}$. Так как j — эпиморфизм, $c' = j(b')$ для некоторого $b' \in B_{n+1}$. При этом $j(b - \partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = 0$. Следовательно, $b - \partial b' = i(a)$ для некоторого $a \in A_n$. Элемент a является циклом, так как $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$, а i — мономорфизм. Следовательно, $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$, т.е. $[b] \in \text{Im } i_*$.

$\text{Ker } \partial \subset \text{Im } j_*$. Пусть $\partial[c] = 0$. В обозначениях из определения граничного гомоморфизма ∂ мы имеем $\partial[c] = [a]$, т.е. в нашей ситуации $a = \partial a'$ для некоторого $a' \in A_n$. Далее, $i(a) = \partial b$. Рассмотрим элемент $b - i(a')$. Это цикл, так как $\partial(b - i(a')) = \partial b - i\partial(a') = \partial b - i(a) = 0$. Кроме того, $j(b - i(a')) = j(b) = c$, а значит, $j_*[b - i(a')] = [c]$.

$\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$. Пусть $i_*[a] = 0$. Тогда $i(a) = \partial b$ для некоторого $b \in B_n$. Элемент $j(b)$ является циклом, так как $\partial j(b) = j(\partial b) = j i(a) = 0$. Тогда по определению граничного гомоморфизма мы имеем $\partial[j(b)] = [a]$. \square

2.4. Относительные группы гомологий и точная последовательность пары. Теперь мы применим алгебраические построения предыдущего параграфа в топологической ситуации.

Пусть $A \subset X$ — подпространство, т.е. (X, A) — топологическая пара. Обозначим через $C_n(X, A)$ факторгруппу $C_n(X)/C_n(A)$. Так как граничный гомоморфизм $\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ переводит $C_n(A)$ в $C_{n-1}(A)$, он индуцирует граничный гомоморфизм $\partial: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$. В результате мы получаем цепной комплекс

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

(соотношение $\partial^2 = 0$ выполнено, так как оно выполнялось до перехода к факторгруппам). Его гомологии $H_n(X, A)$ называются *относительными группами гомологий* пары (X, A) . Таким образом,

- а) элементы из $H_n(X, A)$ представлены *относительными циклами*, т.е. такими цепями $a \in C_n(X)$, что $\partial a \in C_{n-1}(A)$;
- б) относительный цикл a представляет 0 в $H_n(X, A)$ тогда и только тогда, когда он является *относительной границей*, т.е. $a = \partial b + c$ для некоторых $b \in C_{n+1}(X)$ и $c \in C_n(A)$.

Мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \xrightarrow{i} C_\bullet(X) \xrightarrow{j} C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0.$$

Из теоремы 2.9 вытекает следующий результат.

Теорема 2.10. *Для пары пространств (X, A) имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

Из алгебраического определения граничного гомоморфизма в длинной точной последовательности групп гомологий непосредственно вытекает следующее описание граничного отображения $\partial: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$. Если класс $[a] \in H_n(X, A)$ представлен относительным циклом a , то $\partial[a]$ — класс цикла ∂a в $H_{n-1}(A)$.

Ниже мы покажем, что для достаточно хороших пар (X, A) относительная группа гомологий $H_n(X, A)$ в точной последовательности выше может быть заменена на «абсолютную» группу $\tilde{H}_n(X/A)$. Получаемая точная последовательность даст нам первый эффективный инструмент для вычисления сингулярных гомологий пространств.

2.5. Теорема вырезания и её следствия. Свойство вырезания является одним из ключевых свойств сингулярных гомологий наряду с гомотопической инвариантностью и точными последовательностями пар. В качестве следствия из теоремы вырезания в следующем пункте мы докажем изоморфизм $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ для «хороших» пар. Вот классическая формулировка теоремы вырезания.

Теорема 2.11. *Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причём замыкание пространства Z содержится во внутренней части пространства A . Тогда включение $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geq 0.$$

Имеется следующая эквивалентная формулировка теоремы вырезания, которая также будет полезна для приложений.

Теорема 2.12. *Пусть даны подпространства $A, B \subset X$, внутренние части которых покрывают X . Тогда включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geq 0.$$

Чтобы убедиться, что две формулировки теоремы вырезания эквивалентны, положим $B = X \setminus Z$ и $Z = X \setminus B$. Тогда $A \cap B = A \setminus Z$, а условие $\bar{Z} \subset \text{int } A$ эквивалентно условию $X = \text{int } A \cup \text{int } B$, так как $X \setminus \text{int } B = \bar{Z}$.

Доказательство теоремы вырезания будет дано в следующем параграфе, а пока мы получим ряд её важных следствий.

Для пары (X, A) рассмотрим пространство $X \cup CA$, которое получается из X присоединением конуса CA над A (т.е. конус отображения вложения $A \hookrightarrow X$).

Предложение 2.13. *Имеют место изоморфизмы*

$$\tilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X, A), \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\tilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X \cup CA, CA) \cong H_n(X \cup CA \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\}) \cong H_n(X, A),$$

где первый изоморфизм вытекает из точной последовательности пары (так как конус CA стягиваем), второй изоморфизм следует из теоремы вырезания (теорема 2.11; здесь v — вершина конуса), а третий изоморфизм происходит из деформационной ретракции $CA \setminus \{v\} \xrightarrow{\cong} A$. \square

Напомним, что отображение вложения $A \hookrightarrow X$ называется *корасслоением*, если оно удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (см. [Топ1, §4.2]). Примерами являются вложения клеточных подпространств в клеточные пространства (*клеточные пары* (X, A)), а также подмножества $A \subset X$, которые являются деформационными ретрактами своих окрестностей в X .

Предложение 2.14. Если вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением, то факторотображение $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A) = (X/A, pt)$ индуцирует изоморфизмы

$$q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, pt) = \tilde{H}_n(X/A), \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Если $A \hookrightarrow X$ является корасслоением, то факторотображение $X \cup CA \rightarrow (X \cup CA)/CA = X/A$ является гомотопической эквивалентностью (см. [Топ1, предложение 4.9]), так что утверждение следует из предложения 2.13. \square

Предложение 2.15. Для сферы S^n , $n \geq 0$, имеют место изоморфизмы

$$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Доказательство. При $n > 0$ рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$; тогда $X/A = S^n$. Точная последовательность для приведённых гомологий имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_i(D^n) & \rightarrow & H_i(D^n, S^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{i-1}(D^n) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ 0 & & \tilde{H}_i(S^n) & & & & 0 \end{array}$$

Из точности следует, что $\tilde{H}_i(S^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$. При помощи индукции мы сводим утверждение к случаю $i = 0$ либо $n = 0$, тогда S^0 — две точки и результат следует из предложений 2.2 и 2.3. \square

Обобщением предыдущего утверждения является следующая теорема.

Теорема 2.16 (изоморфизм надстройки). Для любого пространства X имеют место изоморфизмы

$$\tilde{H}_i(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{i-1}(X).$$

Доказательство. Это вытекает из точной гомологической последовательности пары (CX, X) , где CX стягиваемо, $X \hookrightarrow CX$ является корасслоением для любого X и $CX/X = \Sigma X$. \square

Теорема 2.17. Пусть (X_α, x_α) — набор пространств с отмеченными точками, для которых вложения $x_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ являются корасслоениями. Тогда имеют место изоморфизмы

$$\tilde{H}_n\left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}\right) \cong \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha}), \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Это вытекает из точной последовательности пары $(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \bigsqcup_{\alpha} \{x_{\alpha}\})$ и определения букета $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha} / \bigsqcup_{\alpha} \{x_{\alpha}\}$. \square

При помощи гомологий легко доказывается следующий классический результат.

Теорема 2.18 («инвариантность размерности»). Если непустые открытые множества $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфны, то $m = n$.

Доказательство. Для любой точки $x \in U$ мы имеем

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^{m-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = m, \\ 0 & \text{при } i \neq m, \end{cases}$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, второй — из точной последовательности пары $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$, а третий — из деформационной ретракции $\mathbb{R}^m \setminus \{x\} \rightarrow S^{m-1}$. Аналогично

$$H_i(V, V \setminus \{y\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Так как гомеоморфизм $h: U \rightarrow V$ индуцирует изоморфизмы $H_i(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_i(V, V \setminus \{h(x)\})$ для всех i , должно выполняться равенство $m = n$. \square

2.6. Доказательство теоремы вырезания. Доказательство будет основано на ключевой лемме, позволяющей вычислять группы гомологий, используя лишь «малые» сингулярные симплексы. Малость мы будем определять в терминах покрытий, а основным комбинаторным инструментом будет барицентрическое подразделение.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_j\}$ — набор подпространств в X , внутренности которых образуют открытое покрытие пространства X . Определим подгруппу $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_n(X)$, состоящую из таких цепей $\sum_i n_i \sigma_i$, что образ каждого отображения $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$ содержится в некотором множестве из покрытия \mathcal{U} . Граничное отображение $\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ переводит $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, поэтому группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ образуют цепной комплекс. Обозначим его группы гомологий через $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Лемма 2.19. *Включение $\iota: C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_n(X)$ является цепной гомотопической эквивалентностью, т. е. существует такое цепное отображение $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$, что $\iota\rho$ и $\rho\iota$ цепно гомотопны тождественным отображениям. Следовательно, ι индуцирует изоморфизмы $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$, $n \geq 0$.*

Доказательство. Напомним, что барицентром (или центром тяжести) симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ в пространстве \mathbb{R}^N называется точка $b = \frac{1}{n+1}(v_0 + \dots + v_n)$. *Барицентрическим подразбиением* симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ (включая сам симплекс); при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение нульмерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k -мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Барицентрическое подразбиение обладает следующим важным свойством: если диаметр симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ (максимальное расстояние между его точками) равен d , то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{n}{n+1}d$ (задача). Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Далее мы построим оператор подразбиения $S: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ и проверим, что он цепно гомотопен тождественному отображению.

Пусть $\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ — сингулярный симплекс. Для любого набора точек $w_0, \dots, w_k \in [v_0, \dots, v_n]$ ограничение отображения σ задаёт сингулярный k -симплекс

$[w_0, \dots, w_k] \rightarrow X$. Определим на таких симплексах оператор b_σ по формуле

$$b_\sigma[w_0, \dots, w_k] = [b, w_0, \dots, w_k],$$

где b — барицентр симплекса $[v_0, \dots, v_n]$. По определению граничного оператора ∂ мы имеем соотношение

$$\partial b_\sigma[w_0, \dots, w_k] = [w_0, \dots, w_k] - b_\sigma \partial[w_0, \dots, w_k],$$

которое можно переписать в виде

$$\partial b_\sigma + b_\sigma \partial = \text{id}.$$

Теперь определим оператор подразделения $S: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$, для $n = 0$ положив $S = \text{id}: C_0(X) \rightarrow C_0(X)$, а для $n > 0$ при помощи индуктивной формулы

$$(3) \quad S\sigma = b_\sigma S \partial \sigma.$$

Геометрически эта формула означает, что S переводит сингулярный симплекс $\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ в сингулярную цепь, представляющую собой сумму ограниченных σ на симплексы барицентрического подразделения симплекса $[v_0, \dots, v_n]$, взятые с некоторыми знаками.

Оператор $S: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ является цепным отображением. Действительно, при $n = 0$ мы имеем $S = \text{id}$ и $\partial = 0$, т. е. $\partial S = S \partial = 0$, а при $n > 0$ имеем

$$\partial S \sigma = \partial(b_\sigma S \partial \sigma) = (\text{id} - b_\sigma \partial) S \partial \sigma = S \partial \sigma - b_\sigma \partial S \partial \sigma = S \partial \sigma - b_\sigma S \partial \partial \sigma = S \partial \sigma,$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались предположением индукции (соотношение $\partial S = S \partial$ имеет место для сингулярной $(n - 1)$ -мерной цепи $\partial \sigma$).

Теперь определим оператор цепной гомотопии $T: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ между S и тождественным отображением. Для $n = 0$ положим $T\sigma = b_\sigma \sigma$ (это сингулярный одномерный симплекс, переводящий обе вершины в точку $\sigma[v_0]$). Для $n > 0$ определим T используя индуктивную формулу

$$T\sigma = b_\sigma(\sigma - T \partial \sigma).$$

Геометрическая интерпретация этой формулы заключается в следующем. Определим индуктивно подразбиение призмы $\Delta^n \times I$, полученное в результате соединения всех симплексов в $\Delta \times \{0\} \cup \partial \Delta^n \times I$ с барицентром симплекса $\Delta \times \{1\}$, см. рис. 4. Тогда сингулярная $(n + 1)$ -мерная цепь $T\sigma$ есть сумма ограничений композиции

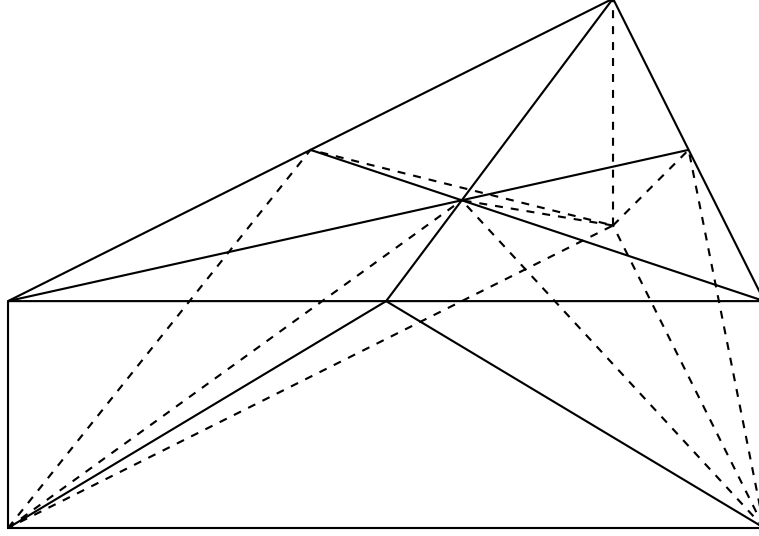
$$\Delta^n \times I \xrightarrow{\text{Pr}} \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \xrightarrow{\sigma} X$$

на симплексы подразделения призмы, взятые с некоторыми знаками.

Формула цепной гомотопии $\partial T + T \partial = \text{id} - S$ выполнена на $C_0(X)$, где $S = \text{id}$, $\partial = 0$ и $\partial T = 0$. Для сингулярного n -мерного симплекса σ , $n > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \partial T \sigma &= \partial(b_\sigma(\sigma - T \partial \sigma)) = (\text{id} - b_\sigma \partial)(\sigma - T \partial \sigma) = \sigma - T \partial \sigma - b_\sigma(\text{id} - \partial T) \partial \sigma = \\ &= \sigma - T \partial \sigma - b_\sigma(T \partial + S) \partial \sigma = \sigma - T \partial \sigma - b_\sigma S \partial \sigma = (\text{id} - T \partial - S) \sigma. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались предположением индукции (соотношение $\text{id} - \partial T = T \partial + S$ имеет место для сингулярной $(n - 1)$ -мерной цепи $\partial \sigma$) и формулой (3).

Рис. 4. Триангуляция призмы $\Delta^n \times I$.

Рассмотрим оператор m -кратного барицентрического подразбиения $S^m: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$. Тогда оператор $D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$ задаёт цепную гомотопию между id и S^m :

$$\begin{aligned} \partial D_m + D_m \partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i \partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T \partial S^i) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T \partial) S^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\text{id} - S) S^i = \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \text{id} - S^m. \end{aligned}$$

Для каждого сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ и достаточно большого m сингулярная цепь $S^m \sigma$ будет лежать в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, так как диаметры симплексов в $S^m(\Delta^n)$ при больших m будут меньше числа Лебега покрытия симплекса Δ^n открытыми множествами $\sigma^{-1}(\text{int } U_j)$. (Число Лебега открытого покрытия компактного метрического пространства — это такое число $\varepsilon > 0$, что любое множество диаметра меньше ε содержится в некотором множестве покрытия.) Если бы можно было выбрать одно число m для всех сингулярных симплексов σ , то мы могли бы положить $\rho = S^m: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$, и тогда соотношение $\partial D_m + D_m \partial = \text{id} - S^m$ означало бы, что D_m является цепной гомотопией между $\nu \rho$ и id (а также между $\rho \iota$ и id).

На практике, однако, мы не можем выбрать одно m для всех σ . Поэтому определим $m(\sigma)$ как наименьшее m , для которого $S^m \sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Определим теперь оператор

$$D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X), \quad D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Ниже мы покажем, что D является цепной гомотопией между id и $\nu \rho$ для некоторого цепного отображения $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Рассмотрим соотношение

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma.$$

Мы имеем $\partial D_{m(\sigma)}\sigma = \partial D\sigma$, но $D_{m(\sigma)}\partial\sigma \neq D\partial\sigma$. Прибавив $D\partial\sigma$ к обеим частям приведённого выше соотношения, после преобразования получим

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - (S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma).$$

Теперь положим

$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma.$$

Смысл этого отображения ρ заключается в том, что мы сначала барицентрически подразбиваем каждый сингулярный симплекс минимальное требуемое число раз, а затем подправляем на границе так, чтобы результат был цепным отображением. Тогда предпоследнее соотношение принимает вид

$$(4) \quad \partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma).$$

При этом ρ является цепным отображением. Действительно, из формулы (4), применённой к σ и $\partial\sigma$, следует, что $\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \rho(\partial\sigma)$.

Покажем, что $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Это очевидно для члена $S^{m(\sigma)}\sigma$. Для остальной части $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ заметим, что если σ_j обозначает ограничение σ на j -ю грань симплекса Δ^n , то $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$, поэтому каждый член $TS^i(\sigma_j)$ в $D\partial\sigma$ будет входить и в $D_{m(\sigma)}\partial\sigma$. Таким образом, $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ — сумма членов $TS^i(\sigma_j)$, где $i \geq m(\sigma_j)$, а все такие члены лежат в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ (заметим, что T переводит $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$).

Таким образом, мы можем рассматривать ρ как цепное отображение $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Тогда соотношение (4) переписется в виде $\partial D + D\partial = \text{id} - \iota\rho$, где $\iota: C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ — включение. Кроме того, $\rho\iota = \text{id}$, так как D тождественно равно нулю на $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, поскольку $m(\sigma) = 0$ для $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Итак, отображение ρ цепно гомотопично обратное к ι . \square

Теперь мы можем доказать теорему вырезания.

Доказательство теоремы 2.12. Нам даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X . Переходя, если необходимо, к внутренностям, мы можем считать, что $X = A \cup B$ — открытое покрытие, которое мы обозначим через \mathcal{U} . Мы будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ через $C_n(A + B)$, что указывает на то, что они состоят из сумм цепей в A и цепей в B .

В конце доказательства леммы 2.19 мы получили формулы $\partial D + D\partial = \text{id} - \iota\rho$ и $\rho\iota = \text{id}$. Все отображения в этих формулах переводят $C_n(A)$ в $C_n(A)$, поэтому включение

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм гомологий. С другой стороны, отображение

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A + B)/C_n(A),$$

индуцированное включением, является изоморфизмом, так как обе факторгруппы свободные и их базисом служат сингулярные n -симплексы в B , не лежащие в A . Следовательно, мы получаем требуемый изоморфизм $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$, индуцированный включением. \square

2.7. Точная последовательность Майера–Виеториса.

Теорема 2.20. Пусть даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X . Тогда имеет место точная последовательность групп гомологий

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.12, рассмотрим подгруппу $C_n(A + B) \subset C_n(X)$, состоящую из цепей, которые являются суммами цепей в A и цепей в B . Мы имеем точную последовательность цепных комплексов, образованную короткими точными последовательностями

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A + B) \longrightarrow 0,$$

где $\varphi(x) = (x, -x)$ и $\psi(x, y) = x + y$. Соответствующая длинная точная последовательность гомологий и есть последовательность Майера–Виеториса, так как включение $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий согласно лемме 2.19. \square

Граничное отображение $\partial: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$ легко описать явно. Пусть класс $\alpha \in H_n(X)$ представлен циклом a . С помощью барицентрического подразделения цикл a можно выбрать так, чтобы он был суммой $x + y$ цепей в A и B соответственно. Мы имеем $\partial a = \partial x + \partial y = 0$. Тогда элемент $\partial \alpha \in H_{n-1}(A \cap B)$ представлен циклом $\partial x = -\partial y$.

Имеется также следующая относительная последовательность Майера–Виеториса, доказательство которой остаётся в качестве задачи.

Теорема 2.21. *Пусть дана пара пространств $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$, где $C \subset A$, $D \subset B$, внутренности пространств A и B покрывают X , а внутренности C и D покрывают Y . Тогда имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} \dots$$

2.8. Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий. Пусть на X задана структура полусимплициального комплекса, т. е. заданы отображения $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$, удовлетворяющие свойствам а)–в), см. п. 1.2. Мы определили комплекс симплициальных цепей $\{\Delta_n(X), \partial\}$ и симплициальные гомологии $H_n^\Delta(X)$.

Определим также группы относительных симплициальных гомологий $H_n^\Delta(X, A)$. Пусть $A \subset X$ — полусимплициальный подкомплекс, т. е. полусимплициальный комплекс, образованный объединением некоторых симплексов комплекса X . Тогда группа $H_n^\Delta(X, A)$ определяется как группа гомологий комплекса относительных цепей $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. Как и для сингулярных гомологий, имеет место длинная точная последовательность пары (X, A) для симплициальных гомологий.

Имеется канонический гомоморфизм $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ из симплициальных в сингулярные гомологии, индуцированный цепным отображением $\Delta_n(X, A) \rightarrow C_n(X, A)$, переводящим каждый n -мерный симплекс комплекса X в его характеристическое отображение $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$. При $A = \emptyset$ относительные группы гомологий сводятся к абсолютным: $H_n^\Delta(X, \emptyset) = H_n^\Delta(X)$ и $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$.

Теорема 2.22. *Гомоморфизмы $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ являются изоморфизмами.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда комплекс X конечномерен, а $A = \emptyset$. Пусть X^k — это k -мерный остов комплекса X , состоящий из всех симплексов размерности $\leq k$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^k) & \rightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}). \end{array}$$

Покажем, что первое и четвёртое вертикальные отображения — изоморфизмы. Группа симплициальных цепей $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ нулевая при $n \neq k$ и свободная абелева с базисом из k -мерных симплексов комплекса X при $n = k$. Следовательно, группы симплициальных гомологий $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ имеют точно такое же описание. Для вычисления групп сингулярных гомологий $H_n(X^k, X^{k-1})$ рассмотрим отображение

$$\Phi: \left(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k, \bigsqcup_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k \right) \rightarrow (X^k, X^{k-1}),$$

образованное характеристическими отображениями $\Delta_{\alpha}^k \rightarrow X$ для всех k -мерных симплексов комплекса X . Отображение Φ индуцирует гомеоморфизм

$$\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \bigsqcup_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k \xrightarrow{\cong} X^k / X^{k-1},$$

а значит, оно индуцирует изоморфизмы групп сингулярных гомологий. В левой части стоит букет k -мерных сфер, поэтому группа $H_n(X^k, X^{k-1})$ равна нулю при $n \neq k$ и является свободной абелевой группой с базисом, соответствующим характеристическим отображениям $\Delta_{\alpha}^k \rightarrow X$ всех k -мерных симплексов комплекса X , при $n = k$. Следовательно, отображение $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_n(X^k, X^{k-1})$ является изоморфизмом для всех n .

Применяя индукцию по k , мы можем предположить, что второе и пятое вертикальные отображения в приведённой выше коммутативной диаграмме также изоморфизмы. Тогда и среднее вертикальное отображение — изоморфизм согласно алгебраическому утверждению, известному как *лемма о пяти гомоморфизмах (5-лемма)*, см. задачу 2.41. Итак, утверждение доказано в случае, когда X конечномерен, а $A = \emptyset$.

Рассмотрим теперь случай, когда X — бесконечномерный комплекс. Докажем следующий факт: компактное подмножество K в X может пересекать только конечное число открытых симплексов. (На самом деле это общий факт о клеточных пространствах.) Действительно, предположим, что K пересекает бесконечно много открытых симплексов. Выбирая по одной точке внутри каждого из таких открытых симплексов, получим бесконечный набор точек x_i . Каждое из множеств $U_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$ открыто, так как открыт его прообраз при любом характеристическом отображении $\sigma_{\alpha}: \Delta^n \rightarrow X$. Множества U_i образуют открытое покрытие множества K , из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Противоречие.

Теперь докажем, что $H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$ есть изоморфизм. Сначала докажем сюръективность. Пусть элемент $\gamma \in H_n(X)$ представлен циклом c . Так как c — конечная линейная комбинация сингулярных симплексов, его образ содержится в X^N для некоторого N согласно утверждению из предыдущего абзаца. Так как X^N конечномерен, $H_n^\Delta(X^N) \rightarrow H_n(X^N)$ есть изоморфизм. Следовательно, цикл c гомологичен в X^N (а значит, и в X) симплициальному циклу. Это доказывает сюръективность отображения $H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$. Теперь докажем инъективность. Пусть s — симплициальный цикл, причём $s = \partial d$ для некоторой сингулярной цепи d в X . Цепь d имеет компактный образ, а значит содержится в некотором X^N . Поэтому цикл s представляет элемент из ядра отображения $H_n^\Delta(X^N) \rightarrow H_n(X^N)$. Но это отображение — изоморфизм, а потому s является границей симплициальной цепи в X^N , а значит, и в X .

Осталось рассмотреть случай, когда X произвольно и $A \neq \emptyset$. В этом случае мы применим лемму о пяти гомоморфизмах к каноническому отображению длинных

точных последовательностей симплициальных и сингулярных гомологий:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^\Delta(A) & \rightarrow & H_n^\Delta(X) & \rightarrow & H_n^\Delta(X, A) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(A) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_n(X, A) & \rightarrow & H_{n-1}(A) & \rightarrow & H_{n-1}(X). \end{array} \quad \square$$

Задачи и упражнения.

2.23. Докажите, что разбиение призмы $\Delta^n \times I$ на симплексы, описанное в начале доказательства теоремы 2.6, действительно является симплициальным комплексом.

2.24. Постройте какую-нибудь триангуляцию произведения симплексов $\Delta^n \times \Delta^m$.

2.25. Покажите, что если A — ретракт пространства X , то отображение $H_n(A) \rightarrow H_n(X)$, индуцированное включением $A \hookrightarrow X$, является мономорфизмом.

2.26. Покажите, что цепная гомотопия цепных отображений — отношение эквивалентности.

2.27. Проверьте, что граничное отображение $\partial: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ гомологий цепных комплексов определено корректно и является гомоморфизмом.

2.28. Докажите, что $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ для любых $x_0 \in X$ и $n \geq 0$.

2.29. Выведите точную последовательность пары для приведённых гомологий:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

2.30. Напомним, что *отображением пар* $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ называется отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f(A) \subset B$. Докажите, что отображение пар индуцирует гомоморфизмы $f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$, $n \geq 0$.

2.31. Докажите, что если отображения $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопны в классе отображений пар (т.е. существует такая гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ между f и g , что $F(A \times I) \subset B$), то индуцируемые ими отображения гомологий пар совпадают: $f_* = g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$, $n \geq 0$.

2.32. Докажите следующее свойство *естественности* гомологической последовательности пары: для отображения пар $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

2.33. Определите и докажите точность *гомологической последовательности тройки* для (X, A, B) , где $B \subset A \subset X$:

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X, B) \rightarrow \dots$$

2.34. Докажите, что включение $A \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизмы всех групп гомологий тогда и только тогда, когда $H_n(X, A) = 0$ для всех n .

2.35. Докажите теорему 2.21 (последовательность Майера–Вьеториса для пар).

2.36. Докажите при помощи групп гомологий *общую теорему Брауэра*: непрерывное отображение шара D^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

2.37. Вычислите группы гомологий для дополнения двух зацепленных и двух незацепленных окружностей в \mathbb{R}^3 ; сравните с вычислением фундаментальных групп.

2.38. Вычислите гомологии дополнения трёх координатных осей в \mathbb{R}^3 и \mathbb{C}^3 .

2.39. Докажите, что если диаметр симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ равен d , то диаметры симплексов его барицентрического подразделения не превосходят $\frac{n}{n+1}d$.

2.40. Вычислите гомологии сферы S^n и докажите изоморфизм $\tilde{H}_i(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{i-1}(X)$ при помощи точной последовательности Майера–Виеториса.

2.41. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах*. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

- а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
- б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

2.42. Для отображения $f: S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, индуцированный гомоморфизм $f_*: H_n(S_n) \rightarrow H_n(S_n)$ есть отображение $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}$ умножения на некоторое целое число d . Это число называется *степенью отображения f* и обозначается $\deg f$.

Докажите следующие свойства степени:

- а) $\deg \text{id} = 1$;
- б) $\deg f = 0$, если отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ не сюръективно;
- в) если отображения f и g гомотопны, то $\deg f = \deg g$ (верно и обратное утверждение: если $\deg f = \deg g$, то f и g гомотопны; это вытекает из утверждения $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, известного как *теорема Хопфа*);
- г) $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$;
- д) Если $f: S^n \rightarrow S^n$ — симметрия относительно гиперплоскости, например $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$, то $\deg f = -1$;
- е) Антиподальное отображение $-\text{id}: S^n \rightarrow S^n$, $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$, имеет степень $(-1)^{n+1}$.

2.43. Докажите, что если отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ не имеет неподвижных точек, то $\deg f = (-1)^{n+1}$.

2.44. Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное поле ненулевых касательных векторов тогда и только тогда, когда n нечётно.

2.45. Говорят, что группа G *действует* на пространстве X , если для каждого элемента $g \in G$ задано такое непрерывное отображение $\alpha_g: X \rightarrow X$, что $\alpha_e = \text{id}$ (тождественное отображение) и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $\alpha_g(x) \neq x$.

Докажите, что для чётного n единственной нетривиальной группой, которая может действовать свободно на S^n , является \mathbb{Z}_2 .

2.46. Для любых $n > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ постройте отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ степени k .

3. КЛЕТОЧНЫЕ ГОМОЛОГИИ

Пусть X — клеточное пространство. Будем обозначать n -мерный остов пространства X через X^n .

Клеточные гомологии обобщают симплициальные гомологии. Элементами группы n -мерных клеточных цепей $\mathcal{C}_n(X)$ являются формальные линейные комбинации n -мерных клеток e_α^n пространства X , и имеется более-менее явная формула для описания клеточного граничного отображения $\partial^c: \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X)$.

Перейдём к формальным определениям и конструкциям.

3.1. Клеточный цепной комплекс и его гомологии.

Лемма 3.1. Пусть X — клеточное пространство. Тогда

- а) группа $H_k(X^n, X^{n-1})$ равна нулю при $k \neq n$ и является свободной абелевой группой, порождённой n -мерными клетками пространства X , при $k = n$;
- б) $H_k(X^n) = 0$ при $k > n$; в частности, если пространство X конечномерно, то $H_k(X) = 0$ при $k > \dim X$;
- в) Включение $i: X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*: H_k(X^n) \xrightarrow{\cong} H_k(X)$ при $k < n$.

Доказательство. Так как вложение $X^{n-1} \hookrightarrow X^n$ является корасслоением, мы имеем $H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1})$, а X^n/X^{n-1} — букет сфер, по одной сфере для каждой n -мерной клетки пространства X . Это доказывает утверждение а).

Далее рассмотрим фрагмент точной последовательности пары (X^n, X^{n-1}) :

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Если $k \neq n, n-1$, то обе внешние группы равны нулю согласно утверждению а) и мы получаем $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ при $k \neq n, n-1$. Тогда при $k > n$ имеем

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \dots \cong H_k(X^0) = 0,$$

что доказывает утверждение б). При $k < n$ мы имеем

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong H_k(X^{n+2}) \cong \dots,$$

что доказывает утверждение в), если X конечномерно.

Для бесконечномерного X воспользуемся тем, что компактное подмножество в X пересекает лишь конечное число клеток. Таким образом, каждая сингулярная цепь лежит в некотором конечном остове X^N . Поэтому k -мерный цикл c в X является циклом в некотором X^N , а тогда согласно конечномерному случаю утверждения в) цикл c гомологичен циклу в X^n при $n > k$, а значит, гомоморфизм $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ сюръективен. Аналогично доказывается его инъективность: если k -мерный цикл c в X^n является границей цепи d в X , то d лежит в некотором X^N , $N \geq n$, а потому согласно конечномерному случаю c является границей в X^n при $n > k$. \square

Группа $\mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ называется *группой n -мерных клеточных цепей* клеточного пространства X . Согласно лемме 3.1 а) клеточную цепь можно представлять линейной комбинацией n -мерных клеток.

Определим *клеточный граничный гомоморфизм* $\partial_n^c: \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X)$ как граничный гомоморфизм $H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ в точной последовательности

тройки (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) , т. е. $\partial_n^c = j_{n-1}\partial_n$, см. коммутативную диаграмму ниже. В этой диаграмме наклонные линии — фрагменты длинных последовательностей пар:

(5)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{n+1}) = H_n(X) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^n, X^{n-1}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Из этой же диаграммы следует, что $\partial^c \partial^c = 0$, так как $\partial_n^c \partial_{n+1}^c = j_{n-1} \partial_n j_n \partial_{n+1}$, а $\partial_n j_n = 0$.

Цепной комплекс $\mathcal{C}_\bullet(X) = \{\mathcal{C}_n(X), \partial_n^c\}$ называется *клеточным цепным комплексом*, а его гомологии $\mathcal{H}_n(X)$ — *группами клеточных гомологий* пространства X .

Теорема 3.2. *Имеет место изоморфизм $\mathcal{H}_n(X) \cong H_n(X)$.*

Доказательство. Из диаграммы (5) имеем

$$H_n(X) = H_n(X^n) / \text{Im } \partial_{n+1}, \quad \mathcal{H}_n(X) = \text{Ker } \partial_n^c / \text{Im } \partial_{n+1}^c.$$

Так как j_n — мономорфизм, он отображает $\text{Im } \partial_{n+1}$ изоморфно на $\text{Im}(j_n \partial_{n+1}) = \text{Im } \partial_{n+1}^c$ и отображает $H_n(X^n)$ изоморфно на $\text{Im } j_n = \text{Ker } \partial_n$. Так как j_{n-1} — мономорфизм, $\text{Ker } \partial_n = \text{Ker } \partial_n^c$. Таким образом, j_n индуцирует изоморфизм $H_n(X)$ на $\mathcal{H}_n(X)$. \square

Из изоморфности сингулярных и клеточных гомологий сразу вытекают следующие важные свойства.

Следствие 3.3.

- Если X имеет k клеток размерности n , то группа $H_n(X)$ порождена не более чем k элементами. В частности, если X не имеет клеток размерности n , то $H_n(X) = 0$.
- Если X не имеет пар клеток в соседних размерностях (например, если все клетки в X имеют чётную размерность), то $H_n(X)$ — свободная абелева группа, порождённая n -мерными клетками пространства X .

Пример 3.4. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет по одной клетке в каждой чётной размерности $2k \leq 2n$. Таким образом,

$$H_i(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2. Явный вид граничного гомоморфизма. При $n = 1$ клеточное граничное отображение $\partial^c: \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X)$ представляет собой граничный гомоморфизм

$$\partial: H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0).$$

Если X связно и имеет только одну нульмерную клетку, то этот гомоморфизм должен быть нулевым. Это следует из точной последовательности пары (X^1, X^0) и изоморфизма $H_0(X^1) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Далее мы будем отождествлять клетку $e_\alpha^n \subset X$ с соответствующей образующей группы клеточных цепей $\mathcal{C}_n(X)$.

Теорема 3.5. При $n > 1$ имеет место равенство

$$(6) \quad \partial^c(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения

$$f_{\alpha\beta}: S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1},$$

представляющего собой композицию приклеивающего отображения $\varphi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ клетки e_α^n и отображения факторизации $q_\beta: X^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, стягивающего $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$ в точку.

Доказательство. Прежде всего заметим, что сумма в формуле (6) содержит конечное число членов, так как образ приклеивающего отображения φ_α компактен, а потому пересекает лишь конечное число клеток e_β^{n-1} .

Пусть $\Phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X^n$ — характеристическое отображение клетки e_α^n ; его ограничение на $S_\alpha^{n-1} = \partial D_\alpha^n$ есть приклеивающее отображение $\varphi_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Ясно, что отображение факторизации $q_\beta: X^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$ раскладывается в композицию $X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2} \xrightarrow{\hat{q}_\beta} S_\beta^{n-1}$ для некоторого отображения \hat{q}_β , выделяющего сферу S_β^{n-1} из букета X^{n-1}/X^{n-2} .

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(S_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow{f_{\alpha\beta*}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha*} & & \downarrow \varphi_{\alpha*} & \nearrow q_{\beta*} & \nearrow \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & & \\ & \searrow \partial^c & \downarrow j & \nearrow \hat{q}_{\beta*} & \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & & \end{array}$$

Отображение $\Phi_{\alpha*}$ переводит стандартную образующую $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1})$ в образующую $e_\alpha^n \in H_n(X^n, X^{n-1})$. Из коммутативности левой части диаграммы следует, что $\partial^c(e_\alpha^n) = j\varphi_{\alpha*}\partial[D_\alpha^n]$. В терминах базиса для $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, соответствующего $(n-1)$ -мерным клеткам, отображение $\hat{q}_{\beta*}$ — это проекция группы $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ на слагаемое, соответствующее клетке e_β^{n-1} . Теперь требуемая формула следует из коммутативности правой части диаграммы. \square

Пример 3.6. Пусть S_g — сфера с g ручками, т.е. замкнутая ориентируемая поверхность рода g . Введём на S_g стандартную клеточную структуру с одной нульмерной

клеткой, $2g$ одномерными клетками $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Соответствующий клеточный цепной комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2^c} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\partial_1^c} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Мы имеем $\partial_1^c = 0$, так как S_g имеет всего одну нульмерную клетку. Кроме того, $\partial_2^c = 0$, так как каждое ребро a_i и b_i входит в $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ вместе с его обратным, а значит все отображения $f_{\alpha\beta}: S^1 \rightarrow S^1$ гомотопны отображению в точку. Поэтому группы гомологий поверхности S_g совпадают с группами клеточных цепей, т. е.

$$H_0(S_g) = H_2(S_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_i(S_g) = 0 \text{ при } i > 2.$$

Пример 3.7. Пусть $X = \mathbb{R}P^n$ — вещественное проективное пространство. Оно имеет клеточную структуру с одной клеткой e^k в каждой размерности $k \leq n$. Приклеивающее отображение для клетки e^k — это двулистное накрытие $\varphi: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$. Согласно формуле (6) имеем $\partial^c(e^k) = d_k e^{k-1}$, где d_k — это степень композиции

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}.$$

При ограничении на каждую компоненту связности пространства $S^{k-1} \setminus S^{k-2}$ отображение $q\varphi$ является гомеоморфизмом. Один из этих гомеоморфизмов тождественный, а другой является ограничением антиподального отображения сферы S^{k-1} , которое имеет степень $(-1)^k$. Поэтому $\deg q\varphi = 1 + (-1)^k$, что есть 0 или 2 в зависимости от чётности k . Таким образом, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{R}P^n$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, & \text{ если } n \text{ чётно;} \\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, & \text{ если } n \text{ нечётно.} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = 0 \text{ и при нечётном } k = n, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при нечётном } k, \text{ где } 0 < k < n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.3. Эйлерова характеристика. Эйлерова характеристика конечного клеточного пространства X определяется как

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n c_n,$$

где $c_n = \text{rk } \mathcal{C}_n(X)$ — число n -мерных клеток пространства X (ранг конечно порождённой абелевой группы $\mathcal{C}_n(X)$).

Классическая *теорема Эйлера* утверждает, что для выпуклого трёхмерного многогранника имеет место формула $V - P + G = 2$, где V , P и G — число вершин, рёбер и граней соответственно. Обобщением этого факта является следующий результат, который показывает, что эйлерова характеристика является топологическим (и даже гомотопическим) инвариантом клеточного пространства X . В частности, она не зависит от клеточного разбиения.

Теорема 3.8. Для конечного клеточного пространства X справедливо соотношение

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rk } H_n(X).$$

Доказательство. Это чисто алгебраический факт. Рассмотрим цепной комплекс

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

конечно порождённых абелевых групп. Пусть $Z_n = \text{Ker } \partial_n$ — циклы, $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ — границы, $H_n = Z_n/B_n$ — гомологии. Из коротких точных последовательностей $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0$ получаем соотношения

$$\begin{aligned} \text{rk } C_n &= \text{rk } Z_n + \text{rk } B_{n-1}, \\ \text{rk } Z_n &= \text{rk } B_n + \text{rk } H_n. \end{aligned}$$

Подставим второе соотношение в первое, умножим полученное соотношение на $(-1)^n$ и просуммируем по n . В результате получим

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rk } C_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rk } H_n.$$

Осталось применить это соотношение к случаю $C_n = C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$. \square

Пример 3.9. Эйлерова характеристика замкнутой ориентированной поверхности S_g рода g равна $2 - 2g$. Таким образом, все замкнутые ориентированные поверхности различаются их эйлеровыми характеристиками.

Задачи и упражнения.

3.10. Вычислите гомологии произведения сфер $S^n \times S^n$ при $n \geq 2$, пользуясь клеточным разбиением.

3.11. Пусть N_g — замкнутая неориентируемая поверхность рода g , т.е. сфера с g вклеенными листами Мёбиуса. Вычислите гомологии поверхности N_g , пользуясь клеточной структурой с одной нульмерной клеткой, g одномерными клетками c_1, \dots, c_g и одной двумерной клеткой, приклеенной по слову $c_1^2 c_2^2 \dots c_g^2$.

3.12. Вычислите гомологии пространства X , полученного приклеиванием к $S^1 \vee S^1$ двух двумерных клеток по произвольным словам. В частности, рассмотрите случай приклеивания клеток по словам $a^5 b^{-3}$ и $b^3 (ab)^{-2}$. Что можно сказать о фундаментальной группе такого пространства?

3.13. Вычислите гомологии трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, пользуясь клеточным разбиением.

3.14. Докажите, что для конечных клеточных пространств X, Y имеет место соотношение $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.

3.15. Докажите, что если $X = A \cup B$, где X — клеточное пространство, а A, B — клеточные подпространства в X , то $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

3.16. Докажите, что для n -листного накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ над конечным клеточным пространством X имеет место соотношение $\chi(\tilde{X}) = n\chi(X)$.

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И ГОМОЛОГИИ

Здесь мы докажем утверждение о том, что первая группа гомологий линейно связного пространства совпадает с абелизацией фундаментальной группы (теорема Пуанкаре).

Пусть (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой. Элементами фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ являются классы гомотопных петель $\varphi: I \rightarrow X$, где $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Каждую такую петлю можно рассматривать как сингулярный 1-симплекс, который является циклом, так как $\partial\varphi = \varphi(1) - \varphi(0) = 0$.

Напомним, что абелизацией группы G называется факторгруппа $G/[G, G]$ по нормальной подгруппе $[G, G]$, порождённой всевозможными коммутаторами $ghg^{-1}h^{-1}$ (эта подгруппа называется коммутантом группы G). Например, абелизацией свободной группы F_n является свободная абелева группа \mathbb{Z}^n .

Теорема 4.1 (Пуанкаре). *Рассматривая петли как сингулярные 1-циклы, мы получаем гомоморфизм $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Если X линейно связно, то h является эпиморфизмом, а его ядро — коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$. Таким образом, группа $H_1(X)$ изоморфна абелизации группы $\pi_1(X, x_0)$.*

Доказательство. Мы будем использовать обозначение $\varphi \simeq \psi$ для отношения гомотопии петель и $\varphi \sim \psi$ для отношения гомологии соответствующих 1-циклов (т.е. $\varphi \sim \psi$, если $\varphi - \psi$ является границей 2-мерной цепи).

Сначала проверим, что сопоставление гомотопическому классу петли φ класса гомологий 1-мерного цикла φ задаёт корректно определённое отображение $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$, т.е. проверим, что если $\varphi \simeq \psi$, то $\varphi \sim \psi$. Заметим, что если φ — постоянная петля $I \rightarrow x_0$, то $\varphi \sim 0$. Это следует из того, что $H_1(pt) = 0$. Теперь рассмотрим гомотопию $F: I \times I \rightarrow X$ между петлями φ и ψ . Разбив квадрат $I \times I$ на треугольники $[v_0, v_1, v_3]$ и $[v_0, v_2, v_3]$, как показано слева на рис. 5, мы получим сингулярные 2-симплексы σ_1, σ_2 . Мы имеем

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= \partial[v_0, v_1, v_3] - \partial[v_0, v_2, v_3] = \\ &= [v_1, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_1] - [v_2, v_3] + [v_0, v_3] - [v_0, v_2] \sim [v_0, v_1] - [v_2, v_3] = \varphi - \psi, \end{aligned}$$

так как боковые стороны $[v_0, v_2]$ и $[v_1, v_3]$ отображаются в отмеченную точку, а значит, гомологичны нулю. Следовательно, $\varphi \sim \psi$.

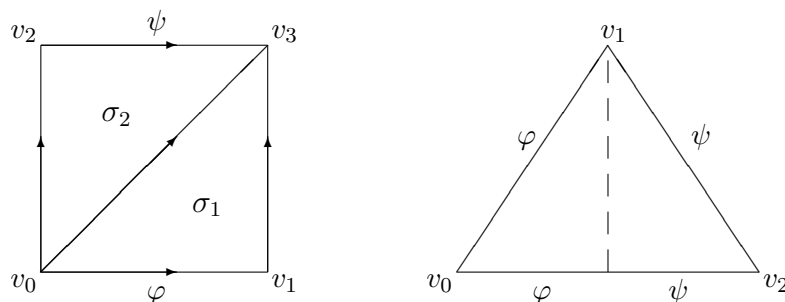


Рис. 5.

Теперь проверим, что $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ — гомоморфизм, т.е. $\varphi \cdot \psi \sim \varphi + \psi$, где $\varphi \cdot \psi$ обозначает произведение петель. Рассмотрим сингулярный 2-симплекс $\sigma: \Delta^2 \rightarrow$

X , задаваемый композицией проекции треугольника $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$ на ребро $[v_0, v_2]$ и отображения $\varphi \cdot \psi: [v_0, v_2] \rightarrow X$, как показано справа на рис. 5. Тогда

$$\partial\sigma = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] = \psi - \varphi \cdot \psi + \varphi,$$

т. е. $\psi - \varphi \cdot \psi + \varphi \sim 0$, что и требовалось.

В предыдущем рассуждении мы не использовали тот факт, что φ и ψ — петли, так что мы имеем $\varphi \cdot \psi \sim \varphi + \psi$ для любых путей φ, ψ , удовлетворяющих условию $\varphi(1) = \psi(0)$. В частности, $\bar{\varphi} \sim -\varphi$ (где $\bar{\varphi}$ — обратный путь для φ), так как $\varphi + \bar{\varphi} \sim \varphi \cdot \bar{\varphi} \sim 0$.

Покажем, что $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ — эпиморфизм, если X линейно связно. Пусть $\sum_i n_i \sigma_i$ — одномерный цикл, представляющий данный элемент группы $H_1(X)$. Перенумеровав симплексы σ_i , можно считать, что $n_i = \pm 1$. Так как $-\sigma_i \sim \bar{\sigma}_i$, мы можем считать, что наш 1-цикл имеет вид $\sum_i \sigma_i$. Если какой-то из путей σ_i не является петлей, то из условия $\partial(\sum_i \sigma_i) = 0$ следует, что в сумме найдётся другой путь σ_j , для которого определено произведение путей $\sigma_i \cdot \sigma_j$. Так как $\sigma_i + \sigma_j \sim \sigma_i \cdot \sigma_j$, мы можем в записи $\sum_i \sigma_i$ заменить $\sigma_i + \sigma_j$ на $\sigma_i \cdot \sigma_j$. Повторяя эту процедуру, мы приходим к случаю, когда каждый путь σ_i является петлей с началом и концом в некоторой точке $x_i \in X$. Так как X линейно связно, существуют пути γ_i из отмеченной точки x_0 в x_i . Так как $\gamma_i \cdot \sigma_i \cdot \bar{\gamma}_i \sim \sigma_i$, мы можем считать, что все σ_i — петли с началом и концом в точке x_0 . Тогда цикл $\sum_i \sigma_i$ гомологичен произведению всех петель σ_i , которое представляет элемент образа гомоморфизма $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$.

Коммутант группы $\pi_1(X)$ лежит в ядре гомоморфизма h , так как группа $H_1(X)$ абелева. Чтобы получить обратное включение, покажем, что если $[\varphi] \in \text{Ker } h$, то петля φ представляет тривиальный элемент в абелизации $\pi_1(X)_{ab}$.

Пусть $[\varphi] \in \text{Ker } h$. Тогда 1-мерный цикл φ является границей 2-мерной цепи $\sum_i n_i \sigma_i$. Как и выше, перенумеровав сингулярные 2-симплексы $\sigma_i: \Delta_i^2 \rightarrow X$, мы можем считать, что $n_i = \pm 1$, а изменив порядок вершин симплекса Δ_i^2 мы можем заменить $-\sigma_i$ на σ_i . В результате получим $\varphi = \partial(\sum_i \sigma_i)$. Сопоставим цепи $\sum_i \sigma_i$ двумерный полусимплициальный комплекс K , который получается склейкой 2-мерных симплексов Δ_i^2 , соответствующих сингулярным симплексам $\sigma_i: \Delta_i^2 \rightarrow X$, следующим образом. Записав $\partial\sigma_i = \tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$ для сингулярных 1-симплексов τ_{ij} , получаем

$$(7) \quad \varphi = \partial\left(\sum_i \sigma_i\right) = \sum_{i,j} (-1)^j \tau_{ij}.$$

Отсюда следует, что мы можем сгруппировать все τ_{ij} , кроме одного, в пары так, что в каждой паре сингулярные 1-симплексы совпадают, а коэффициенты при них равны 1 и -1 . Оставшийся сингулярный 1-симплекс есть φ . Теперь мы отождествим рёбра симплексов Δ_i^2 , соответствующие объединённым в пары симплексам τ_{ij} , с учётом ориентации рёбер. В результате получим полусимплициальный комплекс K , для которого 1-цикл φ будет «границей».

Отображения σ_i согласованы и вместе дают отображение $\sigma: K \rightarrow X$. Отображение σ можно заменить на гомотопное ему отображение σ' , которое переводит все вершины $v \in K$ в отмеченную точку x_0 , причём гомотопию между σ и σ' можно выбрать постоянной на ребре, соответствующем циклу φ . Это вытекает из свойства продолжения гомотопии: выбрав для каждой вершины $v \in K$ путь из $\sigma(v)$ в x_0 , мы тем самым зададим гомотопию на $K^0 \cup \varphi$, а затем продолжим её на весь K . Отображение $\sigma': K \rightarrow X$ задаёт новую 2-цепь $\sum_i \sigma'_i$, граница которой равна φ , причём все её рёбра τ'_{ij} — петли с началом и концом в x_0 .

Так как в правой части соотношения (7) все τ_{ij} , кроме одного, разбиваются на сокращающиеся пары, мы также имеем соотношение $[\varphi] = \prod_{i,j} [\tau'_{ij}]^{(-1)^j}$ в абелизации $\pi_1(X)_{ab}$. Используя аддитивные обозначения, мы получаем

$$[\varphi] = \sum_{i,j} (-1)^j [\tau'_{ij}] = \sum_i [\partial\sigma'_i] = \sum_i ([\tau'_{i0}] - [\tau'_{i1}] + [\tau'_{i2}]).$$

Так как каждый симплекс σ_i задаёт стягивание петли $\tau'_{i0} - \tau'_{i1} + \tau'_{i2}$ (в мультипликативных обозначениях $\tau'_{i0}\bar{\tau}'_{i1}\tau'_{i2}$), мы получаем, что $[\varphi] = 0$ в $\pi_1(X)_{ab}$. \square

Пример 4.2. Напомним, что фундаментальная группа ориентируемой поверхности рода g изоморфна факторгруппе свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

В результате абелизации мы получаем свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^{2g} \cong H_1(S_g)$.

Задачи и упражнения.

4.3. Вычислите первую группу гомологий бутылки Клейна как абелизацию её фундаментальной группы.

5. ГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОГОМОЛОГИИ

5.1. Определения и основные свойства. Напомним, что *тензорное произведение* $G \otimes H$ абелевых групп G и H определяется как факторгруппа свободной абелевой группы с образующими $g \otimes h$, $g \in G$, $h \in H$, по соотношениям $(g+g') \otimes h = g \otimes h + g' \otimes h$ и $g \otimes (h+h') = g \otimes h + g \otimes h'$. Кроме того, определена абелева группа $\text{Hom}(G, H)$, элементами которой являются гомоморфизмы $G \rightarrow H$.

Пусть теперь дана фиксированная абелева группа G . Тогда определены соответственно ковариантный и контравариантный функторы

$$- \otimes G: H \mapsto H \otimes G, \quad \text{Hom}(-, G): H \mapsto \text{Hom}(H, G)$$

из абелевых групп в абелевы группы.

Пусть теперь X — топологическое пространство. Применяя функторы $- \otimes G$ и $\text{Hom}(-, G)$ к группам сингулярных цепей $C_n(X)$, мы получаем группы

$$C_n(X; G) = C_n(X) \otimes G \quad \text{и} \quad C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X), G),$$

которые называются *группами сингулярных цепей с коэффициентами в G* и *группами сингулярных коцепей с коэффициентами в G* соответственно. В более явном виде сингулярная цепь $a \in C_n(X; G)$ представляет собой линейную комбинацию $a = \sum_i k_i \sigma_i$, где $k_i \in G$ и $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$ — сингулярные симплексы. Сингулярная коцепь $c \in C^n(X; G)$ представляет собой функцию на множестве n -мерных сингулярных симплексов пространства X со значениями в группе G . Значение коцепи c на сингулярном симплексе σ обозначается $c(\sigma)$ или $\langle c, \sigma \rangle$.

Применяя $- \otimes G$ и $\text{Hom}(-, G)$ к граничному гомоморфизму $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, мы получаем граничный гомоморфизм $\partial_n: C_n(X; G) \rightarrow C_{n-1}(X; G)$,

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]},$$

где $\sigma: \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ — сингулярный симплекс, и *кограничный гомоморфизм (дифференциал)* $d_{n-1}: C^{n-1}(X; G) \rightarrow C^n(X; G)$, задаваемый формулой

$$(8) \quad (d_{n-1}c)(\sigma) = c(\partial_n \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}).$$

Мы имеем $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ и $d_n d_{n-1} = 0$. Таким образом, мы получаем цепной комплекс

$$\dots \rightarrow C_{n+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; G) \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; G) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

а также *коцепной комплекс*

$$0 \rightarrow C^0(X; G) \xrightarrow{d_0} \dots \rightarrow C^{n-1}(X; G) \xrightarrow{d_{n-1}} C^n(X; G) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(X; G) \rightarrow \dots$$

Группа $H_n(X; G) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ называется *n-й группой сингулярных гомологий пространства X с коэффициентами в G*.

Группа $H^n(X; G) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$ называется *n-й группой сингулярных когомологий пространства X с коэффициентами в G*. Коцепи из $\text{Ker } d_n$ называются *n-мерными коциклами*, а коцепи из $\text{Im } d_{n-1}$ называются *кограницами*.

Ясно, что $H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(X)$. Для когомологий $H^n(X; \mathbb{Z})$ с коэффициентами в \mathbb{Z} используется сокращённое обозначение $H^n(X)$.

При определении приведённых гомологий $\tilde{H}_n(X; G)$ мы рассматривали гомоморфизм аугментации $\varepsilon: C_0(X; G) \rightarrow G$, заданный формулой $\varepsilon(\sum_i k_i \sigma_i) = \sum_i k_i$. Двойственный гомоморфизм $\varepsilon^*: G \rightarrow C^0(X; G)$ переводит $g \in G$ в функцию, принимающую постоянное значение g на всех 0-симплексах. Мы получаем *коаугментированный коцепной комплекс*

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\varepsilon^*} C^0(X; G) \xrightarrow{d_0} C^1(X; G) \xrightarrow{d_1} C^2(X; G) \rightarrow \dots$$

Его когомологии называются *приведёнными группами когомологий* и обозначаются $\tilde{H}^n(X; G)$. Мы имеем $\tilde{H}^0 = \text{Ker } d_0 / \text{Im } \varepsilon^* = H^0 / \text{Im } \varepsilon^*$ и $\tilde{H}^n = H^n$, $n \geq 1$.

Свойства групп гомологий с коэффициентами полностью аналогичны свойствам обычных групп гомологий (с коэффициентами в \mathbb{Z}). Свойства групп когомологий получаются «формальным обращением стрелок». Приведём формулировки утверждений, в которых имеются некоторые отличия; для простоты будем рассматривать когомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

Теорема 5.1. *Непрерывное отображение пространств $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизмы групп когомологий $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$.*

Если отображения $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопны, то $f^ = g^*$.*

Для пары (X, A) группа *относительных коцепей* $C^n(X, A)$ определяется как подгруппа в $C^n(X)$, состоящая из коцепей, обращающихся в нуль на сингулярных симплексах, образы которых лежат в A . (Напомним, что относительные цепи $C_n(X, A)$ определялись как *факторгруппа* $C_n(X)/C_n(A)$.) Так как d_n переводит $C^n(X, A)$ в $C^{n+1}(X, A)$, группы $C^n(X, A)$ образуют коцепной комплекс, когомологии которого — *относительные когомологии* $H^n(X, A)$.

Теорема 5.2. *Для пары (X, A) имеет место точная последовательность*

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A) \xrightarrow{d} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \rightarrow \dots$$

Если вложение $i: A \hookrightarrow X$ является корасслоением (например, если (X, A) — клеточная пара), то $H^n(X, A) \cong \tilde{H}^n(X/A)$.

Кограничный (или *связывающий*) гомоморфизм $d: H^{n-1}(A) \rightarrow H^n(X, A)$ в точной последовательности пары определяется следующим образом. Пусть класс $[c] \in H^{n-1}(A)$ представлен коциклом $c \in C^{n-1}(A)$. Продолжим c до коцепи $\bar{c} \in C^{n-1}(X)$, положив функцию \bar{c} равной нулю на сингулярных симплексах, которые не лежат в A . Коцепь $d_{n-1}\bar{c} \in C^n(X)$ на самом деле является коциклом в $C^n(X, A)$, так как $d_{n-1}c = 0$. Тогда $d[c] = [d_{n-1}\bar{c}] \in H^n(X, A)$.

Теорема 5.3. Пусть (X_α, x_α) — набор пространств с отмеченными точками, для которых вложения $x_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ являются корасслоениями. Тогда

$$\tilde{H}^n\left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}\right) \cong \prod_{\alpha} \tilde{H}^n(X_{\alpha}), \quad n \geq 0.$$

Как и в случае гомологий, это вытекает из точной последовательности пары $(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \bigsqcup_{\alpha} \{x_{\alpha}\})$. Отличие (которое проявляется только для бесконечных наборов пространств) в том, что $H_n(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}) = \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$ — прямая сумма, а $H^n(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}) = \prod_{\alpha} H^n(X_{\alpha})$ — прямое произведение. Это вытекает из алгебраического факта: $\text{Hom}(\bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}, H) \cong \prod_{\alpha} \text{Hom}(G_{\alpha}, H)$.

Для клеточного пространства X можно определить группу *клеточных коцепей* $\mathcal{C}^n(X; G)$ либо как $H^n(X^n, X^{n-1}; G)$, либо как $\text{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G)$, где $\mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ — группа клеточных цепей. Эти два подхода эквивалентны (задача). Когомологии $\mathcal{H}^n(X; G)$ получаемого коцепного комплекса называются *клеточными когомологиями* пространства X с коэффициентами в G . Тогда $\mathcal{H}^n(X; G) \cong H^n(X; G)$.

Клеточную коцепь $c \in \mathcal{C}^{n-1}(X; G)$ можно представлять себе как такую функцию на $(n-1)$ -мерных ориентированных клетках $e_{\beta}^{n-1} \in X$ со значениями в G , что замена ориентации клетки приводит к изменению знака значения функции. Тогда кограничное отображение $d: \mathcal{C}^{n-1}(X; G) \rightarrow \mathcal{C}^n(X; G)$ задаётся формулой

$$dc(e_{\alpha}^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} c(e_{\beta}^{n-1}),$$

где определение чисел $d_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ дано в теореме 3.5.

Пример 5.4. Напомним (см. пример 3.7), что клеточный цепной комплекс для $\mathbb{R}P^n$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, & \text{ если } n \text{ чётно;} \\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, & \text{ если } n \text{ нечётно.} \end{aligned}$$

После применения функторов $- \otimes \mathbb{Z}_2$ и $\text{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ все гомоморфизмы в получаемом комплексе становятся нулевыми. Поэтому $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ при $0 \leq k \leq n$. Однако группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ отличаются от групп гомологий $H_k(\mathbb{R}P^n)$ (задача).

5.2. Коэффициентные точные последовательности. Рассмотрим короткую точную последовательность абелевых групп

$$(9) \quad 0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Применяя к ней функторы $C_n(X) \otimes -$, получаем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X; F) \longrightarrow C_\bullet(X; G) \longrightarrow C_\bullet(X; H) \longrightarrow 0$$

(применение функтора $G \otimes -$ не обязательно сохраняет точные последовательности, см. следующий пункт, однако в нашем случае это верно, так как группа $C_n(X)$ свободна). Короткая точная последовательность цепных комплексов приводит к длинной точной последовательности гомологий (см. теорему 2.9)

$$(10) \quad \dots \longrightarrow H_n(X; F) \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow H_n(X; H) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X; F) \longrightarrow \dots$$

Аналогично, применяя к (9) функторы $\text{Hom}(C_n(X), -)$, получаем короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow C^\bullet(X; F) \longrightarrow C^\bullet(X; G) \longrightarrow C^\bullet(X; H) \longrightarrow 0$$

и длинную точную последовательность когомологий

$$(11) \quad \dots \longrightarrow H^n(X; F) \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow H^n(X; H) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X; F) \longrightarrow \dots$$

Последовательности (10) и (11) называются *коэффициентными точными последовательностями*.

Особый интерес представляют короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{m^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0.$$

Граничные гомоморфизмы $\tilde{b}: H_n(X; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H_{n-1}(X)$ и $b: H_n(X; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H_{n-1}(X; \mathbb{Z}_m)$ из соответствующих коэффициентных точных последовательностей, а также кограничные гомоморфизмы $\tilde{\beta}: H^n(X; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathbb{Z})$ и $\beta: H^n(X; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_m)$ называются *гомоморфизмами Бокштейна*.

Гомологический гомоморфизм Бокштейна $\tilde{b}: H_n(X; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$ описывается в явном виде следующим образом. Для $\alpha \in H_n(X; \mathbb{Z}_m)$ выберем представителя $a \in C_n(X; \mathbb{Z}_m)$. «Поднимем» цепь $a \in C_n(X; \mathbb{Z}_m)$ до цепи $\tilde{a} \in C_n(X; \mathbb{Z})$, рассматривая коэффициенты-вычеты по модулю m как целые числа. Тогда граница $\partial \tilde{a}$ делится на m (её приведение по модулю m есть $\partial a = 0$). Поделим: $\frac{1}{m} \partial \tilde{a}$ есть целочисленный цикл, который и представляет класс $\tilde{b}(\alpha) \in H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$. Его приведение по модулю m есть $b(\alpha) \in H_{n-1}(X; \mathbb{Z}_m)$.

Когомологический гомоморфизм Бокштейна $\tilde{\beta}: H^n(X; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathbb{Z})$ описывается так. Для $\gamma \in H^n(X; \mathbb{Z}_m)$ выберем представителя $c \in C^n(X; \mathbb{Z}_m)$. «Поднимем» коцепь $c \in C^n(X; \mathbb{Z}_m)$ до коцепи $\tilde{c} \in C^n(X; \mathbb{Z})$, считая её значения целыми числами, а не вычетами. Тогда кограница $d\tilde{c}$ делится на m и мы имеем $\tilde{\beta}(\gamma) = [\frac{1}{m} d\tilde{c}] \in H^{n+1}(X; \mathbb{Z})$. Кроме того, приведение класса $[\frac{1}{m} d\tilde{c}]$ по модулю m есть $\beta(\gamma) \in H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_m)$. Это выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^n(X; \mathbb{Z}_m) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & H^{n+1}(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{m} & H^{n+1}(X; \mathbb{Z}) \\ & & & \searrow \beta & \downarrow \rho & & \\ & & & & H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_m), & & \end{array}$$

где ρ — приведение по модулю m .

5.3. **Функторы Tor и Ext.** Мы определим Tor и Ext для модулей над произвольным коммутативным кольцом R с единицей, так как это более естественный контекст, хотя для наших целей достаточно ограничиться абелевыми группами (т. е. \mathbb{Z} -модулями).

Напомним, что *модулем* над кольцом R (или *R -модулем*) называется абелева группа M с операцией $\cdot : R \times M \rightarrow M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$, которая удовлетворяет условиям $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$, $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$ и $1 \cdot m = m$ для любых $r_i \in R$ и $m_i \in M$. Примерами являются абелевы группы (модули над \mathbb{Z}) и векторные пространства (модули над полем).

R -модуль F называется *свободным*, если он изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{\alpha} R_{\alpha}$, где каждый R_{α} есть кольцо R , рассматриваемое как R -модуль.

Тензорным произведением модулей M и N над R (обозначение: $M \otimes_R N$) называется фактормодуль свободного модуля с множеством образующих $\{(m, n) \in M \times N\}$ по подмодулю, порождённому всевозможными элементами вида

$$\begin{aligned} (m + m', n) - (m, n) - (m', n), & \quad (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), \\ (rm, n) - r(m, n), & \quad (m, rn) - r(m, n), \end{aligned}$$

где $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$. Гомоморфизмы R -модулей $M \rightarrow N$ образуют R -модуль, который обозначается $\text{Hom}_R(M, N)$.

Свободной резольвентой R -модуля M называется точная последовательность модулей

$$(12) \quad \dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

в которой все модули F_i свободны.

Пусть N — другой R -модуль. После применения функтора $-\otimes_R N$ к свободной резольвенте (12) получаемая последовательность может не быть точной, но является цепным комплексом. Исключив из этого комплекса член $M \otimes_R N$, получим цепной комплекс

$$\dots \longrightarrow F_2 \otimes_R N \longrightarrow F_1 \otimes_R N \longrightarrow F_0 \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

Его n -я группа гомологий обозначается $\text{Tor}_n^R(M, N)$, т. е.

$$\text{Tor}_n^R(M, N) = \frac{\text{Ker}(F_n \otimes_R N \rightarrow F_{n-1} \otimes_R N)}{\text{Im}(F_{n+1} \otimes_R N \rightarrow F_n \otimes_R N)}.$$

Аналогично, применив функтор $\text{Hom}_R(-, N)$ к (12) и исключив член $\text{Hom}_R(M, N)$, получим коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(F_0, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(F_1, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(F_2, N) \longrightarrow \dots$$

Его n -я группа когомологий обозначается $\text{Ext}_R^n(M, N)$, т. е.

$$\text{Ext}_R^n(M, N) = \frac{\text{Ker}(\text{Hom}_R(F_n, N) \rightarrow \text{Hom}_R(F_{n+1}, N))}{\text{Im}(\text{Hom}_R(F_{n-1}, N) \rightarrow \text{Hom}_R(F_n, N))}.$$

Вот основные свойства функторов Tor и Ext.

Теорема 5.5.

- а) Модули $\text{Tor}_n^R(M, N)$ и $\text{Ext}_R^n(M, N)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты (12).
- б) $\text{Tor}_n^R(-, N)$, $\text{Tor}_n^R(M, -)$ и $\text{Ext}_R^n(M, -)$ являются ковариантными функторами, а $\text{Ext}_R^n(-, N)$ является контравариантным функтором.
- в) $\text{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ и $\text{Ext}_R^0(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)$.

$$\text{г) } \text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_n^R(N, M).$$

Доказательство. Мы лишь приведём основные идеи доказательства, оставляя детали в качестве задач. Свойства а) и б) доказываются при помощи следующего утверждения. Пусть F_\bullet — свободная резольвента модуля M , F'_\bullet — свободная резольвента модуля M' . Тогда любой гомоморфизм R -модулей $f: M \rightarrow M'$ продолжается до цепного отображения $f_\bullet: F_\bullet \rightarrow F'_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & f_2 & & f_1 & & f_0 & & f & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F'_2 & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

причём любые два таких продолжения цепно гомотопны. Это утверждение проверяется диаграммным поиском.

Для доказательства г) рассмотрим свободную резольвенту F_\bullet модуля M и свободную резольвенту G_\bullet модуля N . Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F_2 \otimes_R G_2 & \longrightarrow & F_2 \otimes_R G_1 & \longrightarrow & F_2 \otimes_R G_0 & \longrightarrow & F_2 \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F_1 \otimes_R G_2 & \longrightarrow & F_1 \otimes_R G_1 & \longrightarrow & F_1 \otimes_R G_0 & \longrightarrow & F_1 \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F_0 \otimes_R G_2 & \longrightarrow & F_0 \otimes_R G_1 & \longrightarrow & F_0 \otimes_R G_0 & \longrightarrow & F_0 \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & M \otimes_R G_2 & \longrightarrow & M \otimes_R G_1 & \longrightarrow & M \otimes_R G_0 & \longrightarrow & M \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Гомологии самого правого ненулевого столбца — это $\text{Tor}_R^\bullet(M, N)$, а гомологии самой нижней ненулевой строки изоморфны $\text{Tor}_R^\bullet(N, M)$. Можно доказать, что гомологии каждого из этих цепных комплексов изоморфны гомологиям комплекса, составленного из модулей $H_n = \bigoplus_{p+q=n} F_p \otimes_R G_q$. \square

5.4. Формулы универсальных коэффициентов. Модули над кольцом $R = \mathbb{Z}$ — это абелевы группы. Свободную резольвенту абелевой группы G можно построить следующим образом. Возьмём в качестве F_0 свободную абелеву группу с базисом, элементы которого соответствуют любому набору образующих группы G . Мы имеем эпиморфизм $F_0 \rightarrow G$, ядро которого мы обозначим через F_1 . Тогда F_1 также свободная абелева группа (подгруппа свободной абелевой группы свободна, но подмодуль свободного R -модуля, вообще говоря, может не быть свободным). В результате мы получаем «короткую» свободную резольвенту группы G :

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Таким образом, нетривиальными Тор-модулями при $R = \mathbb{Z}$ являются лишь $\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(G, H) = G \otimes H$ и $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, H)$, который обозначается $\text{Tor}(G, H)$. Мы имеем

$$(13) \quad \text{Tor}(G, H) = \text{Ker}(F_1 \otimes H \rightarrow F_0 \otimes H).$$

Аналогично нетривиальными Ext-модулями при $R = \mathbb{Z}$ являются лишь $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(G, H) = \text{Hom}(G, H)$ и $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, H)$, который обозначается $\text{Ext}(G, H)$. Мы имеем

$$(14) \quad \text{Ext}(G, H) = \text{Coker}(\text{Hom}(F_0, H) \rightarrow \text{Hom}(F_1, H)).$$

Короткая точная последовательность R -модулей $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ называется *расщепимой*, если выполнено одно из эквивалентных условий:

- 1) существует гомоморфизм $s: C \rightarrow B$, для которого $js = \text{id}: C \rightarrow C$;
- 2) существует гомоморфизм $q: B \rightarrow A$, для которого $qi = \text{id}: A \rightarrow A$.

Для расщепимой короткой последовательности имеем изоморфизм $A \oplus C \xrightarrow{\cong} B$, $(a, c) \mapsto i(a) + s(c)$.

Теорема 5.6 (формулы универсальных коэффициентов). *Для любой абелевой группы G и любого $n \geq 0$ существуют естественные по X расщепимые короткие точные последовательности*

- а) $0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X); G) \rightarrow 0$,
- б) $0 \rightarrow H^n(X) \otimes G \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H^{n+1}(X); G) \rightarrow 0$,
если G конечно порождена,
- в) $0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G) \rightarrow 0$.

Замечание. Эти расщепимые точные последовательности дают изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_n(X; G) &\cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X), G), \\ H^n(X; G) &\cong (H^n(X) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H^{n+1}(X), G) \quad (\text{группа } G \text{ конечно порождена}), \\ H^n(X; G) &\cong \text{Hom}(H_n(X), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X), G), \end{aligned}$$

которые, однако, не являются естественными по X .

Доказательство теоремы 5.6. Первые две точные последовательности легко вытекают из коэффициентных точных последовательностей (10) и (11). Выведем точную последовательность а). Рассмотрим короткую точную последовательность (резольвенту) $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow G \rightarrow 0$, где F_0, F_1 — свободные абелевы группы. Тогда мы имеем

$$H_n(X; F_i) = H_n(X; \oplus_{\alpha} \mathbb{Z}) = \oplus_{\alpha} H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(X) \otimes F_i,$$

где второе равенство следует из равенства групп коцепей $C_n(X; \oplus_{\alpha} \mathbb{Z}) = C_n(X) \otimes (\oplus_{\alpha} \mathbb{Z}) = \oplus_{\alpha} C_n(X)$. Рассмотрим фрагмент точной последовательности (10):

$$\longrightarrow H_n(X; F_1) \xrightarrow{f_n} H_n(X; F_0) \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow H_{n-1}(X; F_1) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(X; F_0) \longrightarrow .$$

Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Coker } f_n \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow \text{Ker } f_{n-1} \longrightarrow 0,$$

где

$$\begin{aligned}\text{Coker } f_n &= \text{Coker}(H_n(X) \otimes F_1 \rightarrow H_n(X) \otimes F_0) = H_n(X) \otimes G, \\ \text{Ker } f_{n-1} &= \text{Ker}(H_{n-1}(X) \otimes F_1 \rightarrow H_{n-1}(X) \otimes F_0) = \text{Tor}(H_{n-1}(X), G),\end{aligned}$$

см. (13). Подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем а).

Чтобы получить последовательность б), рассмотрим резольвенту $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow G \rightarrow 0$, где F_0, F_1 — конечно порождённые свободные абелевы группы. Тогда

$$H^n(X; F_i) = H^n(X; \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha H^n(X; \mathbb{Z}) = H^n(X) \otimes F_i,$$

где второе равенство следует из равенства $C^n(X; \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_n(X), \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha \text{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha C^n(X; \mathbb{Z})$ для конечной прямой суммы $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$. Далее используем точную последовательность (11) аналогично доказательству а).

Однако этот метод не работает для точной последовательности в). Мы приведём другой способ доказательства, который вместо резольвенты группы G использует резольвенту группы $H_n(X)$.

Пусть $C_n = C_n(X)$, $Z_n = \text{Ker } \partial_n$ — циклы, $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ — границы, $H_n = Z_n/B_n$ — гомологии. Мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0,$$

которая расщепляется, так как в ней все абелевы группы свободны. Применив $\text{Hom}(-, G)$, получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(B_{n-1}, G) \longrightarrow \text{Hom}(C_n, G) \longrightarrow \text{Hom}(Z_n, G) \longrightarrow 0.$$

Эту последовательность можно рассматривать как короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(B_{\bullet-1}, G) \longrightarrow \text{Hom}(C_\bullet, G) \longrightarrow \text{Hom}(Z_\bullet, G) \longrightarrow 0,$$

где $\text{Hom}(B_{\bullet-1}, G)$ и $\text{Hom}(Z_\bullet, G)$ — комплексы с нулевым дифференциалом. Соответствующая длинная точная последовательность когомологий имеет вид

$$\rightarrow \text{Hom}(Z_{n-1}, G) \xrightarrow{i_{n-1}^*} \text{Hom}(B_{n-1}, G) \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(Z_n, G) \xrightarrow{i_n^*} \text{Hom}(B_n, G) \rightarrow$$

Связывающим гомоморфизмом здесь является $i_n^*: \text{Hom}(Z_n, G) \rightarrow \text{Hom}(B_n, G)$; он представляет собой просто ограничение гомоморфизмов $Z_n \rightarrow G$ на $B_n \subset Z_n$. Из этой последовательности мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Coker } i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow \text{Ker } i_n^* \longrightarrow 0.$$

Теперь заметим, что $0 \rightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0$ — резольвента группы H_n , поэтому

$$\text{Ker } i_n^* = \text{Ker}(\text{Hom}(Z_n, G) \rightarrow \text{Hom}(B_n, G)) = \text{Hom}(H_n, G),$$

$$\text{Coker } i_{n-1}^* = \text{Coker}(\text{Hom}(Z_{n-1}, G) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}, G)) = \text{Ext}(H_{n-1}, G),$$

см. (14). Подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем в).

Докажем расщепимость точной последовательности в). В ней гомоморфизм $h: H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G)$ сопоставляет классу когомологий $[c]$ коцикла $c: C_n \rightarrow G$ гомоморфизм $H_n = Z_n/B_n \rightarrow G$, задаваемый ограничением c на группу циклов Z_n с последующим переходом к факторгруппе. Для h существует правый обратный $s: \text{Hom}(H_n(X), G) \rightarrow H^n(X; G)$, который строится следующим образом.

Гомоморфизм $f: H_n \rightarrow G$ задаёт гомоморфизм $\tilde{f}: Z_n \rightarrow G$, который можно продолжить до гомоморфизма $\tilde{f}': C_n \rightarrow G$ (так как $Z_n \subset C_n$ — прямое слагаемое). Тогда положим $s(f) = [\tilde{f}']$. Очевидно, что $hs = \text{id}$, так что точная последовательность в) расщепима.

Для доказательства расщепимости точной последовательности а) рассмотрим расщепляющие гомоморфизмы $C_n \rightarrow Z_n$ для точных последовательностей $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$. Взяв композицию с факторотображениями $Z_n \rightarrow H_n$, получим гомоморфизмы $C_n \rightarrow H_n$. Вместе они образуют цепное отображение $C_\bullet \rightarrow H_\bullet$, где справа стоит комплекс с нулевым граничным отображением. Тензорно умножив на G , получим цепное отображение $C_\bullet \otimes G \rightarrow H_\bullet \otimes G$. Перейдя к гомологиям, получим расщепляющий гомоморфизм $q: H_n(X; G) \rightarrow H_n(X) \otimes G$ для точной последовательности а). Доказательство для последовательности б) аналогично. \square

Задачи и упражнения.

5.7. Докажите, что группа $H^1(X)$ не содержит кручения.

5.8. Пусть $A, B \subset X$ — подпространства, внутренности которых покрывают X . Выведите когомологическую точную последовательность Майера–Виеториса:

$$\dots \rightarrow H^n(X) \xrightarrow{\psi^*} H^n(A) \oplus H^n(B) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(A \cap B) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

и опишите явно кограничное отображение $d: H^n(A \cap B) \rightarrow H^{n+1}(X)$.

5.9. Определим $d^n: H^n(X^n, X^{n-1}; G) \rightarrow H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ как композицию отображений $j^*: H^n(X^n, X^{n-1}; G) \rightarrow H^n(X^n; G)$ и $d: H^n(X^n; G) \rightarrow H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ из когомологических точных последовательностей пар. Докажите, что коцепные комплексы $\{H^n(X^n, X^{n-1}; G), d^n\}$ и $\{\text{Hom}(C_n(X), G), \partial_n^*\}$ изоморфны.

5.10. Вычислите группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ и $H^k(\mathbb{R}P^\infty)$.

5.11. Опишите гомоморфизм Бокштейна $\beta: H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$.

5.12. Докажите, что модули $\text{Tor}_n^R(M, N)$ и $\text{Ext}_R^n(M, N)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты модуля M .

5.13. Докажите, что $\text{Tor}_n^R(-, N)$, $\text{Tor}_n^R(M, _)$ и $\text{Ext}_R^n(M, _)$ являются ковариантным функторами, а $\text{Ext}_R^n(-, N)$ является контравариантным функтором.

5.14. Докажите, что $\text{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ и $\text{Ext}_R^0(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)$.

5.15. Докажите, что $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_n^R(N, M)$.

5.16. Докажите, что короткая точная последовательность R -модулей

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

даёт следующие длинные точные последовательности:

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \text{Tor}_i^R(M_1, N) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M_2, N) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M_3, N) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \text{Tor}_1^R(M_1, N) \rightarrow \text{Tor}_1^R(M_2, N) \rightarrow \text{Tor}_1^R(M_3, N) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Tor}_0^R(M_1, N) \rightarrow \text{Tor}_0^R(M_2, N) \rightarrow \text{Tor}_0^R(M_3, N) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ext}_R^0(M_3, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M_2, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M_1, N) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}_R^1(M_3, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M_2, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M_1, N) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \text{Ext}_R^i(M_3, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M_2, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M_1, N) \longrightarrow \dots, \end{aligned}$$

а короткая точная последовательность R -модулей

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$$

даёт длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ext}_R^0(M, N_1) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M, N_2) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M, N_3) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}_R^1(M, N_1) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M, N_2) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M, N_3) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, N_1) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, N_2) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, N_3) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

5.17. Докажите, что $\text{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, где (m, n) — наибольший общий делитель m и n , а $\text{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) = 0$.

5.18. Докажите, что $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m$ и $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) = 0$.

5.19. Постройте свободную резольвенту \mathbb{Z}_4 -модуля \mathbb{Z}_2 и вычислите $\text{Tor}_{\mathbb{Z}_4}^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ и $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_4}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.

5.20. Докажите, что если отображение пространств $f: X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм $f_*: H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(Y)$ для любого n , то оно индуцирует изоморфизмы гомологий и когомологий с коэффициентами в любой группе G . [Указание: используйте формулы универсальных коэффициентов.]

6. КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ

Для любого коммутативного кольца R с единицей мы определим отображения

$$\smile: H^p(X; R) \times H^q(X; R) \longrightarrow H^{p+q}(X; R),$$

которые превращают прямую сумму $H^*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$ в ассоциативное, градуированно-коммутативное кольцо (R -алгебру) с единицей. Наряду с группами (ко)гомологий, структура этого кольца является важным гомотопическим инвариантом топологического пространства X .

6.1. Произведение Колмогорова–Александера. Определим \smile -произведение (также известное как *произведение Колмогорова–Александера*) сингулярных коцепей $a \in C^p(X; R)$ и $b \in C^q(X; R)$ как коцепь $a \smile b \in C^{p+q}(X; R)$, значение которой на сингулярном симплексе $\sigma: \Delta^{p+q} = [v_0, \dots, v_{p+q}] \rightarrow X$ задаётся формулой

$$(15) \quad (a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) b(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}).$$

Лемма 6.1. Для $a \in C^p(X; R)$ и $b \in C^q(X; R)$ выполнено равенство

$$d(a \smile b) = da \smile b + (-1)^p a \smile db,$$

где $d: C^*(X; R) \rightarrow C^{*+1}(X; R)$ — кограничный гомоморфизм (8).

Доказательство. Для $\sigma: \Delta^{p+q+1} = [v_0, \dots, v_{p+q+1}] \rightarrow X$ мы имеем

$$(da \smile b)(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+1}]}) b(\sigma|_{[v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1}]}),$$

$$(-1)^p (a \smile db)(\sigma) = \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) b(\sigma|_{[v_p, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+q}]}).$$

При сложении этих выражений последний член первой суммы сократится с первым членом второй суммы, а оставшиеся члены дадут $d(a \smile b)(\sigma) = (a \smile b)(\partial\sigma)$, так как

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+q+1}]}. \quad \square$$

Напомним, что *градуированное кольцо* — это кольцо A , представленное в виде прямой суммы $\bigoplus_{i \geq 0} A^i$ подгрупп A^i таким образом, что если $a \in A^i$ и $b \in A^j$, то $ab \in A^{i+j}$. Если все A^i являются модулями над коммутативным кольцом R с единицей и умножение в кольце A является R -билинейным, то A называется градуированной *алгеброй* над кольцом R (или кратко *R -алгеброй*). Градуированное кольцо (или алгебра) $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ называется *градуированно коммутативным*, если для любых $a \in A^i$ и $b \in A^j$ выполнено соотношение $ab = (-1)^{ij}ba$.

Теорема 6.2. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Тогда \smile -произведение коцепей задаёт на $H^*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$ структуру градуированной, ассоциативной, градуированно-коммутативной алгебры с единицей над R .

Доказательство. Из леммы 6.1 следует, что \smile -произведение двух коциклов снова является коциклом, а произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) является кограницей. Поэтому \smile -произведение коцепей задаёт \smile -произведение в когомологиях $\smile: H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$, которое превращает $H^*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$ в градуированное кольцо (R -алгебру). Единицей этого кольца является класс 0-мерного коцикла, принимающего значение 1 на каждом сингулярном 0-симплексе. Умножение в когомологиях ассоциативно, так как оно ассоциативно на уровне коцепей. Однако умножение коцепей не является градуированно коммутативным, поэтому градуированная коммутативность умножения в когомологиях нуждается в дополнительной проверке.

Пусть $\omega: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ — аффинный автоморфизм симплекса, обращающий порядок вершин. Для сингулярного симплекса $\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ обозначим $\bar{\sigma} = \sigma \circ \omega$, т. е. $\bar{\sigma}(v_i) = \sigma(v_{n-i})$. Теперь определим гомоморфизм

$$\rho: C_n(X) \rightarrow C_n(X), \quad \sigma \mapsto \varepsilon_n \bar{\sigma},$$

где $\varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ — определитель оператора ω .

Для $a \in C^p(X; R)$, $b \in C^q(X; R)$ и $\rho^*: C^n(X) \rightarrow C^n(X)$ имеем

$$(\rho^* a \smile \rho^* b)(\sigma) = a(\varepsilon_p \sigma|_{[v_p, \dots, v_0]}) b(\varepsilon_q \sigma|_{[v_{p+q}, \dots, v_p]}),$$

$$\rho^*(b \smile a)(\sigma) = \varepsilon_{p+q} b(\sigma|_{[v_{p+q}, \dots, v_p]}) a(\sigma|_{[v_p, \dots, v_0]}).$$

Так как $\varepsilon_{p+q} = (-1)^{pq} \varepsilon_p \varepsilon_q$, а кольцо R коммутативно, отсюда получаем $(\rho^* a \smile \rho^* b) = (-1)^{pq} \rho^*(b \smile a)$. Ниже мы покажем, что ρ — цепное отображение, цепно гомотопное

тождественному. Поэтому при переходе к классам когомологий ρ^* можно опустить и мы получаем требуемую формулу $[a] \smile [b] = (-1)^{pq}[b] \smile [a]$.

Проверим, что ρ — цепное отображение. Для $\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ имеем

$$\begin{aligned} \partial\rho(\sigma) &= \varepsilon_n \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_n, \dots, \widehat{v}_{n-i}, \dots, v_0]}, \\ \rho\partial(\sigma) &= \rho\left(\sum_j (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]}\right) = \varepsilon_{n-1} \sum_i (-1)^{n-i} \sigma|_{[v_n, \dots, \widehat{v}_{n-i}, \dots, v_0]}. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_n = (-1)^n \varepsilon_{n-1}$, получаем требуемое соотношение $\partial\rho = \rho\partial$.

Осталось построить цепную гомотопию между ρ и id . Это построение похоже на построение цепной гомотопии в доказательстве теоремы 2.6. Там же была построена триангуляция призмы $\Delta^n \times I$ с вершинами v_0, \dots, v_n на основании $\Delta^n \times \{0\}$ и вершинами w_0, \dots, w_n на основании $\Delta^n \times \{1\}$. Симплексы этой триангуляции имеют вид $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$, $i = 0, \dots, n$. Пусть $\pi: \Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ — проекция. Определим призмный оператор $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ по формуле

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varepsilon_{n-i} (\sigma\pi)|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]}.$$

Чтобы показать, что $\partial P + P\partial = \rho - \text{id}$, сначала вычислим ∂P , опустив для краткости σ и $\sigma\pi$:

$$(16) \quad \begin{aligned} \partial P &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i] + \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{i+1+n-j} \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_i]. \end{aligned}$$

Члены с $j = i$ в этих двух суммах дают

$$\begin{aligned} \varepsilon_n [w_n, \dots, w_0] + \sum_{i > 0} \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, v_{i-1}, w_n, \dots, w_i] + \\ + \sum_{j < n} (-1)^{n+j+1} \varepsilon_{n-j} [v_0, \dots, v_j, w_n, \dots, w_{j+1}] - [v_0, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

В этом выражении две суммы сокращаются, так как замена j на $i - 1$ во второй сумме приводит к новому знаку $(-1)^{n+i} \varepsilon_{n-i+1} = -\varepsilon_{n-i}$. Оставшиеся два члена дают $\varepsilon_n [w_n, \dots, w_0] - [v_0, \dots, v_n] = \rho(\sigma) - \sigma$. Поэтому, чтобы показать, что $\partial P + P\partial = \rho - \text{id}$, остаётся проверить, что члены с $j \neq i$ в (16) дают $-P\partial$. Мы имеем

$$\begin{aligned} P\partial &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i-1} [v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_i] + \\ &\quad + \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_{n-i} = (-1)^{n-i} \varepsilon_{n-i-1}$, мы действительно получаем $\partial P + P\partial = \rho - \text{id}$. \square

Предложение 6.3. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм колец когомологий $f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$, т. е. $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.*

Доказательство. Из определения произведения (15) следует, что уже на уровне цепей имеет место формула $f^*(a \smile b) = f^*(a) \smile f^*(b)$. \square

6.2. Относительные произведения и \times -произведение. Формула

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) b(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]})$$

для $a \in C^p(X; R)$ и $b \in C^q(X; R)$ также задаёт относительные \smile -произведения

$$\begin{aligned} \smile &: H^p(X; R) \times H^q(X, A; R) \longrightarrow H^{p+q}(X, A; R), \\ \smile &: H^p(X, A; R) \times H^q(X, A; R) \longrightarrow H^{p+q}(X, A; R), \end{aligned}$$

так как если коцепи $a \in C^p(X; R)$ и $b \in C^q(X; R)$ обращаются в нуль на цепях в A , то это верно и для $a \smile b$.

Если A и B — открытые подмножества в X или (X, A) и (X, B) — клеточные пары, то имеется более общее *относительное \smile -произведение*

$$(17) \quad \smile: H^p(X, A; R) \times H^q(X, B; R) \longrightarrow H^{p+q}(X, A \cup B; R).$$

Оно определяется следующим образом: \smile -произведение коцепей даёт отображение

$$(18) \quad C^p(X, A; R) \times C^q(X, B; R) \longrightarrow C^{p+q}(X, A + B; R),$$

где $C^n(X, A + B; R)$ — подгруппа в $C^n(X; R)$, состоящая из коцепей, обращающихся в нуль на суммах цепей в A и цепей в B . Включения $C^n(X, A \cup B; R) \rightarrow C^n(X, A + B; R)$ индуцируют изоморфизмы когомологий; это следует из 5-леммы и леммы 2.19 (из когомологического варианта этой леммы следует, что ограничение $C^n(A \cup B) \rightarrow C^n(A + B)$ индуцирует изоморфизм в когомологиях). Следовательно, \smile -произведение коцепей (18) даёт относительное \smile -произведение когомологий (17).

Определим также абсолютное и относительное \times -произведение (или *внешнее произведение*)

$$\begin{aligned} \times &: H^p(X; R) \times H^q(Y; R) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y; R), \\ \times &: H^p(X, A; R) \times H^q(Y, B; R) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R) \end{aligned}$$

формулой $\alpha \times \beta = p_X^*(\alpha) \smile p_Y^*(\beta)$, где p_X и p_Y — проекции $X \times Y$ на X и на Y .

6.3. Клеточное определение умножения. Имеется другой подход к определению умножения в когомологиях, использующий клеточные коцепи. Мы изложим этот подход схематично, оставляя доказательства основных утверждений в качестве задач; эти доказательства можно найти в книгах [ФФ] или [Ха].

Пусть X, Y — клеточные пространства. Напомним, что произведение $X \times Y$ имеет клеточную структуру, клетками которой являются произведения $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ клеток $e_\alpha^m \subset X$ и $e_\beta^n \subset Y$. Таким образом, мы получаем билинейное отображение

$$(19) \quad \times: C_m(X) \times C_n(Y) \rightarrow C_{m+n}(X \times Y), \quad (e_\alpha^m, e_\beta^n) \mapsto e_\alpha^m \times e_\beta^n.$$

Лемма 6.4. *Клеточный граничный гомоморфизм $\partial: C_i(X \times Y) \rightarrow C_{i-1}(X \times Y)$ удовлетворяет соотношению*

$$(20) \quad \partial(e_\alpha^m \times e_\beta^n) = \partial e_\alpha^m \times e_\beta^n + (-1)^m e_\alpha^m \times \partial e_\beta^n.$$

Из (20) следует, что произведение двух циклов — цикл, а произведение цикла и границы — граница. Следовательно, определено отображение в клеточных гомологиях (с коэффициентами в кольце R)

$$(21) \quad \times: H_m(X; R) \times H_n(Y; R) \rightarrow H_{m+n}(X \times Y; R),$$

которое называется (*гомологическим*) \times -произведением.

Теперь рассмотрим клеточные коцепи. Существует R -билинейное отображение

$$(22) \quad \times : \mathcal{C}^p(X; R) \times \mathcal{C}^q(Y; R) \rightarrow \mathcal{C}^{p+q}(X \times Y; R),$$

переводящее пару коцепей (c_1, c_2) в коцепь $c_1 \times c_2$, значение которой на клетке $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ равно $c_1(e_\alpha^m)c_2(e_\beta^n)$. Так как клеточный дифференциал $d: \mathcal{C}^{i-1}(X; R) \rightarrow \mathcal{C}^i(X; R)$ задаётся соотношением $(dc)(e^n) = c(\partial e^n)$, простая проверка с использованием (20) показывает, что имеет место формула

$$(23) \quad d(c_1 \times c_2) = dc_1 \times c_2 + (-1)^p c_1 \times dc_2, \quad c_1 \in \mathcal{C}^p(X; R), c_2 \in \mathcal{C}^q(Y; R).$$

Отсюда получаем отображение в клеточных когомологиях

$$(24) \quad \times : H^p(X; R) \times H^q(Y; R) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y; R),$$

которое называется (*коммологическим клеточным*) \times -произведением.

Замечание. В некоторых монографиях и учебниках клеточный дифференциал $d: \mathcal{C}^p(X; R) \rightarrow \mathcal{C}^{p+1}(X; R)$ задаётся соотношением

$$\langle dc, e^n \rangle = (-1)^p \langle c, \partial e^n \rangle, \quad c \in \mathcal{C}^p(X; R),$$

а \times -произведение коцепей задаётся соотношением

$$\langle c_1 \times c_2, e_\alpha^m \times e_\beta^n \rangle = (-1)^{qm} c_1(e_\alpha^m) c_2(e_\beta^n), \quad c_1 \in \mathcal{C}^p(X; R), c_2 \in \mathcal{C}^q(Y; R).$$

При этом формула (23) по-прежнему имеет место.

Теперь мы можем определить *клеточное \smile -произведение* как композицию

$$\smile : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times X; R) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X; R),$$

где Δ^* — отображение, индуцированное диагональю $\Delta: X \rightarrow X \times X$.

Теорема 6.5. *Клеточные \times - и \smile -произведения совпадают с произведениями, определёнными при помощи сингулярных коцепей. В частности, клеточное \smile -произведение не зависит от клеточной структуры и является гомотопическим инвариантом пространства.*

Замечание. Клеточное \smile -произведение нельзя естественным образом определить для коцепей. Дело в том, что диагональ $\Delta: X \rightarrow X \times X$ не является клеточным отображением и для построения отображения $\mathcal{C}^{p+q}(X \times X) \rightarrow \mathcal{C}^{p+q}(X)$ необходимо перейти к клеточной аппроксимации диагонали. Однако не существует конструкции клеточной аппроксимации $\tilde{\Delta}: X \rightarrow X \times X$, которая была бы функториальной относительно всех отображений $X \rightarrow Y$. Иногда это можно сделать относительно выделенных классов пространств и отображений.

6.4. Формула Кюннета. Пусть заданы цепные комплексы $C = \{C_n, \partial_n\}$ и $C' = \{C'_n, \partial'_n\}$ абелевых групп или R -модулей. *Тензорное произведение* $C \otimes_R C'$ определяется как цепной комплекс, состоящий из модулей

$$(C \otimes_R C')_n = \bigoplus_i C_i \otimes_R C'_{n-i}$$

с граничным гомоморфизмом $\partial: (C \otimes_R C')_n \rightarrow (C \otimes_R C')_{n-1}$, заданным формулой

$$(25) \quad \partial(c \otimes c') = \partial c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial c', \quad c \in C_i, c' \in C'_{n-i}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $\partial^2 = 0$:

$$\partial^2(c \otimes c') = \partial(\partial c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial c') = \partial^2 c \otimes c' + (-1)^{i-1} \partial c \otimes \partial c' + (-1)^i \partial c \otimes \partial c' + c \otimes \partial^2 c' = 0.$$

Из (25) следует, что тензорное произведение циклов — цикл, а тензорное произведение цикла и границы — граница. Поэтому мы получаем индуцированный гомоморфизм гомологий $H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C') \rightarrow H_n(C \otimes_R C')$. Просуммировав по i , получаем гомоморфизм

$$(26) \quad \bigoplus_i H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C') \rightarrow H_n(C \otimes_R C').$$

Формула Кюннета описывает этот гомоморфизм при некоторых ограничениях на R и C . Основное её применение — в следующей топологической ситуации.

Пример 6.6. Пусть $C = \{C_n(X), \partial_n\}$ и $C' = \{C_n(Y), \partial_n\}$ — клеточные цепные комплексы для X и Y . Билинейные отображения (19) дают изоморфизм

$$\bigoplus_i C_i(X) \otimes C_{n-i}(Y) \rightarrow C_n(X \times Y), \quad e_\alpha^i \otimes e_\beta^{n-i} \mapsto e_\alpha^i \times e_\beta^{n-i},$$

а формула (20) превращается в (25). Следовательно, мы имеем изоморфизм цепных комплексов $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) \xrightarrow{\cong} C_\bullet(X \times Y)$, а гомоморфизм (26) превращается в гомоморфизм

$$\bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \rightarrow H_n(X \times Y).$$

Теорема 6.7 (алгебраическая формула Кюннета). Пусть R — область главных идеалов (например, $R = \mathbb{Z}$ или поле) и цепной комплекс C состоит из свободных R -модулей C_i . Тогда для любого n существует естественная расщепимая короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \bigoplus_i H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C') \rightarrow H_n(C \otimes_R C') \rightarrow \bigoplus_i \text{Тор}_R(H_i(C), H_{n-1-i}(C')) \rightarrow 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все граничные отображения в комплексе C нулевые, т. е. $H_i(C) = C_i$. Тогда $\partial(c \otimes c') = (-1)^i c \otimes \partial c'$ и цепной комплекс $C \otimes_R C'$ — это прямая сумма комплексов $C_i \otimes_R C'$, каждый из которых, в свою очередь, является прямой суммой комплексов C' , так как C_i — свободный модуль. Поэтому

$$\begin{aligned} H_n(C \otimes_R C') &= H_n\left(\bigoplus_i C_i \otimes_R C'\right) = \bigoplus_i H_n(C_i \otimes_R C') \cong \\ &\cong \bigoplus_i C_i \otimes_R H_{n-i}(C') = \bigoplus_i H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'), \end{aligned}$$

так что в этом случае теорема верна.

В общем случае рассмотрим подгруппы $B_i \subset Z_i \subset C_i$ границ и циклов, как в доказательстве части в) формул универсальных коэффициентов (теорема 5.6). Мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов $0 \rightarrow Z_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow B_{\bullet-1} \rightarrow 0$, состоящую из расщепимых коротких точных последовательностей $0 \rightarrow Z_i \rightarrow C_i \rightarrow B_{i-1} \rightarrow 0$. Умножая тензорно на C' , получим короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow (Z \otimes_R C')_\bullet \rightarrow (C \otimes_R C')_\bullet \rightarrow (B \otimes_R C')_{\bullet-1} \rightarrow 0$$

и соответствующую ей длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \xrightarrow{i_n} H_n(Z \otimes_R C') \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow H_{n-1}(B \otimes_R C') \xrightarrow{i_{n-1}} H_{n-1}(Z \otimes_R C') \longrightarrow \dots$$

Здесь связывающим гомоморфизмом является гомоморфизм, индуцированный вложением $i: B \rightarrow Z$. Так как B и Z — комплексы с нулевым граничным гомоморфизмом, частный случай, разобранный в начале доказательства, позволяет преобразовать предыдущую точную последовательность в последовательность

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{i_n} \bigoplus_i (Z_i \otimes_R H_{n-i}(C')) \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \bigoplus_i (B_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')) \xrightarrow{i_{n-1}} \\ \xrightarrow{i_{n-1}} \bigoplus_i (Z_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Coker } i_n \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \text{Ker } i_{n-1} \longrightarrow 0$$

Теперь заметим, что $0 \rightarrow B_i \rightarrow Z_i \rightarrow H_i(C) \rightarrow 0$ — свободная резольвента для $H_i(C)$ (здесь мы используем то, что R — область целостности). Поэтому

$$\text{Coker}(B_i \otimes_R H_{n-i}(C') \xrightarrow{i_n} Z_i \otimes_R H_{n-i}(C')) = H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'),$$

$$\text{Ker}(B_i \otimes_R H_{n-1-i}(C') \xrightarrow{i_{n-1}} Z_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')) = \text{Tor}_R(H_i(C), H_{n-1-i}(C')).$$

Суммируя по i и подставляя эти выражения в предыдущую точную последовательность, получаем точную последовательность из формулировки теоремы.

Осталось установить расщепимость точной последовательности. Мы докажем расщепимость при дополнительном условии, что цепной комплекс C' состоит из свободных R -модулей C'_i . Этого будет достаточно для топологических приложений. Так как $Z_i \subset C_i$ — прямое слагаемое, гомоморфизм факторизации $Z_i \rightarrow H_i(C)$ продолжается до $C_i \rightarrow H_i(C)$. Аналогично получаем $C'_i \rightarrow H_i(C')$. Рассматривая гомологии $H(C)$ и $H(C')$ как цепные комплексы с нулевым граничным гомоморфизмом, получаем цепное отображение $C \otimes_R C' \rightarrow H(C) \otimes_R H(C')$. Переходя к гомологиям, получаем требуемое расщепляющее отображение $H_n(C \otimes_R C') \rightarrow \bigoplus_i (H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'))$. \square

Теперь применим алгебраическую формулу Кюннета в ситуации из примера 6.6.

Теорема 6.8 (топологическая формула Кюннета). Пусть X, Y — клеточные пространства и R — область главных идеалов (например, \mathbb{Z} или поле). Тогда для любого n существует естественная расщепимая короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_i \text{Tor}(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)) \rightarrow 0$$

(где мы опустили кольцо коэффициентов R).

Для приложений выделим следующий важный частный случай, который включает и когомологическую формулировку.

Теорема 6.9. Пусть X, Y — клеточные пространства. Если $H_i(Y)$ является свободной абелевой группой для любого i , то гомоморфизмы

$$\bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \longrightarrow H_n(X \times Y),$$

задаваемые \times -произведением, являются изоморфизмами. Если $H_i(Y)$ является конечно порождённой свободной абелевой группой для любого i , то гомоморфизмы

$$\bigoplus_i H^i(X) \otimes H^{n-i}(Y) \longrightarrow H^n(X \times Y),$$

задаваемые \times -произведением, являются изоморфизмами.

Доказательство. Для гомологий это непосредственно вытекает из теоремы 6.8, так как в нашем случае $\text{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y)) = 0$.

Для когомологий заметим, что требуемый гомоморфизм можно разложить в композицию

$$\bigoplus_i H^i(X) \otimes H^{n-i}(Y) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i H^i(X, H^{n-i}(Y)) \longrightarrow H^n(X \times Y),$$

где первый изоморфизм получается из формулы универсальных коэффициентов (теорема 5.6 б)), так как $H^{n-i}(Y)$ — свободная абелева группа (здесь мы пользуемся тем, что $H_{n-i}(Y)$ конечно порождена). Поэтому достаточно доказать, что второй гомоморфизм в приведённой выше композиции — изоморфизм.

Рассмотрим короткую точную последовательность из формулы универсальных коэффициентов (теорема 5.6 в)):

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X \times Y), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(X \times Y) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X \times Y), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H_n(X \times Y), \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}\left(\bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y), \mathbb{Z}\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_i \text{Hom}(H_i(X), \text{Hom}(H_{n-i}(Y), \mathbb{Z})) \cong \bigoplus_i \text{Hom}(H_i(X), H^{n-i}(Y)). \end{aligned}$$

Здесь в первом изоморфизме мы воспользовались уже доказанным утверждением для гомологий, второй изоморфизм вытекает из соотношения $\text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$ (задача), а третий следует из формулы универсальных коэффициентов, так как $H_{n-i}(Y)$ — свободная абелева группа. Далее, имеем изоморфизмы

$$\begin{aligned} \text{Ext}(H_{n-1}(X \times Y), \mathbb{Z}) &\cong \text{Ext}\left(\bigoplus_i H_{i-1}(X) \otimes H_{n-i}(Y), \mathbb{Z}\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_i \text{Ext}(H_{i-1}(X), \text{Hom}(H_{n-i}(Y), \mathbb{Z})) \cong \bigoplus_i \text{Ext}(H_{i-1}(X), H^{n-i}(Y)), \end{aligned}$$

где второй изоморфизм вытекает из соотношения $\text{Ext}(A \otimes B, C) \cong \text{Ext}(A, \text{Hom}(B, C))$ для свободной абелевой группы B (задача). Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму, строки которой — точные последовательности универсальных коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X \times Y), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(X \times Y) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(X \times Y), \mathbb{Z}) & \rightarrow & 0 \\ & \cong \uparrow & \uparrow & & \cong \uparrow & & \\ 0 \rightarrow \bigoplus_i \text{Ext}(H_{i-1}(X), H^{n-i}(Y)) & \longrightarrow & \bigoplus_i H^i(X, H^{n-i}(Y)) & \longrightarrow & \bigoplus_i \text{Hom}(H_i(X), H^{n-i}(Y)) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Тогда из 5-леммы следует, что средняя стрелка является изоморфизмом. \square

6.5. Кольца когомологий тора и проективных пространств. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Напомним, что R -алгеброй называется кольцо A , которое также является R -модулем, причем умножение $A \times A \rightarrow A$ является R -билинейным.

Внешней алгеброй с n образующими над кольцом R называется ассоциативная алгебра с 1, порождённая элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые удовлетворяют соотношениям $\alpha_i^2 = 0$, $\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i$. Внешняя алгебра обозначается $\Lambda_R[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ или просто $\Lambda[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Внешнюю алгебру можно сделать градуированной, положив $\deg \alpha_i = 1$. При этом алгебра $\Lambda[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ становится градуированно-коммутативной, и мы имеем $\Lambda[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k$, где Λ^k — свободный R -модуль, порождённый мономами $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Предложение 6.10. Пусть $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ — n -мерный тор. Тогда имеет место изоморфизм

$$H^*(T^n) \cong \Lambda[\alpha_1, \dots, \alpha_n],$$

при котором $\alpha_i \in \Lambda[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ переходит в $p_i^*(\alpha) \in H^1(T^n)$, где $\alpha \in H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а $p_i: T^n \rightarrow S^1$ — проекция на i -й сомножитель.

Доказательство. Будем вести индукцию по n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для T^n , и докажем его для T^{n+1} . Достаточно доказать, что для любого k группа $H^k(T^{n+1})$ является свободной абелевой с базисом из мономов $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n + 1$. Из теоремы 6.9 получаем изоморфизм

$$H^k(T^n) \oplus (H^{k-1}(T^n) \otimes H^1(S^1)) \xrightarrow{\cong} H^k(T^n \times S^1) = H^k(T^{n+1}),$$

при котором $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{k-1}} \otimes \alpha$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n$, переходит в $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{k-1}} \alpha_{n+1}$. Отсюда следует требуемое утверждение. \square

Наряду с внешними алгебрами важный класс градуированных колец образуют кольца многочленов $R[v_1, \dots, v_n]$. Градуировка в кольце $R[v_1, \dots, v_n]$ задаётся степенями образующих, $\deg v_i = d_i$. Если все элементы кольца R имеют порядок 2, то кольцо $R[v_1, \dots, v_n]$ будет градуированно-коммутативным при любых степенях образующих. Если же в R имеются элементы порядка, отличного от 2, то для градуированности коммутативности кольца $R[v_1, \dots, v_n]$ необходимо, чтобы все степени d_i были чётными. Например, можно положить $\deg v_i = 2$.

Также рассматриваются «усечённые» кольца $R[v]/(v^k)$, состоящие из многочленов степени меньше k .

Предложение 6.11. Имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1}), & H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2[u], & \deg u &= 1, \\ H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[v]/(v^{n+1}), & H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[v], & \deg v &= 2. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала разберём случай $\mathbb{R}P^n$. Для упрощения обозначений будем писать P^n вместо $\mathbb{R}P^n$ и не указывать явно коэффициенты \mathbb{Z}_2 . Имеем $H^i(P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $i \leq n$. Если мы докажем, что произведение образующей группы $H^1(P^n)$ на образующую группы $H^{n-1}(P^n)$ даёт образующую группы $H^n(P^n)$, то изоморфизм $H^*(P^n) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$ получится индукцией по n , так как включение $P^{n-1} \rightarrow P^n$ индуцирует изоморфизм групп H^i при $i \leq n - 1$.

Мы докажем больше, а именно, что $\smile: H^i(P^n) \otimes H^{n-i}(P^n) \rightarrow H^n(P^n)$ — изоморфизм. Вложим P^i и P^{n-i} в P^n в качестве следующих подмножеств:

$$\begin{aligned} \{[x_0 : \dots : x_n] \in P^n : x_{i+1} = \dots = x_n = 0\} &\cong P^i, \\ \{[x_0 : \dots : x_n] \in P^n : x_0 = \dots = x_{i-1} = 0\} &\cong P^{n-i}. \end{aligned}$$

Тогда $P^i \cap P^{n-i}$ — одна точка $p = [0 : \dots : 1 : \dots : 0]$, где 1 стоит на i -м месте. Пусть $U_i \subset P^n$ — i -я аффинная карта, задаваемая условием $x_i \neq 0$. Тогда $U_i \cong \mathbb{R}^n$, и при этом изоморфизме $p \in U_i$ переходит в $0 \in \mathbb{R}^n$. Мы имеем деформационную ретракцию $P^n \setminus P^{n-i} \rightarrow P^{i-1}$; гомотопия между ней и тождественным отображением задаётся формулой

$$f_t: P^n \setminus P^{n-i} \rightarrow P^n \setminus P^{n-i}, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto [x_0, \dots, x_{i-1}, tx_i, \dots, tx_n].$$

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^i(P^n) \otimes H^{n-i}(P^n) & \xrightarrow{\smile} & H^n(P^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^i(P^n, P^n \setminus P^{n-i}) \otimes H^{n-i}(P^n, P^n \setminus P^i) & \xrightarrow{\smile} & H^n(P^n, P^n \setminus \{p\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-i}) \otimes H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}) \otimes H^{n-i}(\mathbb{R}^{n-i}, \mathbb{R}^{n-i} \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(I^i, \partial I^i) \otimes H^{n-i}(I^{n-i}, \partial I^{n-i}) & \xrightarrow{\smile} & H^n(I^n, \partial I^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^i(T^i, \dot{T}^i) \otimes H^{n-i}(T^{n-i}, \dot{T}^{n-i}) & \xrightarrow{\smile} & H^n(T^n, \dot{T}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(T^i) \otimes H^{n-i}(T^{n-i}) & \xrightarrow{\smile} & H^n(T^n). \end{array}$$

Здесь горизонтальные стрелки представляют собой разные варианты относительного \smile -произведения (17), а \dot{T}^n обозначает $(n-1)$ -мерный остов n -мерного тора со стандартной клеточной структурой. Первая (сверху) пара вертикальных стрелок — изоморфизмы, так как $H^i(P^n, P^n \setminus P^{n-i}) \cong H^i(P^n, P^{i-1})$ (см. выше), а $H^i(P^n) \rightarrow H^i(P^n, P^{i-1})$ — изоморфизм (это следует из клеточных когомологий, так как все клеточные дифференциалы нулевые). Вторая пара вертикальных стрелок — изоморфизмы согласно вырезанию. Третья и четвёртая пары вертикальных стрелок являются изоморфизмами, так как там имеются очевидные деформационные ретракции. Пятая пара вертикальных стрелок — изоморфизмы, индуцированные факторотображениями $I^n \rightarrow T^n$. Нижняя пара вертикальных стрелок — изоморфизмы,

так как все дифференциалы в клеточном коцепном комплексе тора нулевые. Наконец, нижняя горизонтальная стрелка является изоморфизмом благодаря предложению 6.10. Итак, верхняя горизонтальная стрелка также изоморфизм, что завершает описание кольца $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Изоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]$ следует из конечномерного случая, так как вложение $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ индуцирует изоморфизм групп H^i при $i \leq n$.

Доказательство для $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{C}P^\infty$ аналогично, надо лишь рассматривать коэффициенты в \mathbb{Z} и удвоить размерности групп и пространств. \square

Задачи и упражнения.

6.12. Докажите, что для произвольных R -модулей A, B, C существует естественный изоморфизм

$$\text{Hom}_R(A \otimes_R B, C) \cong \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_R(B, C)).$$

6.13. Докажите, что если R — область главных идеалов, то для R -модулей A, C и свободного R -модуля B существует естественный изоморфизм

$$\text{Ext}_R(A \otimes_R B, C) \cong \text{Ext}_R(A, \text{Hom}_R(B, C)).$$

6.14. Докажите следующую формулу, связывающую \smile - и \times -произведения:

$$(\varphi_1 \times \psi_1) \smile (\varphi_2 \times \psi_2) = (-1)^{q_1 p_2} (\varphi_1 \smile \varphi_2) \times (\psi_1 \smile \psi_2)$$

для $\varphi_1 \in H^{p_1}(X)$, $\psi_1 \in H^{q_1}(Y)$, $\varphi_2 \in H^{p_2}(X)$, $\psi_2 \in H^{q_2}(Y)$.

6.15. Докажите изоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]/(2v)$, где $\deg v = 2$. Опишите кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$.

6.16. Докажите изоморфизм колец $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2]$, $\deg v_1 = \deg v_2 = 2$.

7. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

Для ориентируемого замкнутого n -мерного многообразия M имеют место изоморфизмы двойственности Пуанкаре $H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$. Для коэффициентов в \mathbb{Z}_2 изоморфизмы $H^k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ имеют место без предположения об ориентируемости. Мы также докажем изоморфизмы двойственности в более общей ситуации: для когомологий с компактными носителями некомпактных многообразий и для многообразий с краем.

7.1. Гладкие и топологические многообразия. Топологическим *многообразием* размерности n называется такое хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, что для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U , гомеоморфная открытому подмножеству V в \mathbb{R}^n . Компактные многообразия традиционно называют *замкнутыми*.

Гладким атласом на n -мерном многообразии M называется открытое покрытие $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ многообразия M , в котором для каждого множества U_α фиксирован гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha$, называемый *картой*, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, и на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ отображения замены координат

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) отображениями на открытых подмножествах в \mathbb{R}^n .

Выбор гладкого атласа на многообразии называется *гладкой структурой*, а многообразие с гладким атласом — *гладким* (или *дифференцируемым*) *многообразием*.

Примерами гладких многообразий являются \mathbb{R}^n , сферы S^n , проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$, классические двумерные поверхности. Произведение гладких многообразий снова является гладким многообразием.

Не являются многообразиями графы с вершинами степени ≥ 2 и бесконечномерные клеточные пространства типа S^∞ , $\mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{C}P^\infty$. Конус, надстройка, смэш-произведение и джойн многообразий, как правило, не являются многообразиями.

7.2. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс.

Пусть X — топологическое пространство. Группа $H_n(X, X \setminus \{x\})$ называется *n -й группой локальных гомологий* пространства X в точке x .

Предложение 7.1. Пусть M — топологическое n -мерное многообразие. Тогда $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_i(M, M \setminus \{x\}) = 0$ при $i \neq n$ для любой точки $x \in M$.

Доказательство. Имеем

$$H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}),$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, а второй — из точной последовательности пары. Теперь утверждение следует из предложения 2.15. \square

Локальная ориентация n -мерного многообразия M в точке x — это выбор одной из двух образующих группы локальных гомологий $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ в каждой точке $x \in M$. Такой выбор называется *согласованным*, если для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность B , гомеоморфная открытому шару в \mathbb{R}^n , что для каждой точки $y \in B$ образующие μ_x и μ_y переходят друг в друга при изоморфизмах

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{y\}),$$

индуцированных вложениями $M \setminus B \rightarrow M \setminus \{x\}$ и $M \setminus B \rightarrow M \setminus \{y\}$. Многообразие M называется *ориентируемым*, если существует согласованный выбор локальных ориентаций всех его точек. Такой выбор называется *ориентацией* многообразия M . Если многообразие M связно и ориентируемо, то у него есть в точности две ориентации.

Рассмотрим множество, состоящее из пар (x, μ_x) :

$$\tilde{M} = \{(x, \mu_x) : x \in M, \mu_x \text{ — локальная ориентация в точке } x \in M\}.$$

Для каждого подмножества $B \subset M$, гомеоморфного открытому шару в \mathbb{R}^n , и образующей $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ определим подмножество $U(\mu_B) \subset \tilde{M}$ как

$$U(\mu_B) = \{(x, \mu_x) : x \in B, \mu_B \text{ переходит в } \mu_x$$

$$\text{при изоморфизме } H_n(M, M \setminus B) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\})\}.$$

Введём на \tilde{M} топологию, базу которой образуют подмножества $U(\mu_B)$. Тогда из этой конструкции и определения ориентируемости вытекает следующее.

Предложение 7.2. Пусть M связно. Тогда

- а) M ориентируемо в том и только том случае, когда \tilde{M} имеет две компоненты связности, т. е. $\tilde{M} = M \sqcup M$;

б) если M не ориентируемо, то \widetilde{M} — связное ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{M} \rightarrow M$, $(x, \mu_x) \mapsto x$, является двулистным накрытием.

Двулистное накрытие $\widetilde{M} \rightarrow M$ неориентируемого многообразия M называется ориентирующим накрытием.

Следствие 7.3. Односвязное многообразие ориентируемо.

Также M ориентируемо, если в $\pi_1(M)$ нет подгрупп индекса 2.

Рассматривая группы гомологий с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей, получим определение R -ориентируемого многообразия. (Образующей в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ называется любой обратимый элемент кольца R .) Любое многообразие \mathbb{Z}_2 -ориентируемо, так как образующая в \mathbb{Z}_2 единственна. Более того, легко видеть, что ориентируемое многообразие R -ориентируемо для любого R , а неориентируемое многообразие R -ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R (задача). Поэтому интерес представляют случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$.

Лемма 7.4. Пусть M — многообразие размерности n и $A \subset M$ — компактное подмножество. Тогда для коммутативного кольца R с единицей

- а) элемент $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю в том и только том случае, когда его образ α_x в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ равен нулю для любой точки $x \in A$;
- б) если выбраны согласованные локальные ориентации $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для всех $x \in A$, то существует единственный элемент $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$, который отображается в μ_x при гомоморфизме $r_A: H_n(M, M \setminus A; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для любой точки $x \in A$;
- в) $H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ при $i > n$.

Доказательство. Доказательство леммы разобьём на несколько шагов. Будем опускать коэффициенты R в обозначениях групп гомологий.

Шаг 1. Если лемма верна для A , B и $A \cap B$, то она верна и для $A \cup B$. Рассмотрим точную последовательность Майера–Виеториса для пар (теорема 2.21):

$$0 \rightarrow H_n(M, M \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\varphi} H_n(M, M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(M, M \setminus (A \cap B)).$$

Слева стоит 0 так как $H_{n+1}(M, M \setminus (A \cap B)) = 0$ по предположению. Кроме того, группы $H_i(M, M \setminus (A \cup B))$ при $i > n$ стоят между двумя нулевыми группами в последовательности, поэтому они равны нулю, что доказывает утверждение в). Утверждение а) для $A \cup B$ следует из утверждения а) для A и B в силу инъективности φ .

Для доказательства утверждения б) для $A \cup B$ рассмотрим элементы $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A)$ и $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B; R)$, которые существуют по предположению. При отображении $H_n(M, M \setminus A) \rightarrow H_n(M, M \setminus (A \cap B))$ элемент μ_A переходит в элемент, удовлетворяющий условию из утверждения б) для $A \cap B$, т. е. в $\mu_{A \cap B}$, в силу единственности такого элемента. Аналогично μ_B переходит в $\mu_{A \cap B}$ при отображении $H_n(M, M \setminus B) \rightarrow H_n(M, M \setminus (A \cap B))$. Следовательно, отображение ψ из точной последовательности Майера–Виеториса переводит элемент $(\mu_A, -\mu_B)$ в нуль. Поэтому $(\mu_A, -\mu_B) = \varphi(\mu_{A \cup B})$ для некоторого $\mu_{A \cup B} \in H_n(M, M \setminus (A \cup B))$. Этот элемент $\mu_{A \cup B}$ удовлетворяет условию из утверждения б) для $A \cup B$, а его единственность следует из инъективности φ .

Шаг 2. Сводим лемму к случаю, когда M — открытое подмножество в \mathbb{R}^n (одна карта). Компактное подмножество A содержится в конечном объединении карт

некоторого атласа M , т. е. $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Будем вести индукцию по k . Положим $A_i = U_i \cap A$ и применим утверждение предыдущего шага к $A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}$ и A_k . В результате утверждение сводится к случаю $k = 1$, т. е. к случаю одной карты.

Шаг 3. $A = K$ — конечный симплициальный комплекс. Если $A = \Delta^k$ — симплекс, то $\mathbb{R}^n \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ — деформационная ретракция и $r_A: H_i(M, M \setminus A) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\})$ — изоморфизм для $x \in A$. Далее лемма для K сводится к случаю одного симплекса по индукции при помощи утверждения из шага 1.

Шаг 4. $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Пусть элемент $\alpha = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ представлен относительным циклом a . Тогда $\partial a \subset C$ для некоторого компакта $C \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Построим симплициальный комплекс K , для которого $A \subset K$ и $K \cap C = \emptyset$. (Покроем A симплексом, перейдём к кратному барицентрическому подразделению с диаметром симплексов меньше расстояния между A и C и оставим только n -симплексы, пересекающие A .) Тогда a задаёт класс $\alpha_K = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$, который отображается в данный элемент α при гомоморфизме $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \rightarrow H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$ при $i > n$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ при $i > n$, что доказывает третье утверждение леммы.

Пусть теперь $i = n$. Предположим, что $\alpha_x = 0$ для любой точки $x \in A$. Тогда и $\alpha_x = 0$ для любой точки $x \in K$, так как K — объединение n -симплексов, пересекающих A , а $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ — изоморфизм для $x \in \Delta^n$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы и единственность во втором утверждении.

Для доказательства существования продолжим согласованные ориентации μ_x , $x \in A$, на симплекс $\Delta^n \supset A$. Для Δ^n существование элемента $\mu_{\Delta^n} \in H_n(M, M \setminus \Delta^n)$ очевидно. Тогда искомым элементом μ_A есть образ элемента μ_{Δ^n} при гомоморфизме $H_n(M, M \setminus \Delta^n) \rightarrow H_n(M, M \setminus A)$. \square

Если многообразие M замкнуто (компактно), то мы можем положить $A = M$ в лемме 7.4. Тогда из утверждения б) получаем, что если M замкнуто и ориентировано, т. е. согласованно выбраны образующие $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, то существует единственный класс $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$, переходящий в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ для любой точки $x \in M$. Этот класс называется *фундаментальным классом* ориентированного многообразия M и обозначается $[M]$.

Теперь можно сформулировать теорему о связи ориентируемости и старшей группы гомологий для замкнутых связных многообразий M .

Теорема 7.5. Пусть M — замкнутое связное многообразие размерности n . Тогда

- а) отображение $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ является изоморфизмом для любой точки $x \in M$;
- б) если M ориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — изоморфизм для любой точки $x \in M$; если M неориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$;
- в) $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.

Доказательство. Положим $A = M$ и $R = \mathbb{Z}$ или \mathbb{Z}_2 в лемме 7.4. Утверждение в) вытекает из утверждения в) леммы.

Пусть $x \in M$. Покажем, что для связного многообразия M гомоморфизм $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, $\alpha \mapsto \alpha_x$, инъективен. Пусть $\alpha_x = 0$ для некоторого $\alpha \in H_n(M; R)$. Тогда если $y \in M$ — другая точка, содержащаяся вместе с x в окрестности B , гомеоморфной открытому шару, то гомоморфизмы для x и y

раскладываются в композицию следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M; R) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus B; R) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ & & \downarrow \cong & & \\ & & H_n(M, M \setminus \{y\}; R) & & \end{array}$$

Так как M связно, отсюда следует, что $\alpha_y = 0$ для любой точки $y \in M$. Следовательно, $\alpha = 0$ в силу утверждения а) леммы 7.4.

Если многообразию M является R -ориентируемым, то гомоморфизм $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ сюръективен в силу утверждения б) леммы 7.4 (для $A = M$). Это доказывает утверждение а) теоремы (так как M всегда \mathbb{Z}_2 -ориентируемо) и первую часть утверждения б).

Пусть M неориентируемо. Так как гомоморфизм $H_n(M) \rightarrow (M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ инъективен, получаем $H_n(M) \cong 0$ или $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Предположим последнее, и пусть α — образующая. Тогда $\alpha_x = k\mu_x$, где $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а k — положительное целое число. Из приведённой выше диаграммы следует, что k не зависит от x и μ_x можно выбрать согласованно для всех $x \in M$. Это противоречит предположению о неориентируемости многообразия M . Итак, $H_n(M) \cong 0$. \square

Таким образом, для замкнутого связного M имеем $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ всегда, а $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ или 0 в зависимости от того, является M ориентируемым или нет, а выбор ориентации на M — это выбор образующей группы $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (фундаментального класса).

Предположим, что замкнутое многообразие M триангулировано или на нём задана структура конечного полусимплициального комплекса с n -мерными симплексами σ_i , $i = 1, \dots, k$. Тогда каждый $(n-1)$ -мерный симплекс τ является гранью в точности двух n -мерных симплексов σ_i и σ_j . Если M ориентируемо, то ориентации симплексов σ_i можно выбрать согласованно. Это означает, что можно выбрать отображения $\sigma_i: \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow M$ так, что каждый τ входит в $\partial\sigma_i$ и $\partial\sigma_j$ с разными знаками. Тогда $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$ и цикл $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ представляет образующую группы $H_n(M)$ — фундаментальный класс $[M]$. Для коэффициентов \mathbb{Z}_2 цепь $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ — всегда цикл, представляющий образующую группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

7.3. Степень отображения многообразий. Пусть $f: M \rightarrow N$ — отображение связных замкнутых ориентированных n -мерных многообразий с фундаментальными классами $[M]$ и $[N]$. Тогда для $f_*: H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N; \mathbb{Z})$ имеем $f_*[M] = d[N]$. Целое число d называется *степенью* отображения $f: M \rightarrow N$.

Предложение 7.6. *Для любого связного замкнутого ориентированного n -мерного многообразия M и любого $d \in \mathbb{Z}$ существует отображение $M \rightarrow S^n$ степени d .*

Доказательство. Сначала построим отображение степени 1. Пусть $U \subset M$ — карта, причём $U \cong \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $M \rightarrow M/(M \setminus U) \cong S^n$. Для любой точки $x \in U$ имеем композицию гомоморфизмов $H_n(M) \rightarrow H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\})$, при которой $[M]$ переходит в μ_x . Отсюда следует, что образ класса $[M]$ при первом гомоморфизме есть фундаментальный класс $[S^n] \in H_n(S^n) \cong H_n(M, M \setminus \{x\})$, а значит отображение $M \rightarrow M/(M \setminus U)$ имеет степень 1. Композиция этого отображения с любым отображением $S^n \rightarrow S^n$ степени d даёт отображение $M \rightarrow S^n$ степени d . \square

7.4. \frown -произведение и изоморфизмы двойственности. Определим *произведение высечения*, или \frown -произведение

$$\frown: C_p(X; R) \times C^q(X; R) \rightarrow C_{p-q}(X; R)$$

для $p \geq q$ по формуле

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]},$$

где $\sigma: [v_0, \dots, v_p] \rightarrow X$ — сингулярный симплекс и $\varphi \in C^q(X; R)$ — коцепь.

Лемма 7.7. $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^q(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown d\varphi)$.

Доказательство. Непосредственная проверка:

$$\begin{aligned} \partial\sigma \frown \varphi &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1}, \dots, v_p]} + \sum_{i=q+1}^p (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]}, \\ \sigma \frown d\varphi &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1}, \dots, v_p]}, \\ \partial(\sigma \frown \varphi) &= \sum_{i=q}^p (-1)^{i-q} \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]}. \quad \square \end{aligned}$$

Отсюда получаем R -билинейное отображение (*гомологическое \frown -произведение*)

$$H_p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X; R).$$

Имеются также относительные версии:

$$H_p(X, A; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X, A; R),$$

$$H_p(X, A; R) \times H^q(X, A; R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X, A; R),$$

$$H_p(X, A \cup B; R) \times H^q(X, A; R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X, B; R).$$

Лемма 7.8 (функториальность). Для $f: X \rightarrow Y$ отображения в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X) \times H^q(X) & \xrightarrow{\frown} & H_{p-q}(X) & & \\ f_* \downarrow & & \uparrow f^* & & f_* \downarrow \\ H_p(Y) \times H^q(Y) & \xrightarrow{\frown} & H_{p-q}(Y) & & \end{array}$$

удовлетворяют соотношению $f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$.

Доказательство. $f\sigma \frown \varphi = \varphi(f\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})f\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]}$. □

Теперь мы можем сформулировать теорему об изоморфизмах двойственности Пуанкаре.

Теорема 7.9. Пусть M — замкнутое R -ориентируемое n -мерное многообразие с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M; R)$. Тогда отображение

$$D: H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R), \quad \varphi \mapsto [M] \frown \varphi,$$

является изоморфизмом для любого k .

Доказательство этой теоремы будет аналогично доказательству существования фундаментального класса: с помощью последовательности Майера–Виеториса мы сведём утверждение к случаю $M = \mathbb{R}^n$. Но для этого нам понадобится версия двойственности Пуанкаре для некомпактных многообразий. Она использует понятие когомологий с компактными носителями.

7.5. Когомологии с компактными носителями. Для пространства X определим группу i -мерных *сингулярных коцепей с компактными носителями* с коэффициентами в G как подгруппу $C_c^i(X; G)$ в $C^i(X; G)$, состоящую из коцепей, обращающихся в нуль вне некоторого компактного подмножества (зависящего от коцепи):

$$C_c^i(X; G) = \{f: C_i(X) \rightarrow G: f|_{C_*(X \setminus K_f)} = 0 \text{ для некоторого компактного } K_f \subset X\}.$$

Коцепное кограничное отображение ограничивается на группы коцепей с компактными носителями: $d: C_c^i(X; G) \rightarrow C_c^{i+1}(X; G)$. Группы когомологий получаемого коцепного комплекса называются *когомологиями с компактными носителями* и обозначаются $H_c^i(X; G)$. Если само пространство X компактно, то $C_c^i(X; G) = C^i(X; G)$ и $H_c^i(X; G) = H^i(X; G)$.

Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств, то мы имеем мономорфизм $C^i(X, X \setminus K; G) \hookrightarrow C^i(X, X \setminus L; G)$ и $C_c^i(X; G) = \bigcup_{K \subset X} C^i(X, X \setminus K; G)$. Индуцированный гомоморфизм гомологий $H^i(X, X \setminus K; G) \rightarrow H^i(X, X \setminus L; G)$ может не быть инъективным. Однако группу $H_c^i(X; G)$ также можно описать через группы $H^i(X, X \setminus K; G)$ при помощи следующей алгебраической конструкции.

Конструкция 7.10 (прямой предел (копредел) групп). Пусть (P, \leq) — частично упорядоченное множество. *Диаграммой* абелевых групп, индексированной множеством P , называется такой набор $D = \{G_\alpha: \alpha \in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta$, что $f_{\alpha\alpha} = \text{id}$ и $f_{\alpha\gamma}$ есть композиция $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\beta\gamma}$, если $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Пусть \mathcal{P} — категория, объектами которой являются элементы $\alpha \in P$, и между α и β имеется единственный морфизм, если $\alpha \leq \beta$. Тогда диаграмма — это (ковариантный) функтор $D: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{AB}$, $\alpha \mapsto G_\alpha$, из \mathcal{P} в категорию абелевых групп.

Прямым пределом или *копределом* диаграммы D абелевых групп называется факторгруппа прямой суммы $\bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha$ по подгруппе, порождённой всеми элементами вида $g_\alpha - f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$. Обозначение: $\text{colim } D$ или $\varinjlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $i_\alpha: G_\alpha \rightarrow \varinjlim G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $i_\beta f_{\alpha\beta} = i_\alpha$ при $\alpha \leq \beta$.

Если в P существует наибольший элемент μ , то $\varinjlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varinjlim G_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha$.

Предложение 7.11. Пусть в P для любых двух элементов $\alpha, \beta \in P$ существует такой элемент $\gamma \in P$, что $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \gamma$. Тогда прямой предел $\varinjlim G_\alpha$ можно отождествить с фактормножеством $(\bigsqcup_{\alpha \in P} G_\alpha)/\sim$ по отношению эквивалентности, порождённого эквивалентностями $g_\alpha \sim f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$.

Доказательство. Введём на фактормножестве $(\bigsqcup_{\alpha \in P} G_\alpha)/\sim$ структуру абелевой группы следующим образом. Для классов эквивалентности $[g_\alpha]$ и $[g_\beta]$ элементов $g_\alpha \in G_\alpha$ и $g_\beta \in G_\beta$ найдём такой элемент $\gamma \in P$, что $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \gamma$, и положим

$[g_\alpha] + [g_\beta] = [f_{\alpha\gamma}(g_\alpha) + f_{\beta\gamma}(g_\beta)]$, где в правой части элементы складываются в группе G_γ . Тогда отображение

$$\varinjlim G_\alpha = \left(\bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha \right) / \sim \rightarrow \left(\bigsqcup_{\alpha \in P} G_\alpha \right) / \sim, \quad [g_\alpha] \mapsto [g_\alpha],$$

является изоморфизмом. \square

Предложение 7.12 (универсальное свойство прямого предела). Пусть $D = \{G_\alpha : \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P . Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, удовлетворяющие соотношениям $h_\beta f_{\alpha\beta} = h_\alpha$ при $\alpha \leq \beta$. Тогда существует единственный такой гомоморфизм $h : \varinjlim G_\alpha \rightarrow H$, что $hi_\alpha = h_\alpha$:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \begin{array}{c} \xrightarrow{h_\alpha} \\ \searrow^{i_\alpha} \end{array} & \varinjlim G_\alpha \xrightarrow{h} H \\ f_{\alpha\beta} \downarrow & & \nearrow_{i_\beta} \\ G_\beta & \begin{array}{c} \xrightarrow{h_\beta} \\ \searrow^{i_\beta} \end{array} & \end{array}$$

Доказательство. Гомоморфизм h однозначно задаётся условием $h([g_\alpha]) = h_\alpha(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$, $[g_\alpha] \in \varinjlim G_\alpha = \left(\bigoplus_{\alpha \in P} G_\alpha \right) / \sim$. \square

Это универсальное свойство определяет копредел диаграммы $D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ для произвольной категории \mathcal{C} . Конструкция 7.10 показывает, что копределы существуют в категории абелевых групп. Копределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств: прямую сумму необходимо заменить на несвязное объединение (копроизведение пространств), а факторгруппу — на факторпространство.

Пусть теперь \mathcal{P} — частично упорядоченное по включению множество компактных подмножеств $K \subset X$. Мы имеем диаграмму групп $H^i(X, X \setminus K; G)$ и гомоморфизмов $H^i(X, X \setminus K; G) \rightarrow H^i(X, X \setminus L; G)$ для $K \subset L$.

Предложение 7.13. $H_c^i(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$.

Доказательство. Так как каждый элемент из $H_c^i(X; G)$ представлен коциклом в $C^i(X, X \setminus K; G)$ для некоторого компактного $K \subset X$, получаем гомоморфизм $H_c^i(X; G) \rightarrow \left(\bigoplus_{K \subset X} H^i(X, X \setminus K; G) \right) / \sim = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$. Сюръективность и инъективность этого гомоморфизма следует из определений (задача). \square

Пример 7.14. Вычислим когомологии с компактными носителями пространства \mathbb{R}^n . Пусть B_k — шар радиуса $k > 0$ с центром в нуле. Так как каждое компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ содержится в некотором B_k , мы имеем

$$H_c^i(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G),$$

где последний предел берётся по упорядоченному множеству шаров B_k . Так как $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) \rightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_l; G)$ — изоморфизм при $k < l$, получаем

$$H_c^i(\mathbb{R}^n; G) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) = \begin{cases} G & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь R -ориентируемое n -мерное многообразие M , возможно некомпактное. Далее гомологии и когомологии будем рассматривать с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей.

Согласно лемме 7.4 существует единственный элемент $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$, который отображается в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ для любой точки $x \in K$. Рассмотрим гомоморфизм $H^k(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-k}(M)$, $\varphi \mapsto \mu_K \frown \varphi$. Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств и $i: (M, M \setminus L) \rightarrow (M, M \setminus K)$ — соответствующее отображение пар, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^k(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \varphi \longmapsto \mu_K \frown \varphi \\ i^* \downarrow & & \parallel & \\ H^k(M, M \setminus L) & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \varphi \longmapsto \mu_L \frown \varphi \end{array}$$

коммутативна. Действительно, $\mu_L \frown i^*(\varphi) = i_*(\mu_L) \frown \varphi = \mu_K \frown \varphi$, где первое соотношение следует из леммы 7.8, а $i_*(\mu_L) = \mu_K$ в силу единственности μ_K . Тогда из предложения 7.12 получаем, что определён гомоморфизм двойственности

$$D_M: H_c^k(M) = \varinjlim H^k(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-k}(M).$$

Теорема 7.15. *Для R -ориентируемого n -мерного многообразия M гомоморфизм двойственности*

$$D_M: H_c^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$$

является изоморфизмом.

Так как $H_c^k(M; R) = H^k(M; R)$ для компактного M , теорема 7.9 вытекает из теоремы 7.15.

Доказательство теоремы 7.15. Будем опускать обозначения коэффициентов R .

Шаг 1. $M = \mathbb{R}^n$. Из примера 7.14 получаем, что единственная нетривиальная группа когомологии с компактными носителями есть $H_c^n(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар. Гомоморфизм двойственности есть

$$D_{\mathbb{R}^n}: H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n) \cong R, \quad \varphi \mapsto \mu_B \frown \varphi.$$

Здесь класс $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ представлен любым симплексом $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, содержащим B в своей внутренности. Группа $H_c^n(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ порождена коцепью, принимающей значение 1 на Δ^n и 0 на остальных симплексах. При этом $\mu_B \frown \varphi = \varphi(\mu_B)$ — спаривание n -коцепи с n -цепью μ_B . Поэтому $D_{\mathbb{R}^n}$ — изоморфизм.

Следующие шаги основаны на применении последовательности Майера–Виеториса. Пусть $M = U \cup V$, где U и V открыты. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c^k(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \longrightarrow & H_c^k(M) & \longrightarrow & H_c^{k+1}(U \cap V) & \longrightarrow \\ & \downarrow D_{U \cap V} & & \downarrow D_U \oplus D_V & & \downarrow D_M & & \downarrow D_{U \cap V} & \\ \longrightarrow & H_{n-k}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(U \cap V) & \longrightarrow \end{array}$$

коммутативна с точностью до знака. Мы оставим это без доказательства, см. [Ха, лемма 3.36].

Шаг 2. M — открытое множество в \mathbb{R}^n . Представим M в виде счётного объединения открытых шаров, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Положим $V_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Докажем по

индукции, что D_{V_k} — изоморфизм для любого k . Случай $k = 1$ — это шаг 1, так как $U_1 \cong \mathbb{R}^n$. Далее, $V_k = U_k \cup V_{k-1}$, причём V_{k-1} и $U_k \cap V_{k-1}$ гомеоморфны объединению $k-1$ открытых шаров. Рассмотрим коммутативную диаграмму выше с $U = U_k$ и $V = V_{k-1}$. Из предположения индукции и 5-леммы получаем, что D_{V_k} — изоморфизм.

Теперь мы получаем, что M — объединение последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \dots$. Если $K \subset V_i$ — компактное подмножество, то $H^k(V_i, V_i \setminus K) = H^k(M, M \setminus K)$ согласно вырезанию. Так как каждое компактное подмножество в M содержится в некотором V_i , получаем $H_c^k(M) = \varinjlim H_c^k(V_i)$. Кроме того, $H_{n-k}(M) = \varinjlim H_{n-k}(V_i)$ (задача). Поэтому гомоморфизм $D_M: H_c^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$ является пределом гомоморфизмов $D_{V_i}: H_c^k(V_i) \rightarrow H_{n-k}(V_i)$. Так как каждый D_{V_i} — изоморфизм, D_M тоже изоморфизм.

Шаг 3. Произвольное M . Так как M имеет счётную базу, его можно представить в виде объединения $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где каждое U_i гомеоморфно открытому множеству в \mathbb{R}^n . Далее рассуждение в точности повторяет рассуждение из предыдущего шага с заменой открытых шаров на открытые множества в \mathbb{R}^n . \square

7.6. Связь с умножением. Сигнатура. Градуированно-коммутативная алгебра A над полем \mathbf{k} называется *алгеброй Пуанкаре*, если она связна (т.е. $A^0 \cong \mathbf{k}$), конечномерна (т.е. $A = \bigoplus_{i=0}^d A^i$, где все A^i конечномерны) и \mathbf{k} -линейные отображения

$$\begin{aligned} A^i &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d), \\ a &\mapsto m_a, \quad \text{где } m_a(b) = ab, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами при $0 \leq i \leq d$. Для алгебры Пуанкаре имеем $A^0 \cong \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^d, A^d)$, так что $A^d \cong A^0 \cong F$ и $A^i \cong A^{d-i}$.

Мы докажем, что для замкнутого связного многообразия M алгебра коhomологий $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ является алгеброй Пуанкаре всегда, а алгебра коhomологий $H^*(M; \mathbf{k})$ с коэффициентами в произвольном поле \mathbf{k} является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо.

Нам понадобится формула, связывающая \frown - и \smile -произведения.

Лемма 7.16. *Для $\alpha \in C_p(X)$, $\varphi \in C^q(X)$ и $\psi \in C^{p-q}(X)$ имеет место формула*

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha).$$

Доказательство. Для сингулярного симплекса $\sigma: \Delta^p \rightarrow X$ имеем

$$\psi(\sigma \frown \varphi) = \psi(\varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]}) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\psi(\sigma|_{[v_q, \dots, v_p]}) = (\varphi \smile \psi)(\alpha). \quad \square$$

Рассмотрим ориентированное замкнутое многообразие M с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M)$. Тогда \smile -произведение определяет билинейную функцию (*спаривание*)

$$(27) \quad H^i(M; \mathbf{k}) \times H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{k}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

для любого поля \mathbf{k} и $0 \leq i \leq n$.

Напомним, что билинейное спаривание $f: V \times W \rightarrow \mathbf{k}$, $(v, w) \mapsto f(v, w)$, векторных пространств над \mathbf{k} называется *невыврожденным*, если линейные отображения $W \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbf{k})$, $w \mapsto f(-, w)$, и $V \rightarrow \text{Hom}(W, \mathbf{k})$, $v \mapsto f(v, -)$, являются изоморфизмами.

Теорема 7.17. *Для замкнутого многообразия M спаривание (27) невырожденно, если M ориентируемо или если поле \mathbf{k} имеет характеристику 2.*

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H_{n-i}(M; \mathbf{k}), \mathbf{k}) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

где h — гомоморфизм, задаваемый вычислением коцепей на цепях, а D^* — гомоморфизм, двойственный к изоморфизму двойственности Пуанкаре $D: H^i(M; \mathbf{k}) \rightarrow H_{n-i}(M; \mathbf{k})$. Композиция D^*h является изоморфизмом, так как h — изоморфизм для коэффициентов в поле \mathbf{k} в силу формул универсальных коэффициентов (теорема 5.6). С другой стороны, композиция D^*h переводит $\psi \in H^{n-i}(M; \mathbf{k})$ в гомоморфизм $\varphi \mapsto \psi([M] \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$, где последнее равенство следует из леммы 7.16. Отсюда следует, что D^*h — первый из изоморфизмов в определении невырожденного спаривания. Второй изоморфизм вытекает из коммутативности \smile -произведения. \square

Следствие 7.18. *Алгебра когомологий $H^*(M; \mathbf{k}) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M; \mathbf{k})$ связного замкнутого многообразия M является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо или если поле \mathbf{k} имеет характеристику 2.*

Доказательство. Условие $H^0(M; \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}$ вытекает из связности M . Конечномерность групп когомологий компактного многообразия оставим без доказательства (для гладких многообразий есть явная конструкция конечного клеточного разбиения, происходящая из теории Морса; для топологических многообразий см. [Ха, следствие П.9]).

Чтобы проверить, что гомоморфизм $H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), H^n(M; \mathbf{k}))$, $\psi \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \smile \psi)$, является изоморфизмом, рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M; \mathbf{k}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), H^n(M; \mathbf{k})) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M; \mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

где последний изоморфизм задаётся композицией с изоморфизмом $H^n(M; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{k}$ вычисления n -коцепи на фундаментальном классе. Приведённая выше композиция есть изоморфизм D^*h из доказательства теоремы 7.17. Поэтому первый гомоморфизм в композиции также является изоморфизмом. \square

Билинейное спаривание (27) при $n = 2\ell$ и $i = \ell$ задаёт невырожденную билинейную функцию на средней группе когомологий $H^\ell(M; \mathbf{k})$ замкнутого ориентированного многообразия. Эта билинейная функция кососимметрическая, если ℓ нечётно, и симметрическая, если ℓ чётно (т. е. $n = 4k$).

Сигнатура (разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в диагональном виде) невырожденной симметрической билинейной функции

$$H^{2k}(M; \mathbb{R}) \times H^{2k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

является гомотопическим инвариантом замкнутого ориентированного $4k$ -мерного многообразия M и называется его *сигнатурой*.

7.7. Двойственность для многообразий с краем. Топологическим *многообразием с краем* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, для каждой точки $x \in M$ которого существует окрестность U , гомеоморфная открытому подмножеству V в полупространстве

$$\mathbb{R}_{\geq}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Если такой гомеоморфизм переводит точку $x \in M$ в точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n = 0$, то согласно вырезанию мы имеем $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}_{\geq}^n, \mathbb{R}_{\geq}^n \setminus \{0\}) = 0$. Если

же $x \in M$ переходит при гомеоморфизме в точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n > 0$, то $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Подмножество

$$\partial M = \{x \in M : H_n(M, M \setminus \{x\}) = 0\}$$

называется *краем* многообразия M . При любом гомеоморфизме между открытым множеством $U \subset M$ и открытым множеством $V \subset \mathbb{R}_{\geq}^n$ точки края переходят в точки с $x_n = 0$. Край ∂M является $(n-1)$ -мерным многообразием без края.

Гладкое многообразие с краем определяется аналогично гладкому многообразию без края, при помощи гладкого атласа, в котором отображения перехода являются гладкими отображениями на открытых подмножествах в \mathbb{R}_{\geq}^n . (Отображение между открытыми подмножествами в \mathbb{R}_{\geq}^n называется *гладким*, если оно является ограничением гладкого отображения между открытыми подмножествами в \mathbb{R}^n .)

Многообразие M с краем называется *ориентируемым*, если многообразие $M \setminus \partial M$ ориентируемо.

Для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$ (задача). Такая окрестность называется *воротником* края ∂M .

Используя воротник, мы получаем гомотопическую эквивалентность (деформационную ретракцию) $M \setminus \partial M \xrightarrow{\cong} M$. Отсюда получаем изоморфизм

$$H_i(M, \partial M) \cong H_i(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H_i(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon)$$

для $0 < \varepsilon < 1$, где $K_\varepsilon \subset M \setminus \partial M$ — компактное подмножество. Применяя лемму 7.4 к многообразию $M \setminus \partial M$ и компактному подмножеству K_ε , получаем, что если $M \setminus \partial M$ ориентировано, то существует единственный элемент $[M] \in H_n(M, \partial M)$, ограничение которого даёт локальные ориентации во всех точках $x \in M \setminus \partial M$. Класс $[M] \in H_n(M, \partial M)$ называется *фундаментальным классом* компактного ориентированного многообразия M с краем.

Теорема 7.19 (двойственность Пуанкаре–Лefшеца). *Пусть M — компактное ориентированное n -мерное многообразие с краем и $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы двойственности*

$$\begin{aligned} H^k(M, \partial M) &\rightarrow H_{n-k}(M), & \varphi &\mapsto [M] \frown \varphi, \\ H^k(M) &\rightarrow H_{n-k}(M, \partial M), & \varphi &\mapsto [M] \frown \varphi, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Теорема 7.15 даёт изоморфизм

$$D: H_c^k(M \setminus \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M \setminus \partial M).$$

Из гомотопической эквивалентности $M \setminus \partial M \xrightarrow{\cong} M$ получаем изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_{n-k}(M \setminus \partial M) &\cong H_{n-k}(M), \\ H^k(M, \partial M) &\cong H^k(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon). \end{aligned}$$

Так как любое компактное подмножество $K \subset M \setminus \partial M$ содержится в некотором K_ε , получаем

$$H_c^k(M \setminus \partial M) = \varinjlim H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K) \cong H^k(M, \partial M).$$

Тогда изоморфизм D превращается в первый из доказываемых изоморфизмов. Доказательство второго изоморфизма остаётся в качестве задачи. \square

Задачи и упражнения.

7.20. Докажите, что S^n , T^n , $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

7.21. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x .

7.22. Докажите, что ориентируемое многообразие R -ориентируемо для любого коммутативного кольца R с единицей, а неориентируемое многообразие R -ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R .

7.23. Докажите, что многообразия S^n , T^n , $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

7.24. Докажите, что $H_c^i(X) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K)$, где прямой предел берётся по компактным подмножествам $K \subset \bar{X}$.

7.25. Пусть пространство X представлено в виде объединения последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \dots$, причём любое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором V_i . Докажите, что $H_k(M) = \varinjlim H_k(V_i)$.

7.26. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i: N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^*y, [N] \rangle = \langle x \smile y, [M] \rangle.$$

7.27. Определим действие группы \mathbb{Z}_7 на S^5 формулой

$$\tau \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}} z_0, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{7}} z_1, e^{\frac{2\pi i \cdot 5}{7}} z_2),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий S^5/\mathbb{Z}_7 с коэффициентами в \mathbb{Z} и с коэффициентами в \mathbb{Z}_7 .

7.28. *Связной суммой* $M \# N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы? Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$;

б) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

7.29. Докажите, что если n -мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M \# N) = H_i(M) \oplus H_i(N)$ при $0 < i < n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

7.30. Докажите, что для замкнутых n -мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n)$.

7.31. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g . Докажите, что отображение $S_g \rightarrow S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g \geq h$.

7.32. Вычислите кольцо когомологий

- а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$ и $x_2 = x_4 = 0$ в \mathbb{R}^4 ;
- б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = x_1 = 0$ и $x_5 = x_2 = 0$ в \mathbb{R}^5 ;
- в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$ и $z_2 = z_4 = 0$ в \mathbb{C}^4 ;
- г) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = z_5 = 0$, $z_4 = z_1 = 0$ и $z_5 = z_2 = 0$ в \mathbb{C}^5 .

7.33. Докажите, что для замкнутого ориентируемого $(4n+2)$ -мерного многообразия M ранг группы $H^{2n+1}(M)$ чётный.

7.34. Вычислите сигнатуру многообразий $\mathbb{C}P^2$ и $S^2 \times S^2$. Для данного целого k постройте связное замкнутое ориентированное многообразие сигнатуры k .

7.35. Докажите, что для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$.

7.36. Докажите второй изоморфизм в теореме 7.19.

7.37. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

7.38. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n , причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т.е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите *изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина*:

$$\tilde{H}_i(S^n - K) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

7.39. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1} . Определим *двойственный комплекс*

$$\hat{K} = \{I \subset [m] : [m] \setminus I \notin K\},$$

т.е. наборами вершин симплексов из \hat{K} являются дополнения до наборов вершин, не порождающих симплексы в K . Докажите изоморфизмы групп симплициальных (ко)гомологий:

$$\tilde{H}_j(K) \cong \tilde{H}^{m-3-j}(\hat{K}).$$

Это комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

8. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

8.1. Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения. *Локально тривиальным расслоением* (или просто *расслоением*) называется четвёрка (E, B, F, p) ,

где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \rightarrow B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_U} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & & U \end{array}$$

Гомеоморфизм φ_U называется *тривиализацией* расслоения над U . Пространство E называется *тотальным пространством*, B *базой*, а F *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p: E \rightarrow B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой x* и обозначается E_x ; каждый слой гомеоморфен F . Как множество, тотальное пространство E предстает собой объединение слоёв $\bigcup_{x \in B} E_x$, параметризованных точками базы.

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в диаграмме выше можно положить $U = B$; это означает, что $E \cong B \times F$.

Отображением или *морфизмом* расслоений $p': E' \rightarrow B'$ и $p: E \rightarrow B$ называется пара отображений $\tilde{f}: E' \rightarrow E$ и $f: B' \rightarrow B$, входящих в коммутативную диаграмму

$$(28) \quad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Важным случаем морфизма является *индуцированное расслоение*. Говорят, что расслоение $p': E' \rightarrow B'$ *индуцировано* расслоением $p: E \rightarrow B$ при помощи отображения $f: B' \rightarrow B$, если

$$E' = \{(e, b') \in E \times B' : p(e) = f(b')\}$$

— расслоенное произведение, т.е. диаграмма (28) является декартовым квадратом. Пространство индуцированного расслоения обозначается f^*E . В этом случае отображение \tilde{f} отождествляет слой индуцированного расслоения $p': f^*E \rightarrow B'$ над $b' \in B'$ со слоем расслоения $p: E \rightarrow B$ над $f(b') \in B$. Если $f: B' \hookrightarrow B$ — вложение, то индуцированное расслоение $p': f^*E \rightarrow B'$ есть *ограничение* $p: E \rightarrow B$ на B' . Если $B = pt$, то индуцированное расслоение тривиально.

Локально тривиальное расслоение (E, B, F, p) называется *гладким*, если E, B, F — гладкие многообразия, $p: E \rightarrow B$ — гладкое отображение и тривиализации φ_U являются диффеоморфизмами.

Пример 8.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F .
2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.
3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 : z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 : z_1 \neq 0\}$.

Локально тривиальное расслоение $p: E \rightarrow B$ со слоем $F = \mathbb{R}^n$ называется *вещественным n -мерным векторным расслоением*, если ограничение каждой тривиализации $\varphi_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ на каждый слой является линейным изоморфизмом $E_x \cong x \times \mathbb{R}^n$. Аналогично определяется *комплексное n -мерное векторное расслоение* (со слоем \mathbb{C}^n). Векторные расслоения обычно обозначаются греческими буквами ξ, η, γ и т. д.

Если $\varphi_{U_\alpha}: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и $\varphi_{U_\beta}: p^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^n$ — две тривиализации векторного расслоения ξ над U_α и U_β , соответственно, то определены *отображения перехода*

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad g_{\alpha\beta}(x) = (\varphi_{U_\alpha} \circ \varphi_{U_\beta}^{-1})|_{x \times \mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$(29) \quad g_{\alpha\alpha}(x) = \text{id}, \quad g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = \text{id}$$

для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Если задано открытое покрытие $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и отображения перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющие соотношениям (29), то можно определить векторное расслоение $p: E \rightarrow B$, положив

$$(30) \quad E = \left(\bigcup_{\alpha} (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \right) / \sim,$$

где $(x, v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)(v))$ для $x \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{R}^n$.

Пример 8.2. *Тавтологическое расслоение* над вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ — это одномерное векторное расслоение $\gamma = \gamma_{n, \mathbb{R}}^1$, слоем которого над точкой $\mathbb{R}P^n$, задаваемой прямой $\ell \in \mathbb{R}^{n+1}$, является сама эта прямая. Таким образом, пространство расслоения γ есть

$$E\gamma = \{(\ell, x): \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{R}^{n+1}, x \in \ell\}.$$

Аналогично определяется тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma_{n, \mathbb{C}}^1$ над $\mathbb{C}P^n$.

Сечением локально тривиального расслоения $p: E \rightarrow B$ называется отображение $s: B \rightarrow E$ такое, что $p \circ s = \text{id}: B \rightarrow B$. Векторное n -мерное расслоение над B тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет n сечений s_1, \dots, s_n , таких что векторы $s_1(x), \dots, s_n(x)$ линейно независимы для каждой точки $x \in B$.

Морфизмом векторных расслоений $p': E' \rightarrow B'$ и $p: E \rightarrow B$ называется морфизм (28), в котором ограничение отображения $\tilde{f}: E' \rightarrow E$ на каждый слой E_x линейно. Если при этом $B = B'$ и $f = \text{id}$, то такой морфизм называется *морфизмом векторных расслоений над B* . Морфизм векторных расслоений, ограничение которого на каждый слой инъективно (соответственно, сюръективно, биективно), называется *моморфизмом* (соответственно, *эпиморфизмом*, *изоморфизмом*).

Мы будем обозначать тривиальное вещественное и комплексное n -мерное расслоение над данной базой B через $\underline{\mathbb{R}}^n$ и $\underline{\mathbb{C}}^n$, соответственно. Для векторных расслоений над одной и той же базой B определены те же операции, что и над векторными пространствами. В частности, определены *прямая сумма* $\xi \oplus \eta$, *тензорное произведение* $\xi \otimes \eta$, *Ном-расслоение* $\text{Ном}(\xi, \eta)$, *двойственное расслоение* $\xi^* = \text{Ном}(\xi, \underline{\mathbb{R}})$, *внешняя степень* $L^k \xi$, *симметрическая степень* $S^k \xi$ и т. д.

Для вещественного векторного расслоения ξ его *комплексификация* $\xi_{\mathbb{C}} = \xi \otimes \mathbb{C}$ является комплексным расслоением той же размерности. Для комплексного n -мерного расслоения η его *овеществление* $\eta_{\mathbb{R}}$ является вещественным $2n$ -мерным расслоением. Имеют место изоморфизмы $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ и $(\eta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \eta \oplus \bar{\eta}$, где $\bar{\eta}$ — комплексно сопряжённое расслоение.

Предложение 8.3. *Векторное расслоение ξ над компактной хаусдорфовой базой вкладывается в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$ над той же базой для некоторого N , т. е. существует мономорфизм расслоений $j: \xi \hookrightarrow \underline{\mathbb{R}}^N$.*

Доказательство. Пусть $p: E \rightarrow B$ — данное расслоение. Так как B компактно, существует конечное покрытие $B = U_1 \cup \dots \cup U_k$ открытыми множествами, над которыми расслоение тривиально. Пусть f_1, \dots, f_k — разбиение единицы, подчинённое этому открытому покрытию, т. е. функция $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, неотрицательна, её носитель содержится в U_i и $\sum_{i=1}^k f_i = 1$. Рассмотрим тривиализации $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$. Для $i = 1, \dots, k$ определим непрерывное отображение

$$f_i \cdot \varphi_i: E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot \varphi_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ ((p(e), 0)) & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Положим $N = nk$ и отождествим \mathbb{R}^N с $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}^n$. Тогда требуемый мономорфизм $j: \xi \hookrightarrow \underline{\mathbb{R}}^N$ задаётся формулой

$$j(e) = (f_1 \cdot \varphi_1(e), \dots, f_k \cdot \varphi_k(e))$$

для $e \in E$. □

Римановой метрикой на вещественном векторном расслоении ξ называется положительно определённая симметрическая билинейная функция (скалярное произведение), заданная в каждом слое E_x , такая что компоненты её матрицы в координатах локальных тривиализаций являются непрерывными функциями от $x \in B$ (гладкими функциями в случае гладкого расслоения). Аналогично определяется *эрмитова метрика* на комплексном расслоении.

Предложение 8.4. *Риманова (эрмитова) метрика существует на вещественном (комплексном) расслоении над компактной хаусдорфовой базой.*

Доказательство. Вложим расслоение в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$ согласно предложению 8.3, введём метрику на \mathbb{R}^N и ограничим её на слои расслоения. □

Предложение 8.5. *Для любого векторного расслоения ξ над компактной хаусдорфовой базой B существует расслоение η над той же базой, такое что $\xi \oplus \eta \cong \underline{\mathbb{R}}^N$ (тривиальное расслоение).*

Доказательство. Вложим пространство расслоения в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$, введём метрику на \mathbb{R}^N и возьмём в качестве η расслоение, слоем которого над $x \in B$ является ортогональное дополнение в \mathbb{R}^N к слою E_x расслоения ξ . □

8.2. Касательное и нормальное расслоение. Пусть M — n -мерное гладкое многообразие с гладким атласом $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$, $\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \xrightarrow{\cong} V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ и гладкими отображениями замены координат $\psi_{\alpha\beta}: \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$.

Касательное пространство $\mathcal{T}_x M$ состоит из всех касательных векторов к M в точке x . Объединение $\mathcal{T}M = \bigcup_{x \in M} \mathcal{T}_x M$ касательных пространств во всех точках

является тотальным пространством n -мерного гладкого вещественного векторного расслоения над M , называемого *касательным расслоением*. Его можно определить как расслоение (30) над M с тривиализующим атласом $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto \text{Jac}_x \psi_{\alpha\beta},$$

где $\text{Jac}_x \psi_{\alpha\beta}$ обозначает матрицу Якоби из частных производных отображения замены координат в точке $x \in M$.

По определению, сечениями касательного расслоения $\mathcal{T}M$ являются векторные поля на M . Гладкое многообразие M называется *параллелизуемым*, если касательное расслоение $\mathcal{T}M$ тривиально, т.е. на M существует $n = \dim M$ векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке $x \in M$.

Гладкое многообразие M называется *почти комплексным*, если в касательном расслоении $\mathcal{T}M$ можно ввести структуру комплексного векторного расслоения. Как и в случае векторных пространств, комплексная структура на вещественном расслоении $\mathcal{T}M$ задаётся выбором морфизма расслоений $I: \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M$, такого что $I^2 = -\text{id}_{\mathcal{T}M}$. Почти комплексное многообразие имеет чётную размерность. Если само M является комплексно-аналитическим многообразием с голоморфным атласом $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ (и голоморфными отображениями замены координат), то касательное расслоение $\mathcal{T}M$ имеет естественную комплексную структуру. Однако не любая почти комплексная структура происходит из комплексной структуры на M .

Пусть M — гладкое подмногообразие в гладком многообразии N . *Нормальным расслоением* M в N называется фактор-расслоение $(\mathcal{T}N|_M)/\mathcal{T}M$, где $\mathcal{T}N|_M$ обозначает ограничение касательного расслоения к N на M . Нормальное расслоение обозначается $\nu(M \subset N)$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \subset N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к $\mathcal{T}_x M$ в $\mathcal{T}_x N$.

Опишем касательное расслоение к вещественному и комплексному проективному пространству. Наряду с одномерным тавтологическим расслоением γ (пример 8.2) рассмотрим его ортогональное дополнение γ^\perp , слоем которого над прямой $\ell \in \mathbb{C}P^n$ является ортогональное дополнение к этой прямой в \mathbb{C}^{n+1} :

$$E\gamma^\perp = \{(\ell, v): \ell - \text{одномерное подпространство в } \mathbb{C}^{n+1}, v \in \ell^\perp\}.$$

Тогда мы имеем $\gamma \oplus \gamma^\perp = \underline{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Предложение 8.6. $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и проекцию $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $p(x) = \pm x$. Касательное расслоение сферы есть

$$\mathcal{T}S^n = \{(x, v): x, v \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1, (x, v) = 0\}.$$

Дифференциал проекции $Dp: \mathcal{T}S^n \rightarrow \mathcal{T}\mathbb{R}P^n$ переводит касательный вектор (x, v) в касательный вектор $\pm(x, v)$ к $\mathbb{R}P^n$, где

$$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n = \{\pm(x, v): x, v \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1, (x, v) = 0\}.$$

Тогда требуемый изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ отображает $\pm(x, v) \in \mathcal{T}\mathbb{R}P^n$ в морфизм $\gamma \rightarrow \gamma^\perp$, переводящий (ℓ, x) в (ℓ, v) , где $x \in \ell$, $v \in \ell^\perp$.

Изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ доказывается аналогично (задача). \square

Теорема 8.7. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \underbrace{\gamma \oplus \dots \oplus \gamma}_{n+1}, \quad \mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}}_{n+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma, \gamma) = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) = \text{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^{n+1}) \cong \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}}_{n+1},$$

где во втором равенстве мы воспользовались тем, что одномерное расслоение $\text{Hom}(\gamma, \gamma)$, имеет всюду ненулевое сечение, задаваемое тождественным морфизмом, и потому тривиально. \square

8.3. Многообразие Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта.

Множество всех k -мерных линейных подпространств (плоскостей) в \mathbb{R}^N называется вещественным *многообразием Грассмана* (или *грассманианом*) и обозначается $G_k(\mathbb{R}^N)$. Аналогично определяется комплексное многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Подпространство $\pi \subset \mathbb{R}^N$ размерности k задаётся k -поливектором $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k \mathbb{R}^N$ или, в координатной записи, классом эквивалентности $[P]$ матриц P размера $k \times N$ с точностью до умножения слева на матрицу из $GL(k, \mathbb{R})$ (в строках матрицы стоят координаты базисных векторов v_1, \dots, v_k подпространства π). Для набора индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ будем обозначать через $\mathbb{R}_{i_1 \dots i_k}$ соответствующее k -мерное координатное подпространство в \mathbb{R}^N и через $p_{i_1 \dots i_k}$ определитель подматрицы в P , образованной столбцами с номерами i_1, \dots, i_k . Рассмотрим подмножество

$$\begin{aligned} U_{i_1 \dots i_k} &= \{ \pi \in G_k(\mathbb{R}^N) : \pi \text{ проецируется без вырождений на } \mathbb{R}_{i_1 \dots i_k} \} = \\ &= \{ [P] : p_{i_1 \dots i_k} \neq 0 \}. \end{aligned}$$

Тогда $U_{i_1 \dots i_k}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{k(N-k)}$ (с координатами — элементами матрицы P вне столбцов с номерами i_1, \dots, i_k) и атлас $\{U_{i_1 \dots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{R}^N)$ структуру гладкого многообразия размерности $k(N-k)$.

В случае комплексного грассманиана атлас $\{U_{i_1 \dots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{C}^N)$ структуру комплексно-аналитического многообразия комплексной размерности $k(N-k)$. Построения в вещественном и комплексном случае абсолютно аналогичны, далее в этом разделе будем рассматривать комплексный случай.

Набор из $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ чисел $\{p_{i_1 \dots i_k}\}$ является координатами поливектора $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ в стандартном базисе $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}$ внешней степени $\Lambda^k \mathbb{C}^N$ и называется *координатами Плюккера* k -мерной плоскости π . Они обобщают однородные координаты в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{N-1} = G_1(\mathbb{C}^N)$ и удовлетворяют системе уравнений, называемых *соотношениями Плюккера*.

Теорема 8.8 (вложение и соотношения Плюккера). *Отображение*

$$G_k(\mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{C}P(\Lambda^k \mathbb{C}^N) = \mathbb{C}P^{C_N^k - 1}, \quad \pi \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] = [\dots : p_{i_1 \dots i_k} : \dots]$$

является вложением гладкого подмногообразия, а его образ задаётся соотношениями

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r p_{i_1 \dots i_{k-1} j_r} p_{j_1 \dots \widehat{j_r} \dots j_{k+1}} = 0$$

для любых наборов (i_1, \dots, i_{k-1}) и (j_1, \dots, j_{k+1}) , где мы полагаем $p_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = (-1)^\sigma p_{i_1 \dots i_k}$ для любой перестановки σ .

Соотношения Плюккера доказываются в линейной алгебре, мы лишь приведём первый пример нетривиального соотношения.

Пример 8.9. Грассманиан $G_2(\mathbb{C}^4)$ вкладывается в $\mathbb{C}P(L^2\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}P^5$ с однородными координатами $[p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$ как гиперповерхность, заданная квадратичным уравнением

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0,$$

которое получается, если положить $(i_1) = (1)$ и $(j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 4)$ в теореме 8.8.

Опишем также клеточное разбиение многообразия Грассмана на клетки Шуберта.

Рассмотрим стандартный координатный флаг (последовательность вложенных подпространств) $\{0\} \subset \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}^N$. Для k -мерной плоскости $\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)$ рассмотрим последовательность

$$0 \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^1) \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^2) \leq \dots \leq \dim(\pi \cap \mathbb{C}^N) = k.$$

Два соседних члена этой последовательности отличаются не более чем на 1, т. е. в последовательности есть в точности k «скачков». Эти скачки задаются символами Шуберта

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k), \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N, \quad \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i, \quad \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1.$$

Рассмотрим множество k -плоскостей, «скачки» которых задаются в точности символом \mathbf{s} :

$$e(\mathbf{s}) = \{\pi \in G_k(\mathbb{C}^N) : \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i}) = i, \dim(\pi \cap \mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1 \text{ для } i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Тогда $e(\mathbf{s})$ называется *клеткой Шуберта*. Очевидно,

$$G_k(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{\mathbf{s}=(s_1, \dots, s_k)} e(\mathbf{s}), \quad \text{причём } e(\mathbf{s}) \cap e(\mathbf{s}') = \emptyset \text{ при } \mathbf{s} \neq \mathbf{s}'.$$

Легко видеть, что $\pi \in e(\mathbf{s})$ тогда и только тогда, когда плоскость π задаётся матрицей

$$P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где 1 в i -й строке стоит на s_i -м месте, а на позициях, обозначенных *, стоят произвольные числа. Такой вид матрицы, задающей плоскость $\pi \in e(\mathbf{s})$, определён однозначно с точностью до умножения слева на квадратную нижнетреугольную матрицу с 1 на диагонали. Отсюда следует, что $e(\mathbf{s})$ гомеоморфно открытому шару размерности

$$\dim e(\mathbf{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)).$$

Введём частичный порядок на символах Шуберта: $\mathbf{s}' \leq \mathbf{s}$, если $s'_i \leq s_i$ для каждого $i = 1, \dots, k$. Доказательство следующего утверждения мы опустим (см. [МС] или [На]).

Теорема 8.10 (клеточное разбиение Шуберта). *Клетки Шуберта $e(\mathbf{s})$, соответствующие всевозможным символам $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N$, задают клеточное разбиение многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$. При этом замыкание клетки $e(\mathbf{s})$ содержится в объединении клеток $e(\mathbf{s}')$ с $\mathbf{s}' \leq \mathbf{s}$.*

Имеем вложение грассманианов $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, соответствующее вложению $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{N+1}$ по первым N координатам.

Предложение 8.11. $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ является клеточным подпространством относительно разбиения на клетки Шуберта. При этом каждая клетка Шуберта размерности $\leq 2(N - k)$ в $G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ лежит в $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Доказательство. Рассмотрим клетку $e(\mathbf{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, где $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq N + 1$. Ясно, что $e(\mathbf{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда $s_k \leq N$. Поэтому $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ — замкнутое подмножество, представляющее собой объединение клеток, т.е. клеточное подпространство. Если $e(\mathbf{s}) \not\subset G_k(\mathbb{C}^N)$, то $s_k = N + 1$ и, следовательно,

$$\dim e(\mathbf{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)) \geq 2(s_k - k) > 2(N - k). \quad \square$$

Разбиением целого числа $d \geq 0$ называется неупорядоченное множество $\omega = (i_1, \dots, i_p)$ натуральных чисел, таких что $i_1 + \dots + i_p = d$.

Предложение 8.12. Число клеток размерности $2d$ в разбиении Шуберта грассманиана $G_k(\mathbb{C}^N)$ равно числу разбиений числа d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N - k$.

Доказательство. Клетки размерности $2d$ соответствуют символам Шуберта \mathbf{s} , таким что $d = (s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)$. Рассмотрим множество $\omega = (i_1, \dots, i_p)$, получаемое удалением нулей из последовательности $s_1 - 1, s_2 - 2, \dots, s_k - k$. Тогда $i_1 + \dots + i_p = d$, т.е. ω — разбиение d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N - k$, так как $s_k \leq N$. Обратно, каждое такое разбиение задаёт символ \mathbf{s} (надо упорядочить (i_1, \dots, i_p) по неубыванию, дописать слева $k - p$ нулей и к каждому члену полученной последовательности прибавить его номер). \square

8.4. Классификация векторных расслоений. Бесконечномерным грассманианом $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется множество всех k -мерных подпространств в $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_N \mathbb{R}^N$. Каждое k -мерное подпространство в \mathbb{R}^∞ лежит в некотором \mathbb{R}^N , так что $G_k = \bigcup_N G_k(\mathbb{R}^N)$. На G_k вводится слабая топология: подмножество $A \subset G_k$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты пересечения $A \cap G_k(\mathbb{R}^N)$ для всех N .

Теорема 8.13. Клетки $e(\mathbf{s})$, соответствующие символам Шуберта $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, где $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$, задают клеточное разбиение бесконечномерного грассманиана G_k . Число клеток размерности d равно числу разбиений числа d на не более чем k слагаемых.

Доказательство. Это следует из теоремы 8.10 и предложений 8.11 и 8.12. \square

Пример 8.14. Тавтологическое расслоение над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$ — это k -мерное векторное расслоение $\gamma^k = \gamma_{N,\mathbb{R}}^k$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{R}^N)$ является k -плоскость π . Пространство тавтологического расслоения γ^k есть

$$E_k = \{(\pi, v) : \pi \text{ — } k\text{-мерное подпространство в } \mathbb{R}^N, v \in \pi\}.$$

Также определено тавтологическое расслоение γ^k над $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$.

Тавтологическое расслоение γ^k лежит в основе классификационной теоремы.

Теорема 8.15. Пусть B — хаусдорфово паракомпактное пространство (например, клеточное). Тогда

- а) любое k -мерное векторное расслоение ξ над B изоморфно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения γ^k при помощи некоторого отображения $f: B \rightarrow G_k$, т. е. $\xi \cong f^*\gamma^k$;
- б) индуцированные расслоения $f_0^*\gamma^k$ и $f_1^*\gamma^k$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $f_0: B \rightarrow G_k$ и $f_1: B \rightarrow G_k$ гомотопны.

Таким образом, множество $\text{Vect}^k(B)$ классов изоморфизма k -мерных векторных расслоений над B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[B, G_k]$ классов гомотопных отображений $B \rightarrow G_k$.

Доказательство. Мы опустим некоторые детали доказательства; подробности можно найти в [Ми] или [На, Ch. 1].

Пусть расслоение ξ задаётся проекцией $p: E \rightarrow B$, а тавтологическое расслоение γ^k — проекцией $p_k: E_k \rightarrow G_k$. Прежде всего заметим, что построение изоморфизма $\xi \cong f^*\gamma^k$ эквивалентно построению отображения $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, ограничение которого на каждый слой является линейным мономорфизмом. Действительно, если $\xi \cong f^*\gamma^k$, то отображение g задаётся композицией $E \cong f^*E_k \rightarrow E_k \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, где последнее отображение есть $(\pi, v) \mapsto v$. Обратно, если дано $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, то зададим $f: B \rightarrow G_k$ по формуле $f(x) = g(E_x)$.

Вначале докажем а) в случае, когда база B компактна. Тогда существует вложение $j: E \hookrightarrow B \times \mathbb{R}^N$ в тривиальное расслоение (предложение 8.3). Композиция с проекцией $B \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ даёт требуемое отображение $g: E \rightarrow \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$. В общем случае рассуждение аналогично доказательству предложения 8.3 и использует разбиение единицы. Существует счётное покрытие $B = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ открытыми множествами, над которыми расслоение ξ тривиально, и разбиение единицы $\{f_i\}$, подчинённое этому покрытию. Последнее означает, что функция $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, её носитель содержится в U_i , в каждой точке $x \in B$ лишь конечное число f_i отлично от нуля и $\sum_i f_i = 1$. (Существование разбиения единицы следует из того, что клеточные пространства паракомпактны.) Для каждого i определим $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ как композицию тривиализации $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^k$ и проекции. Далее определим

$$g_i: E \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot h_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ 0 & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Отождествим \mathbb{R}^∞ с $\bigoplus_{i=1}^\infty \mathbb{R}^k$. Тогда требуемое отображение $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ задаётся формулой $g(e) = (g_1(e), \dots, g_i(e), \dots)$.

Теперь докажем б). Пусть $f_0^*E_k \cong f_1^*E_k \cong E$, изоморфизм $f_0^*E_k \cong E$ задаётся отображением $g_0: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, а изоморфизм $f_1^*E_k \cong E$ задаётся отображением $g_1: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$. Чтобы построить гомотопию $f_t: B \rightarrow G_k$, $t \in [0, 1]$, между f_0 и f_1 достаточно построить гомотопию $g_t: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ между g_0 и g_1 , такую что каждое g_t мономорфно на слоях; тогда $f_t(x) = g_t(E_x)$ даёт требуемую гомотопию.

Рассмотрим гомотопию $L_t: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, $L_t(r_1, r_2, \dots) = (1-t)(r_1, r_2, \dots) + t(r_1, 0, r_2, 0, \dots)$. Тогда каждое L_t линейно, $L_0 = \text{id}$, а L_1 «прореживает» координаты, так что на чётных местах стоят нули. Композиция с L_t задаёт гомотопию между g_0 и отображением $g'_0 = L_1 \circ g_0$, которое имеет ненулевые координаты только на нечётных местах. Аналогично строим гомотопию между g_1 и отображением $g'_1: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, которое имеет ненулевые координаты только на чётных местах. Теперь $g'_t = (1-t)g'_0 + tg'_1$ есть гомотопия между g'_0 и g'_1 . В результате получаем последовательность гомотопий

$g_0 \simeq g'_0 \simeq g'_1 \simeq g_1$, где каждое промежуточное отображение $E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ мономорфно на слоях. Следовательно, $f_0 \simeq f_1$.

Теперь пусть $f_0 \simeq f_1$ при помощи гомотопии $F: B \times I \rightarrow G_k$. Рассмотрим индуцированное расслоение $F^*\gamma^k$ над $B \times I$. Его ограничения на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (доказательство этого факта — задача). Первое ограничение есть $f_0^*\gamma^k$, а второе — $f_1^*\gamma^k$. \square

Ввиду теоремы 8.15 тавтологическое расслоение γ^k также называется *универсальным k -мерным векторным расслоением*, а его база $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством k -мерных вещественных векторных расслоений* и обозначается $BO(k)$. Говорят, что отображение $f: B \rightarrow G_k$, для которого $\xi \cong f^*\gamma^k$, *классифицирует* расслоение ξ .

Теорема 8.15 также имеет место для комплексных векторных расслоений. Бесконечномерный комплексный грассманиан $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством k -мерных комплексных векторных расслоений* и обозначается $BU(k)$.

Задачи и упражнения.

8.16. Приведите пример локально тривиального расслоения $p: E \rightarrow B$ со слоем \mathbb{R}^n , не являющегося векторным.

8.17. При помощи эрмитовой метрики установите канонический изоморфизм $\xi^* \cong \bar{\xi}$ между двойственным комплексным расслоением $\xi^* = \text{Hom}(\xi, \underline{\mathbb{C}})$ и комплексно сопряжённым расслоением $\bar{\xi}$.

8.18. Докажите, что пространство тавтологического расслоения $\gamma_{1, \mathbb{R}}^1$ над $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно открытой ленте Мёбиуса (проективной плоскости с выколотой точкой).

8.19. Докажите, что тавтологическое расслоение $\gamma_{n, \mathbb{R}}^1$ над $\mathbb{R}P^n$ нетривиально при $n \geq 1$.

8.20. Задайте явно отображения перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$ тавтологического расслоения $\gamma_{n, \mathbb{C}}^1$ для покрытия $\mathbb{C}P^n$ стандартными аффинными картами.

8.21. Пусть для открытого покрытия $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ даны два набора отображений перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ и $g'_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющие условиям (29). Докажите, что задаваемые ими векторные расслоения ξ и ξ' изоморфны тогда и только тогда, когда существует набор отображений $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $\alpha \in A$, удовлетворяющий соотношениям $g'_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)f_\beta^{-1}(x)$ для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

8.22. Докажите, что

- на сфере S^{2n+1} существует векторное поле без нулей;
- на сфере S^{11} существуют три линейно независимых векторных поля без нулей;
- сфера S^{2n} не параллелизуема при $n \geq 1$.

8.23. Пусть $\mathcal{V}(B)$ — категория векторных расслоений и морфизмов над компактным хаусдорфовым пространством B . Докажите, что

- пространство сечений $\Gamma(\xi)$ векторного расслоения ξ является конечно порождённым проективным модулем над кольцом $C(B)$ непрерывных функций на B (модуль называется проективным, если он является прямым слагаемым свободного модуля);

б) категория $\mathcal{V}(B)$ эквивалентна категории конечно порождённых проективных модулей над $C(B)$, при этом тривиальные расслоения соответствуют свободным модулям (это утверждение известно как *теорема Свана*).

8.24. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}CP^n \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

8.25. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}G_k(\mathbb{R}^N) \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, где $\gamma = \gamma_{N,\mathbb{R}}^k$ — тавтологическое расслоение над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$, а γ^\perp — его ортогональное дополнение. Аналогично, $\mathcal{T}G_k(\mathbb{C}^N) \cong \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ для комплексного грассманиана.

8.26. Докажите, что если B компактно и хаусдорфово, то ограничения векторного расслоения $E \rightarrow B \times I$ на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (это также верно и в более общем случае паракомпактного и хаусдорфового B).

9. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ШТИФЕЛЯ–УИТНИ И ЧЖЕНЯ

Мы изложим два подхода к определению характеристических классов векторных расслоений. Первый основан на вычислении когомологий проективизации векторного расслоения; этот подход по-видимому является наиболее универсальным и применим также и для других теорий когомологий. Второй подход основан на непосредственном вычислении кольца когомологий классифицирующих пространств — бесконечномерных грассманианов.

9.1. Теорема Лере–Хирша. Для любого отображения $p: E \rightarrow B$ кольцо когомологий $H^*(E)$ является модулем над кольцом $H^*(B)$ по формуле $b \cdot e = p^*(b) \smile e$ для $b \in H^*(B)$, $e \in H^*(E)$.

Следующая теорема позволяет при некоторых условиях вычислять когомологии тотального пространства локально тривиально расслоения через когомологии базы.

Теорема 9.1 (Лере–Хирш). Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение и R — коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что

- 1) $H^k(F; R)$ — конечно-порождённый свободный R -модуль для любого k ;
- 2) существуют классы $v_j \in H^*(E; R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой F дают R -базис в $H^*(F; R)$.

Тогда $H^*(E; R)$ является свободным $H^*(B; R)$ -модулем с базисом $\{v_j\}$, т. е. отображение

$$\Phi_E: H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R), \quad b \otimes i^*(v_j) \mapsto p^*(b) \smile v_j,$$

является изоморфизмом R -модулей.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что B — клеточное пространство, этого будет достаточно для наших целей. Предположим вначале, что B конечномерно, $\dim B = n$. Утверждение очевидно при $n = 0$, так что можно предположить по индукции, что утверждение верно для $(n - 1)$ -мерного остова B^{n-1} .

Пусть $B' \subset B$ — подпространство, полученное удалением точки x_α из каждой n -мерной клетки $e_\alpha^n \subset B$. Тогда существует гомотопическая эквивалентность (деформационная ретракция) $B' \xrightarrow{\cong} B^{n-1}$. Из свойства поднятия гомотопии для расслоения

$E' \rightarrow B'$ получаем гомотопическую эквивалентность $E' \xrightarrow{\cong} p^{-1}(B^{n-1})$. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^*(B, B') \otimes_R H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B) \otimes_R H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B') \otimes_R H^*(F) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \Phi_{E, E'} & & \downarrow \Phi_E & & \downarrow \Phi_{E'} \\ \dots & \longrightarrow & H^*(E, E') & \longrightarrow & H^*(E) & \longrightarrow & H^*(E') \longrightarrow \dots \end{array}$$

Здесь нижняя строка — точная последовательность пары (E, E') , а верхняя строка получается из точной последовательности пары (B, B') тензорным умножением на свободный R -модуль $H^*(F)$. Коммутативность двух квадратов, показанных на диаграмме, следует из естественности входящих в них гомоморфизмов. Коммутативность квадрата, включающего кограничные гомоморфизмы, проверяется непосредственно:

$$\begin{array}{ccc} b' \otimes i^*(v_j) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & db' \otimes i^*(v_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^*(b') \smile v_j & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & d(p^*(b') \smile v_j) = p^*(db') \smile v_j, \end{array}$$

так как $dv_j = 0$.

Так как имеют место гомотопические эквивалентности $B' \simeq B^{n-1}$ и $E' \simeq p^{-1}(B^{n-1})$, отображение $\Phi_{E'}$ в диаграмме выше является изоморфизмом по предположению индукции. Докажем, что $\Phi_{E, E'}$ также является изоморфизмом. Для каждой выбранной точки x_α выберем открытое множество U_α , такое что $x_\alpha \subset U_\alpha \subset e_\alpha^n$ и ограничение расслоения $p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ тривиально. Положим $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и $U' = U \cap B'$. Мы имеем $H^*(B, B') \cong H^*(U, U')$ в силу вырезания и, аналогично, $H^*(E, E') \cong H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U')) \cong H^*(U \times F, U' \times F)$. Тогда отображение $\Phi_{E, E'}$ принимает вид

$$\Phi_{E, E'}: H^*(U, U') \otimes_R H^*(F) \rightarrow H^*(U \times F, U' \times F).$$

Это изоморфизм согласно формуле Кюннета (относительная версия теоремы 6.9). Теперь тот факт, что Φ_E является изоморфизмом (для конечного клеточного B) вытекает из 5-леммы, примененной к диаграмме выше.

В случае произвольного клеточного B рассмотрим n -мерный остов и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(B) \otimes_R H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B^n) \otimes_R H^*(F) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi_n \\ H^*(E) & \longrightarrow & H^*(p^{-1}(B^n)). \end{array}$$

Здесь горизонтальные отображения являются изоморфизмами в размерностях меньше n , а отображение Φ_n является изоморфизмом согласно конечномерному случаю. Следовательно, Φ является изоморфизмом в размерностях меньше n . Так как это верно для любого n , доказательство для клеточного B завершено. \square

9.2. Определение и свойства характеристических классов. Пусть ξ — вещественное n -мерное векторное расслоение $p: E \rightarrow B$. Его *проективизацией* называется множество $\mathbb{R}P(\xi) = \{\ell \in E_x\}$ всех одномерных подпространств во всех слоях расслоения ξ . Имеется проекция $\mathbb{R}P(p): \mathbb{R}P(\xi) \rightarrow B$, переводящая $\ell \in E_x$ в x . Слоем этой проекции над $x \in B$ является проективное пространство слоя E_x . Множество $\mathbb{R}P(\xi)$

отождествляется с факторпространством дополнения до нулевого сечения в E , тем самым на нём вводится топология. Тривиализации $p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ расслоения ξ определяют тривиализации $\mathbb{R}P(p)^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}P^{n-1}$ и тем самым задают на $\mathbb{R}P(\xi)$ структуру локально тривиального расслоения над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Над $\mathbb{R}P(\xi)$ определено *тавтологическое* одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, слоем которого над $\ell \in E_x$ является прямая ℓ (если $B = pt$, то $\gamma(\xi)$ превращается в тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^{n-1}$).

В силу теоремы 8.15 тавтологическое расслоение $\gamma(\xi)$ классифицируется некоторым отображением $f: \mathbb{R}P(\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$, т.е. $\gamma(\xi) = f^*(\gamma_{\mathbb{R}}^1)$, где $\gamma_{\mathbb{R}}^1$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v]$, где $v \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ — образующая, см. предложение 6.11. Таким образом, с расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^1(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

Теорема 9.2. Пусть ξ — вещественное n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством B . Тогда кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ от одной образующей $v_\xi \in H^1(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ по единственному соотношению

$$(31) \quad v_\xi^n + w_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \dots + w_{n-1}(\xi) \cdot v_\xi + w_n(\xi) \cdot 1 = 0,$$

где классы $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \dots, n$, определяются расслоением ξ .

Доказательство. Применим теорему Лере–Хирша (теорему 9.1) к расслоению $\mathbb{R}P(\xi)$ над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$. Первое условие теоремы выполнено автоматически, а для проверки второго условия заметим следующее. Как видно из доказательства теоремы 8.15, классифицирующее отображение $f: \mathbb{R}P(\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ тавтологического расслоения $\gamma(\xi)$ задаётся отображением $g: E\gamma(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, которое линейно на слоях. Поэтому ограничение отображения f на слой расслоения $\mathbb{R}P(\xi)$ есть стандартное вложение $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Если $i: \mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P(\xi)$ — вложение слоя, то $i^*(v_\xi) = i^*(f^*(v)) = v$ — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда $i^*(v_\xi^j) = v^j$ — образующая группы $H^j(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ для $j = 1, \dots, n-1$.

Из теоремы 9.1 следует, что $H^*(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ является свободным модулем над $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ с образующими $1, v_\xi, \dots, v_\xi^{n-1}$. Соотношение (31) — это разложение элемента $-v_\xi^n$ по базису $1, v_\xi, \dots, v_\xi^{n-1}$, а классы $w_i(\xi)$ — коэффициенты в разложении. \square

Классы $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \dots, n$, задаваемые соотношением (31), называются *характеристическими классами Штифеля–Уитни* n -мерного вещественного векторного расслоения ξ . Также формально положим $w_0(\xi) = 1$.

Аналогично определяется комплексная проективизация $\mathbb{C}P(\xi)$ комплексного n -мерного векторного расслоения ξ , состоящая из всех комплексных одномерных подпространств в слоях. Над $\mathbb{C}P(\xi)$ определено тавтологическое одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, которое классифицируется отображением $f: \mathbb{C}P(\xi) \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]$, но, в отличие от вещественного случая, образующая $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ определена неоднозначно (имеется две образующие, отличающиеся знаком). Выбор этой образующей определяет вид многих последующих формул. Мы возьмём в качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к гиперплоскости $\mathbb{C}P^{N-1} \subset \mathbb{C}P^N$ с канонической ориентацией, происходящей из комплексной структуры. В качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ мы выберем

ту, которая ограничивается на $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ при отображении когомологий, индуцированном вложением $\mathbb{C}P^N \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Таким образом, с комплексным расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^2(\mathbb{C}P(\xi); \mathbb{Z})$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 9.2.

Теорема 9.3. Пусть ξ — комплексное n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством B . Тогда кольцо $H^*(\mathbb{C}P(\xi); \mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B; \mathbb{Z})$ от одной образующей $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi); \mathbb{Z})$ по единственному соотношению

$$(32) \quad v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \dots + c_{n-1}(\xi) \cdot v_\xi + c_n(\xi) \cdot 1 = 0,$$

где классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, $i = 1, \dots, n$, определяются расслоением ξ .

Классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, $i = 1, \dots, n$, задаваемые соотношением (32), называются характеристическими классами Чженя n -мерного комплексного векторного расслоения ξ . Также формально положим $c_0(\xi) = 1$.

Свойства характеристических классов Штифеля–Уитни и Чженя описываются следующей теоремой (которую мы сформулируем для классов Чженя; формулировка и доказательство для классов Штифеля–Уитни абсолютно аналогичны).

Теорема 9.4. Имеем

- а) $c_i(\xi) = 0$, если $i > \dim \xi$;
- б) $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$, где $f^*\xi$ — расслоение, индуцированное отображением $f: B' \rightarrow B$;
- в) $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$ (формула Уитни);
- г) $c_1(\gamma^1) = -v$ для тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^n$.

Доказательство. Свойство а) следует из определения.

Для доказательства б) сначала заметим, что если $\bar{f}: \mathbb{C}P(f^*\xi) \rightarrow \mathbb{C}P(\xi)$ — отображение проективизаций, индуцированное отображением $f: B' \rightarrow B$, то $v_{f^*\xi} = \bar{f}^*(v_\xi)$ по определению класса $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi))$. Запишем (32) для расслоения $f^*\xi$:

$$0 = v_{f^*\xi}^n + c_1(f^*\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \dots + c_n(f^*\xi) \cdot 1 = 0.$$

С другой стороны, применив \bar{f}^* к (32) для ξ , получим

$$0 = \bar{f}^*(v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \dots + c_n(\xi) \cdot 1) = v_{f^*\xi}^n + f^*c_1(\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \dots + f^*c_n(\xi) \cdot 1.$$

Так как $1, v_{f^*\xi}, \dots, v_{f^*\xi}^{n-1}$ — базис свободного $H^*(B')$ -модуля $H^*(\mathbb{C}P(f^*\xi))$, из сравнения коэффициентов в последних двух формулах получаем $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$.

Докажем в). Пусть $\dim \xi = n$, $\dim \eta = m$. Рассмотрим вложения $i_\xi: \mathbb{C}P(\xi) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$ и $i_\eta: \mathbb{C}P(\eta) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, индуцированные вложением прямых слагаемых в $\xi \oplus \eta$. При этих вложениях тавтологические расслоения над проективизациями ограничиваются друг на друга: $i_\xi^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\xi)$, $i_\eta^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\eta)$. Следовательно, $i_\xi^*v_{\xi \oplus \eta} = v_\xi$, $i_\eta^*v_{\xi \oplus \eta} = v_\eta$.

Имеем деформационные ретракции

$$U = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\xi) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}P(\eta), \quad V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\eta) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}P(\xi),$$

которые задаются послойно как ретракции $\mathbb{C}P^{m+n-1} \setminus \mathbb{C}P^{m-1} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}P^{n-1}$ из доказательства предложения 6.11.

Теперь рассмотрим следующее соотношение в $H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta))$:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j+k=i} c_j(\xi) c_k(\eta) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-i} \right)}_a = \underbrace{\left(\sum_{j=0}^n c_j(\xi) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{n-j} \right)}_{a_1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^m c_k(\eta) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{m-k} \right)}_{a_2}.$$

Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары $(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V)$:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & \xrightarrow{i_\xi^*} & H^*(V) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi)) \\ \tilde{a}_1 & \mapsto & a_1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Мы имеем $i_\xi^*(a_1) = \sum_{j=0}^n c_j(\xi) \cdot v_\xi^{n-j} = 0$ в силу (32). Поэтому элемент a_1 накрывается элементом $\tilde{a}_1 \in H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V)$. Аналогично, для пары $(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U)$ получаем

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & \xrightarrow{i_\eta^*} & H^*(U) \cong H^*(\mathbb{C}P(\eta)) \\ \tilde{a}_2 & \mapsto & a_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Из естественности когомологического произведения получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U) \times H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U \cup V) & \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) \times H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)) & a_1 a_2 \end{array}$$

где верхнее отображение — относительное когомологическое произведение (17). Но $U \cup V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, поэтому $H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U \cup V) = 0$. Следовательно, $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = 0$, а значит и $a = a_1 a_2 = 0$. С другой стороны, соотношение (32) для $\xi \oplus \eta$ даёт

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_i(\xi \oplus \eta) \cdot v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-i} = 0.$$

Сравнивая коэффициент при $v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-i}$ в этом соотношении с тем же коэффициентом в соотношении $a = 0$, с учётом того, что $1, v_{\xi \oplus \eta}, \dots, v_{\xi \oplus \eta}^{m+n-1}$ — базис, получаем $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi) c_k(\eta)$.

Для доказательства г) заметим, что $\mathbb{C}P(\gamma^1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — тождественное отображение, так как γ^1 одномерно. Поэтому $v_{\gamma^1} = v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — выбранная образующая, и соотношение (32) принимает вид $v + c_1(\gamma^1) = 0$. \square

Полным классом Чжэня комплексного n -мерного расслоения ξ называется (неоднородный) элемент

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi) \in H^*(B).$$

Формулу Уитни из теоремы 9.4 в) можно записать в виде

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) c(\eta).$$

Расслоения ξ и η называются *стабильно эквивалентными*, если $\xi \oplus \mathbb{C}^k \cong \eta \oplus \mathbb{C}^l$ для некоторых k, l . В частности, ξ называется *стабильно тривиальным*, если $\xi \oplus \mathbb{C}^k \cong \mathbb{C}^l$.

Предложение 9.5. *Если ξ и η стабильно эквивалентны, то $c(\xi) = c(\eta)$. В частности, если ξ стабильно тривиально, то $c(\xi) = 1$.*

Доказательство. Заметим, что если $\xi \cong \underline{\mathbb{C}}^k$ (тривиально), то $c(\xi) = 1$. Это следует из того, что тривиальное расслоение над B классифицируется отображением $B \rightarrow pt$ и утверждения б) теоремы 9.4. Теперь предложение следует из формулы Уитни. \square

Предложение 9.6. Пусть ξ и η — одномерные комплексные расслоения над B . Тогда

$$c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $B = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, $\xi = p_1^*\gamma$, $\eta = p_2^*\gamma$, где γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$, $p_1, p_2: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — проекции. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2]$ и $c_1(\xi \otimes \eta) = k_1v_1 + k_2v_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Для вложения $i_1: \mathbb{C}P^\infty \times pt \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_1^*(\xi \otimes \eta) = \gamma$. Следовательно, $i_1^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_1 = -1$. Аналогично, для вложения $i_2: pt \times \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_2^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_2 = -1$. Следовательно, $c_1(\xi \otimes \eta) = -v_1 - v_2 = c_1(\xi) + c_1(\eta)$.

В случае произвольных ξ, η воспользуемся функториальностью. Пусть ξ классифицируется отображением $f: B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, а η классифицируется отображением $g: B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Положим $h = (f, g): B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, тогда $\xi = f^*\gamma = h^*(p_1^*\gamma)$ и $\eta = g^*\gamma = h^*(p_2^*\gamma)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) &= c_1(h^*(p_1^*\gamma) \otimes h^*(p_2^*\gamma)) = h^*(c_1((p_1^*\gamma) \otimes (p_2^*\gamma))) = h^*(c_1(p_1^*\gamma) + c_1(p_2^*\gamma)) = \\ &= c_1(h^*(p_1^*\gamma)) + c_1(h^*(p_2^*\gamma)) = c_1(\xi) + c_1(\eta). \quad \square \end{aligned}$$

В следующем разделе мы обсудим, как выводить формулы для классов Чженя тензорного произведения произвольных расслоений.

9.3. Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов. Принцип расщепления, неформально говоря, заключается в том, что все свойства характеристических классов, выполняемые для расслоений, расщепляющихся в сумму одномерных расслоений, выполняются и для любых расслоений. В основе этого принципа лежит следующая теорема.

Теорема 9.7. Пусть ξ — n -мерное комплексное расслоение над клеточной базой B . Тогда существует B' и отображение $f: B' \rightarrow B$, такое что $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ (сумма одномерных расслоений) и $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B')$ — мономорфизм.

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму индуцированных расслоений:

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \xi_2 & \rightarrow & \gamma_1 \oplus \xi_1 & \rightarrow & \xi_0 = \xi \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_n = \mathbb{C}P(\xi_{n-1}) & \xrightarrow{f_n} & \dots & \rightarrow & B_2 = \mathbb{C}P(\xi_1) & \xrightarrow{f_2} & B_1 = \mathbb{C}P(\xi_0) & \xrightarrow{f_1} & B_0 = B \end{array}$$

Здесь f_i — проекция проективизации расслоения ξ_{i-1} над B_{i-1} . На первом шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$ при помощи отображения f_1 . Это индуцированное расслоение $f_1^*\xi_0$ содержит в качестве подрасслоения одномерное расслоение γ_1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$. Ортогональное дополнение к γ_1 в $f_1^*\xi_0$ обозначим через ξ_1 , так что $f_1^*\xi_0 = \gamma_1 \oplus \xi_1$. На втором шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$ при помощи отображения f_2 . Это индуцированное расслоение $f_2^*(\gamma_1 \oplus \xi_1)$ содержит в качестве подрасслоений уже два одномерных расслоения — расслоение $f_2^*\gamma_1$, которое мы продолжаем обозначать γ_1 , и тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$, которое мы обозначаем γ_2 . Их ортогональное дополнение обозначим через ξ_2 . И так далее. На последнем, n -шаге мы получаем, что γ_n — это тавтологическое расслоение

над $\mathbb{C}P(\xi_{n-1})$. Каждое из отображений f_i индуцирует мономорфизм в когомологиях в силу теоремы Лере–Хирша. Утверждение теоремы получается, если положить $B' = B_n$ и $f = f_1 \circ \dots \circ f_n$. \square

Более явно конструкцию отображения $f: B' \rightarrow B$ и расщепления $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ из теоремы 9.7 можно описать на основе понятия многообразия флагов.

Напомним, что (полным) *флагом* в \mathbb{C}^n называется последовательность вложенных подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{n-1} \subset U_n = \mathbb{C}^n, \quad \dim U_i = i.$$

Множество всех флагов в \mathbb{C}^n является комплексным многообразием размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Оно называется *многообразием флагов* и обозначается $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\mathbb{C}^n)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \dots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$; слоем расслоения γ^i над данным флагом является его i -е подпространство U_i (так что расслоение γ^n тривиально).

Флагиацией n -мерного комплексного расслоения ξ над B называется множество $Fl(\xi)$ всех флагов во всех слоях расслоения ξ . Проекция $Fl(\xi) \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением со слоем $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\xi)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \dots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$.

Теорема 9.8. Пусть ξ — n -мерное комплексное расслоение над клеточной базой B и пусть $f: Fl(\xi) \rightarrow B$ — проекция флагиации расслоения ξ . Тогда

$$f^*\xi \cong \gamma^1 \oplus (\gamma^2/\gamma^1) \oplus \dots \oplus (\gamma^n/\gamma^{n-1})$$

и $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(Fl(\xi))$ — мономорфизм.

Доказательство. Из конструкции пространства B' в доказательстве теоремы 9.7 следует, что точка в B' задаётся последовательным выбором n одномерных подпространств $\ell_1 \subset E_x, \ell_2 \subset E_x/\ell_1, \dots, \ell_n \subset E_x/(\ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_{n-1})$ в слое $E_x \cong \mathbb{C}^n$ расслоения ξ . Каждый такой набор n одномерных подпространств задаёт флаг $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n$ в E_x , где $U_i = \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_i$. Обратно, каждый флаг $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n$ в E_x задаёт набор одномерных подпространств $\ell_i = U_i/U_{i-1}$. Поэтому пространство B' из теоремы 9.7 отождествляется с $Fl(\xi)$, а одномерные расслоения $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ над B' отождествляются с расслоениями $\gamma^1, \gamma^2/\gamma^1, \dots, \gamma^n/\gamma^{n-1}$ над $Fl(\xi)$. \square

Аналоги теорем 9.7 и 9.8 имеет место и для вещественных расслоений и когомологий с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 .

Следствием является теорема единственности для характеристических классов.

Теорема 9.9. Каждому комплексному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $c_i(\xi) \in H^{2i}(B)$, удовлетворяющих свойствам а)–г) из теоремы 9.4.

Аналогично, каждому вещественному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $w_i(B) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих аналогам свойств а)–г) из теоремы 9.4 для классов Штифеля–Уитни.

Доказательство. Свойства а) и г) однозначно задают классы c_i для универсального одномерного расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$. Тогда свойство б) однозначно задаёт классы c_i для любого одномерного расслоения над B , так как такое расслоение классифицируется некоторым отображением $f: B \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Далее, свойство в) однозначно

задаёт классы c_i для сумм одномерных расслоений. Тогда из принципа расщепления следует, что классы c_i определены однозначно для любых расслоений над клеточной базой B . Действительно, если $\{c'_i \in H^{2i}(B)\}$ — другой набор классов, удовлетворяющих свойствам а)–г), то для отображения $f: B' \rightarrow B$ из теоремы 9.7 имеем $f^*(c'_i(\xi)) = c'_i(f^*\xi) = c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$ в $H^{2i}(B')$, так как $f^*\xi$ — сумма одномерных расслоений. Так как $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B')$ — мономорфизм, отсюда следует, что $c'_i(\xi) = c_i(\xi)$. \square

Если $\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ — сумма одномерных расслоений, то

$$(33) \quad c(\xi) = (1 + t_1) \cdot \dots \cdot (1 + t_n), \quad \text{где } t_i = c_1(\lambda_i).$$

Отсюда $c_i(\xi) = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$ — i -й элементарный симметрический многочлен от t_1, \dots, t_n . Таким образом, принцип расщепления позволяет рассматривать характеристические классы n -мерного расслоения как симметрические многочлены от формальных переменных t_1, \dots, t_n .

Пример 9.10. Получим на основе принципа расщепления формулу для первого класса Чженя тензорного произведения двух расслоений. Пусть $\dim \xi = n$ и $\dim \eta = m$. Можно считать, что $\xi = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ и $\eta = \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_m$ (суммы одномерных расслоений). Тогда

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) &= c_1\left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \otimes \bigoplus_{j=1}^m \mu_j\right) = c_1\left(\bigoplus_{i,j} (\lambda_i \otimes \mu_j)\right) = \sum_{i,j} c_1(\lambda_i \otimes \mu_j) = \\ &= \sum_{i,j} (c_1(\lambda_i) + c_1(\mu_j)) = m \sum_{i=1}^n c_1(\lambda_i) + n \sum_{j=1}^m c_1(\mu_j) = mc_1(\xi) + nc_1(\eta), \end{aligned}$$

где в третьем равенстве мы воспользовались формулой Уитни для c_1 , а в четвёртой — формулой для c_1 от тензорного произведения одномерных расслоений (предложение 9.6).

9.4. Когомологии многообразий Грассмана. Здесь мы покажем, что кольцо когомологий многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами Чженя тавтологического расслоения γ_N^k и опишем соотношения между этими классами. Отсюда будет следовать, что кольцо когомологий бесконечномерного грассманиана $G_k(\mathbb{C}^\infty) = BU(n)$ порождается классами $c_1(\gamma^k), \dots, c_k(\gamma^k)$ без соотношений, т.е. $H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$ — кольцо многочленов.

Наряду с тавтологическим расслоением γ_N^k будем рассматривать его ортогональное дополнение — $(N - k)$ -мерное расслоение $(\gamma_N^k)^\perp$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{C}^N)$ является ортогональное дополнение π^\perp к π в \mathbb{C}^N . Обозначим для краткости $c_i = c_i(\gamma_N^k)$ и $c_j^\perp = c_j((\gamma_N^k)^\perp)$. Так как $\gamma_N^k \oplus (\gamma_N^k)^\perp \cong \mathbb{C}^N$, получаем

$$c \cdot c^\perp = (1 + c_1 + \dots + c_k)(1 + c_1^\perp + c_2^\perp + \dots) = 1.$$

Отсюда следует, что каждый класс c_j^\perp является многочленом от классов c_1, \dots, c_k .

Кольцо когомологий $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами c_1, \dots, c_k , а все соотношения между ними вытекают из «размерностных» соотношений $c_j^\perp = 0$ при $j > N - k$.

Теорема 9.11. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] / (c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k).$$

Доказательство. Ясно, что определён гомоморфизм колец

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]/(c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k) \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^N)),$$

переводящий c_i в $c_i(\gamma_N^k) \in H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$. Докажем индукцией по k , что это — изоморфизм. При $k = 1$ имеем $H^*(G_1(\mathbb{C}^N)) = H^*(\mathbb{C}P^{N-1}) \cong \mathbb{Z}[v]/(v^N = 0)$ и $c_1 = c_1(\gamma_N^1) = -v$. Тогда $c = 1 - v$ и $c^\perp = \frac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + \dots$. Таким образом, соотношение $v^N = 0$ эквивалентно соотношениям $c_j^\perp = 0$ при $j > N - 1$.

Предположим теперь, что утверждение доказано для $G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$. Проективизация $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)$ отождествляется с проективизацией $\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$ следующим образом. Для прямой ℓ , лежащей в k -плоскости π^k , рассмотрим дополнительную $(k-1)$ -плоскость π^{k-1} , т. е. $\pi^k = \ell \oplus \pi^{k-1}$. Тогда ℓ можно рассматривать как прямую в $(\pi^{k-1})^\perp$. Отсюда получаем

$$\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \{\ell: \ell \subset \pi^k \subset \mathbb{C}^N\} = \{\ell: \ell \subset (\pi^{k-1})^\perp \subset \mathbb{C}^N\} = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp).$$

Пусть $p: \mathbb{C}P(\gamma_N^k) \rightarrow G_k(\mathbb{C}^N)$ и $p^\perp: \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp) \rightarrow G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$ — проекции и пусть γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$. Тогда

$$p^*(\gamma_N^k) = \xi \oplus \gamma, \quad (p^\perp)^*((\gamma_N^{k-1})^\perp) = \gamma \oplus \zeta,$$

где ξ — некоторое $(k-1)$ -мерное, а ζ — $(N-k)$ -мерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$. При этом $p^*((\gamma_N^k)^\perp) = \zeta$ и $(p^\perp)^*((\gamma_N^{k-1})^\perp) = \xi$, т. е.

$$\xi \oplus \gamma \oplus \zeta = p^*(\gamma_N^k \oplus (\gamma_N^k)^\perp) = p^*(\mathbb{C}^N) = \mathbb{C}^N.$$

По теореме Лере–Хирша $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ есть свободный $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$ -модуль с базисом $1, v, \dots, v^{k-1}$, где $v = -c_1(\gamma)$, и соотношением

$$(34) \quad v^k + p^*(c_1(\gamma_N^k))v^{k-1} + \dots + p^*(c_k(\gamma_N^k)) = 0.$$

Из равенства $p^*(\gamma_N^k) = \xi \oplus \gamma$ получаем

$$1 + c_1(p^*\gamma_N^k) + c_2(p^*\gamma_N^k) + \dots = (1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots)(1 - v),$$

так что соотношение (34) можно записать как $c_k(\xi) = 0$.

Аналогично, $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp))$ есть свободный $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$ -модуль с базисом $1, v, \dots, v^{N-k}$ и соотношением $c_{N-k+1}(\zeta) = 0$.

По предположению индукции, $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^{k-1}), \dots, c_{k-1}(\gamma_N^{k-1})$ с соотношениями $c_i((\gamma_N^{k-1})^\perp) = 0$ при $i > N - k + 1$. Следовательно, кольцо $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)) = H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ порождается классами $c_i(\xi)$, $c_1(\gamma) = -v$ и $c_j(\zeta)$, а все соотношения между ними происходят из равенств $c(\xi \oplus \gamma \oplus \zeta) = 1$, $c_i(\xi) = 0$ при $i \geq k$ и $c_j(\zeta) = 0$ при $j \geq N - k + 1$, т. е. из тривиальности расслоения $\xi \oplus \gamma \oplus \zeta$ и размерности расслоений ξ, ζ . Это означает, что $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ является свободным модулем над своим подкольцом R , порождённым классами $c_1(\xi \oplus \gamma), \dots, c_k(\xi \oplus \gamma)$, с базисом $1, v, \dots, v^{k-1}$. С другой стороны, при мономорфизме $p^*: H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ имеем $p^*(c_i(\gamma_N^k)) = c_i(\xi \oplus \gamma)$, так что $p^*(H^*(G_k(\mathbb{C}^N))) = R$ и $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^k), \dots, c_k(\gamma_N^k)$ с соотношениями, происходящими из размерности расслоения $(\gamma_N^k)^\perp$. \square

Теперь рассмотрим бесконечномерный грассманиан $BU(k) = G_k(\mathbb{C}^\infty)$.

Теорема 9.12. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(BU(k)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k].$$

Доказательство. Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty)) \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]/(c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k).$$

Здесь первый гомоморфизм переводит c_i в $c_i(\gamma^k)$, второй индуцирован вложением $G_k(\mathbb{C}^N) \hookrightarrow G_k(\mathbb{C}^\infty)$, а третий — изоморфизм из теоремы 9.11. Грассманиан $G_k(\mathbb{C}^N)$ является клеточным подкомплексом в $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ относительно разбиения на клетки Шуберта (теорема 8.10), при этом $2(N-k)$ -мерные остовы $G_k(\mathbb{C}^N)$ и $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ совпадают (предложение 8.11). Поэтому второй гомоморфизм в композиции выше является изоморфизмом в размерностях $< 2(N-k)$. Вся композиция является изоморфизмом в размерностях $\leq 2(N-k)$, так как первое соотношение $c_j^\perp = 0$ появляется в размерности $2(N-k+1)$. Следовательно, первый гомоморфизм также является изоморфизмом в размерностях $< 2(N-k)$. Так как это верно для любого N , получаем, что $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] \rightarrow H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty))$ — изоморфизм. \square

Комплексное n -мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f: B \rightarrow BU(n)$, и мы имеем $c_i(\xi) = f^*(c_i)$. В связи с этим классы $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ называются *универсальными характеристическими классами Чженя*.

Следующее утверждение описывает флагизацию универсального (тавтологического) расслоения γ^n над $BU(n)$ и даёт геометрическую интерпретацию формальных переменных t_1, \dots, t_n из принципа расщепления, см. (33).

Теорема 9.13.

- а) Мы имеем $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n) \rightarrow BU(n)$ гомотопна отображению $f: (\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.
- б) Гомоморфизм $f^*: H^*(BU(n)) \rightarrow H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n)$ имеет вид

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n] \rightarrow \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n], \quad c_i \mapsto \sigma_i(t_1, \dots, t_n),$$

т. е. переводит универсальный класс Чженя c_i в i -й симметрический многочлен от образующих t_1, \dots, t_n .

Доказательство. Точками пространства $Fl(\gamma^n)$ являются флаги длины n в \mathbb{C}^∞ , а точками пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^n$ являются последовательности из n прямых в $(\mathbb{C}^\infty)^n \cong \mathbb{C}^\infty$. Взаимно обратные гомотопические эквивалентности $Fl(\gamma^n) \rightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^n$ и $(\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow Fl(\gamma^n)$ сопоставляют флагу набор прямых и обратно, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 9.8. Подробности оставим в качестве задачи.

Докажем б). Пусть $p_i: (\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — проекция на i -й сомножитель, $t = c_1(\gamma^1) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ и $t_i = p_i^*(t)$. Тогда $H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ и $c((\gamma^1)^n) = (1+t_1) \cdot \dots \cdot (1+t_n)$. Имеем $f^*(c_i) = c_i(f^*\gamma^n) = c_i((\gamma^1)^n) = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$. \square

Аналоги всех результатов этого параграфа имеют место для классов Штифеля–Уитни и когомологий с коэффициентами \mathbb{Z}_2 :

Теорема 9.14. Имеют место изоморфизмы

$$H^*(G_k(\mathbb{R}^N); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_k]/(w_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k),$$

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n].$$

9.5. Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением. Одним из приложений классов Штифеля–Уитни является доказательство несуществования алгебр с делением в размерностях, отличных от 2^k . Как мы увидим, этот вопрос непосредственно связан с параллелизуемостью вещественных проективных пространств.

Классами Штифеля–Уитни гладкого многообразия M будем называть классы Штифеля–Уитни его касательного расслоения: $w_i(M) = w_i(\mathcal{T}M)$.

Предложение 9.15.

- а) $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{n+1}$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$;
 б) $w(\mathbb{R}P^n) = 1$ тогда и только тогда, когда $n = 2^k - 1$ для целого $k \geq 0$.

Доказательство. Согласно теореме 8.7, имеем $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R} \cong \gamma^{\oplus(n+1)}$, откуда $w(\mathbb{R}P^n) = w(\gamma)^{n+1} = (1+t)^{n+1}$, где $t = w_1(\gamma) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ — первый класс Штифеля–Уитни тавтологического расслоения.

Докажем б). Пусть $n+1 = 2^k$. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{2^k} = 1 + t^{2^k} = 1$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$. Пусть теперь $n+1 = 2^k \cdot m$, где $m > 1$ нечётно. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{2^k \cdot m} = (1+t^{2^k})^m = 1 + mt^{2^k} + \dots \neq 1$, так как $t^{2^k} \neq 0$. \square

Напомним, что многообразия называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

Следствие 9.16. Если $\mathbb{R}P^n$ параллелизуемо, то $n = 2^k - 1$ для целого $k \geq 0$.

Теорема 9.17 (Штифель). Предположим, что на \mathbb{R}^n существует билинейное умножение $m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ без делителей нуля (ассоциативность и существование единицы не предполагается). Тогда $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелизуемо, т. е. $n = 2^k$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n — стандартный базис в \mathbb{R}^n . Тогда $r_i: y \mapsto m(y, e_i)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, так как умножение m без делителей нуля. Рассмотрим изоморфизмы $v_i = r_i \circ r_1^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ линейно независимы при $x \neq 0$ и $v_1 = \text{id}$. Действительно, если $0 = \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_n v_n(x)$, то $0 = \lambda_1 r_1(y) + \dots + \lambda_n r_n(y) = m(y, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$, где $y = r_1^{-1}(x) \neq 0$, откуда $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$.

Рассмотрим теперь морфизмы расслоений

$$\tilde{v}_i: \gamma \rightarrow \gamma^\perp, \quad (\ell, x) \mapsto (\ell^\perp, \text{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)),$$

где $x \in \ell \subset \mathbb{R}^n$, а $\text{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)$ — проекция вектора $v_i(x)$ на ℓ^\perp . Тогда $\text{pr}_{\ell^\perp} v_1(x) = 0$, а векторы $\text{pr}_{\ell^\perp} v_2(x), \dots, \text{pr}_{\ell^\perp} v_n(x)$ линейно независимы в ℓ^\perp при $x \neq 0$. Следовательно, $\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n$ суть $(n-1)$ линейно независимых сечений расслоения $\text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) = \mathcal{T}\mathbb{R}P^{n-1}$. Поэтому это расслоение тривиально. \square

Пространства $\mathbb{R}P^0 = pt$, $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^7$ параллелизуемы, так как на \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^8 имеется билинейное умножение без делителей нуля (вещественные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы Кэли, соответственно). При $k \geq 4$ пространство $\mathbb{R}P^{2^k-1}$ не параллелизуемо, и поэтому других билинейных умножений без делителей нуля на \mathbb{R}^n нет. Этот факт был доказан в 1960 году Дж. Адамсом методами алгебраической топологии.

9.6. Препятствия к вложениям и погружениям многообразий. Ещё одно приложение характеристических классов Штифеля–Уитни заключается в построении препятствий к вложениям и погружениям многообразий в евклидово пространство.

Напомним, что гладкое отображение гладких многообразий $f: M \rightarrow N$ называется *погружением* (обозначается $M \looparrowright N$), если его дифференциал $D_x f: \mathcal{T}_x M \rightarrow \mathcal{T}_{f(x)} N$ инъективен в каждой точке $x \in M$. Погружение $f: M \rightarrow N$ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ $f(M)$ (в топологии, индуцированной из N). Если M компактно, то погружение является вложением тогда и только тогда, когда оно инъективно.

Нормальное расслоение $\nu = \nu(M \looparrowright N)$ погружения $f: M \looparrowright N$ определяется как $(f^* \mathcal{T}N) / \mathcal{T}M$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \looparrowright N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к подпространству $D_x f(\mathcal{T}_x M)$ в $\mathcal{T}_{f(x)} N$. Имеет место разложение

$$f^* \mathcal{T}N \cong \mathcal{T}M \oplus \nu(M \looparrowright N).$$

Из дифференциальной геометрии известна

Теорема 9.18 (Уитни). *Гладкое компактное многообразие M размерности $n > 1$ можно вложить в \mathbb{R}^{2n} и погрузить в \mathbb{R}^{2n-1} .*

Когда M^n можно погрузить в евклидово пространство меньшей размерности? Пусть задано погружение $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ с нормальным расслоением ν . Тогда мы имеем $\mathcal{T}M \oplus \nu = \underline{\mathbb{R}}^{n+k}$, откуда $w(M) \cdot w(\nu) = 1$. Мы будем обозначать характеристический класс $w(\nu)$ нормального расслоения через $w^\perp(M)$. Он зависит только от характеристических классов многообразия M , так как имеет место формула формального обращения

$$w^\perp(M) = 1 + w_1^\perp(M) + w_2^\perp(M) + \dots = \frac{1}{1 + w_1(M) + w_2(M) + \dots}$$

Например,

$$\begin{aligned} w_1^\perp(M) &= -w_1(M), & w_2^\perp(M) &= w_1^2(M) - w_2(M), \\ w_3^\perp(M) &= -w_1^3(M) + 2w_1(M)w_2(M) - w_3(M), \dots \end{aligned}$$

(при формальном обращении ряда некоторые слагаемые получают со знаком минус, как в формулах выше, но так как мы работаем с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 , эти знаки можно опустить). Так как расслоение $\nu = \nu(M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k})$ имеет размерность k , мы получаем $w_i^\perp(M) = 0$ при $i > k$. Это может давать ограничения на k .

Пример 9.19. Рассмотрим $M = \mathbb{R}P^9$. Тогда

$$w(\mathbb{R}P^9) = (1+t)^{10} = 1 + t^2 + t^8, \quad w^\perp(\mathbb{R}P^9) = \frac{1}{1+t^2+t^8} = 1 + t^2 + t^4 + t^6.$$

Так как $w_6^\perp(\mathbb{R}P^9) \neq 0$, получаем, что $\mathbb{R}P^9$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{9+5} = \mathbb{R}^{14}$. Согласно теореме Уитни, $\mathbb{R}P^9$ погружается в \mathbb{R}^{17} .

В некоторых случаях оценка из теоремы Уитни оказывается точной.

Теорема 9.20 (Милнор). *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$w(\mathbb{R}P^{2^k}) = (1+t)^{2^{k+1}} = (1+t)^{2^k}(1+t) = (1+t^{2^k})(1+t) = 1+t+t^{2^k},$$

$$w^\perp(\mathbb{R}P^{2^k}) = 1+t+t^2+\dots+t^{2^k-1}.$$

Предположим, что существует погружение $\mathbb{R}P^{2^k} \looparrowright \mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$. Тогда его нормальное расслоение ν имеет размерность $2^{k+1}-2-2^k=2^k-2$. Но $w_{2^k-1}(\nu) = w_{2^k-1}^\perp(\mathbb{R}P^{2^k}) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. \square

Сравнивая с примером 9.19, получаем, что не только $\mathbb{R}P^9$, но даже $\mathbb{R}P^8$ нельзя погрузить в \mathbb{R}^{14} . В общем случае нахождение минимальной размерности погружения проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ является трудной задачей, которая полностью не решена до сих пор.

Задачи и упражнения.

9.21. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством B , причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

9.22. Рассмотрим отображение $q: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

9.23. Докажите следующую относительную версию теоремы Лере–Хирша. Пусть дана пара локально тривиальных расслоений $(F, F') \xrightarrow{i} (E, E') \xrightarrow{p} B$ над одной базой B . Предположим, что

- 1) $H^k(F, F'; R)$ — конечно-порождённый свободный R -модуль для любого k ;
- 2) существуют классы $v_j \in H^*(E, E'; R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой (F, F') дают R -базис в $H^*(F, F'; R)$.

Тогда $H^*(E, E'; R)$ является свободным $H^*(B; R)$ -модулем с базисом $\{v_j\}$.

9.24. Приведите пример локально тривиального расслоения $E \rightarrow B$, для которого

- а) не выполнено второе из условий теоремы Лере–Хирша (т. е. $H^*(F; R)$ является конечно порождённым свободным R -модулем, но не существует набора классов в $H^*(E; R)$, которые ограничиваются на базис в когомологиях слоя);
- б) выполнены условия теоремы Лере–Хирша, но отсутствует изоморфизм колец $H^*(E; R) \cong H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$.

9.25. Докажите, что для колец когомологий унитарной и специальной унитарной групп имеют место изоморфизмы:

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1, u_2, \dots, u_n], \quad H^*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i - 1$$

(справа стоят внешние алгебры от нечётномерных образующих). *Указание:* используйте расслоение $U(n-1) \rightarrow U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ и теорему Лере–Хирша. Что можно сказать о когомологиях группы $O(n)$, используя тот же метод?

9.26. Вычислите

- а) кольцо когомологий многообразия $L(n, m) = \mathbb{C}P(\gamma \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$, где γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m -мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$;

- б) кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел i_1, \dots, i_k ;
 в) полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$.

9.27. Пусть $0 \leq k \leq l$ — натуральные числа. Определим многообразие Милнора

$$H_{kl} = \{([z_0 : \dots : z_k], [w_0 : \dots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l : z_0 w_0 + \dots + z_k w_k = 0\}.$$

- а) Докажите, что H_{kl} является сечением образа вложения Серге

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l &\hookrightarrow \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}, \\ ([z_0 : \dots : z_k], [w_0 : \dots : w_l]) &\mapsto [z_0 w_0 : \dots : z_i w_j : \dots : z_k w_l] \end{aligned}$$

гиперплоскостью $H \subset \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}$ общего положения.

- б) Вычислите кольцо когомологий многообразия H_{ij} .

9.28. Пусть ξ — m -мерное, а η — n -мерное комплексные расслоения. Пользуясь принципом расщепления, выразите классы Чженя $c_2(\xi \otimes \eta)$, $c_1(S^2\xi)$, $c_2(S^2\xi)$, $c_1(\Lambda^2\xi)$, $c_2(\Lambda^2\xi)$ через классы Чженя расслоений ξ и η . Здесь $S^i\xi$ обозначает i -симметрическую степень расслоения ξ , а $\Lambda^i\xi$ обозначает i -ю внешнюю степень.

9.29. Запишем $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$ (i -я симметрическая функция формальных переменных). Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения ξ выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k\xi) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (1 + (x_{i_1} + \dots + x_{i_k})), \quad c(S^k\xi) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (1 + (x_{i_1} + \dots + x_{i_k})).$$

9.30. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольца целочисленных когомологий грассманианов $G_2(\mathbb{C}^4)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $G_3(\mathbb{C}^5)$.

9.31. Докажите, что $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n) \rightarrow BU(n)$ гомотопна отображению $f: (\mathbb{C}P^\infty)^n \rightarrow BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.

9.32. Докажите, что числа Бетти (ранги групп целочисленных гомологий) многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяют соотношениям $\beta_{2i+1}(Fl(\mathbb{C}^n)) = 0$ и

$$\sum_i \beta_{2i}(Fl(\mathbb{C}^n)) t^{2i} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + \dots + t^{2i}).$$

9.33. Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ описывается следующим образом:

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] / (\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

где $\dim t_i = 2$, а σ_i есть i -я элементарная симметрическая функция от t_1, \dots, t_n .

9.34. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение. Докажите, что если $w(\xi) \neq 1$, то число $\min\{i: w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.

9.35. Докажите, что для комплексного расслоения ξ число $\min\{i: c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

9.36. Пусть γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что не существует векторного расслоения ζ над $\mathbb{R}P^\infty$ такого, что $\gamma \oplus \zeta$ тривиально.

9.37. Докажите, что если многообразие M^n можно погрузить в \mathbb{R}^{n+1} , то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$.

10. КЛАСС ЭЙЛЕРА И КЛАСС ТОМА

10.1. Ориентируемые векторные расслоения. Рассмотрим вещественное векторное n -мерное расслоение ξ , заданное проекцией $p: E \rightarrow B$ с тривиализующим покрытием $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и отображениями перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

Выбор ориентации в слое $E_x = p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ над точкой $x \in B$ эквивалентен выбору одной из двух образующих группы $H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. В связи с этим будем называть образующую $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ *ориентацией* слоя E_x . Для группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (соответствующей слою тривиального расслоения) имеется канонический выбор образующей $\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, которая задаётся сингулярным симплексом $[v_0, \dots, v_n] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с вершинами $v_0 = -e_1 - \dots - e_n$, $v_1 = e_1, \dots, v_n = e_n$, где e_1, \dots, e_n — стандартный базис в \mathbb{R}^n .

Выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в каждом слое расслоения ξ называется *согласованным* относительно открытого покрытия $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, если для любых U_α и $x \in U_\alpha$ изоморфизм

$$(35) \quad H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \xrightarrow{(\varphi_\alpha|_{E_x})_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

переводит μ_x в μ_0 .

Векторное расслоение ξ называется *ориентируемым*, если существует открытое покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и согласованный выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$, $x \in B$, относительно этого покрытия.

Предложение 10.1. *Вещественное векторное n -мерное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда оно допускает тривиализующее покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с отображениями перехода $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$, где $GL^+(n, \mathbb{R})$ — группа невырожденных матриц с положительным определителем.*

Доказательство. Если ξ ориентируемо, то из (35) получаем, что для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ гомоморфизм

$$g_{\alpha\beta}(x)_* = ((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{x \times \mathbb{R}^n})_*: H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

переводит μ_0 в μ_0 , а значит линейный изоморфизм $g_{\alpha\beta}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию, т. е. имеет положительный определитель. Обратно, если $g_{\alpha\beta}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет положительный определитель для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\mu_x := (\varphi_\alpha^{-1}|_{E_x})_* \mu_0$ задаёт согласованный выбор ориентаций в слоях. \square

Если M — гладкое многообразие, то группа локальных гомологий $H_n(M, M \setminus x)$, используемая в определении ориентации на M , отождествляется с группой $H_n(\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus \{0\})$ при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}_x M \rightarrow M$, которое является диффеоморфизмом в окрестности точки $x \in M$. Отсюда получаем

Предложение 10.2. *Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) многообразию M ориентируемо;
- 2) касательное расслоение TM ориентируемо;
- 3) существует гладкий атлас $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, $\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \xrightarrow{\cong} V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$, для которого отображения замены координат $\psi_{\alpha\beta}: \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ удовлетворяют условию $\det \text{Jac}_x \psi_{\alpha\beta} > 0$ для любого $x \in M$.

10.2. Класс Тома и изоморфизм Тома. Ориентацию в слое вещественного расслоения ξ можно также задавать выбором образующей $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в группе когомологий (это удобно, например, при работе с когомологиями де Рама). При этом условие согласованности ориентаций разных слоёв получается очевидной дуализацией формулы (35).

Теорема 10.3. Пусть ξ — вещественное ориентируемое векторное n -мерное расслоение ξ , заданное проекцией $p: E \rightarrow B$, с согласованно выбранными ориентациями слоёв $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$. Тогда

- а) существует единственный класс когомологий $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, ограничение которого на $H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ есть θ_x для любого $x \in B$;
- б) умножение на класс θ задаёт изоморфизмы

$$H^k(B) \cong H^k(E) \xrightarrow{\cdot\theta} H^{k+n}(E, E \setminus B), \quad H_{k+n}(E, E \setminus B) \xrightarrow{\cdot\theta} H_k(E) \cong H_k(B)$$

для любого k .

Класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, задаваемый условием а), называется *классом Тома* расслоения ξ , а изоморфизмы из утверждения б) называются *изоморфизмами Тома*.

В доказательстве теоремы используется следующая алгебраическая конструкция обратного предела, двойственного к прямому пределу.

Конструкция 10.4 (обратный предел групп). Рассмотрим диаграмму $D = \{G_{\alpha}: \alpha \in P\}$ абелевых групп G_{α} и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}: G_{\alpha} \rightarrow G_{\beta}$, индексированных частично упорядоченным множеством (P, \leq) (см. конструкцию 7.10).

Обратным пределом или просто *пределом* диаграммы D абелевых групп называется подгруппа прямого произведения $\prod_{\alpha \in P} G_{\alpha}$, состоящая из функций выбора ($\alpha \mapsto g_{\alpha} \in G_{\alpha}$), таких что $f_{\alpha\beta}(g_{\alpha}) = g_{\beta}$ при $\alpha \leq \beta$. Обозначается $\lim D$ или $\varprojlim G_{\alpha}$.

Определены канонические гомоморфизмы $p_{\alpha}: \varprojlim G_{\alpha} \rightarrow G_{\alpha}$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} p_{\alpha} = p_{\beta}$ при $\alpha \leq \beta$.

Если в P существует наименьший элемент μ , то $\varprojlim G_{\alpha} = G_{\mu}$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varprojlim G_{\alpha} = \prod_{\alpha \in P} G_{\alpha}$.

Предложение 10.5 (универсальное свойство обратного предела). Пусть $D = \{G_{\alpha}: \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P . Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_{\alpha}: H \rightarrow G_{\alpha}$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} h_{\alpha} = h_{\beta}$ при $\alpha \leq \beta$. Тогда существует единственный гомоморфизм $h: H \rightarrow \varprojlim G_{\alpha}$, такой что $p_{\alpha} h = h_{\alpha}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & G_{\alpha} \\
 & \nearrow h_{\alpha} & \uparrow p_{\alpha} \\
 H & \dashrightarrow h & \varprojlim G_{\alpha} \\
 & \searrow h_{\beta} & \downarrow p_{\beta} \\
 & & G_{\beta} \\
 & & \downarrow f_{\alpha\beta}
 \end{array}$$

Доказательство. Гомоморфизм h переводит $a \in H$ в функцию $(\alpha \mapsto h_\alpha(a))$. \square

Из определений прямого и обратного предела вытекает, что гомоморфизм

$$\text{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \rightarrow \varprojlim \text{Hom}(G_\alpha, H),$$

получаемый из универсальных свойств, является изоморфизмом для любой абелевой группы H (задача).

Универсальное свойство выше определяет предел диаграммы $D: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ для произвольной категории \mathcal{C} . Конструкция 10.4 показывает, что пределы существуют в категории абелевых групп. Пределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств.

Доказательство теоремы 10.3. Введём обозначение $E_0 = E \setminus B$. Мы докажем когомологический изоморфизм Тома; доказательство для гомологий аналогично. Доказательство разобьём на четыре шага.

Шаг 1. Расслоение ξ тривиально. Пусть $E = B \times \mathbb{R}^n$. Имеем образующие $1 \in H^0(B)$ и $\theta_0 \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тогда $H^n(E, E_0) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ и $\theta = 1 \times \theta_0$ есть требуемый класс.

Шаг 2. Предположим, что $B = B' \cup B''$, где B', B'' открыты, и теорема верна для $\xi|_{B'}$, $\xi|_{B''}$ и $\xi|_{B' \cap B''}$; докажем теорему для ξ . Обозначим $B^\cap = B' \cap B''$ и $E^\cap = E' \cap E''$. Рассмотрим следующую диаграмму отображений между последовательностями Майера–Виеториса:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{k-1}(E^\cap) & \longrightarrow & H^k(E) & \longrightarrow & H^k(E') \oplus H^k(E'') & \longrightarrow & H^k(E^\cap) \\ \cong \downarrow \cdot \theta^\cap & & ? \downarrow \cdot \theta & & \cong \downarrow \cdot \theta' \oplus \theta'' & & \cong \downarrow \cdot \theta^\cap \\ H^{k-1+n}(E^\cap, E_0^\cap) & \longrightarrow & H^{k+n}(E, E_0) & \longrightarrow & H^{k+n}(E', E'_0) \oplus H^{k+n}(E'', E''_0) & \longrightarrow & H^{k+n}(E^\cap, E_0^\cap) \end{array}$$

По предположению существуют и единственны классы $\theta^\cap \in H^n(E^\cap, E_0^\cap)$, $\theta' \in H^n(E', E'_0)$, $\theta'' \in H^n(E'', E''_0)$. Ограничения классов θ' и θ'' на $H^n(E^\cap, E_0^\cap)$ обладают свойством из утверждения а) теоремы для θ^\cap . Поэтому, в силу единственности, θ' и θ'' при ограничении переходят в θ^\cap . Из точности последовательности Майера–Виеториса следует, что θ' и θ'' являются образами некоторого класса $\theta \in H^n(E, E_0)$. Этот класс определён однозначно, так как $H^{n-1}(E^\cap, E_0^\cap) = 0$ в силу утверждения б) теоремы для расслоения ξ^\cap . Тогда умножение на θ задаёт гомоморфизм $H^k(E) \xrightarrow{\cdot \theta} H^{k+n}(E, E_0)$, входящий в коммутативную диаграмму выше (в силу естественности умножения в когомологиях). Этот гомоморфизм является изоморфизмом согласно 5-лемме.

Шаг 3. Существует конечное тривиализующее покрытие $B = U_1 \cup \dots \cup U_m$ (например, B компактно). Будем вести индукцию по m . База индукции $m = 1$ — это шаг 1. Индукционный переход — применяем шаг 2 к расслоениям $\xi|_{U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}}$, $\xi|_{U_m}$ и $\xi|_{(U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}) \cap U_m} = \xi|_{(U_1 \cap U_m) \cup \dots \cup (U_{m-1} \cap U_m)}$.

Шаг 4. Общий случай. Представим B в виде объединения компактных подмножеств $C \subset B$. Мы имеем $\varinjlim H_k(C) = H_k(B)$, так как образ любого сингулярного симплекса содержится в компактном подмножестве (см. также задачу 7.25). Однако,

естественный гомоморфизм $H^k(B) \rightarrow \varprojlim H^k(C)$, вообще говоря, не является изоморфизмом. Тем не менее, мы докажем изоморфизм

$$(36) \quad H^n(E, E \setminus B) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C).$$

Для этого вначале заметим, что $H_{n-1}(E, E \setminus B) = 0$. Действительно, для компактной базы B это вытекает из гомологического изоморфизма Тома $H_{n-1}(E, E \setminus B) \cong H_{-1}(B) = 0$, установленного на шаге 3, а в общем случае имеем

$$H_{n-1}(E, E \setminus B) = \varinjlim H_{n-1}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C) = 0.$$

Далее, из формул универсальных коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} H^n(E, E \setminus B) &\cong \text{Hom}(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(E, E \setminus B), \mathbb{Z}) = \\ &= \text{Hom}(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\varprojlim H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}) \cong \\ &\cong \varprojlim \text{Hom}(H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C). \end{aligned}$$

Тогда требуемый класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$ соответствует при изоморфизме (36) элементу обратного предела, задаваемому классами $\theta_C \in H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C)$, которые существуют, единственны и обладают свойством из утверждения а) теоремы согласно шагу 3.

Осталось установить изоморфизм Тома (утверждение б) теоремы) в общем случае. Для этого применим относительный вариант теоремы Лере–Хирша (задача 9.23) к паре расслоений $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (E, E \setminus B) \rightarrow B$. Другой способ доказательства изоморфизма заключается в следующем. Вначале рассмотрим когомологии с коэффициентами в поле F . В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^k(E; F) & \xrightarrow{\sim \theta} & H^{k+n}(E, E \setminus B; F) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \varprojlim H^k(p^{-1}(C); F) & \xrightarrow{\sim \theta_C} & \varprojlim H^{k+n}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C; F) \end{array}$$

вертикальные стрелки являются изоморфизмами согласно формуле универсальных коэффициентов (как при доказательстве изоморфизма (36)), а нижняя стрелка является изоморфизмом согласно шагу 3. Следовательно, верхняя стрелка также является изоморфизмом. Далее, можно доказать (задача), что если гомоморфизм $H^k(E; F) \xrightarrow{\sim \theta} H^{k+n}(E, E \setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F , то он также является изоморфизмом с целыми коэффициентами. \square

Введём на векторном расслоении ξ евклидову метрику. Пусть $D\xi$ — пространство векторов длины ≤ 1 в слоях расслоения ξ , а $S\xi \subset D\xi$ — подпространство векторов длины 1. Тогда $D\xi \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение со слоем D^n , а $S\xi \rightarrow B$ — расслоение со слоем S^{n-1} .

Факторпространство $Th\xi = D\xi/S\xi$ называется *пространством Тома* расслоения ξ . Мы имеем

$$H^*(E, E \setminus B) \cong H^*(D\xi, D\xi \setminus B) \cong H^*(D\xi, S\xi) \cong \tilde{H}^*(Th\xi),$$

а изоморфизм Тома приобретает вид

$$H^k(B) \xrightarrow[\cong]{\sim \theta} \tilde{H}^{k+n}(Th\xi), \quad \theta \in H^n(Th\xi).$$

Пример 10.6.

1. Если ξ — тривиальное расслоение $\mathbb{R}^k \rightarrow pt$ над точкой, то $Th \xi = S^k$.
2. Если ξ — нульмерное расслоение $B \rightarrow B$, то $Th \xi = B_+ = B \sqcup pt$.
3. Имеем $Th(\xi \oplus \mathbb{R}^k) \cong \Sigma^k Th \xi$ (k -кратная надстройка, задача).
4. Из предыдущих примеров получаем $Th(\mathbb{R}^k) \cong (\Sigma^k B) \vee S^k$.
5. Если γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$, то $Th \gamma \cong \mathbb{R}P^{n+1}$ (задача). Аналогично для $\mathbb{C}P^n$.

10.3. Определение класса Эйлера, его свойства. Пусть ξ — ориентированное n -мерное расслоение $p: E \rightarrow B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B)$ при гомоморфизме

$$H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E) \xrightarrow{\cong} H^n(B)$$

называется *классом Эйлера* ориентированного векторного расслоения ξ и обозначается $e(\xi) \in H^n(B)$.

Свойства класса Эйлера описываются следующей теоремой.

Теорема 10.7. *Имеем*

- а) $e(f^*\xi) = f^*e(\xi)$, где $f^*\xi$ — расслоение, индуцированное отображением $f: B' \rightarrow B$;
- б) если $\tilde{\xi}$ — расслоение ξ с противоположной ориентацией, то $e(\tilde{\xi}) = -e(\xi)$;
- в) если размерность ξ нечётна, то $2e(\xi) = 0$;
- г) $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$;
- д) если ξ допускает всюду ненулевое сечение, то $e(\xi) = 0$.

Доказательство. Свойство а) следует из функториальности класса Тома, а б) следует из определения.

Если размерность слоя нечётна, то отображение $E\xi \rightarrow E\xi$, $v \mapsto -v$, задаёт отображающий ориентацию изоморфизм расслоения, т. е. изоморфизм ориентированных расслоений $\xi \xrightarrow{\cong} \tilde{\xi}$. Тогда $e(\tilde{\xi}) = e(\xi)$ из свойства а) и $e(\tilde{\xi}) = -e(\xi)$ из свойства б), откуда следует свойство в).

Заметим, что $\theta(\xi \times \xi') = \theta(\xi) \times \theta(\xi') \in H^{n+n'}(E \times E', E \times E' \setminus B \times B')$, откуда получаем $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$. Далее, рассмотрим диагональ $\Delta: B \rightarrow B \times B$, тогда $\xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = \Delta^*(e(\xi) \times e(\xi')) = e(\xi) \smile e(\xi')$. Свойство г) доказано.

Докажем д). Ненулевое сечение $s: B \rightarrow E \setminus B$ даёт разложение тождественного отображения $B \rightarrow B$ в композицию $B \xrightarrow{s} E \setminus B \rightarrow E \xrightarrow{p} B$. Таким образом композиция в верхней строке является тождественным изоморфизмом:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(B) & \xrightarrow{p^*} & H^n(E) & \rightarrow & H^n(E \setminus B) & \xrightarrow{s^*} & H^n(B), \\ e(\xi) & \mapsto & \theta(\xi)|_E & \mapsto & 0 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Здесь $\theta(\xi)|_E$ обозначает образ класса Тома при гомоморфизме $H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E)$, и он переходит в нуль при гомоморфизме $H^n(E) \rightarrow H^n(E \setminus B)$, так как композиция $H^n(E, E \setminus B) \rightarrow H^n(E) \rightarrow H^n(E \setminus B)$ является нулевой (из точной последовательности пары $(E, E \setminus B)$). Отсюда $e(\xi) = 0$.

По-другому свойство д) можно установить, введя метрику на расслоении ξ . Тогда ненулевое сечение даёт разложение $\xi = \xi' \oplus \mathbb{R}$, откуда из свойства г) получаем $e(\xi) = e(\xi') \smile e(\mathbb{R}) = 0$. \square

Можно также определить понятие R -ориентируемого векторного расслоения для любого коммутативного кольца R с единицей. Теорема 10.3 имеет место для R -ориентируемого расслоения ξ и даёт класс Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; R)$. Как и для R -ориентируемых многообразий, интерес представляют лишь случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$. Следующее утверждение показывает, что « \mathbb{Z}_2 -аналогом» класса Эйлера является старший класс Штифеля–Уитни.

Предложение 10.8. Пусть ξ — n -мерное векторное расслоение $p: E \rightarrow B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ при гомоморфизме

$$H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^n(B; \mathbb{Z}_2)$$

есть класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$. Если расслоение ξ ориентировано, то класс $w_n(\xi)$ получается из класса Эйлера $e(\xi)$ приведением по модулю 2.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из сравнения свойств классов Эйлера и Штифеля–Уитни (теоремы 9.4 и 10.7) и единственности классов Штифеля–Уитни (теорема 9.9). Детали остаются в качестве задачи. \square

10.4. Связь с двойственностью Пуанкаре и эйлеровой характеристикой. Пусть M — гладкое m -мерное подмногообразие в гладком n -мерном многообразии N . Имеет место следующая теорема о трубчатой окрестности, которая доказывается при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}N \rightarrow N$; это доказательство можно найти в книгах [Ле] и [МС].

Теорема 10.9. Существует окрестность U подмногообразия M в N , диффеоморфная пространству $E\nu$ нормального расслоения $\nu(M \subset N)$, причём диффеоморфизм переводит M в нулевое сечение расслоения M .

Предложение 10.10. Пусть подмногообразие M замкнуто в N . Тогда имеет место канонический изоморфизм $H^k(E\nu, E\nu \setminus M) \cong H^k(N, N \setminus M)$. Таким образом если нормальное расслоение $\nu(M \subset N)$ ориентировано, то его класс Тома можно рассматривать как элемент $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$. При этом класс Эйлера $e(\nu)$ является образом класса Тома при композиции

$$H^{n-m}(N, N \setminus M) \xrightarrow{j^*} H^{n-m}(N) \xrightarrow{i^*} H^{n-m}(M),$$

где гомоморфизм j^* индуцирован отображением пар $j: (N, \emptyset) \rightarrow (N, N \setminus M)$, а i_* индуцирован вложением $i: M \rightarrow N$.

Аналогичное утверждение верно для \mathbb{Z}_2 -класса Тома $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M; \mathbb{Z}_2)$ и класса Штифеля–Уитни $w_{n-m}(\nu) \in H^{n-m}(M; \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 10.9. Рассмотрим открытое покрытие $N = U \cup (N \setminus M)$. Тогда из вырезания и теоремы 10.9 получаем

$$H^k(N, N \setminus M) \xrightarrow{\cong} H^k(U, U \setminus M) \cong H^k(E\nu, E\nu \setminus M).$$

Утверждение о классе Эйлера вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-m}(N, N \setminus M) & \xrightarrow{j^*} & H^{n-m}(N) & & \\ \cong \downarrow & & \downarrow & \searrow i^* & \\ H^{n-m}(E\nu, E\nu \setminus M) & \longrightarrow & H^{n-m}(E\nu) & \longrightarrow & H^{n-m}(M). \end{array}$$

Утверждение для класса Штифеля–Уитни доказывается аналогично. \square

Следствие 10.11. *Если замкнутое m -мерное многообразие M гладко вложено в \mathbb{R}^{m+k} , то $w_k(\nu) = 0$. Если M ориентируемо, то $e(\nu) = 0$.*

Теорема 10.12. *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-1}$.*

Доказательство. Предположим, такое вложение существует. Тогда из вычисления в теореме 9.20 получаем $w_{2^k-1}(\nu) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. \square

Если $i: M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N , то изоморфизм

$$(37) \quad i^*TN \cong \nu(M \subset N) \oplus TM$$

задаёт ориентацию нормального расслоения ν .

Предложение 10.13. *Пусть $i: M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N с нормальным расслоением ν и $j: (N, \emptyset) \rightarrow (N, N \setminus M)$. Тогда класс $j^*\theta(\nu) \in H^{n-m}(N)$ двойствен по Пуанкаре к $i_*[M] \in H_m(N)$.*

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 10.9. Согласно лемме 7.4 для ориентированного n -мерного многообразия U и компактного подмножества $M \subset U$ существует единственный класс $\mu_M \in H_n(U, U \setminus M)$, который при ограничении переходит в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(U, U \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-m}(N, N \setminus M) & \xrightarrow[\cong]{\ell^*} & H^{n-m}(U, U \setminus M) & \xrightarrow{\mu_M \frown} & H_m(U) & \xrightarrow[\cong]{} & H_m(M) \\ & & \downarrow j^* & & \searrow \ell_* & & \downarrow i_* \\ & & H^{n-m}(N) & \xrightarrow[\cong]{[N] \frown} & & & H_m(N) \end{array}$$

Здесь ℓ^* индуцирован отображением пар $\ell: (U, U \setminus M) \rightarrow (N, N \setminus M)$ и является изоморфизмом согласно вырезанию. Изоморфизм $H_m(U) \xrightarrow{\cong} H_m(M)$ индуцирован деформационной ретракцией $U \rightarrow M$. В нижней строке стоит изоморфизм двойственности Пуанкаре. Диаграмма коммутативна, так как для $\varphi \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$ имеем

$$\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\varphi) = \ell_*(\mu_M) \frown \varphi = j_*[N] \frown \varphi = [N] \frown j^*\varphi,$$

где первое и третье равенство следуют из леммы 7.8, а второе — из определения фундаментального класса. Положив $\varphi = \theta(\nu)$ в равенстве выше, получим, что двойственным по Пуанкаре классом к $j^*\theta(\nu)$ является $\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\theta(\nu))$. Требуемое равенство $[N] \frown j^*\theta(\nu) = i_*[M]$ будет доказано, если мы проверим, что класс Тома $\theta(\nu)$ переходит в фундаментальный класс $[M]$ при композиции гомоморфизмов в верхней строке диаграммы. Это достаточно проверить для ограничений $\theta_x \in H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0)$ и $\mu_x^M \in H_m(M, M \setminus x)$ на любую точку $x \in M$, в силу единственности класса Тома и фундаментального класса. При изоморфизмах

$$H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) \cong H^{n-m}(\mathcal{T}_x N, \mathcal{T}_x N \setminus \mathcal{T}_x M) \cong H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z},$$

задаваемых разложением (37) и ориентациями, элемент θ_x переходит в каноническую образующую $\theta_0 \in H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z}$. Аналогично, при изоморфизмах

$$H_n(N, N \setminus x) \cong H_n(\mathcal{T}_x N, \mathcal{T}_x N \setminus 0) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$$

класс локальной ориентации μ_x^N переходит в каноническую образующую $\mu_0^n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим \frown -произведение

$$\frown: H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}).$$

Тогда произведение образующих $\mu_0^n \frown \theta_0$ есть образующая группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}) \cong H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus 0)$, т.е. μ_0^m , которая соответствует ограничению на x фундаментального класса $[M] \in H_m(M)$. \square

Рассмотрим теперь диагональное вложение $\Delta: M \rightarrow M \times M$, $\Delta(x) = (x, x)$.

Лемма 10.14. *Нормальное расслоение $\nu(\Delta: M \rightarrow M \times M)$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$.*

Доказательство. Вектор $(u, v) \in \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M = \mathcal{T}_{(x,x)}(M \times M)$ касателен к подмногообразию $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = v$ и нормален к $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = -v$. Отображение $\mathcal{T}M \rightarrow \nu(\Delta)$, $v \mapsto (-v, v)$, даёт требуемый изоморфизм расслоений. \square

Предположим, что многообразие M ориентировано (или когомологии рассматриваются с коэффициентами \mathbb{Z}_2). Обозначим через

$$\theta_\Delta \in H^m(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$$

класс Тома нормального расслоения $\nu(\Delta)$. Для $x \in M$ обозначим через $\psi_x \in H^m(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ класс когомологий, двойственный к локальной ориентации $\mu_x \in H_m(M, M \setminus x)$, т.е. $\langle \psi_x, \mu_x \rangle = 1$. Рассмотрим отображение

$$(38) \quad j_x: (M, M \setminus x) \rightarrow (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)), \quad y \mapsto (x, y).$$

Лемма 10.15. *Имеем $j_x^* \theta_\Delta = \psi_x$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Пусть U — окрестность точки $x \in M$ из теоремы 10.9, тогда мы имеем вложение $\mathcal{T}_x M \cong U \rightarrow M$. Рассмотрим линейные отображения

$$\begin{aligned} f_0, f_1: (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) &\rightarrow (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)), \\ f_0(v) &= (0, v), \quad f_1(v) = (-v, v). \end{aligned}$$

Отображения f_0 и f_1 гомотопны посредством гомотопии $f_t(v) = (-tv, v)$. Имеем две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) & \xrightarrow{f_0} & (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M, M \setminus x) & \xrightarrow{j_x} & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \\ (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) & \xrightarrow{f_1} & (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ (E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) & \xrightarrow{i} & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

Во второй диаграмме нижнее отображение — вложение слоя нормального расслоения $\nu(\Delta: M \rightarrow M \times M)$, а левое — изоморфизм из леммы 10.14. Из второй диаграммы, определения класса θ_Δ и леммы 10.14 получаем $i^*\theta_\Delta = \psi_x$. Так как $f_0 \simeq f_1$, имеем $j_x^*\theta_\Delta = f_0^*\theta_\Delta = f_1^*\theta_\Delta = i^*\theta_\Delta = \psi_x$, где мы отождествляем θ_Δ с его образом в $H^m(\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M))$. \square

Рассмотрим \times -умножение $\times: H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M \times M)$.

Лемма 10.16. *Для любого $\varphi \in H^k(M)$ имеем $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$.*

Доказательство. Пусть U — трубчатая окрестность $\Delta(M)$ в $M \times M$ из теоремы 10.9 и $p_1, p_2: M \times M \rightarrow M$ — проекции. Поскольку p_1 и p_2 совпадают на $\Delta(M)$, ограничение $p_1|_U$ гомотопно ограничению $p_2|_U$. Следовательно, два класса $\varphi \times 1 = p_1^*(\varphi)$ и $1 \times \varphi = p_2^*(\varphi)$ имеют один и тот же образ при гомоморфизме ограничения $H^k(M \times M) \rightarrow H^k(U)$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^k(M \times M) & \longrightarrow & H^k(U) \\ \downarrow \sim \theta_\Delta & & \downarrow \sim \theta_\Delta \\ H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) & \xrightarrow{\cong} & H^{k+m}(U, U \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

вытекает, что $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$ в $H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$. \square

Определим теперь *косое гомологическое произведение* или */-произведение*. Для клеточных (ко)цепей клеточных пространств X и Y определим билинейное /-произведение

$$/: \mathcal{C}^n(X \times Y) \times \mathcal{C}_q(Y) \rightarrow \mathcal{C}^{n-q}(X)$$

по формуле

$$(f \times g, e^q) \mapsto f \langle g, e^q \rangle$$

где $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, а e^q — клетка в Y (здесь как обычно полагаем $\langle g, e^q \rangle = 0$, если $n - p \neq q$). Эта формула однозначно определяет отображение, так как любая клеточная коцепь из $\mathcal{C}^n(X \times Y)$ является линейной комбинацией коцепей вида $f \times g$. (Сравните с клеточным определением \times -произведения в §6.3.)

Предложение 10.17. *Для $h \in \mathcal{C}^n(X \times Y)$ и $a \in \mathcal{C}_q(Y)$ выполнено равенство*

$$d(h/a) = dh/a + (-1)^{n-q} h/\partial a.$$

Доказательство. Можно считать $h = f \times g$, $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, $a = e^q$. Тогда

$$\begin{aligned} d(h/a) &= d(f \times g/e^q) = d(f \langle g, e^q \rangle) = df \langle g, e^q \rangle, \\ dh/a &= d(f \times g)/e^q = (df \times g + (-1)^p f \times dg)/e^q = df \langle g, e^q \rangle + (-1)^p f \langle dg, e^q \rangle, \\ h/\partial a &= (f \times g)/\partial e^q = f \langle g, \partial e^q \rangle = f \langle dg, e^q \rangle. \end{aligned}$$

При этом $\langle dg, e^q \rangle \neq 0$ только при $n - p + 1 = q$, т. е. $n - q = p - 1$. Умножая последнее равенство на $(-1)^{n-q}$ и складывая, получим требуемое. \square

Из предложения 10.17 следует, что /-произведение коцикла на цикл есть коцикл, произведение коцикла на границу есть кограница и т. д., так что определено билинейное гомологическое /-произведение

$$/: H^n(X \times Y) \times H_q(Y) \rightarrow H^{n-q}(X), \quad (\eta, \alpha) \mapsto \eta/\alpha.$$

Предложение 10.18. *Имеем*

- а) $(\varphi \times \psi)/\alpha = \varphi \langle \psi, \alpha \rangle$ для $\varphi \in H^p(X)$, $\psi \in H^{n-p}(Y)$ и $\alpha \in H_q(Y)$;
- б) $\langle \eta/\alpha, \beta \rangle = \langle \eta, \beta \times \alpha \rangle$ для $\eta \in H^n(X \times Y)$, $\alpha \in H_q(Y)$ и $\beta \in H_{n-q}(X)$;
- в) $((\varphi \times 1) \smile \eta)/\alpha = \varphi \smile (\eta/\alpha)$ для $\varphi \in H^p(X)$, $\eta \in H^n(X \times Y)$ и $\alpha \in H_q(Y)$.

Доказательство. Равенства а) и б) выполнены на уровне коцепей и вытекают из определения цепного /-произведения. Для доказательства в) можно считать, что $\eta = \chi \times \psi$, $\chi \in H^{n-q}(X)$, $\psi \in H^q(Y)$. Тогда имеем

$$((\varphi \times 1) \smile (\chi \times \psi))/\alpha = ((\varphi \smile \chi) \times \psi)/\alpha = (\varphi \smile \chi) \langle \psi, \alpha \rangle = \varphi \smile (\eta/\alpha),$$

где в первом равенстве мы воспользовались формулой из задачи 6.14. \square

При ограничении на $(M \times M, \emptyset) \subset (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$ класс Тома θ_Δ переходит в класс $\nabla_M \in H^m(M \times M)$, который называется *диагональным когомологическим классом*. Если многообразие M замкнуто, то класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M] \in H_m(M \times M)$ согласно предложению 10.13.

Лемма 10.19. *Если многообразие M замкнуто и ориентировано, то $\nabla_M/[M] = 1 \in H^0(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $i_x: x \rightarrow M$. Достаточно доказать, что $i_x^*(\nabla_M/[M]) = 1 \in H^0(x)$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим отображение j_x (38) и коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^m(M \times M) & \xrightarrow{/[M]} & H^0(M) & & M & \xleftarrow{r_x} & (M, M \setminus x) \\ (i_x \times \text{id})^* \downarrow & & \downarrow i_x^* & & j_x \downarrow & & \downarrow j_x \\ H^m(x \times M) & \xrightarrow{/[M]} & H^0(x) & & M \times M & \xleftarrow{r_\Delta} & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

Из первой диаграммы получаем

$$i_x^*(\nabla_M/[M]) = ((i_x \times \text{id})^* \nabla_M)/[M] = (1 \times j_x^* \nabla_M)/[M] = 1 \cdot \langle j_x^* \nabla_M, [M] \rangle$$

в $H^0(x)$, где в последнем равенстве мы воспользовались предложением 10.18 а). Из определения ∇_M и второй диаграммы получаем

$$\langle j_x^* \nabla_M, [M] \rangle = \langle j_x^* r_\Delta^*(\theta_\Delta), [M] \rangle = \langle r_x^* j_x^*(\theta_\Delta), [M] \rangle = \langle r_x^* \psi_x, [M] \rangle = \langle \psi_x, \mu_x \rangle = 1,$$

где в третьем равенстве мы воспользовались леммой 10.15. \square

Теорема 10.20. *Пусть M — замкнутое многообразие и F -поле. Предположим, что M ориентируемо или поле F имеет характеристику 2. Пусть ψ_1, \dots, ψ_r — базис в $H^*(M; F)$ и $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_r$ — двойственный по Пуанкаре базис в $H^*(M; F)$, т. е. $\langle \psi_i \smile \tilde{\psi}_j, [M] \rangle = \delta_{ij}$. Тогда*

$$\nabla_M = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \times \tilde{\psi}_i, \quad e(\mathcal{T}M) = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \smile \tilde{\psi}_i.$$

Доказательство. Для коэффициентов в поле имеем $H^*(M \times M; F) = H^*(M; F) \otimes H^*(M; F)$. Поэтому мы можем записать $\nabla_M = \sum_{i=1}^r \psi_i \times \zeta_i$ для некоторых классов $\zeta_i \in H^*(M; F)$, $\dim \psi_i + \dim \zeta_i = m$.

Ограничивая соотношение из леммы 10.16 на $M \times M$, получаем $(\varphi \times 1) \smile \nabla_M = (1 \times \varphi) \smile \nabla_M$ для любого $\varphi \in H^*(M; F)$. Применим $/[M]$ к обеим частям этого соотношения. Слева получим

$$((\varphi \times 1) \smile \nabla_M)/[M] = \varphi \smile (\nabla_M/[M]) = \varphi$$

в силу предложения 10.18 в) и леммы 10.19, а справа

$$\begin{aligned} \left((1 \times \varphi) \smile \sum_j \psi_j \times \zeta_j \right) / [M] &= \sum_j (-1)^{\dim \varphi \dim \psi_j} (\psi_j \times (\varphi \smile \zeta_j)) / [M] = \\ &= \sum_j (-1)^{\dim \varphi \dim \psi_j} \psi_j \langle \varphi \smile \zeta_j, [M] \rangle \end{aligned}$$

в силу предложения 10.18 а). Полагая $\varphi = \psi_i$, получим

$$(-1)^{\dim \psi_i \dim \psi_j} \langle \psi_i \smile \zeta_j, [M] \rangle = \delta_{ij}.$$

Отсюда $\zeta_j = (-1)^{\dim \psi_j} \tilde{\psi}_j$ и $\nabla_M = \sum_j (-1)^{\dim \psi_j} \psi_j \times \tilde{\psi}_j$.

Формула для $e(\mathcal{T}M)$ следует из определения: $e(\mathcal{T}M) = \Delta^*(\nabla_M)$. \square

Из теоремы 3.8 и формул универсальных коэффициентов вытекает, что эйлерову характеристику многообразия M (или любого конечного клеточного пространства) можно вычислять через когомологии с коэффициентами в произвольном поле F , и результат не зависит от F :

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M; F).$$

Теорема 10.21. Для гладкого замкнутого ориентированного многообразия M

$$\langle e(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \chi(M).$$

Если M неориентировано, то $w_m(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \chi(M) \pmod{2}$.

Доказательство. Вычисляя $e(\mathcal{T}M) = \sum_i (-1)^{\dim \psi_i} \psi_i \smile \tilde{\psi}_i$ на фундаментальном классе, получаем $\langle e(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \sum_i (-1)^{\dim \psi_i} = \chi(M)$. \square

Следствие 10.22. Имеем $\chi(M) = \langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle$.

Доказательство. Так как ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M]$, имеем

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \langle e(\mathcal{T}M), [M] \rangle = \langle \Delta^* \nabla_M, [M] \rangle = \langle \nabla_M, \Delta_*[M] \rangle = \Delta_*[M] \frown \nabla_M = \\ &= ([M \times M] \frown \nabla_M) \frown \nabla_M = [M \times M] \frown (\nabla_M \smile \nabla_M) = \langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Гладкие подмногообразия M_1 и M_2 в N пересекаются трансверсально, если в каждой точке $x \in M_1 \cap M_2$ выполнено $\mathcal{T}_x M_1 + \mathcal{T}_x M_2 = \mathcal{T}_x N$. Если M_1 и M_2 имеют дополнительные размерности (т.е. $m_1 + m_2 = n$), то точки трансверсального пересечения образуют дискретное подмножество (конечное, если N компактно). Если M_1, M_2 и N ориентированы, то каждой точке пересечения $x \in M_1 \cap M_2$ присваивается знак, равный $+1$, если ориентации пространств левой и правой части равенства $\mathcal{T}_x M_1 \oplus \mathcal{T}_x M_2 = \mathcal{T}_x N$ совпадают, и -1 в противном случае. Сумма знаков точек пересечения называется *индексом пересечения* ориентированных подмногообразий M_1 и M_2 дополнительных размерностей в ориентированном многообразии N .

В дифференциальной топологии доказывается, что индекс пересечения равен $\langle D[M_1] \smile D[M_2], [N] \rangle$, где $D[M_i] \in H^{n-m_i}(N)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к фундаментальному классу $[M_i] \in H_{m_i}(N)$. Это также позволяет определить индекс пересечения для подмногообразий M_1 и M_2 , пересекающихся не трансверсально (в частности, индекс самопересечения многообразия половинной размерности в N). Для этого необходимо «пошевелить» одно из многообразий, например M_1 , т.е. заменить вложение M_1 в N на гомотопное вложение так, что новое подмногообразие \widetilde{M}_1 пересекает M_2 трансверсально. Индекс пересечения M_1 и M_2 тогда можно определить как индекс пересечения \widetilde{M}_1 и M_2 . При этом мы имеем $\langle D[M_1] \smile D[M_2], [N] \rangle = \langle D[\widetilde{M}_1] \smile D[M_2], [N] \rangle$, так как $[M_1] = [\widetilde{M}_1]$.

Так как класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к диагональному подмногообразию $\Delta(M)$ в $M \times M$, выражение $\langle \nabla_M \smile \nabla_M, [M \times M] \rangle$ в правой части соотношения из следствия 10.22 есть индекс самопересечения $\Delta(M)$.

Следствие 10.23. *Эйлерова характеристика замкнутого многообразия M равна индексу самопересечения диагонального подмногообразия $\Delta(M)$ в $M \times M$.*

Так как нормальное расслоение к $\Delta(M)$ в $M \times M$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$, вместо того, чтобы «шевелить» $\Delta(M)$ в $M \times M$, мы можем шевелить нулевое сечение в пространстве $\mathcal{T}M$. Сечения касательного расслоения $\mathcal{T}M$ — это векторные поля на M , а нули сечения — особые точки векторного поля. Подмногообразие $\widetilde{M} \subset \mathcal{T}M$, задаваемое векторным полем (сечением), трансверсально к нулевому сечению $M \subset \mathcal{T}M$ тогда и только тогда, когда векторное поле имеет изолированные особенности.

Следствие 10.24. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особенностями на гладком замкнутом ориентированном многообразии M равна эйлеровой характеристике $\chi(M)$.*

Задачи и упражнения.

10.25. Докажите, что для любой абелевой группы H имеет место изоморфизм

$$\text{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \xrightarrow{\cong} \varprojlim \text{Hom}(G_\alpha, H).$$

10.26. Докажите, что если гомоморфизм $H^k(E; F) \xrightarrow{\cong} H^{k+n}(E, E \setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F , то он является изоморфизмом с целыми коэффициентами (а также с коэффициентами в любом коммутативном кольце с единицей).

10.27. Докажите, что для пространства Тома $Th \xi = D\xi/S\xi$ вещественного векторного расслоения ξ имеем $Th(\xi \oplus \mathbb{R}^k) \cong \Sigma^k Th \xi$, где \mathbb{R}^k — тривиальное расслоение над той же базой, а Σ^k — k -кратная надстройка.

10.28. Докажите, что пространство Тома $Th \xi$ вещественного (комплексного) векторного расслоения ξ над клеточным пространством гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi \oplus \mathbb{R})/\mathbb{R}P(\xi)$ (соответственно, $\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C})/\mathbb{C}P(\xi)$).

10.29. Докажите, что пространство Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$) гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

10.30. Докажите, что вещественное векторное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.

10.31. Докажите, что при гомоморфизме $H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ класс Эйлера $e(\xi)$ ориентированного n -мерного расслоения ξ переходит в класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$.

10.32. Пусть η^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Докажите, что расслоение $\eta^n \oplus \eta^n$ ориентируемо и $e(\eta^n \oplus \eta^n) \neq 0$.

10.33. Пусть ξ — комплексное n -мерное векторное расслоение и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его о веществ-ление. Докажите, что $e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi)$.

10.34. При каких n на сфере S^n существует нигде не обращающееся в нуль векторное поле? Тот же вопрос для CP^n .

11. КЛАССЫ ПОНТРЯГИНА

11.1. Общее понятие характеристического класса. Пусть \mathcal{V} — некоторое семейство векторных расслоений фиксированной размерности n , замкнутое относительно перехода к индуцированному расслоению, и пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Назовём k -мерным *характеристическим классом* расслоений из \mathcal{V} с коэффициентами в R соответствие

$$\{\text{векторные расслоения из } \mathcal{V}\} \rightarrow \{\text{классы из } H^k(B; R)\}, \quad \xi = (p: E \rightarrow B) \mapsto c(\xi),$$

удовлетворяющее соотношению $f^*c(\xi) = c(f^*\xi)$ для $f: B' \rightarrow B$.

Примеры — классы Штифеля–Уитни для $\mathcal{V} = \{\text{вещественные расслоения}\}$ и $R = \mathbb{Z}_2$, классы Чженя для $\mathcal{V} = \{\text{комплексные расслоения}\}$ и $R = \mathbb{Z}$, а также класс Эйлера для $\mathcal{V} = \{\text{ориентированные расслоения}\}$ и $R = \mathbb{Z}$.

Характеристические классы всевозможных размерностей с коэффициентами в R образуют кольцо относительно когомологического умножения.

Предложение 11.1. *Кольцо характеристических классов вещественных (комплексных) n -мерных расслоений с коэффициентами в R изоморфно $H^*(BO(n); R)$ (соответственно, $H^*(BU(n); R)$).*

Доказательство. Это следует из определения характеристических классов, классифицирующих пространств $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$, $BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ и теоремы 8.15. \square

Из теорем 9.12 и 9.14 мы знаем как устроены кольца когомологий $BO(n)$ с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 и $BU(n)$ с коэффициентами в \mathbb{Z} (а значит, и с коэффициентами в любом R): $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$, $H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, где w_i — универсальные классы Штифеля–Уитни, а c_i — универсальные классы Чженя.

Следствие 11.2. *Любой характеристический класс вещественных (комплексных) n -мерных расслоений с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 (в \mathbb{Z}) есть многочлен от классов Штифеля–Уитни (Чженя), причём разным многочленам соответствуют разные характеристические классы.*

Аналогичное описание характеристических классов вещественных или ориентированных расслоений с коэффициентами в \mathbb{Z} отсутствует, так как кольца $H^*(BO(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(BSO(n); \mathbb{Z})$ устроены сложно. Некоторое разумное приближение дают классы Понтрягина, как мы увидим далее. Классы Понтрягина также естественно возникают при рассмотрении кватернионных векторных расслоений.

11.2. Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя.

Теорема 11.3. Пусть ξ — комплексное n -мерное расслоение над B и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его оветствление. Тогда $w_{2k}(\xi_{\mathbb{R}}) = c_k(\xi) \pmod{2}$ и $w_{2k+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{C}P(\xi) \rightarrow B$, тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{C}P(\xi))$ над $\mathbb{C}P(\xi)$, его оветствление $\gamma_{\mathbb{R}}$ (двумерное вещественное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$) и проективизацию $\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$. Мы имеем $\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$, так как любая вещественная прямая в слое $\xi_{\mathbb{R}}$ однозначно задаёт содержащую её комплексную прямую в слое ξ . Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P(\xi) \rightarrow B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{R}P^1$.

Согласно теоремам 9.2 и 9.3 о когомологиях проективизации имеем

$$(39) \quad \begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P(\xi)) &\cong H^*(B)[v] / (v^n + c_1(\xi)v^{n-1} + \dots + c_n(\xi) = 0), \\ H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) &\cong H^*(B)[u] / (u^{2n} + w_1(\xi_{\mathbb{R}})u^{2n-1} + \dots + w_{2n}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0), \\ &\parallel \\ H^*(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})) &\cong H^*(\mathbb{C}P(\xi))[t] / (t^2 + \pi^*w_1(\gamma_{\mathbb{R}})t + \pi^*w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0). \end{aligned}$$

Здесь все когомологии с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 , $v = e(\gamma_{\mathbb{R}}) = w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = c_1(\gamma) \pmod{2}$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) = \gamma(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}}))$ — тавтологическое одномерное вещественное расслоение над $\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})$. Тогда $u = t = w_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{R}} \cong \gamma' \oplus \gamma'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \gamma')$ в $x + iy$. Поэтому $\pi^*w_1(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0$ и $\pi^*w_2(\gamma_{\mathbb{R}}) = w_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^*v = t^2 = u^2$. Подставляя это в (39), получаем

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\mathbb{R}})) &= H^*(\mathbb{R}P(\gamma_{\mathbb{R}})) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi))[u] / (u^2 = \pi^*v) \cong \\ &\cong H^*(B)[u, \pi^*v] / ((\pi^*v)^n + c_1(\xi)(\pi^*v)^{n-1} + \dots + c_n(\xi) = 0, u^2 = \pi^*v) = \\ &= H^*(B)[u] / (u^{2n} + c_1(\xi)u^{2n-2} + \dots + c_n(\xi) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (39), получим требуемое. \square

Рассмотрим отображение $r: BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow G_{2n}(\mathbb{R}^\infty) = BO(2n)$, задаваемое оветствлением (забыванием комплексной структуры) n -мерных комплексных плоскостей. По определению, это отображение классифицирует оветствление тавтологического комплексного расслоения γ^n над $BU(n)$.

Предложение 11.4. Гомоморфизм

$$H^*(BO(2n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_{2n}] \rightarrow \mathbb{Z}_2[c_1, c_2, \dots, c_n] = H^*(BU(n); \mathbb{Z}_2),$$

индуцированный забыванием комплексной структуры $r: BU(n) \rightarrow BO(2n)$, переводит w_{2k} в c_k и w_{2k+1} в 0.

Доказательство. Пусть γ — тавтологическое комплексное расслоение над $BU(n)$, а γ' — тавтологическое вещественное расслоение над $BO(2n)$. Тогда $r^*\gamma' = \gamma_{\mathbb{R}}$,

$$r^*w_{2k} = r^*(w_{2k}(\gamma')) = w_{2k}(r^*\gamma') = w_{2k}(\gamma_{\mathbb{R}}) = c_k(\gamma) = c_k \pmod{2},$$

$$r^*w_{2k+1} = r^*(w_{2k+1}(\gamma')) = w_{2k+1}(r^*\gamma') = w_{2k+1}(\gamma_{\mathbb{R}}) = 0. \quad \square$$

11.3. Кватернионные классы Понтрягина. Кватернионы определяются как элементы четырёхмерного векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k \rangle$ с базисом $1, i, j, k$, т.е. как линейные комбинации $a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d — вещественные числа. Правило умножения символов i, j, k

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

распространённое по билинейности, превращает \mathbb{H} в ассоциативную (но не коммутативную алгебру) алгебру с делением над \mathbb{R} .

Кватернионным векторным пространством называется вещественное векторное пространство V со структурой левого \mathbb{H} -модуля, продолжающей структуру \mathbb{R} -модуля (т.е. умножение на вещественные скаляры осуществляется как в исходном V). Вещественная размерность кватернионного векторного пространства кратна 4.

Если W — кватернионное векторное пространство, то его комплексификацией $W_{\mathbb{C}}$ называется комплексное векторное пространство, получаемое забыванием умножений на j, k (остаётся только умножение на комплексные скаляры). Если W имело размерность n над \mathbb{H} , то $W_{\mathbb{C}}$ имеет размерность $2n$ над \mathbb{C} .

Если V — комплексное векторное пространство, то его кватернионизацией называется кватернионное пространство $V_{\mathbb{H}} = V \otimes \mathbb{H}$. В более явном виде, $V_{\mathbb{H}}$ представляет собой пространство $V \oplus \bar{V}$, в котором умножение на кватернионную единицу j определено формулой $j(x, y) = (-y, x)$. Так как $i(x, y) = (ix, -iy)$ в $V \oplus \bar{V}$, имеем $k(x, y) = ij(x, y) = (-iy, -ix)$. Непосредственная проверка показывает, что эти формулы действительно определяют структуру левого \mathbb{H} -модуля на $V \oplus \bar{V}$.

Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как множество одномерных кватернионных подпространств (прямых) в \mathbb{H}^{n+1} , аналогично вещественному и комплексному случаям (умножение на кватернионные скаляры всегда осуществляется слева).

Кватернионным n -мерным векторным расслоением называется вещественное $4n$ -мерное расслоение, слои которого являются кватернионными векторными пространствами, а тривиализации — \mathbb{H} -линейными отображениями. Описанные выше операции над векторными пространствами определены и для векторных расслоений. Так, определены комплексификация $\eta_{\mathbb{C}}$ кватернионного векторного расслоения η , кватернионизация $\xi_{\mathbb{H}}$ комплексного расслоения ξ и кватернионная проективизация $\mathbb{H}P(\eta)$.

Следующая теорема выводится из теоремы Лере–Хирша аналогично теореме 9.3.

Теорема 11.5. Пусть η — кватернионное n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством B . Тогда кольцо $H^*(\mathbb{H}P(\eta); \mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B)$ от одной образующей $v_{\eta} \in H^4(\mathbb{H}P(\eta))$ по единственному соотношению

$$v_{\eta}^n + p_1(\eta) \cdot v_{\eta}^{n-1} + \dots + p_{n-1}(\eta) \cdot v_{\eta} + p_n(\eta) \cdot 1 = 0,$$

где классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$, $i = 1, \dots, n$, определяются расслоением η .

Классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$ называются кватернионными классами Понтрягина n -мерного кватернионного векторного расслоения η .

Следующая теорема, аналогичная теореме 11.3, показывает, что кватернионные классы Понтрягина сводятся к классам Чженя.

Теорема 11.6. Пусть η — кватернионное n -мерное расслоение над B и $\eta_{\mathbb{C}}$ — его комплексификация. Тогда $p_k(\eta) = (-1)^k c_{2k}(\eta_{\mathbb{C}})$ и $c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{H}P(\eta) \rightarrow B$, тавтологическое одномерное кватернионное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{H}P(\eta))$ над $\mathbb{H}P(\eta)$, его комплексификацию $\gamma_{\mathbb{C}}$ (двумерное комплексное расслоение над $\mathbb{H}P(\eta)$) и проективизацию $\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Мы имеем $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$, так как любая комплексная прямая в слое $\eta_{\mathbb{C}}$ однозначно задаёт содержащую её кватернионную прямую в слое η . Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}P(\eta) \rightarrow B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Согласно теоремам 9.3 и 11.5 о когомологиях проективизации имеем

$$(40) \quad \begin{aligned} H^*(\mathbb{H}P(\eta)) &\cong H^*(B)[v] / (v^n + p_1(\eta)v^{n-1} + \dots + p_n(\eta) = 0), \\ H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(B)[u] / (u^{2n} + c_1(\eta_{\mathbb{C}})u^{2n-1} + \dots + c_{2n}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0), \\ &\parallel \\ H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) &\cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[t] / (t^2 + \pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}})t + \pi^*c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0). \end{aligned}$$

Мы имеем $v = c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = p_1(\gamma)$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) = \gamma(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}))$ — тавтологическое одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Тогда $u = t = c_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{C}} \cong \gamma' \oplus \bar{\gamma}'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \bar{\gamma}')$ в $x + jy$. Поэтому $\pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0$ и $\pi^*c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = -c_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^*v = -t^2 = -u^2$. Подставим это в (40):

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) &= H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) \cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[u] / (u^2 = -\pi^*v) \cong \\ &\cong H^*(B)[u, \pi^*v] / ((\pi^*v)^n + p_1(\eta)(\pi^*v)^{n-1} + \dots + p_n(\eta) = 0, u^2 = -\pi^*v) = \\ &= H^*(B)[u] / (u^{2n} - p_1(\eta)u^{2n-2} + \dots + (-1)^n p_n(\eta) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (40), получим требуемое. \square

Кватернионное векторное расслоение — это весьма богатая геометрическая структура, и естественно возникающих кватернионных расслоений мало.

Одна из трудностей, возникающих при работе с кватернионными расслоениями, заключается в том, что множество $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ кватернионно-линейных отображений кватернионных пространств U и W не является кватернионным пространством (левым \mathbb{H} -модулем), в силу некоммутативности умножения кватернионов. $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ не имеет даже естественной комплексной структуры и является лишь вещественным векторным пространством.

Пример 11.7. Рассмотрим касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ к кватернионному проективному пространству. По аналогии с предложением 8.6 доказывается, что имеет место изоморфизм *вещественных* расслоений $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \cong \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp})$, где γ — тавтологическое одномерное кватернионное расслоение над $\mathbb{H}P^n$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\mathbb{H}P^n \oplus \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma) = \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^{\perp} \oplus \gamma) = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \mathbb{H}^{n+1}) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \mathbb{H}). \end{aligned}$$

Расслоение $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \mathbb{H})$ изоморфно, как вещественное расслоение, расслоению $\gamma_{\mathbb{R}}$. Расслоение $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma)$ является четырёхмерным вещественным расслоением, которое оказывается нетривиальным (в отличие от комплексного случая).

Можно доказать, что кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным многообразием даже в слабом смысле, т. е. касательное расслоение

$\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным расслоением, и даже не допускает комплексной структуры.

11.4. Классы Понтрягина вещественных расслоений. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение над клеточной базой B . Его k -м *характеристическим классом Понтрягина* называется

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(B).$$

Также вводится полный класс Понтрягина $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \dots$.

Связь с кватернионными классами Понтрягина описывается через комплексные расслоения:

Предложение 11.8. *Для комплексного расслоения ζ имеем $p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}})$, где слева стоит класс Понтрягина вещественного расслоения, а справа — кватернионного.*

Доказательство. Имеем

$$p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = (-1)^k c_{2k}(\zeta \oplus \bar{\zeta}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{H}})_{\mathbb{C}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}}),$$

где последнее равенство вытекает из теоремы 11.6. \square

Предложение 11.9. *Пусть ξ — вещественное векторное расслоение.*

- а) $\xi_{\mathbb{C}} \cong \bar{\xi}_{\mathbb{C}}$ (изоморфизм комплексных расслоений);
- б) $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$. Если $\xi_{\mathbb{C}} = \eta_{\mathbb{C}}$ для кватернионного η , то $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$.

Доказательство. Комплексификация $\xi_{\mathbb{C}}$ представляет собой расслоение $\xi \oplus \xi$ с оператором комплексной структуры $i(x, y) = (-y, x)$, а комплексная структура на $\bar{\xi}_{\mathbb{C}}$ задаётся как $i(x, y) = (y, -x)$. Тогда отображение $(x, y) \mapsto (x, -y)$ задаёт \mathbb{C} -линейный изоморфизм $\xi_{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\xi}_{\mathbb{C}}$, что доказывает а).

Так как $c_{2k+1}(\bar{\zeta}) = -c_{2k+1}(\zeta)$ для любого комплексного расслоения ζ , получаем $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = c_{2k+1}(\bar{\xi}_{\mathbb{C}}) = -c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}})$, т. е. $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$. Второе утверждение из б) следует из теоремы 11.6. \square

Теорема 11.10 (формула Уитни для классов Понтрягина). *Для любых вещественных расслоений ξ и η имеем $2(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$.*

Доказательство. Это следует из формулы Уитни для классов Чжэня и предложения 11.9 б). \square

Если ζ — n -мерное комплексное расслоение, то, пользуясь принципом расщепления (33), мы можем записать $c(\zeta) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$. Тогда имеем $c(\bar{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i)$, $c((\zeta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = c(\zeta \oplus \bar{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i^2)$ и

$$p(\zeta_{\mathbb{R}}) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i^2),$$

т. е. $p_i(\zeta_{\mathbb{R}}) = \sigma_i(t_1^2, \dots, t_n^2)$.

Пример 11.11. Вычислим классы Понтрягина (овеществления касательного расслоения) $\mathbb{C}P^n$. Мы имеем $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \bar{\gamma}^{\oplus(n+1)}$, откуда $c(\mathbb{C}P^n) = (1 + t)^{n+1}$, где $t = c_1(\bar{\gamma}) \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — образующая. Следовательно,

$$p(\mathbb{C}P^n) = (1 + t^2)^{n+1}, \quad p_k(\mathbb{C}P^n) = C_{n+1}^k t^{2k} \text{ при } k \leq \frac{n}{2}.$$

Так как любое вещественное n -мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f: B \rightarrow BO(n)$, можно рассмотреть *универсальные классы Понтрягина* $p_k = p_k(\gamma^n)$, где γ^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Тогда мы имеем $p_k(\xi) = f^*p_k$.

Целочисленное кольцо когомологий $H^*(BO(n))$ не порождается классами p_k и устроено достаточно сложно. Как мы увидим, кольцо когомологий $BO(n)$ порождается универсальными классами Понтрягина, если в кольце коэффициентов обратить 2. Далее в этом разделе все когомологии будут рассматриваться с коэффициентами в коммутативном кольце $R \ni \frac{1}{2}$. Например, $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ или $R = \mathbb{Q}$.

Предложение 11.12. Пусть $R \ni \frac{1}{2}$. Кольцо $H^*(BO(n); R)$ содержит подкольцо многочленов $R[p_1, \dots, p_{[\frac{n}{2}}]$.

Доказательство. Пусть вначале $n = 2k$. Рассмотрим отображение $f: BU(k) \rightarrow BO(2k)$, классифицирующее оветствление тавтологического k -мерного комплексного расслоения над $BU(k)$, которое в течение этого доказательства мы будем обозначать γ' . Через γ будем обозначать тавтологическое $2k$ -мерное вещественное расслоение над $BO(2k)$. Мы имеем $f^*\gamma = \gamma'_\mathbb{R}$, $p_i = p_i(\gamma)$, $i = 1, \dots, k$. Мы имеем

$$1 - p_1(\gamma) + p_2(\gamma) - \dots + (-1)^k p_k(\gamma) = 1 + c_2(\gamma_\mathbb{C}) + c_4(\gamma_\mathbb{C}) + \dots + c_{2k}(\gamma_\mathbb{C}),$$

$$\begin{aligned} f^*(1 - p_1 + p_2 - \dots + (-1)^k p_k) &= 1 + c_2(f^*\gamma_\mathbb{C}) + c_4(f^*\gamma_\mathbb{C}) + \dots + c_{2k}(f^*\gamma_\mathbb{C}) = \\ &= 1 + c_2((\gamma'_\mathbb{R})_\mathbb{C}) + \dots + c_{2k}((\gamma'_\mathbb{R})_\mathbb{C}) = 1 + c_2(\gamma' \oplus \bar{\gamma}') + c_4(\gamma' \oplus \bar{\gamma}') + \dots + c_{2k}(\gamma' \oplus \bar{\gamma}') = \\ &= (1 + c_1 + c_2 + \dots + c_k)(1 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^k c_k), \end{aligned}$$

где $c_i = c_i(\gamma') \in H^*(BU(k); R)$ — универсальные классы Чженя. Следовательно,

$$f^*p_i = 2c_{2i} - 2c_{2i-1}c_1 + 2c_{2i-2}c_2 - \dots + (-1)^{i-1}2c_{i+1}c_{i-1} + (-1)^i c_i^2.$$

Отсюда вытекает, что классы f^*p_1, \dots, f^*p_k алгебраически независимы в кольце $H^*(BU(k); R) = R[c_1, \dots, c_k]$ (т.е. никакой многочлен от них не равен нулю). Следовательно, то же верно и для классов p_1, \dots, p_k в $H^*(BO(2k); R)$, т.е. $H^*(BO(2k); R)$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_k]$.

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Рассмотрим отображение $g: BO(2k) \rightarrow BO(2k + 1)$, классифицирующее $(2k + 1)$ -мерное расслоение $\gamma^{2k} \oplus \mathbb{R}$. Тогда $g^*p_i = g^*p_i(\gamma^{2k+1}) = p_i(\gamma^{2k}) = p_i$ при $i = 1, \dots, k$. Так как классы p_1, \dots, p_k алгебраически независимы в $H^*(BO(2k); R)$, они также алгебраически независимы в $H^*(BO(2k + 1); R)$. \square

11.5. Классы Понтрягина ориентированных расслоений.

Предложение 11.13. Для ориентированного $2k$ -мерного вещественного расслоения ξ имеем $p_k(\xi) = e(\xi)^2$.

Доказательство. Имеем изоморфизм $(\xi_\mathbb{C})_\mathbb{R} \cong \xi \oplus \xi$ (неориентированных) вещественных расслоений. В левой части этого равенства ориентация задаётся базисом $(e_1, 0), (0, e_1), \dots, (e_{2k}, 0), (0, e_{2k})$, а в правой части — базисом $(e_1, 0), \dots, (e_{2k}, 0), (0, e_1), \dots, (0, e_{2k})$. Поэтому для ориентируемых расслоений получаем изоморфизм $(\xi_\mathbb{C})_\mathbb{R} \cong (-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}} \xi \oplus \xi \cong (-1)^k \xi \oplus \xi$. Отсюда

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_\mathbb{C}) = (-1)^k e((\xi_\mathbb{C})_\mathbb{R}) = e(\xi \oplus \xi) = e(\xi)^2. \quad \square$$

Напомним, что через $S\xi$ обозначается пространство сферического расслоения $S\xi \rightarrow B$ со слоем S^{n-1} .

Теорема 11.14 (точная последовательность Гизина). Пусть $\xi = (p: E \rightarrow B)$ — ориентированное n -мерное векторное расслоение и $p: S\xi \rightarrow B$ — соответствующее расслоение сфер. Имеет место точная последовательность

$$\dots \rightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} H^{i+n}(B) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(S\xi) \rightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cdot e(\xi)} \dots$$

Доказательство. Рассматривая точную последовательность пары $(E, E \setminus B)$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^j(E, E \setminus B) & \longrightarrow & H^j(E) & \longrightarrow & H^j(E \setminus B) & \longrightarrow & H^{j+1}(E, E \setminus B) & \longrightarrow \\ & \cong \uparrow \cdot \theta(\xi) & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \cdot \theta(\xi) & \\ \longrightarrow & H^{j-n}(B) & \xrightarrow{\cdot e(\xi)} & H^j(B) & \longrightarrow & H^j(S\xi) & \longrightarrow & H^{j+1-n}(B) & \longrightarrow \end{array}$$

где левая стрелка — изоморфизм Тома, а два другие вертикальные изоморфизма индуцированы гомотопическими эквивалентностями. Нижняя строка — требуемая точная последовательность. \square

Множество всех ориентированных k -мерных линейных подпространств в \mathbb{R}^N называется *ориентированным многообразием Грассмана* и обозначается $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^N)$. Имеется двулистное накрытие $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^N) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^N)$, задаваемое забыванием ориентации подпространств. Также определён бесконечномерный ориентированный грассманиан $\tilde{G}_k = \tilde{G}_k(\mathbb{R}^\infty)$ и тавтологическое ориентированное k -мерное расслоение $\tilde{\gamma}^k$ над \tilde{G}_k . Для ориентированных расслоений имеет место аналог теоремы 8.15: ориентированное расслоение ξ классифицируется отображением базы $\tilde{f}: B \rightarrow \tilde{G}_k$, т. е. $\xi \cong \tilde{f}^* \tilde{\gamma}^k$, и гомотопные отображения \tilde{f} индуцируют изоморфные ориентированные расслоения. В связи с этим пространство \tilde{G}_k называется *классифицирующим пространством* ориентированных k -мерных расслоений и обозначается $BSO(k)$.

Имеем двулистное накрытие $BSO(n) \rightarrow BO(n)$. Таким образом, ориентация вещественного n -мерного расслоения ξ над B — это в точности класс гомотопии поднятия классифицирующего отображения $f: B \rightarrow BO(n)$ до отображения $\tilde{f}: B \rightarrow BSO(n)$:

$$\begin{array}{ccc} & BSO(n) & \\ & \tilde{f} \nearrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & BO(n) \end{array}$$

Теорема 11.15. Пусть R — коммутативное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$. Тогда

$$H^*(BSO(n); R) \cong \begin{cases} R[p_1, \dots, p_k], & \text{если } n = 2k + 1, \\ R[p_1, \dots, p_{k-1}, e], & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где $p_i = p_i(\tilde{\gamma}^n)$ и $e = e(\tilde{\gamma}^n)$ — универсальные характеристические классы и $p_k = e^2$ при $n = 2k$.

Доказательство. В доказательстве все когомологии рассматриваются с коэффициентами в R . Аналогично предложению 11.12 доказывается, что кольцо $H^*(BSO(n))$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_k]$ или $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ в зависимости от чётности n .

Далее используем индукцию по n . При $n = 1$ имеем двулистное накрытие $BSO(1) = S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty = BO(1)$. Поэтому $H^*(BSO(1)) \cong R$. При $n = 2$ имеем $BSO(2) = BU(1)$, так как ориентация двумерного подпространства эквивалентна заданию в нём комплексной структуры. Поэтому $H^*(BSO(2)) \cong H^*(BU(1)) \cong R[c_1] = R[e]$.

Чтобы применить шаг индукции, рассмотрим универсальное ориентированное расслоение $E\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$. Пространство расслоения сфер $S\tilde{\gamma}^n$ представляет собой множество векторов v длины 1 в ориентированных n -мерных подпространствах в \mathbb{R}^∞ . Рассмотрим отображение $S\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n-1)$, сопоставляющее вектору v его ортогональную ориентированную $(n-1)$ -мерную плоскость v^\perp . Тогда $S\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n-1)$ — локально тривиальное расслоение со стягиваемым слоем S^∞ , и поэтому $S\tilde{\gamma}^n \simeq BSO(n-1)$. Индуцированный проекцией $S\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$ гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \rightarrow H^*(S\tilde{\gamma}^n)$ превращается в гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \rightarrow H^*(BSO(n-1))$, индуцированный отображением $BSO(n-1) \rightarrow BSO(n)$, классифицирующим расслоение $\tilde{\gamma}^{n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Поэтому этот гомоморфизм переводит классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n))$ в соответствующие классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n-1))$ для $1 \leq i < \frac{n}{2}$.

Пусть $n = 2k$. Рассмотрим последовательность Гизина расслоения $E\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{2i+2k-1}(S\tilde{\gamma}^n) \rightarrow H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{\cdot e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(S\tilde{\gamma}^n) \rightarrow \\ \rightarrow H^{2i+1}(BSO(2k)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Здесь $H^{2i+2k-1}(S\tilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k-1}(BSO(2k-1)) = 0$ по предположению индукции. Гомоморфизм $H^{2i+2k}(BSO(2k)) \rightarrow H^{2i+2k}(S\tilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k}(BSO(2k-1))$ сюръективен, так как $H^*(BSO(2k-1)) = R[p_1, \dots, p_{k-1}]$ по предположению индукции и $p_i \in H^*(BSO(2k-1))$ накрывается соответствующим $p_i \in H^*(BSO(2k))$. В итоге получаем короткую точную последовательность в верхней строке диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{2i}(BSO(2k)) & \xrightarrow{\cdot e} & H^{2i+2k}(BSO(2k)) & \xrightarrow{\varphi} & H^{2i+2k}(BSO(2k-1)) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i} & \xrightarrow{\cdot e} & R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i+2k} & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_{k-1}]^{2i+2k} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Чтобы завершить шаг индукции, докажем, что средняя вертикальная стрелка — эпиморфизм. Применив вспомогательную индукцию по размерности группы когомологий, можно считать, что левая вертикальная стрелка сюръективна. Пусть $a \in H^{2i+2k}(BSO(2k))$. Запишем $\varphi(a) = Q(p_1, \dots, p_{k-1})$, где Q — многочлен. Тогда $\varphi(a - Q(p_1, \dots, p_{k-1})) = 0$, следовательно, $a - Q(p_1, \dots, p_{k-1}) = R(p_1, \dots, p_{k-1}, e) \cdot e$, где R — многочлен. Итак, $a = Q(p_1, \dots, p_{k-1}) + R(p_1, \dots, p_{k-1}, e) \cdot e \in R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ и средняя стрелка сюръективна.

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Тогда $e(\tilde{\gamma}^n) = 0$, так как n нечётно и $R \ni \frac{1}{2}$. Поэтому гомоморфизм умножения на e в точной последовательности Гизина расслоения $E\tilde{\gamma}^n \rightarrow BSO(n)$ нулевой, и она распадается в короткие точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{2i}(BSO(2k+1)) & \longrightarrow & H^{2i}(BSO(2k)) & \xrightarrow{\varphi} & H^{2i-2k}(BSO(2k+1)) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_k]^{2i} & \xrightarrow{\psi} & R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]^{2i} & \longrightarrow & R[p_1, \dots, p_k]^{2i-2k} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Равенство посередине — по предположению индукции. Имеем $\psi(p_i) = p_i$ при $i < k$ и $\psi(p_k) = e^2$, здесь $e = e(\tilde{\gamma}^{2k})$. Тогда $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ — свободный $R[p_1, \dots, p_k]$ -модуль с образующими 1 и e , и из сравнения рангов получаем $H^{2i}(BSO(2k+1)) = R[p_1, \dots, p_k]^{2i}$. \square

Следствие 11.16. *Любой характеристический класс ориентированных n -мерных расслоений с коэффициентами в $R \ni \frac{1}{2}$ есть многочлен от классов Понтрягина u , если n чётно, от класса Эйлера.*

Задачи и упражнения.

11.17. Пусть V — комплексное векторное пространство. Докажите, что формула $j(x, y) = (-y, x)$ задаёт на $V \oplus \bar{V}$ естественную структуру кватернионного пространства (называемого кватернионизацией V).

11.18. Вычислите классы Понтрягина касательного расслоения кватернионного проективного пространства $\mathbb{H}P^n$. [Указание: пример 11.7.]

11.19. Докажите, что $p_i(\xi) = w_{2i}^2(\xi) \pmod{2}$ для вещественного расслоения ξ .

11.20. Докажите изоморфизм

$$H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n],$$

где $w_i = w_i(\tilde{\gamma}^n)$. Докажите, что при гомоморфизме

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \rightarrow \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_n] = H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2),$$

индуцированном накрытием $BSO(n) \rightarrow BO(n)$, класс w_1 переходит в нуль, и w_i переходит в w_i при $i \geq 2$. [Указание: используйте аналог точной последовательности Гизина с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 для двулистного накрытия — расслоения сфер одномерного вещественного расслоения.]

11.21. Докажите, что если $R \ni \frac{1}{2}$, то имеет место изоморфизм

$$H^*(BO(n); R) \cong R[p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}].$$

Опишите гомоморфизм $H^*(BO(n); R) \rightarrow H^*(BSO(n); R)$, индуцированный накрытием $BSO(n) \rightarrow BO(n)$.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ