МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 2

ШЕЙПАК
ИГОРЬ АНАТОЛЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ПОДКЛЕТНОВУ АННУ АЛЕКСАНДРОВНУ

Содержание

Лекция 1

Спектр оператора. Свойства спектра.

Пусть A — оператор, B(X) — класс ограниченных операторов на банаховом пространстве X, σ(A) — спектр оператора A.

Пусть A ∈ B(X), тогда

1) $\sigma(\mathrm{A}) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant ||A||\}$ (спектр содержится в круге, радиус которого не превосходит нормы)
2) $\sigma(\mathrm{A})$ — замкнут
3) $\sigma(\mathrm{A}) \neq \emptyset$

Связь между спектром оператора и спектром сопряженных операторов

В гильбертовых пространствах:

$\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}^*$

$\sigma(\mathrm{A}) \leftrightarrow \sigma(\mathrm{A}*)$

$\lambda \in \sigma(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(\mathrm{A}^*)$

$\lambda \in \sigma_r(\mathrm{A}) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(\mathrm{A}^*)$

$\lambda \in \sigma_p(\mathrm{A}) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(\mathrm{A}^*) \cup \bar{\lambda} \in \sigma_r(\mathrm{A}^*)$

В банаховых пространствах:

$\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}'$

$\sigma(\mathrm{A}) \leftrightarrow \sigma(\mathrm{A}')$

$\lambda \in \sigma(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(\mathrm{A}')$

$\lambda \in \sigma_r(\mathrm{A}) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(\mathrm{A}')$

$\lambda \in \sigma_p(\mathrm{A}) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(\mathrm{A}') \cup \lambda \in \sigma_r(\mathrm{A}')$

Классы операторов

$l_2 \quad \mathrm{A}_\alpha \mathrm{x} = (\alpha_1 \mathrm{x}_1, \alpha_2 \mathrm{x}_2, \dots, \alpha_\mathrm{n} \mathrm{x}_\mathrm{n})$

$\alpha \in l_\infty$

$\sigma(A_\alpha) = \overline{\{\alpha_k\}}$

C [a, b]

$A_\varphi f = \varphi(x)f(x)$, $\varphi \in C\,[a, b]$

$\sigma(A_\varphi) = E(\varphi) := \{\lambda : \exists\, x \in [a, b] : \varphi(x) = \lambda\}$

Докажем утверждения:

1) $\lambda \in E(\varphi) \Rightarrow \lambda \in \sigma\big(A_\varphi\big)$

Рассмотрим $Im(A - \lambda I)$

$g(x) = (\varphi(x) - \lambda) \cdot f(x)$

$\exists x_0 : \varphi(x_0) = \lambda$

$g(x_0) = 0$

Приходим к выводу, что $Im(A - \lambda I) \neq C[a, b]$

2) $\lambda \notin E(\varphi) \Rightarrow \lambda \notin \sigma\big(A_\varphi\big)$

$E(\varphi)$ — замкнуто

$\rho\big(\lambda, E(\varphi)\big) = \inf|\varphi(x) - \lambda| > 0, x \in [a, b]$

Построим резольвенту:

$(A - \lambda I)^{-1} = ?$

$(\varphi(x) - \lambda) \cdot f(x) = g(x) \qquad \forall g \in C[a, b]$

$$f(x) = \frac{g(x)}{\varphi(x) - \lambda}$$

$R_\lambda(A) = A_{\frac{1}{\varphi - \lambda}}$

$\|R_\lambda\| = \max\limits_{[a,b]} \frac{1}{\varphi(x) - \lambda} = \frac{1}{min|\varphi(x) - \lambda|} < \infty \Rightarrow \lambda \notin \sigma\big(A_\varphi\big)$

Условие существования собственного значения

Когда $\lambda \in \sigma_p$?

$\lambda \in E(\varphi)$

$\exists f \neq 0 \qquad (\varphi(x) - \lambda) \cdot f(x) = 0$

$\exists x_0 : f(x_0) \neq 0$

$\exists (\alpha, \beta) \ni x_0$

$f|_{(\alpha,\beta)}$ — сохраняет знак $\Rightarrow \varphi|_{(\alpha,\beta)} \equiv \lambda$

Пусть $\lambda \in E(\varphi)$, но $\nexists(\alpha,\beta) \quad \varphi|_{(\alpha,\beta)} \equiv \lambda$

$\exists x_0 : \varphi(x_0) = \lambda$

$g \in Im(A - \lambda I): \ g(x) = 0$

$h \in \overline{Im(A - \lambda I)} \ \Rightarrow h(x_0) = 0 \ \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(\mathrm{A})$

Проделаем те же действия для другого оператора. Возьмём пространство $L_2[a,b]$

$A_\varphi f = \varphi(x) f(x)$

Чтобы оператор был ограниченным: $\varphi \in L_\infty[a,b]$

Для нахождения спектра этого оператора введём следующие понятия:

Определение. $A \in B(X)$, где X — банахово пространство

$\lambda \in \mathbb{C}$ — для этого λ существует последовательность Вейля:

$\{x_n\}_{n=1}^\infty \qquad \|x_n\| = 1 \qquad \|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$

Задача. Если ∃ последовательность Вейля, то $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$.

Доказательство от противного: пусть $\lambda \notin \sigma(\mathrm{A}) \Rightarrow \exists\ (A - \lambda I)^{-1} \in B(X)$

$y_n := (A - \lambda I)x_n \to 0 \ \Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} y_n \to 0$

$(A - \lambda I)^{-1} y_n = \ x_n \quad \|x_n\| = 1 \ \Rightarrow$ получаем противоречие.

Определение. Существенное значение φ:

$essE(\varphi) = \{\lambda : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x : |\varphi(x) - \lambda| = \varepsilon\}) > 0\}$

Определение. $A \in B(H)$, где H — гильбертово пространство

A — нормальный, если $A^*A = AA^*$

Некоторые свойства нормальных операторов:

1) A — нормальный $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (A - \lambda I)$ — тоже нормальный
2) A — нормальный $\Rightarrow \forall x \quad \|Ax\| = \|A^*x\|$
   Доказательство: $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (AA^*x, x) = \|A^*x\|^2$
3) A — нормальный $\Rightarrow \sigma_r(A) = \emptyset$
   Доказательство от противного:
   пусть $\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \ \Rightarrow \exists x_0 \neq 0 \quad \left(A^* - \bar{\lambda} I\right) x_0 = 0$

$\|(A-\lambda I)x_0\| = \left\|(A^* - \bar{\lambda} I)x_0\right\| = 0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0 \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(\mathrm{A})$ — получили противоречие

Вернёмся к нахождению спектра оператора.

Задача. $\sigma(A_\varphi) = essE(\varphi)$

1) $\lambda \in essE(\varphi) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A_\varphi)$

Доказательство:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \mu\left\{x: |\varphi(x)-\lambda| < \frac{1}{n}\right\} > 0$

Пусть $\left\{x: |\varphi(x)-\lambda| < \frac{1}{n}\right\} = M_n$

$f_n = \dfrac{\chi_{M_n}}{\sqrt{\mu(M_n)}}$ $\qquad \|f_n\|_{l_2} = 1$

$$\|(A-\lambda I)f_n\|^2 = \int\limits_{M_n} |\varphi(x)-\lambda|^2 \frac{1}{\mu(M_n)} d\mu < \frac{1}{n^2} \to 0$$

Это последовательность Вейля, а значит $\lambda \in \sigma(A)$

2) $\lambda \notin essE(\varphi) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A_\varphi)$

Доказательство:

$(\varphi(x)-\lambda)f(x) = g(x)$

$\exists \varepsilon > 0\ :\ \mu(\{x: |\varphi(x)-\lambda| < \varepsilon\}) > 0$

Пусть $\{x: |\varphi(x)-\lambda| < \varepsilon\} = M_\varepsilon$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\varphi(x)-\lambda}, & x \notin M_\varepsilon \\ 0, & x \in M_\varepsilon \end{cases}$$

$f(x) = (A-\lambda I)^{-1} g$

$$\|(A-\lambda I)g\|^2 = \int\limits_{[a,b]\setminus M_\varepsilon} \left|\frac{g(x)}{\varphi(x)-\lambda}\right|^2 d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot \int\limits_{[a,b]\setminus M_\varepsilon} |g(x)|^2\, d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot \int\limits_{[a,b]} |g(x)|^2\, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|^2$$

$\|R_\lambda\| \le \dfrac{1}{\varepsilon}$

Когда $\lambda \in \sigma_p(A_\varphi)$?

$(\varphi(x) - \lambda)f(x) = 0$

$\exists f \neq 0$ в L_2

$f(x) \not\equiv 0$ на множестве M $\Rightarrow f(x) \equiv \lambda$ на M

$\lambda \in essE(\varphi)$ но $\nexists M: \mu(M) > 0 \quad \varphi|_M \equiv \lambda \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A_\varphi)$

<u>Определение</u>. X, Y — банаховы пространства

$A \in B(X)$, $B \in B(Y)$, биекция $S \in B(X, Y)$

$X \overset{A}{\rightarrow} X$

s↓ ↓s — данная диаграмма коммутативна, то есть $SA = BS$, $A = S^{-1}BS$, $B = SAS^{-1}$

$Y \overset{B}{\rightarrow} Y$

A и B подобны (A~B).

Лекция 2

Спектр и квадратичная форма самосопряжённого оператора

Пусть H — гильбертово пространство, A=A* — самосопряжённый оператор, тогда

1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

а) $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$

Доказательство:

пусть $\lambda \in \sigma_p \Rightarrow \exists x \neq 0.$

$Ax = \lambda x$

$\Rightarrow (Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$

$(Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}\|x\|^2$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

б) $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$

Доказательство:

пусть $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0.$

$$\begin{aligned}\|(A - \lambda I)x\|^2 &= \big((A - \alpha I - i\beta I)x, (A - \alpha I - i\beta I)x\big) \\ &= \|(A - \alpha I)x\|^2 + \big((A - \alpha I)x, -i\beta x\big) - i\beta(x, (A - \alpha I)x) + |\beta|^2\|x\|^2 \\ &= \|(A - \alpha I)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2 \geq |\beta|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

Значит $\lambda = \alpha + i\beta \notin \sigma_C(A)$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

<u>Теорема</u>. $A \in B(X, Y)$ (X — банахово пространство, Y — нормированное пространство) и $\exists c > 0$: $\forall x \epsilon X \;\; \|Ax\| \geq c\|x\|$

$\Rightarrow ImA$ — замкнут.

Доказательство:

пусть y_0 — предельная точка ImA,

тогда $\exists y_n \to y_0$, $y_n \in \operatorname{Im} A \Rightarrow y_n = Ax_n$

$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|y_n - y_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$

Откуда следует, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная

$\Rightarrow \lim x_n =: x_0$

$\Rightarrow lim\, Ax_n = Ax_0 = y_0$

$\Rightarrow y_0 \in Im\, A$

Определение. $A \in B(H)$, H — гильбертово пространство, $q_A(x) \coloneqq (Ax, x)$. Если $A = A^*$, то $q_A(x) \in \mathbb{R}$

$m \coloneqq \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$

$M \coloneqq \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$

Утверждение. $A = A^* \Rightarrow \ \sigma(A) \subset [m, M]$

1) $\forall x \in H: m\|x\|^2 \le (Ax, x) \le M\|x\|^2$
2) $\sigma_P(A) \subset [m, M]$
   Пусть λ — собственное значение
   $\Rightarrow \exists x \ne 0, \|x\| = 1$ и $Ax = \lambda x$
   $m \le (Ax, x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda \le M$
3) $\sigma_C(A) \subset [m, M]$
   Пусть $\lambda > M$
   $\Rightarrow \lambda = M + \delta, \delta > 0$
   $$\begin{aligned}\|(A - \lambda I)x\|^2 &= \big((A - MI - \delta I)x, (A - MI - \delta I)x\big) \\ &= \|(A - MI)x\|^2 - \delta\big((A - MI)x, x\big) - \delta(x, (A - MI)x) + |\delta|^2\|x\|^2 \\ &= \|(A - MI)x\|^2 - 2\delta\big((A - MI)x, x\big) + |\delta|^2\|x\|^2 \ge |\delta|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

Описание спектра оператора

Задача. $U = U^* = U^{-1}$ (U — самосопряженный унитарный оператор)

Пространство H можно разложить в прямую сумму: $H = H_1 \oplus H_2$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}_{H_2}^{H_1}$$

Возьмём за H_1 и H_2:

$H_1 = \{x: U_x = x\}$

$H_2 = \{y: U_y = y\}$

$H, \perp H_2 \Rightarrow H_1 \oplus H_2$

$I = \frac{I+U}{2} + \frac{I-U}{2}$

$\left(\frac{I \pm U}{2}\right)^2 = \frac{I \pm 2U + U^2}{4} = \frac{I \pm U}{2}$

$\left(\frac{I \pm U}{2}\right)^2 = \ker(I+U) = H_2$

$Im(I+U) = H_1$

Спектральный радиус

Определение. $A \in B(X)$, X — банахово пространство, $r(A) := \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ — спектральный радиус.

Из определения спектрального радиуса и свойств спектра следует, что $r(A) \leq \|A\|$

Теорема. $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

Доказательство (только часть):

если $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ ввиду теоремы об отображении спектра.

Поэтому $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$ и $|\lambda| \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Задача.

Доказать, что если A — самосопряженный оператор, то его спектральный радиус равен его норме.

$A = A^* \Rightarrow r(A) = \|A\|$

Доказательство:

$\forall B \in B(H): \ \|B^*B\| = \|B\|^2$, где H — гильбертово пространство.

Если $A = A^* \Rightarrow \|A^2\| = \|A\|^2$.

Таким образом для самосопряженного оператора можно «вытаскивать» любую степень двойки: $\left\|A^{2^{n+1}}\right\| = \left\|\left(A^{2^n}\right)^2\right\| = \left\|A^{2^n}\right\|^2 = \|A\|^{2^n}$

Тогда $r(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \|A\|$ (при $k = 2n$)

Пример.

$C[0,1]$

$(Af)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$

Найти $r(A)$ по формуле $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Решение:

$$(A^n f)(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$$

$$\|A^n f\| = \max_x \left| \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt \right| \le \max_x \int\limits_0^x \left| \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \right| dt \le \max_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n!} \|f\| = \frac{\|f\|}{n!}$$

Значит $\|A^n\| \le \frac{1}{n!}$

Получаем $r(A) = lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

$\sigma(A) = \{0\}$

Лекция 3

Полинормированные пространства

Определение. X — линейное пространство над полем $\mathbb{K}(\mathbb{C},\mathbb{R})$ называется полинормированным, если на X задано семейство полунорм.

$\{p_\alpha\}_{\alpha\epsilon\Lambda}$

База по топологии в X:

$U_{\varepsilon,p_1,p_2,\dots,p_n}(0) = \{x \in X: p_i(x) < \varepsilon; i = 1,2,\cdots,n\}$

$$\{x \in X: p_i(x) < \varepsilon; i = 1,2,\cdots,n\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{x \in x, p_i(x) < \varepsilon\}$$

Сходимость по топологии:

$x_n \overset{r}{\to} x \Leftrightarrow \forall\alpha \quad p_\alpha(x_n - x) \to 0$

Определение. Система полунорм $\{p_\alpha\}$ различает точки, если

$\forall x, y\epsilon X: x \neq y \quad \exists p_\alpha \quad p_\alpha(x-y) \neq 0$

Примеры:

1) $C^\infty[0;1]$
   $f_n \to f: \forall j \geq 0 \quad f_n^{(j)} \rightrightarrows f^{(j)}$
   $p_j(f) = \max\left|f^{(j)}(x)\right|$
2) $S \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
   $x^n \to x: \forall k = 1,2,\cdots \quad x_k^n \to x_k$
   $p_k(x) = |x_k|$
3) $A(|z| < 1)$
   $f_n \to f \quad \forall k \subset \{z \cdot |z| < 1\}$
   $f_n \rightrightarrows f$ по компакте
   $$\bigcup_{n=1}^{\infty} k_n = \{z \cdot |z| < 1\}$$
   $k_n = \left\{z \cdot |z| \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$
   $p_n(f) = \max_{k_n}|f(z)|$

Введём пространство $D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), supp\ \varphi$ — компакт$\}$

Определение. $f_n \to 0$ в D, если

1) $\exists [a,b]\colon supp\ f_n \subset [a,b]$
2) $\forall j \geq 0\colon f_n^{(j)} \rightrightarrows 0$ на $[a,b]$

Определение. p — допустимая полунорма в D:

$\forall a > 0 \ \ \exists C = C(a) > 0,$

$n = n(a) \in \mathbb{N}_0\colon \forall \varphi \in D, supp\ \varphi \subset [-a,a]$

$p(\varphi) \leq C \cdot \|\varphi\|_{C^n[-a,a]}$

Пример:

Возьмём функцию $\alpha \in C(\mathbb{R})$

$p_\alpha(\varphi) \coloneqq \sup\limits_{\mathbb{R}} |\alpha(x)\varphi(x)|$

$p_\alpha(\varphi)$ — это допустимая полунорма

$supp\ \varphi \ \in [-a,a]$

Максимум произведения не превосходит произведения максимумов, поэтому

$\sup\limits_{\mathbb{R}} |\alpha(x)\varphi(x)| \leq \max\limits_{[-a,a]} |\alpha(x)| \cdot \max\limits_{[-a,a]} |\varphi(x)|$

$\max\limits_{[-a,a]} |\alpha(x)| = C(a)$

$\max\limits_{[-a,a]} |\varphi(x)| = n = 0$ — норма в пространстве непрерывных функций

Сходимость в D равносильна сходимости по всем допустимым полунормам.

Непрерывные операторы в полинормированных пространствах

Пусть $(X\{p_\alpha\}), (Y\{q_\beta\})$ — два полинормированных пространства, $A \in Z(X,Y)$ — линейный оператор.

Определение. Оператор A непрерывен, если

$\forall \beta \quad \exists c_1, c_2, \ldots c_m$ и $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m : \ \forall x \in X \quad q_\beta(Ax) \leq \sum_{i=1}^m c_i p_{\alpha_i}(x)$

Пример:

$A\colon D \to D$

$A = \frac{d}{dx}$

$\varphi \in D$

$supp\,\varphi \quad \subset [-a, a]$

$\|A\varphi\|_{C^n[-a,a]} \le \|\varphi\|_{C^{n+1}[-a,a]}$

Значит оператор $A = \frac{d}{dx}$ непрерывен в пространстве D.

Пример:

$A\varphi(x) = x\varphi(x)$

$supp\,\varphi \quad \subset [-a, a]$

$$\|\varphi\|_{C^{n+1}[-a,a]} = \sum_{j=0}^{n} \max_{[-a,a]} \left|(x\varphi)^{(j)}\right|$$

$(x\varphi)^{(j)} = x\varphi^{(j)}(x) + j\varphi^{(j-1)}(x)$

$$\sum_{j=0}^{n} \max_{[-a,a]} \left|(x\varphi)^{(j)}\right| \le \sum_{j=0}^{n} \left[a \cdot \max\left|\varphi^{(j)}(x)\right| + j\max\left|\varphi^{(j-1)}(x)\right|\right]$$

Значит A — непрерывный оператор.

Пространство быстроубывающих функций

Рассмотрим пространство Шварца (пространство быстро убывающих функций)

$$S = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ \forall p, q \in\ \mathbb{N}_0 \quad \|\varphi\|_{p \cdot q} \coloneqq \sup_{\mathbb{R}} \left|x^p \varphi^{(q)}\right| < \infty\right\}$$

Любая функция из D лежит в S.

Пример:

Функция $f = e^{-x^2}$лежит в S, но не лежит в D.

Определение. Функция f убывает экспоненциально, если $f \cdot e^{a|x|} \subset L_1 \quad \forall a > 0$

Пример:

$A: S \to S$

$A = \frac{d}{dx}$

$\left\|\frac{d}{dx}\varphi\right\|_{p\cdot q} = sup\left|x^p\varphi^{\langle q+1\rangle}\right|$

Оператор дифференцирования A является непрерывным в S.

Пример:

$A\varphi(x) = x\varphi(x)$

$supp\,\varphi \quad \subset [-a, a]$

$\|x\varphi\|_{p\cdot q} = sup\left|x^p(x\varphi)^{(q)}\right|$

$sup\left|x^p(x\varphi)^{(q)}\right| \le \|\varphi\|_{p+1,q} + q\|\varphi\|_{p,q-1}$

Оператор A непрерывен в S.

Лекция 4

Обобщённые функции

Определение. $E = C^\infty$ с системой полунорм:

Система расширяющихся компактов $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$, $k_1 \subset k_2 \subset \cdots k_m \subset k_{m+1}$,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} k_m = \mathbb{R}$$

$$p_{n,m}(\varphi) \coloneqq \|\varphi\|_{C^n(k^m)}$$

$$p_n(\varphi) = \|\varphi\|_{C^n[-n,n]} \le p_{n+1}(\varphi)$$

Определение. Пространство обобщённых функций — это пространство линейных функционалов на D (обозначение: D').

Функционалы отображают из D в $\mathbb{C}$: $D, \{p\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}|\cdot|$

$f \in D' \quad \exists C_i, p_i, i = 1, \dots, n$

$$|f(\varphi)| \le \sum_{i=1}^{n} C_i p_i(\varphi)$$

Определение. Пространство обобщённых функций медленного роста — пространство линейных функционалов на S (обозначение: S').

Функционалы отображают из S в $\mathbb{C}$: $S, \{p\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}|\cdot|$

$f \in S'$

$\exists C_i, p_i, i = 1, \dots, n$

$$|f(\varphi)| \le \sum_{i=1}^{n} C_i p_i(\varphi)$$

Определение. Пространство обобщённых функций с компактным носителем — пространство линейных функционалов на E (обозначение: E').

Функционалы отображают из E в $\mathbb{C}$: $E, \{p\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}|\cdot|$

$f \in E'$

$\exists C_i, p_i, i = 1, \dots, n$

$$|f(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} C_i p_i(\varphi)$$

$D \hookrightarrow S \hookrightarrow E$ плотно и непрерывно $\Rightarrow D' \supset S' \supset E'$

Пример:

$$\langle \delta(x), \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Доказать, что $\delta(x) \in D'$

Доказательство:

$$|\varphi(0)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

$$\langle f, \varphi \rangle = \varphi'(0)$$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \underset{\mathbb{R}}{sup} |\varphi'(x)| \leq \|\varphi\|_{C^1[-a,a]}$$

Регулярная обобщенная функция

<u>Определение</u>. Функция $f \in L_1, loc: \ \forall [a,b] \quad f \in L_1[a,b]$

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

$$supp\, \varphi \subset [a,b]$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \max_{[a,b]} |\varphi(x)| \cdot \|f\|_{L_1[a,b]}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx$$

Возьмём в качестве допустимой полунормы

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx = p_f(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx \leq \|f\|_{L_1[-a,a]} \cdot \|\varphi\|_{C[-a,a]}$$

$$\|f\|_{L_1[-a,a]} = C(a)$$

$$\|\varphi\|_{C[-a,a]} = n(a) = 0$$

Далее вместо F_f будем писать f, подразумевая, что $f \in D'$.

Определение. $F \in D'$ — регулярная обобщённая функция, если

$$\exists f \in L_1, loc : \langle F, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

Данная функция является сингулярной.

Пример:

$D' \supset S' \supset E'$

$f \in D', f \notin S'$

$e^{-x^2} \in S, e^{-x^2} \notin D, D \subset S$

Рассмотрим $f = e^{x^2} \in L_1, loc \Rightarrow e^{x^2} \in D'$

Заведомо мы не можем определить действие этого функционала на функцию e^{-x^2}. $\left\langle f, e^{-x^2} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ является расходящимся интегралом. Следовательно, $f \notin S'$.

Действия над обобщёнными функциями

Пусть $A: D \to D$

D', * — слабая топология

$U_{\varepsilon,\varphi_1,\dots,\varphi_n} = \{f \in D' : |< f, \varphi >| < \varepsilon, i = 1,2,\dots,n\}$

$f_n \to f \Rightarrow \forall \varphi \epsilon D : \langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$

$D \subset D'$ плотно и непрерывно по *-слабой топологии

Аналогичным свойством обладают и пространства S, S', E, E'.

Определение. Пусть (X, p_α) — полинормированное пространство, $M \subset X'$. Множество M называется достаточным, если $\forall x \in X, x \neq 0 \quad \exists f \in M : < f, x > \neq 0$.

Если множество достаточно, то оно плотно.

Пример:

Покажем, что $D \subset D'$ — достаточно.

Возьмём $\varphi \neq 0$.

$\left\langle F_{\overline{\varphi}}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2\,dx > 0 \Rightarrow D \subset D'$ — достаточно.

Аналогично $S \subset S'$, $E \subset E'$.

Операции над обобщёнными функциями:

1) Дифференцирование обобщённых функций

   $A\varphi = \frac{d\varphi}{dx}$ — непрерывный оператор в D

   $D \subset D'$ плотно

   $f \in D, \varphi \in D$

   $\langle Af, \varphi \rangle \ = \ \int_{\mathbb{R}} f' \varphi \, dx = f\varphi|_{-\infty}^{\infty} - \int f \varphi' \, dx = -\langle f, \varphi' \rangle$

Тогда можно сказать, что если $f \in D'$, то $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$

$\left\langle f^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \varphi^{(n)} \right\rangle$

Примеры:

1) $\theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

Найдем классическую и обобщенную производную данной функции.

$\theta'_{\text{кл}} = 0$ почти всюду (кроме точки $x = 0$)

$$< \theta'_{\text{об}}, \varphi >= -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x) \, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

2) f_c — функция Кантора

$(f_c{}')_{\text{кл}} = 0$ почти всюду

$$\langle f_c', \varphi \rangle = -\langle f_c, \varphi' \rangle = -\int\limits_0^1 \varphi' f_c \, dx$$

$\mu_{f_c}([a, b)) = f_c(b) - f_c(a)$

$$-\int\limits_0^1 \varphi' f_c \, dx = \int\limits_0^1 \varphi \, d\mu_{f_c}$$

Лекция 5

Действия над обобщёнными функциями (продолжение)

2) Умножение на гладкую функцию $a \in C^\infty$
   $f \in D'$
   $a \cdot f = ?$
   Пусть $f \in D \subset D'$
   $\langle af, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} a(x)f(x)\varphi(x)\,dx = \langle f, a\varphi\rangle$

Примеры:

- $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$
- $\delta_{ln\,x} \cdot \delta(x) = 0$

3) Замена переменных
   - $\delta(x-a)$
     $y = y(x) = x - a$
     $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ взаимно однозначно, $y' \neq 0$, $y \in C^\infty$
     $\langle f(y(x)), \varphi(x)\rangle = ?$
     $\int f(y(x)), \varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x(y))x'_y\,dy = \langle f(y)\varphi(x(y))x'_y\rangle$
     $y = x - a \Rightarrow x = y + a \Rightarrow x'_y = 1$
     $\langle \delta(y), \varphi(y+a)\rangle = \varphi(a)$
   - $\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$

Пример:

$a \in C^\infty, f \in D'$

$(af)' = a'f + af'$

$\langle (af)', \varphi\rangle = -\langle af, \varphi'\rangle = -\langle f, a\varphi'\rangle$

$\langle a'f + af', \varphi\rangle = \langle f, a'\varphi\rangle + \langle f', a\varphi\rangle$

$\langle f', a\varphi\rangle = -\langle f, a\varphi'\rangle = -\langle f, a'\varphi\rangle - \langle f, a\varphi'\rangle$

$\langle a'f + af', \varphi\rangle = -\langle f, a\varphi'\rangle$

Задача:

$|sin\, x|'' = ?$

Введём класс функций $f \in kC^1$

$\exists \{x_k\}_{k=1}^N N \leq \infty$

Если $N = \infty$, то $\{x_k\}$ не имеет конечной предельной точки.

$\forall k \quad f \in C^1(x_k, x_{k+1}), \qquad \exists f(x_k \pm 0), \qquad h_k = f(x_k + 0) - f_k(x_k - 0)$

$\Rightarrow f'_{\text{об}} = f'_{\text{кл}} + \Sigma h_k \delta(x - x_k)$

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\sum_{k=1}^{N} \int_{x_k}^{x_k+1} f\varphi'\, dx$$

$$-\sum_{k=1}^{N} \int_{x_k}^{x_k+1} f\varphi'\, dx = -\sum_{k}^{N} (f(x_{k+1} - 0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k + 0)\varphi(x_k)) + \int_{\mathbb{R}} f'\varphi\, dx = \sum h_k \varphi(x_k)$$

$$|sin\, x|'' = -|\sin x| + 2\sum_{n \in Z} \delta(x - \pi n)$$

Порядок сингулярности обобщённых функций

1) $f \in D'$ имеет порядок сингулярности $\leq p$, если $\exists f_0, f_{1,\dots,} f_p \in L_1, lok$:

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{p} \int_{\mathbb{R}} f_k \varphi^{(k)}\, dx$$

2) В точности равен p, если в представлении 1) это p нельзя уменьшить.

Порядок сингулярности равен нулю только у регулярных функций.

Пример:

$\langle \delta(x), \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle$

$\theta \in L_1, lok \Rightarrow$ порядок сингулярности не меньше 1.

$$x_+ = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$x'_+ = \theta$

$\langle\delta(x),\varphi\rangle = -\langle\theta,\varphi'\rangle = \langle x_+,\varphi''\rangle \Rightarrow$ порядок сингулярности не больше 2.

$\langle\delta(x),\varphi\rangle = -\langle\theta,\varphi'\rangle = \langle x_+,\varphi''\rangle = -\left\langle\frac{x_+^2}{2},\varphi'''\right\rangle$ и так далее.

Таким образом приходим к выводу, что порядок сингулярности δ равен 1.

Предельный переход

$f_n \xrightarrow{D'} f$ в смысле *-слабой топологии

$\forall\varphi: \langle f_n,\varphi\rangle \to \langle f,\varphi\rangle$

Определение. $f_n \in L_1, loc$ — δ-образная последовательность

$\langle f_n,\varphi\rangle \to \varphi(0) \quad \forall\varphi \in D$

Задача.

$f_n \to L_1$

1) $\forall[a,b]$ и $\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b]$
   $\left|\int f_n\,dx\right| \le C(a,b)$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \begin{cases} 1, a < 0 < b \\ 0, \text{ иные случаи} \end{cases} \Rightarrow f_n$ — δ-образная последовательность

$$F_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$$

$$\langle f_n,\varphi\rangle = \langle F_n',\varphi\rangle = -\langle F_n,\varphi'\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x} f_n\,dt\Big)\,\varphi'(x)\,dx$$

$supp\ \varphi \subset [a,b]$

$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$ является θ-функцией согласно пунктам 1) и 2)

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_n\,dt = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x} f_n\,dt\Big)\,\varphi'(x)\,dx \to -\int\limits_{a}^{\infty} \theta\varphi'\,dx$$

$$-\int_0^\infty \varphi\, dx = \varphi(0)$$

Пример:

Является ли последовательность $f_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ δ-образной?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx = arctg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx = arctg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_a^b$$

$arctg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_a^b \to 0$, если $ab > 0$

$arctg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_a^b \to \pi$, если $ab < 0$

Выполнены требования 1) и 2), следовательно данная последовательность является δ-образной.

Пространство обобщённых функций с компактным носителем

Определение. Носитель обобщённой функции $supp\, f$:

1) $f \in D'$ равна нулю в точке x_0, если $\exists\, U_x$-окрестность точки x_0 :

   $\forall \varphi \in D\ \ supp\, \varphi \subset U_x\ \ \langle f, \varphi\rangle = 0$

2) $supp\, f = \mathbb{R} \setminus \{\text{все точки, в которых } f = 0\}$

Пример: $supp\, \delta(x) = \{0\}$

E' — пространство обобщённых функций с компактным носителем.

Теорема. Пусть $f \in D'$. Тогда $f \in E' \Leftrightarrow supp\, f$ — компактный.

Решение дифференциальных уравнений

Пример:

$y' = 0$. Решить в D'.

$\forall \varphi \in D\ \ \langle y, \varphi\rangle = \langle 0, \varphi\rangle = 0$

$\langle y, \varphi'\rangle = 0$

Введём пространство $D_0 = \{\psi \in D : \exists \varphi \in D : \psi = \varphi'\}$, $y|_{D_0} \equiv 0$

Докажем, что

$$D_0 = \{\psi \in D : \exists \varphi \in D : \psi = \varphi'\} = \left\{\psi \in D: \int_{-\infty}^{\infty} \psi \, dx = 0\right\}$$

Доказательство:

Сначала докажем, что

$$\{\psi \in D : \exists \varphi \in D : \psi = \varphi'\} \subset \left\{\psi \in D: \int_{-\infty}^{\infty} \psi \, dx = 0\right\}$$

Так как функция φ финитна, то $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi' \, dx = 0$

Значит $\{\psi \in D : \exists \varphi \in D : \psi = \varphi'\} \subset \left\{\psi \in D: \int_{-\infty}^{\infty} \psi \, dx = 0\right\}$

Теперь докажем обратное вложение:

$$\{\psi \in D : \exists \varphi \in D : \psi = \varphi'\} \supset \left\{\psi \in D: \int_{-\infty}^{\infty} \psi \, dx = 0\right\}$$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t) \, dt \Rightarrow \psi = \varphi' \quad \varphi \in C^\infty$$

$$\exists \varphi_1 \epsilon D: \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 \, dx = 1$$

$$\forall \varphi \in D \mapsto \varphi_0 = \varphi(x) - \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dx \ \text{(то есть } \varphi_0 \in D_0)$$

$$\langle y, \varphi_0 \rangle = 0$$

$$\langle y, \varphi \rangle = \left\langle y, \varphi_1(x) \int \varphi(x) \, dx \right\rangle = \int \varphi(x) \, dx \langle y, \varphi_1(x) \rangle$$

$$\langle y, \varphi_1(x) \rangle = \mathrm{C}$$

$$\int \varphi(x) \, dx \langle y, \varphi_1(x) \rangle = \langle C, \varphi \rangle$$

Значит $\{\psi \in D :\ \exists \varphi \in D : \psi = \varphi'\} \supset \left\{\psi \in D\colon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi \, dx = 0\right\}$

Это можно сформулировать в виде утверждения: для любой обобщённой функции существует первообразная и она единственна с точностью до аддитивной константы.

Лекция 6

Действия над обобщёнными функциями

Действия над обобщёнными функциями:

1) Дифференцирование
2) Умножение на гладкую функцию
3) Замена переменных
4) Предельный переход
5) Решение дифференциальных уравнений
6) Преобразования Фурье

Теорема. $f \in D'$, $supp\ f$ — компакт тогда и только тогда, когда $f \in E'$

Теорема. $f \in E' \Rightarrow \exists g \in L_1 loc$, $\exists n \in \mathbb{N}_0$: $f = g^{(n)}$ — обобщённая производная.

Теорема. $f \in E'$, $supp\ f = \{0\} \Rightarrow f = \sum_{k=0}^{n} C_k \delta^{(k)}(x)$

Теорема. $f \in D'$, $f = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(j)}$, $supp\ g_j \to \infty$

Спектральная теорема

Пусть H — гильбертово пространство, $A = A^*$ — самосопряжённый оператор. Тогда самосопряжённый оператор A подобен оператору умножения. (Это краткая формулировка спектральной теоремы)

В конечномерном пространстве $\mathbb{C}^n$ матрица самосопряженного оператора имеет диагональный вид: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

В бесконечномерном гильбертовом пространстве:

$\dim H = \infty$

$A = A^* \in k(H)$

$A \sim A_\alpha$ в l_2, где $A_\alpha e_i = \alpha_i e_i$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$Y(0) = Y_0$

$Y(x) = e^{Ax}Y_0$

1) Пусть X — банахово пространство, $A \in B(X)$, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,\ \ a_n \neq 0$
   $$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$
   $r\big(p(A)\big) = p(r(A))$
2) $f \in A(|z| < \|A\| + \varepsilon)$
   $$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
   $$f(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

Теорема. Существует единственный гомоморфизм $\varphi: A(|z| < \|A\| + \varepsilon) \to B(X)$ в пространство ограниченных операторов, которое обладает свойствами:

1) $\varphi(\mathbb{1}) = I$, где $\mathbb{1}$ — единичная функция, I — единичный оператор
2) $\varphi(z) = A$
3) $f_n \to f \Rightarrow \varphi(f_n) \overset{\|\cdot\|}{\to} \varphi(f)$
4) $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(g)$
   $\varphi(f \cdot g) = \rho(f) \cdot \varphi(g)$
5) $AB = BA$
   $f(A)f(B) = f(B)f(A)$
   $f(A) \coloneqq \varphi(A)$

Пример:

Пусть $A = A^*$ — самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве.

$f \in C[a,b]$

$\sigma(A) \subset [a,b]$ или $f \in C\big(r(A)\big)$

$f(A) = ?$

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,\ \ a_n \neq 0$$

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

$f \in C[a,b]$ $\exists\, p_n$-многочленов: $p_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Если многочлен имеет вещественные корни, то оператор $p_n(A)$ является самосопряжённым.

1) Все коэффициенты всех p_n — вещественны $\Rightarrow \big(p_n(A)\big) = \big(p_n(A)\big)^*$
   $\|p_n(A) - p_m(A)\| = r\big(p_n(A) - p_m(A)\big) = \max\limits_{|\lambda|}|p_n(\lambda) - p_m(\lambda)| \to 0$ при $m, n \to \infty$
   $B(H)$ — полно $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} p_n(A) =: f(A)$
   $q_n \rightrightarrows f$
   $p_1 q_1 \dots p_n q_n \rightrightarrows f$
   $p_1(A) q_1(A) \dots p_n(A) q_n(A)$ — фундаментальная
2) $\bar{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k t$
   а) $|p \cdot \bar{p}(t)| = |p^2(t)|$
   б) $\bar{p}(A) = (\bar{p}(A))^*$ в силу самосопряжённости оператора A
   в) $\|p^*(A)p(A)\| = \|p(A)\|^2$
   $p \cdot \bar{p}$ — имеет только вещественные коэффициенты
   $f \in C\big(r(A)\big)$
   $p_n \rightrightarrows f$
   $\overline{p_n} p \to |f|^2$
   $\{\overline{p_n} p\}$ — фундаментальная последовательность по пункту 1) $\Rightarrow$ фундаментальна и $p(A)$. Следовательно, $f(A) = \lim p_n(A)$

Спектральная теорема в терминах непрерывного функционального исчисления

<u>Теорема</u>. Пусть $A = A^*$ — самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует единственный гомоморфизм: $C\big(\sigma(A)\big) \to B(H)$:

1) $\varphi(\mathbb{1}) = I$, где $\mathbb{1}$ — единичная функция, I — единичный оператор
2) $\varphi(t) = A$
3) $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(g)$
   $\varphi(f \cdot g) = \rho(f) \cdot \varphi(g)$
4) Если $p_n \rightrightarrows f$, то $\varphi(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} \varphi(f)$
5) $\|\varphi(f)\|_{B(H)} = \|f\|_{C(\sigma(A))}$
   $\|\varphi(f)\|_{B(H)} \le \|f\|_{C[a,b]}$
6) $AB = BA$
   $f(A)f(B) = f(B)f(A)$
7) $\varphi\big(\bar{f}\big) = \big(\varphi(f)\big)^*$

<u>Определение</u>. Оператор $A \ge 0$, если $(Ax, x) \ge 0$

Спектр такого оператора является также неотрицательным.

Теорема. Существует единственный оператор $B > 0$, такой что $B^2 = A$.

Определение.

$A \to A^*A$

$\sqrt{A^*A} =: |A|$

Пример:

В $\mathbb{C}^n$ существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$f(A) = C\big(\sigma(A)\big)$

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$A = A^* \in K(H)$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k$$

$f(A) = \sum f(\lambda_k)(x, e_k) e_k$

Пример:

$L_2[0,1]$

$(Af)(x) = xf(x)$

$\sigma(A) = [0,1]$

$F \in C\big(\sigma(A)\big)$

$F(A)f = F(x)f(x)$

Пример:

$\Omega \in B$ (борелевская сигма-алгебра)

$\chi_\Omega(A)$

$\chi_{[\alpha,\beta]}(A)$, $\chi_{[\alpha,\beta]}(t)$

Свойства, которыми обладает функция $\chi_{[\alpha,\beta]}(A)$:

1) $\chi^2 = \chi$
2) $(\chi(A))^2 = \chi(A)$
3) $\bar{\chi}(t) = \chi(t)$
4) $(\chi(A))^* = \chi(A)$
5) $\chi_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2}(t) = \chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2}$
   $\chi_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2}(A) = \chi_{\Omega_1}(A) + \chi_{\Omega_2}(A)$

Лекция 7

Борелевские ограниченные функции на спектре

Пусть $A = A^* \in B(H),\ x, y \in H$

$f \in C\big(\sigma(A)\big)$

$F_{xy}(f) = (f(A)x, y)$

$\left|F_{xy}(f)\right| \leq \|f(A)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|f\|_{C(\sigma(A))}$

$F_{xy} \in (C\big(\sigma(A)\big))^*$

$$F_{xy}(f) = (f(A)x, y) = \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\, d\mu_{x,y}$$

$B\big(\sigma(A)\big)$ — ограниченные борелевские функции на $\sigma(A)$

$\forall f \in B\big(\sigma(A)\big)\ \ \exists f_n \to f$ поточечно и ограниченно

$f_n \in C\big(\sigma(A)\big)$

$$F_{xy}(f_n) = (f_n(A)x, y) = \int\limits_{\sigma(A)} f_n(t)\, d\mu_{x,y}$$

$$\int\limits_{\sigma(A)} f_n(t)\, d\mu_{x,y} \to \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\, d\mu_{x,y}$$

$(f_n(A)x, y) \to (Bx, y)$

$$(Bx, y) = \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\, d\mu_{x,y}$$

$f(A) \coloneqq B$

$f_n(A) \to f(A)$ (слабая операторная сходимость)

$\|f\|_B = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$

$\chi_\Omega(A) = ?$

$\Omega \in B$

$\chi_\Omega(A) = E_\Omega$

$\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega \Rightarrow E_\Omega^2 = E_\Omega$

$(A_n x, y) = (x, A_n y)$

$(A_n x, y) \to (Ax, y)$

$(x, A_n y) \to (x, Ay)$

Следовательно, $E_\Omega^* = E_\Omega$

$\chi_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} = \chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2}$

$E_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} = E_{\Omega_1} + E_{\Omega_2}$

$$(f(A)x, y) = \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\, d\mu_{x,y}$$

$$f(A) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda)\, dE_\lambda$$

$$(f(A)x, y) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda)(dE_\lambda x, y)$$

$E_\lambda = E_{(-\infty,\lambda)}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},\ Ae_i = \lambda e_i,\ \|e_i\| = 1$$

$$A = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda\, dE_\lambda$$

Циклические векторы

Определение. $A \in B(X), X$ — банахово пространство, x_0 — циклический вектор для A, если линейная оболочка орбиты образует плотное множество

$\overline{\langle x_0, Ax_0 \ldots A^n x_0 \ldots \rangle} = X$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ в } \mathbb{C}^n$$

Когда есть циклический вектор у оператора A?

$\exists\ x_0$ — циклический вектор тогда и только тогда, когда все λ_i различны.

Доказательство:

1) $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{n-1} \\ {\lambda_2}^{n-1} \\ \vdots \\ {\lambda_n}^{n-1} \end{pmatrix}$

   Если все λ_i различны, то эти вектора линейно независимы, так как этот определитель является определителем Вандермонда, который отличен от нуля тогда и только тогда, когда все λ_i различны.
2) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$, p — минимальный многочлен

   $deg\, p = n - 1$

   $A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} c_k A^k$

   $A^{n-1} x = \sum_{k=0}^{n-2} c_k A^k x$

Пример:

$L_2[-1,1]$

$Af(x) = x^2 f(x)$

Покажем, что у этого оператора нет циклического вектора.

Пусть f_0 — циклический вектор. Тогда

$\langle f_0, Af_1, A^2 f_2 \dots A^n f_n \rangle^{\perp} = \{0\}$

$A^n f_0 = x^{2n} f(x)$

а) Вещественное пространство.

$h(x) = x f_0(-x)$

$(h, A^n f_0) = \int_{-1}^{1} x^{2n+1} f_0(x) f_0(-x)\, dx = 0$

б) Комплексное пространство

$h(x) = x f_0(-x) f_0(x) \overline{f_0(-x)}$

$$(h, A^n f_0) = \int_{-1}^{1} x^{n+1} |f_0(x)|^2 |f_0(-x)|^2 dx$$

Теорема Стоуна-Вейерштрасса

Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Пусть $M \subset C[a,b]$.

Подалгебра M плотна в $C[a,b]$, если

1) $1 \in M$
2) $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2 \quad \exists\, f \in M : \ f(x_1) \neq f(x_2)$

Теорема. Пусть $A = A^*$ — самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H с простым спектром (другими словами, это оператор, у которого есть циклический вектор). Тогда существует μ — мера и унитарный изоморфизм

$H \xrightarrow{U} L_2([a,b],\mu)$, $\sigma(A) \in [a,b]$ такой, что коммутативна данная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "A"] \arrow[d, "U"'] & H \arrow[d, "U"] \\
L_2([a,b],\mu) \arrow[r, "B"] & L_2([a,b],\mu)
\end{tikzcd}$$

Где $Bf(t) = tf(t)$

Пример:

Пусть x_0 — циклический вектор в H.

$x_0 \xrightarrow{U} 1$

$Ax_0 \to t$

$A^n x_0 \to t^n$

$\mu[(\alpha,\beta)) = \left(E_{[\alpha,\beta)} x_0, x_0\right)$

$E_{[\alpha,\beta)} = E_\beta - E_\alpha = E_{(-\infty,\beta)}$

Лекция 8

Пусть $A = A^*$ — самосопряжённый оператор в гильбертовом сепарабельном пространстве H, у которого нет циклического вектора.

Теорема. Существует разложение $H = \bigoplus_{n=1}^{N} H_n$, $N \leq \infty$. У $A|_{H_n}$ есть циклический вектор в H_n.

Следствие. Существует $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ — мера на $\sigma(A)$ и существует унитарный изоморфизм $U : \bigoplus H_n \to \bigoplus L_2(\sigma(A), \mu_n)$ такой, что данная диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits^{N} H_n \arrow[r] \arrow[d, "U"'] & \bigoplus\limits^{N} H_n \arrow[d, "U"] \\
\bigoplus\limits^{N} L_2(\sigma(A), \mu_n) \arrow[r, "B"] & \bigoplus\limits^{N} L_2(\sigma(A), \mu_n)
\end{tikzcd}$$

$B|_{L_2(\sigma(A),\mu_n)}$ — оператор умножения на t в $L_2(\sigma(A), \mu_n)$

$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|] = \Delta_0$

$\Delta_n = \Delta_0 + 3\|A\|n$

$L_2(\mathbb{R}, \nu)$

$\nu = \Sigma \dfrac{1}{2^n} \mu_n$

Пример:

$S = \{H_i \in H : H_i \perp H_j \quad$ у $A|_{H_i}$ есть циклический вектор в $H_i\}$

Построим максимальный элемент:

$$H = \bigoplus_{i=1}^{N} H_i$$

Если это не максимальный элемент, то $\exists x \perp \bigoplus_{i=1}^{N} H_i$

Строим новое пространство $H_{N+1} = \overline{\langle x, Ax \ldots \rangle}$, которое больше $H = \bigoplus_{i=1}^{N} H_i$. Получаем противоречие.

Преобразование Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$\big(\hat{F}f\big)(y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\big(\check{F}f\big)(y) = \check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy}\, dx$$

1) Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\exists \hat{F}, \check{F}f$

   $$\big|\hat{f}(y)\big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1}$$

   $$sup\big|\hat{f}(y)\big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1}$$

   $f_n \xrightarrow{L_1} f \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$
   $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$
   $\big|f(x)e^{-ixy}\big| \leq |f| \in L_1$
2) $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ — непрерывные функции:
   $\hat{f}(y) \to 0$ при $(y) \to \infty$

Пример:

Прямое преобразование Фурье:

$$\sqrt{2\pi}\hat{\chi}_{(a,b)} = \int\limits_a^b e^{-ixy}\, dx = \frac{e^{-iby} - e^{-iay}}{-iy}$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\sqrt{2\pi}\hat{\chi}_{(a,b)} = \int\limits_a^b e^{ixy}\, dx = \frac{e^{iby} - e^{iay}}{iy}$$

Свойства оператора $\hat{F}$:

1) $\hat{F} \in B\big(L_1(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R})\big)$
2) $ker\, \hat{F} = \{0\}$

3) $Im\,\hat{F} \neq C_0(\mathbb{R})$

Условие Дини в точке x:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\colon \left|\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\,dt\right| < \varepsilon$$

Теорема. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Дини в точке x. Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \hat{f}(y) e^{ixy}\,dy$$

Теорема о гладкости функций

Теорема. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f} = \bar{o}\left(\frac{1}{|y|}\right) \quad |y| \to \infty$

Доказательство:

По индукции: $f \in L_1 \cap C^n$ и $f^{(j)} \in L_1,\ j = 1{,}2 \Rightarrow \hat{f} = \bar{o}\left(\frac{1}{|y|}\right)$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ixy}\,dx = fe^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iy\int f(x) e^{-ixy}\,dx$$

$$\forall a\ \ f(x) - f(a) = \int_{a}^{x} f'(x)\,dx$$

$$\exists f' \in L_1 \Rightarrow \exists \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow fe^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty} \to 0$$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ixy}\,dx = fe^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iy\int f(x) e^{-ixy}\,dx = \bar{o}(1)$$

Теорема. $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \cdot f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$

Доказательство:

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy}\,dx$$

1) $f(x)e^{-ixy} \in C^1$ по y
2) Для почти всех x: $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le g(x) \in L_1$

$|xf|$ является мажорантой, поэтому можно интегрировать по Лебегу.

$$\frac{d}{dy}\sqrt{2\pi}\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-ixy}\,dx$$

По индукции: $x^k f \in L_1, k = 0,1 \dots n \Rightarrow \hat{f} \in C^n$

Пространство Шварца

$$S = \left\{f \in C^\infty : \ \forall p, q \in \mathbb{Z}_+ \ \ \|f\|_{p,q} \coloneqq \sup_{\mathbb{R}}\left|x^p f^{(q)}(x)\right| < \infty\right\}$$

$F: S \to S$

$Mf = xf$

$Df = if'$

Тогда в S есть следующие соотношения:

1) $\hat{F}M = D\hat{F}$
2) $\hat{F}D = -M\hat{F}$
3) $\check{F}M = -D\check{F}$
4) $\check{F}D = M\check{F}$

$$i\frac{d}{dy}\int f(x)e^{-ixy}\,dx = i\int(-ix)f(x)e^{-ixy}\,dx$$

Определение. Пусть $(X, p_\alpha), \left(X, q_\beta\right)$ — полинормированные пространства с разным набором полунорм.

$p_\alpha \sim q_\beta$

$$p_\alpha(x) \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_{\beta_i}(x)$$

$$q_\beta(x) \le \sum_{i=1}^{m} b_j p_{\alpha_j}(x)$$

$$\|f\|_{p,q,1} = \int_{\mathbb{R}}\left|x^p f^{(q)}(x)\right|dx$$

$$\|f\|_{p,q,2} = (\int_{\mathbb{R}}\left|x^p f^{(q)}(x)\right|^2 dx)^{1/2}$$

Пример:

$$x^p f^{(q)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(t^p f^{(q)}(t)\right)' dt = \int_{-\infty}^{x} p t^{p-1} f^{(q)}\, dt + \int_{-\infty}^{x} t^p f^{(q+1)}\, dt$$

$$\left|x^p f^{(q)}(x)\right| \leq p\|f\|_{p-1,q,1} + \|f\|_{p,q+1,1}$$

Лекция 9

$\hat{F}: L_1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ — инъективен, не сюръективен.

$\hat{F}: S \to S$ — непрерывен, биективен.

$S \hookrightarrow L_2(\mathbb{R})$ плотно

Пример:

Пусть $f \in S', \varphi \in S$

$\langle \hat{F}f, \varphi \rangle = ?$

Пусть $f \in S$

$$\langle \hat{F}f, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int f e^{-ixy}\, dx \right) \varphi(y)\, dy = \langle f, \hat{F}\varphi \rangle$$

Пример:

$$\langle \widehat{\delta(x)}, \varphi \rangle = \langle \delta(x), \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0)$$

$$\hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int \varphi(x) e^{-ixy}\, dx \right)\Big|_{y=0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int \varphi(x) e^{-ixy}\, dx \right)\Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x)\, dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x)\, dx = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right\rangle$$

Интегральное равенство Парсеваля:

$f, g \in S$

$(\hat{f}, \hat{g})L_2 = (f, g)L_2$

$\|\hat{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$

Теорема Планшереля

Теорема Планшереля. Существует единственный U — унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R})$ такой, что для $f \in L_1 \cap L_2$

$U = \hat{F}$

Пример:

$f \in L_2$

В силу плотности вложения $S \hookrightarrow L_2(\mathbb{R})$, существует $f_n \in S: \ f_n \overset{L_2}{\to} f$

$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\| = \|f_n - f_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$

$\Rightarrow \exists \, lim \, \hat{f}_n =: Uf$

Пример:

$f \in L_2$

$f_N = f \cdot \chi_{[-N,N]} \in L_2[-N,N]$

$L_2[-N,N] \subset L_1[-N,N] \subset L_1(\mathbb{R})$

$g_N = \hat{f}_n$

$\exists \, L_2 = \underset{N\to\infty}{lim} g_N$

Пример:

$$\frac{x}{x^2+a^2} = M\frac{1}{x^2+a^2}$$

$$\hat{F}M\frac{1}{x^2+a^2} = D\hat{F}\frac{1}{x^2+a^2}$$

$$D\hat{F}\frac{1}{x^2+a^2} = i\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|y|}\right)$$

$$i\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|y|}\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn} y \, e^{-a|y|}$$

Пример:

$$\widehat{e^{-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Задача. Доказать, что в пространствах, где есть формула обращения ($\check{F}\hat{F} = I$) справедливо:

$$\left(\hat{F}^2 f\right)(x) = f(-x)$$

Это работает в пространствах S, S', L_2.

$\hat{F}^2 f = \hat{F}\hat{f}(x)$

$\hat{F}\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(y) e^{-ixy}\, dy$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(y) e^{-ixy}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(y) e^{i(-x)y}\, dy$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(y) e^{i(-x)y}\, dy = f(-x)$

Пример:

$\left\{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}_{n=0}^{\infty}$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$f_1 = e_0 = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_2 = Me_0 = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_3 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_4 = \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$

И так далее.

$\hat{F}e_1 = \hat{F}Me_0 = D\hat{F}e_0$ и так далее.

Оставаясь в тех же переменных: $i\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = -ixe^{-\frac{x^2}{2}}$

Преобразование Фурье в классе S'

Пример:

Посчитать преобразование Фурье от данной функции: $\widehat{P\frac{1}{x}}$

Формула Сохоцкого:

$\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$

$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx$

Посчитаем преобразование Фурье от этой функции:

$$\widehat{\frac{1}{x \pm i0}}$$

1) $\frac{1}{x \pm i0}$

$$\frac{1}{x - i\varepsilon}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{x - i\varepsilon} dx$$

$2\pi i e^{-i(i\varepsilon)y} = 2\pi i e^{\varepsilon y}$ при $y < 0$

0 при $y > 0$

$\varepsilon \to 0$

$$\widehat{\frac{1}{x - i0}} = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \theta(-y) = \sqrt{2\pi} i \theta(-y)$$

$$\widehat{\frac{1}{x - i\varepsilon}} = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ -2\pi i e^{-\varepsilon y}, & y < 0 \end{cases}$$

$$\widehat{\frac{1}{x + i0}} = -\sqrt{2\pi} i \theta(y)$$

$$\widehat{P\frac{1}{x}} = -\sqrt{2\pi} i \theta(y) + i\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2\theta(y) - 1) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} sgn\, y$$

Лекция 10

Преобразование Фурье (полнота системы)

Пусть $h \perp x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Покажем, что $he^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.

$\langle he^{-\frac{x^2}{2}}, x^n \rangle = 0$

$h \in L_2(\mathbb{R})$

Возьмем $a > 0$

$he^{-\frac{x^2}{2}} e^{a|x|} = he^{-\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{\frac{a^2}{2}} \in L_1(\mathbb{R})$

Значит $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ убывает экспоненциально.

$g(z) := \sqrt{2\pi}\widehat{he^{-\frac{x^2}{2}}} \in A(\mathbb{C})$

$\int h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixz}\, dx$

$\frac{d^n g}{dz^n} = \int h(x)(-ix)^n e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixz}\, dx$

$g^{(n)}(0) = (-1)^n \int h(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \left(h, x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = 0$

Следовательно, $g \equiv 0$

$he^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow h = 0$

Свёртка

Определение.

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt$$

Задача. $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\ f * g \in L_1(\mathbb{R})$

Решение:

$f(u)q(v) \in L_1(\mathbb{R}^2)$

$\int f(u)g(v)\, dv \in L_1(\mathbb{R})$

Свойства свёртки:

1) Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$
   Тогда $\exists\ f * g \in L_1(\mathbb{R})$
2) $f * g = g * f$
3) Пусть $f, g, h \in L_1$.
   Тогда $f * (g * h) = (f * g) * h$
4) Пусть $f, g, h \in L_1$.
   Тогда $f * (\alpha g * \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$
   f фиксируем, $f * g = S_f g$
5) Пусть $f \in L_1, g \in C^1 \cap L_1, g' \in L_1$.
   Тогда $f * g \in C^1$ и $(f * g)' = \int f(t) g'(x - t)\, dt$
6) $supp\ f * g \subset supp\ f + supp\ g$
   (То есть пусть $x \in supp\ f * g, t_1 \in supp\ f, t_2 \in supp\ g$. Тогда $x = t_1 + t_2$)
7) Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$.
   Тогда $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$
   Доказательство:
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\int f(t) g(x - t)\, dt \right) e^{-ixy}\, dx$$
   Пусть $x - t = s$
   $x = t + s$
   $dx = ds$
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\int f(t) g(x - t)\, dt \right) e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) \left(\int g(s) e^{-i(t+s)y}\, ds \right) dt$$
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) \left(\int g(s) e^{-i(t+s)y}\, ds \right) dt = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Пример:

$\chi_{[1,2]} * \chi_{[3,4]}$

$$\int \chi_{[1,2]}(t) \chi_{[3,4]}(x - t) dt = \int_1^{x-3} 1 \cdot dt = x - 4$$

$$\int \chi_{[1,2]}(t) \chi_{[3,4]}(x - t) dt = \int_{x-4}^{2} 1 \cdot dt = 6 - x$$

Свёртка обобщённой и основной функции

$\int f(t)\varphi(x-t)\,dt = \langle f(t), \varphi(x-t)\rangle$

Пусть $f \in D', \varphi \in D$. Тогда $f * \varphi = \langle f(t), \varphi(x-t)\rangle$

$\delta * \varphi = \langle \delta(t), \varphi(x-t)\rangle = \varphi(x)$

$\delta' * \varphi = \langle \delta'(t), \varphi(x-t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi'(x-t)(-1)\rangle = \varphi'$

Пример:

$\theta * \delta' * 1 \in D'$

$\theta * (\delta' * 1) = 0$

$(\theta * \delta') * 1 = 1$

$f_1, f_2 \in L_1, \varphi \in D$

$\langle f_{1^*} f_2, \varphi\rangle = \int \big(\int f_1(t) f_2(x-t)\,dt\big)\varphi(x)\,dx$

$\int \big(\int f_1(t) f_2(x-t)\,dt\big)\varphi(x)\,dx = \int f_1(t)\big(\int f_2(x-t)\varphi(x)\,dx\big)dt$

Пусть $x - t = s$

$x = t + s$

$dx = ds$

$\int f_1(t)\big(\int f_2(x-t)\varphi(x)\,dx\big)dt = \int f_1(t)\big(\int f_2(s)\varphi(t+s)\,ds\big)dt$

У функции $f_2(s)\varphi(t+s)\,ds = \psi(t)$ носитель некомпактный, как и у 1 в данном примере:

$\theta * \delta' * 1 \in D'$

$\theta * (\delta' * 1) = 0$

$(\theta * \delta') * 1 = 1$

$D'_+ = \{f_\epsilon D' : supp\, f c[0, +\infty]\}$

<u>Определение</u>. Пусть $f_1, f_2 \in D'_+, \varphi \in D$. Тогда

$\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \big\langle f, (t), \langle f_2(s), \varphi(t+s)\rangle\big\rangle$

Пример:

$\langle f * \delta, \varphi\rangle = \langle \delta(s), \varphi(t+s)\rangle = \langle f(t), \varphi(t)\rangle$

$S_\delta f = f$

Пример:

$$Af = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$A^n f = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$$

$$x_+ = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\psi_n = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(n)} = \frac{x_+^{\alpha-1}}{(n-1)!}$$

$$I_\alpha f = \psi_\alpha * f$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$I_{\frac{1}{2}}\theta = \psi_{\frac{1}{2}} * \theta = \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} dt = \frac{-2\sqrt{x-t}}{\sqrt{\pi}}\bigg|_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} x_+^{\frac{1}{2}}$$

$$I_{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}\theta = I_1\theta = x_+$$

Лекция 11

Свёртка двух функций

Пример:

$f, g \in L_1(\mathbb{R})$

$f^* g \in C_0$

g — фиксируем

f — меняем

$g * f = S_g f$

$\hat{F} S_g f = \sqrt{2\pi}\hat{g}\hat{f} = \sqrt{2\pi}\hat{g}\hat{F}f = B\hat{F}f$

$Bh = \sqrt{2\pi}\hat{g}h$

Пусть $g \in S', \hat{g} \in L_\infty$

$L_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{S_g} L_2(\mathbb{R})$

Данная диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{S_g} & L_2(\mathbb{R}) \\ \hat{F}\downarrow & & \downarrow\hat{F} \\ L_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{B} & L_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

Тогда оператор B заведомо ограниченный и подобен оператору умножения на функцию.

$\sqrt{2\pi}\hat{g} \in L_2$

Оператор Гильберта

Определение. Оператор Гильберта:

$$(Af)(x) = vp\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt$$

Где $f, g \in L_2(\mathbb{R})$

Задача. Показать, что A ограничен в L_2 и найти его спектр.

Решение:

$$(Af)(x) = vp\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt = \frac{1}{\pi}P\frac{1}{x} * f$$

$$\widehat{P\frac{1}{x}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn} y$$

$$Bh = \sqrt{2\pi}\left(-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\frac{1}{\pi}sgn\, y\, h(y) = -i\operatorname{sgn} y\, h(y)$$

$$\sigma(A) = \pm i$$

Пример:

$(T_a f)(x) = f(x-a)$ в $L_2(\mathbb{R})$

$$\sigma(T_a) = ?$$

$$T_a^{-1}f = f(x+a)$$

Пусть $t = x - a$

$$x = t + a$$

$$\hat{F}T_a = e^{-iay}\hat{F}$$

Свёртка в преобразовании Фурье

Пример:

$$l(t) = a_n f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_1 f^1 + a_0 f = g$$

$$f_{\text{частное}} = ?$$

$$l(f) = \delta(x)$$

$\varepsilon(x)$ — фундаментальное решение

$$f_{\text{частное}} = \varepsilon * g$$

$$l(f_{\text{частное}}) = l(\varepsilon) * g = \delta * g = g$$

Пример:

$$-y'' + y = \delta(x)$$

$$(D^2 + I)y = \delta(x)$$

$$\hat{F}(D^2 + I)y = \hat{F}\delta(x)$$

$$\left(Z^2\hat{F}y + \hat{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1+Z^2}$$

$$y = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixz}}{1+z^2}\,dz$$

$$y = 2\pi i\, res_i \frac{e^{ixz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{-x}}{2i} = \begin{cases} \pi e^{-x}, x > 0 \\ \pi e^{x}, x < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Частное решение:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} g(t) e^{-|x-t|}\,dt$$

Общее решение:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} g(t) e^{-|x-t|}\,dt + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ