ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОБЩАЯ ФИЗИКА ДЛЯ ГЕОЛОГОВ

АНДРЕЕНКО
АЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ

ГЕОЛФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

ДЮКОВА ВЛАДИСЛАВА АЛЕКСЕЕВИЧА

Содержание

Лекция 1 **6**
Введение . . . 6
Векторы. Операции с векторами . . . 6
Кинематика. Основные кинематические величины . . . 9
Динамика. Законы Ньютона . . . 11

Лекция 2 **13**
Законы Ньютона(продолжение). Импульс силы . . . 13
Типы взаимодействия. Виды сил . . . 14
Гравитационное взаимодействие, силы тяготения . . . 14
Упругие силы . . . 16
Силы трения . . . 17

Лекция 3 **20**
Система N материальных точек . . . 20
Закон движения центра масс . . . 20
Реактивное движение . . . 22
Момент силы. Момент импульса . . . 23

Лекция 4 **25**
Понятие о работе сил . . . 25
Работа силы тяжести . . . 26
Работа упругой силы . . . 26
Работа центральной силы . . . 26
Понятие о потенциальной энергии . . . 27
Понятие о кинетической энергии . . . 28
Законы сохранения энергии . . . 29

Лекция 5 **30**
Твердое тело . . . 30
Степени свободы . . . 30
Абсолютно твердое тело . . . 30
Вращательное и поступательное движение твердого тела . . . 31
Вращательное движение . . . 31
Поступательное движение . . . 32
Вращательное движение: мгновенная ось вращения и уравнение моментов 33
Мгновенная ось вращения . . . 33
Уравнение моментов . . . 33

Лекция 6 **36**
Момент импульса и кинетическая энергия твердого тела . . . 36
Колебания. Периодическая функция. Гармонические колебания . . . 37
Метод векторных диаграмм . . . 39

Лекция 7 **42**
Взаимно перпендикулярные колебания . . . 42
Разложение в ряд Фурье . . . 43
Примеры колебательных систем . . . 43
Энергия собственных незатухающих колебаний . . . 44
Затухающие колебания . . . 46

Лекция 8 **48**
Вынужденные колебания. Резонанс . . . 48
Волны . . . 50
Гармонические волны . . . 50
Длина волны. Волновое число . . . 50
Волновое уравнение. Виды волн . . . 52

Лекция 9 **53**
Гидродинамика. Аэродинамика . . . 53
Давление. Закон Паскаля . . . 53
Турбулентное и ламинарное течение. Поле скоростей . . . 54
Трубка тока. Уравнение неразрывности . . . 55
Идеальная жидкость. Уравнение Бернулли . . . 56

Лекция 10 **58**
Гидродинамика. Вязкие жидкости . . . 58
Формула Пуазейля . . . 58
Число Рейнольдса . . . 59
Эффект Магнуса. Подъемная сила . . . 60
Термодинамика и молекулярная физика: круг рассматриваемых явлений. Основные параметры . . . 61
Температура. Общее начало термодинамики . . . 61

Лекция 11 **63**
Идеальный газ. Газовые законы и уравнение состояния . . . 63
Интенсивные и экстенсивные параметры . . . 63
Понятие идеального газа . . . 63
Основные газовые законы . . . 63
Уравнение состояния идеального газа . . . 64
Идеальный газ с точки зрения микроскопической теории . . . 66
Вывод формулы давления идеального газа в микроскопической теории 66
Закон Дальтона . . . 67
Работа и энергия . . . 68

Лекция 12 **70**
Первое начало термодинамики . . . 70
Теплоемкость . . . 70
Работа в изопроцессах . . . 72
Некоторые демонстрации термодинамических экспериментов . . . 72

Лекция 13 **74**
Распределение молекул по модулю скорости 74
Анизотропный газ. Барометрическая формула 75
Тепловые машины 76
Второе начало термодинамики. Цикл Карно 77

Лекция 14 **80**
Энтропия и хаос. Способы измерения энтропии 80
Способы измерения энтропии 80
Статистический смысл энтропии 81
Применимость цикла Карно. Энтропия и второе начало термодинамики 81
Функции состояния термодинамической системы 81
Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса 82
Понятие реального газа. Потенциал Леннарда - Джонса 82
Изотерма реального газа 83
Уравнение Ван-дер-Ваальса 84

Лекция 1

Введение

Сделаем несколько предварительных замечаний.
1) Все процессы, которые изучает физика, являются упрощенными. Иногда это возникает из-за отсутствия достаточно точного инструмента измерения, чаще мы просто не можем определить все параметры системы. Поэтому физики пользуются моделями. Единственный критерий качества модели - совпадение с опытными данными. Например, в 90% случаев можно считать Землю плоской - если не летать в Космос, это будет адекватной физической моделью, объясняющей большинство явлений. Фактически Земля шарообразная (хотя даже шар не является точным описанием и тоже представляет собой упрощение действительности, поскольку наша планета сплюснута у полюсов).
2) Невозможно представить физику без математического описания физических законов. Несмотря на то, что математики также используют модели, разница все же есть. Заключается она в том, что в математике достаточно построить внутренне непротиворечивую теорию, и в этом случае она будет иметь право на жизнь. В физике этого мало, теория должна строиться с опорой на опыт (эксперимент).

Векторы. Операции с векторами

Ряд физических величин харатеризуются не только числовым значением, но и направлением. Со школы вам знакомо понятие вектора. $\vec{a}$ - векторная величина. Можно записать: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Далее ради удобства для обозначения вектора вместо стрелки будем использовать прямую черту: $\overline{a}$ - вектор. Векторы бывают свободные (скорость, ускорение перемещение - у них точка приложения является фиксированной), скользящие (вектор, описывающий вращательное движение тела - точку приложения можно перемещать вдоль прямой), а также связанные (магнитная индукция и напряженность электрического поля - данные векторы приложены в одной точке). Рассмотрим основные операции с векторами.

1) Сложение: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$. Выполняется по правилу параллелограмма (см. рис. 1.1). Можно складывать несколько векторов, правило все равно остается в силе.

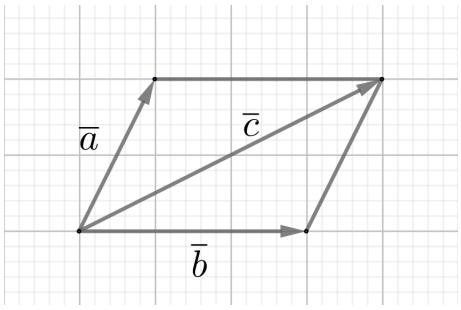

Рис. 1.1. Сложение векторов

2) Вычитание: $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$. Вектор $\overline{c}$ на меньшей диагонали параллелограмма является разностью векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$ (см. рис. 1.2).

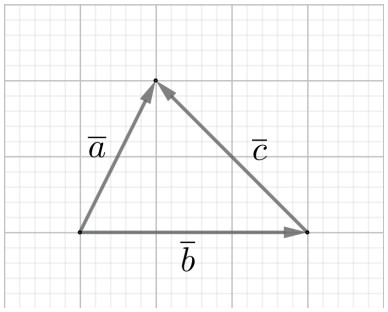

Рис. 1.2. Вычитание векторов

3) Умножение вектора на число: $\overline{b} = n\overline{a}$. Направление вектора не меняется, меняется его величина (см. рис. 1.3).

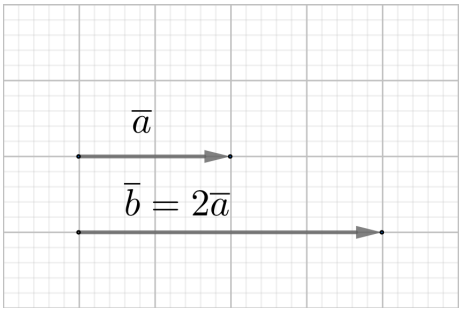

Рис. 1.3. Умножение вектора на число. $\overline{b} = n\overline{a}$. В данном случае $n = 2$

4) Любой вектор можно разложить на составляющие бесконечным количеством способов: $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = \overline{x} + \overline{y}$ (см. рис. 1.4).

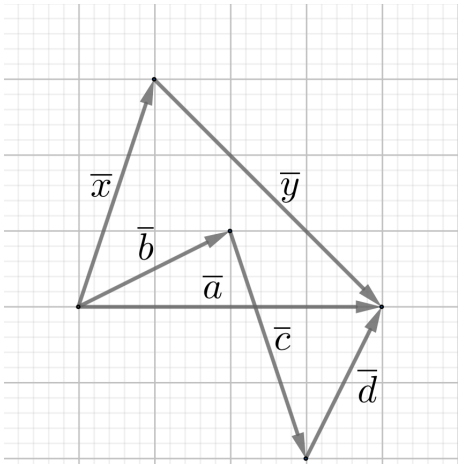

Рис. 1.4. Разложение вектора различными способами

5) Вектор можно разложить по его проекциям. Мы будем работать в декартовой системе координат $Oxyz$. Для удобства в дальнейшим вместо трехмерной системы использую двумерную Oxy (при этом надо помнить, что ось Oz все же есть). Вектор $\overline{a}$, составляющий с ось Ox угол α, можно разложить по проекциям: $a_x = a\cos\alpha$,

$a_y = a\sin\alpha$, причем по теореме Пифагора можно найти величину данного вектора: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Отметим, что проекции независимы: x-проекция не знает про то, что происходит с y-проекцией. Так, если с одной и той же высоты одновременно бросят два шара равной массы, но первый просто отпустят, а второму зададут горизонтальную начальную скорость, то они достигнут поверхности Земли одновременно, поскольку y-проекции их скоростей одинаковы, а x-проекции на них не влияют.

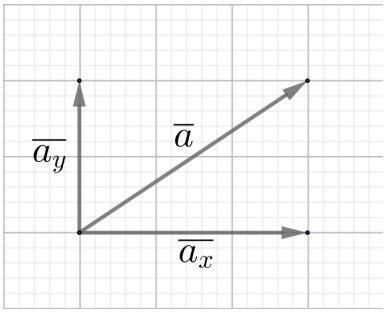

Рис. 1.5. Разложение вектора по проекциям

6) Скалярные физические величины (скаляры) определяются числом, но не направлением (работа, путь, время, заряд, масса). Важным скаляром в физике является скалярное произведение векторов. Записывается скалярное произведение так: $c = (\overline{a} \cdot \overline{b}) = |a||b|\cos\alpha$. Примером скалярного произведения является работа - скалярная величина, равная произведению силы на перемещение (векторных величин). Заметим, что справделиво коммутационное правило: $(\overline{a} \cdot \overline{b}) = (\overline{b} \cdot \overline{a})$.

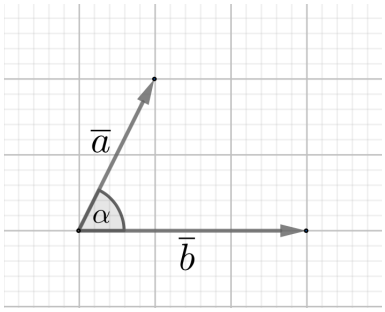

Рис. 1.6. Скалярное произведение векторов

7) Векторное произведение векторов (см. рис. 1.7): $\overline{c} = [\overline{a} \cdot \overline{b}]$, $c = |a||b|\sin\alpha$. Направление вектора $\overline{c}$ определяется по правилу буравчика. Данный вектор расположен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Коммутационный закон не выполняется: $[\overline{a} \cdot \overline{b}] = -[\overline{b} \cdot \overline{a}]$. Примером векторного произведения являются момент импульса, момент силы, магнитная индукция.

8) При решении задач важным является выбор системы координат. Выбрать систему координат - значит поставить стрелки на осях, выбрать положение 0, написать, что по осям (то есть выбрать начало системы координат и задать оси). $r_x = r\cos\alpha = x$, $r_y = r\sin\alpha = y$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

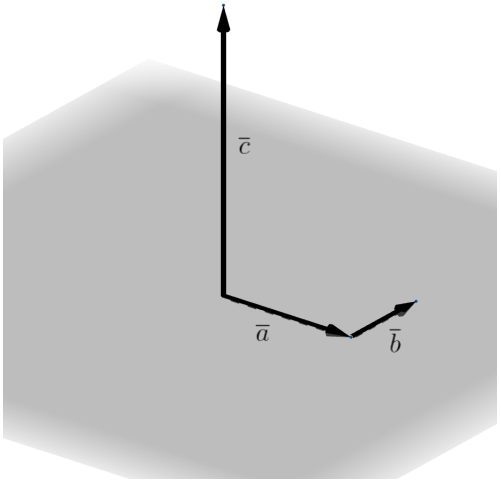

Рис. 1.7. Векторное произведение векторов

Кинематика. Основные кинематические величины

Кинематика - наука о движении тела, которая не рассматривает причин, вызывающих это движение. В кинематике мы будем работать с материальными точками.

Материальная точка - физический объект, размерами которого можно пренебречь в рамках решения данной задачи. Обратите внимание, что размер объекта никак специально не оговаривается. Земля может быть материальной точкой, если мы рассматриваем ее движение вокруг Солнца, но при объяснении приливов и отливов считать Землю материальной точной уже нельзя. Также всегда должна быть задана система отсчета, относительно которой мы решаем задачу. Не имеет смысла фраза: "Владивосток - далекий город" пока мы не указали, относительно какого объекта он является далеким.

Решить кинематическую задачу - значит найти зависимость перемещения от времени $\overline{r}(t)$ вдоль каждой из осей системы координат: $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$, $\overline{z}(t)$. Классическим примером решения кинематической задачи является расписание (поездов, самолетов и т.д.). Решая кинематическую задачу, мы хотим получить представление о траектории тела.

Траектория - геометрическое место точек, которые тело проходит в процессе своего движения. Действительно, расписание движения поездов дает нам представление о том, в какие моменты времени на каких станциях будет находиться данный поезд, то есть мы узнаем траекторию его движения. Зачастую кинематические задачи бывают чрезвычайно сложными. В качестве примера можно рассмотреть движение ракеты: ее траектория сложна из-за гравитационных взаимодействий с различными объектами, которые приходится учитывать. В данном курсе мы сосредоточимся на простых кинематических движениях.

Мы хотим связать перемещение с траекторией. Рассмотрим траекторию AB. Разобьем ее на небольшие участки, тогда $\Delta\overline{l_1}, \Delta\overline{l_2}, ..., \Delta\overline{l_i}$ - элементарные перемещения. При этом $\Delta l_i = \Delta s_i$, где Δs_i представляет собой небольшой участок траектории. Величина $S = \sum\limits_i \Delta s_i$ называется путем. Отметим, что путь - скалярная

величина, а перемещение - векторная. Так, если вы ухели за город на машине, а затем вернулись домой, то перемещение равно нулю, а путь - это то количество километров, которое покажет спидометр.

Средняя скорость - отношение перемещения к промежутку времени, за который это перемещение было совершено:

$$\overline{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{l}}{\Delta t} \tag{1.1}$$

Средняя скорость говорит нам о движении тела в среднем - на относительно больших промежутках времени и расстояниях. Для более детального описания применяется мгновенная скорость.

Мгновенная скорость - предел отношения перемещения к промежутку времени, за которое данное перемещение произошло, при стремлении промежутка времени к нулю:

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{l}}{\Delta t} = \frac{d\bar{l}}{dt} = \dot{\bar{l}} \tag{1.2}$$

Мгновенная скорость представляет собой производную от перемещения по времени. Показаны различные варианты записи. Точка над вектором обозначает дифференцирование вектора по времени.

Как и любой вектор, скорость можно раскладывать по проекциям, при этом $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. Единицы измерения скорости в СИ - метры в секунду [м/с]. Скорость можно измерить непосредственно, вычислив перемещение и поделив его на время движения.

Еще одной важной физической величиной является ускорение. Ускорение - это скорость изменение скорости за единицу времени. Если в точке A объект имел скорость $\overline{V_A}$, а в точке B - скорость $\overline{V_B}$, то изменение скорости $\Delta\overline{V} = \overline{V_B} - \overline{V_A}$. Тогда среднее ускорение:

$$\overline{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t}, \tag{1.3}$$

а мгновенное ускорение:

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \dot{\overline{V}} = \ddot{\bar{l}}, \tag{1.4}$$

то есть мгновенное ускорение - вторая производная перемещения по времени. Данная физическая величина является одним из основных параметров в законах Ньютона.

Приращение скорости можно разложить на тангенциальную и нормальную составляющие: $\Delta\overline{V} = \overline{V_n} + \overline{V_\tau}$. Аналогично раскладывается ускорения. Компонента $\overline{a_n}$, перпендикулярная траектории, называется нормальным ускорением. Компонента $\overline{a_\tau}$, параллельная траектории, называется тангенциальным ускорением. Отметим, что нормальное ускорение изменяет направление вектора $\overline{V}$, но не величину, а тангенциальное - величину, но не направление. Полное ускорение равно $\overline{a} = \overline{a_n} + \overline{a_\tau}$.

Рассмотрим равномерное движение материальной точки по окружности. Величина скорости не меняется: $\overline{V_A} = \overline{V_B}$. Углы в двух треугольниках равны как углы

со взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобных треугольников имеем:

$$\frac{\Delta l}{R} = \frac{\Delta V}{V},$$

тогда ускорение находим по определению:

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{V}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{l}}{\Delta t} = \frac{V}{R}\overline{V}, \tag{1.5}$$

$$a = \frac{V^2}{R} \tag{1.6}$$

Получили так называемое центростремительное ускорение. Как уже было сказано, оно не меняет величину скорости, а значит, является нормальным ускорением.

Динамика. Законы Ньютона

В отличие от кинематики, динамика рассматривает причины движения. Долгое время основой динамики была механика Аристотеля, в которой постулировалась связь силы и скорости. В те времена не было научной базы и возможностей для постановки точных экспериментов. С 17 века основой динамики стали законы И. Ньютона.

1 закон Ньютона: существуют такие инерциальные системы отсчета (ИСО), в которых тело сохраняет состояние покоя либо равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока какое-либо внешнее воздействие не выведет это тело из данного состояния. Вопреки распространенному заблуждению, первый закон Ньютона не является следствием второго. Фактически ставится знак равенства между состоянием покоя и равномерного прямолинейного движения. Также постулируется существование ИСО.

ИСО - неподвижная или равномерно движущаяся система отсчета в рамках данного эксперимента. Например, геоцентрическая система отсчета является (приближенно) инерциальной для многих тел, находящихся на Земле. Если же нужно рассмотреть движение Земли вокруг Солнца, геоцентрическая система отсчета перестает быть инерциальной, и нужно использовать гелиоцентрическую систему отсчета.

2 закон Ньютона: сила, действующая на материальную точку, приводит ее в движение с ускорением, причем ускорение пропорционально силе:

$$\overline{F} = m\overline{a} \tag{1.7}$$

Сила - результат взаимодействия физических объектов. Является векторной величиной. Относится всегда к двум объектам.

Масса - коэффициент пропорциональности между силой и ускорением во втором законе Ньютона. Можно определять массу как меру интерности тел, но такое определение не вполне удовлетворительно, поскольку неясно, что такое инертность. Смысл второго закона Ньютона в том, что он устанавливает пропорциональную зависимость между силой и ускорением: $\overline{F} \propto \overline{a}$. Возьмем тележку с пружиной, поставим на нее груз массы m_1 и начнем тянуть с силой $\overline{F_1}$. Затем снимем первый

груз, поставим груз массы m_2. Окажется, что $\overline{F_2} \propto \overline{a_2}, \overline{F_1} \propto \overline{a_1}$ и т.д. Измерить массу можно косвенно, воспользовавшись отношением: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$. То есть можно определить m_2, если известна m_1, и наоборот.

Лекция 2

Законы Ньютона (продолжение). Импульс силы

Отличие механики Ньютона от механики Аристотеля: сила связывается с ускорением, а не со скоростью. Зачастую к телу приложена не одна, а сразу несколько сил. В этом случае сумму всех сил, действующих на тело, называют равнодействующией силой:

$$\sum_i \overline{F_i} = \overline{F}_{eq} \tag{2.1}$$

Второй закон Ньютона справедлив для равнодействующей:

$$\overline{F}_{eq} = m\overline{a} \tag{2.2}$$

Если $\overline{F}_{eq} = 0$, то тело находится либо в состоянии покоя, либо в состоянии равномерного прямолинейного движения. Как мы помним, проекции не влияют друг на друга, поэтому второй закон Ньютона можно записать и для проекций:

$$F_x = ma_x, \tag{2.3}$$
$$F_y = ma_y, \tag{2.4}$$
$$F_z = ma_z, \tag{2.5}$$

В общем случае когда у нас есть система тел, нужно учитывать все силы, приложенные к телам данной системы. Уравнения, выражающие законы Ньютона, также зачастую называют уравнениями движения.

3 закон Ньютона: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению. Сила кубика, лежащего на столе и действующего на стол, равна по величине силе, действующей со стороны стола на кубик. При этом сила кубика направлена вниз, а сила стола - вверх (см. рис.). Взаимодействие является бинарным (между двумя телами). Можно записать:

$$\overline{f}_{12} = -\overline{f}_{21} \tag{2.6}$$

Следует учитывать, что данные силы приложены к разным телам, поэтому они не могут уравновесить друг друга. Также следует знать, что третий закон Ньютона подразумевает непосредственное взаимодействие тел. Для опосредованного взаимодействия (например, через электромагнитное поле по закону Кулона) данный закон Ньютона может не выполняться.

Сам Ньютон записал второй закон несколько иначе. Введем новую векторную физическую величину - импульс. По определению, импульс равен:

$$\overline{P} = m\overline{V} \tag{2.7}$$

Импульс широко используется не только в классической механике, но и при описании микромира. Далее, используя второй закон Ньютона, получаем:

$$m\overline{a} = m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F}, \tag{2.8}$$

в законах Ньютона $m = \text{const}$, тогда имеем:

$$\frac{d}{dt}(m\overline{V}) = \frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{F}. \tag{2.9}$$

Законы Ньютона получены в следующих приближениях:
а) Не самые высокие скорости: $V << c$, где c - скорость света (так называемый нерелятивистский случай)
б) Макроскопические тела (много материальных точек)
Представим выражение (2.9) в виде:

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \sum_i \overline{F_i}, \tag{2.10}$$

$$d\overline{P} = \sum_i \overline{F_i} dt, \tag{2.11}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\overline{P} = \overline{P_2} - \overline{P_1} = \sum_i \overline{F_i}(t_2 - t_1) = \sum_i \overline{F_i}\Delta t \tag{2.12}$$

Величина, стоящая в правой части последнего выражения, называется импульсом силы. Изменение импульса равно импульсу силы, что хорошо согласуется с повседневным опытом. Так, сразу не получится сдвинуть с места тяжелый автомобиль, однако, если достаточно должно прикладывать небольшую силу, то автомобиль тронется с места.

Типы взаимодействия. Виды сил

Всего в природе существуют три типа взаимодействия:
а) гравитационное - обусловлено наличием у тела массы,
б) электромагнитное - обусловлено наличием заряда,
в) сильное и слабое - объединяются в одно, характерны для объектов микромира, проявляются главным образом в квантовой механике, не рассматриваются в данном курсе.

Существуют различные виды сил - силы бывают гравитационные, упругие и т.д. Виды сил сводятся к типам взаимодействий. Далее рассматриваем конкретные виды сил более подробно.

Гравитационное взаимодействие, силы тяготения

Закон всемирного тяготения (был сформулирован Исааком Ньютоном на основе работ Тихо Браге, Николая Коперника, Галилео Галилея):

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \tag{2.13}$$

Если две точечные массы расположены на расстоянии R, то они взаимодействуют друг с другом с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Закон всемирного тяготения можно

записать и в векторном виде:

$$\overline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R^3} \overline{R}. \tag{2.14}$$

Коэффициент пропорциональности γ называется гравитационной постоянной. Она не несет в себе особого физического смысла, эта константа нужна для сопоставления величин в одной системе единиц (СИ). Ее численное значение чрезвычайно мало: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Вообще существуют несколько основных систем единиц. В СИ используются метры, килограммы, секунды, Ньютоны (единица измерения силы). В СГС - сантиметры, граммы, секунды, дины (вместо Ньютонов). В каждой системы единиц свои коэффициенты пропорциональности.

Итак, гравитационное взаимодействие мало, когда малы массы. Величина γ была сначала рассчитана Ньютоном. Потом датский ученый Г. Кавендиш провел опыт, в котором была экспериментально оперделена гравитационная постоянная (см. рис. 2.1).

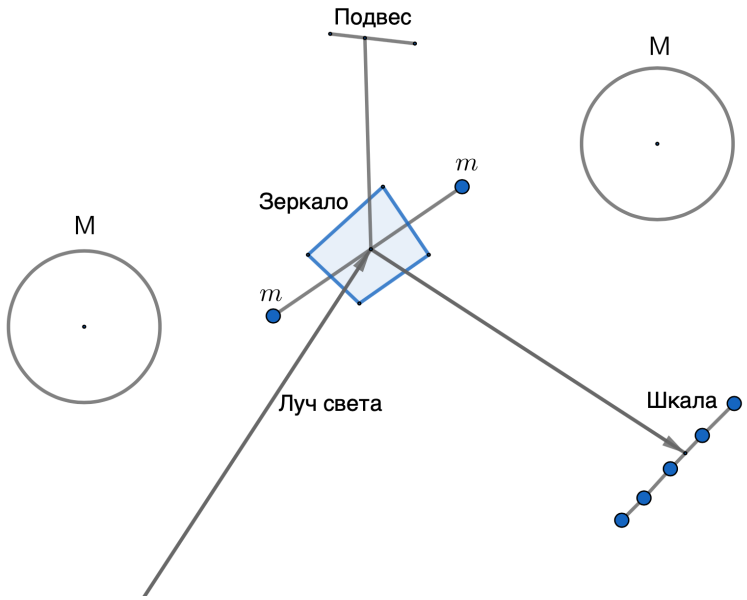

Рис. 2.1. Опыт Кавендиша

На упругой нити были подвешаны две массы. К ним подносились на подставках две другие массы. Для фиксации небольшого поворота нити было прикреплено зеркальце и поставлен источник света. Отраженный от зеркальца луч света падал на шкалу, которую можно было отнести на значительное расстояние от объекта. Таким образом, любой поворот зеркальца (даже на несколько угловых секунд) можно было определить. Рассчитанная ранее величина гравитационной постоянной была подтверждена.

Есть интересный вопрос, который возникает при изучении закона всемирного тяготения. Допустим, человек массы m стоит на поверхности Земли массы M. Гравитационное взаимодействие определяется так, как будтно вся масса сосредоточена

в центре Земли. Насколько это правомерно? Рассмотрим два макроскопических тела с массами M_1 и M_2. Для них непосредственно нельзя записать закон всемирного тяготения, поскольку он справедлив для материальных точек. Но можно сделать следующее: представим первое тело в виде совокупности материальных точек, причем i-я материальная точка имеет массу Δm_i, аналогично поступим со вторым телом (масса k-ой материальной точки Δm_k). Тогда закон всемирного тяготения запишется в виде:

$$\overline{F} = \sum_i \sum_k \frac{\Delta m_i \Delta m_j}{R_{ik}^3} \overline{R}_{ik}, \tag{2.15}$$

где R_{ik} - расстояния между i-й точкой первого тела и k-ой точкой второго.

Из этой формулы становится понятно, что центр масс Земли находится примерно в центре шара (если считать Землю шаром - в каком-то приближении это так). Человек очень мал по сравнению с размерами Земли, поэтому можно считать его материальной точкой, а расстояние R измерять от этой точки до центра шара ($R \approx$ 6400 км).

Оценим примерно величину ускорения свободного падения. Мы знаем, что сила тяжести:

$$\overline{F} = m\overline{g}. \tag{2.16}$$

По сути, это закон всемирного тяготения вблизи поверхности Земли. Воспользуемся им:

$$F = mg = \gamma \frac{mM}{R^2} = m\gamma \frac{M}{R^2}, \tag{2.17}$$

$$g \approx \gamma \frac{M}{R^2}. \tag{2.18}$$

Здесь M - масса Земли, R - ее радиус.

Отметим, что ускорение свободного падения g является константой лишь приближенно - на самом деле оно немного меняется в горах или внутри глубоких шахт.

Еще один интересный вопрос связан с массой. Ранее мы определяли массу как коэффициент пропорциональности между силой и ускорением во втором законе Ньютона (так называемая инерционная масса). Масса фигурирует и в законе всемирного тяготения - здесь она обусловлена свойствами материи (гравитационная масса). То, что эти массы равны, доказано экспериментально, но, вообще говоря, не является тривиальным фактом.

Вам, конечно же, знакомы электромагнитные волны, связанные с электромагнитным взаимодействием. Мы знаем, что существует гравитационное взаимодействие, но существуют ли гравитационные волны? Оказывается, да. Они очень слабые, поэтому для их регистрации нужны огромные интерферометры. Впервые они были зарегистрированы 14 сентября 2015 года от слияния двух черных дыр детекторами LIGO в США. В данном проекте принимали участие ученые со всего мира, в том числе и ученые физического факультета МГУ.

Упругие силы

Причиной возникновения упругих сил является деформация. Фундаментально упругие силы сводятся к электромагнитному взаимодействию (изменяется расстоя-

ние между ионами). На макроскопическом уровне при воздействии силой на какую-либо точку тела данная точка смещается. Данное явление и называется деформацией.

Деформации бывают упругие и пластические. Упругие деформации обратимы - под воздествием силы форма тела изменяется, но тело приобретает первоначальную форму после снятия взаимодействия. Пластические деформации необратимы.

Для груза, подвешенного на пружине, справедлив закон Гука:

$$\overline{F} = -k\overline{x} \tag{2.19}$$

Здесь f - сила упругости, k - коэффициент жесткости пружины, x - смещение относительно положения равновесия. Знак "минус"возникает из-за того, что смещение и сила противоположно направлены.

Силы упругости являются центральными (рис. 2.2). Например, подвешенный на нити шарик не падает вниз, поскольку на него действует сила натяжения нити (упругая сила). Данная сила будет направлена вдоль нити к точке подвеса независимо от положения шарика и нити.

Рис. 2.2. Силы упругости центральные

В сложных системах с блоками (которые вы будете рассматривать на семинарах) силами упругости являются силы натяжения нитей. Причем делается два важных приближения:
а) нити невесомые (то есть их масса равна нулю)
б) нити нерастяжимые (при приложении любой силы их длина сохраняется)

Свойством б) не обладают резиновые жгуты. Для описания динамики тела, прикрепленного к резинке, становится существенным, с какой силой тянут эту резинку. Условия невесомости и нерастяжимости при решении задач записываются в виде дополнительных кинетических уравнений (при этом мы забываем о электромагнитной природе сил).

Силы трения

Как и силы упругости, силы трения имеют электромагнитную природу. Бывают различные виды трения: сухое, вязкое, трение воздуха и т. д. Силы трения воздуха и вязкого трения зависят от взаимных скоростей тел, а сухого - не зависят,

поэтому будем рассматривать только его. Сухое трение означает, что поверхности соприкасающихся тел ничем не смазаны.

Рассмотрим брусок на наклонной плоскости (рис. 2.3). Брусок находится в равновесии, если сумма приложенных сил равна нулю, то есть:

$$\overline{f_{\text{тр}}} + \overline{N} + m\overline{g} = 0, \tag{2.20}$$

где $\overline{N}$ - сила реакции опоры наклонной плоскости. Заметим, что если начать изменять угол наклонной плоскости, то изменится и $f_{\text{тр}}$. Так, если плавно увеличивать угол, то брусок сначала все еще будет покоиться, а при достижении критического угла он скатится с наклонной плоскости.

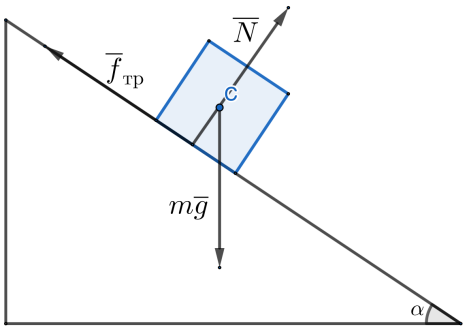

Рис. 2.3. Брусок на наклонной плоскости

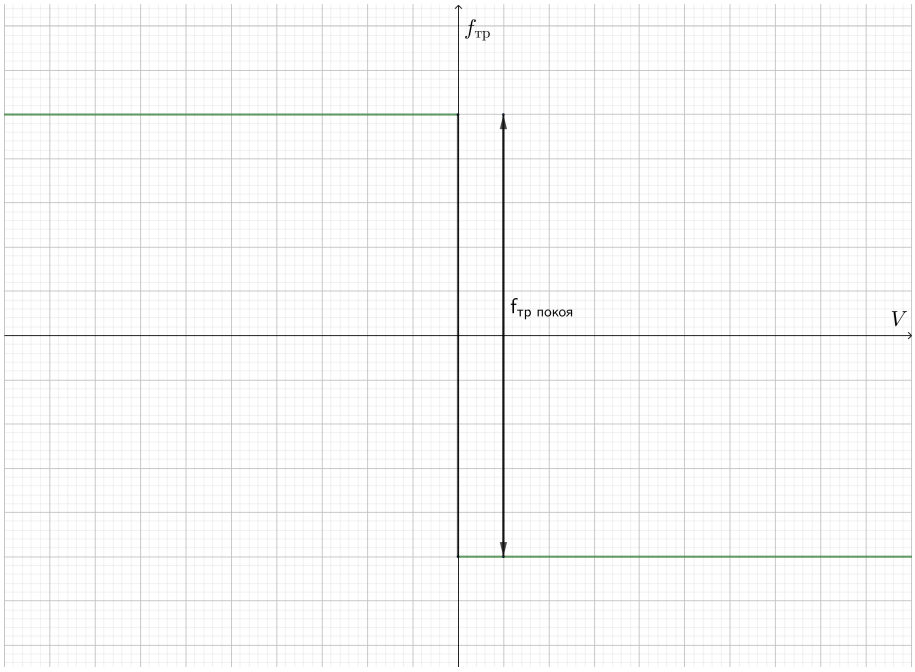

Рис. 2.4. Иллюстрация закона Амонтона-Кулона

Закон Амонтона - Кулона (был получен экспериментально):

$$|f_{\text{тр}}| < |f_{max}| = \mu|N|, \tag{2.21}$$

где μ - коэффицент трения. Отметим, что сила трения, действовавшия на брусок, когда тот находился в состоянии покоя (так называемая сила трения покоя), имеет не какое-то определенное значение, а может принимать значения из некоторого диапазона (см. рис. 2.4). В свою очередь, сила трения, действующая на движущийся по плоскости брусок (сила трения скольжения), постоянна и равна по модулю $\mu|N|$, в соответствии с законом Амонтона-Кулона. Сила трения скольжения направлена противоположно направлению движения бруска.

Лекция 3

Система N материальных точек

В системе, состоящей из N материальных точек, действуют как внутренние (между точками данной системы), так и внешние силы. В общем случае для ее описания нам потребуется 3N дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$m_i \frac{d^2\overline{r_i}}{dt^2} = \overline{f_{i1}} + \overline{f_{i2}} + ... + \overline{f_{in}} + \overline{F_i} \tag{3.1}$$

i-е уравнение представляет собой второй закон Ньютона, записанный для i-ой точки системы. На практике для систем из большого числа дифференциальных уравнений разрабатываются приближенные численные решения.

Отметим, что выбор системы материальных точек - наше право. Например, рассмотрим систему, состоящую из пушки, платформы, на которой находится данная пушка, и снаряда, выпускаемого пушкой. Если ввести оси координат $0xy$, то по оси Ox данная система оказывается замкнута (на нее вдоль данного направления не действуют внешние силы). По оси Oy система замкнутой не является - есть внешняя сила тяжести (со стороны Земли). Система станет замкнутой вдоль данной оси, если включить Землю в систему. Включать Землю в рассмотрение или же считать силу тяжести внешней силой - наш выбор, который не влияет на результат.

Закон движения центра масс

Для всякой системы материальных точек существует особая точка, называемая центром масс. Например, в случае двух материальных точек с массами m_1 и m_2 центр масс будет лежать на отрезке, соединяющем эти точки, причем $m_1 l_1 = m_2 l_2$, где $l_1, 2$ - расстояние от центра масс до первой (второй) точки соответственно. В общем случае для системы материальных точек:

$$\sum_i m_i \overline{l_i} = 0 \tag{3.2}$$

Положение центра масс в декартовой системе координат задается радиус-вектором $\overline{r_c}$ (радиус-вектор - вектор, задающий положение точки в пространстве относительно начала координат). Зададим $\overline{l_i} = \overline{r_i} - \overline{r_c}$ - вектор, проведенный от центра масс к i-ой материальной точке (см. рис. 3.1) Подставляем выражение для l_i в предыдущее уравнение:

$$\sum_i m_i(\overline{r_i} - \overline{r_c}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_i m_i \overline{r_i} = \sum_i \overline{r_c} = M\overline{r_c}, \tag{3.4}$$

где $M = \sum\limits_i m_i$ - суммарная масса системы материальных точек. Мы получили выражение для определения положения центра масс:

$$\overline{r_c} = \frac{\sum\limits_i m_i \overline{r_i}}{\sum\limits_i m_i} \tag{3.5}$$

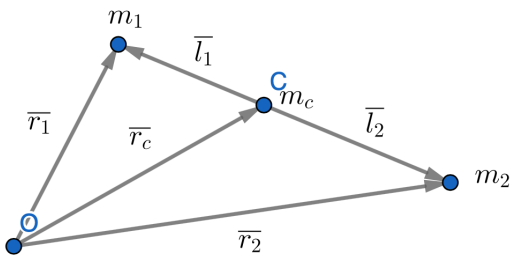

Рис. 3.1. Центр масс системы материальных точек

Дифференцируя данное выражение по времени, находим скорость центра масс:

$$\overline{V_c} = \frac{d\overline{r_c}}{dt} = \frac{\sum\limits_i m_i \overline{V_i}}{\sum\limits_i m_i} \tag{3.6}$$

Дифференцируя еще раз, получаем выражение для ускорения центра масс:

$$\overline{a_c} = \frac{d^2\overline{r_c}}{dt^2} = \frac{\sum\limits_i m_i \frac{d^2\overline{r_c}}{dt^2}}{\sum\limits_i m_i} = \frac{\sum\limits_i m_i \overline{a_i}}{\sum\limits_i m_i} \tag{3.7}$$

Запишем для i-ой материальной точки 2 закон Ньютона (но будем помнить, что всего у нас N векторных уравнений: $i = 1, 2, ..., N$):

$$m_i\overline{a_i} = \overline{f_{i1}} + \overline{f_{i2}} + ... + \overline{f_{iN}} + \overline{F_i} \tag{3.8}$$

Просуммируем уравнения (3.8):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\overline{a_i} = \sum_{i \neq j} \overline{f_{ik}} + \sum_j \overline{F_j}. \tag{3.9}$$

Заметим, что в силу справедливости третьего закона Ньютона для i-ой и j-ой материальных точек системы выполняется:

$$\overline{f_{ij}} = -\overline{f_{ij}} \tag{3.10}$$

Тогда $\sum\limits_{i \neq j} \overline{f_{ik}} = 0$, и мы окончательно получаем формулу (с учетом выражения (3.7)):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\overline{a_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overline{a_c} = M\overline{a_c} = \sum_j \overline{F_j} \tag{3.11}$$

Данное выражение называют уравнением движения центра масс. В замкнутой системе $\sum\limits_j \overline{F_j} = 0$, а значит, $\overline{a_c} = 0$ - центр масс системы материальных точек движется прямолинейно и равномерно либо покоится.

Для системы материальных точек можно ввести суммарный импульс:

$$\overline{P} = \sum_i m_i \overline{V_i} \tag{3.12}$$

Из выражения (3.6) очевидно, что:

$$\overline{P} = \sum_i m_i \overline{V_c} \tag{3.13}$$

Дифференцируем по времени:

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\overline{V_i}}{dt} = \sum_j \overline{F_j} \tag{3.14}$$

Из полученного выражения видно, что в замкнутой системе $\overline{P} = \mathbf{const}$, то есть мы получили закон сохранения импульса системы материальных точек. Выражение (3.14) естественно назвать законом изменения импульса.

Рассмотрим один любопытный пример. Как мы уже знаем, брошенная под углом к горизонту граната летит по параболе. В какой-то момент она разрывается на осколки, летящие в разные направления с разными скоростями. Интересным здесь является то, что с момента взрыва и до момента падения первого осколка на землю (или до столкновения с препятствием) центр масс гранаты продолжает двигаться по параболе.

Реактивное движение

Реактивное движение - это движение, вызванное выбросом массы. Примером может служить выпущенный воздушный шарик или ракета. Рассмотрим подробнее движение ракеты.

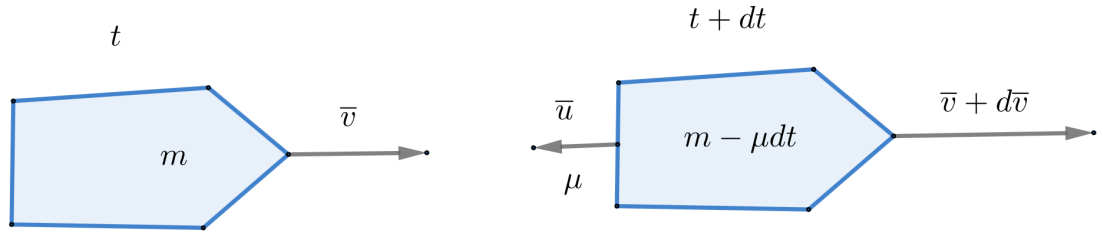

Рис. 3.2. Иллюстрация реактивного движения ракеты

Пусть в начальный момент времени она имела массу m и скорость $\overline{V}$, тогда импульс системы "ракета - газы":

$$\overline{P_1} = m_1 \overline{V_1}. \tag{3.15}$$

Спустя очень небольшой промежуток времени dt (здесь d - дифференциал, его можно понимать как бесконечно малое приращение величины) из ракеты вылетело μ

кг реактивных газов, которые имели скорость $\overline{u}$ относительно ракеты (то есть в системе отсчета ракеты). Масса ракеты стала равна $m - \mu dt$, а ее скорость увеличилась за счет выброшенной струи газов и стала равна $\overline{V} + d\overline{V}$. Импульс системы стал равен:

$$\overline{P_2} = (m - \mu dt)(\overline{V} + d\overline{V}) + \mu dt(\overline{u} + \overline{V}) \tag{3.16}$$

Изменение импульса системы:

$$d\overline{P} = \overline{P_2} - \overline{P_1} = m\overline{V} + md\overline{V} - \mu\overline{V}dt - \mu d\overline{V}dt + \mu\overline{u}dt + \mu\overline{V}dt - m\overline{V} = md\overline{V} + \mu\overline{u}dt. \tag{3.17}$$

Слагаемым $\mu d\overline{V}dt$ пренебрели, поскольку оно более высокого порядка малости, чем все остальные слагаемые. Делим полученное выражение на dt:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d\overline{P}}{dt} - \mu\overline{u} \tag{3.18}$$

Как мы уже знаем,

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{F} \tag{3.19}$$

Величину $\mu\overline{u} = \overline{F}_{react}$ называют реактивной силой. Таким образом, мы получили уравнение реактивного движения - уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F} - \overline{F}_{react}. \tag{3.20}$$

Момент силы. Момент импульса

Теперь перейдем к рассмотрению момента силы и момента импульса. Стоит отметить, что данные моменты к моментам времени не имеют никакого отношения. По определению момент силы равен векторному произведению (см. лекцию 1) радиус-вектора точки приложения силы на силу:

$$\overline{M} = [\overline{r} \cdot \overline{F}], \tag{3.21}$$

а модуль момента импульса равен:

$$M = rF\sin\alpha, \tag{3.22}$$

где α - угол между векторами $\overline{r}$ и $\overline{F}$. Направление момента импульса определяется по правилу буравчика или правилу правого винта. Заметим, что данное определение не противоречит тому определению, которое вы встречали в школьнах учебниках физики: величину $r\sin\alpha = d$ называют плечом силы. Поэтому $M = Fd$, что согласуется со школьной программой.

По аналогии с моментом силы вводится момент импульса:

$$\overline{L} = [\overline{r} \cdot \overline{P}] = [\overline{r} \cdot m\overline{V}] \tag{3.23}$$

Как и момент силы, момент импульса аддитивен - можно посчитать суммарный момент импульса системы материальных точек:

$$\overline{L} = \sum_i \overline{l_i} \tag{3.24}$$

Продифференцируем по времени момент импульса одной материальной точки:

$$\frac{d\overline{l_i}}{dt} = [\frac{d\overline{r_i}}{dt} \cdot m_i\overline{V_i}] + [\overline{r_i} \cdot \frac{dm_i\overline{V_i}}{dt}] = [\overline{r_i} \cdot \frac{dm_i\overline{V_i}}{dt}] = [\overline{r_i} \cdot F_i] = \overline{M_i} \tag{3.25}$$

Рассмотрим систему материальных точек. Просуммируем полученное выражение от 1 до N:

$$\sum_i \frac{d\overline{l_i}}{dt} = \sum_i \overline{M_i} \tag{3.26}$$

Момент силы можно представить в виде суммы внутреннего и внешнего моментов:

$$\overline{M_i} = \overline{M}_{ik}^{\text{внут}} + \overline{M}_i^{\text{внеш}} \tag{3.27}$$

По аналогии с суммой внутренних сил для системы материальных точек можно доказать, что сумма внутренних моментов сил равна нулю:

$$\sum_{i \neq k} \overline{M}_{ik}^{\text{внут}} = 0 \tag{3.28}$$

Тогда получаем:

$$\frac{d\sum\limits_i \overline{l_i}}{dt} = \frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{M}^{\text{внеш}} \tag{3.29}$$

Момент импульса и момент силы можно разложить по проекциям. Разложим вектор $\overline{r}$ на вектор, лежащий в плоскости Oxy, и вектор, перпендикулярный данной поскости:

$$\overline{r} = \overline{r_\perp} + \overline{r_z} \tag{3.30}$$

То же сделаем с вектором силы. Тогда получаем:

$$\overline{M} = [\overline{r} \cdot \overline{r}] = [\overline{r_z} + \overline{r_\perp}, \overline{F_z} + \overline{F_\perp}] = [\overline{r_z} \cdot \overline{F_z}] + [\overline{F_\perp} \cdot \overline{F_z}] + [\overline{r_z} \cdot \overline{F_\perp}] + [\overline{r_\perp} \cdot \overline{F_\perp}] \tag{3.31}$$

Первое слагаемое равно нулю (данные векторы сонаправлены), второе и третье выражения лежат в плоскости Oxy и лишь приводят к деформации оси, не влияя на вращение. Получается, что момент силы фактически определяется лишь последним слагаемым:

$$\overline{M} = [\overline{r_\perp} \cdot \overline{F_\perp}] = \overline{M_z}^{\text{внеш}} \tag{3.32}$$

Тогда:

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{M}^{\text{внеш}} \tag{3.33}$$

Если $\overline{M}^{\text{внеш}} = 0$, то $\overline{L} = 0$ - закон сохранения момента импульса (относительно оси Oz). Если $\overline{M}^{\text{внеш}} \neq 0$, то выражение (5.17) представляет собой закон изменения момента импульса.

Лекция 4

Понятие о работе сил

Пусть под действием силы $\overline{f}$ материальная точка совершила элементарное перемещение $d\bar{l}$. Тогда элементарная работа данной силы запишется в виде:

$$dA = \overline{f} d\bar{l} \cos\alpha = (\overline{f} \cdot d\bar{l}) \tag{4.1}$$

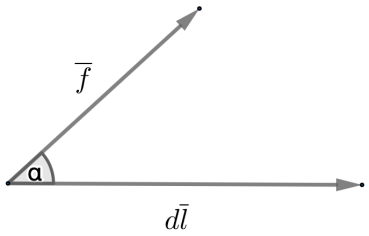

Рис. 4.1. К понятию работы силы

Если $d\bar{l} = 0$, то $dA = 0$; $dA > 0$ при $0 < \cos\alpha < \frac{\pi}{2}$; $dA < 0$ при $\cos\alpha > \frac{\pi}{2}$, то есть если сила и перемещение противопорложно направлены, то совершенная работа отрицательна. Если $\overline{f} \perp d\bar{l}$, то $dA = 0$.

Физическое понимание работы несколько противоречит бытовому пониманию. Так, если у вас есть тяжелый рюкзак, вы вышли из точки А, а затем вернулись в эту точку, то ваша работа равна нулю, поскольку равно нулю перемещение, хотя на такую прогулку с рюкзаком могло быть потрачено много энергии.

Если на материальную точку действует несколько сил (например, три), то соответствующая работа равна:

$$dA = f_{1l}dl + f_{2l}dl + f_{3l}dl, \tag{4.2}$$

где f_{nl} - проекция n-ой силы на направление перемещения. В декартовой системе координат можно записать так:

$$dA = f_x dx + f_y dy + f_z dz. \tag{4.3}$$

До сих пор мы считали, что на материальную точку действуют постоянные силы. Если действует одна переменная сила (то есть ее модуль и направление меняются во времени), то работа по перемещению из точки A в точку B запишется следующим образом:

$$A = \sum_i f_i \Delta l_i = \int\limits_A^B f_l dl \tag{4.4}$$

В декартовой системе координат будет верно следующее:

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} f_y dy + \int\limits_{z_1}^{z_2} f_z dz \tag{4.5}$$

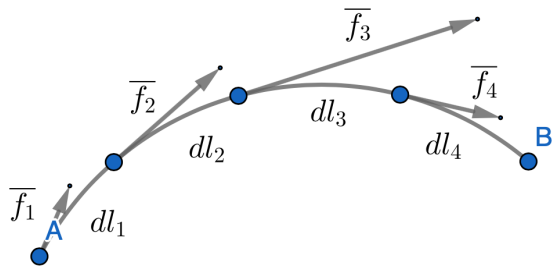

Рис. 4.2. Илюстрация действия переменной силы

Работа силы тяжести

Пусть некое тело находилось в положении 1 на высоте y_1, затем его переместили в положение 2 на высоте $y_2 > y_1$. Заметим, что горизонтальная проекция силы тяжести равна нулю: $F_x = 0$. Работа, совершенная силой тяжести при данном перемещении, равна:

$$A = -\int_{y_1}^{y_2} mgdy = -mg(y_2 - y_1) = -mgh, \tag{4.6}$$

где $h = y_2 - y_1$. Знак минус появляется из-за того, что сила тяжести направляена противоположно перемещению тела (то есть если бы отпустили поднятый над Землей камень, то работа силы тяжести в этом случае была бы положительна).

Работа упругих сил

Сила упругости также может совершать работу. Рассмотрим брусок на пружинке, прикрепленный к стенке. Пусть изначально пружина была нерастянута, координата грани бруска x_1. Затем пружину растянули, и брусок переместился в положение x_2. Работа силы упругости при таком перемещении равна:

$$A = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2). \tag{4.7}$$

Здесь k - коэффициент жесткости пружины. Как и в примере с силой тяжести, работа силы упругости в данном случае отрицательна, так как сила упругости направлена противоположно оси Ox, а вектор перемещения сонаправлен с осью.

Работа центральной силы

Пусть под действием центральной силы $f(r)$ тело переместилось из положения 1 в положение 2. Элементарная работа запишется так:

$$dA = f(r)dr \tag{4.8}$$

Полная работа имеет вид:

$$A = \int_1^2 f(r)dr = U_2 - U_1, \tag{4.9}$$

Величину $U_{2(1)}$ называют потенциальной энергией тела в положении 2 (или в положении 1). Подробнее об этом будет рассказано далее. Заметим, что работа центральной силы не зависит от траектории, по которой перемещалось тела, а определяется исключительно начальным и конечным положением данного тела. Такие силы называют потенциальными. Напротив, непотенциальные силы зависят от траектории, по которой перемещается тело. Простейший пример - сила трения.

Рассмотрим уже знакомый нам закон всемирного тяготения. Гравитационная сила, действующая со стороны точечной массы m_1 на точечную массу m_2, является центральной, а значит, работа гравитационной силы по перемещению массы m_2 из положения 1 в положение 2 может быть вычислена по формуле работы центральной силы:

$$A = -\int_1^2 \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = \gamma m_1 m_2 (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) \tag{4.10}$$

Понятие о потенциальной энергии

Для характеристики потенциальных сил вводится потенциальная энергия. Рассмотрим систему материальных точек. Изменим конфигурацию системы - будем перемещать эти точки по различным траекториям, но так, чтобы в конечном положении расстояния между всеми парами точек остались прежними. Суммарная работа внутренних сил системы равна нулю. Говорят, что потенциальная энергия системы не изменилась. В случае системы двух материальных точек изменение потенциальной энергии системы равно работе, взятой со заком минус:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -A_{12}, \tag{4.11}$$

где A_{12} - работа по перемещению системы из положения 1 в положение 2. Данный факт обобщается и на систему N материальных точек. Рассмотрим конкретные примеры.

а) Сила тяжести. Как мы выяснили, работа силы тяжести $A_{12} = -mg(y_2 - y_1) = -mgh$. Тогда изменение потенциальной энергии:

$$\Delta U = -A_{12} = mgh \tag{4.12}$$

б) Сила упругости. Работа $A_{12} = -\frac{kx^2}{2}$. Изменение потенциальной энергии:

$$\Delta U = \frac{kx^2}{2} \tag{4.13}$$

в) Центральная сила (на примере закона всемирного тяготения). Как мы помним, между двумя точечными массами действует сила

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{4.14}$$

Пусть в конечном состоянии расстояние между точечными массами стало бесконечно большим (так удобно выбрать, чтобы $U_1 = U(r = \infty) = 0$). Тогда $A_{12} = -\int\limits_{\infty}^{r} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \gamma m_1 m_2 \frac{1}{r}$. Изменение потенциальной энергии:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = U(r) - 0 = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r}, \tag{4.15}$$

$$U(r) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r} \tag{4.16}$$

Заметим, что потенциальная энергия зависит от выбора системы координат и так называемого нуля потенциальной энергии. Так, в последнем рассмотренном примере мы положили $U(\infty) = 0$, чтобы упростить запись $U(r)$. Мы могли бы выбрать другой нуль потенциальной энергии и другую систему координат, тогда $U(r)$ записывалась бы иначе.

Понятие о кинетической энергии

Вернемся к рассмотрении элементарной работы по перемещению материальной точки:

$$dA = f_l dl \tag{4.17}$$

f_l - проекция, поэтому можно записать:

$$f_l = f \cos\alpha \tag{4.18}$$

Вспомним второй закон Ньютона:

$$f = ma \tag{4.19}$$

Получаем выражение:

$$dA = ma \cos\alpha dl \tag{4.20}$$

Мы знаем, что тангенциальное ускорение равно:

$$a_\tau = a \cos\alpha \tag{4.21}$$

В итоге имеем:

$$dA = ma_\tau dl = m\frac{dV}{dt}dl = mV\frac{dl}{dt} = mVdV = d(\frac{mV^2}{2}) \tag{4.22}$$

Полная работа по перемещению материальной точки из положения 1 (модуль скорости материальной точки V_1) в положение 2 (модуль скорости V_2) равна:

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} dA = \int\limits_{V_1}^{V_2} d(\frac{mV^2}{2}) = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \Delta T = T_2 - T_1 \tag{4.23}$$

$T = \frac{mV^2}{2}$ - кинетическая энергия. Во-первых, она обладает аддитивностью (например, кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий каждой точки). Во-вторых, значение кинетической энергии зависит от выбора системы координат. В отличие от потенциальной энергии, нуль кинетической энергии выбирать не нужно.

Законы сохранения энергии

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют механической энергией:

$$E_{\text{мех}} = T + U \tag{4.24}$$

Существуют несколько законов сохранения энергии. Общий закон сохранения формулируется так: в любой системе появление энергии обусловлено какой-то причиной. Пока система не отдаст энергию или не приобретет извне, полная энергия системы сохраняется.

В волшебных сказках зачастую ЗСЭ не выполняется (волшебная палочка, ковер-самолет, скатерть-самобранка и т.д.). Не выполняется он и в так называемых вечных двигателях - устройствах, якобы позволяющих генерировать энергию в неограниченных количествах. По факту каждое из этих устройств так или иначе использует внешний источник энергии. Если бы в нашей повседневной жизни закон сохранения не выполялся, это привело бы к нарушению привычных причинно-следственных связей, поэтому с какой-то стороны и хорошо, что данный закон справедлив всегда.

Частным случаем общего закона сохранения энергии является закон сохранения механической энергии. Рассмотрим систему материальных точек. Суммарная кинетическая энергия равна:

$$\Delta T = \sum \Delta T_i = A_{\text{внутр. потенц.}} + A_{\text{внутр. непотенц.}} + A_{\text{внеш.}} \tag{4.25}$$

То есть изменение кинетической энергии может быть обусловлено работой внутренних потенциальных сил, внутренних непотенциальных сил, а также внешних сил. Но $A_{\text{внутр. потенц.}} = -\Delta U$, где U - потенциальная энергия системы, поэтому имеем:

$$\Delta E_{\text{мех}} = \Delta T + \Delta U = A_{\text{внутр. непотенц.}} + A_{\text{внеш.}} \tag{4.26}$$

К внутренним непотенциальным силам относится сила трения, а также любая сила, работа которой зависит от траектории. Выражение (4.26) - закон изменения механической энергии. Если $A_{\text{внутр. непотенц.}} + A_{\text{внеш.}} = 0$, то $\Delta E_{\text{мех}} = 0$, то есть при отсутствии внутренних непотенциальных и внешних сил (либо при их нулевой суммарной работе) механическая энергия системы тел сохраняется. В этом и заключается закон сохранения механической энергии.

Отметим, что выбор системы координат имеет значение: так как от данного выбора зависит величина кинетической и потенциальной энергии, то и выполнение закона сохранения тоже будет зависеть. Также добавим, что наше рассмотрение может быть расширено. Так, если в системе закон сохранения механической энергии не выполняется, то стоит учесть термодинамические эффекты. Если же и это не помогло, то можно привлечь квантовую механику, учесть кинетическую и потенциальную энергию взаимодействующих частиц. Более полное рассмотрение, возможно, приведет к тому, что энергия системы будет сохраняться.

Лекция 5

Твердое тело

Степени свободы

Зададимся следующим вопросом: сколько параметров нужно для однозначного определения положения какого-либо материального тела? Иными словами, сколько степеней свободы есть у тела? Степени свободы - это необходимое количество чисел, которые нужны для описания движения или местоположения тела в пространстве.

Очевидно, для материальной точки достаточно трех параметров. Это могут быть ее декартовы координаты (x, y, z). При некоторых ограничениях, накладываемых на тело, число степеней свободы может уменьшаться. В таких случаях говорят, что на тело наложены кинематические связи. Например, одна степень свободы имеется у бусины, которая двигается вдоль нити или у автомобиля, движущемуся по шоссе - по отметке километрового столба можно однозначно определить его положение. Двумя степенями свободы обладает материальная точка, движущаяся по плоскости - достаточно координат (x, y). Отрезок, движущийся по плоскости, имеет 5 степеней свободы, а не 6, как могло показаться изначально. Действительно, для описания его положения нужно знать координаты его концов, т. е. двух материальных точек - 6 чисел. Однако есть дополнительное условие - в процессе движения расстояние между концами отрезка остается неизменным. Фиксированная длина - это уравнения, связывающее координаты, поэтому у отрезка 5 степеней свободы, а не 6. У треугольника 3 вершины и 3 стороны фиксированной длины, поэтому имеется $9 - 3 = 6$ степеней свободы. Треугольник является жесткой фигурой в том смысле, что мы не можем изменить ни углы, ни длины сторон.

Абсолютно твердое тело

Абсолютно твердое тело (иногда говорят твердое тело, подразумевая абсолютно твердое) - физический объект, расстояние между любыми двумя точками которого остается неизменным в процессе движения. Здесь существенно, что мы можем выбрать любые две точки данного тела, и данное условие должно выполняться. Как и материальная точка, абсолютно твердое тело является моделью. Строго говоря, абсолютно твердых тел не существует, поскольку в процессе движения возникают те или иные деформации, изменяющие расстояния между точками. Но данной моделью удобно пользоваться, что мы и будем делать. Любые три точки абсолютно твердого тела, не лежащие на одной прямой, образуют треугольник, которые не изменяется в процессе движения. Поэтому, как и треугольник, абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы.

Отметим, что в общем случае движение абсолютно твердого тела может быть чрезвычайно сложным. Например, движение мячика, на который действует сила сопротивления воздуха, который сталкивается с различными стенками и отскакивает от них, описывается довольно непростой системой уравнений. В данном курсе мы обсудим два относительно простых вида движений - вращательное и поступательное движения твердого тела.

Вращательное и поступательное движение твердого тела

Вращательное движение

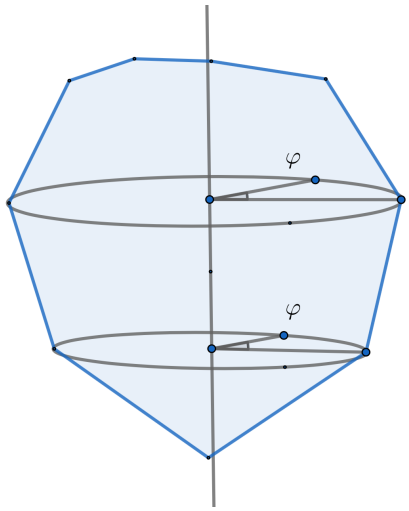

Рис. 5.1. Вращательное движение твердого тела

Вращение твердого тела происходит относительно некоторой оси, называемой осью вращения. Можно построить семейство окружностей с центрами, лежащими на этой оси. Тогда за одно и то же время все точки, выбранные на данных окружностях, повернутся на один и тот же угол φ (см. рис. (3.2)) При вращении тело имеет 1 степень свободы - угол φ. Можно ввести угловую скорость ω, характеризующую быстроту данного поворота:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{5.1}$$

и угловое ускорение β - скорость изменения угловой скорости:

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{5.2}$$

Отметим, что угол, угловая скорость и угловое ускорение одинаковы для всех точек. Линейная скорость и тангенциальное ускорение меняются от точки к точке:

$$V_\tau = \omega R, \tag{5.3}$$

$$a_\tau = \beta R. \tag{5.4}$$

Здесь R - расстояние от выбранной точки до оси вращения.

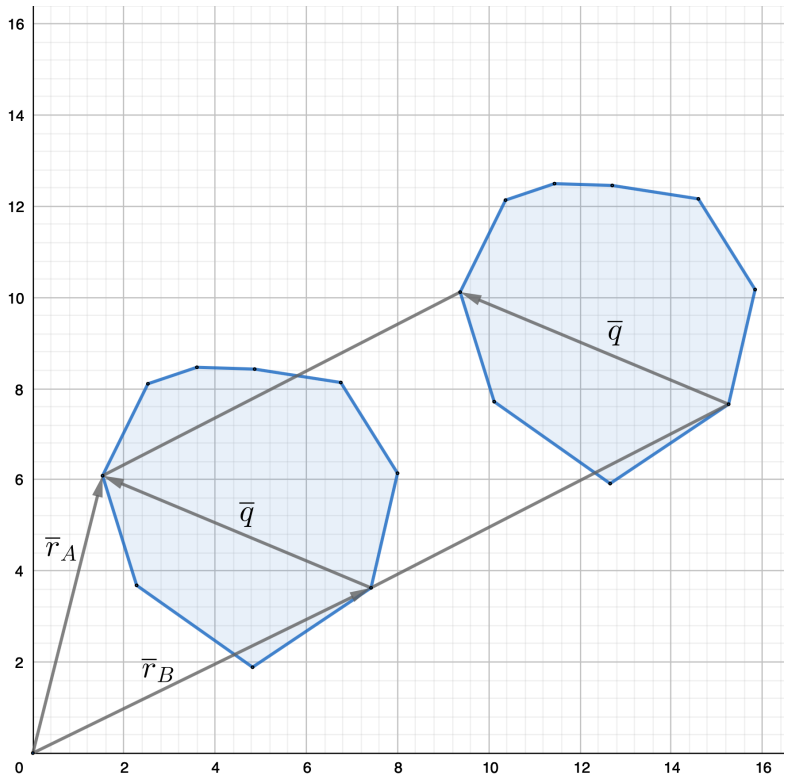

Рис. 5.2. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение

Выберем в твердом теле точки A и B и проведем соответствующие радиус-векторы. Пусть справедливо следующее:

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{q} \tag{5.5}$$

Продифференцируем данное уравнение по времени:

$$\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{q}}{dt} \tag{5.6}$$

$\overline{q}$ - постоянный вектор, при движении тела он не изменяется, поэтому $\frac{d\overline{q}}{dt} = 0$. Тогда получаем:

$$\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} = \overline{V} \tag{5.7}$$

Здесь $\overline{V}$ - скорость поступательного движения. Вновь продифференцировав по времени, получим ускорение поступательного движения:

$$\frac{d^2\overline{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_A}{dt^2} = \overline{a} \tag{5.8}$$

Можно убедиться в том, что поступательное движение имеет три степени свободы - достаточно знать координаты одной точки, все точки подвергаются параллельному переносу без вращений, поэтому по положению одной точки можно судить о положении всего тела.

Любое сложное движение можно представить в виде комбинации поступательного и вращательного движений. Так чтобы переместить отрезок AB из начального положения в конечное, можно сначала осуществить параллельный перенос, а потом повернуть на нужный угол. Второй способ заключается в том, что мы сначала поворачиваем на нужный угол, а затем осуществляем параллельный перенос. Возможны и другие комбинации поступательного и вращательного движений, переводящие отрезок в конечное положение.

Вращательное движение: мгновенная ось вращения и уравнение моментов

Мгновенная ось вращения

Интересной особенностью движения твердого тела является то, что данное движение можно представить как чисто вращательное, но с неподвижной точкой, которая перемещается в пространстве. Можно показать, что в любой момент времени t движение твердого тела представляет собой вращение относительно некоторой оси, которую называют мгновенной осью вращения. Точка, через которую проходит данная ось, является неподвижной. Однако в следующий момент времени $t+dt$ вращения уже может происходить относительно оси, проходящей через другую точку - в этом смысле ось вращения является мгновенной.

В данном курсе мы вначале рассматривали движение материальной точки, затем - движение системы материальных точек. Твердое тело - по сути та же система материальных точек, но несколько более простая, поскольку расстояния между точками не меняются. Поэтому данную систему материальных точек выделяют в особый класс и рассматривают отдельно.

Уравнение моментов

Как мы помним, момент силы может быть записан следующим образом:

$$\overline{M} = [\overline{r} \cdot \overline{f}], \tag{5.9}$$

$$M = rf \sin\alpha \tag{5.10}$$

Суммарный момент силы системы N материальных точек:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + ... + \overline{M}_N \tag{5.11}$$

Разобъем твердое тело на материальные точки и запишем 2 закон Ньютона:

$$\Delta m_i \overline{a}_i = \overline{f}_{i1} + ... + \overline{f}_{in} + \overline{F}_i \tag{5.12}$$

Здесь $\overline{F}_i$ - сумма внешних сил, действующих на i-ю материальную точку. Рассмотрим только тангенциальные составляющие:

$$\Delta m_i \overline{a}_{i\tau} = \overline{f}_{i1\tau} + ... + \overline{f}_{in\tau} + \overline{F}_{i\tau} \tag{5.13}$$

Заметим, что:

$$\overline{a}_{i\tau} = \beta \overline{r_i} \tag{5.14}$$

Скалярно домножим выражение (8.2) на $\overline{r}$ слева:

$$\Delta m_i \beta \overline{r}_i^2 = (\overline{r}_i \cdot \overline{f}_{i1\tau}) + ... + (\overline{r}_i \cdot \overline{f}_{in\tau}) + \overline{M}_i = \mu_{i1} + ... + \mu_{in} + M_i \tag{5.15}$$

Здесь μ_{i1} - величина внутреннего момент силы, действующий со стороны первой частицы на i-ю. Обозначим $\Delta m_i \beta \overline{r}_i^2 = \Delta J_i \beta$, где $\Delta J_i = \Delta m_i \overline{r}_i^2$ - момент инерции. Заметим, что $\mu_{ik} = -\mu_{ki}$ и сложим уравнения (8.18) для материальных точек. Получим:

$$\beta \sum_i \Delta J_i = \sum_i M_i, \tag{5.16}$$

$$\beta J = \sum_i M_i \tag{5.17}$$

Выражение (5.17) называют уравнением моментов для вращательного движения твердого тела. Здесь J - суммарный момент инерции. Момент инерции определяет расположение точечных масс на вращающемся теле. По определению

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \tag{5.18}$$

Нужно помнить, что момент инерции выбирается относительно какой-либо оси вращения, а не точки. Также не стоит забывать, что момент инерции является аддитивной величиной.

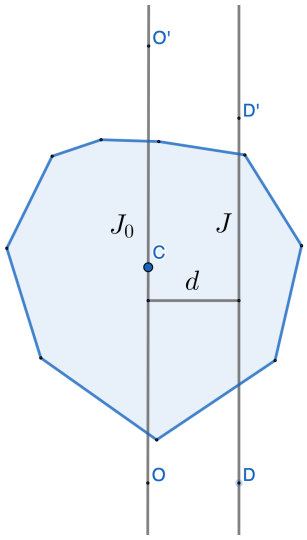

Рис. 5.3. Иллюстрация теоремы Гюйгенса-Штейнера

В ряде практических задач для определения момента инерции бывает полезной теорема Гюйгенса - Штейнера (доказательство будет дано на семинарах): момент инерции тела J относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции J_0 относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями d^2:

$$J = J_0 + md^2 \tag{5.19}$$

Рисунок (5.3) иллюстрирует действие данной теоремы. Момент инерции тела относительно оси DD' равен моменту инерции тела относительно оси OO', проходящей через центр масс C, плюс md^2, где d - расстояние между осями.

Лекция 6

Момент импульса и кинетическая энергия твердого тела

На прошлой лекции мы получили уравнение моментов для вращательного движения твердого тела:

$$\beta J = \sum_i M_i \tag{6.1}$$

Как и для системы материальных точек, для твердого тела можно записать закон изменения момента импульса:

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \sum_i \overline{M_i}, \tag{6.2}$$

где $\overline{L}$ - момент импульса твердого тела. Модуль момента импульса твердого тела равен:

$$L = mVr = J\omega \tag{6.3}$$

J - суммарный момент инерции твердого тела:

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \tag{6.4}$$

Нетрудно видеть, что выражение (6.2) является более общим, нежели (6.1). Продифференцируем (6.3) по времени:

$$\frac{dL}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial J}{\partial t}\omega \tag{6.5}$$

Ясно, что выражение (6.1) следует из (6.2), если $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$.
Получим выражение для работы и кинетической энергии твердого тела. Работа, совершаемая над телом при повороте его на угол $d\varphi$, равна:

$$A = f_\tau dl = f_\tau R d\varphi, \tag{6.6}$$

так как $dl = Rd\varphi$. Кинетическая энергия определяется выражением:

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2} \tag{6.7}$$

Из выражения (6.2) следует условие равновесия твердого тела на неподвижной оси: $\omega = 0$ при $\sum\limits_i M_i = 0$ относительно этой оси. Знаменитая Пизанская башня не упадет, пока линия, проходящая через центр масс и направленная вдоль силы тяжести, пересекает основание башни. Как только наклон башни станет столь велик, что данная линия выйдет за основание, создастся вращательный момент, который опрокинет эту башню.

Таблица 1. Сравнительная характеристика способов описания динамики материальной точки и твердого тела

Материальная точка	Твердое тело
$\overline{r}$	φ
$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt}$	$\beta = \frac{d\omega}{dt}$
m	J
$\overline{F}$	$\overline{M}$
$p = mV$	$L = J\omega$
$\sum_i F_i = ma$	$\sum_i M_i = J\beta$
$T = \frac{mV^2}{2}$	$T = \frac{J\omega^2}{2}$

Колебания. Периодическая функция. Гармонические колебания

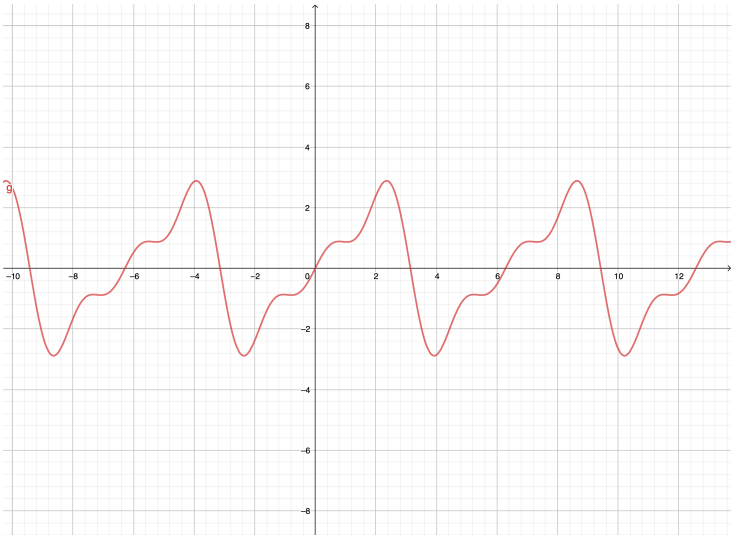

Рис. 6.1. Пример периодической функции

Довольно часто в жизни мы сталкиваемся с периодическими процессами. Для их описания используются периодические функции. Периодическая функция - это функция, удовлетворяющая равенству:

$$f(t) = f(t + T), \tag{6.8}$$

где t - текущее время, T - период, при этом период периодической функции не меняется за время наблюдения. Также вводят частоту колебаний - величину, обратную периоду:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{6.9}$$

Периодические функции могут иметь самые различные формы (см. рис. 6.1). Гармонические колебания - колебания, происходящие по закону синуса или косинуса. Для величины x гармонические колебания могут быть описаны следующей формулой:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{6.10}$$

Величина A - амплитуда колебаний, ω - частота колебаний, аргумент косинуса или синуса $\omega t + \varphi$ называют фазой колебаний, величину φ - начальной фазой.

Не всякие колебания, которые нам встречаются, являются гармоническими. Почему же мы останавливаемся лишь на рассмотрении гармонических колебаний? Во-первых, потому, что колебания в общем виде чрезвычайно сложны, поэтому для их описания используется довольно серьезный математический аппарат. Во-вторых, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье, то есть представить в виде суперпозиции гармонических колебаний с разными фазами, амплитудами и частотами. Знание гармонических колебаний позволяет понять особенности колебаний в общем случае.

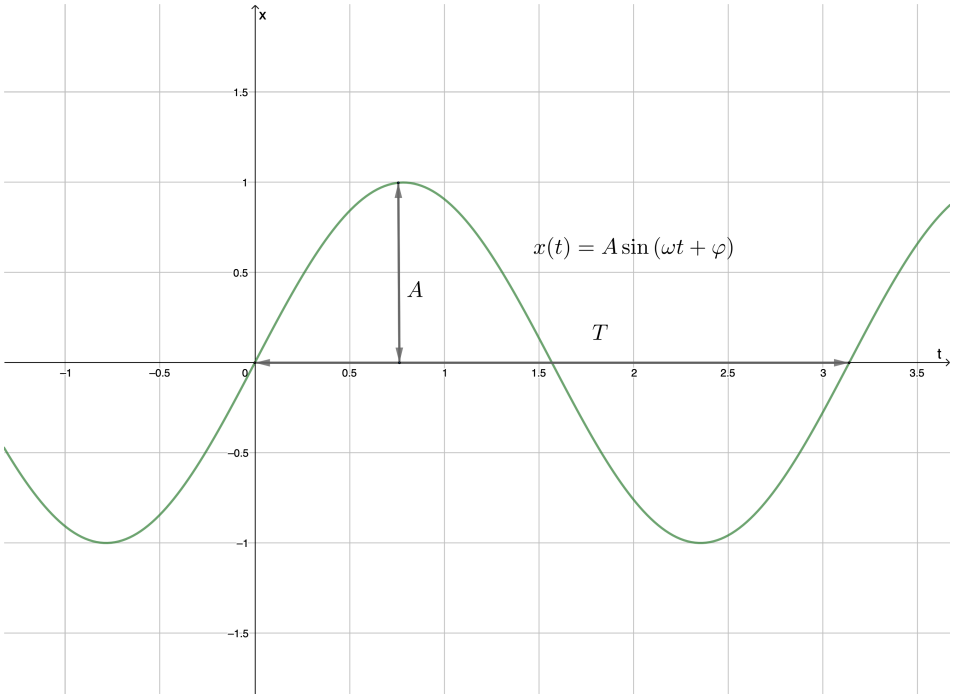

Рис. 6.2. Гармонические колебания

На рис. 6.2 показаны гармонические колебания, происходящие по закону (6.10). Продифференцируем данное выражение по времени:

$$\frac{dx}{dt} = V = \omega A\cos(\omega t + \varphi), \tag{6.11}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) \tag{6.12}$$

Сравнивая полученные выражения с (6.10), имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{6.13}$$

Выражение (6.13) - дифференциальное уравнение 2 порядка. Его решением является закон гармонических колебаний (6.10). Формулу (6.13) называют уравнением гармонических колебаний. Примечательно, что мы не конкретизировали, что такое x - в разных задачах это может быть смещение, электрический заряд, угол и так далее. Если в процессе решения какой-либо задачи вы получили уравнение вида (6.13), то можно утверждать, что в данной задаче будут происходить гармонические колебания. Классический пример гармонических колебаний - колебания груза, закрепленного на пружине, или колебания шарика, подвешенного на нити.

Метод векторных диаграмм

Удобной методом, которой применяется при решении задач на гармонические колебания, является метод векторных диаграмм.

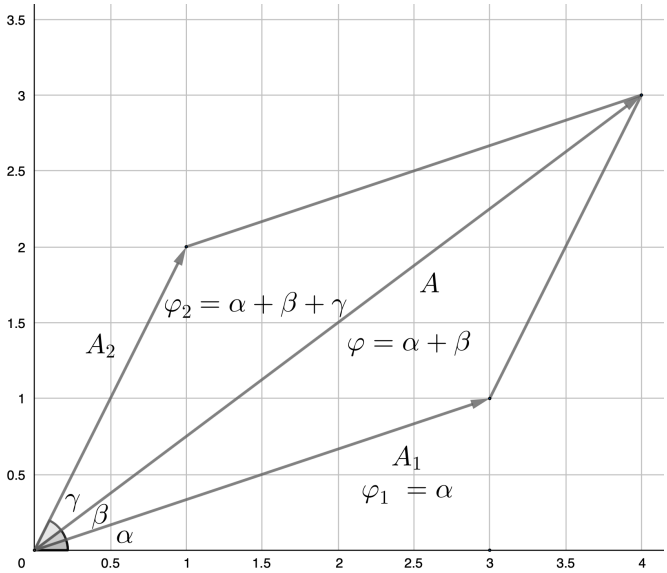

Рис. 6.3. Иллюстрация применения метода векторных диаграмм

Гармонические колебания скалдываются по правилу параллелограмма, если они происходят с одинаковой частотой в одном направлении (см. рис. 6.3). Пусть имеются два колебания, происходящих вдоль одного направления:

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \tag{6.14}$$

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \tag{6.15}$$

Результирующее колебание имеет вид:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{6.16}$$

По теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tag{6.17}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{6.18}$$

Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, $A = A_1 + A_2$ - амплитуда принимает максимальное значение. Пусть теперь $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, $A = A_1 - A_2$ - амплитуда принимает минимальное значение. Для многих колебаний амплитуда будет суммой амплитуд отдельных колебаний:

$$A = \sum_i A_i \tag{6.19}$$

А что произойдет, если складывать колебания с разными частотами? Пусть есть два гармонических колебания с нулевой начальной фазой и одинаковой амплитудой A, происходящие на разных частотах ω_1 и ω_2:

$$x_1(t) = A\sin(\omega_1 t), \tag{6.20}$$

$$x_2(t) = A\sin(\omega_2 t) \tag{6.21}$$

Сложим их:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{6.22}$$

Введем обозначения:

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \tag{6.23}$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{6.24}$$

Уравнение перепишется в виде:

$$x(t) = 2A\cos(\Omega t)\sin(\omega t) = \sin(\omega t), \tag{6.25}$$

$$a(t) = 2A\cos(\Omega t) \tag{6.26}$$

Данные колебания не являются гармоническими, поскольку амплитуда $a(t)$ меняется со временем. Если частоты близки: $\omega_1 \approx \omega_2$, то возникают так называемые биения (см. рис. 6.4). Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ гораздо меньше периода изменения огибающей $T_1 = \frac{2\pi}{\Omega}$, который также называют периодом биений.

В случае $A_1 \neq A_2$ картина несколько меняется (см. рис. 6.5) Амплитуда изменяется по закону косинуса от минимального значения $A_1 - A_2$ до максимального $A_1 + A_2$.

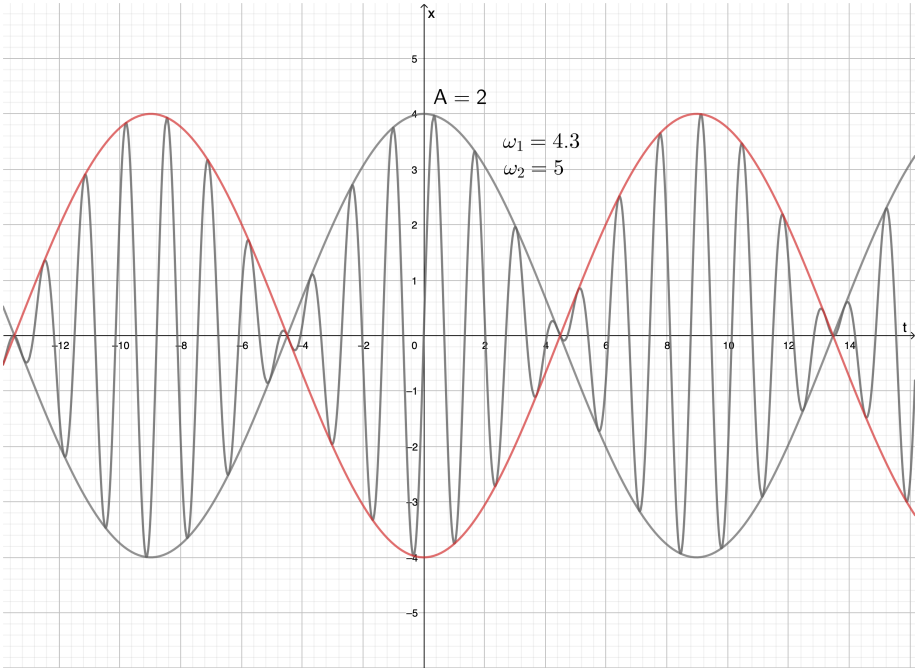

Рис. 6.4. Биения

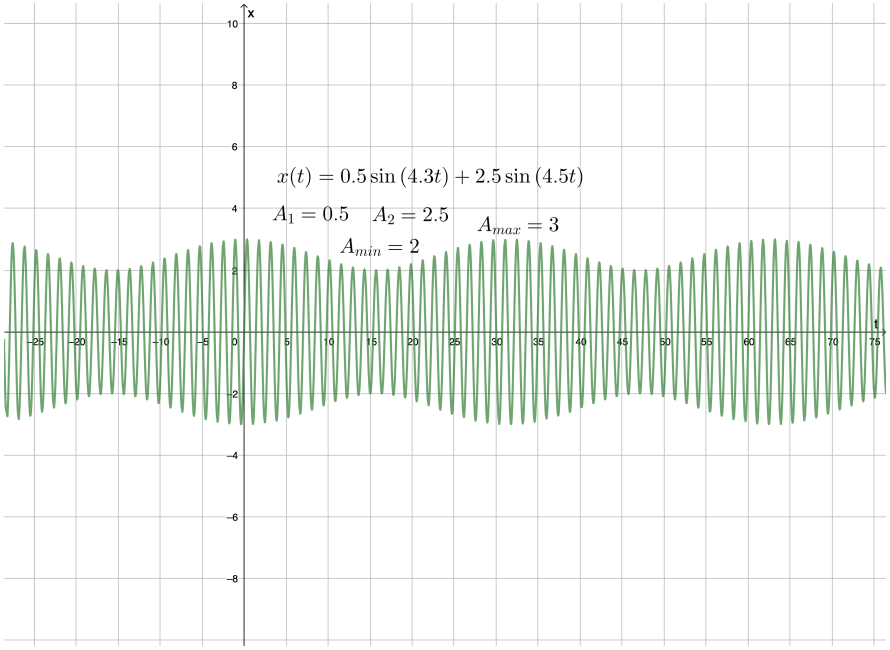

Рис. 6.5. Сложение колебаний с разными частотами и амплитудами

Лекция 7

Взаимно перпендикулярные колебания

Опишем два взаимно перпендикулярных гармонических колебания:

$$x = a\sin\omega t, \tag{7.1}$$
$$y = b\sin(\omega t + \varphi) \tag{7.2}$$

Очевидно следующее: $-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$, то есть суммарный вектор будет лежать в прямоугольнике. Запишем выражения для синуса и косинуса:

$$\sin\omega t = \frac{x}{a}, \tag{7.3}$$
$$\cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{7.4}$$

Опуская дальнейшие алгебраические преобразования, получаем финальное выражение:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi \tag{7.5}$$

Выражение (7.5) представляет собой кривую второго порядка (эллипс). Рассмотрим некоторые частные случаи:
1) $\varphi = 0$, $\sin^2\varphi = 0$, и выражение (7.5) примет вид:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} = 0, \tag{7.6}$$
$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)^2 = 0, \tag{7.7}$$
$$y = \frac{b}{a}x \tag{7.8}$$

То есть при нулевой начальной разности фаз суммарное колебание будет происходить вдоль прямой.
2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\sin^2\varphi = 1$.

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 0 \tag{7.9}$$

То есть конец вектора суммарного колебания лежит на окружности.
3) $\varphi = \pi$. Получаем прямую, как и в первом случае, но наклоненную на 135 градусов, а не на 45. 4) В случае, отличном от 1)-3), получаем эллипс. Как известно, окружность и прямая - частные случаи эллипса.
Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не равны: $\omega_1 \neq \omega_2$, то в результате получаются так называемые фигуры Лиссажу.

Разложение в ряд Фурье

Как известно из математического анализа, любую периодическую функцию $x(t)$ можно разложить в ряд Фурье, то есть представить в следующем виде:

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + ... + A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) + ... \quad (7.10)$$

Довольно часто точное решение можно приблизить решением, записанным в виде ряда Фурье, то есть представить в виде суперпозиции гармонических колебаний с различными амплитудами и начальными фазами и кратными частотами. Для примера рассмотрим последовательность прямоугольных импульсов. Анализ показывает, что вырожение принимает вид:

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t) + ... \quad (7.11)$$

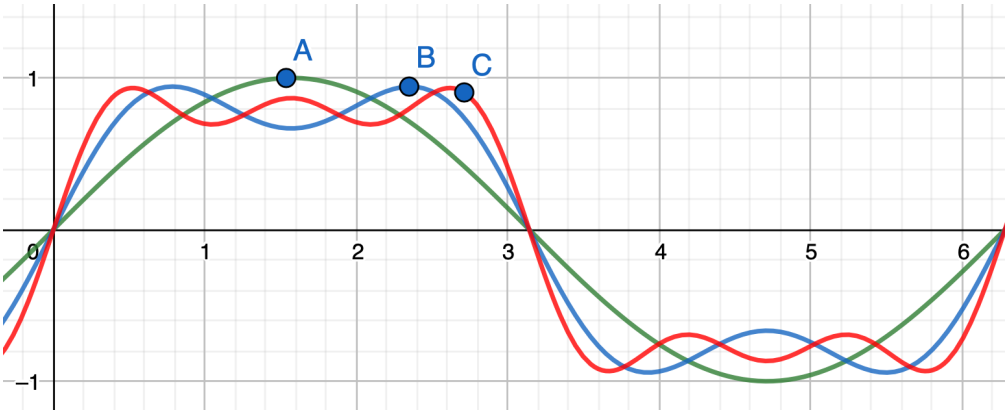

Рис. 7.1. Приближение прямоугольных импульсов с помощью ряда Фурье. Кривая A - взят один член ряда, B - два, C - три члена. Видно, что точность растет с увеличением числа слагаемых

В общем случае ряд Фурье бесконечен, поэтому важно определить, сколько слагаемых из данного ряда нужно взять, чтобы приближение было достаточно точным, но не слишком громоздким. Так, для данного примера одно слагаемое не очень хорошо приближает заданную функцию, два - уже точнее, три - еще точнее. Обратим внимание на то, что амплитуды гармоник уменьшаются: амплитуда первой гармоники - $\frac{4A}{\pi} = B$, амплитуда второй - $\frac{B}{3}$, третьей - $\frac{B}{5}$ и так далее.

Примеры колебательных систем

Механические колебания довольно разнообразны. В жизни мы довольно часто сталкиваемся с колебательными системами. Рассмотрим, например, груз, прикрепленный к пружине. Уравнение колебаний запишется в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (7.12)$$

где m - масса груза, k - жесткость пружины. Как нетрудно видеть, гармонические колебания происходят с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Подобным образом происходят колебания поршня в цилиндре, заполненным газом, а также колебания жидкости в сообщающихся сосудов разной ширины. Мы остановимся подробнее на двух важных моделях - физическом и математическом маятнике.
Физический маятник представляет собой твердое тело, подвешенное на нити или закрепленное так, что точка подвеса находится выше центра масс. Ось вращения проходит через точку подвеса (закрепления). Как мы знаем, момент силы в точке подвеса относительно оси вращения равен нулю. Тогда можно записать:

$$M = -mR\sin\alpha, \tag{7.13}$$

$$J\beta = -mR\sin\alpha, \tag{7.14}$$

$$\sin\alpha \approx \alpha, \text{если угол } \alpha \text{ мал} \tag{7.15}$$

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mR\alpha \tag{7.16}$$

В итоге получаем уже знакомое нам уравнение колебаний. Условие малости угла существенно, оно с хорошей точностью выполняется до углов порядка 5 градусов. Частота колебаний физического маятника $\omega = \sqrt{\frac{mgR}{J}}$. Здесь R - расстояние от точки подвеса до центра масс, J - момент интерции тела относительно оси вращения.
Аналогичным образом рассматривается и математический маятник. Математический маятник - материальная точка, колеблющаяся с малой амлитудой на длинной тонкой невесомой нити. α - угол отклонения от положения равновесия. Уравнение движения математического маятника:

$$ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha, \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0, \tag{7.17}$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ - частота. Знакомая вам со школы формула для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.18}$$

Учтено, что в данном случае момент инерции имеет вид: $J = ml^2$.

Энергия собственных незатухающих колебаний

Обсудим вопросы, связанные с энергией колебаний. Для этого рассмотрим груз на пружине, совершающий гармонические колебания вида:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{7.19}$$

Потенциальная энергия колебаний:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi) \tag{7.20}$$

Кинетическая энергия колебаний:

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) \tag{7.21}$$

Полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной:

$$E = E_p + E_k \tag{7.22}$$

Учтем, что $m\omega^2 = k$ и воспользуемся известными из тригонометрии формулами:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t), \tag{7.23}$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \tag{7.24}$$

Тогда получаем:

$$E_p = \frac{kA^2}{4} - \frac{kA^2}{4}\cos(2\omega t + \varphi), \tag{7.25}$$

$$E_k = \frac{kA^2}{4}(1 + \cos(2\omega t + \varphi)), \tag{7.26}$$

$$E = E_p + E_k = \frac{kA^2}{2} \tag{7.27}$$

То есть кинетическая и потенциальная энергия переходят друг в друга, при это полная энергия при отсутствии диссипативных сил сохраняется.

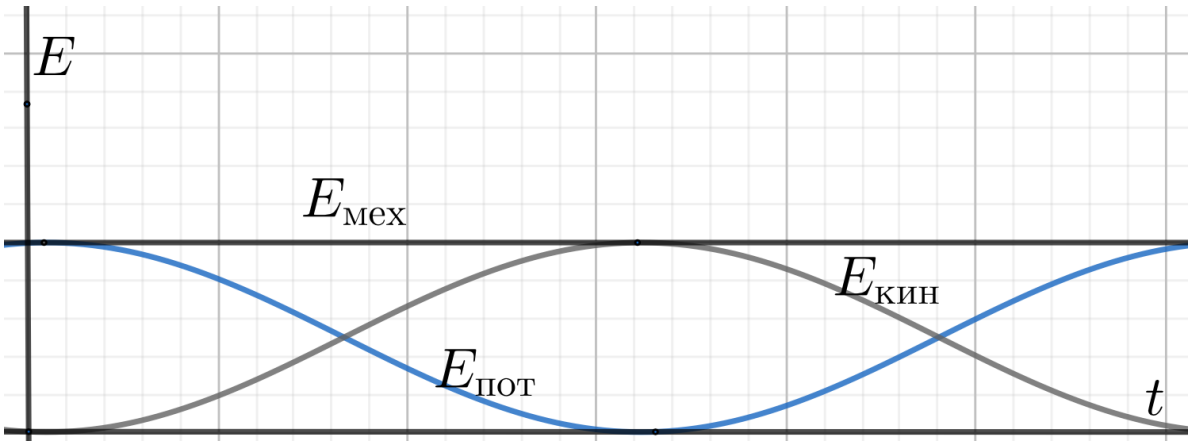

Рис. 7.2. Энергия незатухающих колебаний. С течением времени потенциальная энергия переходит в кинетическую и наоборот, полная механическая энергия сохраняется

Хорошим примером взаимопревращения кинетической и потенциальной энергии являются качели. Действительно, в нижней точке траектории качели движутся наиболее быстро - в этой точке находится максимум кинетической энергии и минимум потенциальной. В верхней точке траектории качели останавливаются - здесь минимум кинетической энергии и максимум потенциальной. Заметим, что период смены энергий в два раза меньше периода качелей.

Затухающие колебания

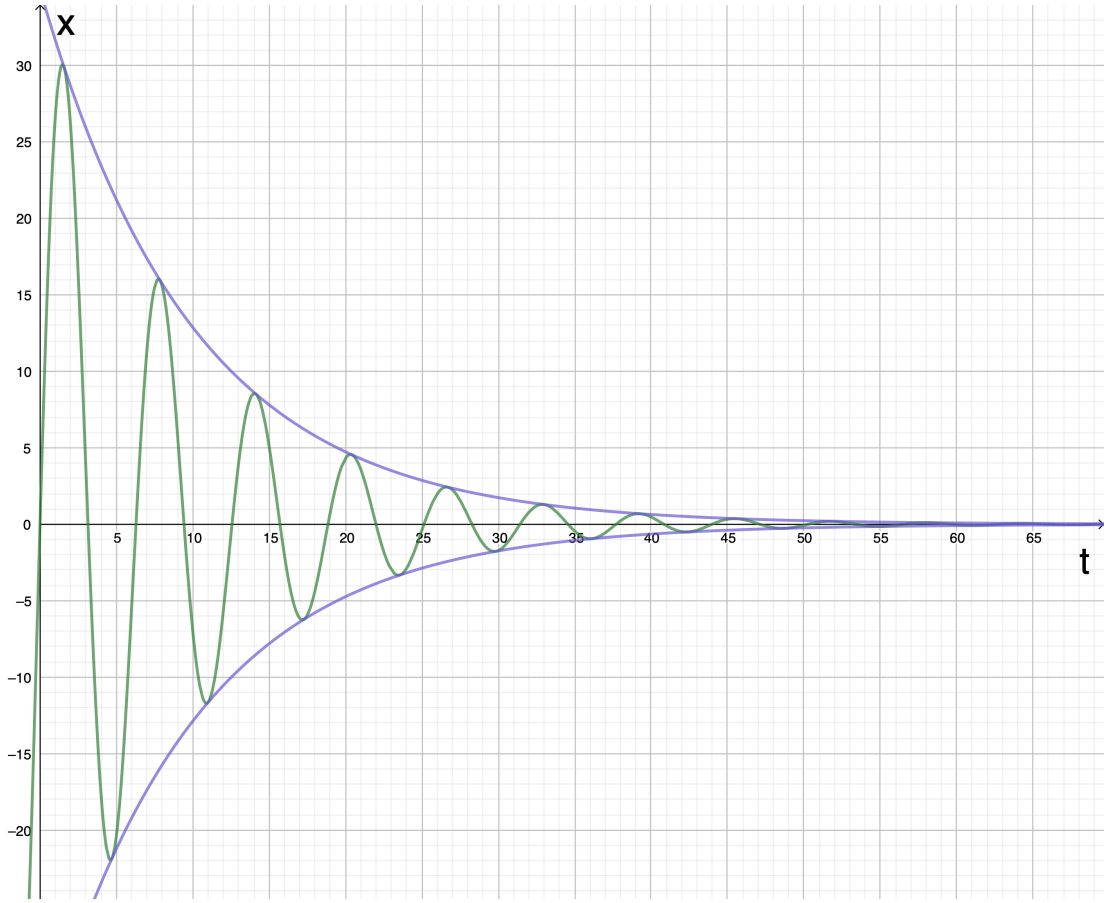

Рис. 7.3. Затухающие колебания

В реальной жизни колебания не продолжаются неограниченно долго - они затухают из-за трения. В отличие от сухого трения, которое мы обсуждали ранее, трение в жидкостях и газах зависит от скорости:

$$\overline{f}_{\text{тр}} = -b\overline{V} \tag{7.28}$$

Рассмотрим колебание груза на пружинке, помещенного в жидкость. В уже привычное для нас уравнение движения войдет сила трения:

$$ma_x = -kx - bV, \tag{7.29}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{7.30}$$

Введем обозначения:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \tag{7.31}$$

$$\frac{b}{2m} = \beta - \text{коэффициент затухания} \tag{7.32}$$

В итоге получаем общий вид уравнения колебаний с затуханием:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = 0 \tag{7.33}$$

Можно проверить, что решением уравнения (7.33) является выражение вида:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin\omega t + \varphi, \tag{7.34}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{7.35}$$

График таких колебаний - синус, модулированный экспонентой (см. рис. 7.3) Очевидно, при таких колебаниях с каждым периодом уменьшается амплитудой. Характеристикой данного вида колебаний является декремент затухания - отношение амплитуд за соседние периоды:

$$\Delta = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \tag{7.36}$$

Логарифмируя данное выражение, получаем характеристику, с которой удобно работать - логарифмический декремент затухания:

$$\delta = ln\Delta = \beta T \tag{7.37}$$

Как мы видим, логарифмический декремент затухания пропорционален коэффициенту затухания. При $\beta = 0$ получаем гармонические колебания, при большом β происходит всего несколько периодов колебаний. При очень большом значении β колебания отсутствуют.

Лекция 8

Вынужденные колебания. Резонанс

У всякой механической системы есть собственная частота колебаний. Например, мы знаем, что полк солдат не переходит мост маршем - это меры безопасности, поскольку если проходить мост "в ногу", то собственная частота колебаний моста может случайно совпасть с частотой колебаний, вызванной проходящей колонной войск, и в результате возникнет резонанс - резкое увеличение амплитуды колебаний, которое может привести к разрушениям. Рассмотрим явления резонанса подробнее.

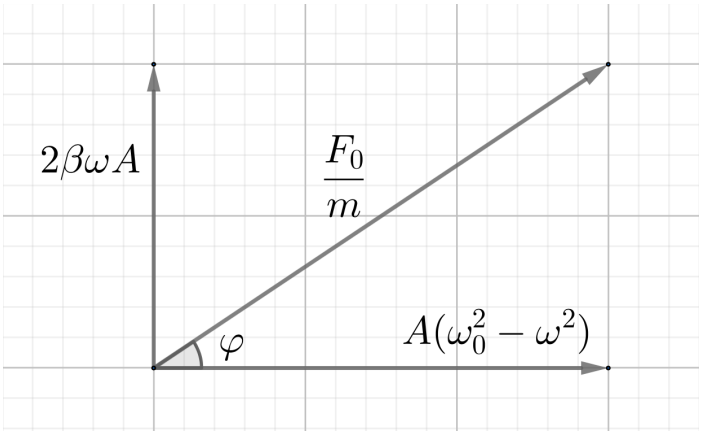

Рис. 8.1. Векторная диаграмма для вынужденных колебаний

Вынужденные колебания - колебания, происходящие под действием периодической вынуждающей силы. Примером вынужденных колебаний могут быть качели (если кто-то вас на них раскачивает). В уже знакомом для нас уравнении колебаний появляется слагаемое, связанное с вынуждающей силой:

$$ma_x = -kx - b\frac{dx}{dt} + F\sin(\omega t + \psi), \tag{8.1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \sin(\omega t + \psi), \tag{8.2}$$

где $\omega_0 = \frac{k}{m}$, $F_0 = \frac{F}{m}$. Рассмотрим гармонические колебания вида:

$$x(t) = A\sin\omega t \tag{8.3}$$

Производные удобно записать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t = A\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \tag{8.4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega\sin\omega t \tag{8.5}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (8.2), получаем:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t + 2\beta\omega A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = F_0\sin(\omega t + \psi) \tag{8.6}$$

Далее воспользуемся методом векторных диаграмм (см. рис. 8.1). По теореме Пифагора получаем:

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 A^2 = F_0^2 \tag{8.7}$$

Выражение для амплитуды и угла запишутся в виде:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{8.8}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \tag{8.9}$$

Как мы видим, амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна частоте вынуждающей силы: $A \propto F_0$. Рассмотрим два предельных случая для частоты:
1) $\omega \to 0$. Тогда $A \to A_0 = \frac{F_0}{\omega_0^2} = \frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
2) $\omega \to \infty$, $A \to 0$.

Отметим, что при увеличении ω A растет. Это означает, что где-то между нулевой и очень большой частотой вынуждающей силы существует максимум. Практика показывает, что при $\omega \to \omega_0$ A резко возрастает. Данное явление называется резонансом. График выглядит следующим образом (см. рис. 8.2). Отметим, что максимум достигается не при $\omega = \omega_0$, а немного раньше. Непосредственно дифференцированием можно установить, что резонансная частота имеет вид:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \tag{8.10}$$

При достаточно малых β отличие резонансной частоты от ω_0 несущественно.

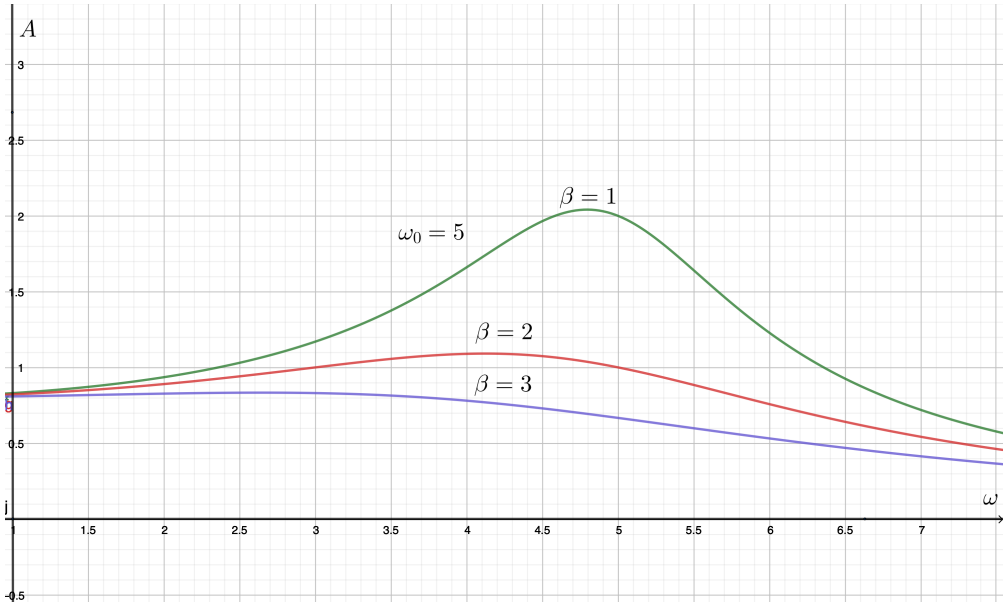

Рис. 8.2. Вид резонансных кривых для различных значений β

Волны

Гармонические волны

Волна - распространение в пространстве какой-либо физической величины. В жизни мы постоянно сталкиваемся со звуковыми волнами - колебаниями газа (воздуха). Помимо звуковых волн, существуют электромагнитные волны - там возникают колебания напряженности электрического и магнитного поля. Существуют гравитационные волны, волны на поверхности воды и т.д. Характерной особенностью волн является то, что колабания происходят как во времени (для фиксированной точки пространства), так и в пространстве (для фиксированного момента времени).

Для возникновения волн необходимо, чтобы свойства среды носили полевой характер, то есть изменялись непрерывно. Например, в сосуде, из которого откачен воздух до вакуума, звуковой волны не будет, так как там нет частиц, которые могли бы колебаться. Изменение параметра в какой-либо точке пространства должно приводить к изменению данного параметра и в окрестностях данной точки. Например, колебания шнура, прикрепленного одним концом к стенке, служат хорошей иллюстраций волны: периодическое воздействие на незакрепленный конец приводит к тому, что шнур принимает синусоидальную форму. Если вместо шнура взять пружину и воздействовать подобным образом, то тоже возникнет волна - волна последовательных уплотнений и разрежений витков.

В дальнейшем мы будем рассматривать гармонические волны, то есть уже устоявшиеся колебания без переходных процессов, связанных с началом распространения возмущения и проч. Вообще говоря, распространение волн является сложным физическим процессом. Например, задачи о волнах, огибающих какие-либо препятствия, имеют довольно громоздкое физическое решение и требуют обширного математического аппарата.

Зафиксировав какую-либо точку в пространстве (например, $x = 0$), мы получаем гармонические колебания:

$$\zeta(0, t) = \zeta_0 \sin \omega t \tag{8.11}$$

В общем случае для акустической волны выполняется:

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \sin\left(\omega(t - \frac{x}{V})\right) \tag{8.12}$$

При решении физических задач важно следить за соблюдением размерности (нельзя складывать яблоки с апельсинами). Отметим, что размерность частоты - обратые секунды, размерность выражения в скобках - секунды, так что синус получается безразмерным, все правильно.

Длина волны. Волновое число

При $x = \text{const}$ $\zeta(x, t)$ представляет собой гармонические колебания с частотой ω, амплитудой ζ_0 и начальной фазой $\varphi = -\frac{\omega x}{V}$. При $t = \text{const}$ $\zeta(x, t)$ тоже представляет собой гармонические колебания, но в пространстве. По аналогии с периодом колебаний во времени можно ввести пространственный период - длину волны.

Длина волны - расстояние между двумя точками волны, разность фаз между которыми равна 2π:

$$\lambda = |x_1 - x_2|, \tag{8.13}$$

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = 2\pi \tag{8.14}$$

Распишем подробнее:

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = |-\frac{\omega x_2}{V} + \frac{\omega x_1}{V}| = \frac{\omega}{V}|x_2 - x_1| = \frac{\lambda\omega}{V} = 2\pi, \tag{8.15}$$

$$\lambda = \frac{2\pi V}{\omega} = VT \tag{8.16}$$

Основными характеристиками волны являются ее период T, частота ω, скорость V. Период и частота зависят от источника волны, скорость - от среды распространения. Например, звук барабана или гитары мы можем узнать, даже находясь за стенкой от источника звука, поскольку частота в разных средах не изменяется, изменяется скорость (и, как видно из (8.16), длина волны, которая, как и скорость, зависит от среды распространения).

Еще одним параметром, используемым для описания волновых процессов, является волновое число. По определению, волновое число равно:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V} \tag{8.17}$$

Тогда получаем следующее:

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \sin(\omega t - kx) = \zeta_0 \sin(\frac{2\pi}{T} - \frac{x}{\lambda}) \tag{8.18}$$

В зависимости от того, какие именно характеристики волного процесса мы хотим узнать, используются правая или левая часть выражения (8.18).

Конкретизируем понятие скорости V. Пусть c - волновой фронт волны. Волновым фронтом называют поверхность постоянной фазы. Тогда можно записать:

$$\omega(t - \frac{x}{V}) = c, \tag{8.19}$$

$$c = \arcsin\frac{\zeta}{\zeta_0} = \text{const} \tag{8.20}$$

Записывая выражение (8.19) в дифференциальной форме, получаем:

$$dt - \frac{dx}{V} = 0, \tag{8.21}$$

$$V = \frac{dx}{dt} \tag{8.22}$$

Как видим, V - это скорость перемещения поверхности постоянной фазы волны (волнового фронта). Поэтому ее называют фазовой скоростью волны.

Волновое уравнение. Виды волн

Выведем волновое уравнение. Запишем $\zeta(x,t)$ в виде:

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \sin(\omega t - kx) \tag{8.23}$$

Найдем частные производные второго порядка по времени и по пространству:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\omega^2 \zeta_0 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 \zeta, \tag{8.24}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -k^2 \zeta_0 \sin(\omega t - kx) = -k^2 \zeta, \tag{8.25}$$

$$\tag{8.26}$$

Сравнивая данные выражения, мы можем записать следующее:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \tag{8.27}$$

Выражение (8.27) называют волновым уравнением. Получение данного дифференциального уравнения при решении какой-либо задачи свидетельствует о том, что в данной задаче будет распространяться волна. Из вида уравнения сразу можно сказать, чему равна фазовая скорость данной волны.

Обсудим различные виды волн. Рассмотрим малый сферический источник, излучающий во всех направлениях. Волновой фронт волны такого типа представляет собой сферу, поэтому волна называется сферической. Удобной математической моделью является плоская волна - ее волновой фронт в каждый момент времени представляет собой плоскость. Такие волны возникают, например, от колебаний шнура. В некоторых случаях (особенно когда концы колеблющегося объекты закреплены) возникает наложение волн, распространяющихся в противоположных направлениях - так называемая стоячая волна. Строячей она называется потому, что распределение максимумов - пучностей, и минимумов - узлов - постоянно во времени и пространстве.

Лекция 9

Гидродинамика. Аэродинамика

Ранее мы рассматривали твердые тела. Для их описания были уместны модель материальной точки и модель абсолютно твердого тела. Теперь мы переходим к рассмотрению жидкостей и газов. По своим свойствам они значительно отличаются от твердых тел. Так, газы очень хорошо деформируемы, жидкости обладают меньшей деформацией. По сравнению с ними, твердые тела практически недеформируемы. Жидкости принимают форму сосуда, в котором находятся, газы полностью заполняют весь объем данного сосуда. Для твердых тел такое поведение нехарактерно. Очевидно, что подобные свойства требуют другого подхода для описания динамики жидкостей и газов.

Давление. Закон Паскаля

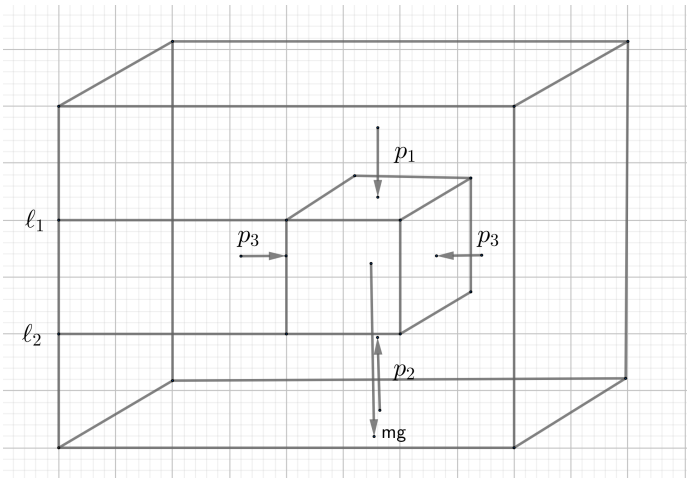

Рис. 9.1. Иллюстрация закона Паскаля

Еще со школы мы знаем такую физическую величину, как давление. Рассмотрим жидкость в статическом состоянии. Выделим некоторый объем V данной жидкости (например, в виде куба) и рассмотрим одну из граней площади S. На эту площадку действует сила давления $\overline{f}$ со стороны невыделенного объема жидкости. Поскольку жидкость находится в равновесии, касательных сил нет - сила действует по нормали:

$$\overline{f} = \overline{f}_{\perp}, \tag{9.1}$$

$$\overline{f}_{||} = 0, \tag{9.2}$$

Давлением называется скалярная физическая величина, по определению равная следующему выражению:

$$P = \frac{f}{S} = \frac{(\overline{f} \cdot \overline{n})}{S}, \tag{9.3}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где $\overline{n}$ - единичный вектор внешней нормали к выбранной площадке. Подобным образом определяется интегральное давление, действующее на оперделенную площадь. Локальное давление в какой-либо точке задается пределом:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} \tag{9.4}$$

Закон Паскаля так же знаком нам со школы: давление, производимое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений (с одинаковой силой) во всех направлениях. Справедливость данного закона легко проверить экспериментально, опустив в жидкость манометр. Изменяя глубину погружения и ориентацию прибора, мы можем убедиться в том, что закон Паскаля выполняется.
Вновь рассмотрим жидкость в равновесии и выделим кубический объем. По закону Паскаля, давление слева равно давлению справа, поэтому его можно не учитывать. Сверху создается давление p_1, снизу - давление p_2 со стороны невыделенного объема жидкости. Необходимо учесть и силу тяжести, действующую на выделенный объем. Плотность жидкости:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{9.5}$$

Здесь и далее под V будем понимать объем, под v - скорость. Система находится в равновесии, поэтому можно записать:

$$Sp_1 + \rho g V - Sp_2 = 0 \tag{9.6}$$

Очевидно, объем можно записать так:

$$V = S(l_2 - l_1) \tag{9.7}$$

В итоге имеем:

$$\rho S(l_2 - l_1)g = S(p_2 - p_1), \tag{9.8}$$

$$\rho g(l_2 - l_1) = p_2 - p_1 \tag{9.9}$$

Если принять $l_1 = 0$, $l_2 = h$, то получим формулу для давления, которую мы будем использовать в дальнейшем:

$$p = \rho g h \tag{9.10}$$

Турбулентное и ламинарное течение. Поле скоростей

В чем разница между течением воды в бурной горной речке и спокойной равнинной реке? В горной речке возникают различные завихрения водяных слоев, слои движутся с разной скоростью, и получается довольно сложная картина течения. Течение жидкости, при котором соседние слои движутся с разной скоростью, называют турбулентным. В широкой равнинной реке нет сложной картины течения - она довольно проста и однородна. Соседние слои движутся с одинаковой скоростью, поэтому достаточно описать один слой, чтобы получить представление о движении остальных. Такое течение называют ламинарным.
От чего зависит тип течения? Практика показывает, что от вязкости. В невязкой

жидкости отсутвует (или очень мало) трение между соседними слоями, поэтому данные слои движутся с одинаковой скоростью. Напротив, в вязкой жидкости трение играет значительную роль, в выбранном сечении жидкости на разных участках будут различные скорости, что приведет к турбулентному течению. Также на характер течения влияет скорость. Низкая скорость характерна для ламинарного течения, высокая - для турбулентного. Если взять систему труб и задать небольшой напор воды, течение будет ламинарным. Увеличением напора (а следовательно, и скорости жидкости) можно превратить ламинарное течение в турбулентное. К турбулетности приводит наличие различных препятствий и неоднородностей. Например, если в ламинарно текущую жидкость поместить камень, вблизи камня возникнет довольно сложная картина завихрений, свидетельствующая о турбулентности. При описании движения жидкостей удобно взять фиксированный элемент жидкости (обычно берется точка или достаточно малый объем данной жидкости) и наблюдать за его динамикой во времени. Траектория такого элемента называется линией тока. Вектор скорости элемента в любой точке линии тока лежит на касательной. Совокупность линий тока для различных выбранных элементов называют полем скоростей $\overline{v}(x, y, z)$. Поле скоростей дает наглядную картину движения жидкости, поэтому даже при анализе сложных гидродинамических систем изображают поля скоростей. Аналогичным образом при необходимости можно построить и поле ускорений $\overline{a}(x, y, z)$.

Трубка тока. Уравнение неразрывности

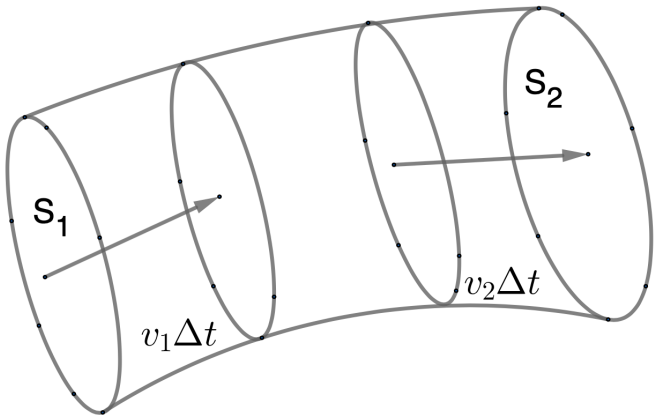

Рис. 9.2. Трубка тока

Часто используемым понятием является трубка тока скоростей - набор близлежащих линий тока, проходящих через два выбранных поперечных сечения. Векторная трубка для поля скоростей называется трубкой тока, так как при установившемся движении она подобна трубе со стенками, внутри которой с постоянным расходом течёт жидкость. Рассмотрим такую трубку. Будем считать жидкость несжимаемой. Площадь поперечного сечения левого конца трубки S_1, правого S_2 (в общем случае эти площади не обязаны совпадать). За время Δt концы трубки немного сместились.

Вышедшая из трубки масса жидкости:

$$\Delta m_1 = \rho \Delta V_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t \tag{9.11}$$

Вошедшая в трубку масса жидкости:

$$\Delta m_2 = \rho \Delta V_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t \tag{9.12}$$

В такой конфигурации системы масса не должна никуда пропадать, следовательно:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2, \tag{9.13}$$
$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 \tag{9.14}$$

В общем случае плотность не является константой, необходимо учитывать сжимаемость жидкости, поэтому можно записать:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \text{const} \tag{9.15}$$

Выражение (9.15) - уравнение неразрыности. Как мы видим, величина $\rho v S$ сохраняется.

Идеальная жидкость. Уравнение Бернулли

Две прицинпиально различные модели, использующиеся в гидродинамике - это идеальная жидкость и вязкая жидкость. Идеальной называется несжимаемая жидкость, в которой отсутствует взаимодействие между слоями. Для идеальной жидкости справедливо уравнение Бернулли. Выведем его.
Рассмотрим трубку тока. Введем декартову систему коорднат. Пусть левый конец трубки имеет площадь S_1, находится на высоте h_1, на него действует сила $\overline{f_1}$ со стороны внешних слоев. Правый конец трубки, соотвественно, описывается параметрами S_2, h_2 и $\overline{f_2}$. За время Δt левый конец трубки переместится на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$, правый - на $l_2 = v_2 \Delta t$. С учетом уравнения неразрывности можно записать:

$$\Delta V_1 = S_1 l_1 = S_1 v_1 \Delta t, \tag{9.16}$$
$$\Delta V_2 = S_2 l_2 = S_2 v_2 \Delta t, \tag{9.17}$$
$$\Delta m_1 = \Delta m_2, \tag{9.18}$$
$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V \tag{9.19}$$

Потенциальная энергия концов трубки тока:

$$U_1 = \Delta m_1 g h_1 = \rho \Delta V g h_1, \tag{9.20}$$
$$U_2 = \Delta m_2 g h_2 = \rho \Delta V g h_2 \tag{9.21}$$

Кинетическая энергия концов трубки тока:

$$T_1 = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2, \tag{9.22}$$
$$T_2 = \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 \tag{9.23}$$

Изменение механической энергии равно:

$$\Delta E = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = \rho g(h_2 - h_1)\Delta V + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)\Delta V \tag{9.24}$$

Как мы знаем, изменение механической энергии равно работе внешних сил. Внешними силами в данном случае выступают силы давления со стороны внешних слоев. Можно записать:

$$f_1 = p_1 S_1, \tag{9.25}$$
$$f_2 = p_2 S_2, \tag{9.26}$$
$$A = f_1 l_1 - f_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t \tag{9.27}$$

Так как $S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V$, то:

$$A = (p_1 - p_2)\Delta V, \tag{9.28}$$
$$\Delta E = A, \tag{9.29}$$
$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \tag{9.30}$$

То есть справедливо выражение:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \tag{9.31}$$

(9.31) - уравнение Бернулли. Еще раз отметим, что оно берется из закона изменения энергии идеальной жидкости. Из него можно извлечь довольно много полезных закономерностей. Например, если $h = \text{const}$, то при увеличении давления в трубе скорость течения падает, а при уменьшении - растет. При постоянном давлении и течении под наклоном на большей высоте жидкость имеет меньшую скорость и т. д. На основе уравнения Бернулли работает пульверизатор. Воздух на высокой скорости прогоняется над резервуаром с жидкостью. В соответствии с уравнением Бернулли, над резервуаром создается пониженное давление. В результате с помощью узкой трубки частицы жидкости устремляются в зону пониженного давления и затем уносятся потоком воздуха - происходит распыление содержимого. На основе уравнения Бернулли работает печь - известно, что для хорошего отвода газов конструкция печи должна предусматривать создание пониженного давления над трубой.

Лекция 10

Гидродинамика. Вязкие жидкости

На прошлой лекции мы подробно обсудили уравнение Бернулли. Данное уравнение применимо только для описания идеальных жидкостей. Теперь рассмотрим движение вязкой жидкости. По определению, это жидкость, в которой присутствует взаимодействие между слоями. Примером вязкой жидкости может служить гудрон, ртуть и даже обыкновенная вода.

Проведем эксперимент. Пусть в вязкую жидкость на некоторую глубину Δz погружена достаточно тонкая доска, прикрепленная к стенке сосуда пружиной. Положим на поверхность жидкости над первой доской вторую доску и будем двигать ее со скоростью v. Сила, действующая на пружину со стороны первой доски, будет равна:

$$F = \eta \frac{v_0}{\Delta z} S, \tag{10.1}$$

где S - площадь сечения доски, v_0 - относительная скорость их движения. η - коэффициент вязкости (характеристика вязкой жидкости). Физика процесса такова: верхняя доска движется под действием внешней силы, это движение передается вязкими слоями жидкости в толщу и доходит до второй доски, которая увлекается верхним слоем и растягивает пружину. В пределе, когда обе доски движутся, имеем:

$$F = \eta \frac{dv}{dz} S \tag{10.2}$$

Формула Пуазейля

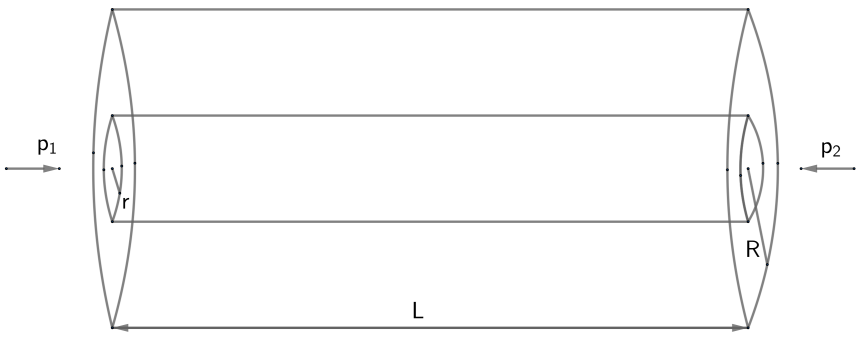

Рис. 10.1. К выводу формулы Пуазейля

Рассмотрим цилиндрическую трубу радиуса R и длины L, по которой движется вязкая жидкость. Из-за вязкости скорость жидкости будет зависеть от выбранного радиуса. Очевидно, в данном случае роль координаты z играет радиальная координата r, формула (10.2) принимает вид:

$$F = \eta \frac{dv}{dr} S, \tag{10.3}$$

где $S = 2\pi rL$. Движение происходит с одной скоростью, поэтому второй закон Ньютона дает:

$$f_1 - f_2 - F = 0 \tag{10.4}$$

Здесь $f_1 = p_1\pi r^2$, $f_2 = p_2\pi r^2$ - внешние силы давления, действующие на концы выделенной трубки тока в трубе. Подставляем известные силы в выражение 10.4, получаем:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{2\pi L\eta} r, \tag{10.5}$$

$$v = \int \frac{p_2 - p_1}{2L\eta} r dr = -\frac{p_1 - p_2}{2L\eta}\frac{r^2}{2} + C \tag{10.6}$$

Константу интегрирования найдем из следующих соображений: при $r = R$ $v = 0$, так как жидкость соприкасается со стенками трубки и не движется. Имеем:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{2L\eta}\frac{R^2}{2}, \tag{10.7}$$

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4L\eta}(R^2 - r^2) \tag{10.8}$$

Выражение (10.8) называют формулой Пуазейля. Из данной формулы видно, что скорость течения вязкой жидкости в трубе изменяется по параболическому закону. Из формулы Пуазейля можно получить, что расход жидкости (изменение массы за единицу времени) Q пропорционален четвертой степени радиуса: $Q \propto R^4$ в случае $L >> R$. Данный факт принимается во внимание при конструировании труб.

Число Рейнольдса

В общем случае расчеты динамики вязкой жидкости чрезвычайно сложны - приходится учитывать локальные взаимодействия, границы и прочее. Зачастую провести непосредственно эксперимент проще, чем выполнять численный расчет. Рассмотрим поток вязкой жидкости, обтекающий небольшой шарик диаметра l, помещенный в эту жидкость вдали от границ. Мы хотим узнать, какой характер будет носить течение.

Для начала обсудим общие принципы расчета явлений с конкурирующими взаимодействиями. Явление называется явлением с конкурирующими взаимодействиями, если существует один параметр, который ускоряет процесс, а также существует другой параметр, замедляющий этот же процесс. Например, если человек идет в горку, и дует попутный ветер, то отношения скорости попутного ветра к крутизне горки может показать нам, насколько легко на нее будет взобраться (попутный ветер "помогает"человеку взбираться на горку; с другой стороны, чем круче горка, тем сложнее подъем). Из этого примера мы видим, что для описания процесса значимым является отношение параметров, а не их абсолютные величины. В геологии конкурирующие взаимодействия приводят к формированию и разрушению пород. В задаче о вязкой жидкости тиким отношением может выступать отношение кинетической энергии потока к работе сил трения. Параметр, описывающий обтекания

тела и характеризующий течение, называется числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho l v}{\eta} \propto \frac{E_{\text{кин}}}{A_{\text{тр}}} \tag{10.9}$$

Как видим, число Рейнольдса зависит от вязкости жидкости η, скорости обтекания шарика потоком v, диаметра шарика l и плотности жидкости ρ. Рассмотрим характерные значения числа Рейнольдса:
1) $Re \leq 1000$ - ламинарное течение. Действительно, в данном случае сила трения довольно велика, поэтому $E_{\text{кин}} << A_{\text{тр}}$, и говорить о турбулентностях не приходится.
2)$Re = 1000...2200$ - неустойчивое ламинарное течение.
3)$Re > 2200$ - турбулентное течение. Как видим, зная одно только значение числа Рейнольдса, мы можем сделать выводы о характере протекания жидкости.

Эффект Магнуса. Подъемная сила

Рассмотрим наклонную плоскость (клин), расположенную на некоторой высоте над поверхностью Земли. Будем скатывать с этого клина твердые тела различной массы и формы (шары, цилиндры и прочее). Вопреки ожиданиям, при падении они не будут двигаться по параболе, как материальная точка. Некоторые из этих тел могут и вовсе в процессе своего движения оказаться под клином после падения с него. В чем же здесь дело?

Дело в том, что воздух тоже обладает вязкостью. Слои воздуха обтекают вращающееся тело и увлекаются этим телом, если оно вращается с довольно большой угловой скоростью. Скорость каких-то точек тела увеличивается за счет действия вязких слоев, каких-то - уменьшается (см. рис). В итоге (как мы знаем из уравнения Бернулли - некоторые выводы можно применять и к вязким жидкостям и газам) наличие разных линейных скоростей приводит к различным давлениям, затем разность давлений приводит к появлению равнодействующей силы давления, которая и сносит твердые тела, падающие с клина. Данное явление называется эффектом Магнуса.

Заметим, что это довольно часто встречающийся эффект. Без него не обходится ни одна партия по настольному теннису, ни один футбольный матч. На все закрученные мячи или шары в той или иной степени действует сила, возникающая вследствие эффекта Магнуса.

В заключение нашего изучения гидро- и аэродинамики рассмотрим подъемную силу, действующую на крыло самолета. Обтекания крыла воздушным потоком сверху отличается от обтекания снизу, так как контур крыла неоднородный. Вследствие разности давлений создается подъемная сила. В реальности нужно еще создать завихрения за крылом, которые будут увеличивать подъемную силу в процессе полета. Современные самолеты (особенно истрибительная авиация) способы летать на больших высотах, где потоки воздуха уже довольно сильно разрежены, поэтому приходится создавать очень сложные конструкции крыла самолета, чтобы поддерживать достаточное значение подъемной силы.

Термодинамика и молекулярная физика: круг рассматриваемых явлений. Основные параметры

Перейдем к новому разделу. Теперь предметом разговора будут термодинамика и молекулярная физика. Термодинамика - аксиоматическая наука, изучающая термодинамические макроскопические процессы. Она оперирует такими понятиями, как объем, температура, давление. Изучает закономерности тепловой формы движения материи и связанные с ней явления. Термодинамическая форма движения материи - хаотическое (броуновское) движение. Например, маленькая крупинка будет двигаться в жидкости произвольным образом, испытывания соударения с большим количеством молекул одновременно. Основные законы термодинамики могут быть установлены непосредственно из эксперимента. В отличие от термодинамики, молекулярная физика оперирует такими понятиями, как масса молекулы, скорость молекулы, описывает характер соударений между молекулу. Эта наука опирается на теоретическое обоснование, а не на экспериментальное, и описывает микроскопические процессы.

Рассмотрим характерные величины для воздуха при нормальных условиях. Нормальными условиями называются температура $t = 25$ градусов по Цельсию и атмосферное давление $p = 747$ мм.рт.ст. (миллиметров ртутного столба). Итак, при нормальных условиях в 1 см^3 воздуха содержится $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Средняя скорость молекул $v_{\text{ср}} = 500$ м/с; время между двумя столкновениями $t \approx 10^{-5}$ с. Это означает, что происходит 10^9 столкновений в секунду.

Заметим, что термодинамика изучает только равновесные состояния или медленные процессы. Рассмотрим цилиндр с поршнем, под поршнем находится газ. Резко ударим по поршню - появятся два типа молекул - "быстрые"и "медленные". "Быстрые"молекулы появятся в результате взаимодействия с поршнем, который передаст им значительный импульс. Рано или поздно под поршнем установится равновесие за время, которое называется временем релаксации. Как правилло, релаксационные процессы происходят по экспоненциальному закону. При установлении равновесия возникают различные переходные процессы, которые являются предметом обсуждения физической кинетики, в термодинамике они не обсуждаются. Поршень можно перемещать вниз и по-другому - скажем, можно насыпать на него крупинки столь медленно, чтобы система после каждого малого смещения поршня успевала приходить в состояние равновесия. Такой процесс называют квазиравновесным, или квазистатическим. Именно такие процессы могут обсуждаться в термодинамике.

Отметим, что любая модель действует в определенных рамках. Строго говоря, подробное описание движения малых частиц может дать только квантовая механика. Термодинамика описывает процессы, происходящие в макроскопических телах, и не претендует на описание микромира.

Температура. Общее начало термодинамики

Температура - физическая величина, определяющая степень нагретости тела. Данное определение не лишено недостатков - так, определение степени нагретости не лишено субъективизма. Человеку, пришедшему с морозой улицы в прохлодную комнату, будет казаться, что там очень тепло. Поэтому нужен некий универсальный

метод, с помощью которого мы сможем измерить температуру. Измерение невозможно без термодинамического равновесия. Что это такое?

Пусть два макроскопических тела приведены в контакт. Рано или поздно заканчиваются макроскопические процессы, и данные тела переходят в состояние теплового равновесия. Считаем, что нет химических реаций и деформаций, нет внешних воздействий. Любая изолированная или замкнутая термодинамическая система рано или поздно приходит в состояние термодинамического равновесия. В этом случае говорят, что находящиеся в данной системе тела имеют одинаковую температуру. Изолированную систему не так просто получить. Примеромн могут служить термос (в нем нет обмена энергией с окружающей средой) или сосуд Дьюара, в котором хранится жидкий азот. Приведенные выше рассуждения позволяют нам сформулировать общее начало термодинамики: какого бы не было начальное состояние тел изолированной системы, в конце концов в ней установится термодинамическое равновесие, в котором прекратятся все макроскопические процессы. Данное утверждение иногда называют еще нулевым началом термодинамики.

Приведем примеры перехода в равновесное состояние. Пусть есть сосуд с двумя отсеками, разделенными перегородкой. В одной половине находится жидкость, в другой - вакуум. Убираем перегородку, тогда жидкость вскипает и испаряется. Спустя время релаксации обнаруживаем в системе либо жидкость с насыщенным паром, либо только пар. Получили равновесную однородную систему, состояние которой не меняется. Еще один пример - стакан чая с кусочком сахара. Рано или поздно сахар растворится, и мы получим однородную систему. Отметим, что время релаксации определяется нечетко. Причина заключается в том, что описание большого числа молекул подчиняется законам теории вероятностей, поэтому возможны флуктуации, например, средней скорости относительно положения равновесия. Понятно, что время релаксации будет "сбиваться"от процесса к процессу.

Еще раз подчеркнем, что термодинамическое равновесие предполагает как механическое, так и химическое равновесие всех частей системы. Если по каким-либо причинам данного равновесия нет (например, в процессе течения химической реакции), то температуры тел в системе будут различными. Заметим, что температура - макроскопический параметр, то есть данное понятие справедливо только для очень большого ($\approx 10^{23}$) числа молекул. Нельзя измерить температуру, скажем, десяти молекул - это лишено всякого смысла.

Кратко обсудим способ измерения температуры. Пусть у нас есть тело 1, тело 2 и термометр C. Приведем в контакт тело 1 с термометром и тело 2 с термометром. $t_1 = t_2$, если $t_1 = t_C$ и $t_2 = t_C$. Основное требование к термометру - он не должен изменять температуру исследуемых тел. Существуют различные температурные шкалы: Цельсия, Фаренгейта, абсолютная термодинамическая шкала и другие. При измерениях температуры главное, чтобы измерительный прибор не зависел от способа измерения температуры.

Лекция 11

Идеальный газ. Газовые законы и уравнение состояния

Интенсивные и экстенсивные параметры

Процедура перехода термодинамической системы из состояния 1 в состояние 2 не играет роли - не влияет на макроскопические параметры. Набор макроскопических параметров, их взаимосвязь описываются так называемым уравнением состояния. Традицонно в термодинамике ограничиваются рассмотрением двух типов параметров - экстенсивные и интенсивные. Примерами экстенсивных параметров могут выступать объем, масса, энергия. Они относятся ко всей системе в целом, аддитивны. Допустим, $m_{\text{системы}} = m_1 + m_2$ для системы из двух тел. Примерами интенсивных параметров являются температура, плотность, давление. Данные параметры относятся к макроскопической области и не обладают аддитивностью: $t_{\text{системы}} \neq t_1 + t_2$, если в системе два тела.

Понятие идеального газа

Идеальный газ - газ, который подчиняется законам идеального газа. Является моделью, как материальная точка или абсолютно твердое тело. Существует как экспериментальное описание идеального газа, так и теоретическое (с точки зрения молекулярной структуры). Мы остановимся на экспериментальном. Рассмотрим способ экспериментального определения газовых законов. Для измерения объема, давления и температуры нам необходим сосуд с поршнем. Между дном сосуда и поршнем находится исследуемый газ. Для измерений в сосуд помещаются термометр (определяем T) и барометр (определяем p). Зная геометрические размеры сосуда, мы можем найти объем газа по простой формуле: $V = Sl$. Снизу помещается нагреватель, чтобы при необходимости сообщать газу количество теплоты Q. В экспериментах фиксируется p, T или V, затем снимается зависимость между двумя оставшимися параметрами. При этом очень важно, чтобы масса газа в процессе эксперимента оставалась постоянной.

Основные газовые законы

Основные газовые законы, несомненно, известны вам еще со школы. Вспомним их.

1) Закон Бойля-Мариотта: в изотермическом процессе ($T = \text{const}$) $pV = \text{const}$

2) Закон Гей-Люссака: в изобарическом процессе ($p = \text{const}$) $\frac{V}{T} = \text{const}$. Отметим, что при малых температурах и объемах в некоторой окрестности нуля поведение газа перестает описываться прямой.

3) Закон Шарля: в изохорическом процессе ($V = \text{const}$) $\frac{p}{T} = \text{const}$.

Как было сказано в определении, идеальный газ должен соответствовать всем трем газовым законам.

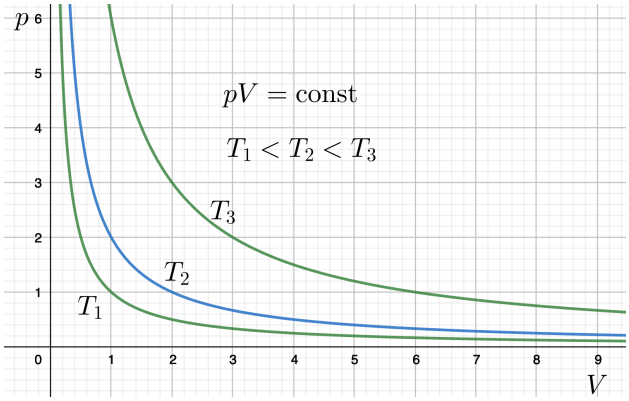

Рис. 11.1. Закон Бойля-Мариотта

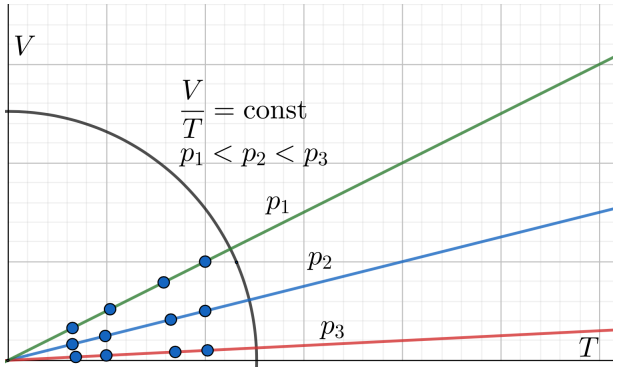

Рис. 11.2. Закон Гей-Люссака. Область с прямыми в выделенной окрестности вблизи нуля нефизична

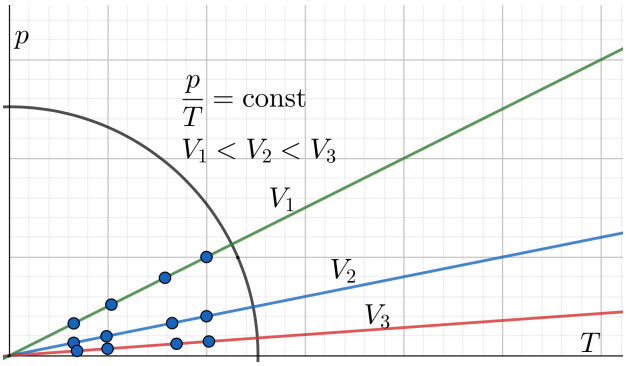

Рис. 11.3. Закон Шарля. Область с прямыми в выделенной окрестности вблизи нуля нефизична

Уравнение состояния идеального газа

Обобщенный газовый закон - уравнение состояния идеального газа. Рассмотрим следующий процесс на $p - V$ диаграмме:

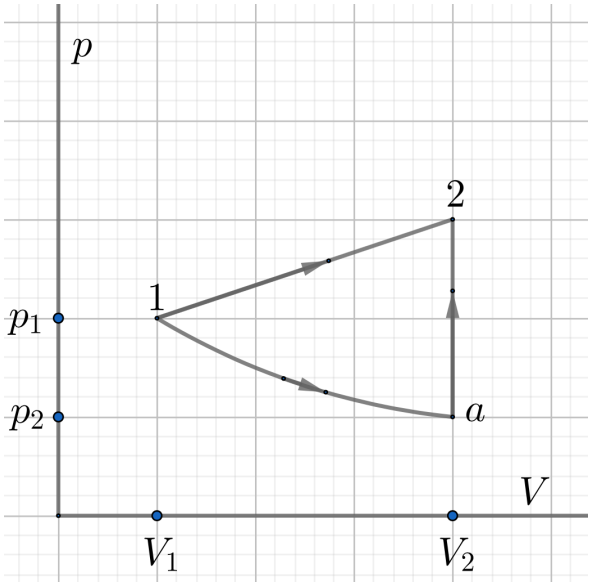

Рис. 11.4. К выводу уравнения состояния идеального газа

Имеем:

$$p_1V_1 = p_aV_a, \tag{11.1}$$

$$\frac{p_a}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{11.2}$$

Учтено, что в процессе $1 - a$ $T = \text{const}$, а в процессе $a - 2$ $V = \text{const}$. Исключая из этой системы p_a, мы получаем:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \tag{11.3}$$

То есть при $m = \text{const}$

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \tag{11.4}$$

Пусть N - число молекул в объеме V, тогда:

$$N = \nu N_A, \tag{11.5}$$

где ν - количество вещества (ед. измерения - моль), $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ - число Авогадро.

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} - \text{постоянная Больцмана} \tag{11.6}$$

Здесь R - универсальная газовая постоянная. Можно показать, что:

$$\frac{pV}{T} = \nu \frac{p_0V_0}{T_0} = \nu R, \tag{11.7}$$

где $p_0 = 747$ мм.рт.ст., $T_0 = 25°\text{C}$ - так называемые нормальные условия. $\nu = \frac{m}{\mu}$, где μ - молярная масса газа. Окончательно имеем:

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} R \tag{11.8}$$

Мы получили уравнение Клапейрона - Менделеева. Его можно переписать в виде:

$$p = \frac{\nu N_A}{V}\frac{RT}{N_A} = nkT, \tag{11.9}$$

где $n = \frac{N}{V}$ - концентрация молекул. Выражение (11.9) было получено экспериментально.

Идеальный газ с точки зрения микроскопической теории

Вывод формулы давления идеального газа в микроскопической теории

Теперь рассмотрим теоретические аспекты идеального газа. Зададимся вопросом: как вывести формулу идеального газа с помощью микроскопической теории? Для начала заметим, что наш вывод будет базироваться на четырех аксиомах:
1) Кинетическая энергия газа много больше потенциальной: $W_{\text{кин}} >> W$
2) Соударения абсолютно упругие
3) Молекулы - материальные точки
4) Газ изотропный (то есть его свойства не зависят от направления. В нашем случае это сводится к тому, что оси Ox, Oy, Oz равноправны)
Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, в котором движутся молекулы идеального газа. Будем использовать декартову систему координат. Рассмотрим молекулу, которая движется вдоль оси Ox и сталкивается со стенкой. Стенка сообщает молекуле импульс $\Delta p = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$. Как мы уже знаем, изменение импульса равно импульсу силы:

$$F\Delta t = \Delta p \tag{11.10}$$

Отсюда получаем силу воздействия стенки на молекулу:

$$F = \frac{2mv_x}{\Delta t} \tag{11.11}$$

Пусть l - длина стороны параллелепипеда вдоль оси Ox, тогда получаем:

$$\Delta t = \frac{2l}{v_x}, \tag{11.12}$$

$$F = \frac{mv_x^2}{l} \tag{11.13}$$

Суммарная сила давления на стенку создается соударениями всех молекул со стенкой:

$$F_\Sigma = \frac{m}{l}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + ... + v_{xN}^2) \tag{11.14}$$

Определим среднее значение квадрата проекции скорость на ось Ox следующим образом:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum v_{xi}^2}{N} \tag{11.15}$$

Тогда искомая сила давления перепишется в виде:

$$F = \frac{m}{l}\overline{v_x^2}N \tag{11.16}$$

Очевидно, что

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{11.17}$$

В силу того, что газ изотропный, имеем:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} \tag{11.18}$$

Для силы давления и самого давления можно записать:

$$F = \frac{m}{l}N\frac{\overline{v^2}}{3}, \tag{11.19}$$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m}{lS}N\frac{\overline{v^2}}{3}, \tag{11.20}$$

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\frac{m\overline{v^2}}{2} = nkT \tag{11.21}$$

Из последнего полученного выражения следует, что

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT \tag{11.22}$$

То есть кинетическая энергия идеального газа может быть получена по формуле:

$$W_{\text{кин}} = \frac{3}{2}kT \tag{11.23}$$

Данное выражение справедливо для идеального газа, имеющего три степени свободы (одноатомный идеальный газ). В приведенном случае степени свободы - поступательное движение вдоль осей Ox, Oy, Oz декартовой системы координат. Более общий случай выходит за рамки рассматриваемого курса. Так, в статистической физике доказывается, что на одну степень свободы приходится кинетическая энергия $W = \frac{kT}{2}$ - так называемая теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы. Из этого выражения видно, что температура - мера средней кинетической энергии тела.

Закон Дальтона

Часто на практике приходится иметь дело не с чистыми газами, а со смесями газов. Примером такой смеси может служить атмосферный воздух, в состав которого входят азот, кислород, угликислый газ, различные инертные газы и примеси. Для смеси разреженных газов справедлив закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в смесь. Уравнение Клапейрона - Менделеева перепишется следующим образом:

$$p_1 + p_2 + ... + p_N = (\frac{m_1}{\nu_1} + \frac{m_2}{\nu_2} + ... + \frac{m_N}{\nu_N}\frac{RT}{V}) \tag{11.24}$$

Здесь $p_1, p_2, ..., p_N$ - соответствующие парциальные давления; $\nu_1, \nu_2, ...\nu_N$ - молярные массы газов. Отметим, что закон Дальтона справедлив, когда газы достаточно разреженные. Иными словами, каждый из газов в смеси не "знает"о существовании других газов в сосуде.

Работа и энергия

Как мы уже поняли, макроскопические характеристики термодинамической системы определяются ее микроскопическими характеристиками. В механике закон сохранения энергии справедлив при действии консервативных сил (нет трения и деформаций). При наличии диссипативных сил возникают потери энергии, "включается"тепловое движение тел. Подчеркнем, что тепловое движение - это беспорядочное движение молекул, теплота - энергия данного хаотического движения.

Пусть некий макроскопический предмет поступательно движется с постоянной скоростью $\overline{v_0}$ (здесь и далее черта сверху - обозначение векторных величин, а не средних значений). Рассмотрим молекулу внутри тела, которая в данный момент времени движется со скоростью $\overline{v_i}$. Суммарная скорость $\overline{u_i}$ данной молекулы относительно неподвижного наблюдателя определяется правилом параллелограмма:

$$\overline{u_i} = \overline{v_i} + \overline{v_0} \tag{11.25}$$

Пользуясь известной из геометрии теоремой косинусов, кинетическую энергии молекулы мы можем записать в виде

$$\frac{m_i u_i^2}{2} = \frac{m_i v_0^2}{2} + \frac{m_i v_i^2}{2} + m v_i v_0 \cos\alpha, \tag{11.26}$$

где α - угол между векторами $\overline{v_i}$ и $\overline{v_0}$. Суммарная кинетическая энергия рассматриваемого тела равна

$$W_{\text{кин}} = \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i v_0^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_i m_i v_i v_0 \cos\alpha_i \tag{11.27}$$

Последнее слагаемое в правой части выражение равно нулю, поскольку из-за хаотичности движения и большого числа молекул для любой произвольно выбранной молекулы с $\cos\alpha_i$ найдется молекула с $\cos\beta_i = -\cos\alpha_i$, из-за чего слагаемые при суммировании попарно сократятся. В итоге имеем:

$$W_{\text{кин}} = \sum_i \frac{m_i v_0^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{M v_0^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{11.28}$$

Первое слагаемое - это внешняя энергия макроскопического движения тела (которая рассматривалась в механике). Второе - так называемая внутренняя кинетическая энергия тела (суммарная кинетическая энергия входящих в тело молекул).

С внутренней потенциальной энергией все несколько сложнее. Рассмотрим сосуд с газом, мысленно разделим его "перегородкой" на две половины. Суммарная потенциальная энергия газа станет равна $W = W_1 + W_2 + W_{12}$, где W_1 - энергия

взаимодействия молекул в левой части сосуда, W_2 - в правой части. W_{12} - энергия взаимодействия молекул между левой и правой частью вблизи "перегородки". Как видим, в общем случае внутренняя потенциальная энергия не является аддитивной. Однако, обычно $W_{12} << W_1, W_2$, поскольку область, в которой взаимодействуют молекулы из правой и левой частей, сравнительно небольшая, а силы взаимодействия являются короткодействующими. Таким образом, внутреннюю потенциальную энергию можно считать аддитивной. Как правило, $W_{\text{кин}} = f(T)$, а $W_{\text{потенц}} = f(V)$. Тогда суммарная внутренняя энергия $U = f(T, V)$. В модели идеального газа внутренней потенциальной энергией пренебрегают по сравнению с кинетической. Процесс обмена внутренними энергиями соприкасающихся тел, не сопровождающийся совершением работы, называется теплообменом.

Как мы помним из механики, работа тела $\delta A = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V$. Мы не можем записать dA вместо δA, поскольку с математической точки зрения работа не является полным дифференциалом - это функция процесса, а не функция состояния системы (в отличие от внутренней энергии $U(T, V)$). Термодинамическая система совершает работу только в том случае, когда она меняет свой объем. Например, если в результате какого-то процесса над газом в сосуде с поршнем поршень сдвинулся. $\delta A = -\delta A_{\text{внеш. сил}}$, поэтому можно говорить как о работе, совершенной термодинамической системой, так и о работе, совершенной над термодинамической системой внешними силами (например, если газ сжали поршнем). В общем случае работа равна интегралу следующего вида:

$$A = \int p(V)dV \tag{11.29}$$

Для изобарного процесса $p = \text{const}$, и работа $A = p(V_2 - V_1)$. Геометрически работа в процессе $1 - 2$ равна площади под графиком процесса $1 - 2$ в координатах $p - V$. Работа за цикл равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций.

Лекция 12

Первое начало термодинамики

Как мы выяснили на предыдущих лекциях, тепловое движение всегда хаотическое. Любое нехаотическое движение тепловым являться не будет. Для описания термодинамических систем важную роль играет первое начало термодинамики: теплота, подводимая к термодинамической системе, идет на совершение работы этой системой над внешними телами и на изменение внутренней энергии системы. Формула имеет следующий вид:

$$\delta Q = dU + \delta A \tag{12.1}$$

Здесь $U = U(T, V)$ - внутренняя энергия. Она является функцией состояния системы. Количество теплоты Q и работа системы над внешними телами A зависят от взаимодействия термодинамической системы с внешней средой, не являются функциями состояния системы. Это функции процесса, поэтому математически некорректно записывать дифференциал dQ - вместо этого пишут малое приращение δQ. Для различных процессов между точками 1 и 2 Q_{12} и A_{12} будут меняться, U_1 и U_2 останутся неизменными. Далее мы покажем, что невозможно провести периодический процесс, единственным результатом которого будет совершение работы. Если система вернулась в исходное состояние и отдала столько же теплоты, сколько получила, то $U_1 = U_2$, $Q_1 = Q_2$, $A = 0$.

Рассмотрим первое начало термодинамики применительно к различным изопроцессам.
1) Изотермический процесс: $T = \text{const}$. $dU = 0, \delta Q = \delta A = pdV$
2) Изохорический процесс: $V = \text{const}$. $\delta A = 0, \delta Q = dU$. Примером изохорического процесса является нагревание воды в чайнике.
3) Изобарический процесс: $p = \text{const}$. $\delta Q = dU + pdV$
4) Адиабатический процесс: $\delta Q = 0$. $dU = -pdV$. Экспериментально адиабатический процесс довольно трудно реализовать - требуется теплоизоляция системы от внешней среды. На $p - V$ диаграмме линии адиабат напоминают изотермы, но идут несколько круче последних. Адиабатические процессы позволяют непосредственно измерить изменение внутренней энергии.

Теплоемкость

Введем важнейшее для термодинамики понятие - понятие теплоемкости. По определению, теплоемкость тела равна количеству теплоты, которое нужно сообщить этому телу, чтобы изменить его температуру на один градус (Цельсия или Кельвина):

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \tag{12.2}$$

Помимо полной теплоемкости на практике активно используют молярную теплоемкость (теплоемкость 1 моль вещества): в этом случае $C = \frac{\delta Q}{\nu dT}$, а также удельную теплоемкость (теплоемкость 1 грамма вещества): $C = \frac{\delta Q}{m dT}$. Отметим, что теплоемкость является табличной величиной, характеристикой вещества. Ее можно найти

в справочнике. В хорошем справочнике даются теплоемкости веществ при разных температурах. Строго теплоемкость описывается методами квантовой механики - данная наука позволяет описать теплоемкости в том числе и в областях фазовых переходов.

В газе теплоемкость зависит от процесса. Заметим, что теплоемкость может принимать любые значения:

$$-\infty \leq C \leq \infty \tag{12.3}$$

1) Адиабатический процесс: $\delta Q = 0$. Но $dT \neq 0$, поэтому $C = 0$.
2) Изотермический процесс: $T = \text{const}$. $\delta Q \neq 0, dT = 0$, следовательно, $C = \pm\infty$. Знак теплоемкости зависит от знака δQ, то есть от того, получает ли тело теплоту или же отдает ее.
3) Изохорический процесс: $V = \text{const}$. $\delta A = 0$, $\delta Q = dU$, $\frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = C_V$, где C_V - теплоемкость газа в изохорическом процессе. Тогда имеем:

$$\delta Q = C_V dT + PdV \tag{12.4}$$

Данным выражением удобно пользоваться при решении задач.
4) Изобарический процесс: $p = \text{const}$. Пусть C_p - теплоемкость в изобарическом процессе, тогда получаем:

$$C_p = C_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{12.5}$$

Напомним, что для 1 моль газа уравнение Менделеева - Клапейрона можно записать в виде:

$$V = \frac{RT}{p} \tag{12.6}$$

Тогда для 1 моль газа справедлива формула:

$$C_p - C_V = R \tag{12.7}$$

Полученное выражение называют также формулой Майера. Запишем еще несколько полезных формул. Для описания адиабатических процессов часто пользуются величиной

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \tag{12.8}$$

Здесь γ - показатель адиабаты. В процессе решения задач внутренняя энергия часто записывается в виде:

$$U = \frac{i}{2}RT, \tag{12.9}$$

где i - число степеней свободы ($i = 3$ для одноатомного газа, $i = 5$ для двухатомного и т.д.) Поделим правую и левую части выражения (12.7) на C_V. Получаем:

$$\gamma - 1 = \frac{R}{C_V}, \tag{12.10}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{12.11}$$

Последнее выражение также довольно часто используют на практике.

Сделаем несколько замечаний относительно степеней свободы газа. Одноатомный газ имеет 3 степени свободы, связанные с независимым движением вдоль осей декартовой системы координат. Двухатомный газ имеет уже 5 степеней свободы - к трем поступательным добавляются две вращательные (возможны независимые вращения вдоль оси, соединяющей атомы, а также перпендикулярно этой оси). В случае двухатомного упругого газа добавляются еще две колебательные моды - итого 7 степеней свободы.

Работа газа в изопроцессах

Напомним, что работа газа определяется следующим образом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV \tag{12.12}$$

Получим формулы для работы газа в конкретных изопроцессах.
1) Изотермический процесс: $T = \text{const}$. Будем рассматривать 1 моль газа. Тогда:

$$p = \frac{RT}{V}, \tag{12.13}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln V|_{V_1}^{V_2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = Q \tag{12.14}$$

2) Изохорический процесс: $V = \text{const}$. $\delta A = 0$. Поэтому $A = 0$ - работа не совершается.
3) Изобарический процесс: $p = \text{const}$. $A = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$.
4) Адиабатический процесс: $\delta Q = 0$. $\delta A = -dU$. В свою очередь, $dU = C_V dT$. Имеем:

$$A = -\int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V(T_1 - T_2) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2). \tag{12.15}$$

Некоторые демонстрации термодинамических экспериментов

Рассмотрим демонстрации нескольких показательных физических экспериментов.
1) Изучим модельный пример анизотропного газа. Примером может служить атмосферный воздух - из-за наличия силы тяжести несмотря на хаотическое движение молекул существует выделенное направление - ось Oz, вдоль которой направлено ускорение свободного падения.
2) Возьмем две колбы с жидкостью. В одной налито чуть больше, в другой - чуть меньше. Начнем нагревать колбы снизу. Очевидно, термодинамическая система в каждой колбе состоит из жидкости и пара. Жидкость испаряется и переходит в пар. В какой-то момент начинается процесс интеснивного испарения - жидкость закипает. Спустя некоторое время пар становится насыщенным, и гранца между жидкостью и паром исчезает. Причем по понятным причинам граница исчезает

раньше в той колбе, где было налито меньше жидкости. При выключении подогрева наблюдаем обратный процесс - появляется видимая граница между жидкостью и газом, пар конденсируется в жидкость. Испарения и конденсация - примеры фазовых переходов (из жидкости в газ и из газа в жидкость, соответственно). В физике существует множество других фазовых переходов, рассмотрение которых выходит за рамки данного курса.
3) Загадка: может ли закипеть горячая вода, если её поливать холодной водой? Оказывается, может. Будем нагревать снизу колбу с жидкостью. Доведем жидкость до кипения, затем выключим подогрев, перевернем колбу. Кипение прекратится. Начнем поливать жидкость холодной водой - удивительно, но она снова начнет кипеть. В чем же тут дело? Будем называть насыщенным пар, находящийся в термодинамическом равновесии с жидкостью того же состава. Давление насыщенного пара является функцией концентрации молекул и температуры: $p_{\text{нас. пара}} = f(n, T)$. Известно, что при уменьшении температуры давление насыщенного пара также уменьшается. При охлаждении колбы $T < T_{\text{кипения}}$, но и давление насыщенного пара падает. В итоге жидкость начинает кипеть при меньшей температуре.
4) Термодинамика имеет относительно древнюю и интересную историю. Так, в начале 19 века Наполеон вел войны с Англией. Французская эскадра терпела поражение за поражением - парусный флот проигрывал тяжелым паровым броненосцам англичан. Тогда Сади Карно - сын министра Наполеона - решил создать паровые машины и поставить их на французские корабли, чтобы победить. В 1824 году вышла его книга "О двигательной силе огня". В ней содержались современные основы термодинамики. Интересно, что из неверных исходных положений (предполагалось существование теплорода - невесомого флюида, являющегося причиной тепловых явлений) были получены термодинамически правильные результаты, которые актуальны и на сегодняшний день.

Рассмотрим действие паровых машин. Одной из первых была паровая машина Уатта. Для ее работы необходим паровой котел или аналогичный резервуар. Расширяющийся пар давит на поршень, движение которого путем различных механических приспособлений передается главному валу с маховиком. Пар из цилиндра выпускается в атмосферу. Еще одной паровой машиной является двигатель Стирлинга. Как будет показано далее, тепловые машины работают по циклам. Цикл Стирлинга состоит из двух изобар и двух изотерм. В отличие от известного цикла Карно, он нашел широкое практическое применение. Двигатель Стирлинга может работать от любого источника тепла, а не только от сжигания топлива. Он состоит из источника тепла, рабочего тела - воздуха, толкающего поршень, а также холодильника - атмосферы или специальных охлаждающих ребер.

Лекция 13

Распределение молекул по модулю скорости

Мы уже знаем, что тепловое движение - это хаотическое движение большого числа молекул. Кажется логичным, что какие-то молекулы будут двигаться чуть быстрее остальных, а какие-то - чуть медленнее. Из-за большого числа молекул некорректно говорить о какой-либо одной скорости молекул, так как фактически скорости находятся в некотором диапазоне скоростей. Здесь и далее мы будем говорить о скорости, имея в виду ее модуль и не интересуясь направлением. Говорят, что скорости молекул подчиняются определенному распределению. Пусть в сосуде находятся N молекул, dv - некий интервал скоростей (например, от v_1 до $v_1 + dv$), dN - число молекул со скоростями из интервала dv. Тогда, если взять достаточно малый dv, можно считать, что $dN \propto dv$. Положим также, что при заданном dv интервал $dN \propto N$. Действительно, чем больше молекул в сосуде, тем больше из них будет молекул со скоростями из заданного интервала. Но $dN \neq Ndv$, поскольку для разных зависимостей N от v будут разные коэффициенты пропорциональности. В итоге выражение для dN принимает вид:

$$dN = Nf(v)dv, \tag{13.1}$$

где $f(v)$ - функция распределения молекул по скоростям. Она была определена Максвеллом, поэтому распределение молекул по скоростям называют также распределением Максвелла. Отметим, что функция распределения определяется в рамках статистической физики и не определяется в молекулярно-кинетической теории. Она записывается следующим образом:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{kT}\right) \tag{13.2}$$

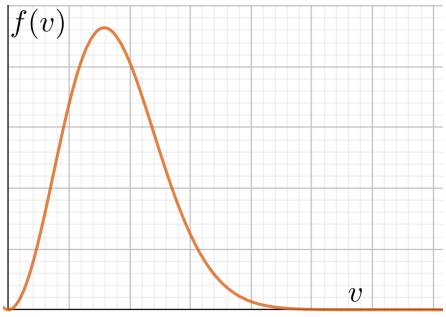

Рис. 13.1. Распределение Максвелла

График функции имеет вид, представленный на рисунке 13.1. Отметим, что площадь под графиком зависимости $f(v)$ от v записывается в виде:

$$S_{12} = \frac{N_{12}}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv \tag{13.3}$$

Здесь N_{12} - число молекул со скоростями из интервала (v_1, v_2). Можно показать, что средняя кинетическая энергия имеет вид:

$$\overline{W}_{\text{кин}} = \int_0^\infty \frac{mv^2}{2} f(v)dv \tag{13.4}$$

Наиболее вероятная скорость - это скорость, соответствующая максимуму функции распределения молекул по скоростям. Она находится из уравнения $\frac{df(v)}{dv} = 0$ и равна

$$v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{13.5}$$

Заметим, что вид $f(v)$ в значительной мере определяется температурой. С изменением T изменяется и функция распределения. Из рисунка 13.2 видно, что с увеличением температуры максимум распределения уменьшается, а само распределение сдвигается вправо. Наиболее вероятная скорость, очевидно, увеличивается.

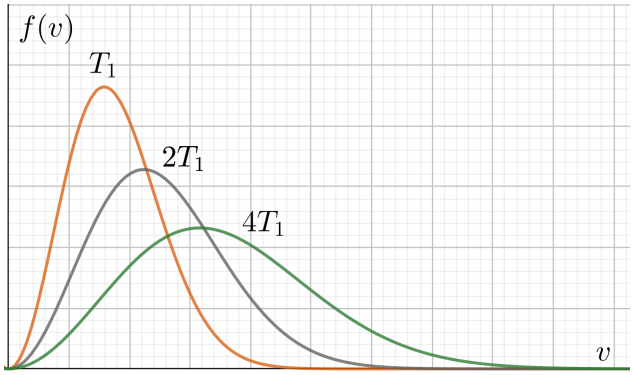

Рис. 13.2. Вид распределения Максвелла при различных температурах

Анизотропный газ. Барометрическая формула

Далеко не всегда свойства рассматриваемого газа одинаковы по всем направлениям. Такой газ называют анизотропным. Примером анизотропного газа может служить атмосферный воздух. В поле силы тяжести появляется выделенное направление - ось Oz. Рассмотрим слой атмосферного воздуха на высоте Δz над поверхностью Земли. Будем считать, что средняя кинетическая энергия $W_{\text{кин}} \propto kT$, потенциальная энергия $\Delta U = mgz$. Тогда отношение потенциальной энергии к кинетической:

$$\frac{\Delta U}{kT} = \frac{mgz}{kT} \tag{13.6}$$

С высотой это отношение стремительно меняется: при $z = 1$м $\frac{\Delta U}{kT} = 10^{-4}$; при $z = 5$км $\frac{\Delta U}{kT} = 0,6$. Выведем барометрическую формулу. Рассмотрим слой атмосферного воздуха толщиной dz, находящийся на высоте z от поверхности Земли. Снизу на данный слой оказывают давление $p + dp$ нижележащие атмосферные слои, сверху

давление p оказывают верхние слои атмосферы. Это согласуется с тем фактом, что давление убывает с высотой. Мы знаем, что давление столба воздуха:

$$dp = -\rho g dz \tag{13.7}$$

Плотность ρ может быть получена из уравнения Менделеева - Клапейрона:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\nu}{RT} \tag{13.8}$$

В итоге получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g dz}{RT} \tag{13.9}$$

Молярную массу воздуха ν, ускорение свободного падения g и универсальную газовую постоянную R считаем константами. Заметим, что $R = k \cdot N_A$, $\mu = m \cdot N_A$, поэтому мы можем записать:

$$\frac{\mu}{RT} = \frac{mN_A}{kN_AT} = \frac{m}{kT} \tag{13.10}$$

Далее имеем:

$$d(\ln p) = d(-\frac{mgz}{kT}), \tag{13.11}$$

$$\ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{mgz}{kT} \tag{13.12}$$

Здесь $p = p_0$ при $z = 0$ - давление у поверхности Земли. Окончательно получаем формулу:

$$p = p_0 \exp(-\frac{mgz}{kT}) \tag{13.13}$$

Выражение (13.13) называют барометрической формулой. Она показывает, как именно изменяется давление атмосферного газа с высотой. Так как $p(z) \propto n(z)$, то аналогичное выражение можно записать и для концентрации молекул:

$$n = n_0 \exp(-\frac{U(z)}{kT}) \tag{13.14}$$

Формула (13.14) была получена Больцманом.

Тепловые машины

Тепловая машина - любое устройство, преобразующее энергию тепла в механическую энергию. На первый взгляд может показаться, что отличной тепловой машиной является граната. Нас будут интересовать тепловые машины, которые работают по циклам, то есть проходят через одни и те же состояния в процессе своей работы, поэтому граната в качестве тепловой машины не годится. Любая тепловая машина состоит из трех частей: нагревателя с температурой T_1, рабочего тела и холодильника с температурой T_2. Рабочее тело получает теплоту от нагревателя, совершает

некоторую работу, остатки теплоты передаются холодильнику. Важное замечание: мы считаем, что $T_1 = \text{const}$ и $T_2 = \text{const}$, то есть нагреватель - бесконечный резервуар тепла, а холодильник - бесконечный резервуар холода. В качестве холодильника во многих экспериментах используется атмосфера, в качестве нагревателя - резервуар теплой воды.

Выберем две произвольные точки 1 и 2 на $p - V$ диаграмме и рассмотрим цикл $1 - 2 - 1$. В процессе $1 - 2$ в систему было подведено количество теплоты $Q_1 = U_2 - U_1 + A_1$. В процессе $2 - 1$ от системы было отведено количество теплоты $Q_2 = U_1 - U_2 + A_2$. Суммарная работа газа за цикл $A = A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2$, то есть работа за цикл равна разности переданного системе и израсходованного системой количеств теплоты. Характеристикой эффективности тепловой машины служит коэффициент полезного действия (КПД) η. По определению, он равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{13.15}$$

Из полученного выражения следует невозможность создания вечного двигателя: так как $Q_2 \neq 0$, то $\eta < 1$. КПД тепловых машин, используемых на практике, очень малы: так, КПД классического автомобильного бензинового двигателя с принудительным искровым зажиганием составляет от 20 до 30 %, дизельный двигатель дает КПД 35 - 40 %.

Интересный факт: если взять цикл тепловой машины (на $p - V$ диаграмме он проходится по часовой стрелке - тогда $A > 0$) и обратить его - начать проходить против часовой стрелки, то мы получим холодильную машину. Рабочее тело совершает в данном случае отрицательную работу: оно забирает энергию у холодильника и передает нагревателю.

Второе начало термодинамики. Цикл Карно

Второй закон (или, как еще говорят, второе начало) термодинамики существует в различных формулировках. Рассмотрим две классические формулировки: одна из них принадлежит Клаузиусу, другая - Томсону. Отметим, что приведенные ниже формулировки эквивалентны, и можно пользоваться любой из них.
Формулировка Клаузиуса: теплота не может самопроизвольно передаваться от холодного тела к горячему. Ключевое слово здесь - самопроизвольно, то есть без совершения работы и протекания химических реакций.
Формулировка Томсона: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет охлаждения теплового резервуара. То есть данная формулировка запрещает создание вечного двигателя второго рода.
Выше мы показали, что КПД тепловых машин действительно меньше единицы. Как получить максимальный КПД? Частично на этот вопрос отвечает теорема Карно: КПД обратимых машин больше КПД необратимых машин. Значит, нужно использовать циклы. Но циклы бывают разные: известны циклы Стирлинга, Дизеля, Карно. Ниже мы убедимся в том, что наибольший КПД имеет цикл Карно.

Цикл Карно $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ состоит из двух изотерм и двух адиабат. Пусть T_1 - температура нагревателя, T_2 - температура холодильника. Очевидно, $T_1 > T_2$.

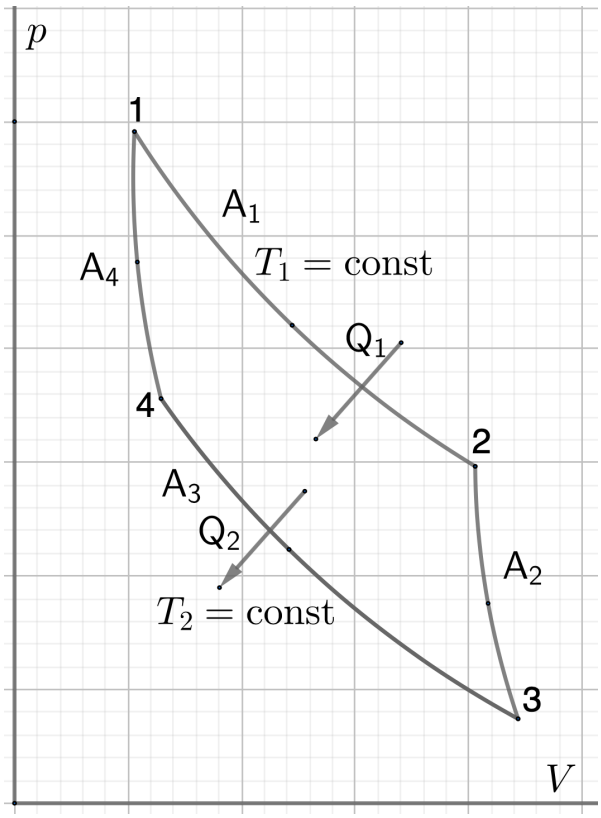

Рис. 13.3. Цикл Карно

Рассмотрим все этапы данного цикла:
1) Изотерма $1-2$. Рабочее тело совершает работу A_1, получает тепло Q_1 от нагревателя, причем $Q_1 = A_1$, так как процесс изотермический.
2) Адиабата $2-3$. Рабочее тело совершает работу A_2, при этом тепло не подводится и не отводится (адиабатический процесс).
3) Изотерма $3-4$. Совершается работа A_3 над телом, тело отдает тепло Q_2 холодильнику, причем $Q_2 = A_3$.
4) Адиабата $4-1$. Совершается работа A_4 над телом, тепло не подводится и не отводится, в итоге рабочее тело возвращается в исходную точку 1 - цикл завершен. При этом можно показать, что $A_4 = A_2$.

Суммарная работа за цикл:

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = A_1 - A_3 = Q_1 - Q_2 \tag{13.16}$$

Для того, чтобы понять, почему именно цикл Карно имеет максимальный КПД среди циклов, введем понятие энтропии. Энтропия S примечательна тем, что ее можно вводить различными способами. Например, с помощью знаменитой формулы Больцмана:

$$S = k \ln \omega \tag{13.17}$$

Здесь k - постоянная Больцмана, ω - статистический вес: число микросостояний, реализующих данное макросостояние. Данное определение энтропии вводится в статистической физике. В нашем курсе мы будем использовать определение энтропии,

связанное с приведенными теплотами. Вспомним первое начало термодинамики:

$$\delta Q = C_V dT + pdV \tag{13.18}$$

Разделим обе части этого выражения на T:

$$\frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + p\frac{dV}{T} \tag{13.19}$$

Для 1 моль газа $\frac{p}{T} = \frac{R}{V}$, поэтому

$$\frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}, \tag{13.20}$$

$$C_V \frac{dT}{T} = C_V d(\ln T) = d(C_V \ln T), \tag{13.21}$$

$$R\frac{dV}{V} = Rd(\ln V) = d(R \ln V), \tag{13.22}$$

$$\frac{\delta Q}{T} = d(C_V \ln T + R \ln V) \tag{13.23}$$

Величину $\frac{\delta Q}{T}$ называют приведенной теплотой. Математически она равна полному дифференциалу некоторой функции состояния системы $f(T, V)$. Назовем эту функцию состояния энтропией:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS, \tag{13.24}$$

$$S = f(T, V) \tag{13.25}$$

Энтропия - функция состояния системы, изменение которой равно сумме приведенных теплот, полученных системой при квазинепрерывном процессе. Если произошел процесс $1 - 2$, то разность соответствующих энтропий:

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{13.26}$$

Для изотермического процесса $S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1}$, для изохорического $S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$. Используя определения энтропии, мы обнаруживаем, что для адиабатического процесса $S = \text{const}$. Значит, на $T - S$ диаграмме цикл Карно представляет собой прямоугольник. Окончательно получаем:

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_1}{T_1}, \tag{13.27}$$

$$S_1 - S_2 = -\frac{Q_2}{T_2}, \tag{13.28}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{13.29}$$

Как мы видим, особенность цикла Карно в том, что его КПД зависит только от температур нагревателя и холодильника и не зависит от рода вещества рабочего тела или каких-нибудь других конструктивных параметров тепловой машины. В координатах $T - S$ цикл Карно имеет по сравнению с другими циклами максимальную площадь. Методы повышения КПД цикла Карно сводятся к уменьшению температуры холодильника T_2 и увеличения температуры нагревателя T_1.

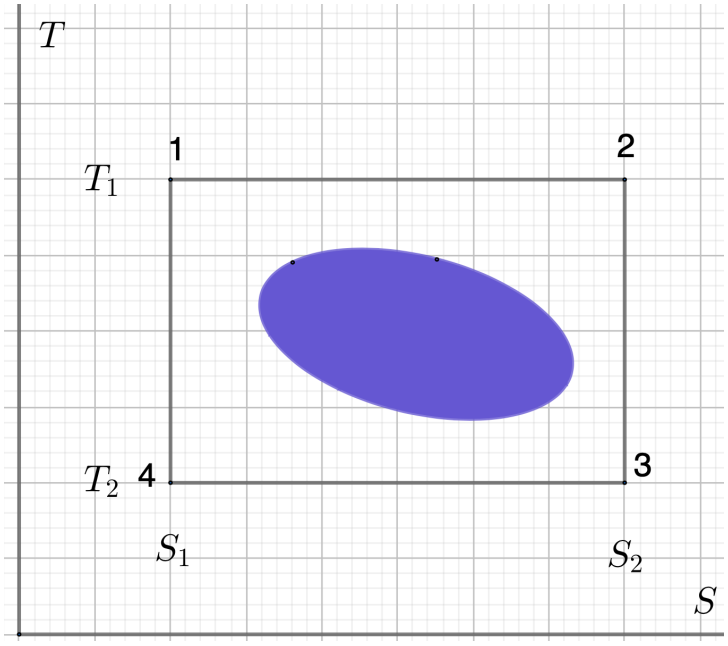

Рис. 13.4. Цикл Карно в координатах $T - S$. Закрашенная область - произвольный другой цикл. Он занимает какую-то часть площади цикла Карно, но не всю площадь

Лекция 14

Энтропия и хаос. Способы измерения энтропии

Способы измерения энтропии

На прошлой лекции мы ввели понятие энтропии - одной из важнейших функций состояния термодинамической системы. Мы выяснили, что энтропия является функцией объема и температуры: $S = S(V, T)$. По определению, изменение энтропии в процессе $1 - 2$ равно сумме приведенных теплот:

$$S_2 - S_1 = \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} \tag{14.1}$$

Также, используя первое начало термодинамики, мы получили выражение:

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{14.2}$$

Данные формулы применяются при экспериментальном определении изменения энтропии в каком-либо процессе. Самое простое, что можно сделать - взять термодинамическую систему, поместить туда термометр и начать подводить тепло δQ, затем снять зависимость T от подведенной теплоты δQ. Затем можно вычислить приведенные теплоты и, просуммировав их, получить изменение энтропии. Если же процесс изохорный, то можно воспользоваться непосредственно формулой (14.2): для измерений достаточно термометра.

Статистический смысл энтропии

Остановимся на статистическом смысле энтропии. Вспомним формулу Больцмана:

$$S = k \ln \omega \tag{14.3}$$

Чем больше статистический вес ω, то есть чем больше существует способов реализации данного макросостояния на микроуровне, тем больше энтропия. Проведем мысленный эксперимент. Пусть в сосуде, разделенном пополам перегородкой, находятся два сорта молекул: слева от перегородки - красные, справа зеленые. Уберем перегородку - красные и зеленые молекулы перемешаются. Энтропия такой системы увеличилась, поскольку реализовать ситуацию, в которой все красные молекулы находятся в левой части сосуда, а зеленые - в правой, можно гораздо меньшим числом способов, нежели ситуацию, в которой красные молекулы перемешаны с зелеными и равномерно распределены по всему объему сосуда. Данный процесс необратим - сложно вообразить ситуацию, в которой молекулы в процессе случайного движения снова разделятся на красные и зеленые и займут соответствующие половины сосуда. С течением времени термодинамическая система переходит в наиболее вероятное состояние - хаос. В этом смысле энтропия может выступать мерой хаоса в системе. Как правило, энтропия системы, предоставленной самой себе, увеличивается.

Применимость цикла Карно. Энтропия и второе начало термодинамики

Как мы помним, максимальный КПД из всех возможных циклов имеет цикл Карно. Несомненно, это очень хорошая теоретическая модель, однако в реальности при конструировании тепловых двигателей пользуются другими циклами (Дизеля, Стирлинга), поскольку в них нет адиабатических процессов, которые довольно трудно осуществить на практике. Данные циклы имеют значительно меньший КПД и меньшую площадь в координатах $T - S$, но инженерно более просты. Они нашли применение в двигателях внутреннего сгорания, дизельных двигателях и других механизмах.

Рассмотрим контакт двух тел с точки зрения энтропии. Пусть тело с температурой T_1 отдало телу с температурой T_2 количество теплоты δQ. Тогда изменение энтропии системы:

$$dS = \frac{\delta Q}{T_2} - \frac{\delta Q}{T_1} \tag{14.4}$$

Как видно из этого выражения, $dS > 0$ при $T_1 > T_2$. То есть второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса выполняется. Задав направление передачи теплоты (от тела 1 к телу 2), мы сразу получили условие на температуры ($T_1 > T_2$) - передача теплоты идет от горячего тела к холодному.

Функции состояния термодинамической системы

Мы уже знакомы с такими функциями состояния, как внутренняя энергия U и энтропия S. Оказывается, существуют и другие функции состояния, с помощью которых удобно описывать термодинамическую систему в тех или иных процессах.

Перечислим их:
1) Энтальпия $I = U + pV$. Можно показать, что $dI = TdS + Vdp$.
2) Свободная энергия $\psi = U - TS$; $d\psi = -SdT - pdV$.
3) Большой термодинамический потенциал $\Phi = \psi + pV$; $d\Phi = -SdT + Vdp$ Отметим, что приведенные функции являются функциями состояния только в тех переменных, в которых записаны их полные дифференциалы. Например, $I = f(S, p); \psi = f(T, V)$ и так далее.

Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Понятие реального газа. Потенциал Леннарда - Джонса

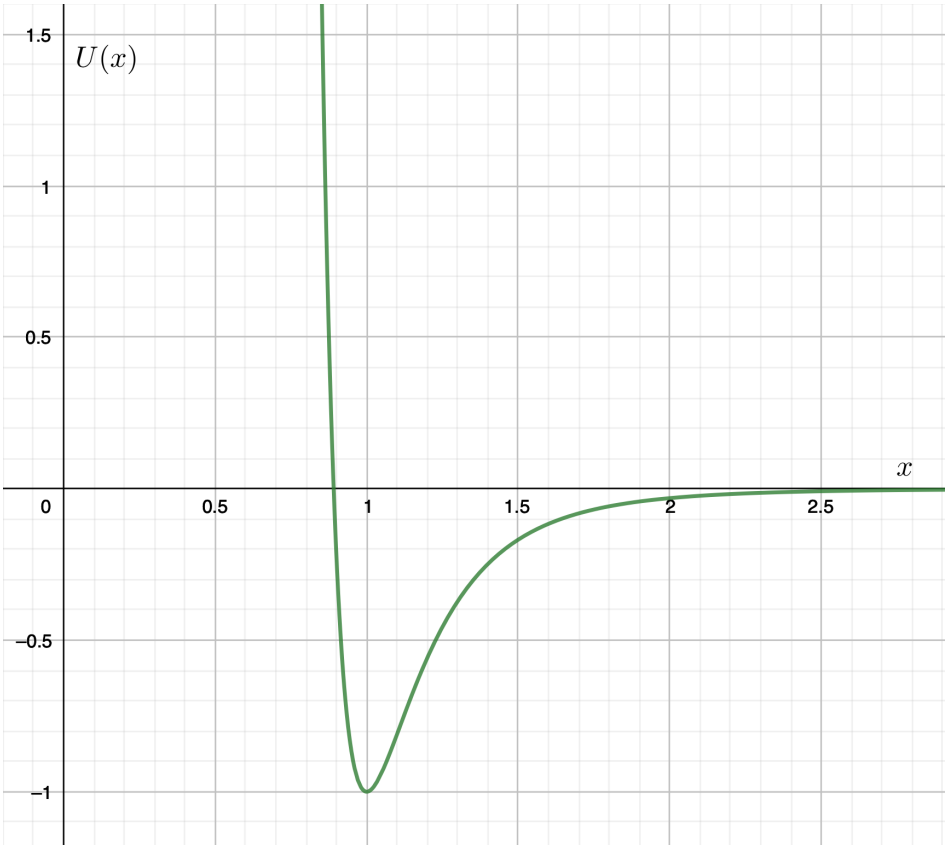

Рис. 14.1. Потенциал Леннарда-Джонса

Вернемся от термодинамики к молекулярной физике. Рассмотрим реальный газ, то есть газ, не являющийся идеальным. Поведение такого газа можно наблюдать в реальных экспериментах, отсюда и название. Вспомним, что на $V - T$ диаграмме для газа при малых температурах зависимость $V(T)$ перестает описываться прямой. В чем же дело? Оказывается, что при малых температурах большую роль играет межмолекулярное взаимодействие. Оно имеет электрический характер (закон Кулона, диполь-дипольное взаимодействие и так далее). При сравнительно больших расстояниях между молекулами преобладают силы притяжения; при достаточном

сближении молекул большую роль начинают играть силы отталкивания. Феноменологически механизм межмолекулярного взаимодействия описывается потенциалом Леннарда - Джонса (еще его называют потенциал 6-12):

$$U(x) = \frac{a_1}{x^{12}} - \frac{a_2}{x^6} \tag{14.5}$$

Здесь $U(x)$ - энергия взаимодействия двух молекул, x - расстояние между их центрами. a_1 и a_2 - некоторые константы. Первый член отвечает за отталкивание, второй - за притяжение. Отметим, что потенциал Леннарда - Джонса применим как к описанию газов (суммарная механическая энергия больше нуля, а значит, молекулы могут разлетаться на большие расстояния), так и жидкостей (суммарная механическая энергия меньше нуля, молекулы находятся в потенциальной яме - не могут сильно сближаться и сильно удаляться друг от друга).

Изотерма реального газа

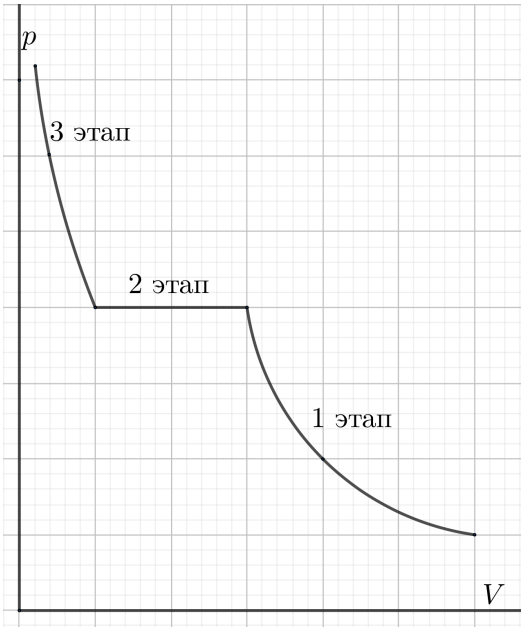

Рис. 14.2. Изотерма реального газа

Рассмотрим цилиндр с поршнем, заполненный паром. Подведем к пару термометр и манометр для измерения T и p. Будем изотермически двигать поршень и сжимать газ. В реальности на $p - V$ диаграмме мы увидим 3 этапа:
1) В системе присутствует только ненасыщенный пар, поведение которого подчиняется газовым законам. Изотерма имеет привычный вид гиперболы.
2) При достаточном сжатии пар становится насыщенным, начинается конденсация. В процессе конденсации $p = \text{const}$, а объем меняется. Имеем двухфазную систему: пар + вода. В начале конденсации много пара и мало воды, в конце - только вода: пар полностью перешел в жидкость. Механизм конденсации при сжатии можно описать следующим образом. Представим себе кипящую кастрюлю с водой,

происходит интенсивное испарение. Процесс испарения заключается в том, что в приповерхностном слое жидкости образуются "быстрые" молекулы, кинетическая энергия которых становится больше потенциальной энергии взаимодействия молекулы с соседями - за счет этого молекулы покидают жидкость, и образуется пар. Процесс конденсации обратный процессу испарения: чем сильнее мы сжимаем поршень, тем больше молекул пара "чувствуют" своих соседей. В итоге молекулы образуют конгломераты, потенциальная энергия их взаимодействия начинает превышать кинетическую, осуществляется переход в жидкость. На потенциале Леннарда - Джонса это соответствует области $U(x) < 0$, поскольку полная энергия есть сумма кинетической энергии и потенциальной, а потенциальная энергия взаимодействия молекул отрицательна.
3) Под поршнем находится только жидкость, которая практически несжимаема. Небольшое изменение объема вызывает резкое увеличение давления. В какой-то момент дальнейшее сжатие становится невозможным.
Отметим, что давление насыщенного пара зависит как от концентрации молекул, так и от температуры: $p_{\text{нас. пара}} = f(n, T)$. При понижении температуры давление насыщенного пара также уменьшается, поэтому, например, возможно вызвать кипение жидкости в колбе, охлаждая ее.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

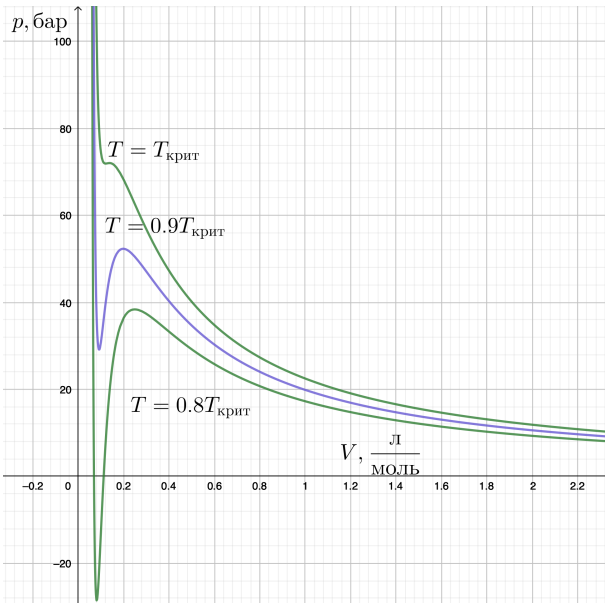

Рис. 14.3. Изотермы Ван-дер-Ваальса для CO_2

Одним из наиболее известных модельных уравнений реального газа является уравнение Ван-дер-Ваальса. Оно получается из уравнения Менделеева-Клапейрона путем введения некоторых поправок. Обусидим данные поправки.
1) Силы отталкивания. В идеальном газе мы предполагали, что взаимодействия между молекулами нет - выбранные молекулы газа "не чувствуют" наличие других молекул и летают свободно, как если бы других молекул не было. В реальности

молекулы, конечно, не описываются материальными точками, а имеют некоторые геометрические размеры, которые не позволяют им сближаться на слишком близкие расстояния. Также действуют силы отталкивания, которые еще сильнее ограничивают сближение молекул. Уравнение Менделеева-Клапейрона для 1 моль газа:

$$pV = RT \tag{14.6}$$

Ван-дер-Ваальс вводит поправку на объем b, учитывающую, что молекулы не могут сближаться слишком сильно:

$$p(V - b) = RT \tag{14.7}$$

В случае $b << V$ получаем модель идеального газа; при не очень малом b - модель реального газа. Отметим, что модель Ван-дер-Ваальса учитывает только парные столкновения молекул, хотя в реальности могут быть двойные, тройные и т.д.
2) Силы притяжения. Теперь будем считать, что отталкивания между молекулами нет. Рассмотрим, как газ действует на стенки сосуда. В идеальном газе мы предполагали, что давление на стенку создается суммарным независимым действием всех молекул, которые свободно летают и периодически ударяются об эту стенку. В реальности возле стенки образуется некоторый слой молекул возле стенок, которые притягиваются друг к другу, ударяются о стенку и не пропускают к стенке "дальние" молекулы из объема газа. За счет этого давление газа на стенку становится несколько меньше. В модели Ван-дер-Ваальса считается, что давление уменьшается на величину, обратно пропорциональную квадрату объема:

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}, \tag{14.8}$$

где a - поправка на объем. В итоге имеем уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль газа:

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT \tag{14.9}$$

Для ν моль газа справедлива следующая форма уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$(p + \frac{a\nu^2}{V^2})(V - \nu b) = \nu RT \tag{14.10}$$

Раскроем скобки в выражении (14.9), получим следующее:

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}, \tag{14.11}$$

$$pV^2 = \frac{RTV^2}{V - b} - a, \tag{14.12}$$

$$pV^3 - (RT + pb)V^2 + aV - ab = 0. \tag{14.13}$$

Мы получили кубическое уравнение, которое имеет либо три корня, либо один корень. Один корень возникает в критической точке - в этой точке параметры приобретают такие значения, что газообразная фаза становится неотличима от жидкой.

Можно показать, что значения параметров в критической точке таковы:

$$V_{\text{крит}} = 3b, \tag{14.14}$$

$$p_{\text{крит}} = \frac{a}{27b^2}, \tag{14.15}$$

$$T_{\text{крит}} = \frac{8a}{27bR} \tag{14.16}$$

Изотерма газа Ван-дер-Ваальса (рисунок 14.3) напоминает изотерму реального газа за исключением участка изотермы с $\frac{\partial p}{\partial V} > 0$ - в реальности он соответствует этапу конденсации и представляет собой прямую $p = \text{const}$. При всех своих недостатках уравнение Ван-дер-Ваальса описывает реальный газ значительно лучше, нежели это делает модель идеального газа.

Это была последняя тема, курс завершен. Удачи на экзамене!

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ