МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ-4. СЕМИНАРЫ

ГУГНИН
ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Семинар 1

Введение

Курс начнется с рассмотрения общей топологии. В этом разделе будут обсуждаться понятия непрерывности, гомеоморфизма и таких топологических свойств, как компактность, связность, метризуемость.

Рекомендуемая литература: «Элементарная топология», Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., 2 изд.

Топологическое пространство

Определение 1. Рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$. Подмножество $U \subset \mathbb{R}$ *открыто*, если для всякой точки $x_0 \in U$ существует $\varepsilon > 0$: $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U$.

Определение 2. *Топологическим пространством* называется пара (X, τ), где X — произвольное множество, а τ — семейство каких–то подмножеств X, т. е. $\tau \subset 2^X$. Эти подмножества называются открытыми. Должны быть выполнены три аксиомы, которые налагаются на топологию:

1) $\varnothing, X$ — открытые ($\in \tau$).

2) Рассмотрим открытые множества $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in \Lambda$. Тогда $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = U$ — открытое множество.

3) Конечные пересечения открытых множеств открыты: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ — открытое множество.

Определение 3. *Метрическое пространство* — это пара (X, d), где X — произвольное множество, а d — метрика, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0; \infty)$:

1) $d(x, y) \geq 0$, $d = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Определение 4. *Открытый шар* с центром в точке x_0 и радиуса $R > 0$ — это множество

$$B_R(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < R\}.$$

Задача 1. *Если у нас есть метрическое пространство с метрикой d, то в нем есть некоторая выделенная стандартная топология, которая называется топологией, порожденной метрикой d. В ней $U \subset X$ открыто, если $x_0 \in U$ существует $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x_0) \subset U$.*

Докажите, что такое определение действительно задает топологию (т. е. нужно проверить три аксиомы топологического пространства).

Решение. Выполнение первой аксиомы очевидно.

Проверим вторую аксиому. Рассмотрим открытые множества $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in \Lambda$. Пусть $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = U$. Рассмотрим произвольный $x_0 \in U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Следовательно, $\exists \alpha_0 \in \Lambda$: $x_0 \in U_{\alpha_0}$. Следовательно, $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x_0) \subset U_{\alpha_0} \subset U$.

Проверим третью аксиому. рассмотрим открытые множества $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$. Обозначим $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in U \implies \forall 1 \le i \le n$ существует $\varepsilon_i > 0$: $B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset U_i$. Следовательно, $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$. Тогда

$$B_\varepsilon(x_0) = \bigcap_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(x_0).$$

□

На любом ли X можно задать топологию? Да, есть так называемая *антидискретная* или «грубая» топология: в качестве открытых подмножеств рассматриваются только само X и пустое множество. Кроме того, есть «самая большая» или «тонкая» топология, которая называется *дискретная*: в ней любое подмножество X является открытым ($\tau = 2^X$). Кроме того, можно сказать, что в дискретной топологии любая точка является открытой.

Свойства топологических пространств

Определение 5. *Аксиома отделимости Хаусдорфа* T_2: для всяких точек $x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists$ такие открытые множества $U \ni x$, $V \ni y$, $U, V \subset X$, что $U \cap V = \varnothing$.

Определение 6. Будем говорить, что топологическое пространство (X, τ) *метризуемо*, если существует такая метрика d на этом пространстве X, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, что $\tau_d = \tau$.

Задача 2. *Допустим, что топологическое пространство метризуемо. Однозначно ли в этом случае восстанавливается метрика d?*

Решение. Ответ: неоднозначно. Мы от метрики d можем перейти к $\widetilde{d} = 2d$. Тогда все открытые шары будут иметь вид $B_{\varepsilon/2}$, и набор открытых шаров будет тот же самый. □

Можно ли найти вторую метрику так, что изменится набор открытых множеств?

Определение 7. Пусть на X есть две топологии: τ и ξ. Топология τ *тоньше* ξ, если $\forall U \subset X$ открыто в $\xi \implies U$ открыто в τ.

Задача 3. *Пусть $X = \mathbb{R}^2$. Зададим метрику*

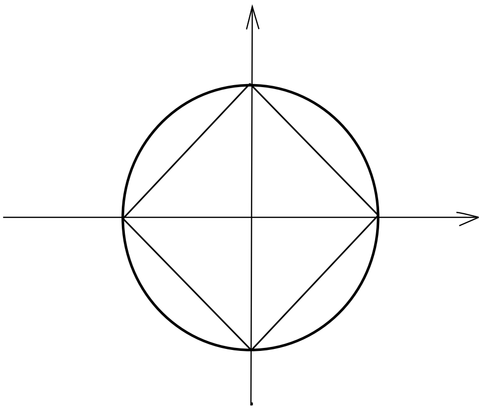
$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Докажем, что эта метрика порождает ту же самую топологию, что и евклидова метрика d_2.

Доказательство. Пусть τ_2 порождена метрикой d_2, а τ_1 метрикой d_1.

Рассмотрим открытое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ в смысле евклидовой метрики. Вместе с каждой своей точкой множество U содержит некоторый круг ε: $B_\varepsilon \subset U$. Покажем, что в этот круг можно вписать некоторый маленький шар радиуса δ относительно метрики d_1.

Шар в метрике d_1 выглядит, как квадрат, повернутый на 45 градусов. Можно взять $\delta = \varepsilon$. Теперь

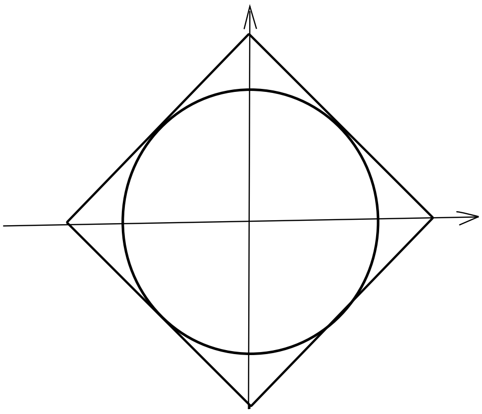


$$U = \bigcup_{a \in U} B^{d_2}_{\varepsilon_a}(a).$$

При этом $B^{d_2}_{\varepsilon_a}(a) \supset B^{d_1}_{\delta_a}(a) \ni a$. Следовательно,

$$U = \bigcup_{a \in U} B^{d_1}_{\delta_a}(a).$$

Получается, что U, открытое в смысле d_2, является открытым в смысле d_1. Докажем в обратную сторону.



Рассмотрим множество V, открытое в метрике d_1. То есть для любой точки $a \in V$ верно, что $B^{d_1}_{\varepsilon_a}(a) \subset U$. Далее снова

$$U = \bigcup_{a \in U} B^{d_2}_{\varepsilon_a}(a).$$

Затем, вписываем в этот квадрат круг $B^{d_2}_{\delta_a}(a)$: $\delta_a = \varepsilon_a/\sqrt{2}$.

Получаем

$$U = \bigcup_{a \in U} B^{d_2}_{\delta_a}(a).$$

Следовательно, U, открытое в смысле d_1, является открытым в смысле d_2.

Однако в нашем доказательстве остался небольшой пробел: мы оперировали открытыми шарами, но не доказали, что открытый шар — это открытое множество (см. задачу 4). □

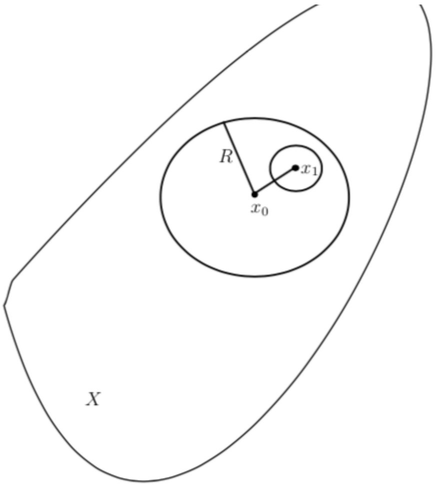
Задача 4. *Пусть дано метрическое пространство (X, d). Рассмотрим к качестве U шар $B_R(x_1) = U$. Почему U открыто?*

Решение. Надо проверить, что $\forall x_0 \in B_R(x_1)$ существует $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x_0) \subset B_R(x_1)$.

Рассмотрим шар $B_R(x_1)$. В нем возьмем точку x_0. Если $x_0 = x_1$, то $\varepsilon = R$. Пусть теперь $x_0 \neq x_1$. Расстояние между этими точками обозначим $d(x_1, x_0)$. Тогда в силу неравенства треугольника в качестве радиуса для шара $B_\varepsilon(x_0)$ подойдет

$$\varepsilon = R - d(x_1, x_0),$$

и $B_\varepsilon(x_0) \subset B_R(x_1)$. Что и требовалось. □



Нормированное пространство

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 8. Скажем, что $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}_+$ — *норма*, если

1) $||v|| \geq 0$ и равно $0 \iff v = 0$.
2) $||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v||$.
3) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

В нормированном пространстве $d(u, v) = ||u - v||$.

Определение 9. Если на одном и том же пространстве есть две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$, и существуют константы $c_1, c_2 > 0$:

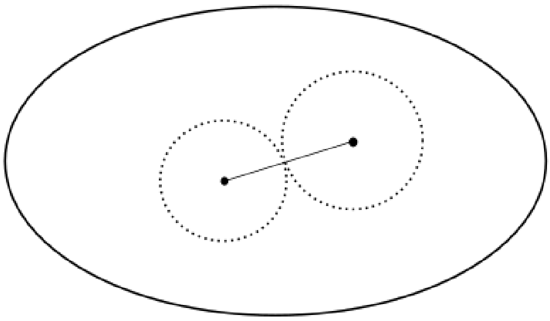
$$||v||_1 \leq c_1||\cdot||_2, \quad ||v||_2 \leq c_2||\cdot||_1,$$

то такие две нормы называются *эквивалентными.*

Задача 5. *Оказывается две нормы задают на V одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда они эквивалентны. В конечномерном случае все нормы эквивалентны и задаю стандартную топологию.*

Хаусдорфово пространство

Задача 6. *Верно ли, что любое метризуемое пространство является хаусдорфовым?*



Решение. Верно. Пусть у нас есть метрическое пространство (X, d), две точки $x, y \in X$ и $d(x, y)$ — расстояние между ними. Тогда рассмотрим шары $B_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon(y)$, где $\varepsilon = d(x, y)/2$. По неравенству треугольника $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \varnothing$.

Из этой задачи, вообще говоря, следует, что если пространство нехаусдорфово, то оно не метризуемо. ☐

Задача 7. *Найти все топологии в двухточечном множестве $X = \{a, b\}$.*

Решение. 1) открыты $\varnothing$ и X;

2) открыты $\varnothing$, $\{a\}$ и $\{a, b\}$;

3) открыты $\varnothing$, $\{b\}$ и $\{a, b\}$;

4) открыты все 2^X подмножеств.

Ответ: 4. Здесь хаусдорфовой является только последняя топология. ☐

Задача 8. *Пусть X — конечное множество, а τ — некоторая хаусдорфова топология на X. Тогда τ — дискретная топология, $\tau = 2^X$.*

Решение. Рассмотрим точку $x_0 \in X$. Наша цель — доказать, что это одноточечное множество является открытым.

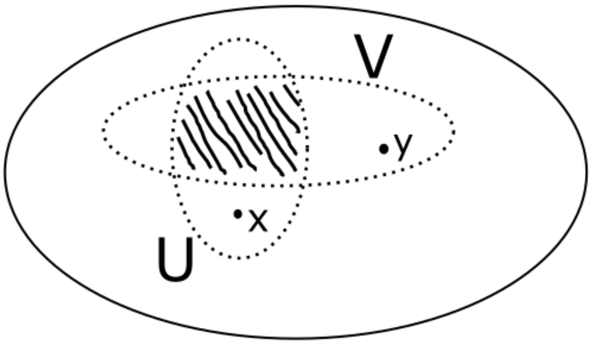
Пусть наше множество состоит из n точек. Рассмотрим точку x_1. Так как пространство хаусдорфово, то для каждой пары x_1 и x_i, $i \neq 1$, существуют не пересекающиеся окрестности. В частности, для точки x_1 существуют U_i, $i = 2, \ldots, n$. Получаем, что

$$\{x_n\} = \bigcap_{i=2}^{n} U_i$$

— открытое множество, так как является конечным пересечением открытых. Следовательно, каждая точка — открытое множество, то есть мы имеем дело с дискретной топологией. Что и требовалось. ☐

Аксиома T_1

Определение 10. *Аксиома T_1: для любых двух разных точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует открытая окрестность $U \ni x$, $U \subset X$ но $y \notin U$. При этом существует открытая окрестность $V \ni y$, $V \subset X$ но $x \notin V$.*



Очевидно, что $T_2 \Longleftrightarrow T_1$. В обратную сторону, вообще говоря, неверно.

Лемма 1. *Аксиома $T_1 \Longleftrightarrow \forall\{x_0\} \subset X$, $x_0 \in X$, — замкнутое множество.*

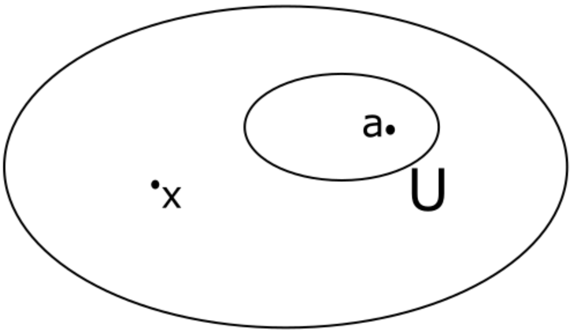
Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$ если любая точка является замкнутым множеством, то в качестве U можно взять ее дополнение $U = X \setminus \{y\}$. Аналогично $V = X \setminus \{x\}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Хотим проверить, что любая точка — замкнутое множество. Наша задача — доказать, что $X \setminus \{x_0\}$ открыто. Рассмотрим точку $a \in X \setminus \{x_0\}$. В силу T_1 существует окрестность U_a, $x_0 \notin U_a$. Тогда

$$X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{a \neq x_0} U_a$$

— открытое множество как объединение открытых. ☐

Топологию можно задавать не только с помощью открытых множеств, но и с помощью замкнутых. Тогда аксиоматика будет следующей:



1) $\varnothing, X$ — замкнутые ($\in \tau$).
2) Рассмотрим замкнутые множества $F_\alpha \subset X$, $\alpha \in \Lambda$. Тогда $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha = F$ — замкнутое множество.
3) Конечные объединения замкнутых множеств замкнуты:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall F_1, F_2, \ldots, F_n \subset X \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

— замкнутое множество.

Задача 9. *Пусть $|X| \geq |\mathbb{N}|$. Рассмотрим топологию, которая состоит из следующих замкнутых множеств: $\varnothing$, X, $F \subset X$ — конечные подмножества. Это так называемая* «наименьшая T_1 топология на данном X». *Проверим, что это топология.*

Решение. Это будет топология T_1: любая точка — замкнутое множество.

Будет ли эта топология хаусдорфовой? На самом деле в этом пространстве любые два непустых открытых множества пересекаются по бесконечному числу точек. Действительно, любое открытое множество, если оно не пусто, в нашем пространстве — это либо все X, либо дополнение до конечного множества. Значит, пересечение двух открытых — это все X за исключением, быть может, конечного числа точек. Следовательно, это не хаусдорфова топология. ☐

Домашнее задание

Задача 10. *Доказать, что $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c} = |2^{\mathbb{N}}|$.*

Задача 11. *Доказать, что $\mathfrak{c} \times \ldots \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c} = |2^{\mathbb{N}}|$.*

Определение 11. Обозначение: $Y^X = \{f : X \to Y\}$.

Задача 12. *Введем бесконечную группу перестановок:*

$$S_\infty = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ — биекция}\}.$$

Найти $|S_\infty|$.

Задача 13. *Явным образом построить биекцию* $[0;1] \to [0;1)$.

Задача 14. *Построить явным образом метрическое пространство* (X, d) *и предъявить два таких замкнутых в нем шара, что шар большего радиуса строго содержится внутри шара меньшего радиуса.*

Задача 15. *Придумать полное метрическое пространство и последовательность таких вложенных замкнутых шаров, что их пересечение пусто.*

Задача 16. *Найти такие два множества плоскости со стандартной метрикой и топологией, что они непустые, не пересекаются, а расстояние между ними равно нулю.*

Задача 17. *Пусть есть метрическое пространство, где между точка расстояния не ограничены. Как ввести метрику, чтобы расстояния стали меньше 1, а топология осталась такой же.*

Семинар 2

Разбор домашнего задания

Задача 18. *Доказать, что* $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, *где* $\mathfrak{c} = |2^{\mathbb{N}}|$.

Решение. Можно отождествить множество мощности континуум с мощностью набора последовательностей из 0 и 1:

$$\mathfrak{c} = |(0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ldots)|.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

— это столько, сколько пар последовательностей. Далее, берем первый элемент из первой, первый из второй, второй из первой, второй из второй и получим ровно одну последовательность из 0 и 1. Следовательно, имеет место биекция $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$. ☐

Аналогично решается задача $\mathfrak{c} \times \ldots \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Задача 19. *Введем бесконечную группу перестановок:*

$$S_\infty = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f\ -\ \textit{биекция}\}.$$

Доказать, что $|S_\infty| = \mathfrak{c}$.

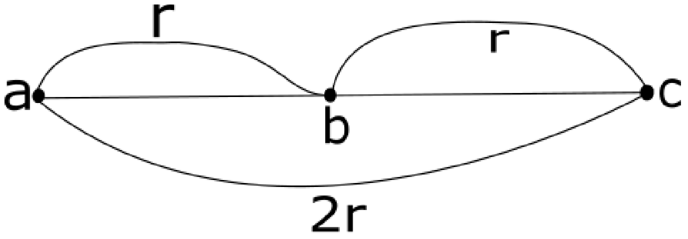
Решение. Все биекции $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ — биекция$\}$ лежат в множестве всех функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ — биекция}\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}.$$

Имеем $|\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}| = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Мы знаем, что $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$. Итак, получили оценку сверху

$$|S_\infty| \leq \mathfrak{c}.$$

Осталось доказать оценку снизу. Рассмотрим подстановки: на каждом месте — либо тождественная, либо транспозиция с соседним. Закодируем каждый шаг либо нулем, либо 1 в зависимости от перестановки в каждом номере. Получили последовательности из нулей и единиц — их $2^{\mathbb{N}}$, то есть континуум. ☐



Задача 20. *Построить явным образом метрическое пространство (X, d) и предъявить два таких замкнутых в нем шара, что шар большего радиуса строго содержится внутри шара меньшего радиуса.*

Решение. Рассмотрим три точки на прямой: a, b, c.

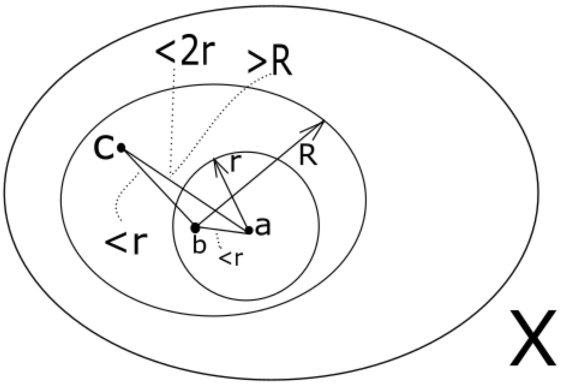
Тогда рассмотрим шары $\overline{B_r(b)} = \{a, b, c\}$, $\overline{B_{2r-\varepsilon}(a)} = \{a, b\}$. Следовательно,

$$\overline{B_{2r-\varepsilon}(a)} \subset \overline{B_r(b)}.$$

☐

Утверждение 1. *Если в метрическом пространстве (X, d) верно $\overline{B_r(b)} \supsetneq \overline{B_R(a)}$ $\implies R < 2r$.*

Доказательство. Расстояния $d(c, b) \leq r$, $d(a, b) \leq r$, $d(c, a) \leq 2r$, но $d(c, a) > R \implies R < d \leq 2r$. ☐



Задача 21. *Придумать полное метрическое пространство и последовательность таких вложенных замкнутых шаров, что их пересечение пусто.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{N}$,

$$d(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n \\ \frac{1}{2\min(n,m)}, & n \neq m. \end{cases}$$

Рассмотрим замкнутый шар $\overline{B_{1+2/m}(m)} = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$ ☐

Задача 22. *Найти такие два множества на плоскости со стандартной метрикой и топологией, что они непустые, не пересекаются, а расстояние между ними равно нулю.*

Решение. Для плоскости подходят: гипербола и ось Ox.

Для прямой: натуральный ряд и числа $\{n + \frac{1}{2n}, n \geq 1\}$. ☐

Задача 23. *Пусть есть метрическое пространство, где между точка расстояния не ограничены. Как ввести метрику, чтобы расстояния стали меньше 1, а топология осталась такой же.*

Решение. Подойдет метрика

$$\widehat{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Неизменность топологии следует из неравенства

$$d < \varepsilon \Longrightarrow \widehat{d} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

А именно, $\forall y \in B_\varepsilon^{(d)}(x_0) \Longrightarrow d(y,x_0) < \varepsilon \Longleftrightarrow$

$$\widehat{d}(y,x_0) = \frac{d(y,x_0)}{1+d(y,x_0)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad f' = \frac{\varepsilon'(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)'\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{1+\varepsilon-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}.$$

Следовательно, $f'(0) = 1$. □

Аксиома T_0

Определение 12. Топологическое пространство (X,τ) удовлетворяет *аксиоме отделимости Колмогорова* T_0, если $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, верно

$$\left[\begin{array}{l} \exists x \in U \subset X: \ y \notin U, \\ \exists y \in V \subset X: \ x \notin V. \end{array}\right.$$

Пример 1. Пространство — связное двоеточие $\{a,b\}$. Топология $\tau = \{\varnothing, \{a,b\}, \{a\}\}$.

Аксиома T_3

Определение 13. Топологическое пространство (X,τ) удовлетворяет *аксиоме отделимости* T_3, если $\forall a \in X$ и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, $a \notin F$,

$$\begin{cases} \exists a \in U \supset X, \text{ где } U \text{ — открытое}, \\ \exists F \subset V \subset X, \text{ где } V \text{ — открытое} \end{cases}$$

и $U \cap V = \varnothing$.

Пример 2. Из аксиомы T_3 не следует аксиома T_2: антидискретная топология удовлетворяет аксиоме T_3.

Определение 14. Аксиомой T_3 *в сильном смысле* называется топология, которая удовлетворяет аксиомам T_3 и T_1. Такое топологическое пространство называется *регулярным.* Далее будем писать просто T_3 (иногда для ясности уточняя «в сильном смысле»).

Утверждение 2. *Из* T_3 в сильном смысле *(то есть из* T_3 *и* T_1*) следует* T_2.

Аксиома T_4

Определение 15. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет *аксиоме отделимости* T_4, если для всяких замкнутых непустых $A, B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$,

$$\begin{cases} \exists A \subset U \supset X, \text{ где } U \text{ — открытое,} \\ \exists B \subset V \subset X, \text{ где } V \text{ — открытое} \end{cases}$$

и $U \cap V = \varnothing$.

Ее также далее будем рассматривать вместе с аксиомой T_1 — T_4 в сильном смысле. Такие топологические пространства называются *нормальные*.

Очевидным образом из T_4 следует T_3 (так как точки замкнуты).

Получили цепочку импликаций:

$$\boxed{T_0 \Longleftarrow T_1 \Longleftarrow T_2 \Longleftarrow T_3 \Longleftarrow T_4}.$$

В обратную сторону, вообще говоря, неверно.

Метризуемость

Обозначим через $\mathcal{M}$ метризуемость топологического пространства.

Определение 16. Будем говорить, что топологическое пространство (X, τ) *метризуемо*, если существует такая метрика d на этом пространстве X, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, что $\tau_d = \tau$.

Получим цепочку импликаций:

$$\boxed{T_0 \Longleftarrow T_1 \Longleftarrow T_2 \Longleftarrow T_3 \Longleftarrow T_4 \Longleftarrow \mathcal{M}}.$$

Утверждение 3. *Докажем импликацию $T_4 \Longleftarrow \mathcal{M}$ (см. семинар 3).*

База топологии

Определение 17. Рассмотрим топологическое пространство (X, τ). *Базой топологией* называется такой набор открытых множество $\mathcal{B} \subset \tau$, что для всякого открытого $U \subset X$ существует набор V_α, $\alpha \in \Lambda$, $V_\alpha \in \mathcal{B}$:

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = U.$$

Тривиальная база — $\mathcal{B} = \tau$.

Определение 18. Топологическое пространство (X, τ) называется удовлетворяющим *второй аксиоме счетности 2АС*, если существует не более чем счетная открытая база топологии $\mathcal{B}$.

Пример 3. Плоскость $\mathbb{R}^2$ со стандартной топологией удовлетворяет второй аксиоме счетности: в качестве базы можно взять открытые шары с рациональными радиусами с центрами с рациональными координатами. Еще в качестве базы можно взять шары с центрами в рациональных точках с радиусами $\{\frac{1}{2^n}\}$ или $\{\frac{1}{n!}\}$ (проверьте!).

Определение 19. Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *всюду плотным*, если $\bar{A} = X$, где $\bar{A} = \cap F$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A (здесь F — замкнутое множество в X, содержащее A).

Определение 20. Топологическое пространство (X, τ) называется *сепарабельным*, если существует такое $A \subset X$, что

1) A всюду плотно;

2) $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

Утверждение 4. *Из второй аксиомы счетности следует сепарабельность. (Обратное, вообще говоря, неверно.)*

Доказательство. Отметим по точке в каждом элементе базы. Получится всюду плотное множество. □

Задача 24. *Доказать, что из метризуемости и сепарабельности следует 2АС.*

Определение 21. Рассмотрим топологическое пространство (X, τ). Рассмотрим подмножество $A \subset X$. На нем есть *индуцированная топология*

$$\tau|_A = \{\text{открытым } U \subset A, \text{ если } \exists \text{ открытое } V \subset X \colon U = A \cap V.$$

Задача 25. *Проверить, что индуцированная топология является топологией.*

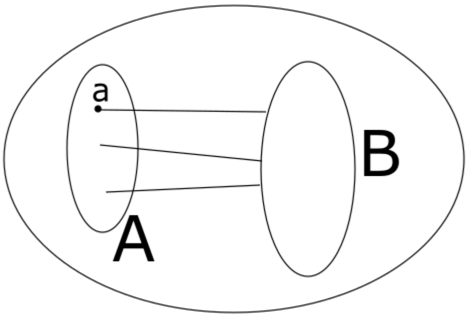
Задача 26. *Доказать равенство для метрического пространства (X, d):*

$$\tau_d|_A = \tau(d|_A).$$

Семинар 3

Разбор домашнего задания

Задача 27. *Докажем импликацию* $\mathcal{M} \Longrightarrow T_4$.



Решение. Рассмотрим пространство (X, d). Рассмотрим замкнтутые множества A и B. Рассмотрим точку $a \in A$. Имеем

$$d(a, B) = \inf_{y \in B} d(a, y).$$

Надо доказать, что если $a \notin B$, то $d(a, B) > 0$. Так как B замкнуто, то $X \setminus B$ открыто. Следовательно, $\exists \varepsilon$: $B_\varepsilon(a) \subset X \setminus B \Longrightarrow B_\varepsilon(a) \cap B = \varnothing$. Следовательно, $d(a, B) \geq \varepsilon$.

Пусть r_a — положительная функция, задающая расстояние от точки a до множества B. Тогда положим

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{r_a/3}(a)$$

— искомая окрестность множества A. Аналогично

$$V = \bigcup_{b \in B} B_{r_b/3}(b),$$

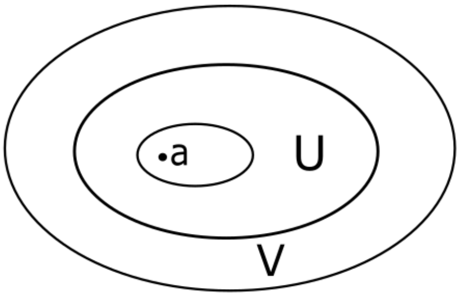
и $U \cap V = \varnothing$. □

Задача 28. *Из метризуемости и сепарабельности следует вторая аксиома счетности.*

Доказательство. Рассмотрим подмножество $A = \{a_1, a_2, \ldots, \} \subset X$. $\bar{A} = X$. Рассмотрим радиусы $R_m = \frac{1}{2^m}$. Рассмотрим шары $B_{1/2^m}(a_k)$. Наша задача показать, что это база.

Критерий базы. (X, τ), $\mathcal{B} \subset \tau$ — база $\Longleftrightarrow \forall$ открытого $V \subset X$ и $\forall a \in V$ $\exists U \in \mathcal{B}$: $a \in U \subset V$.

Доказательство критерия базы. Пусть $\mathcal{B} \subset \tau$. Рассмотрим свойство базы для V. Оно есть объединение элементов из базы. Тогда, в частности, точка a лежит в каком–то из элементов базы, которые образуют объединение V. Следовательно, действительно $\exists U \in \mathcal{B}$: $a \in U \subset V$.



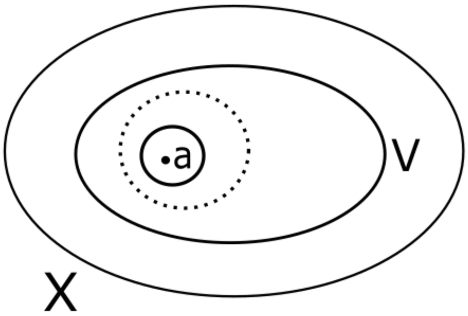
Докажем в обратную сторону. Для каждой точки $a \in V$ находим свое множество U_a. Далее получаем

$$\bigcup_{a\in V} U_a = V.$$

□

Вернемся теперь к доказательству того, что шары $B_{1/2^m}(a_k)$ являются базой метрического пространства.

Рассмотрим произвольное открытое $V \subset X$ и $a \in V$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \subset V$. Рассмотрим радиус $1/2^m < \varepsilon/10$. Теперь рассмотрим такую точку a_k, что $d(a_k, a) < \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{10}$ (такая точка есть, так как это всюду плотное множество). Тем самым условие для базы выполнено. □



Определение 22. Пусть даны два метрических пространства (X, d) и (Y, ρ). Скажем, что отображение $f : X \to Y$ — *изометрия*, если f — биекция и сохраняет расстояние между точками: $\forall a, b \in X$ верно, что

$$\rho(f(a), f(b)) = d(a, b).$$

На всех метрических пространствах можно ввести отношение эквивалентности: два пространства эквивалентны тогда и только тогда, когда они изометричны.

Задача 29. *Рассмотрим все метрические сепарабельные пространства (X, d) и факторизуем их множество по отношению эквивалентности изометрии — обозначим его через $M_{сепар}/\sim$. Доказать, что $|M_{сепар}/\sim| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.*

Если добавить условие полноты, то мощность будет $\leq \mathfrak{c}$.

Задача 30. *Доказать равенство для метрического пространства* (X, d)*:*

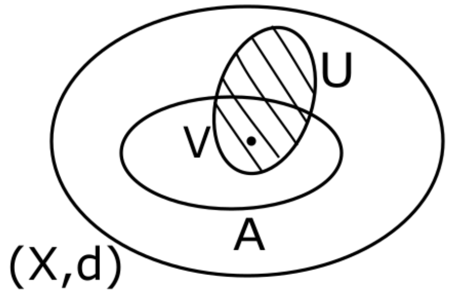
$$\tau_d|_A = \tau(d|_A).$$

Решение. Проверим включение $\subset$. Рассмотрим $V \subset A$, $V \in \tau_d|_A$. По определению это означает, что существует открытое множество $U \subset X$: $U \cap A = V$.

Проверим, для любой ли точки $a \in V \subset A$ существует $\varepsilon > 0$, что $B^A_\varepsilon(a) \subset V$ (?). Мы знаем, что $V \subset U$. Для этого U существует такой $\varepsilon > 0$, что $B^X_\varepsilon(a) \subset U$ (так как U открыто). Но

$$B^X_\varepsilon(a) \cap A = B^A_\varepsilon(a) \subset U \cap A = V,$$

что и требовалось. □



Компактность

Определение 23. *Покрытием* множества X называется такой набор $U_\lambda \subset X$, $\lambda \in \Lambda$, что $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$.

Определение 24. Рассмотрим множество X. Топологическое пространство (X, τ) будем называется *компактным* (внутренняя компактность), если для любого открытого покрытия $U_\lambda \subset X$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$ существует конечное подпокрытие: $\exists n \in \mathbb{N}$,

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda, \text{ что } \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} = X.$$

Определение 25. Рассмотрим для (X, τ) объемлющее топологическое пространство (W, ξ), где $\tau = \xi|_X$.

Пространство (X, τ), где $X \subset W$, обладает свойством *внешней компактности*, если для любого набора (внешнего открытого покрытия) $V_\lambda \subset W$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \supset X$.

Оказывается, что внешняя компактность равносильна внутренней.

Утверждение 5. *Свойство внешней компактности равносильна свойству внутренней компактности.*

Доказательство. Докажем в одну сторону. Пусть у нас есть свойство внешней компактности. Надо доказать, что есть свойство внутренней компактности. Рассмотрим произвольное открытое покрытие внутри X: $U_\lambda \subset X$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$. Но $U_\lambda = X \cap V_\lambda$ и $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \supset X$ — внешнее открытое покрытие, из которого выделяется конечное подпокрытие. □

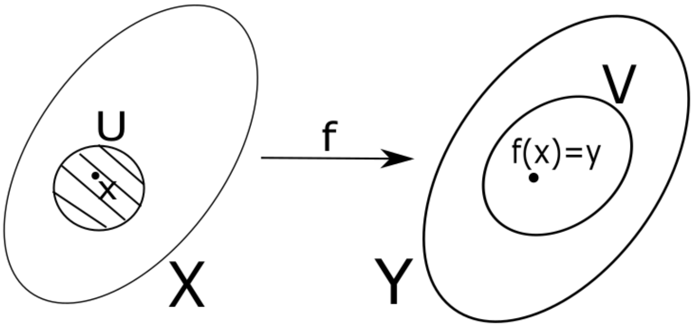
Задача 31. *Доказать критерий компактности в* $\mathbb{R}^n$.

Задача 32. *Доказать, что всех замкнутых подмножеств в* $\mathbb{R}^N$ *— континуум.*

Непрерывное отображение

Пусть дано два топологических пространства (X, τ) и (Y, ξ).

Определение 26. Функция называется *непрерывной*, если выполнено условие Коши: $\forall y_0 = f(x_0) \in V \subset Y$ (V открыто в Y) $\exists x_0 \in U \subset X$: $f(U) \subset V$, где U открыто в X.



Определение 27. Функция f *непрерывна*, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$.

Определение 28. Функция f *непрерывна*, если $\forall$ открытого $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V) \subset$ открыт.

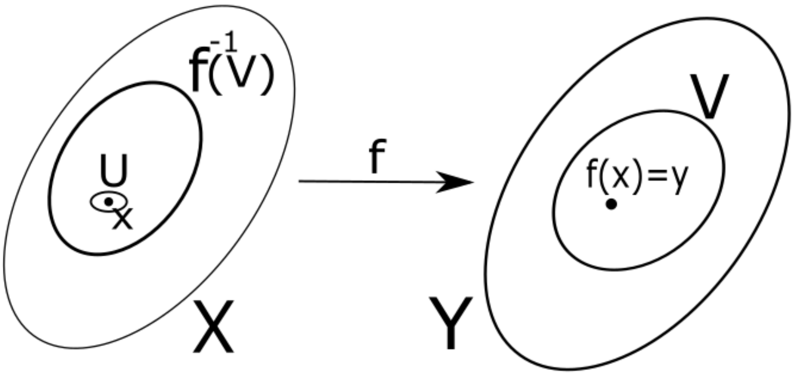
Утверждение 6. *Определения 27 и 28 равносильны.*

Доказательство. Докажем импликацию $27 \Longrightarrow 28$. Пусть V открыто в Y. Рассмотрим его полный прообраз — $f^{-1}(V)$. Надо проверить, что это открытое множество в X. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in f^{-1}(V)$. Имеем $f(x_0) = y_0 \in V$. Так как V открыто в Y и содержит y_0, то есть условие Коши в точке x_0: существует открытая окрестность $U \ni x_0$, $U \subset X$, что $f(U) \subset V$. Но если любая точка из U попадает в V, то $U \subset f^{-1}(V)$ по определению полного прообраза. То есть полный прообраз вместе с любой своей точкой содержит открытое множество (окрестность этой точки). Далее берем объединение по всем точкам и получаем, что $f^{-1}(V)$ — открытое множество в X:

$$\bigcup_{x_0 \in f^{-1}(V)} U_{x_0} = f^{-1}(V).$$

□

Утверждение 7. *Рассмотрим топологические пространства X, Y и Z, отображения* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *и* $h = g \circ f : X \to Z$. *Тогда если f и g непрерывны, то и h непрерывно, т. е. композиция непрерывных отображений непрерывна.*



Доказательство. Рассмотрим любое открытое множество W в Z. Его полный прообраз $f^{-1}(W) = V$ открыт в Y. Но полный прообраз $f^{-1}(V) = U$ открыт в X. Получили, что полный прообраз W открыт в X. ☐

Определение 29. *Гомеоморфизм* — это такая биекция между топологическими пространствами, которая непрерывна в обе стороны.

Определение 30. *Топологическое свойство* — это свойство, сохраняющееся при гомеоморфизме.

Например, компактность, 2АС, метризуемость, нормальность.

Пример 4. Две негомеоморфных пространства: $\mathbb{R} \not\simeq [0;1]$, так как отрезок компактен, а прямая нет.

Задача 33. *Почему прямая $\mathbb{R}$ не гомеоморфна плоскости $\mathbb{R}^2$?*

Определение 31. Пространство (X, τ) называется *n-мерным топологическим многообразием*, если:

1) оно удовлетворяет аксиоме T_2 и имеет счетную базу (2АС);

2) имеет место локальная евклидовость: $\forall x_0 \in X \; \exists x_0 \in U \subset X : U \simeq \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Набор свойств*

1) T_2 и 2АС;

2) имеет место локальная евклидовость: $\forall x_0 \in X \; \exists x_0 \in U \subset X : U \simeq \mathbb{R}^n$.

эквивалентен набору свойств

1) метризуемость и сепарабельность;

2) имеет место локальная евклидовость: $\forall x_0 \in X \; \exists x_0 \in U \subset X : U \simeq \mathbb{R}^n$.

Теорема 2 (о топологической инвариантности размерности)**.** *Пусть X^n — n–мерное топологическое многообразие, а Y^m — m–мерное топологическое многообразие, и $m \neq n$. Тогда $X^n \not\simeq Y^m$.*

Линейная связность

Определение 32. Топологическое пространство (X, τ) называется *несвязным*, если $X = U \sqcup V$, где U и V — непустые открытые подмножества.

Пример 5. Несвязное пространство — две точки; $(0;1) \cup (5;6)$.

Определение 33. Топологическое пространство (X, τ) называется *линейно связным*, если для любых двух точек найдется непрерывный путь $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Задача 34. *Докажите, что из линейной связности следует связность.*

Задача 35. *Обратное неверно.*

Определение 34. Скажем, что отображение $f : X \to Y$ является *топологическим вложением*, если

1) f — инъекция;

2) $f : X \to f(X) \subset Y$ (на $f(X)$ индуцирована топология с Y) — гомеоморфизм.

Задача 36. *Компактность* $+ T_2 \Longrightarrow T_4$.

Задача 37. *Рассмотрим подпространство $X \subset W$, где W хаусдорфово (т. е. X тоже хаусдорфово), а X компактно. Тогда X замкнуто в W.*

Задача 38. *Если объемлющее пространство компактно, а его подпространство замкнуто, то в индуцированной топологии это подпространство тоже компактно.*

Семинар 4

Разбор домашнего задания

Задача 39. *Критерий компактности в* $\mathbb{R}^n$*:* $A \subset \mathbb{R}^n$ *компактно* $\Longleftrightarrow$ A *ограничено и замкнуто.*

Решение. $\boxed{\Longrightarrow}$ Будем доказывать от противного. Если A не ограничено, построим систему расширяющихся открытых шаров с центром в нуле $B(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Это внешнее открытое покрытие, так как объединение этих шаров есть все $\mathbb{R}^n$ (и оно тем более покрывает A). Если бы из него можно было бы выбрать конечное подпокрытие, то в этом наборе шар с самым большим радиусом должен был бы содержать все множество A, что невозможно, так как A (по предположению) не ограничено. Противоречие. Итак, A ограничено.

Пусть A не замкнуто. Мы знаем, что для того, чтобы получить замыкание, надо к A добавить все его предельные точки. Следовательно, если A не замкнуто, то существует хотя бы одна предельная точка в дополнении: $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$, $\exists b_m \in A$, $b_m \to a$. Рассмотрим покрытие $U_m = \mathbb{R}^n / \hat{B}_{1/m}(a)$. Из него нельзя выбрать конечное подпокрытие.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Если A замкнуто и ограничено, то оно компактно.

Лемма 2. *Отрезок — компакт.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. у отрезка $[a, b]$ $(a < b)$ существует покрытие $\{U_\alpha\}$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Делим отрезок $[a, b]$ пополам и выбираем в качестве отрезка $[a_1, b_1]$ ту половину, у которой нет конечного подпокрытия в покрытии $\{U_\alpha\}$. Такая половина есть, т.к. иначе у исходного отрезка было бы конечное подпокрытие. Делим $[a_1, b_1]$ пополам и выбираем ту его половину $[a_2, b_2]$, у которой нет конечного подпокрытия и т.д.

Получаем систему вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, где каждый обладает таким свойством: из исходного покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие. Кроме того,

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \longrightarrow 0.$$

По теореме о вложенных отрезках существует точка $c \in \cap [a_n, b_n]$. Поскольку весь отрезок $[a; b]$ покрыт открытыми множествами, то и точка c покрыта каким-то открытым множеством. Т.е. существует α: $c \in U_\alpha$. Так как множество U_α открыто, то найдется интервал $U(c) = (s, t) \subset U_\alpha$. Существует номер n:

$$b_n - a_n < \min\{c - s, t - c\} \Longrightarrow [a_n, b_n] \subset U(c) \subset U_\alpha,$$

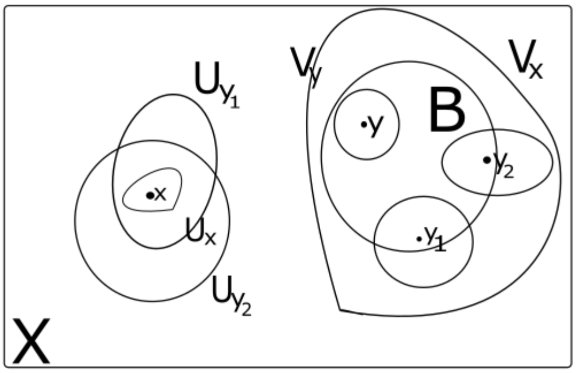
т.е. отрезок $[a_n, b_n]$ покрыт одним множеством U_α. Это противоречит построению: мы на каждом шаге выбирали ту часть, у которой нет конечного подпокрытия. ☐

Теорема 3. *Пусть есть два топологических компактных пространства* (X, τ) *и* (Y, ξ)*. Их прямой произведение* $X \times Y$ *тоже компакт.*

Получается, что любой куб $I^n \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Если A ограничено, то оно помещается внутрь какого-то куба I^n. В этом случае A — замкнутое подмножество компакта, следовательно, A — компакт. ☐

Задача 40. *Компактность* $+\ T_2 \Longrightarrow T_4$.

Решение. Пусть $B \subset X$ замкнуто. Рассмотрим точки x и $y \in B$, где $B \subset X$. В силу хаусдорфовости они отделимы окрестностями U_x и V_y, $U_x \cap V_y = \varnothing$. Объединение по всем $y \in B$



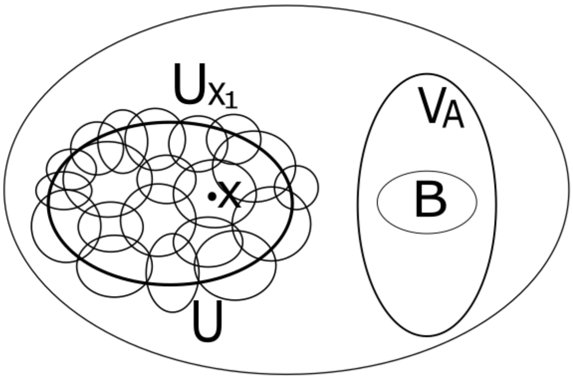
$$\bigcup_{y\in B} V_y \supset B$$

— внешнее открытое покрытие B. Так как B компакт, то из данного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

$$\{V_{y_i}\}_{i=1}^n, \quad \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} = V_x,$$

Кроме того, есть окрестности U_{y_i}, которые не пересекаются с V_{y_i}. Регулярность доказана.

Докажем нормальность. Пусть $A, B \subset X$ замкнуты. Построим для любой точки $x \in A$ окрестность U_x, а $V_x \supset B$ — окрестность B. Рассмотрим внешнее покрытие множества A



$$A \subset \bigcup_{x\in A} U_x,$$

выберем из него конечное подпокрытие

$$\{U_{x_i}\}_{i=1}^N$$

и соответствующие V_{x_i}. Итак,

$$U = \bigcup_{i=1}^N U_{x_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^N V_{x_i}, \quad U \cap V = \varnothing,$$

где $A \subset U$ и $B \subset V$. □

Задача 41. *Если объемлющее пространство компактно, а его подпространство замкнуто, то в индуцированной топологии это подпространство тоже компактно.*

Решение. Пусть

$$F \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \Longrightarrow K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \cup (\mathbb{R} \setminus F).$$

По определению существует конечное подпокрытие K

$$U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N} \text{ и может быть } (\mathbb{R} \setminus F).$$

Эти множества будут покрывать $K \Longrightarrow$ они будут покрывать F. Следовательно,

$$F \subset U_{\alpha_1} \dots \cup U_{\alpha_N} \cup (?)(\mathbb{R} \setminus F).$$

Последнее множество можно не учитывать, потому что там нет ни одной точки F. Итак, нашли конечное подпокрытие для F

$$F \subset U_{\alpha_1} \dots \cup U_{\alpha_N}.$$

□

Задача 42. *Пусть X — хаусдорфово и $A \subset X$ — компактно в индуцированной топологии. Доказать, что A замкнуто в X.*

Решение. Докажем, что $X \setminus A$ открыто. Рассмотрим произвольную точку $y \in X \setminus A$ и $a \in A$. Так как X хаусдорфово, мы можем рассмотреть две окрестности, которые отделяют эти точки: U_a и V_a. Рассмотрим внешнее покрытие множества A:

$$\bigcup_{a\in A} U_a \supset A.$$

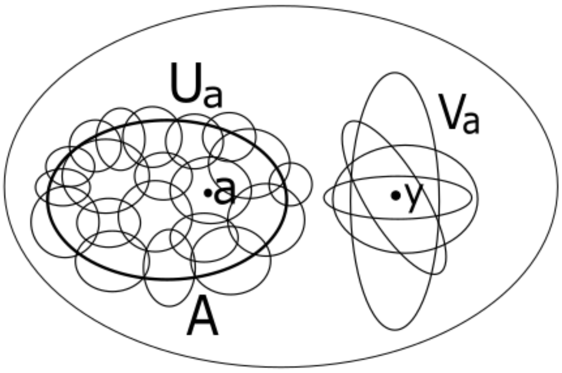
Так как A компакт, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие:

$$\bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \supset A.$$

Имеем

$$V_y = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots V_{a_n},$$

каждое V_{a_i} открыто в X, а так как конечное пересечение открытых открыто, то V открыто в X. Следовательно, $y \in V_y \subset X \setminus A$. □



Компоненты связности

Определение 35. В топологическом пространстве (X, τ) две точки $x, y \in X$ называются *эквивалентными*, если $\exists \gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Множество $B \subset X$ называется *компонентой связности*, если

1) B связно
2) $B \subset C \subset X$ и C связно $\Longrightarrow C = B$.

Задача 43. *Доказать, что из связности $B \subset X$ следует связность $\bar{B}$.*

Топология $X \times Y$

Определение 36. Пусть даны два топологических пространства (X, τ) и (Y, ξ). Рассмотрим пространство $X \times Y$. *Множество $W \subset X \times Y$ открыто*, если $\forall (x_0, y_0) \in W$ $\exists x_0 \in U \subset X$, $\exists y \in V \subset Y$: $U \times V \subset W$.

Задача 44. *Доказать равенство*

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z).$$

Определение 37. Определение открытого множества в пространстве декартова произведения можно распространить и на случай трех множеств: пусть даны три топологических пространства (X, τ), (Y, ξ), (Z, ζ). Рассмотрим пространство $X \times Y \times Z$. Множество $A \subset X \times Y \times Z$ открыто, если $\forall (x_0, y_0, z_0) \in A$ $\exists x_0 \in U \subset X$, $\exists y \in V \subset Y$, $\exists z \in W \subset Z$: $U \times V \times W \subset A$.

Аналогично обобщается и на случай $(X_1, \tau_1), \ldots$: $W \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, если $\forall (x_1^0, x_2^0, \ldots) \in W$ $\exists n$ и $\exists x_i^0 \in U_i \subset X_i$ $\forall i$, что $\prod_{i=1}^{\infty} U_i \subset W$.

Задача 45. *Доказать, что если X и Y метризуемы, то и $X \times Y$ метризуемо.*

Задача 46. *Счетное произведение метризуемых метризуемо.*

Теорема Тихонова

Теорема 4 (А. Н. Тихонов)**.** *Если есть набор компактных пространств $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $\Longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ — тоже компактно.*

Задача 47. *Рассмотрим набор хаусдорфовых пространств $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ — тоже хаусдорфово.*

Фактор-топология и факторное отображение

Пусть у нас есть топологическое пространство (X, τ). Рассмотрим на нем произвольное отношение эквивалентности. Тогда у нас есть отображение $\sigma : X \to X/\sim$. Тогда в пространстве $X/\sim$ определена фактор-топология: V открыто, если $\sigma^{-1}(V) \subset X$ открыто.

Задача 48. *Проверить выполнение аксиом для фактор-топологии.*

Определение 38. Пусть даны два топологических пространства (X, τ) и (Y, ξ). Пусть дана непрерывная сюръекция $f : X \to Y$. Мы скажем, что это отображение *факторное*, если $V \subset Y$ открыто в $\xi \iff f^{-1}(V) \subset X$ открыто.

Семинар 5

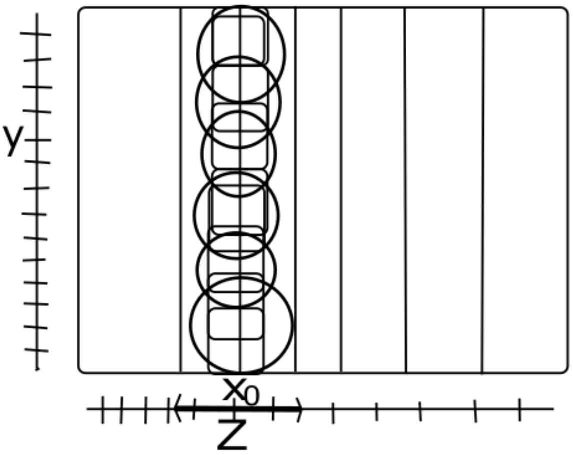
Разбор домашнего задания

Задача 49. *Произведение двух компактных пространств компактно.*

Решение: Пусть у нас есть открытое покрытие

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda = X \times Y.$$

Надо выделить из него конечное подпокрытие. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и рассмотрим соответствующий ей слой. Для любой точки $y \in Y$ точка (x_0, y) покрывается каким-то W_λ: $(x_0, y) \in W_{\lambda_y}$. Кроме того, $(x_0, y) \in U_y \times V_y$. Получается, что у каждой точки y есть окрестность, ее содержащая. Следовательно, получаем внутреннее покрытие



$$\bigcup_{y\in Y} V_y = Y.$$

Из него в силу компактности можно выбрать конечное подпокрытие

$$V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \ldots V_{y_n} = Y.$$

Для каждой из этих окрестностей есть своя окрестность у точки x_0. Пересечем все эти окрестности (их конечное число, а пересечение открытых открыто):

$$Z = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}.$$

Получаем над слоем x_0 узкую полоску, которая покрывается конечным числом прямоугольников, каждый из которых лежит в своем W_λ. Значит, вся полоска покрывается конечным числом W_λ.

Итак, для любой точки x_0 существует маленькая окрестность Z_{x_0}, что соответствующая x_0 полоска покрывается конечным числом элементов W_λ. Так как X компактно, можно выбрать конечное подпокрытие, то есть полосок будет конечное число. Таким образом, нашли конечное подпокрытие для $X \times Y$. ☐

Задача 50. *Доказать, что из связности $B \subset X$ следует связность $\bar{B}$.*

Решение: Пусть $\bar{B} = U \sqcup V$, где U и V замкнуты в X. Кроме того, $B \subset U \sqcup V$. Тогда

$$B = (U \cap B) \sqcup (V \cap B).$$

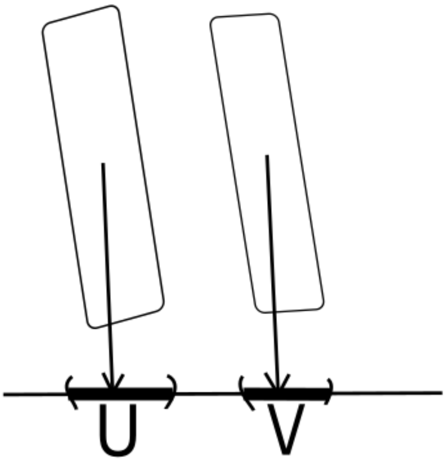
Так как U и V замкнуты в X, то их пересечение с B замкнуто в B. Получается, что получили разбиение B на два не пересекающихся замкнутых куска, следовательно, один из этих кусков пустой. Получается, что $B \subset V$. Но V замкнутое множество, а $\bar{B}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее $B \Longrightarrow \bar{B} \subset V$. Противоречие с предположением. □

Задача 51. *Рассмотрим набор хаусдорфовых пространств $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ — тоже хаусдорфово.*

Решение: Рассмотрим две точки $x \neq y$, $x, y \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

$$x = (x^0_\lambda, \lambda \in \Lambda), \quad y = (y^\lambda_0, \lambda \in \Lambda).$$

Существует $\lambda_0 \in \Lambda$: $x^0_{\lambda_0} \neq y^0_{\lambda_0}$. Тогда в проекции у этих точек есть не пересекающиеся окрестности U и V. Тогда в качестве окрестностей этих точек во всем пространстве берем



$$\tilde{U} = (\prod_{\lambda \neq \lambda_0} X_\lambda) \times U,$$

$$\tilde{V} = (\prod_{\lambda \neq \lambda_0} X_\lambda) \times V.$$

□

Гомеоморфмное многообразие

Задача 52. *Почему $\mathbb{R}$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^2$?*

Решение. Можно из $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ вырезать по одной точке, тогда в $\mathbb{R}$ останется две компоненты связности, а в $\mathbb{R}^2$ по-прежнему одна, то есть сохраняется линейная связность. ☐

Однако таким же способом не получится доказать, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Даже если мы выкинем из $\mathbb{R}^2$ прямую, а из $\mathbb{R}^3$ некую кривую, гомеоморфную прямой, то не ясно, как она поведет себя в пространстве: сколько получится компонент связности и т. д.

Гомотопическая эквивалентность

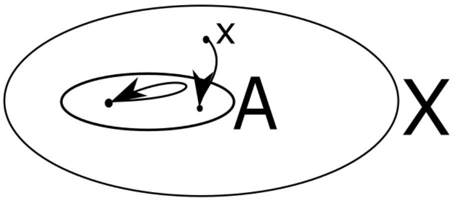
Определение 39. Пусть есть два отображения $f : X \to Y$, $g : X \to Y$. Эти отображения *гомотопны* $f \sim g$, если $\exists H : X \times I \to Y$, что $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ $\forall x \in X$, $(H(x, s) = f_s(x))$.

Задача 53. *Доказать, что это отношение эквивалентности.*

Определение 40. Скажем, что отображение $f : X \to Y$ — *гомотопическая эквивалентность*, если существует такое $g : Y \to X$, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Строгая деформационная ретракция

Определение 41. Пусть $A \subset X$. Скажем, что $r : X \to A$ — *ретракция*, если (1) $\forall a \in A$ имеем $r(a) = a$; (2) $r : X \to X$, $r^2 = 2$: $A = r(X)$, $r : X \to A$ — *ретракция.*



Задача 54. *Пусть X хаусдорфово пространство, и $A \subset X$ — ретракт, то A замкнуто в X.*

Определение 42. Топологическое пространство называется *стягиваемым*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Определение 43. Пусть $A \subset X$. Скажем, что $r : X \to A$ — *строгая деформационная ретракция*, если $\exists H : X \times I \to X$, что $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = r(x)$ и $H(a, s) = a$ $\forall a \in A$.

Пример 6. Пусть

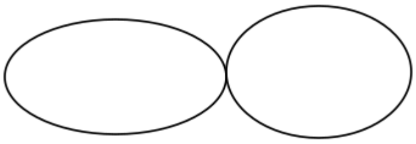
$$X = [-1; 1], \quad A = [-1; 0].$$

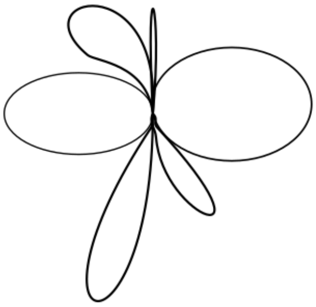
Докажем, что A — строгая деформационная ретракция X. Действительно, точки из A оставим на месте, а точки из дополнения отобразим в 0:

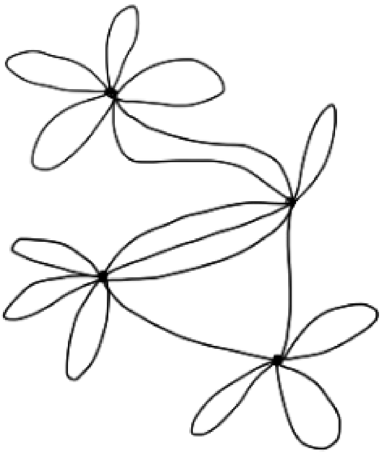
$$H(x, s) = \left[\begin{array}{l} x, -1 \leq x \leq 0 \\ s \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array}\right.$$

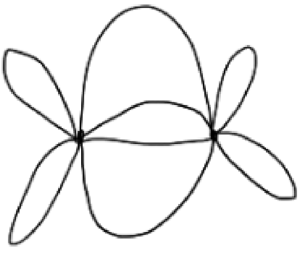
Определение 44. Граф — геометрическая реализация одномерного CW-комплекса.

Определение 45. Букет окружностей: $S^1 \vee S^1$.





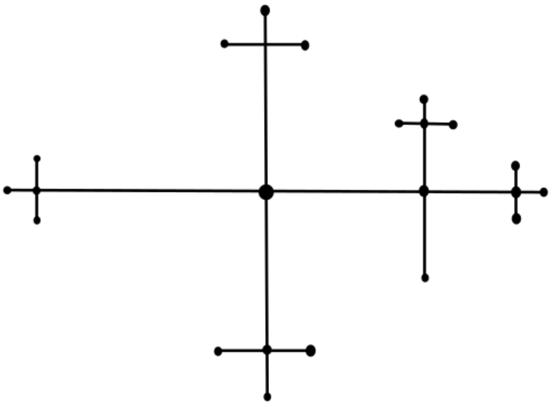




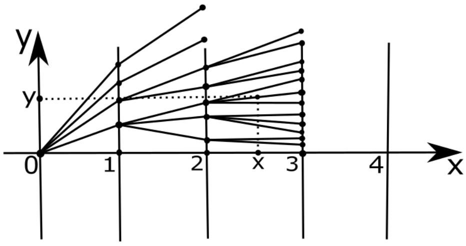
Задача 55. *Пусть у нас есть два графа. Как понять, являются ли они гомотопически эквивалентными? Нужно установить, каким букетам окружностей гомотопически эквиваленты данные графы. Если эти букеты совпали, то данные графы гомотопически эквиваленты.*

Задача 56. *Используя строгую деформационную ретракцию, доказать, что любой конечный связный граф гомотопически эквивалентен букеты окружностей.*

Задача 57. *Доказать, что следующее дерево стягиваемо*



Задача 58. *Доказать, что следующее дерево стягиваемо*



Задача 59. *Доказать, что любое дерево стягиваемо.*

Задача 60. *Доказать, что $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ — вложение и доказать, что топологии этих двух пространств совпадают.*

Семинар 6

Разбор домашнего задания

Задача 61. *Пусть X хаусдорфово пространство, и $A \subset X$ — ретракт, то A замкнуто в X.*

Доказательство. Множество A — множество неподвижных точек отображения $r : A \to A$. Это точки, на которых отображения r и id_X совпадают. Докажем, что если есть два непрерывных отображения хаусдорфовых пространств

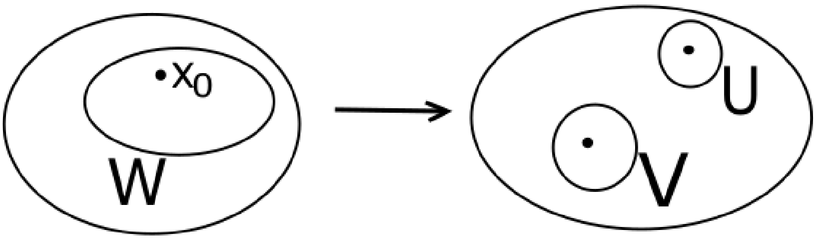
$$f, g : X \to Y,$$

то множество $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

Докажем, что $X \setminus A$ открыто.

$$X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

Надо проверить, что $\forall x_0 \in A\ \exists U(x_0) \in \tau_X$: $U(x_0) \subset X \setminus A$. Рассмотрим точку x_0 и



ее образы $f(x_0) = y_1$, $f(x_0) = y_2$. По хаусдорфовости у образов есть две непересекающиеся окрестности U и V. Введем окрестность W:

$$W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \ni x_0.$$

Оно открыто. Кроме того, $\forall x \in W\ f(y) \neq g(y)$ (если бы они совпали, то окрестности U и V пересекались бы, что не так. □

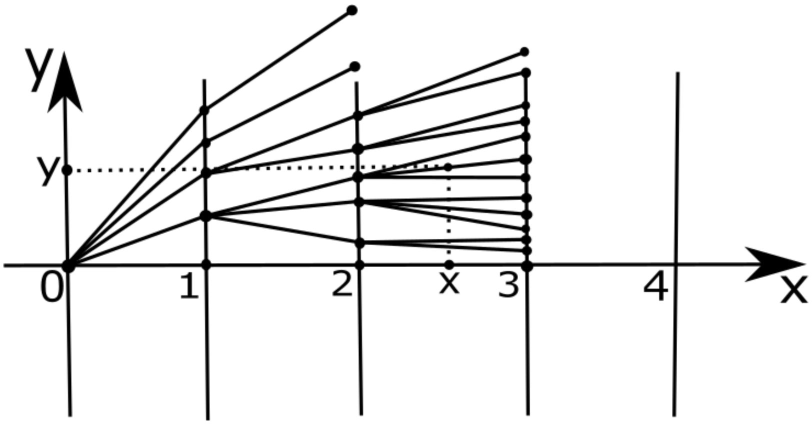
Произвольное бесконечное дерево

Рассмотрим бесконечное дерево следующего вида. Топологически это луч: $[0; +\infty)$. Тогда у любой точки x есть координата — некое число на луче. Рассмотрим следующую гомотопию: $H(x, s) = s \cdot x$. Очевидно, что она непрерывна.

Рассмотрим теперь произвольное дерево Γ. Пусть сначала из каждой точки выходит конечное число ребер. Все ребра укладываем на уровень, следующий от вершины «исхода». Теперь $H((x, y), s) = (B, s \cdot x) = (sx, \widetilde{y})$,

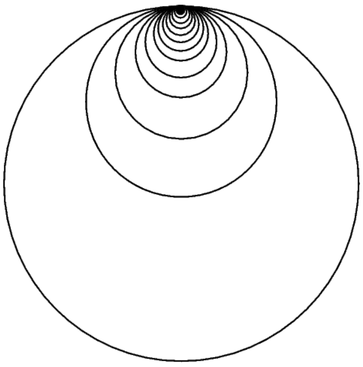
$$H_s(A), \quad H : \Gamma \times I \to \Gamma.$$

Получается, что у любой точки есть параметр x, который на самом деле функция $f : \Gamma \to [0; +\infty)$. Далее можно использовать гомотопию (и уже неважно количество ребер).

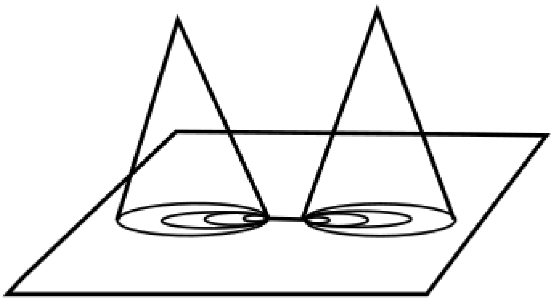


Гомотопическую эквивалентность

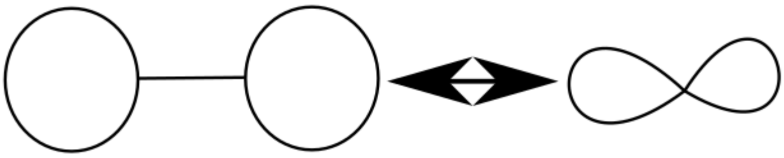
Пример 7. Гавайская серьга:

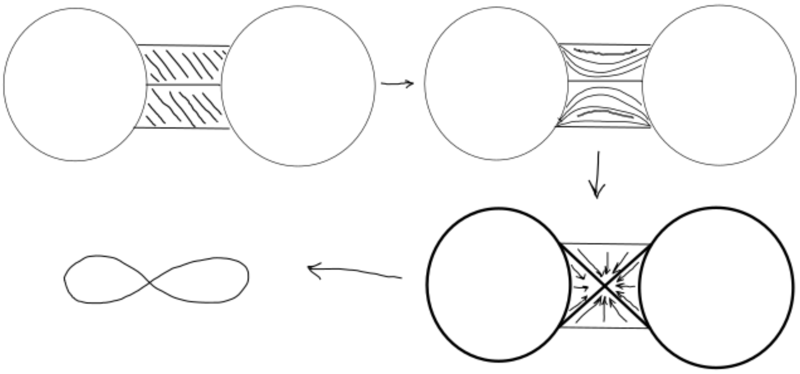


Пример 8. Два конуса гавайской серьги, соединенные отрезком стгяиваемы. Но если это пространство профакторизовать по отрезку, который соединяет два конуса, то получим нестягиваемое пространство. Поэтому X и $X/[]$ не являются гомотопически эквивалентными.



Пример 9. Доказать гомотопическую эквивалентность:





Определение 46. Свойство продолжения гомотопии (или свойство Борсука): $\forall F : X \to Y$, $f = F|_A : A \to Y$ и любой гомотопии $H(a,s) : A \times I \to Y$, $H(a,0) = f(a)$, существует ее поднятие

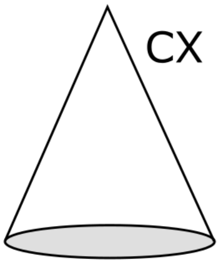
$$\hat{H} : X \times I \to Y, \quad \hat{H}(x,0) = F(x),$$

$$\hat{H}(a,s) = H(a,s).$$

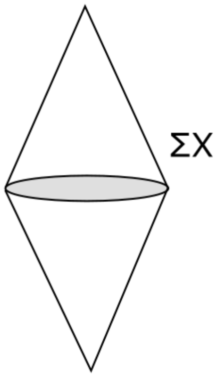
Теорема 5. *Рассмотрим пару топологических пространств (X, A) — пара Борсука, т. е. X хаусдорфово, $A \subset X$ замкнуто и стягиваемо, а $i : A \hookrightarrow X$ обладает свойством продолжения гомотопии, то $\pi : X \to X/A$ есть гомотопическая эквивалентность.*

Топологические конструкции

Определение 47. Конус над X — CX — это $X \times I / X \times \{1\} \sim *$. Конус всегда стягиваем.



Надстройка над X — ΣX — это $(X \times I)/(X \times \{1\} \sim *, X \times \{1\} \sim *)$.



Лемма 3. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывная биекция, где X компактно, а Y хаусдорфово (T_2). Тогда f — гомеоморфизм (т. е. оказывается оба X и Y хаусдорфовы и компактны).*

Доказательство. Рассмотрим замкнутое подмножество $A \subset X$. Замкнутое подмножество компакта — компакт. Следовательно, $f(A)$ компакт, а в хаусдорфовом пространстве компакт замкнут. Образ замкнутого замкнут $\Longrightarrow f^{-1}$ тоже непрерывно. □

Лемма 4. *Пусть X компакт и удовлетворяет T_2. Рассмотрим $\pi : X \to X/\sim$ и $g : X/\sim \to Y$. Тогда g гомеоморфизм.*

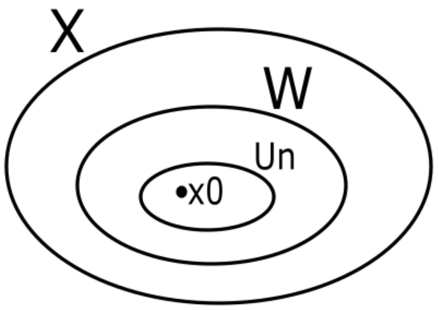
Доказательство. Пространство $X/\sim$ тоже компакт, Y удовлетворяет T_2. □

Семинар 7

Геометрический конус

Определение 48. Первая аксиома счетности — у каждой точки есть локальная счетная база.

Локальная база или фундаментальная система окрестностей точки x_0 — это такой набор открытых в X множеств $U_1, U_2, \ldots$, которые содержат x_0, что для любого открытого $W \subset X$, если $x_0 \in W$, то $\exists n$: $U_n \subset W$.



Понятно, что 2АС $\Longrightarrow$ 1АС. Обратное, вообще говоря, неверно. Кроме того, $\mathcal{M} \Longrightarrow$1АС.

Фундаментальная группа и накрытие

Определение 49. Рассмотрим топологическое пространство с отмеченной точкой (X, x_0). *Петлей* называется непрерывное отображение $\gamma : [0;1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Множество всех петель для x_0 обозначаем $\Omega_{x_0}(X)$.

Два элемента $\alpha, \beta \in \Omega_{x_0}(X)$ называются *гомотопными* ($\alpha \dot{\sim} \beta$), если $\exists H : [0,1] \times [0,1] \to X$:

$$H(t,0) = \alpha(t),$$

$$H(t,1) = \beta(t)$$

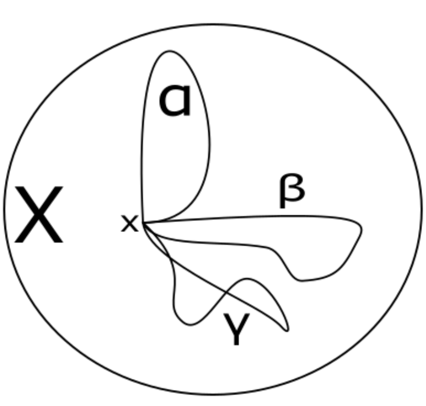
$$H(0,s) = H(1,s) = x_0.$$

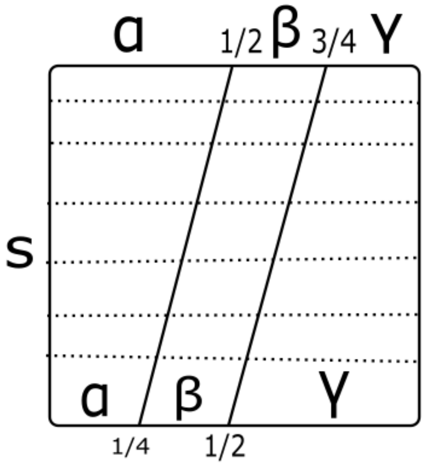
Фундаментальная группа по определению есть $\Omega_{x_0}(X)/\dot{\sim}$.

$$\alpha(t) * \beta = \gamma(t) = \left[\begin{array}{ll} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{array}\right.$$

По определению $a, b \in \pi_1(X, x_0)$ есть некоторые петли $[\alpha], [\beta]$. По определению $a * b = [\alpha * \beta]$. Проверим аксиомы группы:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$, $(\alpha * \beta) * \gamma \dot{\sim} \alpha * (\beta * \gamma)$ (см. рисунок).





Клеточное пространство

Определение 50. Хаусдорфово топологическое пространство X называется CW–*комплексом или клеточным пространством*, если его можно разбить на дизъюнктное объединение «кусочков» (которые называются *клетки*) e^q_α:

$$X = \sqcup_{q=0}^{\infty} \sqcup_{\alpha \in \Lambda_q} e^q_\alpha, \quad e^q_\alpha \approx \mathbb{R}^q \approx D^q.$$

1) Для всяких $q, \alpha \in \Lambda_q$ существует непрерывное отображение $\chi_{q,\alpha} : \bar{D}^q \to X$. Кроме того, $\chi_{q,\alpha} : D^q \to e^q_\alpha$ — гомеоморфизм.

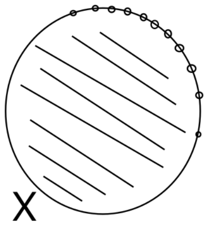
2) $\chi_{q,\alpha}(\bar{D}^q) = \bar{e}^q_\alpha = e^q_\alpha \sqcup (\bar{e}^q_\alpha \setminus e^q_\alpha)$, где $\bar{e}^q_\alpha \setminus e^q_\alpha \subset \sqcup_{p<q} \cup e^r_\beta$. Будем обозначать $\bar{e}^q_\alpha \setminus e^q_\alpha = \partial e^q_\alpha$.

C Для любой клетки e^q_α: $\partial e^q_\alpha \subset \sqcup_{p<q} \sqcup e^p_\beta$ — в конечном объединении клеток.

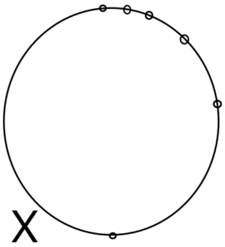
W Для всякого $F \subset X$ оно замкнуто в $X \iff \forall\ e^q_\alpha\ F \cap \bar{e}^q_\alpha$ — замкнуто в X.

Импликация $\Longrightarrow$ верна всегда. Важнее в данном случае импликация $\Longleftarrow$.

Пример 10. Пример пространства, когда выполнены первые два условия, но не выполнена аксиома C: рассмотрим круг и все его граничные точки — их континуум $\mathfrak{c}$. В итоге получаем континуальное объединение, а не конечное — противоречие аксиоме C.



Пример 11. Пример пространства, когда выполнены первые два условия и аксиома C, но не выполнена аксиома W: рассмотрим окружность $X = S^1$ и разрежем ее на клетки: сначала возьмем диаметрально противоположные точки, затем середину от полукруга, затем половину от четверти и т. д. Получим счетное число нульмерных клеток и счетное число одномерных клеток. Возьмем в качестве F все отмеченные точки, кроме северного полюса. Это не замкнутое множество, так как выкинули предельную точку, а пересечение с замыканием любой клетки замкнуто — получаем либо две точки, либо одну. Равносильности нет $\Longrightarrow$ аксиома W не выполнена.



Задача 62. *Если клеток конечное число, то аксиомы C и W выполняются автоматически.*

Теорема 6. *Пусть X — CW–комплекс. Тогда X компактно $\Longleftrightarrow$ X состоит из конечного числа клеток.*

Клеточная пара

Определение 51. Скажем, что (X, A) — CW-пара, если

1) A состоит из некоторого дизъюнктного объединения клеток X;

2) A замкнуто в X.

Задача 63. *Пусть X — произвольное клеточное пространство. Любая точка $x_0 \in X$ и модифицировать разбиение так, что x_0 — станет вершиной (одномерной клеткой).*

Задача 64. *Доказать, что если (X, x_0) и (Y, y_0) — клеточные пространства, то их букет $(X \vee Y, z)$ — тоже клеточное пространство.*

Теорема 7. 1) *Если X — конечное (компактное) CW-пространство, а Y — любое CW-пространство, тогда $X \times Y$ — CW-пространство.*

2) Если X и Y счетные, то $X \times Y$ — счетное.

Задача 65. *Пусть (X, A) — CW-пара. Доказать, что X/A — тоже CW-комплекс.*

Задача 66. *Построить явно клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$.*

Задача 67. *Построить явно клеточное разбиение $\mathbb{C}P^n$.*

Задача 68. *Для любого отображения $f : S^1 \to S^2$ существует гомотопия f_t: f_1 обладает свободной точкой.*

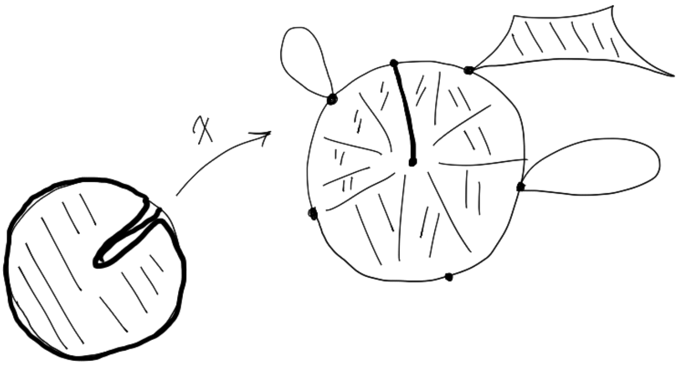
Семинар 8

Разбор домашнего задания

Задача 69. *Пусть X — произвольное клеточное пространство. Любая точка $x_0 \in X$ и модифицировать разбиение так, что x_0 — станет вершиной (одномерной клеткой).*

Решение: Если точка не вершина, значит она попала в какую-то открытую клетку. Если она попадает в одномерную клетку, то разбиваем эту клетку на две части: до точки и после.

Если точка попала в двумерную клетку. Пр приклеивающем отображении одна из точек на окружности попадает, например на сторону одномерной клетки. Тогда разбиваем, как показано на рисунке: разрезаем и приклеиваем двумерную клетку. ☐



Утверждение 8. *Пусть (X, d) — метрический компакт, (Y, ρ) — любое метрическое пространство; пусть есть отображение $f : X \to Y$. Если f непрерывно, то оно равномерно непрерывно:*

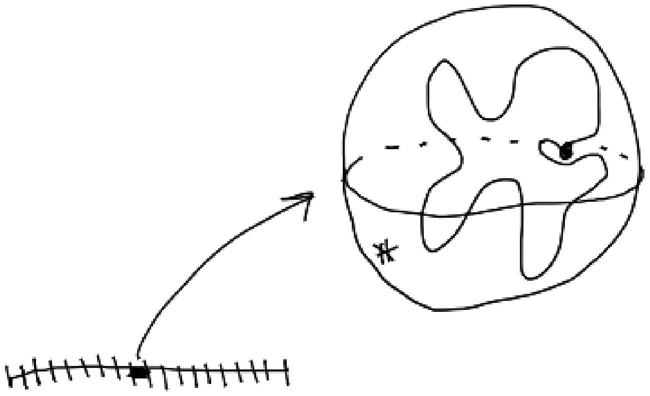
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in X\ d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

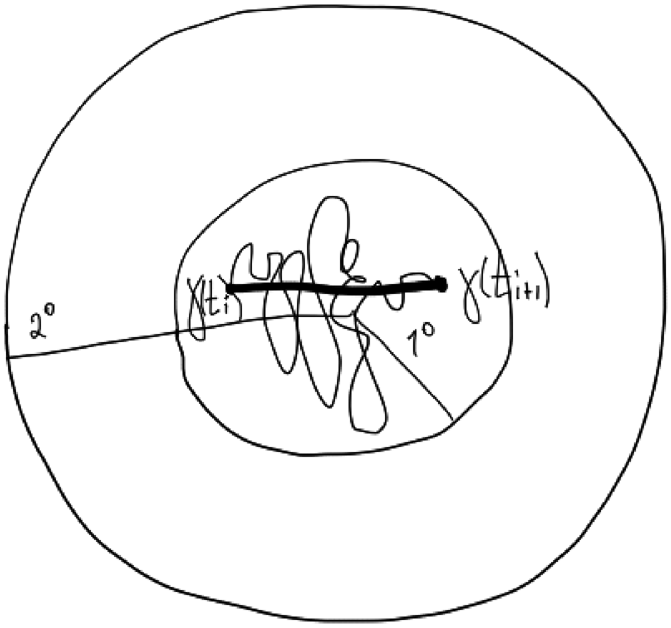
Задача 70. *Для любого отображения $f : S^1 \to S^2$ существует гомотопия f_t: f_1 обладает свободной точкой.*

Решение: Пусть $\gamma : [0, 1]$
toS^2, $\exists H_s : [0, 1] \times [0, 1] \to S^2$. Отображение $H_1(t)$ не покрывает всей сферы S^2. Рассмотрим отрезок от t_i и t_{i+1}, где $q \leq i \leq N$. Образ этого отрезка лежит в сферической «шапке» радиуса 1 градус, которая лежит в шапке радиуса 2 градуса. Такая открытая шапка гомеоморфна $\mathbb{R}^2$. Соединяем образы точек отрезком. Теперь можно сделать гомотопию кривой в этот отрезок:

$$\alpha_s(t) = s\alpha(t) + (1 - s)\beta(t).$$

Так как точек конечное число, то можно делать гомотопии последовательно. Получаем ломанную на сфере. ☐





Конечнолистные и счетнолистные накрытия

Определение 52. Рассмотрим непрерывное отображение $f : X \to Y$. Скажем, что f является *локальным гомеоморфизмом* в точке $x_0 \in X$, если выполнено условие $\star$: $\exists x_0 \in U \subset X$ — открытое, $\exists y_0 \in V \subset Y$ — открытое, что $f|_U : U \to V = f(U)$ — гомеоморфизм.

Пример 12. Рассмотрим отображение $\mathbb{R} \to S^1$, $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$. Это локальный гомеоморфизм.

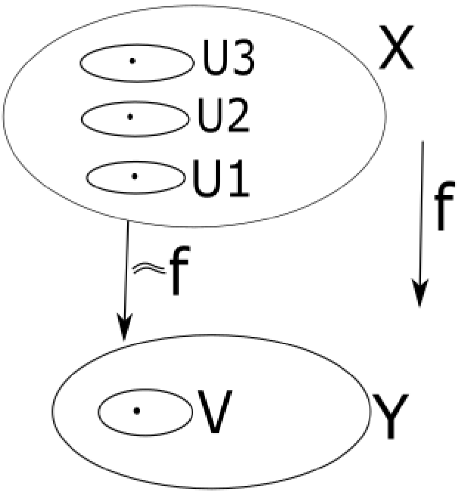
Пример 13. Пусть X — любое отрытое подмножество $\mathbb{R}^2$, а $Y = \mathbb{R}^2$. Тогда $f : X \to Y$ — локальный гомеоморфизм.

Лемма 5. *Пусть $f : X \to Y$ — локальный гомеоморфизм. Пусть X, Y хаусдорфовы со счетной базой. Если Y — n-мерное многообразие, то X — n-мерное многообразие.*

Доказательство. Рассмотрим точку $x_0 \in X$ и отобразим ее на Y. У нас есть пара открытых множеств в X и Y, которые гомеоморфны, но открытое множество в n-мерном многообразии — тоже многообразие. Значит открытое множество их X вследствие гомеоморфизма тоже локально многообразие. ☐

Замечание 1. Если f — сюръективное непрерывное отображение, то если X — n-мерное многообразие, то Y — n-мерное. многообразие.

Определение 53. Пусть у нас все пространства далее хаусдорфовы и линейно связны. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывная сюръекция и



1) $\forall y_0 \in Y$ ее полный прообраз $|f^{-1}(y)| = n$.

2) $\forall y_0 \in Y$ существует открытая окрестность $y_0 \in V \subset Y$, что $f^{-1}(V) = \sqcup_{i=1}^n U_i$, где все U_i открыты в X и $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \in U_i$. Кроме того,
$$f|_{U_i} : U_i \to V \text{ — гомеоморфизм.}$$

То, что мы построили, называется *n–листным накрытием.* Пространство Y называется *базой накрытия*, а X — *тотальным пространством накрытия или накрывающим пространством.*

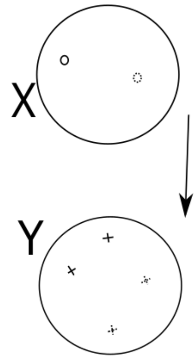
Пример 14. Пусть $X = S^2$, $Y = \mathbb{R}P^2$, отображение каноническое.

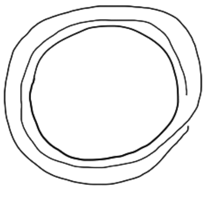
Пример 15. Пусть $X = S^1$, $Y = S^1$, отображение $z \mapsto z^2$.

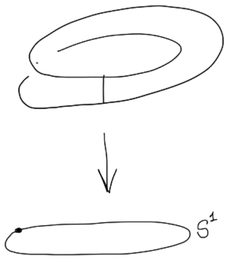
Пример 16. Пусть X — лист Мебиуса, $Y = S^1$. Двулистное накрытие.

Определение 54. Пусть у нас все пространства далее хаусдорфовы и линейно связны. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывная сюръекция и

1) $\forall y_0 \in Y$ ее полный прообраз $|f^{-1}(y)| = |\mathbb{N}|$.







2) $\forall y_0 \in Y$ существует открытая окрестность $y_0 \in V \subset Y$, что $f^{-1}(V) = \sqcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где все U_i открыты в X и $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, $x_i \in U_i$. Кроме того,

$$f|_{U_i} : U_i \to V \text{ — гомеоморфизм.}$$

То, что мы построили, называется *счетно-листным накрытием*. Пространство Y называется *базой накрытия*, а X — *тотальным пространством накрытия или накрывающим пространством.*

Пример 17. Не бывает счетно-листного накрытия окружности над окружностью, так как мешает компактность (предельные точки).

Пример 18. Накрытие $\mathbb{R} \to S^1$, $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ — счетно-листное.

Лемма 6. *Пусть есть произвольное накрытие $f : X \to Y$, где X, Y — хаусдорфовы и линейно связны. Выбираем любую точку y_0 и ее прообраз x_0. На уровне фундаментальных групп есть гомоморфизм*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0).$$

1) f_* — мономорфизм;

2) $H = f_*(\pi_1(X, x_0)) \hookrightarrow G$, $[G : H] = n$.

Теорема 8. *Пусть* X *— хаусдорфово пространство,* $|G| = n$ *— конечная группа. Пусть есть произвольное действие* G *на* $X\colon G \to Homeo(X)$*. Тогда* X/G *хаусдорфово.*

Определение 55. Действие группы G свободно, если $\forall x_0 \in X\ \forall g \in G$, $g \neq e$ имеем $g(x_0) \neq x_0$.

Семинар 9

Свойства накрывающих гомотопий

Определение 56. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывная сюръекция. Скажем, что она удовлетворяет *свойству накрывающей гомотопии*, если для любого топологического пространства Z, любых непрерывных g и $\hat{g}$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "\hat{g}"] \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \quad , \quad f \circ \hat{g} = g$$

и для любой гомотопии $H : Z \times I \to Y$, $H(z, 0) = g(z)$, существует $\hat{H} : Z \times I \to X$:

1) $\hat{H}(z, 0) = \hat{g}(z)$;

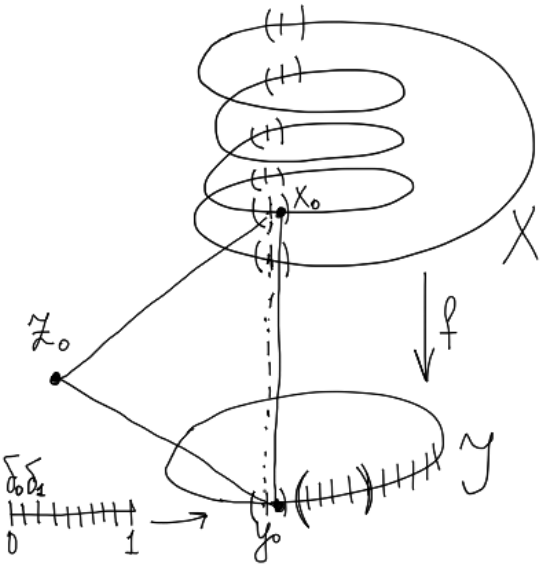
2) $f(\hat{H}(z, s)) = H(z, s)$, $\forall z \in Z$ и $\forall s \in I$.

Теорема 9. *Пусть все рассматриваемые далее пространства хаусдорфовы и линейно связны, $f : X \to Y$ — произвольное накрытие. Тогда f обладает свойством накрывающей гомотопии с единственным $\hat{H}$: $\exists! \hat{H} : Z \times I \to X$:*

1) $\hat{H}(z, 0) = \hat{g}(z)$;

2) $f(\hat{H}(z, s)) = H(z, s)$, $\forall z \in Z$ и $\forall s \in I$.

Пример 19. Пусть $Z = \{*\}$ — одноточечное пространство. Для такого пространства свойство накрывающей гомотопии называется *свойством поднятия пути*. Проверим теорему 9 для этого случая. Рассмотрим отображение точки на Y и соответствующие точки в накрытии. Так как образ компакта компакт, то можно покрыть соответствующий образ отрезка. У каждой точки будет своя окрестность,



для которой все условия будут выполнены. Можно так разбить отрезок, что образ внутри каждого кусочка будет попадать в свою окрестность. Поэтому если мы разбили на конечное число кусков и смогли поднять образ первого и так далее, то поднятие будет однозначным в силу компактности и хаусдорфовости.

Пример 20. Вычислим $\pi_1(S^1)$. Рассмотрим отображение $\mathbb{R} \to S^1$, $\varphi \to e^{2\pi\varphi i}$ — счетнолистное накрытие.

Пусть есть какая петля, которая начинается в 1 на окружности. Ее прообразы попадают в целые числа в накрывающем пространстве. Числа у окружности $\alpha : [0,1] \to S^1$, $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$ сопоставляем $\hat{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$. Используем гомотопию. Для накрытия гомотопия поднимается.

$$\alpha_s(0) = \alpha_s(1) = 1, \alpha_s : [0,1] \to S^1 \longrightarrow \hat{\alpha}_s(0) \in \mathbb{Z}$$

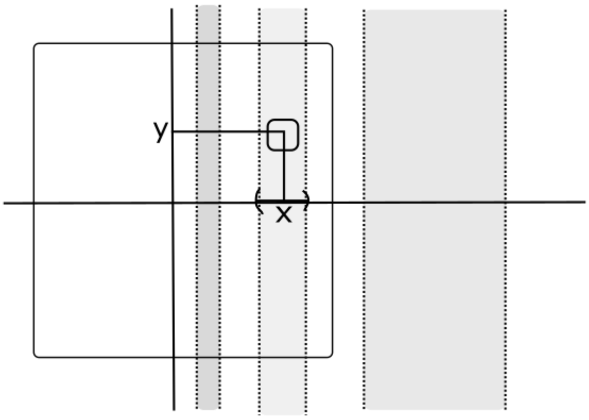
— непрерывна по s. Следовательно, $\hat{\alpha}_s(0) \equiv 0$. Получается, что для любого гомотопического класса число $\hat{\alpha}(1)$ определено однозначно. Следовательно, отображение

$$\pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$

корректно определено. Это сюръекция. Кроме того, если взять две петли с одинаковым образом, то они будут гомотопны: можно применить гомотопию

$$\hat{\gamma}_s(t) = s\hat{\alpha}(t) + (1-s)\hat{\beta}(t).$$

Конечнолистные и счетнолистные накрытия

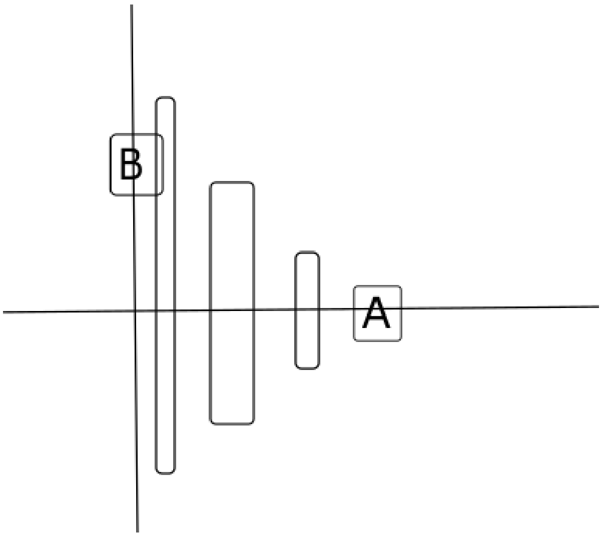


Пример 21. Пусть $X = \mathbb{R}^2 \setminus 0$, $h(x,y) = (2x, \frac{y}{2})$ — свободное действие $\mathbb{Z}$:

$$h^n(x,y) = (2^n x, \frac{y}{2^n}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}|x_0|$, $\delta = \frac{1}{10}|y_0|$. Вообще говоря, если $x_0 \neq 0$, то δ нам не нужна: полоска не переходит в полоску, и все они не пересекаются. А если $x_0 = 0$, то получим аналогичные полоски, только по горизонтали.

Однако в любом случае будут точки, чьи орбиты будут пересекаться. Рассмотрим, например точки $A(1,0)$ и $B(0,1)$. Рассмотрим квадраты со стороной ε. Рассмотрим прообразы точки A: $h^{-1}(A) = (\frac{1}{2};0)$ и прямоугольник со стороной 2ε; следующий шаг — $(\frac{1}{4};0)$ и прямоугольник со стороной 4ε и т.д. Очевидно, что в один момент прямоугольник прообраза точки A пересечется с квадратом со стороной ε точки B.



Теорема Зейферта-ван Кампена

Пространство X — CW-комплекс $\Longleftrightarrow$ X связно $\Longleftrightarrow$ X линейно связно $\Longleftrightarrow$ SK^1X связно.

Определение 57. Обозначение:

$$SK^nX = \sqcup_{q\le n} \sqcup e^q_\alpha.$$

Пусть x_0 вершина. Рассмотрим группу $\pi_1(X,x_0)$. Известно, что есть цепочка вложений

$$SK^1X \hookrightarrow^i SK^2X \hookrightarrow^j X$$

$$\begin{tikzcd}\pi_1(SK^1X,x_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_1(SK^2X,x_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_1(X,x_0)\end{tikzcd}$$

Здесь j_* — изоморфизм, а i_* — эпиморфизм. Кроме того, $\pi_1(SK^1X,x_0)$ — свободная группа.

Теорема 10. *Если даны задания групп $\pi_1(U,p)$ и $\pi_1(V,p)$*

$$\pi_1(U,p) = \langle u_1,\cdots,u_k \mid \alpha_1,\cdots,\alpha_l\rangle$$
$$\pi_1(V,p) = \langle v_1,\cdots,v_m \mid \beta_1,\cdots,\beta_n\rangle$$

и $w_1,\cdots,w_s$ — образующие группы $\pi_1(W,p)$, то

$$\pi_1(X,p) = \left\langle u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v_m \left| \alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_n, i_*(w_1)j_*(w_1)^{-1},\cdots,i_*(w_p)j_*(w_p)^{-1}\right.\right\rangle.$$

Задача 71. *Найти $\pi_1(T^2)$.*

Семинар 10

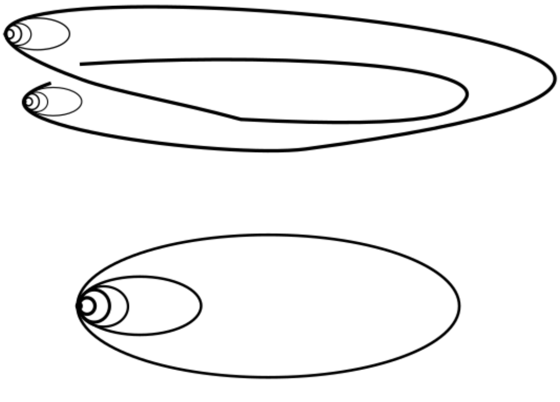
Свойства накрывающих гомотопий

Определение 58. Два накрытия $f_1 : X_1 \to Y$ и $f_2 : X_2 \to Y$ называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм h, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_1"] & & X_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пример 22. Накрытие гавайской серьги:



Определение 59. Накрытие $f : X \to Y$ называется *регулярным*, если

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \lhd \pi_1(Y, f(x_0)).$$

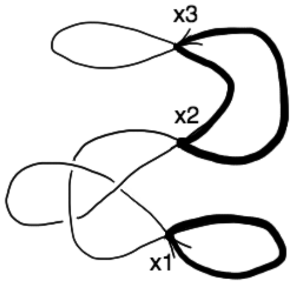
Задача 72. *Двулистное накрытие всегда регулярно.*

Задача 73. *Построить трехлистое нерегулярное накрытие.*

Решение. Как по рисунку можно понять, что накрытие регулярно: если при поднятии любой петли в накрывающее пространство, она каждый раз замыкается на точке соответствующего прообраза, то накрытие регулярно. То есть если внизу найдется петля γ, что при ее поднятии мы придем не в точку прообраза, а в некоторую другую точку x', то накрытие не регулярно. ☐

Теорема 11 (ван Кампена)**.** *Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U) \arrow[dr, "p"] & \\
\pi_1(W) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"] & & \pi_1(X) \\
& \pi_1(V) \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd}$$



1) Пусть $\pi_1(W) = 1$. *Тогда* p *и* h *— вложения и*

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) * \pi_1(V)$$

— свободное произведение двух групп.

2) Пусть $\pi_1(W) \neq 1$. *Тогда*

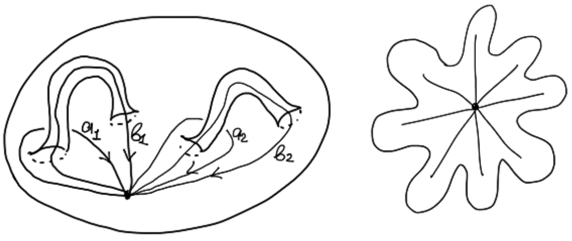
$$(\pi_1(U) * \pi_1(V))/N,$$

рассмотрим γ*:*

$$i_*(\gamma) = j_*(\gamma), \quad i_*(\gamma) \cdot j_*(\gamma^{-1}) = 1,$$

и тогда рассмотрим нормальное замыкание таких элементов

$$N = N([\gamma]).$$



Задача 74.

$$\pi_1(S_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1\rangle.$$

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots a_g, b_g \mid [a_1 b_1] \dots [a_g, b_g] = 1\rangle.$$

Пример 23. Пример для тора

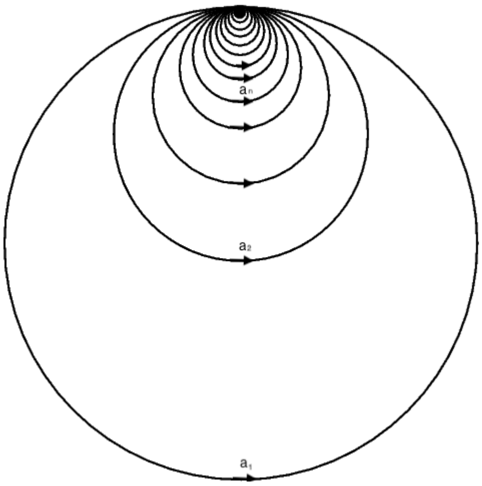
$$\begin{tikzcd}
 & F_2 \arrow[dr, "p"] & \\
\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & F_2/N(\alpha) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\
 & 1 \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Семинар 11

Разбор домашнего задания

Задача 75. *Гавайская серьга не является полулокально односвязной.*

Решение: Допустим, что она полулокально односвязная. Это, в частности, означает, что в общей для всех окружностей точке все петли, начиная с некоторой, являются тривиальными элементами фундаментальной группы всей Гавайской серьги (если Гавайская серьга полулокально односвязна, то в маленькой окрестности любая петля стягивается по всему пространству в точку, и, значит, в качестве петли можно окружность, начиная с некоторого шага). Давайте докажем, что для любой из этих окружностей соответствующая петля не является тривиальным элементом группы $\pi_1(X)$, где X — гавайская серьга.



Лемма 7. *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ класс $[a_n]$ петли a_n в фундаментальной группе $\pi_1(X)$ не равен 1: $[a_n] \neq 1$, где X — гавайская серьга.*

Доказательство. Достаточно доказать только для a_1, так как существует гомеоморфизм X на себя, переводящий a_1 в a_2: все окружности, начиная с a_3 оставляем на месте, а a_1 меняем местами с a_2 в пространстве. Из этого, в частности, следует, что все петли равноправны. Итак, давайте докажем, что $[a_1] \neq 1$.

Обозначим через Y окружность a_1. Тогда Y является ретрактом X: все другие окружности можно отобразить в точку окружности Y. За фиксируемую точку x_0 принимаем общую точку всех окружностей. Тогда, так как Y является ретрактом X, имеет место цепочка отображений

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{r_*} \pi_1(Y).$$

Так как Y — окружность, то $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}$. Получаем

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z},$$

причем, сквозное отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ тождественно, так как

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}_Y$$

(по определению ретракции).

Теперь, если бы было так, что $[a_1] = 1$ ($\langle a_1 \rangle \to 1$), то так как единица группы переходит в единицу группы, то при отображении $r_* : \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ этот элемент попал бы в 0, но мы показали, что он должен попасть в себя, т. е. в образующую. Противоречие. Значит, $[a_1] \neq 1$ в $\pi_1(X)$. ☐

Следовательно, гавайская серьга не является полулокально односвязной. Утверждение доказано. ☐

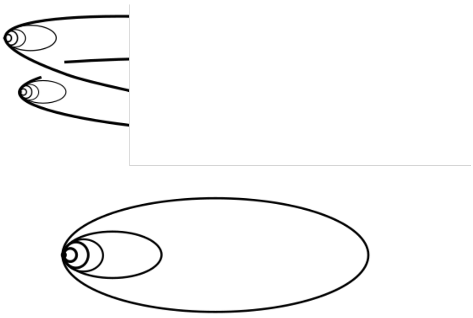
Накрытие Гавайской серьги

Утверждение 9. *Если есть любое отображение линейно связных хаусдорфовых пространств*

$$f : Y \to X,$$

то $f_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ *— гомоморфизм.*

То, что накрывает — это одномерное пространство. Рассмотрим какую-то окружность из Y, которая отображается в X. Если бы то, что накрывало было бы односвязным, то окружность в $\pi_1(Y)$ была бы тривиальной. Но если у нас есть отображение $X \to Y$, и петля в Y тривиальна, то ее образ будет тривиален в X, так как на уровне π_1 это гомоморфизм.



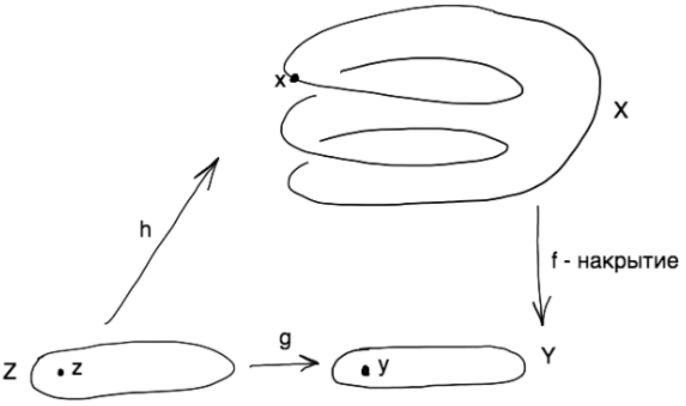
Накрытия и отображения

Пусть у нас есть накрытие $f : X \to Y$ с отмеченными точками x_0 в X и y_0 в Y. И пусть есть некоторое пространство Z с отмеченной точкой z_0. Пусть X, Y и Z локально линейно связны, то есть для каждой окрестности найдется меньшая окрестность, которая является линейно связным множеством.

Определение 60. Отображение h называется *поднятием* отображения g при накрытии f, если диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $f \circ h = g$.



Утверждение 10. *Два разных поднятия, таких что z_0 переходит в x_0, они совпадают.*

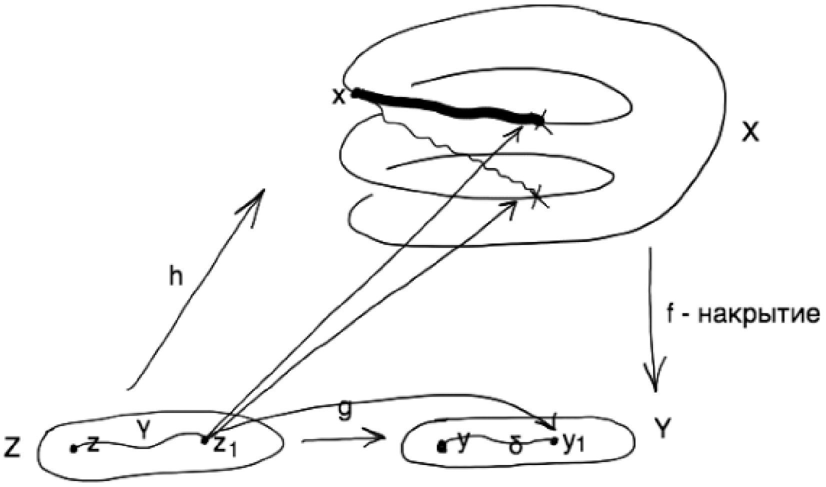
Доказательство. Пусть у нас есть два разных поднятия h_1 и h_2:

$$f \circ h_1 = g, \quad f \circ h_2 = g,$$

$$h_i(z_0) = x_0.$$

Рассмотрим точку $z_1 \in Z$. Она переходит в y_1 при отображении g, а в X у нее несколько прообразов. Рассмотрим произвольный непрерывный путь γ из z_0 в z_1. Он при отображении g переходит в путь δ.

Рассмотрим поднятие h_1 и поднимем путь δ. Но мы знаем, что для накрывающих пространств путь поднимается однозначно. А по предположению он должен был заканчиваться в двух разных точках (то есть по сути должно было быть два пути). Такого быть не может — противоречие. ☐



Рассмотрим теперь соответствующие отображения фундаментальных групп для случая поднятия: если есть композиция

$$f \circ h = g,$$

то можно рассмотреть композицию

$$f_* \circ h_* = g_*.$$

Получим

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Z) \arrow[r, "h_*"] \arrow[rr, bend right, no head, "g_*"'] & \pi_1(X) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y)
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим образ сквозного отображения $g_*(\pi_1(Z)) \subset \pi_1(Y)$. Кроме того, как следствие коммутативной диаграммы получаем

$$g_*(\pi_1(Z)) \subset f_*(\pi_1(X)), \quad f_*(\pi_1(X)) \subset \pi_1(Y).$$

Итак, если поднятие найдется, то $g_*(\pi_1(Z)) \subset f_*(\pi_1(X)$ — *необходимое условие* (иначе поднятия не будет).

Утверждение 11 (Критерий существования поднятия)**.** *Если X, Y и Z локально линейно связны, то необходимое условие*

$$g_*(\pi_1(Z)) \subset f_*(\pi_1(X))$$

существования поднятия будет достаточным.

Пример 24. Условие $g_*(\pi_1(Z)) \subset f_*(\pi_1(X)$ будет выполнено всегда (то есть всегда будет поднятие), если g_* отображает группу $\pi_1(Z)$ в единицу. В частности, если $\pi_1(Z) = 1$ (тривиальна), то поднятие всегда будет.

Определение 61. *Множество гомотопических классов* $[X, Y]$ — это все непрерывные отображения, факторизованные по отношению гомотопности.

Задача 76. *Рассмотрим $Y = S^1$ и $Z = S^2$. Доказать, что множество гомотопических классов состоит из одного элемента: $[S^2, S^1] = [*]$ (любое отображение сферы в окружность гомотопно отображению сферы в точку).*

Решение. Надо доказать, что любое $g : S^2 \to S^1$ гомотопно отображению $\star : S^2 \to * \in S^1$: $g \sim \star$.

Рассмотрим универсальное накрытие

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^1 \arrow[d] & \varphi \arrow[d] \\
S^2 \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"] & S^1 & e^{2\varphi}
\end{tikzcd}$$

Давайте докажем, что любое h гомотопно $h_0 : S^2 \to 0$. Это верно, так как $\mathbb{R}^1$ стягиваемо:

Лемма 8. *Для любых отображений* $Z \xrightarrow[g]{f} X$ *если* X *стягиваемо* ($X \sim *$), *то* $f \sim g$.

Доказательство. Так как X стягиваемо, то можно рассмотреть цепочку отображений

$$Z \xrightarrow[g]{f} X \xrightarrow[\star]{\mathrm{id}} X$$

и $\mathrm{id} \sim \star$ (по определению стягиваемости). Из этого получаем, что

$$f = f \circ \mathrm{id} \sim f \circ \star = \star$$

для любого отображения f. ☐

Итак, теперь мы можем сказать, что с помощью гомотопии h_t на место h_0 можно поставить любое отображение h_1, которое отображает все пространство в точку. Итак, получаем

$$f \circ h_t : S^2 \xrightarrow[\star]{g} S^1,$$

то есть $g \sim \star$. ☐

Утверждение 12. $[S^3, S^2] \cong \mathbb{Z}$.

Топологические группы

Определение 62. *Топологической группой* G называется хаусдорфово топологическое пространство, на котором есть групповая структура

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(g, h) = g * h,$$

$$\mathrm{inv} : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1},$$

оба эти отображения абстрактно образуют группу, и μ и inv непрерывны. В частности, понятно, что inv — гомеоморфизм (так как инволюция).

Пример 25. Группа $\mathbb{R}^1$:

$$\mu(a, b) = a + b, \quad \mathrm{inv}(a) = -a.$$

Пример 26. Группа $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z} = S^1$, $|z| = 1$:

$$\mu(z, w) = zw.$$

Пример 27. Группа $\mathbb{R}^2$.

Пример 28. Группы Ли: $SO(n)$, $O(n)$, SL_n, $U(n)$, $SU(n)$.

Пример 29. *Группой Ли* $G = M^n$ называется гладкое многообразие класса C^∞, на котором есть групповая структура

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(g, h) = g * h,$$

$$\mathrm{inv} : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1},$$

оба эти отображения абстрактно образуют группу, и μ и inv — гладкие отображения.

Пример 30. Пример топологической группы ,но не группы Ли: пусть $G_1, \ldots, G_n, \ldots$ — компактные подмножества $\mathbb{R}^n$. Пусть тогда

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Произведение счетного числа компактных пространств является компактным пространством в силу теоремы Тихонова. Так как $G_i \subset \mathbb{R}^n$, то G — метризуемый компакт.

Рассмотрим следующие компакты

$$G_1 = G_2 = \ldots = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2.$$

Тогда

$$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots$$

Эта группа будет гомеоморфна стандартному Канторову множеству K. Это не группа Ли.

Этот пример можно обобщить, если взять в качестве G_i конечные группы. Тоже получится множество Кантора.

H–пространства

Определение 63. Пусть X — линейно связное хаусдорфово пространство. Рассмотрим точку $e \in X$. Скажем, что непрерывное отображение $\mu X \times X \to X$ $((e, e) \mapsto e)$ является *умножением, удовлетворяющим аксиоме единицы*, если выполнено

$$\mu(e, x) = \mu(x, e) = x \quad \forall x \in X.$$

Такое пространство X с выбранным элементом e и умножением называется *H-пространством.*

Пример 31. Любая группа Ли является H-пространством.

Теорема 12. *Произвольная сфера S^m является H-пространством тогда и только тогда, когда это или S^1, или S^3, или S^7.*

Геометрические конструкции:

1) S^1 — комплексные числа;

2) S^3 — кватернионы;

3) S^7 — октонионы.

Домашнее задание

Задача 77. *Рассмотрим топологическую группу G. Рассмотрим компоненту линейной связности единичного элемента e. Обозначим ее через G^0. Доказать, что*

1) G^0 *— подгруппа в* G*;*

2) G^0 *— нормальная подгруппа в* G*.*

Задача 78. *Доказать, что* $\pi_1(G^0)$ *— абелева группа.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное H-пространство X. Тогда $\pi_1(X)$ — абелева группа. □

Семинар 12

Гладкие многообразия

Определение 64. Скажем, что M^n — *n-мерное топологическое многообразие*, если

1) M^n — хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности $\iff$ 1') (по модулю условия 2)) M^n сепарабельное метрическое пространство;

2) M^n локально евклидово: $\forall x \in M^n$ $\exists$ открытая окрестность $U_x \subset M^n$, $U \simeq \mathbb{R}^n$.

Определение 65. Набор множеств $\mathcal{U}$ называется C^∞-атласом для M^n, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $U_\lambda \subset M^n$, если для каждого λ зафиксирован гомеоморфизм

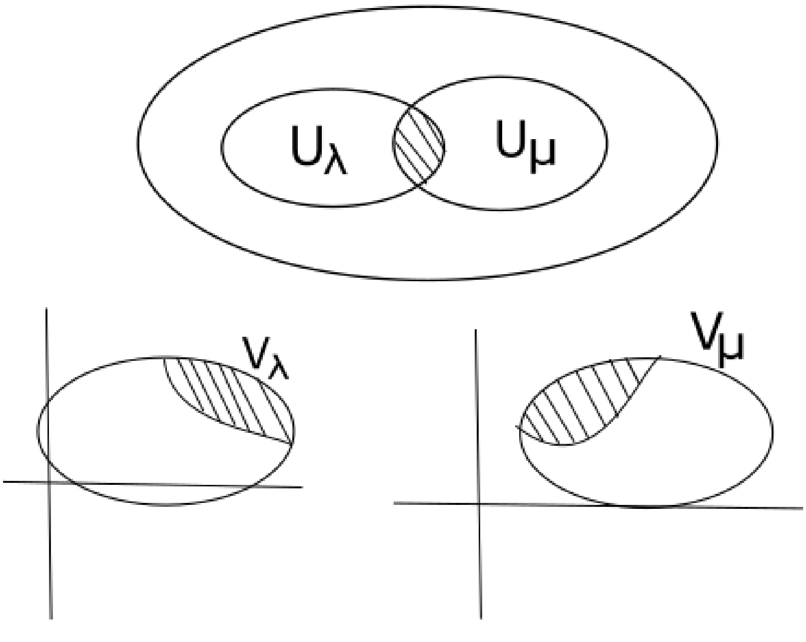
$$h_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda \subset \mathsf{t}^n.$$

Кроме того, этот набор множеств — покрытие M^n:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M^n.$$

Определены гладкие функции склейки:

$$h_\mu \circ h_\lambda^{-1} : V_{\lambda,\mu} \to V_{\mu,\lambda}.$$



Тензорное поле на многообразии

Определение 66. Тензорное поле типа (p, q) ранга $p + q$. Рассмотрим точку на многообразии и фиксируем локальную систему координат. Тогда на этом множестве будут наборы гладких функций

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x^1, \dots, x^n).$$

Каждый индекс независимо пробегает числа $1, \dots, n$. Всего таких функций будет n^{p+q}.

Можно рассмотреть другую, штрихованную, систему координат, в которой функции примут вид

$$T'^{i'_1 i'_2 \dots i'_p}_{j'_1 j'_2 \dots j'_q}(x'^1, \dots, x'^n).$$

Эти два набора функций задают один инвариантный объект тогда и только тогда, когда они преобразуются по тензорному закону:

$$T'^{i'_1 i'_2 \dots i'_p}_{j'_1 j'_2 \dots j'_q}(x') = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x).$$

На самом деле в этом выражении стоит сумма по нештрихованным индексам (штрихованные фиксированы) — соглашение Эйнштейна.

Пример 32. Тензорное поле типа $(0, 0)$ — гладкая функция.

Пример 33. Тензорное поле типа $(1, 0)$ — векторное поле.

Пример 34. Тензорное поле типа $(0, 1)$ — ковекторное поле.

Пример 35. Тензорное поле типа $(0, 2)$ — билинейные функции. Например, метрический тензор.

Определение 67. Еще одна форма записи тензорного поля:

$$T = \sum_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x) \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$$

Если есть тензоры T типа (p, q) и тензор S типа (p', q'), то тензор $T \otimes S$ будет иметь тип $(p + p', q + q')$.

Определение 68. Тензор типа $(0, q)$ называется *симметричным*, если для любой перестановки σ

$$T_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} \dots j_{\sigma(q)}} = T_{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

Определение 69. Тензор типа $(0, q)$ называется *кососимметричным*, если для любой перестановки σ

$$T_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} \dots j_{\sigma(q)}} = (-1)^{\sigma} T_{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

Например, $T_{ij} = -T_{ji}$, $T_{111} = 0$.

Внешние дифференциальные формы

Определение 70. *Внешняя дифференциальная p-форма* — это кососимметрическое тензорное поле типа $(0,p)$.

1-форма:

$$\omega = \omega_i dx^i = \omega_i(x)dx^i.$$

2-форма

$$\omega = \sum_{i\neq j}\omega_{ij}dx^i\otimes dx^j = \sum_{i<j}(\omega_{ij}dx^i\otimes dx^j - \omega_{ij}dx^j\otimes dx^i).$$

Итак, 2-форма:

$$\omega = \sum_{i<j}\omega_{ij}(x)(dx^i\otimes dx^j - dx^j\otimes dx^i) = \sum_{i<j}\omega_{ij}(x)dx^i\wedge dx^j.$$

3-форма:

$$\begin{aligned}\omega = \sum_{i,j,k}\omega_{ijk}(x)dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k = \sum_{i<j<k}\omega_{ijk}(x)(dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k - dx^j\otimes dx^i\otimes dx^k -\\ - dx^i\otimes dx^k\otimes dx^j + dx^j\otimes dx^k\otimes dx^i + dx^k\otimes dx^i\otimes dx^j - dx^k\otimes dx^j\otimes dx^i) =\\ = \sum_{i<j<k}\omega_{ijk}(x)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k.\end{aligned}$$

n-форма

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_n}\omega_{i_1\ldots i_n}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}.$$

$n+1$-форма для M^n:

$$\omega = 0.$$

Внешнее произведение

Определение 71. Внешнее произведение

$$\alpha\wedge\beta = \frac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta),$$

где

$$\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$
$$\beta = \beta_{j_1\ldots j_q}(x)dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

Тогда

$$\alpha\wedge\beta = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p\\ j_1<\ldots<j_q}}\alpha_{i_1\ldots i_p}(x)\beta_{j_1\ldots j_q}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

Задача 79. *Пусть* $\beta = \beta_k dx^k$, $\alpha = \alpha_{ij}dx^i\wedge dx^j$. *Тогда*

$$\alpha\wedge\beta = \sum_{i<j<k} ?dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k.$$

Утверждение 13. *Свойства внешнего произведения:*

1) *Билинейность*
$$(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2) \wedge \beta = f_1\alpha_1 \wedge \beta + f_2\alpha_2 \wedge \beta.$$

2) *Ассоциативность*
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3) *Кососкоммутативное умножение*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \omega.$$

Определение 72. Обозначение: $\Omega_p(M^n)$ — пространство всех p-форм над M^n.

Внешнее дифференцирование

Определение 73. Внешнее дифференцирование определено следующим образом:

$$d\omega = d(\omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = d(\omega_{i_1\ldots i_p}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 36. Пример для 0-формы:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n.$$

Пример 37. Пример для 1-формы:

$$d\omega = d(\omega_i dx^i) = d(\omega_i) \wedge dx^i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}dx^j \wedge dx^i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j.$$

Задача 80. *Доказать, что* $d(d\omega) = 0$.

Задача 81. *Доказать, что* $d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d(\eta)$.

Семинар 13

Разбор домашнего задания

Задача 82. *Доказать, что* $d(d\omega) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим для начала функцию f:

$$d : f \to df = f_{x^i} dx^i \to d(f_{x^i}) \wedge dx^i = f_{x^i x^j} dx^j \wedge dx^i = 0,$$

так как $f_{x^i x^j} = f_{x^j x^i}$.

Теперь

$$\omega = f(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

и так как частные производные $f(x)$, то $d^2\omega$ тоже будет равно 0. $\square$

Задача 83. *Доказать, что* $d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d(\eta)$. *Это градуированное правило Лейбница.*

Когомологии де Рама

Пусть X^n — гладкое многообразие. Обозначим через $\Lambda_p(X^n)$ — пространство всех p-форм на X^n.

$$\Lambda_p(X^n) = \{\omega \text{ — } p\text{-фяорма на } X^n\}.$$

Определение 74. *Цепной комплекс де Рама*:

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "d"] & \Lambda_0 \arrow[r, "d"] & \Lambda_1 \arrow[r, "d"] & \Lambda_2 \arrow[r, "d"] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Lambda_n \arrow[r] & \{0\}. \end{tikzcd}$$

Заметим, что d — $\mathbb{R}$–линейное отображение.

Рассмотрим цепочку подпространств:

$$\Lambda_p \supset \operatorname{Ker} d_p \supset \operatorname{Im} d_{p-1}.$$

Определение 75. Форма (p-форма) ω называется *замкнутой*, если $d\omega \equiv 0$. Они лежат в $\operatorname{Ker} d_p$.

Определение 76. Форма (p-форма) ω называется *точной*, если существует $(p-1)$-форма η: $\omega = d\eta$. Они лежат в $\operatorname{Im} d_{p-1}$.

Определение 77. Когомологии де Рама (p-е когомологии де Рама) многообразия M^n есть

$$H^p_{dR}(X^n) = \operatorname{Ker} d_p / \operatorname{Im} d_{p-1}.$$

Если многообразие компактно, то когомологии конечномерные.

Обратный образ дифференциальных форм

Рассмотрим произвольное гладкое отображение $f : X^n \to Y^m$.

Существует отображение

$$f^* : \omega_p \to f^* \omega_p = \eta_p,$$

где $\omega \in \Lambda_p(Y^m)$, $\eta_p \in \Lambda_p(X^n)$. Таким образом мы получили обратный образ формы.

Фиксируем в X^n и Y^m локальные координаты и рассмотрим функции перехода

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n).$$

Найдем обратный образ формы $\omega_p = \tilde{\omega}(y) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}$:

$$f^* \omega_p = \tilde{\omega}(y(x)) dy^{i_1}(x^1, \ldots, x^n) \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}(x^1, \ldots, x^n),$$

где

$$dy^{i_k}(x^1, \ldots, x^n) = y^{i_k} x^{j_k} dx^{i_1} \wedge \ldots .$$

Теорема 13. *Для любых форм ω, η на Y верно*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta),$$

$$f^*(d\omega) = d(f^*(\omega)).$$

В частности, обратный образ замкнутой формы — замкнутая форма, и обратный образ точной формы — точная форма.

Задача 84. *Обратный образ замкнутой формы — замкнутая форма*

Решение: Замкнутая форма по определению: $d\omega = 0$. Получаем

$$f^*(d\omega) = f^*(0) = 0 = d(f^*(\omega)),$$

следовательно, образ — замкнутая форма. □

Рассмотрим комплекс де Рама

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "d"] & \Lambda_0(X) \arrow[r, "d"] & \Lambda_1(X) \arrow[r, "d"] & \Lambda_2(X) \arrow[r, "d"] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Lambda_n(X) \arrow[r] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r, "d"] & \Lambda_0(Y) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "f_0^*"] & \Lambda_1(Y) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "f_1^*"] & \Lambda_2(Y) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "f_2^*"] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Lambda_n(Y) \arrow[r] \arrow[u, "f_n^*"] & \{0\}.
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим две пары векторных пространств над $\mathbb{R}$: $Z(X) \supset B(X)$ и $Z(Y) \supset B(Y)$. Скажем, что Z — замкнутые формы, B — точные. И пусть есть отображения

$$\begin{tikzcd}
Z(X) \supset & B(X) \\
Z(Y) \supset \arrow[u, "f^*"] & B(Y) \arrow[u, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

Тогда f_* линейно отображает

$$f_* : Z(Y)/B(Y) \longrightarrow Z(X)/B(X).$$

То есть получили отображение когомологий де Рама.

Теорема 14. *Вообще говоря, $f_i^* \neq f_j^*$. Однако для отображения когомологий де Рама $H^q_{dR}(Y) \to H^q_{dR}(X)$ они совпадают.*

Пример 38. Пусть $X = \mathbb{R}$. Посчитаем когомологии де Рама.

$$\{0\} \xrightarrow{d} \Lambda_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Lambda_1(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \{0\}.$$

Для начала посчитаем нулевые когомологии де Рама. Точные формы только нулевые. Замкнутые формы

$$0 = df(x) = f'(x)dx = 0 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \text{const}\,.$$

Получаем, что $H^0_{dR}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Теперь в пространстве 1-форм найдет точные формы: $\omega = g(x)dx$,

$$\int g(x)dx = f(x) + C.$$

Получается, что любая 1-форма есть d от функции. То есть любая форма точна и замкнута. Следовательно, $H^1_{dR}(\mathbb{R}) = 0$. Также $H^k_{dR}(\mathbb{R}) = 0$, $k \geq 1$.

Определение 78. Скажем, что гладкое многообразие ориентируемо, если существует ориентирующий атлас.

Определение 79. Многообразие $M^n = \cup(U_i, \varphi_i)$ называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентируемый атлас (т.е. в каждой карте U_i задана своя локальная ориентация), и на пересечении карт $U_i \cap U_j$ ориентации локальных карт согласованы $\det \varphi_{ij} > 0$.

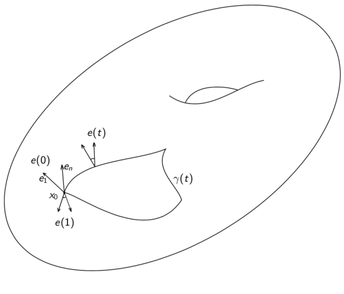


Рис. 1.

Что означает задать ориентацию? Если в каждой карте U_i введены локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$, то «задать ориентацию» означает «задать порядок координат» (какая будет первой, какая второй и т.д).

Определение 80. Многообразие $M^n = \cup(U_i, \varphi_i)$ называется *неориентируемым*, если какой бы атлас мы на нем не взяли, найдутся две карты U_i и U_j, что на их пересечении $U_i \cap U_j$: $\det \varphi_{ij} < 0$.

Задача 85. *Доказать, что сфера ориентируемое многообразие и найти для нее атлас.*

Определение 81. Пусть X^n — ориентируемое многообразие. Тогда

$$\int_{X^n} \omega_n = \sum \int_{X^n} f_i(x)\omega_n.$$

Для многообразий с краем верна формула

$$\int_{X^n} d\omega_n = (\pm 1) \cdot \int_{\partial X^n} f_i(x)\omega_{n-1}.$$

(знак выбирается от того, какое соглашение по ориентации между краем и многообразием мы принимаем, и от размерности n). Поэтому если края нет, то

$$\int_{X^n} d\omega_n = 0.$$

Теорема 15. *Пусть X^n — связное ориентируемое многообразие без края. Тогда $H^n_{dR}(X^n) = \mathbb{R}^1$. В других случая будет 0.*

Пример 39. Пусть $X = S^1$. Очевидно, что $H^0_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$ (по свойству гомотопии).

$$\Lambda_0(S^1) \xrightarrow{d} \Lambda_1(S^1) \xrightarrow{d} \{0\}.$$

Покажем, что $H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$. Рассмотрим гладкую функцию $f(x)$ на окружности и ее производную $f'(x)$. В развертке получим 2π-периодическую функцию. Имеем

$$\int_0^{2\pi} f'(x)dx = f(2\pi) - f(0) = 0.$$

Семинар 14

Цепные комплексы

Определение 82. *Цепным комплексом* называется последовательные отображения

$$K^{-2} \xrightarrow{d} K^{-1} \xrightarrow{d} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \xrightarrow{d^2} \ldots .$$

Если $d^2 = 0$, то такой комплекс называется *коцепным.*

Коциклом называется $ZK^n = \mathrm{Ker}(d^n)$, где $ZK^n \subset K^n$.

Когранúцей называется $BK^n = \mathrm{Im}(d^{n-1})$, $BK^n \subset ZK^n$.

Гомологии:

$$H^n K = ZK^n / BK^n.$$

Рассмотрим произвольные гомоморфизмы групп f^i, что каждый квадрат является коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
K^{-2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{-2}"] & K^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{-1}"] & K^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f^0"] & K^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "f^1"] & K^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "f^2"] & \ldots \\
L^{-2} \arrow[r, "d"] & L^{-1} \arrow[r, "d"] & L^0 \arrow[r, "d^0"] & L^1 \arrow[r, "d^1"] & L^2 \arrow[r, "d^2"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Лемма 9. *Пусть $A_i \supset B_i$ — абелевы группы.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \supset \arrow[d, "f"] & B_1 \arrow[d, "f"] \\
A_2 \supset & B_2
\end{tikzcd}$$

Тогда корректно определено отображение

$$\bar{f} : A_1/B_1 \to A_2/B_2.$$

$$\bar{f}(a_1 + B_1) = f(a_1) + B_2.$$

Точные последовательности

Определение 83. Если у нас есть последовательность абелевых групп

$$\xrightarrow{d} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \xrightarrow{d_2} C_3 \xrightarrow{d_3}$$

и $\mathrm{Ker}\, d_2 = \mathrm{Im}\, d_1$, то такая последовательность называется *точной.*

Определение 84. Короткая точная последовательность абелевых групп, которая точка на каждом шаге, то есть p — эпиморфизм, а i — мономорфизм.

$$0 \longrightarrow A^1 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

Кроме того, из этого понятно, что

$$A' \subset A, \quad A'' = A/A'.$$

Определение 85. Короткая точная последовательность абелевых групп *расщепляется*, если выполняется одно из двух эквивалентных условий

1) существует гомоморфизм $q : A'' \to A$, что $p \circ q = \mathrm{id}_{A''}$; получается, что вся группа
$$A = i(A') \oplus q(A'').$$
2) существует гомоморфизм $j : A \to A'$, что $j \circ i = \mathrm{id}_{A'}$.

Все квадраты — коммутативные диаграммы и все строки — точные последовательности.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K'^n \arrow[r, "i"] \arrow[d] & K^n \arrow[r, "p"] \arrow[d] & K''^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'^{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & K^{n+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & K''^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & {} & {} & {} & 0
\end{tikzcd}$$

Это короткая точная последовательность цепи комплексов.

Теперь посмотрим на отображение гомологий.

Лемма 10.
$$H^nK' \xrightarrow{r_*} H^nK \xrightarrow{p_*} H^nK''$$
Это точная последовательность.

Кроме того, есть так называемый связывающий гомоморфизм δ_n

$$\begin{tikzcd}
H^nK' \arrow[r, "r_*"] & H^nK \arrow[r, "p_*"] & H^nK'' \arrow[dll, "\delta_n"'] \\
H^{n+1}K' \arrow[r, "r_*"] & H^{n+1}K \arrow[r, "p_*"] & H^{n+1}K'' \arrow[dll, "\delta_{n+1}"'] \\
H^{n+2}K' \arrow[r, "r_*"] & H^{n+2}K \arrow[r, "p_*"] & H^{n+2}K''
\end{tikzcd}$$

Полученная последовательность называется длинная точная последовательностью ассоциированная с короткой точной последовательностью комплексов.

Последовательность Майера—Вьеториса

Пусть у нас есть многообразие X^n. Для любого открытого $U^n \subset X^n$ — гладкое многообразие. Мы хотим покрыть X^n двумя открытыми множествами. Пусть у нас есть произвольное глакое многообразие $X = U \cup V$.

Оказывается, можно написать короткую точную последовательность Майера—Вьеториса:

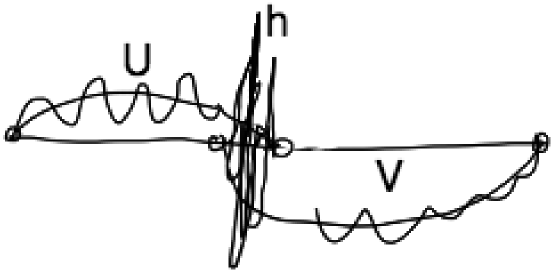
$$0 \longrightarrow \Omega^p(U \cup V) \longrightarrow \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(C) \longrightarrow \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Утверждение 14. *Отображение*

$$C^\infty(U) \oplus C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(U \cap V)$$

является эпиморфизмом.

Пример 40. Пусть $X = \mathbb{R}^1$. В этом случае понятно, почему предыдущее утверждение не очевидно.



Определение 86. Пусть X^n — C^∞-многообразие. И

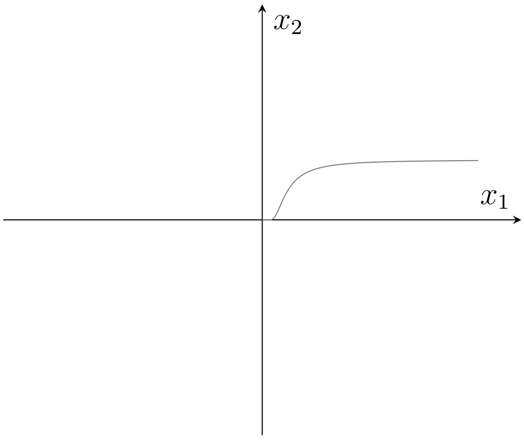
$$X^n = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$$

— конечное открытое покрытие. *Гладкое разбиение единицы*, подчиненное этому открытому покрытию — это $f_1, \ldots, f_m : X^n \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^\infty$, $0 \leq f_i(x) \leq 1$ и

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \equiv 1, \quad \operatorname{supp} f_i \subset U_i.$$

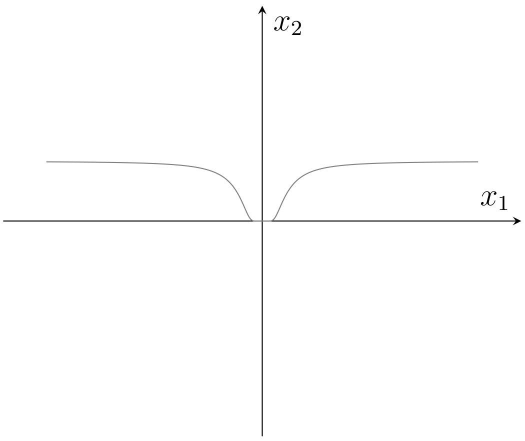
Пример 41. Для прямой можно рассмотреть функцию

$$f = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2}, & x > 0. \end{cases}$$



Тогда

$$\varphi_1 = \frac{f}{f+g}, \quad \varphi_2 = \frac{g}{f+g}.$$



Тогда
$$h = h\varphi_1 + h\varphi_2.$$

Пример 42. Рассмотрим сферу S^2 и $U = S^2 \setminus *_1$, $V = S^2 \setminus *_2$. Имеем

$$\begin{tikzcd} H^P(S^2) \arrow[r] & H^p(U) \oplus H^p(V) \arrow[r] & H^p(U \cap V) \arrow[r] & H^{p+1}(S^2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Отображение $H^p(U \cap V) \to H^{p+1}(S^2)$ — изоморфизм. Но $H^p(U \cap V) = H^p(S^1)$, следовательно, $H^p(S^1) \cong H^{p+1}(S^2)$.

Теорема 16. *Когомологии сферы:*

$$H^0(S^n) = \mathbb{R}^1, \quad H^n(S^n) = \mathbb{R}^1, \quad H^k(S^2) = 0 \ \forall 1 \leq k \leq n-1.$$

Из этого, в частности, вытекает, что $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^m$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ