МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 1

ШЕЙПАК
ИГОРЬ АНАТОЛЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КОСТОМАРОВА КИРИЛЛА АЛЕКСЕЕВИЧА

Содержание

Семинар 1

Метрические пространства

Определение. Метрическим пространством называют пару (X,ρ), где X - произвольное множество, ρ - функция, заданная на декартовом произведении и отображающая неотрицательные вещественные числа $\rho : X \times X \to [0; +\infty)$. Функция ρ удовлетворяет следующим свойствам:
1)$\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (неотрицательность).
2)$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность).
3)$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).
Функция ρ называется метрикой или расстоянием.
Примеры:

1)X_{discr}(дискретное пространство):X - любое множество, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$. Легко убедиться, что все свойства метрики выполняются.
2)$l_p(n)$ - множество последовательностей из n чисел с метрикой $\rho(x, y) = (\sum_{i=1}^{n}(|x_i - y_i|)^p)^{\frac{1}{p}}, 1 < p \leq \infty$. Если $p = \infty$, то $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n}|x_i - y_i|$. Неравенство треугольнка выполняется в силу неравенства Минковского, остальные аксиомы очевидны.
3а)C_{00} - последовательности вида $x = (x_1...x_n, 0...0)$ - финитные, то есть с определенного места будут стоять нули.
3б)C_0 - последовательности вида $x = (x_1...x_n...)$, причем $lim_{n\to\infty}x_n = 0$.
3в)C - последовательности вида $x = (x_1...x_n...)$, причем $\exists lim_{n\to\infty}x_n$ - который зависит от x. Во всех трех случаях метрика будет иметь вид: $\rho(x, y) = \sup\limits_{i\geq 1}|x_i - y_i|$.
4)l_p - бесконечные последовательности чисел: $\sum |x_i|^p < \infty$ при $p \in [1; +\infty)$. При $p = +\infty$: $\sup\limits_{i\geq 1}|x_i| < \infty$, которое обозначается как l_∞. Метрика будет иметь вид $\rho(x, y) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}, p < \infty \\ \sup\limits_{i\geq 1}|x_i - y_i|, p = \infty \end{cases}$. Неравенство треугольника - в точности неравенство Минковского, остальные аксиомы очевидны.
5)$C[a; b]$ - непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции с метрикой $\rho(f, g) = \max\limits_{[a;b]}|f(x) - g(x)|$.
6)$C_p[a; b]$ - непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции с метрикой $\rho(f, g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ при $1 \leq p < \infty$.
7)$C^n[a; b]$ - n раз непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$. Возможные метрики: $\rho_1(f, g) = \sum_{j=0}^{n} \max\limits_{[a;b]}|f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)|, \rho_2(f, g) = \max\limits_{0<j\leq n} \max\limits_{[a;b]}|f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)|$. Очевидно, что $\rho_2 \subset \rho_1$, но с другой стороны, если в случае второй метрики взять n+1 слагаемых, то получим соотношение между метриками: $\rho_2 \leq \rho_1 \leq$

$(n+1)\rho_2$.
8)$L_p(\Omega,\mu)$ - пространство Лебега. Здесь Ω - универсальное множество, M- σ - алгебра измеримых множеств, μ - σ - аддитивная мера, f - измеримые функции, такие, что $\int_\Omega |f(x)|^p d\mu < \infty, 1 \le p < \infty$. Метрика $\rho(f,g) = (\int_\Omega |f(x)-g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. Здесь нужно сделать уточнение. Мы помним, что в случае интеграла Лебега, разность функций может обратиться в ноль если точки, в которых они различны, имеют лебегову меру ноль. Поэтому пространство Лебега будет являться метрическим, если оно является множеством классов эквивалентности. Тогда при $p=\infty$ метрика примет вид: $\rho(f,g) = esssup|f(x)-g(x)|$, где $esssup = \underset{\mu(A)=0}{inf}\ \underset{\Omega\setminus A}{sup}|f(x)|$ - существенный супремум функции.
9)$W_p^n[a;b]$ - пространство измеримых и абсолютно непрерывных функций с классической мерой Лебега и метрикой $\rho(f,g) = (\sum\int|f^{(j)}(x)-g^{(j)}(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ при $p \le 1 < \infty$.

Открытые и замкнутые множества

Определение. Открытым шаром $B(x_0,r)$ с центром в точке x_0 и радиусом r называются все точки y, принадлежащие множеству, что $\rho(x_0,y) < r$.
Определение. Открытым шаром $B(x_0,r)$ с центром в точке x_0 и радиусом r называются все точки y, принадлежащие множеству, что $\rho(x_0,y) \le r$.
Определение. Множество $M \subset (X,\rho)$ называется открытым, если $\forall x \in M \exists B(x,\varepsilon) \subset M, \varepsilon > 0$.
Определение. Множество $M(X,\rho)$ называется замкнутым, если $X \setminus M$ - открыто.
Задача 1. Описать все открытые и замкнутые множества в дискретном пространстве.
Решение. Возьмем произвольную точку $x \in X_{discr}$ и открытый шар $B(x,\varepsilon), 0 < \varepsilon < 1$. Тогда очевидно, что в этом шаре не содержится больше ни каких точек, кроме x. Следовательно, $\{x\}$ - открытое множество.

Произвольное объединение открытых множеств - открыто. Поэтому, объединяя одноточечные множества, можно получить абсолютно произвольное множество $\Longrightarrow$ любое множество открыто. С другой стороны, дополнение к открытому - замкнутое $\Longrightarrow$ любое множество замкнуто.
Определение. Последовательность x_n сходится по метрике к $x (x_n \xrightarrow{\rho} x)$, если $\rho(x_n,x) \to 0$. Другими словами, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N\ \rho(x_n,x) < \varepsilon$, то есть все $x_n \in B(x,\varepsilon)$ при $n \ge N$.
Определение. Последовательность фундаментальна в метрическом пространстве (X,ρ), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n,m \ge N \rho(x_n,x_m) < \varepsilon$, то есть расстояние между элементами последовательности с далекими индексами сколь угодно маленькое.
Определение. Метрическое пространство (X,ρ) называется полным, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty$ - фундаментальная и $\exists \lim_{n\to x_n} x_n = x \in X$.
Задача 2. Описать все фундаментальные последовательности в дискретном пространстве.
Решение. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ и любое $\varepsilon \in (0;1)$. Мы знаем, что

метрика принимает только значения 0 или 1, поэтому для выполнения фундаментальности необходимо равенство $\varepsilon = 0$. Тогда при всех $n, m \geq N$ последовательность примет вид $\{x_1...x_{n-1}, x_n, x_n...x_n...\}$, то есть последовательность стабилизируется и стремится к $x_n \in X$. Отсюда же следует, что X_{discr} - полное пространство.

Задача 3. Показать, что C_{00} - неполное пространство.

Решение. По определению, X - множество последовательностей, которые имеют вид $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...x_k^{(n)}, , ,)$, где (n) - номер последовательности в X. Приведем пример последовательности, предел которой не лежит в X. Пусть $x^{(1)} = (1, 0, 0...), x^{(2)} = (1, \frac{1}{2}, 0...), ..., x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}...\frac{1}{n}, 0, 0...), x^{(m)} = (1, \frac{1}{2}...\frac{1}{n}...\frac{1}{m}, 0...)$. Рассмотрим метрику: $\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \underset{k}{max}|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{min(m,n)+1} \to 0$ при $m, n \to \infty$, то есть $x^{(m)}$ - фундаментальна. Учитывая, что $x_k^{(n)} = \frac{1}{k}$ при $m \geq k$ и устремляя m к бесконечности, получим предельную последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}...x_k^{(m)}...) \overset{m\to\infty}{\to} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}...\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}...)$, которая не лежит в C_{00}.

Задача 4. Показать, что C_0 - полное.

Решение. Пусть $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна в C_0, то есть $\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: $\underset{k\geq1}{max}|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon \implies \forall k|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$. Зафиксируем k и получим фундаментальную последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$. Мы знаем, что $x_k^{(n)} \in R, C$ - полны $\implies \forall k\ \exists \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ и $\forall m, n \geq N : \underset{k\geq1}{max}|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$. Устремив m к бесконечности, получим следующий переход: $\underset{k\geq1}{max}|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε и предельного перехода имеем оценку $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$, то есть последовательность сходится по метрике. Покажем, что $x = (x_1...x_k) \in C_0$. Рассмотрим k-ую координату и воспользуемся неравенством треугольника: $|x_k| = |x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}| \leq |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)}| < 2\varepsilon$. Первое слагаемое ограничивается в силу оценки при $n \to \infty$, а второе лежит в $C_0 \implies \lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} = 0$. Из этого неравенства следует, что k-ая координата стремится к нулю, то есть $x \in C_0$.

Задача 5. Показать, что $C[a; b]$ - полное.

Решение. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна в $C[a; b]$, то есть $\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall m, n \geq N : \underset{[a;b]}{max}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies \forall x \in [a; b]\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies \forall x \in [a; b]\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальная последовательность в полном пространстве R(C) $\implies \forall x \in [a; b]\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ - поточечная сходимость. Покажем что эта сходимость является равномерной. Имеем $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m \geq N$, но при $m \to \infty$ $\underset{[a;b]}{max}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies$ сходимость равномерная. Осталось доказать непрерывность функции, для чего оценим разность $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$, здесь $|x - x_0| < \delta$. Первое и третье слагаемое меньше ε в силу равномерной сходимости. Для оценки второго слагаемого зафиксируем $n \geq N$ и рассмотрим: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$, то есть функция непрерывна и пространство полное.

Предельные точки множеств

Определение. Точка x_0 - предельная точка множества $M \subset (x, \rho)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $b(x_0, \varepsilon) \cap M$ содержит бесконечно много точек.
Следствие. Если x_0 - предельная точка, то $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in M$ и $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.
Определение. Точка x_0 является точкой прикосновения множества M, если $\forall \varepsilon > 0$ $B(x_0, \varepsilon) \cap M = \emptyset$.
Определение. Точка x_0 называется изолированной для множества M, если $\exists \varepsilon > 0$ $B(x_0, \varepsilon) \cap M = \{x_0\}$.
Определение. Пусть $M \subset (X, \rho)$, тогда его замыкание $\overline{M} = M \cap \{$все предельные точки$\}$=все точки прикосновения.
Пример. Пусть X=R, $\rho(x, y)$=|x-y|, M=[1;2)∪{3}. Предельными точками будут являтся все точки отрезка [1;2], точками прикосновения - все точки объединения отрезков [1;2]∪{3}. Изолированной будет только точка {3}.
Свойства замыкания:
1) $\overline{M}$ - замкнутое множество.
2) $\overline{\overline{M}} = M$.
Задача 6. Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство, $M \subset X$. Доказать, что (M, ρ) - полное $\Leftrightarrow$ M - замкнуто.
Решение. Пусть (M, ρ) - полное и x_0 - предельная точка M $\implies$ $\exists x_n \in M : x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна $\implies$ $\lim x_n \in M$, то есть $x_0 \in M$. Мы показали, что M содержит все свои предельные точки, значит M - замкнуто.

Докажем в обратную сторону. Пусть M - замкнутое в (X, ρ) и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальная последовательность в $M \subset X$ $\implies$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна в X, кототое является полным $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ - предельная точка M, поэтому $x_0 \in M$ $\implies$ M - полное.

Всюду плотные и нигде не плотные множества

Определение. Множество $M \subset X$ всюду плотно в X, если $\overline{M} = X$.
Определение. Множество $M \subset X$ нигде не плотно, если $\forall$ шара B в X $\exists \tilde{B} \subset B$ - другой шар и $\tilde{B} \cap M = 0$.
Примеры.
1) $X = R, \rho(x, y) = |x - y|$. Q - множество рациональных чисел всюду плотно в R.
2) Множество, состоящее из точки $\{x_0\} \subset R$ - нигде не плотное множество.
3) N - множество натуральных чисел нигде не плотно в R.
4) Канторово множество - несчетное и нигде не плотное в [0;1].
Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если $\exists M \subset X$ - не более чем счетное и $\overline{M} = X \Leftrightarrow \exists$ не более чем счетное всюду плотное множество.
Задача 7. Показать, что $l_p, 1 \le p < \infty$ - сепарабельно.

Решение. По определению, $x \in l_p$, если $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n = n(x, \varepsilon) : (\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $y \in C_{00}$, причем $y_i \in Q$, тогда $\rho(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Второе слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ по определению, а в первом можно подобрать такие y_i, что $(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \implies \rho(x, y) < \varepsilon$, то есть l_p - сепарабельное.

Задача 8 Показать, что l_∞ - несепарабельно.

Решение Для начала сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $M \subset X$ и $\exists d > 0 : \forall x, y \in M\ \rho(x, y) \geq d$ и M - несчетно. Тогда X - несепарабельно.

Доказательство. Пусть X - несепарабельно $\implies$ $\exists N$ - не более чем счетное и всюду плотное :$\forall \varepsilon > 0 \bigcup\limits_{x \in N} B(x, \varepsilon) = X$. Тогда $\exists$ шар $B(x_0, \varepsilon)$, в котором содержится хотя бы 2 элемента из M. Пусть $\varepsilon = \frac{d}{3}$, а $x, y \in B(x_0, \frac{d}{3})$ и $x, y \in M$, тогда $d \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) < \frac{2d}{3}$ - противоречие, следовательно предположение о существование такого множества N неверно.

Вернемся к решению задачи. Пусть $M = \{x = (x_1, x_2 ... x_n ...)\}, x_i \in \{1, 0\} \implies$ M - несчетно(доказывается диагональным методом Кантора). Расстояние $\rho(x, y) = sup|x_i - y_i| = 1 \implies$ по вспомогательному утверждению l_∞ - несепарабельно.

Семинар 2

Отображение метрических пространств

Определение. Пусть $(X,\rho),(Y,d)$ - метрические пространства. Отображение f:$X \to Y$ называется непрерывным в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : \rho(x,x_0) < \delta \implies d(f(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$.
Определение. Отображение f равномерно непрерывно, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x_1,x_2 : \rho(x_1,x_2) < \delta \implies d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.
Определение. Отображение f - липшицево($f \in Lip(x,y)$), если $\exists r \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in X : d(f(x_1), f(x_2)) \leq r \cdot \rho(x_1,x_2)$.
Определение. Константой Липшица называется число $\underset{x_1,x_2}{sup}\frac{d(f(x_1),f(x_2))}{\rho(x_1,x_2)} = Lipf$.
Определение. Отображение f - сжимающее, если f - липшицево и $r \in [0:1)$.
Определение. Метрические пространства (X,ρ) и (Y,d) - изометрически изоморфны, если $\exists f : X \to Y$ такое, что:
1) f - биекция
2) $\forall x_1,x_2 \in X : \rho(x_1,x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$
Такие пространства можно считать неразличимыми.

Свойства полных метрических пространств

Теорема о неподвижной точке. Пусть (X,ρ) - полное метрическое пространство и $f : X \to X$ - сжимающее отображение $\implies \exists! x : f(x) = x$.
Пример.
1)Пусть $X = R \setminus \{0\}, \rho(x,y) = |x-y|, f(x) = \frac{x}{2}$ - сжимающее отображение, так как $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x-y|$. Для нахождения неподвижной точки нужно решить уравнение: $f(x) = x \implies \frac{x}{2} = x \Leftrightarrow x = 0$, которое в соответствии с теоремой имеет одно решение.
Задача 1. С помощью теоремы о неподвижной точке доказать, что существует предел последовательностей цепных дробей вида $(2; 2+\frac{1}{2}; 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}; ...)$ и найти его.
Решение. В качестве метрического пространства рассмотрим луч $[2;+\infty)$ - замкнутый в R $\implies$ X - полно. Пусть отображение задается формулой $f(x) = 2+\frac{1}{x}$, в качестве начальной точки возьмем x_0=2. Докажем сжимаемость: из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует цепочка неравенств $|f(x)-f(y)| = |f^{'}(c)||x-y| = \frac{1}{c^2}|x-y| \leq \frac{1}{4}|x-y|$, так как точка c лежит между двумя числами, которые не меньше двух, а производная функции имеет вид $f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}$. Для нахождения неподвижных точек решим уравнение: $2+\frac{1}{x} = x \implies x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, из которых только

$x = 1 + \sqrt{2}$ лежит в заданном интервале. Именно к этой точке сходится последовательность.

Определение. Системой замкнутых вложенных шаров называется последовательность шаров $\{B[x_n, r_n]\}_{n=1}^{\infty}$, причем $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n$.

Теорема. Пусть X - метрическое пространство. Тогда X - полно $\Leftrightarrow \forall \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \exists ! x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n, r_n \to 0$.

Примеры.

1) Проверим, что обязательно наличие замкнутости шаров. Пусть X=R, $B_n = (0, \frac{2}{n}) = B(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \implies \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

2) Убедимся, что пространство должны быть полным. Пусть $X = R \setminus \{0\}, B_n = B[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = (0, \frac{2}{n}) \implies \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

3) Проверим, что радиусы должны стремиться к нулю. Пусть X=N, метрику введем следующим образом: $\rho(m,n) = \begin{cases} 0, m = n \\ 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, m \neq n \end{cases}$, $B_n = B[n, 1 + \frac{2}{n}] = \{m \in N : \rho(m,n) \leq 1 + \frac{2}{n}\}$, то есть B_n - луч вида $[n; +\infty)$. Очевидно, что $B_n = [n; +\infty) \cap N = 0 \implies \cap B_n = 0$, так как каждый следующий шар будет выбрасывать из пересечения по одной точке.

Теорема Бэра о категориях. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство и $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n, \forall n X_n$ - нигде не плотное $\implies X$ - не полно.

Примеры.

1) Множество рациональных чисел можно представить в виде $Q = \bigcup\limits_{r_n \in Q}$.

2) $R \setminus \{0\}$ нельзя представить, так как оно не полно. Действительно, если $R \setminus \{0\} = \cup_{n=1}^{\infty} x_n$, тогда R=$(\cup_{n=1}^{\infty} x_n) \cup (\{0\}$ - полное пространство, представимое в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, что противоречит теореме Бэра.

Определение. (Y, d) - пополнение метрического пространства (X, ρ), если:

1) (Y,d) - полное

2) $\exists Y_0 \subset Y : Y_0 \cong X$ (изометрически изоморфны)

3) $\overline{Y_0} = Y$.

Теорема о пополнении метрического пространства. Пусть (X, ρ) - неполное метрическое пространство $\implies \exists$ пополнение (Y,d) и это пополнение единственно с точностью до изометрического изоморфизма, то есть если $\exists (Y_2, d_2)$ - другое пополнение, то $(Y, d) \cong (Y_2, d_2)$.

Пример. C_0 - пополнение C_{00}.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Доказать, что $C_1[0;1]$ - неполно.

Задача 2. Доказать, что C - полно.

Задача 3. Пусть $B[0;1]$ - пространство ограниченных функций на [0;1] с метрикой $\rho(f,g) = \underset{[0;1)}{(f(x) - g(x)}$. Доказать, что такое пространство полно и несепарабельно.

Задача 4. Доказать, что $C[a;b]$ - сепарабельно.

Задача 5. Привести пример метрического пространства, в котором $B_1(x_1, r_1) \subset B_2(x_2, r_2)$ при $r_1 > r_2$.

Задача 6. Введем пространство на Q с метрикой $\rho(a,b) = \begin{cases} 0, a = b \\ \frac{1}{2^n}, a \neq b \end{cases}$, где число n вычисляется из равенства: $a - b = 2^n \frac{c}{d}, \frac{c}{d}$ - несократимая дробь. Такая метрика называется 2-адической. Доказать, что $\rho(a, b) \leq max(\rho(a, c), \rho(c, b))$, а также, что все треугольники в таком пространстве равнобедренные, то есть из чисел $\rho(a, b), \rho(b, c), \rho(a, c)$ хотя бы два равны.

Семинар 3

Нормированные пространства

Разберем задачи из домашнего задания.

Задача 1. Доказать, что $C_1[0;1]$ - неполно.

Решение. Вспомним, что $C_1[0;1]$ - пространство непрерывных функций с метрикой $\rho(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$. Возьмем точку $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, n\geq 3$ и определим последовательность функций в таком виде: $f_n(x)=\begin{cases}0, x\in[0;\frac{1}{2}]\\ 1, x\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{n};1)\\ n(x-\frac{1}{2}), x\in[\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]\end{cases}$. Убедимся, что последовательность фундаментальна. Очевидно, что она непрерывна, а расстояние между двумя членами последовательностями равно $\int|f_n-f_m|dx=\frac{1}{2}|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}|\to 1$ при $n,m\to\infty$, то есть последовательность фундаментальна.

Пусть последовательность стремится к функции g. На отрезке $[0;\frac{1}{2}]$ функция $g\equiv 0$. Действительно, если $\exists x_0\in[0;\frac{1}{2}]$ и $g(x_0)>0$(случай с $g(x_0)$ рассматривается аналогично), то $\exists c>0: g(x_0)>c$ и $\exists$ окрестность $u(x_0): g|_{u(x_0)}>\frac{c}{2}$, что $\rho(f_n,g)>|u(x_0)|\cdot\frac{c}{2}$, что противоречит пределу $\int|f_n-f_m|dx=\frac{1}{2}|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}|\to 0$, то есть $g=0$ на $[0;\frac{1}{2}]$. С другой стороны, на $[\frac{1}{2};1]g\equiv 1$. Если это не так, то $\exists x_0\in[\frac{1}{2};1]: g(x_0)<1$(случай с $g(x_0)>1$ рассматривается аналогично), $\exists c\in(0;1), u(x_0)$, что влечет неравенство $\rho(f_n,g)>|u(x_0)|\cdot\frac{c}{2}$, которое, как и в первом случае, противоречит фундаментальности. В итоге, мы получаем, что $g(x)=\begin{cases}0, x\in[0;\frac{1}{2}]\\ 1, x\in[\frac{1}{2};1]\end{cases}$, то есть функция не является непрерывной и не принадлежит $C_1[0;1]$, поэтому последовательность сходится к элементу, который не принадлежит пространству, и по определению, пространство не полно.

Задача 2. Доказать, что C - полно.

Решение. Пусть $x^{(n)}=(x^{(1)}...x^{(k)}...)$ - фундаментальна, то есть $\exists N=N(\varepsilon):$ $\forall n,m\geq N\ \rho(x^{(n)},x^{(m)})<\varepsilon$, где $\rho(x^{(n)},x^{(m)})=\underset{k\geq 1}{sup}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|$. Очевидно, что обе последовательности стремятся к пределу а, так как в противном случае $x_k^{(n)}\to a, x_k^{(m)}\to b$ и при больших k неравенство бы не выполнялось для $\varepsilon<|b-a|$. Тогда расстояние можно записать в виде: $\rho(x^{(n)},x^{(m)})=\underset{k\geq 1}{sup}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|=\underset{k\geq 1}{sup}|(x_k^{(n)}-a)-(x_k^{(m)}-a)|=\underset{k\geq 1}{sup}|y_k^{(n)}-y_k^{(m)}|$. Но $\{y^{(n)}\}\in C_0, \{y^{(m)}\}\in C_0$, полноту которого мы доказывали на прошлом семинаре. Значит, C - полное.

Задача 3. Пусть $B[0;1]$ - пространство ограниченных функций на [0;1] с метрикой $\rho(f,g)=\underset{[0;1)}{(f(x)-g(x))}$. Доказать, что такое пространство полно и несепарабельно.

Решение. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна, то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n,m\geq$

$N \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies \forall x \in [0;1] |f_m(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies \forall x \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна в R(C) и $\forall x \in [0;1] \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Перейдем к пределу во втором неравенстве, зафиксировав n и устремив m к бесконечности: $\sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Оценим функцию f(x) при $n \geq N$: $|f(x)| = |f - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + c(n)$, где $c = c(n) : sup|f_n(x)| \leq \varepsilon c$, так как $f_n \in B[0;1]$. Мы получаем, что предельная функция f(x) - ограничена, поэтому лежит в $B[0;1] \implies$ это пространство полно.

Для доказательства несепарабельности достаточно показать, что $\exists d > 0, \exists M$ - несчетное и лежащее в $B[0;1]$, что $\forall f, g \in M, f \neq g : \rho(f,g) \geq d$. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;t] \\ 1, x \in (t;1] \end{cases}$. Множество таких функций несчетно, так как каждая из них однозначно определяется точкой на отрезке [0;1], мощность которых континуум. Тогда расстояние между такими функциями равно $\rho(f(t_1), f(t_2))$ при $t_1 \neq t_2$. Возьмем d=1 и условие несепарабельности выполнится по утверждению с предыдущего семинара.

Задача 4. Доказать, что $C[a;b]$ - сепарабельно.

Решение. Мы помним, что $\forall f\ \forall \varepsilon > 0\ \exists$ аппроксимирующий многочлен $p_n : \rho(f, p_n) < \varepsilon$, где $\rho(f, p_n) = \max\limits_{[a;b]} |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$. Любой многочлен можно представить в виде ряда $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, при этом $\exists b_k \in Q : q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ и $\max\limits_{[0;1]} |p_n(x) - q_n(x)| < \varepsilon$. Тогда из неравенства треугольнка получим: $\rho(f, q_n) < 2\varepsilon$. Возьмем в качестве M - множество многочленов с рациональными коэффициентами, которое является счетным и всюду плотным, значит $C[a;b]$ - сепарабельно.

Задача 5. Привести пример метрического пространства, в котором $B_1(x_1, r_1) \subset B_2(x_2, r_2)$ при $r_1 > r_2$.

Решение. Пусть X=N, $\rho(n,m) = |n - m|$. Возьмем в качестве $B_1 = B(1,4) = \{1,2,3,4\}, B_2 = B(3,3) = \{1,2,3,4,5\}$. Отсюда видно, что $B_1 \subset B_2$, но $r_1 > r_2$.

Задача 6. Введем пространство на Q с метрикой $\rho(a,b) = \begin{cases} 0, a = b \\ \frac{1}{2^n}, a \neq b \end{cases}$, где число n вычисляется из равенства: $a - b = 2^n \frac{c}{d}, \frac{c}{d}$ - несократимая дробь. Такая метрика называется 2-адической. Доказать, что $\rho(a,b) \leq max(\rho(a,c), \rho(c,b))$, а также, что все треугольники в таком пространстве равнобедренные, то есть из чисел $\rho(a,b), \rho(b,c), \rho(a,c)$ хотя бы два равны.

Решение. Пусть a,b,c$\in Q$, тогда $a - c = 2^m \frac{p}{q}, c - b = 2^k \frac{r}{s}$, где $m,k,p,r \in Z, q,s \in N, a \neq c \neq b$. Сложим эти два равенства: $a - b = 2^m \frac{p}{q} + 2^k \frac{r}{s} = 2^k (\frac{2^{m-k} \cdot p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s})$, здесь без ограничения общности можно считать, что $m \geq k$. При $m > k$ числитель и знаменатель дроби нечетны, тогда $\rho(a,b) = \frac{1}{2^k}$(в силу заданной нами метрики), что равняется $\rho(a,c)$. Если же m=k, то $a - b = 2^{k+l} \cdot \frac{t}{w}$, так как в числителе стоит четное число и за скобку можно вынести множитель 2^l. Имеем, $\rho(a,b) = \frac{1}{2^{k+l}}$ и это расстояние меньше, чем $\rho(b,c)$. Получаем, что $\rho(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, m > k \\ \frac{1}{2^{k+l}}, m \geq k \end{cases} = max(\rho(a,c), \rho(b,c))$, тем самым доказав первый пункт.

Покажем, что среди расстояний $\rho(a,b), \rho(a,c), \rho(b,c)$ как минимум два расстояние равны. Без ограничения общности считаем, что $\rho(a,b) < \rho(a,c) < \rho(b,c)$. Но по доказанному первому пункту имеем: $\rho(b,c) \leq max(\rho(a,b), \rho(a,c)) = \rho(a,c)$ - противоречие с первоначальным предположением.

Определение. Линейное пространство X над полем K(R,C) называется нормированным, если задана функция $\|\cdot\| : x \to [0; +\infty)$ такая, что:

1) $\forall x \in X \ : \|x\| > 0$ и $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\forall \alpha \in K \ , \forall x \in X \ : ||\alpha x|| = \alpha ||x||$.

3) $\forall x, y \in X \ : ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Функция $||\cdot||$ называется нормой.

Определение. Элемент x_n сходится по норме ($x_n \xrightarrow{||\cdot||} x$), если $||x_n - x|| \to 0$.

Определение. Метрика $\rho(x,y)$ инвариантна относительно сдвигов, если $\rho(x,y) = \rho(x-z, y-z)$.

Нормированное пространство можно преобразовать в метрическое, чтобы сходимость по метрике согласовывалась со сходимостью по норме. Для этого необходимо ввести метрику вида: $\rho(x,y) = ||x-y||$. Таким образом, любое нормированное пространство является метрическим. Обратное, кстати, неверно, так как метрическое пространство с нелинейным множеством нельзя преобразовать в нормированное линейное пространство.

Примеры.

1) Пусть S - метрическое пространство любых последовательностей. Сходимость определим следующим образом: $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)} ... x_k^{(n)} ...) \xrightarrow{S} x = (x_1, x_2 ... x_k ...)$ если $\forall k = 1, 2 ... \ x_k^{(n)} \to x_k$ при $n \to \infty$.

2) Все пространства с первого семинара, за исключением дискретного, построены по норме, то есть $\rho(x,y) = ||x-y||$.

Задача 7. Показать, что если ρ - метрика, то $\rho_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$ - метрика.

Решение. Аксиомы симметричности и неотрицательности очевидны. Проверим неравенство треугольника, для чего введем функцию $f(t) = \frac{t}{1+t}$ при $t \geq 0$. Она строго возрастающая, поэтому $f(t_1) < f(t_2)$ при $t_1 < t_2$. Подставим вместо аргументов t метрики: $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \implies f(\rho(x,y)) \leq f(\rho(x,z)) + f(\rho(z,y))$. Раскроем эту функцию и получим: $\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leq \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} \leq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)} = \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y)$, то есть неравенство треугольника выполнено.

Задача 8. Показать, что в S есть метрика, инвариантная относительно сдвигов, причем $\rho(x^{(n)}, x) \to x \Leftrightarrow x^{(n)} \to x$, но не существует нормы, которая бы задавала покоординатную сходимость.

Решение. Пусть $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|} \leq \sum \frac{1}{2^k} = 1$. Возьмем последовательность и рассмотрим расстояние, тогда: $\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)} - x_k|} \to 0 \Leftrightarrow x_k^{(n)} \to x_k, k = 1, 2 ...$. Так как ряд мажорируется суммой $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \forall n$, то сходимость равномерная и можно перейти к пределу по n. Тогда из условия $x_k^{(n)} \to x_k \implies \lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) \to 0$, то есть из покоординатной сходимости следует и сходимость по метрике.

Покажем, что из сходимости по метрике следует покоординатная сходимость. Пусть $\rho(x_n, x) \to 0$, при $n \to \infty$ и $\exists k_0, \ \exists \varepsilon, \ \exists n_j \to \infty : |x_{k_0}^{(n_j)} - x_{k_0}| \geq \varepsilon$. Тогда из строгой монотонности следует, что $\frac{|x_{k_0}^{(n_j)}-x_{k_0}|}{1+|x_{k_0}^{(n_j)}-x_{k_0}|} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \implies \rho(x^{(n_j)},x) \geq \frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, что противоречит покоординатной сходимости.

Докажем теперь, что нет нормы, задающей покоординатную сходимость. Пойдем от обратного, пусть $\exists||\cdot||$. Рассмотрим последовательность $e_n = (0,0...\underset{n}{1},0,0...)$, $\rho(e_n,0) = \frac{1}{2^{n+1}}$, причем $||e_n|| = \alpha_n \neq 0$. Пусть $y_n = \frac{e_n}{\alpha_n} \implies ||y_n|| = 1$ и $\rho(y_n,0) = \frac{1}{2^n}\frac{\frac{1}{\alpha_n}}{1+\frac{1}{\alpha_n}} \to 0$, при $n \to \infty$. Получим, что последовательность по метрике стремится к нулю, а по норме - к единице, то есть метрика и норма не согласованы.

Определение. Банаховым пространством называется полное и нормированное пространство.

Семинар 4

Базисы в нормированных пространствах

Определение. Пусть $(X, ||\cdot||)$ - нормированное пространство, $\{e_\nu\}_{\nu\in N}$ - система векторов образует базис Гамеля, если:
1) $\{e_\nu\}$ - линейно независимая система
2) $\forall x\ \exists$ представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_{\nu_k}$
Определение. Пусть $(X, ||\cdot||)$ - сепарабельное нормированное пространство. Набор векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется базисом Шаудера, если:
1) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - линейно независимая система
2) $\forall x\ \exists!$ представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $||x_k - \sum_{k=1}^{\infty}|| \to 0$ при $n \to \infty$
Задача 1. Пусть задана последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $e_n = (0, 0...0, \underset{n}{1}, 0, 0...)$. Доказать, что это базис в $C_0, l_p, 1 \le p < \infty$, но не базис в C. При этом, если ввести вектор $e_0 = (1, 1, 1...)$, то система $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ - базис в С.
Решение. Будем решать задачу отдельно для каждого случая.
1) Покажем, что эта система - базис в C_0. Пусть $x = (x_1, x_2...x_n...) \in C_0, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Тогда очевидно, что $||x - \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k|| = \underset{k>n}{max}|x_k| < \varepsilon$. Линейная независимость очевидна, значит это базис Шаудера.
2) Система - не базис в С. Пусть $e_0 = (1, 1...1..) \in C$. Тогда $e_0 \ne \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot e_k$, так как $||e_0 - \sum_{k=1}^{n} e_k|| = ||(0, 0...0, 1, 1...1)|| = 1 \implies$ сходимости нет.
3) $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ - базис в С. Пусть $x \in C, x = (x_1, x_2, x_3...x_k...)$ и $\lim x_k = x_0$. Введем $\tilde{x} = x - e_0 x_0 = (x_1 - x_0, x_2 - x_0...x_k - x_0..)$. Очевидно, что $\tilde{x} \in C_0, \tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_0)e_k \implies ||\tilde{x_k} - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_0)e_k|| \to 0$ и $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_0)e_k + x_0 e_0$.
4) Базис в $l_p, 1 \le p < \infty$. Пусть $x \in l_p, x = (x_1, x_2...), \sum |x_k|^p < \infty$. Тогда $||x|| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ и поскольку этот ряд сходится, то $\forall\varepsilon\ \exists n = n(\varepsilon, x) : (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Норма разности примет вид: $||x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k|| = (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \implies x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.
5) Не базис в l_∞. На прошлых семинарах мы показывали, что l_∞ - несепарабельно, поэтому на нем нельзя ввести базис Шаудера.

Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение. Пусть H - линейное пространство над R(C). Введем функцию двух компонент $H \times H \to K$. Эта функция называется скалярным произведением, если:
1) $\forall x \in H : (x, x) \ge 0$ и $(x, x) \Leftrightarrow x = 0$
2) $\forall \alpha, \beta \in K\ \forall x, y, z \in H : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

3) $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
Если на H задано скалярное произведение, то пространство H называется евклидовым.

Примеры:

1) Пространство C^n с элементами $x = (x_1 ... x_n)$ и скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ является евклидовым.

2) Пространство l_2 со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_y \overline{y_i}$.

3) Пространство $L_2(\Omega, \mu)$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu$.

Определение. Пусть H - евклидово пространство. Будем говорить, что $x \perp y$(x ортогонален y), если $(x, y) = 0$.

Определение. Пусть M - произвольное множество в евклидовом пространстве H. Тогда $M^\perp = \{y \in H : \forall x \in M \ (x, y) = 0\}$ - ортогональное дополнение к M.

Определение. Неравенство Коши-Буняковского: H - евклидово $\implies$ $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$.

Следствие. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $\sqrt{(x, x)}$ обладает свойством нормы. Проверим аксиомы нормы:

1) $\sqrt{(x, x)} \geq 0$ и $\sqrt{(x, x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)}$

3) $(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + 2Re(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2$

Определение. Норма $\sqrt{(x, x)} = ||x||$ называется евклидовой.

Определение. Евклидово пространство, полное по евклидовой норме, называется гильбертовым пространством.

Теорема(Обобщенная теорема Пифагора). Если $x \perp y$, то $||(x+y)||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Доказательство. $||(x + y)||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = ||x||^2 + ||y||^2$.

Теорема(Тождество параллелограмма). $||(x+y)||^2 + ||(x-y)|^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

Доказательство. $||(x+y)||^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y) = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

Верно и обратное утверждение, если выполняется тождество параллеллограмма, то норма - евклидова.

Задача 2. Показать, что в пространстве $C[a; b]$, норма $||f|| = \max\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$ - не евклидова.

Решение. Покажем, что не выполняется тождество параллелограмма. Известно, что линейной заменой всегда можно свести отрезок [a;b] к отрезку [0;1]. Возьмем функции $f \equiv 1, g(x) = x$, тогда $||f|| = ||g|| = 1, ||f + g|| = 2, ||f - g|| = 1$. Получим, что $||(x+y)||^2 + ||(x-y)||^2 = 4 + 1 = 5, 2||x||^2 + 2||y||^2 = 2 + 2 = 4$, то есть тождество параллелограмма не выполняется, поэтому норма не евклидова.

Задача 3. Доказать, что скалярное произведение по каждому аргументу является непрерывной функцией.

Решение. В силу симметричности, достаточно доказать это для одного аргумента. Если $x_n \to x$ по евклидовой норме, то $\forall y \ (x_n, y) \to (x, y)$. Рассмотрим модуль разности $|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \leq ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$.

Задача 4. Показать, что если H - евклидово пространство, $M \supset H$ - произвольное множество, тогда $M^\perp$ - замкнутое линейное пространство.

Решение. По определению, $M^\perp = \{y \in H : \forall x \in M\ (x, y) = 0\}$. Пусть $y_1, y_2 \in M^\perp, x \in M$, тогда $(\alpha y_1 + \beta y_2, x) = \alpha(y_1, x) + \beta(y_2, x) = 0 \implies \alpha y_1 + \beta y_2 \in M^\perp$, то есть $M^\perp$ - линейно.

Докажем замкнутость. Пусть y_0 - предельная точка $M^\perp \implies \exists y_n \in M^\perp, y_n \to y$. Тогда $\forall x \in M (y, x) = \lim_{n\to\infty}(y_n, x) = 0 \implies y \in M^\perp$, то есть $M^\perp$ - замкнуто.

Теорема. Пусть H - гильбертово пространство, H_0 - замкнутое подпространство. Тогда $\exists H_1$ - замкнутое, что $H = H_0 \oplus H_1$. Более того, $H_1 = H_0^\perp$.

Лемма о перпендикуляре. Пусть H - гильбертово пространство, H_0 - замкнутое подпространство и $x \notin H_0 \implies \exists x_0 \in H_0 : ||x - x_0|| = \inf\limits_{y\in H_0} ||x - y|| = dist(x, H_0)$.

Задача 5. Пусть $H_0 = \{x : \sum_{k=1}^\infty x_k = 0\} \subset l_2$. Найти $H_0^\perp$.

Решение. Пусть $e_1 = (1, -1, 0...) \in H_0$, тогда $x \perp e_1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$. Если $e_2 = (1, 0, -1, 0...) \in H_0$, тогда $x_\perp e_2 \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0 \implies x_1 = x_3$. Продолжая по индукции до бесконечности, получим, что $x_1 = x_2 = ... = x_n \implies x = (x_1, x_1...x_1...)$. Мы знаем, что $x \in l_2 \implies \sum |x_1|^2 < \infty \Leftrightarrow x_1 = 0 \implies H_0^\perp = \{0\}$.

Определение. Пусть X - линейное пространство над полем K и заданы две нормы $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$. Нормы называются эквивалентными, если $\exists m, M > 0 : \forall x \in X : m||x||_2 \le ||x||_1 \le M||x||_2$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Пусть X - линейное пространство над полем R(C) и $dimX < \infty$. Показать, что все нормы на таком пространстве эквивалентны.

Задача 2. Построить $B[0; 1]$ в $l_p(2)$ с нормой $||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$ и $||x||_\infty = max(|x_1|, |x_2|)$.

Задача 3. Построить последовательность $x^{(n)} \in l_1 \cap l_2$, которая сходится в l_2 и не сходится в l_1.

Задача 4. Пусть $p_1 > p_2$. Показать, что $l_{p_2} \subset l_{p_1}$.

Задача 5. Возьмем пространство $L_2[0; 1]$. Пусть $H_0 = \{p(x) = \sum_{k=1}^n a_n x^k, n \in N, x_k \in Q\}$, то есть H_0 - многочлены с рациональными коэффициентами, равные нулю при $x = 0$. Найти $H_0^\perp$.

Задача 6. Привести пример евклидового пространства H, замкнутого подпространства H_0 таких, что $H_1 = H_0^\perp$ и $H \ne H_0 \oplus H_1$.

Задача 7. Возьмем пространство l_2 и пусть $H_n = \{x : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$. Найти $dist(e_1, H_n)$, где $e_1 = (1, 0, 0...)$.

Семинар 5

Ортонормированные системы в евклидовых пространствах

Начнем с разбора домашнего задания.

Задача 1. Пусть X - линейное пространство над полем R(C) и $dimX < \infty$. Показать, что все нормы на таком пространстве эквивалентны.

Решение. Пусть $||x||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^2|}$ - евклидова норма и $\exists$ базис $e_1, e_2...e_n : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Введем $||\cdot||$ - произвольная норма, тогда $||x|| = ||\sum_{i=1}^n x_i e_i|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| ||e_i|| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n ||e_i||^2)^{\frac{1}{2}} = M \cdot ||x||_e$.

С другой стороны, $||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y|| \implies |||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| \leq M||x - y||_e$. Рассмотрим сферу $S^{n-1} = \{x : ||x||_e = 1\}$ - компактное множество в X. Норма $|| \cdot ||$ - непрерывная функция на S_{n-1}, то $\exists \underset{||x||_e=1}{min} ||x|| = m > 0$. Возьмем $x \neq 0$ и нормируем его, тогда $||\frac{x}{||x||_e}|| \geq m \implies ||x|| \geq m \cdot ||x||_e$.

Задача 2. Построить $B[0; 1]$ в $l_p(2)$ с нормой $||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$ и $||x||_\infty = max(|x_1|, |x_2|)$.

Решение. Возьмем $p = 1 \implies |x_1| + |x_2| \leq 1$. Если $x_1, x_2 > 0$, то $x_1 + x_2 = 1 \implies x_1 \leq 1 - x_2$. Учитывая симметричность, получим квадрат с вершинами (-1;0), (0;1), (1;0), (0;-1). При $p = \infty, max(|x_1|, |x_2|) \leq 1$, то есть круги - те же квадраты с вершинами в точках (-1;1), (-1;-1), (1;-1), (1;1). Учитывая непрерывность, при изменении параметра р, круги будут стягиваться к предыдущему квадрату.

Задача 3. Построить последовательность $x^{(n)} \in l_1 \cap l_2$, которая сходится в l_2 и не сходится в l_1.

Решение. Пусть $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}...\frac{1}{n}, 0, 0...) \to (1, \frac{1}{2}...\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, 0) \notin l_1$, но $\in l_2$.

Задача 4. Пусть $p_1 > p_2$. Показать, что $l_{p_2} \subset l_{p_1}$.

Решение. Если $x \in l_{p_2} \implies \sum |x_i|^{p_2} < \infty$ и $lim|x_i|^{p_2} \to 0 \implies \lim x_i = 0 \exists k : \forall i > k : |x_i| < 1, |x_i|^{p_1} < |x_i|^{p_2} \implies \sum_{i>k} |x_i|^{p_1} \leq \sum_{i>k} |x_i|^{p_2} < \infty$.

Задача 5. Возьмем пространство $L_2[0; 1]$. Пусть $H_0 = \{p(x) = \sum_{k=1}^n a_n x^k, n \in N, x_k \in Q\}$, то есть H_0 - многочлены с рациональными коэффициентами, равные нулю при $x = 0$. Найти $H_0^\perp$.

Решение. Множество всех многочленов ортогонально нулю. Покажем, что $H_0^\perp = \{0\}$. Пусть $p_n = (x - 1)^{2n-1} + 1 \in H_0, ||p_n - 1||_{L_2}^2 = \int_0^1 (x - 1)^{4n-2} dx = \frac{1}{4n-3} \to 0$, то есть $1 \in \{H_0^\perp\} \implies \{H_0^\perp\} = \{0\}$.

Задача 6. Привести пример евклидового пространства H, замкнутого подпространства H_0 таких, что $H_1 = H_0^\perp$ и $H \neq H_0 \oplus H_1$.

Решение. Пусть $C_2 = [-1; 1], (f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, ||f|| = (\int_{-1}^1 f^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $H_0 = \{f \in C[0; 1], f|_{[-1;0]} \equiv 0\}, H_0^\perp = \{f \in C[-1; 1], f|_{[0;1]} \equiv 0\}, H_0 \oplus H_0^\perp = \{f \in C[-1; 1] : f(0) = 0\} \neq C_2[-1; 1]$.

Задача 7. Возьмем пространство l_2 и пусть $H_n = \{x : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$. Найти $dist(e_1, H_n)$, где $e_1 = (1, 0, 0...)$.

Решение. Пусть $l_2 = H_n \oplus H_n^{\perp}, dist(x, H_n) = ||x_1||, x \in l_2, x_0 \in H_n, x_1 \in H^{\perp}$. На прошлом семинаре мы получили, что $H_n^{\perp} =< (1, 1, 1...\underset{n}{1}, 0, 0...) >$. Тогда $e_1 - a(1, 1, 1...1, 0, 0...) \in H_n \implies (1 - na, 1...1, 0, 0...) \in H_n \implies 1 - na = 0 \implies a = \frac{1}{n}$. Можно представить вектор в виде суммы: $e_1 - \frac{1}{n}(1, 1...1, 0, 0...) + \frac{1}{n}(1, 1...1, 0, 0...) = e_1$, причем $e_1 - \frac{1}{n}(1, 1...1, 0, 0...) \in H_n$, $\frac{1}{n}(1, 1...1, 0, 0...) \in H_n^{\perp}$ и тогда $dist^2 = ||\frac{1}{n}(1, 1...1, 0, 0...) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \implies dist = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Определение. Пусть H - евклидово сепарабельное пространство, $dimH = \infty$. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.
Определение. Пусть H - евклидово сепарабельное пространство и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система. Коэффициенты $x_k \in (x, e_k)$ называются коэффицентами Фурье вектора x по ортонормировнной системе.
Задача 1. Пусть H - евклидово сепарабельное пространство, $dimH = \infty, \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система. Показать, что если $x \in H, x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, то $x - x^{(n)} \perp x^{(n)}$.
Решение. $(x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}(x, e_j) - \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{x_j}(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_j} x_h - \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x_j} = 0$.
Теорема(Неравенство Бесселя). $||x||^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$.
Доказательство. $||x||^2 \geq ||x^{(n)}||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 \forall n$.
Теорема Рисса-Фишера. Пусть H - гильбертово сепарабельное пространство, dimH$=\infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2 \implies x \in H : x_k = (x, e_k)$.
Определение. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в H, если $< e_1, e_2 ... e_k >= H$. Это определение верно и для банахова пространства.
Определение. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - полная система в H, если из равенств $(x, e_k) = 0 \ \forall k = 1, 2 ... \implies x = 0$, то есть если $x \perp e_k \forall k \implies x = 0$.
Теорема. Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система $\implies$ следующие утверждения эквиваленты:
1) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - замкнутая система
2) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - полная система
3) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис
4) $\forall x : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = ||x||^2$ - равенство Парсеваля
Теорема. В бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве всегда существует ортонормированный базис Шаудера.
Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Пусть $\{f_j\}$ - линейно независимая система. Возьмем $e_1 = \frac{f_1}{||f_1||}, \tilde{e_2} = f_2 - ce_1$, c - константа, такая, что $\tilde{e_2} \perp e_1$. Из равенства $0 = (\tilde{e_2}, e_1) = (f_2, e_1) - c(e_1, e_1) \implies c = (f_2, e_1)$ вычисляется константа, и тогда $e_2 = \frac{\tilde{e_2}}{||\tilde{e_2}||}$. Очевидно, что $< e_1, e_2 >=< f_1, f_2 >$. Далее, если построены вектора $e_1 ... e_n$ - ортонормированная система, то $< e_1 ... e_n >=< f_1 ... f_n >$ и можно построить вектор e_{n+1}. Тогда $\tilde{e_{n+1}} = f_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$, причем $\tilde{e_{n+1}} \perp e_i, i = 1, 2 ... n$. Константы определяются из системы алгебраических уравнений, полученных скалярным перемножением уже построенных векторов. Получим, что $c_i = (f_{n+1}, e_i)$ и $e_{n+1} = \frac{\tilde{e_{n+1}}}{||\tilde{e_{n+1}}||}$. По индукции получаем, что $< \{e_k\}_{k=1}^{\infty} >=< \{f_k\}_{k=1}^{\infty} >= H$.
Следствие. Если H_1 и H_2 - гильбертовы сепарабельные пространства над одним

полем и $dimH_1 = dimH_2 = \infty \implies H_1 \cong H_2$, то есть $\exists \phi : H_1 \to H_2$ - изоморфизм и $\phi(\alpha x_1 + \beta y) = \alpha\phi(x_1) + \beta\phi(y_2), (x_1, y_1)_{H_1} = (\phi(x_1), \phi(y_1))_{H_2} \forall x_1, y_1 \in H_1$, причем $||x_1||_{H_1} = ||\phi(x_1)||_{H_2}$ и $\exists \phi^{-1} : H_2 \to H_1$. В частности, ортонормированные базисы связаны следующий соотношением: $f_i = \phi(e_i), e_i = \phi^{-1}(f_i) \implies x = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i \to \phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)f_i$.

Пример: Возьмем в пространстве $L_2[0; 2\pi]$ базис с векторами вида $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, n \in Z$. Тогда в $L_2(R)$ система $\{x^n e^{\frac{-x^2}{2}}\}_{n=0}^{\infty}$ - базис.

Утверждение. Система $\{x^n e^{\frac{-x^2}{2}}\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L_2(R)$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся процессом ортогонализации Грама-Шмидта и построим первые 4 вектора системы. По определению, $\tilde{e_0} = f_0 = e^{\frac{-x^2}{2}}, \tilde{e_1} = f_1 - c\tilde{e_0} = xe^{\frac{-x^2}{2}} - ce^{\frac{-x^2}{2}}$. Первая функция - четная, вторая - нечетная $\implies c = 0 \implies \tilde{e_1} = xe^{\frac{-x^2}{2}}$. Следующий вектор будет четной функцией, поэтому нечетные в разложении участвовать не будет, то есть $\tilde{e_2} = f_2 - c_0\tilde{e_0} \implies 0 = (f_2, \tilde{e_0}) - c(\tilde{e_0}, e_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}dx - c\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$. Интегралы такого вида приводятся некоторыми преобразованиями к гамма-функции, после вычисления которой получим соотношение: $\Gamma(\frac{3}{2}) - c\Gamma(\frac{1}{2}) = 0 \implies c = \frac{1}{2} \implies \tilde{e_2} = (x^2 - \frac{1}{2})e^{\frac{-x^2}{2}}$. Четвертый вектор, соответственно, будет нечетной функцией, и равенство для интегралов примет вид: $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{\frac{-x^2}{2}}dx - c\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}dx = 0 \implies \Gamma(\frac{5}{2}) - c\Gamma(\frac{3}{2}) = 0 \implies c = \frac{3}{2} \implies \tilde{e_3} = (x^3 - \frac{3}{2}x)e^{\frac{-x^2}{2}}$. Продолжая процесс дальше, мы приведем систему $\{x^n e^{\frac{-x^2}{2}}\}_{n=0}^{\infty}$ к системе $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $e_n = p_n(x)e^{\frac{-x^2}{2}}$ - система Эрмита.

Семинар 6

Компактные и предкомпактные множества

Определение. Пусть $M \subset (X, \rho)$ - метрическое пространство, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ $\exists$ подпоследовательность, сходящаяся к $x \in M$, то есть $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in M$.
Определение. Пусть (X, Σ) - топологическое пространство. Тогда М - компактное множество, если $\forall \{u_\alpha\}_\Lambda$ и $\underset{\alpha\in\Lambda}{u_\alpha} \supset M$ такое, что $\exists \{u_{\alpha_i}\}_{i=1}^n : \bigcup\limits_{i=1}^{n} \supset M$(конечное подпокрытие). В метрических пространствах эти два определения эквивалентны.
Определение. Множество $M \subset (X, \rho)$ называется предкомпактным, если $\overline{M}$ - компактное множество. В конечномерных пространствах предкомпактные множества - ограниченные множества.
Определение. Пусть $M \subset (X, \rho)$ - множество в метрическом пространстве. Множество $Y \subset (X, \rho)$ образует ε-сеть для М, если $M \subset \bigcup\limits_{y\in Y} B(y, \varepsilon)$ (то есть $\forall x \in M\ \exists y \in Y : \rho(x, y) < \varepsilon$).
Определение. Множество называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon\ \exists$ конечная ε-сеть.
Критерий Хаусдорфа. Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство. Тогда М - предкомпактно $\Leftrightarrow$ М - вполне ограничено.
Лемма Дини. Пусть К - компакт в метрическом пространстве и есть $C(K)$ - непрерывные функции на этом компакте К. Пусть также $f_j(x)$ монотонно не возрастая сходится к $f(x) \forall x \in K$ и $f_j, f \in C(K) \to f_j$ сходится равномерно на компакте к f.
Доказательство. Сходимость в точке x по определению: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall j \geq N : 0 \leq f_j(x) - f(x) < \varepsilon$. По непрерывности функций $\exists u(x) : \forall y \in u(x)$ и $0 \leq f_j(x) - f(x) < \varepsilon$. Тогда $\underset{x}{\cup} u(x) = K \implies \exists x_1, x_2 ... x_n : \bigcup\limits_{i=1}^{n} u(x) = K$. Возьмем $N = max(N(\varepsilon, x_1)...N(\varepsilon, x_n)) \implies x_j \geq N\ \forall x : 0 \leq f_j(x) - f(x) < \varepsilon$ - равномерная сходимость.
Задача 1. Возьмем пространство $l_p, 1 \leq p < \infty$. Показать, что множество М предкомпактно l_p тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:
1) М - ограничено
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall x \in M (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$.
Решение. Будем решать задачу по пунктам.
1) Пусть М предкомпактно, тогда $\overline{M}$ - компактно. Воспользуемся леммой Дини и рассмотрим последовательность f_n на $\overline{M} : f_n(x) = (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$. В то же время, $||(0, 0...0, x_{k+1}...)||$ - непрерывно и монотонно сходится к 0 по лемме Дини $\implies f_n$ сходится равномерно на М. Мы уже доказывали, что норма - непрерывная функция, поэтому она достигает максимума и $\exists \underset{x\in\overline{M}}{max} ||x|| = R \implies \underset{x\in M}{sup} ||x|| = R \implies$ множество ограничено.

2) Докажем теперь предкомпактность при выполнении двух условий. Зафиксируем ε и представим $x = x^n + y^n, x^n = (x_1, x_2...x_n, 0, 0...), y^n = (0, 0...0, x_{n+1}, x_{n+2}...)$, причем по пункту 2 $||y|| < \varepsilon$. Заметим, что $x^n \in l_p(n)$, а по пункту 1 они ограничены $\implies x^n$ - ограничена $\implies$ предкомпактно в $l_p(n) \implies \exists$ конечная ε-сеть $z^1, z^2...z^m$, где $z^j = (z^j_1, z^j_2...z^j_n)$. Пусть $\tilde{z^j} = (z^j_1, z^j_2...z^j_n, 0...) \in l_p$. Тогда $\forall x \in M ||x - z^j|| = ||x^n - z^j||_{l_p(n)} + ||y^n|| < 2\varepsilon$ по построению, то есть $\{\tilde{z^j}\}_{j=1}^m$ - конечная 2ε-сеть $\implies$ по критерию Хаусдорфа множество предкомпактно.

Определение. Множество М, лежащее в $C[a;b]$ равностепенно непрерывно, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x, y \in [a;b] : |x - y| < \delta\ \forall f \in M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. В случае, если М состоит из одной функции, равностепенная непрерывность эквивалентна равномерной непрерывности.

Задача 2. Рассмотрим пространство $C[a;b]$ и последовательность функций $f_n(x) = x^n, n = 1, 2....$ Показать, что эта последовательность не является равностепенно непрерывной.

Решение. Для отрицания равностепенной непрерывности достаточно показать, что $\exists\varepsilon > 0\ \exists x, y : |x - y| < \delta$ и $\exists f \in M : |f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Пусть $x = 1, y = 1 - \frac{\delta}{2} > 0$, тогда $\exists n : (1 - \frac{\delta}{2})^n < \frac{1}{2}$, то есть $n > log_{1-\frac{\delta}{2}}\frac{1}{2}$. Тогда $|1 - (1 - \frac{\delta}{2})^n| >\geq \frac{1}{2}$.

Теорема Арцела-Асколи. Пусть $M \subset C(K)$, К - метрический компакт. Тогда М - предкомпактно тогда и только тогда, когда:

1) М - ограничено

2) М - равностепенно непрерывно

Примеры.

1) Последовательность $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ - не предкомпактно в $C[0;1]$.

2а) sin(nx), n=1,2... в $C[0;1]$.

2б $\sin(\alpha x), \alpha \in [1;2]$.

Исследуем на компактность последние два примера.

2а Пусть x=0, $y = \frac{\pi}{2n} \implies sin(nx) = 0, sin(ny) = 1 \implies |x - y| = |\frac{\pi}{2n}| \to 0$ при $n \to \infty$, но $|sin(nx) - sin(ny)| = |0 - 1| = 1$ и условие равностепенной непрерывности не выполняется и множество не предкомпактно.

2б Рассмотрим $|sin(\alpha x) - sin(\alpha y)| = 2|sin\frac{\alpha(x-y)}{2}||cos\frac{\alpha(x+y)}{2}| \leq 2\frac{\alpha(x-y)}{2} \leq 2|x - y| \implies \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{2} : |x - y| < \delta \implies |sin(\alpha x) - sin(\alpha y)| \leq \varepsilon$, то есть множество равностепенно непрерывно.

Теорема Рисса. Множество М$\subset L_p[a;b](1 \leq p < \infty)$ - предкомпактно тогда и только тогда, когда:

1) М - ограничено

2) М - равностепенно в среднем, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall h : |h| < \delta$ и $\forall f \in M$: $(\int_a^b |f(x + h) - f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Если $f(x + h) \notin [a;b]$, то $f(x + h) = 0$

Задача 3. Пусть М=$\{x \in l_p : |x_k| \leq a_k\}$. Тогда М - предкомпактно тогда и только тогда, когда $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in l_p$.

Решение. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^\infty \in l_p$. Тогда норма $||x||_{l_p} = (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \implies$ М - ограничено. В то же время, $(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=n+1}^\infty |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, где $|a_k|$ не зависит от x.

С другой стороны, пусть M - предкомпактно. Пойдем от обратного и пускай $\{a_k\} \notin l_p, S_n = (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} \to \infty$. Возьмем $x_n = (a_1, a_2...a_n, 0...) \in M$. Норма

$||x_n|| = (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} = S_n \to \infty$, то есть множество не ограничено, что противоречит предкомпактности.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.) Пусть $W_2[-\pi;\pi] = \{f \in AC[-\pi;\pi], f' \in L_2[-\pi;\pi]\}, (f,g) = \int_{[-\pi;\pi]} f \cdot \overline{g} d\mu + \int_{[-\pi;\pi]} f' \cdot \overline{g'} d\mu$. Показать, что

а) e^{inx} - ортогональна в $W_2^1[-\pi;\pi]$.

б) Найти нормировку

в) Показать, что e^{inx} - не базис в $W_2^1[-\pi;\pi]$.

Задача 2. С помощью равенства Парсеваля найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Задача 3. Пусть M=$\{x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{a_k^2} \leq 1\}, a_k > 0$. Показать, что M - предкомпактно тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in C_0$.

Задача 4. Возьмем пространство $C[a;b]$ и множества вида:

а) $M_1 = \{f \in C^1[a;b] : |f(a)| \leq c_1, \int_a^b |f'(x)| dx \leq c_2\}, c_1, c_2$ - общие константы для M_1.

б) $M_2 = \{f \in C^1[a;b] : |f(a)| \leq c_1, \int_a^b |f'(x)|^2 dx \leq c_2\}, c_1, c_2$ - общие константы для M_2.

в) $M_3 = \{f \in C^1[a;b] : \int_a^b (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) dx \leq c\}, c$ - общая константа для M_3.

Определить, какие из множеств предкомпактны.

Задача 5а) Показать, что единичный шар в $C^1[a;b]$ предкомпактен в $C[a;b]$.

б) Показать, что единичный шар в $W_2^1[a;b]$ предкомпактен в $L_2[a;b]$.

Семинар 7

Линейные операторы и функционалы

Начнем семинар с разбора некоторых задач из домашнего задания.

Задача 2. С помощью равенства Парсеваля найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Решение. Рассмотрим пространство $L_2[-\pi;\pi]$ с базисом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin(nx), n \in N$. Возьмем функцию $f(x) = x$ и разложим ее в ряд по синусам и косинусам. Функция нечетная, поэтому коэффициента при косинусе и константы равны нулю $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где $c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} xsin(nx)dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} xd(cos(nx)) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}xcos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)dx = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}\pi}{\sqrt{\pi}n}$. Посчитаем норму функции: $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{x^3}{3}|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$, тогда по равенству Парсеваля имеем: $\frac{2\pi^3}{3} = 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 3. Пусть M$=\{x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{a_k^2} \le 1\}, a_k > 0$. Показать, что M - предкомпактно тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in C_0$.

Решение. Пусть $\{a_k\}_{n=1}^{\infty} \in C_0 \Longrightarrow \lim a_k = 0$, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N\ |a_k| < \varepsilon$ и $\exists max|a_k| = a \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{a_k^2}a_k^2 \le a^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{a_k^2} \le a^2 \Longrightarrow ||x||^2 \le a^2 \forall x \in M$, то есть M - ограничено. Рассмотрим теперь ряд $\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^2 = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{a_k^2}a_k^2 \le \varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{a_k^2} \le \varepsilon^2$, то есть M - предкомпактно.

С другой стороны, пусть M - предкомпактно. От обратного, пусть $a_k \to 0 \Longrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \exists n_k \to \infty : |a_{n_k}| \ge \varepsilon$. Пусть $x^k = (0, 0...0, \underset{n_k}{a_{n_k}}, 0...) \in M$, тогда при $k \ne l$ $||x^k - x^l|| = \sqrt{a_{n_k}^2 + a_{n_l}^2} \ge \sqrt{2}\varepsilon$, то есть из последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, что противоречит предкомпактности.

Задача 4. Возьмем пространство $C[a;b]$ и множества вида:

а) $M_1 = \{f \in C^1[a;b] : |f(a)| \le c_1, \int_a^b |f'(x)|dx \le c_2\}, c_1, c_2$ - общие константы для M_1.

б) $M_2 = \{f \in C^1[a;b] : |f(a)| \le c_1, \int_a^b |f'(x)|^2dx \le c_2\}, c_1, c_2$ - общие константы для M_2.

в) $M_3 = \{f \in C^1[a;b] : \int_a^b(|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)dx \le c\}, c$ - общая константа для M_3.

Определить, какие из множеств предкомпактны.

Решение. Рассмотрим каждый пункт по отдельности.

а) На прошлом семинаре мы показали, что $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ не предкомпактно в $C[0;1]$. Пусть $f_n = t^n, f_n(0) = 0$ и $\int_0^1 f_n'dt = f(1) - f(0) = 1$, то есть M^1 - не предкомпактно.

б) По формуле Ньютона-Лейбница $f(x) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt \Longrightarrow |f(x)| \le |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt \le c_1 t + (\int_a^b |f'(t)dt|)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_a^b 1dt)^{\frac{1}{2}} \le c_1 + \sqrt{c2}\sqrt{b-a}\ \forall f \in M \Longrightarrow \underset{x}{max}|f(x)| = ||f||_{C[a;b]} \le c_1 + \sqrt{c_2}\sqrt{b-a} \Longrightarrow M^2$ - ограничено. Покажем равностепенную непрерывность, рассмотрим $|f(x) - f(y)| = |\int_y^x |f'(t)|dt| \le (\int_y^x |f'(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{b-a} \le$

$\sqrt{c_2}\sqrt{|x-y|}$. Если $|x-y|<\delta, |f(x)-f(y)| \le \frac{y}{\sqrt{c_2}}\sqrt{\delta} < \delta$ при $\delta < \frac{\varepsilon_2^2}{c_2} \implies M^2$ - предкомпактно.

в) Из соотношения $\int_a^b(|f(x)|^2+|f^{'}(x)|^2)dx \le c \implies \int_a^b |f^{'}(x)|dx \le c$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем: $f(x)-f(a)=\int_a^x f^{'}(t)dt \implies f(a)=f(x)-\int_a^x f^{'}(t)dt \implies |f(a)| \le |f(x)|+\int_a^x |f^{'}(t)|dt \le |f(x)|+\int_a^b |f^{'}(t)|dt \implies (b-a)|f(a)| \le \int_a^b |f(x)|dx+(b-a)\int_a^b |f^{'}(t)|dt \le \sqrt{b-a}(\int_a^b |f(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}+(b-a)\sqrt{b-a}(\int_a^b |f^{'}(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{b-a}\sqrt{c}+(b-a)\sqrt{b-a}\sqrt{c} \implies |f(a)| \le \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b-a}}+\sqrt{b-a}\sqrt{c} \implies M^3$ - предкомпактно.

Определение. Пусть X,Y - линейные пространства над одним полем K(R,C). Отображение $A: X \to Y$ - линейный оператор, если $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x_1, x_2 \in X: A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$.

Определение. Пусть X,Y - линейные пространства, A - линейный оператор. Тогда $||A|| = \underset{x \neq 0}{sup}\frac{||Ax||}{||x||}$ - норма оператора. Множество всех линейных операторов, действующих из X в Y, обобзначается как $L(X,Y)$.

Определение. Оператор A(X,Y) - ограничен, если $||A|| < \infty$. Множество всех ограниченных операторов будем обозначать $B(X,Y)$.

Утверждение. $||A|| = \underset{xneq0}{sup}\frac{||Ax||}{||x||} = \underset{||x||=1}{sup}||Ax|| = \underset{||x|| \le 1}{sup}||Ax||$.

Примеры:

1) Возьмем пространство l_2 и пусть $A_r x = (0, x_1, x_2...), A_l(x) = (x_2, x_3, x_4...)$. Такие операторы называются соответственно операторами сдвига влево и вправо. Очевидно, что при сдвиге вправо никакая координата не пропадает, поэтому $||A_r x|| = ||x|| \implies ||A_r|| = 1$. При сдвиге влево пропадает первая координата, поэтому $||A_l x|| \le ||x||$. Пусть $e_2 = (0,1,0...), A_l e_2 = e_1 \implies ||A_l e_2|| = 1 = ||e_2|| \implies ||A_l|| = 1$.

2) Возьмем $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n) \in l_\infty$, то есть $\underset{k \ge 1}{sup}\alpha_k < \infty$ и $A_\alpha x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 ...)$, тогда $||A_\alpha x||^2 = \sum_{i=1}^\infty |\alpha_i x_i|^2 \le \underset{i \ge 1}{sup}|\alpha_i|^2 \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 = ||\alpha||^2 \cdot ||x||^2 \implies ||A_\alpha|| \le ||\alpha||$. Тут возможны несколько ситуаций:

а) $\exists k_0 : |\alpha_{k_0}| = ||\alpha||, x = (0, 0...0, \underset{k}{1}, 0...)$ и $||A_\alpha x|| = ||\alpha_{k_0}|| = ||\alpha||$.

б) По определению, $||\alpha|| \exists m_k \to \infty : |\alpha_{n_k}| \to ||\alpha||_k \to \infty$. Возьмем $x^k = (0, 0... \underset{n_k}{1}, 0...), ||x^k|| = 1 \implies ||A_\alpha x^k|| = |\alpha_{n_k}| \to ||\alpha|| \implies ||A_\alpha|| = ||\alpha||$.

3) Пусть $\phi \in C[a;b], A_\phi f = \phi(x) f(x)$. Найдем норму оператора в пространствах $C[a;b], L_2[a;b]$.

а) В $C[a;b]$. По определению, $||A_\phi f|| = \underset{x \in [a;b]}{max}|\phi(x) f(x)| \le \underset{[a;b]}{max}|\phi(x)| \underset{[a;b]}{max}|f(x)| = ||\phi||_{C[a;b]} \cdot ||f||_{C[a;b]} \implies ||A_\phi|| \le ||\phi||_{C[a;b]}$. Рассмотрим $f \equiv 1, ||f|| = 1 \implies ||A_\phi f|| = max|\phi(x)| = ||\phi|| \implies ||A_\phi|| = ||\phi||$.

б) В $L_2[a;b]$. По определению, $||A_\phi f||^2 = \int_a^b |\phi(x) f(x)|^2 dx \le max|\phi(x)|^2 \int_a^b |f(x)|^2 dx = ||\phi||^2 ||f||^2 \implies \forall f \in L_2 : ||A_\phi f|| \le ||\phi|| ||f|| \implies ||A_\phi|| \le ||\phi||$. По свойству непрерывных функций $\exists x_0 : |\phi(x_0)| = \underset{[a;b]}{max}|\phi(x)|$. Пусть $f_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}}, x \in (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}) \\ 0, x \notin (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}) \end{cases} \implies$ $||f_n|| = 1$ и $||A_\phi f_n|| = \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} \frac{2}{n} |\phi(x)|^2 dx = \frac{1}{\frac{n}{2}} \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |\phi(x)|^2 dx = |\phi(t_n)|^2 \to |\phi(x_0)|^2$ при $n \to \infty, t_n \to x_0 \implies ||A_\phi|| = ||\phi||_{C[a;b]}$.

4) Пусть $(Af)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Найдем норму оператора в $C[0;1], L_2[0;1]$.

а) В $C[0;1]$. $||Af|| = \max\limits_{x\in[0;1]} |\int_0^x f(t)dt| \le \max\limits_{[0;1]} \int_0^x |f(t)|dt \le ||f|| \max\limits_{x\in[0;1]} \int_0^x dt = ||f|| \implies ||A|| \le 1$. Пусть $f \equiv 1, ||f|| = 1, ||Af|| = \max\limits_{x\in[a;b]} \int_0^x dt = \max\limits_{x\in[0;1]} x = 1 \implies ||A|| = 1$.

б) В $L_2[0;1]$. $||Af||^2 = \int_0^1 |\int_0^x f(t)dt|^2 dx \le \int_0^1 (\int_0^x 1\cdot|f(t)|dt)^2 dx \le \int_0^1 (\int_0^x 1\cdot dt \int_0^x |f(t)|^2 dt)dx \le \int_0^1 x \cdot ||f||^2 dt = \frac{1}{2}||f||^2 \implies ||A|| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5) Пусть $Af = f'$ в $C[0;1]$, причем область определения оператора $D(A) = C^1[0;1]$. Возьмем $f_n = t^n, ||f_n|| = 1$ и $Af_n = nt^{n-1} \implies ||Af_n|| = n \to \infty \implies$ оператор А - неограничен.

Определение. Пусть $A \in L(X,Y), X, Y$ - нормированные пространства. Оператор А непрерывен в точке x_0, если $\forall \{x_n\} : x_n \overset{||\cdot||}{\to} x_0 \implies Ax_n \overset{||\cdot||}{\to} Ax_0$, то есть $||Ax_n - Ax_0|| \to 0$.

Определение. Оператор А непрерывен, если А непрерывен в каждой точке $x \in X$.

Утверждение. Пусть X,Y - нормированные пространства, $A \in L(X,Y)$, тогда следующие утверждения равносильны:

1) $A \in B(X,Y)$

2) А - непрерывен в точке x_0

3) А - непрерывен

Доказательство. По определению, из 3 пункта следует 2. Докажем, что из 2 следует 3. Пусть А - непрерывен в точке $x_0, x_n \to x \implies x_n - x \to 0 \implies x_n - x + x_0 \to x_0$ и $A(x_n - x + x_0) \to Ax_0 \implies Ax_n - Ax + Ax_0 \to Ax_0 \implies Ax_n \to Ax$.

Пусть $x_n \to x$, тогда $||Ax_n - Ax|| = ||A(x_n - x)|| \le ||A|| \cdot ||x_n - x|| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть, из пункта 1 следует пункт 3.

От обратного, пусть А - неограниченный, то есть $\forall n\ \exists x_n : ||x_n|| = 1,\ ||Ax_n|| \ge n$. Пусть $y_n = \frac{x_n}{n} \to 0, ||y_n|| = \frac{1}{n} \implies ||Ay_n|| \ge n$ - противоречие непрерывности в нуле, поэтому из пункта 3 следует пункт 1.

Определение. Пусть X - нормированное поле над K(R,C). Рассмотрим множество операторов, действующих из пространства X в поле K, которые обозначим $B(X, K) = X^*. X^*$ - сопряженное пространство, элементы которого называются линейными функционалами.

Определение. Пусть $f \in X^*$, тогда норма функционала $||f|| = \sup\limits_{x\ne 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup\limits_{||x||=1} |f(x)| = \sup\limits_{x\le 1} |f(x)|$.

Примеры:

1) $C[a;b], t_0 \in [a;b], f \in C[a;b]$ и пусть $F_{t_0}(f) = f(t_0)$. Тогда норма функционала $||F_{t_0}(f)|| = |f(t_0)| \le ||f|| \implies ||F_{t_0}|| \le 1$. Пусть $f \equiv 1 \implies |F_{t_0}(f)| = 1 \implies ||F_{t_0}|| = 1$.

2) $C[-1;1], F(f) = \int_{-1}^0 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt$. Норма функционала $|F(f)| \le \int_{-1}^0 |f(t)|dt + \int_0^1 |f(t)|dt \le ||f|| + ||f|| = 2||f|| \implies ||F|| \le 2$. Пусть $f_n \begin{cases} 1, x \in (-1; -\frac{1}{n}) \\ -nx, x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ -1, x \in (\frac{1}{n}; 1) \end{cases}$, тогда $F(f_n) = 2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = 2 - \frac{1}{n} \to 2 \implies ||F|| = 2$.

3) $C[a;b], g \in C[a;b]$ - фиксированная функция. Пусть $F_g(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Тогда норма функционала $|F_g(f)| \le \int_a^b |f(t)| \cdot |g(t)|dt \le max|f(t)| \cdot \int_a^b |g(t)|dt = ||f|| \cdot$

$\int_a^b |g(t)|dt \implies ||F_g|| \leq \int_a^b |g(t)|dt = ||g||$. Пусть $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{\varepsilon}, |g| < \varepsilon \\ \frac{g}{\varepsilon}, |g| \geq \varepsilon \end{cases}$, $|f_\varepsilon| \leq 1$ и f_ε - непрерывная. Тогда $F_g(f_\varepsilon) = \int_a^b f_\varepsilon g(t)dt = |\int_{|g|<\varepsilon} f_\varepsilon g dt + \int_{|g|\geq\varepsilon} f_\varepsilon g dt| \geq \int_{|g|\geq\varepsilon} |g(t)|dt - \int_{|g|<\varepsilon} \varepsilon dt \geq \int_{|g|\geq\varepsilon} |g(t)|dt - (b-a)\varepsilon \to \int_{|g|\geq\varepsilon} |g(t)|dt$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, $||F_g|| = \int_{|g|\geq\varepsilon} |g(t)|dt$.

Семинар 8

Свойства линейных функционалов

Приведем примеры линейных функционалов:
1) Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$ в пространстве C_0. Найдем норму оператора. По определению, $||x|| = max|x_k| \implies |f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{2^k} \leq \underset{||x||}{max}|x_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \implies |f(x)| \leq ||x||$. Возьмем $x^n = (1, 1, 1...1, 0, 0...) \in C_0, ||x^n|| = 1$ и $f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \overset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^{\infty} = 1 \implies ||f|| = 1$.
2) Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ в l_2. Тогда норма $||f(x)|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}||x||$. Возьмем $x = (1, \frac{1}{2}...\frac{1}{k}...) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi}, ||x|| = 1 \implies f(x) = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \implies ||f|| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.
3) Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{k})|x_k| \leq \underset{k\geq 1}{sup}(1 - \frac{1}{k}) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = ||x|| \implies ||f|| \leq 1$. Возьмем последовательность базисных элементов $e_k = (0, 0...\underset{k}{1}, 0...), ||e_k|| = 1 \implies f(e_k) = 1 - \frac{1}{k} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \implies ||f|| = 1$.

Аналитическое задание функционалов

Теорема. $C_0^* \cong l_1$(пространство C_0^* изометрически изоморфно l_1), то есть $\forall f \in C_0^*\ \exists! y \in l_1 : x \in C_0 : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ и $||f||_{C_0^*} = ||y||_{e_1}$. Обратно, $\forall y \in l_1 \to f_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.
Доказательство. Пусть $y \in l_1, f_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Линейность очевидна, оценим действие функционала на элементе $||f_y(x)|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||y_k| \leq \underset{k>1}{max}|x_k| \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = ||x||_{C_0^*} \cdot ||y||_{l_1} \implies ||f_y|| \leq ||y||$. Возьмем $x^n = (signy_1, signy_2...signy_n, 0, 0...) \in C_0, ||x^n|| = 1$(если $y \neq 0$) и $f_y(x^n) = \sum_{k=1}^{n} |y_k| \overset{n\to\infty}{\to} ||y|| \implies ||f_y|| = ||y||$.

Пусть теперь $f \in C_0^*, \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - стандартный базис в $C_0, f(e_k) = y_k$ и $\forall x \in C_0, x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, x^n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \to x, f(x^n) \to f(x) \implies \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \to \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Покажем, что $y_k \in l_1$. Пусть $||f||_{C_0^*} = \underset{||x||=1}{sup}|f(x)| \geq |f(x^n)| = \sum_{k=1}^{n} |y_k| \implies \forall n$ частичная сумма y_k ограничена нормой, а норма конечна, следовательно $||f||_{C_0^*} \geq \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$.

С помощью данной теоремы легко считается норма функционала из первого примера. Действительно, пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, y_k = \frac{1}{2^k}$. По теореме, $||f|| = ||y|| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.
Теорема. Пусть $1 \leq p < \infty$, тогда $l_p^* \cong l_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то есть $\exists$ биекция $l_p^* \leftrightarrow l_q, f \in l_p \leftrightarrow y \in l_q, \forall x \in l_p : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ и $||f||_{l_p^*} = ||g||_{l_q}$.

Теорема. Пусть есть пространство $L_p(\Omega, \mu), \mu - \sigma$-конечная мера, $1 \le p < \infty$. Тогда $(L_p(\Omega, \mu))^* \cong L_q(\Omega, \mu), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то есть $\exists$ биекция $(L_p(\Omega, \mu))^* \leftrightarrow L_q(\Omega, \mu), \forall f \in L_p(\Omega, \mu) : F(f) = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu, ||F||_{L_p^*} = ||g||_{L_q}$.

Примеры:

1) Пусть $F(f) = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} f(x)dx$. Посчитаем интеграл в пространстве $L_{\frac{3}{2}}[0;1] \implies ||F||^*_{L_{\frac{3}{2}}} = ||g||_{L_3} = (\int_0^1 xdx)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$.

Определение. Пусть существует разбиение отрезка [a;b] точками $T = \{t_k\}_{k=0;1...}^n$, то есть $a \le t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \le b$. Выражение $V_T g = \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|$ - вариация g по разбиению T. Тогда $\sup\limits_T V_T g = V_a^b g$ - вариация на отрезке [a;b].

Определение. Если $V_a^b g < \infty$, то говорят, что $g \in BV[a;b]$или функция принадлежит классу функций ограниченной вариации. Пространство BV является нормированным с нормой $||g||_{BV} = V_a^b g + |g(a)|$. Из того пространства можно выделить подпространство $BV_0[a;b] = \{g \in BV[a;b] : g(a) = 0, \forall x \in (a;b) : g(x-0) = g(x)\}$.

Теорема. $(C[a;b])^* \cong BV_0[a;b], f \in (C[a;b])^* \leftrightarrow g \in BV_0[a;b]$, то есть $\exists$ биекция $(C[a;b])^* \leftrightarrow BV_0[a;b], \forall f \in C[a;b]$ $F(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ - интеграл Римана-Стильтьеса, $||f||_{(C[a;b])^*} = V_a^b g$.

Примеры:

1) Пусть $C[-1;1], F(f) = \int_{-1}^0 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 f dg, dg = \begin{cases} dt, t > 0 \\ -dt, t < 0 \end{cases} \implies g = \begin{cases} t+1, t \in [-1;0] \\ 1-t, t \in [0;1] \end{cases}, V_{-1}^1 g = 2 = ||F||$.

2) Считать норму с помощью вариаций не всегда удобно. Пусть имеется пространство $C[0;1], F(f) = \int_0^1 (2t-1)f(t)dt + 2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{3}{4}) = \int_0^1 f(t)dg$. Подобрать функцию g ограниченной вариации с выполнением предыдщего равенства проблематично, поэтому будем искать функцию так же, как и в предыдущих примерах. $|F(f)| < \int_0^1 |2t-1||f|dt + 2|f(\frac{1}{n})| + |f(\frac{3}{n}| \le ||F||(\int_0^1 |2t-1|dt + 3) = \frac{7}{2}||F||$. Пусть функция f_n достигает максимального значения в точке $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ и минимального в точке $\frac{3}{4}$, на остальных участках она непрерывна и линейна. Тогда $F(f_n) \to \frac{7}{2} \implies ||F|| = \frac{7}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Пусть дан оператор $(Af)(x) = \int_a^b k(x,t)dt, k(x,t)$ - непрерывна по двум переменным. Такие операторы называются интегральными.

а) Рассмотреть такой оператор из $C[a;b] \to C[a;b]$ и найти норму.

б) Рассмотреть оператор из $L_1[a;b] \to L_1[a;b]$ и найти норму.

в) Рассмотреть оператор из $L_1[a;b] \to C[a;b]$ и найти норму.

г) Пусть оператор действует из $L_2[a;b] \to L_2[a;b], k(x,t) \in L^2[a;b]^2$. Оценить сверху норму и с помощью данного пункта оценить норму оператора $Af = \int_0^x f(t)dt$ в $L_2[0;1]$.

Задача 2. Доказать, что оператор $(Af)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ в $L_2[0;1]$ ограничен и оценить сверху норму. Такой оператор называется оператором Харди.

Задача 3. Найти норму функционала $F(f) = \int_0^1 \sqrt{x+1} f(x)dx$ в $L_2[0;1]$.

Задача 4. Доказать, что если $g \in C^1[a;b]$, то $V_a^b g = \int_a^b |g^{'}|dt$. Показать, что $||F|| = \int_a^b |g(t)|dt, F(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Задача 5а) Найти норму функционала $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{5^k}}$ в l_2.
б) Найти норму функционала $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{5^{\frac{k}{3}}}$ в $l_{\frac{3}{2}}$.

Семинар 9

Рефлексивное пространство

Начнем семинар с разбора домашнего задания.
Задача 1. Пусть дан оператор $(Af)(x) = \int_a^b k(x,t)dt, k(x,t)$ - непрерывна по двум переменным. Такие операторы называются интегральными.
а) Рассмотреть такой оператор из $C[a;b] \to C[a;b]$ и найти норму.
Решение. Оценим норму: $||f|| = \underset{x\in[a;b]}{max}|\int_a^b k(x,t)dt| \le \underset{x\in[a;b]}{max}\int_a^b |k(x,t)|f(t)dx \le \underset{x\in[a;b]}{max}\int_a^b |k(x,t)|dt\cdot$ $||f|| = M||f||$, где $M = \int_a^b |k(x,t)|dt$. Рассмотрим функционал $F \in (C[a;b])^*$ такой, что $F(f) = \int_a^b f(t)k(x_0,t)dt$, где $x_0 : \int_a^b |k(x_0,t)|dt = M$. Тем самым мы показали, что $||F|| = \int_a^b |g(t)|dt$ и $\exists \underset{||f_\varepsilon||=1}{f_\varepsilon}$ $F(f_\varepsilon) \to ||F|| \implies ||Ff_\varepsilon|| \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_a^b |k(x_0,t)|dt = M$.
б) Рассмотреть оператор из $L_1[a;b] \to L_1[a;b]$ и найти норму.
Решение. Оценим норму: $||Af|| = \int_a^b |\int_a^b k(x,t)f(t)dt|dx \le \int_a^b(\int_a^b |k(x,t)||f(t)|dt)dx$. По теореме Фубини можно поменять порядок интегрирования $\implies \int_a^b |f(t)|(\int_a^b |k(x,t)|dx)dt \le \underset{t\in[a;b]}{max}\int_a^b |k(x,t)|dx \cdot \int_a^b |f(t)|dt = M\cdot ||f| \implies ||A|| \le M = \underset{t\in[a;b]}{max}\int_a^b |k(x,t)|dx$. Функция непрерывна, поэтому $\exists t_0 \in [a;b] : \underset{t\in[a;b]_a}{\int}{}^b |k(x,t)|dx = \int_a^b |k(x,t_0)|dx$. Построим последовательность функций $f_n(t) = \begin{cases} n, t\in(t_0-\frac{1}{2n}; t_0+\frac{1}{2n}) \\ 0, t\notin(t_0-\frac{1}{2n}; t_0+\frac{1}{2n}) \end{cases}$, $||f_n|| = 1, ||Af_n|| =$ $\int_a^b |\int_{u_n(t_0)} k(x,t)ndt|dx = \int_a^b |k(x,t_n)|dx \to \int_a^b |k(x,t_0)|dx \implies ||A|| = \underset{t\in[a;b]}{max}\int_a^b |k(x,t)|dt$.
в) Рассмотреть оператор из $L_1[a;b] \to C[a;b]$ и найти норму.
Решение. $||Af|| = \underset{x\in[a;b]}{max}|\int_a^b k(x,t)f(t)dt| \le \underset{x\in[a;b]}{max}\int_a^b |k(x,t)||f(t)|dt \le \underset{x\in[a;b]}{max}\underset{t\in[a;b]}{max}|k(x,t)|\cdot$ $\int_a^b |f(t)dt = M||f||$. Если взять f_n из предыдущего пункта, то $||Af|| = \underset{x,t\in[a;b]}{max}|k(x,t)|$.
г) Пусть оператор действует из $L_2[a;b] \to L_2[a;b], k(x,t) \in L^2[a;b]^2$. Оценить сверху норму и с помощью данного пункта оценить норму оператора $Af = \int_0^x f(t)dt$ в $L_2[0;1]$.
Решение. $||Af||^2 = \int_a^b |\int_a^b k(x,t)dt|^2dx \le \int_a^b(\int_a^b |k(x,t)||f(t)|dt)^2 \le \int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2dt\cdot$ $\int_a^b |f(t)|^2dtdx \le \int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2dxdt\cdot||f||^2 \implies ||A|| \le \int_a^b\int_a^b |k(x,t)|dxdt = ||k||$.
Задача 2. Доказать, что оператор $(Af)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ в $L_2[0;1]$ ограничен и оценить сверху норму. Такой оператор называется оператором Харди.
Решение. Оценим норму оператора: $||Af||^2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2}|\int_0^x f(t)dt|^2dx \le \int_0^1(\int_0^x |f(t)|dt)^2(-d\frac{1}{x}) =$ $-\frac{1}{x}(\int_0^x |f(t)|dt)^2|_0^1 + 2\int_0^1(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt|f(x)|)^2dx$. Оценим первое слагаемое: $(\int_0^x |f(t)|dt)^2 \le \int_0^x |f(t)|^2dt\int_0^x dt = \int_0^x |f(t)|^2dtx \implies \frac{-1}{x}(\int_0^x |f(t)|dt)^2|_{x=0} = 0 \implies -\frac{1}{x}(\int_0^x |f(t)|dt)^2|_0^1 +$ $2\int_0^1(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt|f(x)|)^2dx \le 2\int_0^1\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\cdot|f(x)|dx \le 2(\int_0^1\frac{1}{x^2}(\int_0^x |f(t)|dt)^2)^{\frac{1}{2}}\cdot$

$(\int_0^1 |f(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}} \implies ||Af||^2 \le \int_0^1 \frac{1}{x^2}(\int_0^x |f(t)|dt)^2 \le 2(\int_0^1 \frac{1}{x^2}(\int_0^x |f(t)|dt)^2dx)^{\frac{1}{2}}||f|| \implies (\int_0^1 \frac{1}{x^2}(\int_0^x |f(t)|dt)^2dx)^{\frac{1}{2}} \le 2||f|| \implies ||A|| \le 2.$

Задача 3. Найти норму функционала $F(f) = \int_0^1 \sqrt{x+1}f(x)dx$ в $L_2[0;1]$.

Решение. $F(f) = \int_0^1 \sqrt{1+x}f(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx \implies$ по теореме об изометрическом изоморфизме $||F|| = ||g|| = (\int_0^1 (1+x)dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Задача 4. Доказать, что если $g \in C^1[a;b]$, то $V_a^b g = \int_a^b |g'|dt$. Показать, что $||F|| = \int_a^b |g(t)|dt, F(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Решение. Возьмем произвольное разбиение T и напишем вариацию $V_T g = \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \frac{|g(t_i)-g_(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) \to diamT \to 0 \implies \int_a^b |g'(t)|dt$. Возьмем $F(f) = \int_a^b f(t)d(t)dt = \int_a^b f(t)d(\int_a^t g(s)ds) = \int_a^b f(t)||G|| \implies ||F|| = ||G|| = V_a^b G = \int_a^b |g(t)|dt$.

Задача 5а) Найти норму функционала $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{\sqrt{5^k}}$ в l_2.

Решение. $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{\sqrt{5^k}} = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$. По теореме об изометрическом изоморфизме $||f||_{l_2^*} = ||y||_{l_2} = (\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{5^k})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

б) Найти норму функционала $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{5^{\frac{k}{3}}}$ в $l_{\frac{3}{2}}$.

Решение. $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{5^{\frac{k}{3}}}, y_k = \{\frac{1}{5^{\frac{k}{3}}}\}_{k=1}^\infty \implies$ по теореме об изометрическом изоморфизме $||f|| = ||y|| = (\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{5^k})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{3}}}$.

Теорема. Если H - гильбертово, тогда $H^* \cong H$, то есть $\exists$ биекция $H^* \leftrightarrow H$ и $\forall x \in H\ f(x) = (x,y),\ ||f|| = ||y||$. Причем, если $g \in H^* \leftrightarrow z \in H \implies g(x) = (x,z)$ и $\alpha f + \beta g \leftrightarrow \overline{\alpha}y + \overline{\beta}g\ \forall \alpha, \beta \in C$.

Примеры:

1) Возьмем пространство $W_2[0;1]$ со скалярным произведением $(f',g') + (f,g)$. Найдем норму оператора, пусть $F(f) = f(0) = (f,g) = \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx + \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx = f(x)\overline{g'(x)}|_0^1 - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx + \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx = f(1)\overline{g'(1)} - f(0)\overline{g'(0)} + \int_0^1 f(x)\overline{g(x) - g''(x)}dx$. Чтобы избавиться от интеграла и первого слагаемого, пусть $g(x) = g''(x), g'(1) = 0, g'(0) = -1$. Решая дифференциальное уравнение получим, что $g(x) = \frac{1}{sh1}ch(x-1) \implies \frac{1}{sh^21}\int_0^1 (sh^2(x-1) + ch^2(x-1))dx = \frac{1}{sh^21}\int_0^1 (ch2(x-1) - 1 + ch2(x-1) + 1)dx = \frac{2}{sh^21}\int_0^1 ch2(x-1)dx = \frac{sh2}{sh^21} \implies ||g||^2 = \frac{sh2}{sh^21} = 2cth1 \implies ||F|| = \sqrt{2cth1}$.

Теорема. Пусть X - нормированное пространство, Y - банахово. Тогда $B(X,Y)$ - тоже банахово.

Следствие. Все сопряженные пространства X^* - полные($\forall X$ - нормированное).

Следствие. По теореме об изометрическом изоморфизме $l_p^* \cong l_q,\ a \le p < \infty \implies q \in [1;\infty) \implies l_p$ - полные $\forall p \in [1;\infty)$.

Теорема Хана-Банаха. Пусть X - нормированное пространство, X_0 - подпространство, $f \in X_0^*$. Тогда $\exists f \in X^*$:

1) $f|_{X_0} = f_0$(продолжение функционала на все пространство)

2) $||f|| = ||f_0||$(норма не увеличивается)

Следствие 1. Если X - нормированное, то $\forall x_0 \ne 0,\ x_0 \in X\ \exists f \in X^* : ||f|| = 1,\ f(x_0) = ||x_0||$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $X_0 = <x_0> = \{y = \alpha x_0, \alpha \in K\}$. Пусть $f_0(y) = \alpha||x_0||$ и найдем его норму: $\frac{|f_0(y)|}{||y||} = \frac{|\alpha|||x_0||}{|\alpha|||x_0||} = 1 \implies ||f_0|| = 1$. Про-

дожим f_0 по теореме Хана-Банаха до функционала $f : f|_{x_0} = f_0 \implies f(x_0) = ||x_0||, ||f|| = ||f_0|| = 1$.
Следствие 2. Пусть X - нормированное пространство, тогда $\forall x, y \in X : x \neq y\ \exists f \in X^*, ||f|| = 1$ и $f(x) \neq f(y)$.
Доказательство. Пусть $z = x - y \neq 0$. По следствию 1 $\exists f \in X^* : f(z) = ||z|| \neq 0$. С другой стороны, $f(x) = f(x - y) = f(x) - f(y) \neq 0 \implies$ таких функционалов много.
Определение. Пусть X - нормированное, X^* - сопряженное пространство. Тогда $\exists X^{**}$ - второе сопряженное пространство. Построим вложение $X \hookrightarrow X^{**}$ и для всех $x \in X, F_x \in X^{**}\ x \to F_x$. Тогда $F_x(f) = f(x)$ называется каноническим(естественным) вложением.
Следствие 3. Каноническое вложение $X \hookrightarrow X^{**}$ - изометрия, то есть $||F_x|| = ||x||$.
Доказательство. По определению, $||F_x|| = \sup\limits_{||f||=1} f(x) \leq \sup\limits_{||f||=1} ||f||||x|| = ||x||$. По первому следствию, для $x\ \exists f : ||f|| = 1,\ f(x) = ||x||$, тогда $||F_x|| = ||x||$, то есть вложение - изометрия.

Покажем теперь, что это не всегда изоморфно. Мы знаем, что $C_0^* \cong l_1, l_1^* \cong l_\infty$, но $C_0 \ncong l_\infty$, так как легко предъявить последовательность, которая лежит в l_∞, но не лежит в C_0.
Определение. Пространство X называется рефлексивным, если вложение $X \hookrightarrow X^{**}$ является биекцией, то есть $X \cong X^{**}$.

Сходимости в нормированных пространствах

Пусть X - нормированное пространство. В таких пространствах различают несколько видов сходимости.
1) Сходимость по норме: $x_n \xrightarrow{||\cdot||} x : ||x_n - x|| \to 0$
2) Слабая сходимость:$x_n \xrightarrow{w} x : \forall f \in X^*\ f(x_n) \to f(x)$.
Из слабой сходимости по норме следует слабая сходимость, обратное неверно. Действительно, $||f(x_n) - f(x)|| = ||f(x_n - x)|| \leq ||f||||x_n - x|| \to 0$. С другой стороны, пусть H - гильбертово пространство, $dim H = \infty, \{e_n\}_{n=1}^\infty$ - ортонормированная система. Мы знаем, что $H \cong H^* \supset F, F(e_n) = (e_n, y) = \overline{y_n}$ - коэффициенты Фурье. Также, $\{y_n\} \in L_2 \implies y_n \to 0 \implies e_n \to 0$, сходится слабо. Но при $n \neq m\ ||e_n - e_m|| = \sqrt{||e_n||^2 + ||e_m||^2} = \sqrt{2} \implies$ сходимости по норме нет.
В сопряженном пространстве X^* выделяют следующие виды сходимостей:
1) Сходимость по норме:$f_n \xrightarrow{||\cdot||} f : ||f_n - f|| = 0$
2) Слабая сходимость: $f_n \xrightarrow{w} f : \forall F \in X^{**},\ F(f_n) \to F(f)$.
3) $*$-слабая сходимость: $F_n \xrightarrow{*} F : \forall x \in X\ f_n(x) \to f(x) \implies F_x(f_n) \to F_x(f)$.
Если X - рефлексивно, то слабая и $*$-слабая сходимости совпадают.

Семинар 10

Сопряженный оператор в банаховом пространстве

Определение. Пусть X,Y - нормированные пространства, $B(X,Y)$ - класс ограниченных операторов. Рассмотрим виды сходимости в $B(X,Y)$:
1) Сходимость по норме: $A_n \xrightarrow{||\cdot||} A$, если $||A_n - A|| \to 0$ при $n \to \infty$
2) Сильная операторная сходимость: $A_n \xrightarrow{s} A : \forall x \in X \ ||A_n x - Ax|| \to 0$
3) Слабая операторная сходимость: $A_n \xrightarrow{w} A : \forall x \in X, \ \forall f \in Y^* \ f(Ax_n) \to f(Ax)$.
Докажем, что из сходимости по норме следует сильная сходимость, из которой следует слабая сходимость.
Доказательство. Из 1 пункта следует 2, так как $||A_n x - Ax|| = ||(A_n x - Ax)|| \leq ||A_n - A||||x|| \to 0$.

Из 2 пункта следует 3, так как $|f(A_n x) - f(Ax)| = |f(A_n x - Ax)| \leq ||f||||A_n x - Ax|| \to 0$.

Из 2 пункта не следует 1, возьмем в l_2 оператор, обнуляющий все координаты, начиная с n+1, то есть $P_n(x) = (x_1, x_2...x_n, 0, 0...)$. $P_n I$(единичный оператор), так как $||P_n x - I|| = (\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$. Но он не сходится по норме, так как при $m > n$ $||P_n(x) - P_m(x)|| = ||(0, 0...0, x_{n+1}...x_m, 0...)|| \leq ||x||$ и $\forall e_k, k = n+1...m$, $||(P_n - P_m)e_k|| = 1 \implies ||P_n - P_m|| = 1$, то есть последовательность не фундаментальна.

Из 3 пункта не следует 2, возьмем в l_2 оператор сдвига на n координат вправо, то есть $A_n(x) = (0, 0...0, x_1, x_2...) = A_r^n(x), A_n \to 0$. Тогда $\forall x \in l_2, \forall f \in (l_2)^* \cong l_2, f_n \leftrightarrow y \in l_2, f(A_n x) = (A_n x, y) = |\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_{n+i}| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ при $n \to \infty \implies A_n \to 0$, но $||A_n x|| = ||x|| \implies$ сильной сходимости нет.
Определение. Пусть X,Y - банаховы пространства, $A \in B(X,Y)$. Оператор $A' : Y^* \to X^*$, называется банаховым сопряженным, если $f \in Y^*, x \in X : (Af')(x) = f(Ax)$.
Задача 1. Показать, что $A' \in B(Y^*, X^*)$ и $||A'|| = ||A||$.
Решение. По определению, $||A'|| = \sup\limits_{||f||=1, f \in Y^*} ||A'f|| = \sup\limits_{||f||=1} \sup\limits_{||x||=1} |(A'f)(x)| = \sup\limits_{||f||=1} \sup\limits_{||x||=1} |f(Ax)| \leq \sup\limits_{||f||=1} \sup\limits_{||x||=1} ||f|| \cdot ||Ax|| = ||A||$. Очевидно, что $\exists x : Ax \neq 0$ и по следствию теоремы Хана-Банаха $\exists f \in Y^*, ||f|| = 1 \implies f(Ax) = ||Ax||$.
Пример вычисления сопряженного оператора. Возьмем пространство $C[0;2]$ и оператор $(Af)(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0;1] \\ f(1), x \in [1;2] \end{cases}$. По определению, $A' : (C[0;2])^* \to (C[0;2])^* \ni G$ и пусть $g \leftrightarrow G$. Тогда можно рассмотреть влияние оператора на g из пространства $BV_0[0;2]$: $(A'G)(f) = H(f) = \int_0^2 f(x)dh$ - по теореме об изометрическом изоморфизме. С другой стороны, $G(Af) = \int_0^2 (Af)dg = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(1)dg = \int_0^1 f(x)dg + (g(2) - g(1+0))f(1)$. По определению сопряженного оператора, $\int_0^1 f(x)dg + (g(2) -$

$g(1+0))f(1) = \int_0^2 f(x)dh \implies h = \begin{cases} g(x), x \leq 1 \\ g(2) - g(1+0) + g(1), x > 1 \end{cases}, h \leftrightarrow H = A'G.$

Из линейности операторов следует, что $A, B \in B(X,Y),\ (\alpha A + \beta B)' = \alpha A' + \beta B'$.

Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве

Определение. Пусть H - гильбертово пространство, $A \in B(H)$. Оператор $A^* : H \to H$ называется гильбертовым сопряженным, если $\forall x, y \in H : (Ax, y) = (x, A^*y)$.
Утверждение. $||A|| = \sup\limits_{||x||=1=||y||} |(Ax,y)| = c$.
Доказательство. Легко понять, что $|(Ax,y)| \leq ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||y|| \implies c \leq ||a||$. С другой стороны, $c \geq \sup\limits_{||x||=1, y: y=\frac{Ax}{||Ax||}, Ax\neq 0} (Ax, \frac{Ax}{||Ax||}) = \sup\limits_{||x||=1} ||Ax|| = ||A|| \implies ||A|| = ||A^*||$.
Задача 2. Пусть в пространстве l_2 даны оператора свдига вправо и влево: $A_r x = (0, x_1, x_2 ...), A_l x = (x_2, x_3 ...)$. Найти сопряженные для них.
Решение. Легко заметить, что $(A_r x, y) = (x, A_l y) \implies A_l = A_r^*,\ A_l^* = A_r$.
Задача 3. Найти сопряженный оператор в l_2 для $A_\alpha x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 ...), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ...) \in l_\infty$.
Решение. По определению, $(A_\alpha x, y) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{\overline{\alpha_i} y_i} = (x, A_{\overline{\alpha}} y) \implies A_\alpha^* = A_{\overline{\alpha}}$.
Задача 4. Найти сопряженный оператор для $A_\phi f = \phi(x) f(x)$ в $L_2(\Omega, \mu)$.
Решение. $(A_\phi f, g) = \int_\Omega \phi f(x) \overline{g(x)} d\mu = \int_\Omega f(x) \overline{\overline{\phi} g(x)} d\mu \implies A_\phi^* = A_{\overline{\phi}}$.
Задача 5. Найти сопряженный для оператора $(Af)(x) = \int_a^b k(x,t) f(t) dt, k(x,t) \in L_2[a;b]^2$ в пространстве $L_2[a;b]$.
Решение. По определению, $(Af, g) = \int_a^b (\int_a^b k(x,t) f(t) dt \cdot \overline{g(x)} dx = \int_a^b f(t) \overline{(\int_a^b \overline{k(x,t)} g(x) dx)} dt = \int_a^b f(x) \overline{\int_a^b \overline{k(t,x)} g(t) dt} dx = \int_a^b f(x) (A^* g)(x)$, то есть $(A^* g)(x) = \int_a^b \overline{k(t,x)} g(t) dt \implies A^* = \overline{A^T}$.

Самосопряженные операторы

Определение. Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$. Очевидно, что оператор A_α из 3 задачи будет самосопряженным, если $\alpha = \overline{\alpha}$, то есть $\forall k\ \alpha_k \in R$. Оператор A_ϕ самосопряжен тогда и только тогда, когда $\phi(x) \in R$. Оператор $(Af)(x) = \int_a^b k(x,t) f(t)$ - самосопряженный, если $\overline{k(x,t)} = k(x,t)$.
Определение. Пусть H - гильбертово, H_0, H_1 - подпространства H и $H = H_0 \oplus H_1$. Определим оператор проектирования на H_0 вдоль H_1, $Px = x_0$, где $x \in H,\ x_0 \in H_0$. Очевидно, что $KerP = H_1,\ ImP = H_0,\ P^2 = P$.
Задача 6. Показать, что $H_0 \perp H_1 \Leftrightarrow P = P^*$.

Решение. Пусть $H_0 \perp H_1$, тогда $(Px, y) = (x_0, y_0 + y_1) \underset{y_1 \perp x_0}{=} (x_0, y_0) \underset{x_1 \perp y_0}{=} (x_0 + x_1, y_0) = (x, Px)$.

Пусть теперь P - самосопряженный оператор проектирования. Тогда $(Px, y) = (Px, (I-P)y) = (x, P(I-P)y) = (x, (P-P^2)y) = (x, 0) = 0$.

Следствие. Оператор $(I-P)$ - оператор проектирования.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Введем пространство Бергмана: $AL_2(|z|<1)$, f - голоморфные в $|z| < 1 : \iint_{x^2+y^2=1} |f(x,y)|^2 dxdy > \infty$, $(f,g) = \iint_{x^2+y^2=1} f(z)\overline{g(z)}dxdy$ и пусть $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, $z = x + iy$.

а) Применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к системе $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ и построить ортонормированный базис в $AL_2(|z|<1)$.

б) Пусть $z_0 : |z_0| < 1$, $F(f) = f(z_0), f \in AL_2(|z|<1)$. Найти норму функционала.

Задача 2. Доказать следствие из теоремы Хана-Банаха: Если X - рефлексивное пространство, то $\forall f \in X^* \ \exists x \in X$, $||x|| = 1$ и $f(x) = ||f||$.

Задача 3. С помощью предыдущей задачи показать, что $C[a;b], C_0, C$ - не рефлексивные пространства.

Задача 4. Пусть X - нормированное пространство, X_0 - замкнутое подпространство, $x \notin X_0$, $d = dist(x, x_0) = \underset{x_0 \in X}{inf} ||x - x_0|| \implies \exists f \in X^* : \ f|_{X_0} = 0, ||f|| = 1, f(x) = d$.

Задача 5. С помощью 4 задачи показать, что если X^* - сепарабельно, то X - тоже сепарабельно.

Задача 6. Для оператора $(Af)(x) = x^2 f(0) + x f(1)$ найти сопряженный в пространстве $C[0;1]$.

Семинар 11

Компактные операторы

Начнем семинар с разбора домашнего задания.

Задача 1. Введем пространство Бергмана: $AL_2(|z|<1)$, $\underline{f}$ - голоморфные в $|z|<1$: $\iint_{x^2+y^2=1}|f(x,y)|^2dxdy > \infty$, $(f,g)=\iint_{x^2+y^2=1}f(z)\overline{g(z)}dxdy$ и пусть $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k$, $z=x+iy$.

а) Применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к системе $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ и построить ортонормированный базис в $AL_2(|z|<1)$.

Решение. Рассмотрим скалярное произведение $(z^k,z^n)=\iint_{x^2+y^2<1}r^ke^{ik\phi}r^ne^{in\phi}rdrd\phi = \int_0^1 r^{n+k+1}\int_0^{2\pi}e^{i(k-n)\phi}d\phi = \begin{cases}0, k\neq n\\ \frac{\pi}{n+1}, k=n\end{cases}$. Тогда возьмем $e_n=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\cdot z^n, n=0,1...$ - базис.

б) Пусть $z_0:|z_0|<1,\ F(f)=f(z_0), f\in AL_2(|z|<1)$. Найти норму функционала.

Решение. Пусть $F=\sum_{n=0}^{\infty}f_ne_n$. Подставим e_n и получим: $\sum_{n=0}^{\infty}f_nen=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n.F(f)=f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z_0^n=(f,g)$, где $g\in AL_2(|z|<1)\implies (f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\overline{g_n}\implies \overline{g_n}=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z_0^n$. По теореме, $||F||^2=||g||^2=\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|^2=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z_0|^{2n}$. Сделаем замену:$|z_0|^2=t, 0\leq t<1$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|^2=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z_0|^{2n}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\frac{1}{\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})'=\frac{1}{\pi}\frac{1-t+t}{(1-t)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-t)^2}\implies ||F||=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1-|z_0|^2}$.

Задача 2. Доказать следствие из теоремы Хана-Банаха: Если X - рефлексивное пространство, то $\forall\in X^*\ \exists x\in X,\ ||x||=1$ и $f(x)=||f||$.

Решение. Применим следствие 1 к пространству X^*: $\forall f\in X^*\ \exists F\in X^{**}:||F||=1,\ f=0, F(f)=||f||$. Используя свойство рефлексивности, получим: $F=F_x: F_x(f)=f(x)$, причем по следствию 3 $||F_x||=||F||=||x||=1$ и $f(x)=||f||$.

Задача 3. С помощью предыдущей задачи показать, что $C[a;b], C_0, C$ - не рефлексивные пространства.

Решение. Возьмем $C[-1;1]$, линейной заменой любой отрезок вида [a;b] можно привести к такому виду. Мы уже знаем, что норма функционала $F(f)=\int_{-1}^0 f(t)dr-\int_0^1 f(t)dt$ равна $||F||=2$, причем не существует непрерывной функции, на которой норма бы достигалась $\implies$ пространство не рефлексивно.

В C_0 возьмем функционал $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}, ||f||=1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$. Для равенства необходимо, чтобы $x_k=1\ \forall k$, но $x=(x_k,x_k...x_k)\notin C_0\implies$ норма не достигается и пространство не рефлексивно.

В С возьмем $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kx_k}{2^k},\ |f(x)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{2^k}\leq\sup\limits_{||f||\leq 1}|x_k|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=||x||\cdot 1$. Пусть $x^n=(-1,1,-1,1...(-1)^n,0,0...)\in C$, тогда $f(x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\overset{n\to\infty}{\to}1$, но для выполнения равенства, x^n должен иметь вид $x^n=(-1,1,-1,1,-1...)\notin C\implies$

норма не достигается и пространство не рефлексивно.

Задача 4. Пусть X - нормированное пространство, X_0 - замкнутое подпространство, $x \notin X_0,\ d = dist(x, x_0) = \inf\limits_{x_0 \in X} ||x - x_0|| \implies \exists f \in X^* :\ f|_{X_0} = 0, ||f|| = 1, f(x) = d.$

Решение. Пусть $X_1 =< X_0, x >= \{x_0 + \alpha x, x_0 \in X_0, \alpha \in K\}$. Построим функционал f_1 на $X_1 : f_1(y) = f(x_0 + \alpha x) = \alpha d,\ ||f_1|| = \sup\limits_{y \neq 0, y \in X_1} \frac{|f_1(y)|}{||y||} = \sup\limits_{y \neq 0, y \in X_1} |\frac{|\alpha d|}{||x_0+\alpha x|}| = \sup \frac{d}{||\frac{x_0}{\alpha} + \frac{\alpha}{|\alpha|} x||} = \sup \frac{d}{||x + \frac{x_0}{|\alpha| sign\alpha}||} \leq 1$. Так как $||x_0 + \frac{x_0}{|\alpha| sign\alpha}|| \geq d,\ d = \inf\limits_{x_0 \in X} ||x - x_0|| \implies \sup \frac{d}{||x + \frac{x_0}{|\alpha| sign\alpha}||} = \frac{d}{\inf ||x + \frac{x_0}{|\alpha| sign\alpha}||} = 1$ и по теорема Хана-Банаха продолжаем f_1 на все пространство X.

Задача 5. С помощью 4 задачи показать, что если X^* - сепарабельно, то X - тоже сепарабельно.

Решение. Пусть X^* - сепарабельно $\implies \exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} : \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = X^*,\ \forall n\ \exists x_n \in X : ||x_n|| = 1$ и $f_n(x_n) \geq \frac{||f_n||}{2}$. Пусть $X_0 = \{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k, \alpha_k \in Q, N \in N\}$ - замкнутое ненулевое подпространство, порожденное счетным множеством. Если $X_0 \nsubseteq X \implies X_0$ - нетривиальное подпространство $\implies f \in X^*, ||f|| = 1$ и $f|_{X_0} = 0, \exists n_k \to \infty : f_{n_k} \overset{||\cdot||}{\to} f$. Норма $||f_{n_k} - f|| \geq |(f_{n_k} - f)(x_{n_k})| = |f_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{||f_{n_k}||}{2} \to \frac{1}{2}$ в силу непрерывности нормы. Получаем противоречие, следовательно $X_0 = X$ - сепарабельное подпространство.

Задача 6. Для оператора $(Af)(x) = x^2 f(0) + x f(1)$ найти сопряженный в пространстве $C[0; 1]$.

Решение. Пусть функционалу $G \in (C[a; b])^*$ отвечает функция $f \in BV_0, H \in (C[a; b])^* \leftrightarrow \in BV_0.(A^{'}G)f = H(f) = \int_0^1 f dh,\ G(AF) = \int_0^1 (Af dg) = \int_0^1 (x^2 f(0) + x f(1)) dg(x) = f(0) \int_0^1 x^2 dg + f(1) \int_0^1 x dg(x)$. Имеем, что $A^{'} g = h$, тогда из равенств выражений для сопряженных фунционалов следует: $h(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \int x^2 dg, x \in (0; 1) \\ \int x^2 dg + \int x dg, x = 1 \end{cases}$

- действие сопряженного функционала на фукнцию g.

Теорема Банаха-Штейнгауза. Пусть X,Y - нормированные пространства, X - банахово, при этом $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda},\ A_\alpha \in B(X, Y),\ \forall x \in X : \frac{x}{||A_\alpha x||} \leq c(x)$ - константа, зависящая от x, но не зависящая отα. Тогда $\sup\limits_{\alpha} ||A_\alpha|| < \infty$.

Определение. Пусть X - нормированное пространство, $M \subset X$. Говорят, что M - слабо ограничено, если $\forall f \in X^*, \forall x \in M\ |f(x)| \leq c(f)$. Очевидно, что если M - ограничено, то M - слабо ограничено. Действительно, если $|f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x|| \leq R||f|| = c(f)$.

Задача 1. Пусть X - нормированное и M - слабо ограниченное в нем $\implies$ M - ограничено.

Решение. Рассмотрим семейство $F_x : X^* \to K, ||F_x|| = ||x|| < \infty$ и $|F_x(f)| = |f(x)| \leq c(f) \implies \sup\limits_{x \in M} ||F_x|| < \infty \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in M} ||x|| < \infty$.

Теорема Хеллингера-Теплица. Пусть $A \in L(H)$, H - гильбертово пространство и $\forall x, y\ (Ax, y) = (x, Ay) \implies A$ - ограничен.

Доказательство. Пусть A - неограничен: $\exists ||x_n|| = 1,\ ||Ax_n|| \geq n$. Рассмотрим функционал $f_n(x) = (Ax, x_n)$ - линейный на H $n = 1, 2....$ С одной стороны, $|f_n(x)| =$

$|(x, Ax_n)| \leq ||Ax_n|| \cdot ||x|| \implies f_n \in B(H, K)$, то есть $f_n \in H^*$. С другой стороны, $|f_n(x)| = |A(x_1, x_2)| \leq ||Ax|| \cdot ||x_n|| = ||Ax||$ - зависит только от x, но не от n $\implies$ по теореме Банаха-Штейнгауза $\underset{n}{sup}||f_n|| < \infty$. Пусть $x = \frac{Ax_n}{||Ax_n||}, f_n(x) = \frac{||Ax_n||^2}{||Ax_n||} = ||Ax_n|| \geq n$ - противоречие с ограниченностью нормы функционала.

Определение. Пусть X,Y - нормированные пространства, оператор $A \in B(X, Y)$ - компактный, если $\forall M$ - ограниченное множество в X, множество $AM = \{Ax, x \in M\}$ - предкомпактное в Y. Очевидно, если $dimX, dimY < \infty \implies A \in B(X, Y) \implies A$ - компактный.

Определение. Оператор A - оператор конечного ранга, если $rkA = dimImY < \infty$. Если $A \in B(X, Y)$ и $rkA < \infty \implies A \in K(X, Y)$.

Утверждение. $A \in K(X, Y) \Leftrightarrow$ образ единичного шара $B_x[0; 1]$ - предкомпактное множество в Y.

Свойства компактых операторов

Теорема 1. Если $A, B \in K(X, Y) \implies \alpha A + \beta B \in K(X, Y)$

Теорема 2. Если $A \in K(X, Y), B \in B(Y, Z), C \in B(W, X), X, Y, Z, W$ - нормированные пространства $\implies BA \in K(X, Z), AC \in K(W, Y)$. Заметим также, что если $A : X \to X$ и $A \in K(X), B : X \to X$ и$B \in B(X) \implies AB, BA \in K(X)$. Учитывая линейность и операцию сложения для ограниченных операторов, то $B(X)$ - кольцо, а $K(X)$ - двусторонний идеал в этом кольце.

Теорема 3. Если $A_n \in K(X, Y), X, Y$ - нормированные пространства и $A_n \overset{||\cdot||}{\to} A \implies A \in K(X, Y)$.

Теорема 4. Пусть $x_n \overset{w}{\to} x, X, Y$ - нормированные пространства, $A \in K(X, Y) \implies Ax_n \overset{||\cdot||}{\to} Ax$.

Примеры:

1) Пусть $(Af)(x) = x^2f(0)+xf(1), C[0; 1] \implies ImA =< x^2, x > \implies rkA = 2 \implies A$ - компактен.

2) Пусть $A_\alpha x = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + ...\alpha_nx_n)$ в $l_2, \alpha = (\alpha_1...\alpha_n...) \in l_\infty$. Тогда $A_\alpha \subset K(l_2) \Leftrightarrow \alpha \in C_0$. Действительно, если $\alpha \in C_0 \implies \alpha \in l_\infty, ||A_\alpha|| = ||\alpha|| < \infty \implies A_\alpha \in B(l_2)$. Пусть $||x|| < 1 \implies ||A_\alpha x|| \leq ||\alpha||$. Далее, если $\alpha \in C_0 \implies \forall\varepsilon > 0\ \exists n : \underset{k\geq n+1}{sup} |\alpha_k| < \varepsilon$ и $(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(A_\alpha x)_k|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_kx_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} < (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \implies$ по критерию предкомпактности образ единичного шара $AB_{l_2}[0; 1]$ - предкомпактное множество в l_2.

В обратную сторону, пусть $A \in K(l_2)$ и $\alpha \notin C_0 : \exists c > 0\ \exists n_k \to \infty : |\alpha_{n_k}| \geq c$. Возьмем $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, e_n = (0, 0...0, \underset{n}{1}, 0...)$ - ограниченное множество, $||e_n|| = 1 \implies A_\alpha\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - предкомпактное множество в $l_2 \implies$ из любой последовательности можно выделить фундаментальную, но $||A_\alpha e_{n_k} - A_\alpha e_{n_l}|| = \sqrt{|\alpha_{n_k}^2| + |\alpha_{n_l}^2|} \geq c\sqrt{2}$, то есть в $A_\alpha\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ нет фундаментальной последовательности, что противоречит изначальному предположению.

Задача 2. Возьмем оператор $A_\phi f = \phi(x)f(x)$ в пространстве $C[a;b], \phi \in C[a;b]$. Показать, что $A_\phi \in K(C[a;b]) \Leftrightarrow \phi \equiv 0$.

Решение. Если $\phi \equiv 0$, то $A_\phi \equiv 0 \implies A_\phi$ - компактный. Обратно, пусть $A_\phi \in K(C[a;b]), \phi \neq 0 \implies \exists x_0 : \phi(x_0) \neq 0$. Пусть $a < x_0 < b$ и $\exists u_{x_0} : \phi|_{u_{x_0}}$ сохраняет знак. Без ограничения общности считаем, что $\exists c > 0 : \phi|_{u_{x_0}} > c$. Пусть $f_\varepsilon = \begin{cases} 0, x \in (a; x_0 - \varepsilon] \\ \frac{x}{\varepsilon} + 1 - \frac{x_0}{\varepsilon}, x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \\ 1, x \in [x_0, b) \end{cases} \implies ||f_\varepsilon|| = 1$ и $\{Af_\varepsilon\}_\varepsilon$ - предкомпактное множество. Проверим равностепенную непрерывность: $|Af_\varepsilon(x) - Af_\varepsilon(y)| = |\phi(x_0)f_\varepsilon(x_0) - \phi(y)f_\varepsilon(y)| \geq c \implies$ колебание функции в малой окрестности не равняется нулю, следовательно равностепенная непрерывность не выполняется, оператор не компактен и наше предположение неверно.

Семинар 12

Обратные операторы

Определение. Интегральными операторами называются операторы вида $(Af)(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)dt$.
Теорема. Если $k(x,t) \in C[a;b]^2$, тогда $A \in K(C[a;b])$.
Теорема. Если $k(x,t) \in L_2 \in [a;b]^2 \implies A \in K(L_2[a;b])$.
Задача 1. Возьмем оператор $(Af)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 k(x,t)f(t)dt, k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{x}, t < x \\ 0, t > x \end{cases}$ в пространстве $L_2[0;1]$. Выяснить, является ли он компактным?
Решение. Пусть $f_n = \sqrt{n}\chi_{[0;\frac{1}{n})}, \chi$ - характеристическая функция, $f_n \xrightarrow{w} 0$. Если $F \in (L_2[0;1])^*, F^*(f_n) = (f_n, g) = (\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}\overline{g}dx) \leq (\int_0^{\frac{1}{n}} n)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_0^{\frac{1}{n}} |g|^2dx)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, так как $g \in L_2[0;1]$. Рассмотрим действие оператора $(Af_n)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sqrt{n}dx, x \in (0;\frac{1}{n}) \\ \frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{n}dx, x > \frac{1}{n} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{n}, x \in [0;\frac{1}{n}) \\ \frac{1}{x\sqrt{n}}, x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$. Норма оператора $||Af_n||^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} Af_n^2dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 Af_n^2dx \geq \int_0^{\frac{1}{n}} ndx = 1 \implies$ сходимости к нулю по норме нет, то есть предположение неверно и оператор не компактен.
Задача 2. Рассмотрим оператор $(Af)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt$ в $L_2[0;1]$. Выяснить, является ли он компактным?
Решение. Заметим, что $k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{|x-t|}} \implies k^2(x,t) = \frac{1}{|x-t|} \notin L_2[0;1]^2 \implies$ теоремой пользоваться нельзя. Сначала покажем, что оператор ограничен: $||Af||^2 = \int_0^1 |\int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt|^2dx \leq \int_0^1(\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt\int_0^1 \frac{|f(t)|}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt)dx$. Вынесем знаменатель и посчитаем интеграл:$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t-x}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}} = -2\sqrt{x-t}|_0^x + 2\sqrt{t-x}|_x^1 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} \leq 2\sqrt{2} \implies \int_0^1(\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt\int_0^1 \frac{|f(t)|}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt)dx \leq 2\sqrt{2}\int_0^1(\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{|x-t|}}dt)dx$. По теореме Фубини можно поменять порядок интегрирования, получим:$2\sqrt{2}\int_0^1(\int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{|x-t|}}dt)dx \leq (2\sqrt{2})^2||f||^2 \implies ||A|| \leq 2\sqrt{2}$. Рассмотрим множество операторов $(A_nf)(x) = \int_0^1 k_n(x,t)f(t)dt, k_n(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}, |x-t| \geq \frac{1}{n} \\ 0, |x-t| \leq \frac{1}{n} \end{cases} \in L_2[0;1]^2 \forall n \implies A_n \in K(L_2[0;1])$ по теореме. Можно рассмотреть норму разности $||(A_n - A)f|| = \int_0^1 |\int_{|x-t|<\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{\sqrt{|x-t|}}dt|^2dx \leq \int_0^1(\int_{|x-t|<\frac{1}{n}} \frac{|f(t)|}{\sqrt{|x-t|}}dt \cdot \int_{|x-t|<\frac{1}{n}} \frac{dt}{\sqrt{|x-t|}})dx \leq c_n^2||f||^2 \implies ||A_n - A|| \leq c_n \to 0$ при $n \to \infty \implies$ оператор компактен.
Определение. Пусть X,Y - нормированные пространства, $A \in B(X,Y)$. Оператор A_r^{-1} - правый обратный, если $AA_r^{-1} = I_y$(тождественный оператор в пространстве Y), $A_r^{-1} : Y \to X$.

Определение. Оператор A_l^{-1} - левый обратный, если $A_l^{-1} : Y \to X, A_l^{-1}A = I_x$(тождественный оператор в X).
Если $\exists A_r^{-1} \implies ImA = Y$, то есть A - сюръективен. Если $\exists A_l^{-1} \implies KerA = \{0\}$, то есть A - инъективен. Соответственно, если $\exists A_r^{-1}, A_l^{-1}$, то A - биективен и можно обозначить $A_r^{-1} = A_l^{-1} = A^{-1}$.
Примеры:
1) Если $A_\alpha = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{2x_3}{3} ... \frac{n-1}{n}x_n ...)$ в l_2, то обратным будет оператор $A_\alpha^{-1}x = (x_1, 2x_2, \frac{3}{2}x_3 ... \frac{n}{n-1}x_n)$.
2) $A_r x = (0, x_1, x_2 ...), A_l x = (x_2, x_3 ...)$ в l_2. Заметим, что $ImA_r \neq l_2$, так как $e_1 = (1, 0, 0 ...) \in ImA_r, KerA_k \neq \{0\}$, так как $e_1 \in KerA_l \implies A_l A_r = I, A_l = (A_r)_l^{-1}, A_r = (A_l)_r^{-1}$.
Определение. Пусть X, Y - нормированные пространства, $A \in B(X, Y)$. Оператор A - обратим, если $\exists A^{-1} \in B(Y, X)$.
Пусть в $l_2 Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3 ... \frac{1}{n}x_n ...)$. Формально, $A^{-1}x = (x_1, 2x_2, 3x_3 .... nx_n ...)$, но $||A^{-1}e_n|| = n \to \infty \implies A^{-1}$ - не ограничен. Заметим также, что $ImA \neq l_2 \implies$ A нельзя определить на всем пространстве. Исходя из этих наблюдений, напрашивается теорема.
Теорема Банаха об обратном операторе. Пусть X, Y - банаховы, $A \in B(X, Y)$. Тогда $\exists A^{-1} \in B(X, Y) \Leftrightarrow A$ - биекция.
Примеры:
1) Пусть $X = C[0; 1], ||f|| = max|f(x)|, Y = C_1[0; 1], ||f|| = \int_0^1 |f(x)|dx$. Рассмотрим оператор $A : X \to Y, Af = f$, то есть мы просто рассматриваем функцию в другом пространстве. Очевидно, что это отображение биективно, проверим ограниченность: $||Af|| = \int_0^1 f(x)dx \leq max|f(x)| \cdot \int_0^1 dx = ||f|| \implies ||A|| = 1, A^{-1}f = f$.
Пусть $f_n = \begin{cases} -2n^2x + 2n, x \in (0; \frac{1}{n}) \\ 0, x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$, $||f_n|| = 1$ и $||A^{-1}f_n|| = max|f_n(x)| = 2n \to \infty$, то есть оператор биективен, но не ограничен.

Свойства обратных операторов

Задача 3. Пусть X - банахово, $||C|| < 1$, тогда операторы $(I - C), (I + C)$ - обратимы.
Решение. Достаточно исследовать только один случай. Рассмотрий обратный оператор $(I - C)^{-1}$. Если подставить вместо операторов числа, то это в точности формула для геометрической прогрессии. Рассмотрим частичную сумму такого ряда: $S_n = \sum_{k=0}^n C^k, ||S_n - S_m|| = || \sum_{k=n+1}^m C^k|| \leq \sum_{k=n+1}^m ||C^k|| \leq \frac{||C||^{n+1}}{1-||C||} \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ - фундаментальна $\implies$ $B(X)$ - полное $\implies$ $\exists lim S_n = S$. Так как этот ряд сходится, то мы можем переставлять в нем элементы как нам угодно, тогда $(I + C + C^2 + ...+)(I - C) = I$.
Задача 4. Пусть $A \in B(X), X$ - банахово, A - обратим и $||B|| < \frac{1}{||A^{-1}||} \implies A - B, A + B$ - обратимы.
Решение. $(A - B)^{-1} = (A(I - A^{-1}B^{-1}))^{-1}$. Пусть $C = A^{-1}B^{-1}, ||C|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||B|| < 1 \implies (I - C)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}B^{-1})^{-1}A^{-1} = (I + A^{-1}B + A^{-1}BA^{-1}B + ...)A^{-1} =$

$A^{-1}+A^{-1}BA^{-1}+...=A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(BA^{-1})^k=(\sum_{k=0}^{\infty}(A^{-1}B)^k)A^{-1}$ - ограничен, так как ряды сходятся. Решение для оператора (A+B) проводится аналогично.

Утверждение. Если A_1, A_2 - обратимы, то (A_1, A_2) - обратимы и $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Задача 5. Рассмотрим оператор $Af = f(x) - \int_0^x f(t)dt = (I-C)f, Cf = \int_0^x f(t)dt, ||C|| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ в $L_2[0;1]$. Найти $A^{-1}f$.

Решение. $Cf = \int_0^x f(t)dt \implies C^2f = \int_0^x(\int_0^t f(s)ds)dt = \int_0^x ds\int_s^x f(s)dt = \int_0^x(x-s)f(s)ds = \int_0^x(x-t)f(t)dt \implies C^nf(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt \implies A^{-1}f = (f+Cf+C^2f+...) = (f+\int_0^x f(t)dt + \int_0^x(x-t)f(t)dt+...) = (f+\int_0^x f(t)(1+\frac{x-t}{1!}+\frac{(x-t)^2}{2!}+\frac{(x-t)^3}{3!}+...)dt = f(x)+\int_0^x f(t)e^{x-t}dt$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Привести пример: все требования теоремы Банаха-Штайнгауза выполнены кроме полноты X, то есть X - неполное, Y - нормированное, $A_\alpha \in B(X,Y)$ и $\forall x \in X \ ||A_\alpha x|| \leq c(x), \sup\limits_{\alpha}||A_\alpha|| = \infty$.

Задача 2. Показать, что $(Af)(x) = \int_0^x f(t)dt$ в C[0;1] компактен.

Задача 3. Привести пример оператора A такого, что $A^2 = 0, A$ - не компактен.

Задача 4. Показать, что если $A \in K(X), dimX < \infty \implies$ не существует ограниченного обратного.

Задача 5. Показать с помощью теоремы Банаха, что если X - линейное пространство с двумя нормами $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ и $X_1 = (X, ||\cdot||_1), X_2 = (X, ||\cdot||_2)$ - оба банаховы и $\exists M: \forall x \in X ||x||_2 \leq M||x||_1 \implies$ нормы эквивалентны.

Семинар 13

Спектр оператора

Начнем семинар с разбора домашнего задания.

Задача 1. Привести пример: все требования теоремы Банаха-Штайнгауза выполнены кроме полноты X, то есть X - неполное, Y - нормированное, $A_\alpha \in B(X,Y)$ и $\forall x \in X \ ||A_\alpha x|| \le c(x), \underset{\alpha}{sup}||A_\alpha|| = \infty$.

Решение. Пусть $A_\alpha \in B(X,Y), X$ - банахово, Y - нормированное и $||A_\alpha|| \le c(x)$ - не зависит от $\alpha \implies \sup ||A_\alpha|| < \infty$. Уберем условие X - банахово, теперь X - нормированное. Рассмотрим в $C_{00}, A_n x = (x_1, x_2 ... nx_n, x_{n+1} ... 0, 0, 0...), ||A_n|| = n \implies \underset{n}{||A_n||} = \infty$. Проверим, выполняется ли условие $||A_\alpha|| \le c(x) : \forall x \ \exists N = N(x) : \forall k > N \ x_k = 0 \implies ||A_n x|| \le N(x)||x|| \implies ||A_\alpha|| \le c(x)$.

Задача 2. Показать, что $(Af)(x) = \int_0^x f(t)dt$ в C[0;1] компактен.

Решение. Очевидно, что этот оператор ограничен. Проверим равностепенную непрерывность: $|(Af)(x) - (Af)(y)| = |\int_y^x f(t)dt| \le |\int_y^x |f(t)|dt| \le ||f|| \cdot |x-y| \le |x-y| < \varepsilon$ при $||f|| < 1$. Тогда при $|x-y| < \delta, \delta = \varepsilon$ выполняется условие равностепенной непрерывности и множество предкомпактно по теореме Арцела-Асколи, значит оператор предкомпактен.

Задача 3. Привести пример оператора A такого, что $A^2 = 0, A$ - не компактен.

Решение. Возьмем оператор в l_2, который все нечетные элементы перемещает вправо на один шаг, а остальные зануляет, то есть $Ax = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5 ...), rkA = \infty$ и он не компактен, так как $\{e_{2n-1}\}_{n=1}^\infty \xrightarrow{A} \{e_{2n}\}_{n=1}^\infty$ - не предкомпактен в силу ненулевой норме разности двух близких элементов: $||e_{2n} - e_{2l}|| = \sqrt{2}, n \ne l$.

Задача 5. Показать с помощью теоремы Банаха показать, что если X - линейное пространство с двумя нормами $|| \cdot ||_1, || \cdot ||_2$ и $X_1 = (X, || \cdot ||_1), X_2 = (X, || \cdot ||_2)$ - оба банаховы и $\exists M : \forall x \in X ||x||_2 \le M||x||_1 \implies$ нормы эквивалентны.

Решение. Пусть $A : X_1 \to X_2, Ax = x, ||Ax||_2 = ||x||_2 \le M||x_1||, ||A|| \le M \implies A \in B(X_1, X_2)$. Пространства состоят из одних и тех же элементов $\implies A$ - биекция и $\exists A^{-1}$, причем $A^{-1} : X_2 \to X_1$ - ограничен по теореме Банаха и $\forall x \in X \ ||A^{-1}x||_1 \le m||A^{-1}|| \cdot ||x||_2 = m||x||_2 \implies$ нормы эквивалентны.

Теорема. $A \in K(X) \Leftrightarrow A^{-1} \in K(X^*), X$ - банахово. В частности, $A \in K(H) \Leftrightarrow A^* \in K(H), H$ - гильбертово.

Определение. Пусть X - банахово, $A \in B(X,Y), \lambda \in C$ и дано уравнение $(A - \lambda I)x = y$, где y - известен, x - неизвестен. Спектром оператора A называется совокупность всех чисел $\lambda \in C$ таких, что не существует ограниченного обратного для $(A - \lambda I)$. Будем обозначать спектр оператора A как $\sigma(A)$.

Определение. Множество $C \setminus \sigma(A) = \rho(A)$ - резольвентное множество оператора A. Если $\lambda \in \rho(A)$, то $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in B(X)$ и $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)$ - резольвента оператора A.

Классификация спектра:
1) $(A-\lambda I)$ - не инъективен, то есть $Ker(A-\lambda I)\neq\{0\} \implies \exists x\neq 0:(A-\lambda I)x=0\Leftrightarrow Ax=\lambda x$. В данном случае X - собственный вектор, λ - собственное значение.
Определение. Множество всех собственных значений образует точечный спектр оператора $\sigma_p(A)$.
2) $(A-\lambda I)$ - инъективен, но не сюръективен, то есть $Ker(A-\lambda I)=\{0\}, Im(A-\lambda I)\neq X$.
а) Если $\overline{Im(A-\lambda I)}=X$, то такие λ образуют непрерывный спектр $\sigma_c(A)$.
б) Если $\overline{Im(A-\lambda I)}\neq X$, то такие λ образуют остаточный спектр $\sigma_r(A)$.

Свойства спектра ограниченного оператора

Теорема 1. $\sigma(A)$ - замкнуто.
Доказательство. Пусть $\lambda_0\in\rho(A) \implies \exists$ обратый для $A-\lambda_0 I$ и $\lambda-\lambda_0<\frac{1}{||R_{\lambda_0(A)}||}$. Тогда $(A-\lambda I)=A-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I$ и $\exists(A-\lambda_0 I)^{-1}=R_{\lambda_0(A)} \implies$ по свойству малых возмущений обратимых операторов $\lambda\in\rho(A)$ и $\rho(A)$ - открыто $\implies \sigma(A)=C\setminus\rho(A)$ - замкнуто.
Теорема. Если $|\lambda|>||A|| \implies \lambda\in\rho(A)$. Другими словами, $\sigma(A)\subset\{\lambda:|\lambda|\leq||A||\}$.
Доказательство. $(A-\lambda I)^{-1}=(-\lambda(I-\frac{A}{\lambda}))^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}$, так как при $||\lambda||>||A||\ \frac{A}{\lambda}<1 \implies$ оператор $(I-\frac{A}{\lambda})$ - обратим по теореме о малых возмущениях. Ряд $\frac{-1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}$ называется рядом Неймана для резольвенты.
Теорема. Если $A\in B(X), X$ - банахово, то $\sigma(A)\neq\emptyset$.
Задача 1. Рассмотрим в l_2 оператор $A_\alpha x=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2...\alpha_nx_n...),\alpha=(\alpha_1,\alpha_2...)\in l_\infty$. Найти $\sigma(A)$.
Решение. $A_\alpha X=\lambda X:\forall k\ \alpha_kx_k=\lambda x_k\neq 0,\lambda=\alpha_k$ - собственные значения $\implies e_k=(0,0...0,\underset{k}{1},0...)$ - собственные векторы $\implies \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}=\sigma_p(A),\overline{\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}}\subset\sigma(A)$. Покажем, что это весь спектр. Пусть $\lambda\notin\overline{\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}} \implies \underset{k\geq1}{inf}|\lambda-\alpha_k|=d>0$. Найдем резольвенту: $(A_\alpha-\lambda I)x=y,(\alpha_k-\lambda)x_k=y_k\forall k=1,2...\ x_k=\frac{y_k}{\alpha_k-\lambda}$, тогда $A_{\overline{\alpha-\lambda}},||(A_\alpha-\lambda I)^{-1}||=\underset{k>1}{sup}\frac{1}{|\alpha_k-\lambda|}=\frac{1}{d}<\infty \implies \lambda\in\rho(A)$ и $\overline{\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}}$ - весь спектр. Пусть $\exists\lambda\in\overline{\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}}\setminus\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \implies Ker(A_\alpha-\lambda I)=\{0\}$. Покажем, что такие $\lambda\in\sigma_c(A)$. Пусть $y\in l_2\ \forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in l_2:||(A_\alpha-\lambda I)x_\varepsilon-y||<\varepsilon \implies Im\overline{(A_\alpha-\lambda I)}=l_2$. Возьмем $x_\varepsilon=(\frac{y_1}{\alpha_1-\lambda},\frac{y_2}{\alpha_2-\lambda}...\frac{y_n}{\alpha_n-\lambda},0,0...)$, тогда $||(A_\alpha-\lambda I)x_\varepsilon-y||_{l_2}=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}}\to 0$ при $n\to\infty$.
Пример: Возьмем оператор $Ax=(x_1,\frac{x_2}{2}...\frac{x_n}{n}...)$ в l_2. Тогда $\alpha_k=\frac{1}{k} \implies \sigma(A)=\cup_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cup\{0\},\cup_{k=1}^{\infty}=\sigma_p(A),\{0\}=\sigma_c(A)$.
Задача 2. Пусть X - банахово и $X=X_0\oplus X_1,X_0,X_1$ - замкнуты. Тогда $x=x_0+x_1,x_i\in X_i$ и $Px=x_0$. Найти $\sigma(P),R_\lambda(P)$.
Решение. Найдем собственные значения: $Px=\lambda x,x_0=\lambda x_0+\lambda x_1 \implies (1-\lambda)x_0=\lambda x_1\Leftrightarrow\begin{cases}(1-\lambda)x_0=0\\ \lambda x_1=0\end{cases}$. Здесь возможны два варианта: $\begin{cases}x_0\neq 0\\ \lambda=1\end{cases} \implies x_1=$

$0, \lambda = 1$ - собственное значение, $\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \implies x_0 = 0, \lambda = 0$ - собственное значение. Пусть теперь $\lambda \neq 0, 1$ и $(P - \lambda I)x = y \implies (1-\lambda)x_0 - \lambda x_1 = y_0 + y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_0 = y_0 \\ -\lambda x_1 = y_1 \end{cases}$ и $x_0 = \frac{y_0}{1-\lambda} = \frac{Py}{1-\lambda}, x_1 = \frac{-y_1}{x} = \frac{-(I-P)y}{\lambda} \implies (P-\lambda I)^{-1} = \frac{P}{1-\lambda} - \frac{I-P}{\lambda}$ - резольвента $\implies \lambda = 0, 1$ - весь спектр.

Связь спектров оператора и сопряженного оператора

Теорема. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^*), H$ - гильбертово пространство($\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^{'}), X$ - банахово).
Теорема. Пусть H - гильбертово пространство. Если $\lambda \in \sigma_r(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$(Пусть X - банахово. Если $\lambda \in \sigma_r(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^{'})$.
Теорема. Пусть H - гильбертово. Если $\lambda \in \sigma_p(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \subset \sigma_r(A^*)$(Пусть X - банахово. Если $(\lambda \in \sigma_p(A) \implies \lambda \in \sigma_p(A^{'}) \subset \sigma_r(A^{'}))$.
Задача 3. Найти спектры операторов сдвига вправо и влево в l_2.
Решение. Найдем собственные значения: $A_r x = \lambda x \implies 0 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2 ... x_n = \lambda x_{n+1} \implies$:
1)$\lambda = 0 \implies x = 0 \implies$ нет собственного вектора.
2)$\lambda \neq 0 \implies x_1 = 0 \implies x_2 = 0 \implies x_k = 0 \forall k \implies x = 0 \implies$ нет собственного вектора.
Для оператора сдвига влево имеем: $A_l x = \lambda x \implies x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2 ... x_{n+1} = \lambda x_n \implies \exists$ собственный вектор, если $x_1 \neq 0$. Пусть $x_1 = 1 \implies x_2 = \lambda, x_3 = \lambda^2 ... x_{n+1} = \lambda^n$. По условию, вектор должен лежать в $l_2 \implies \sum_{k=1}^{\infty} = |\lambda|^{2(k-1)} < \infty \implies |\lambda| = 1$. Далее, $||A_r|| = ||A_l|| = 1 \implies$ если $|\lambda| > 1 \implies \lambda \in \rho(A)$. Вспомним, что $A_l^* = A_r,\ A_r^* = A_l$, и если бы у A_l был остаточный спектр, то по теореме он был бы равен точечному спектру A_r, который состоит из пустого множества, следовательно $\sigma_r(A_l) = 0$. По тем же соображениям, $\sigma_r(A_r) = \sigma_p(A_l) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$. По свойству замкнутости спектра получаем, что $\sigma_c(A_r) = \{\lambda : |\lambda| = 1\},\ \sigma_c(A_l) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.
Определение. Пусть X,Y - банаховы пространства, $A \in B(X), C \in B(Y), S \in B(X,Y)$,S - биекция, такая, что равна композиция отображений $SA = CS$ и $C = SAS^{-1}$, тогда A и C - подобны, или $A \sim S$.
Теорема. Спектры подобных операторов совпадают со всей классификацией.
Задача 4. Рассмотрим $l_2(Z) \ni x(...x_{-1}, (x_0), x_1, x_2...), |x_i|^2 < \infty,\ (x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \overline{y_i}, A_r(x) = (...x_{-2}, (x_{-1}), x_0...), A_r e_n = e_{n+1}$ и $A_l x = (...x_0, (x_1), x_2...), A_l e_n = e_{n-1}$(здесь (x_k) - центральный элемент). Найти спектры таких операторов.
Решение. Мы знаем, что $A_r = A_l^*, A_l = A^* r, ||A_r|| = ||A_l|| = 1$. Все гильбертовы пространства изоморфны, поэтому можно рассмотреть пространства $l_2 \cong L_2[0; 2\pi]$ с базисами e_n и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = E_n$ соответственно. Пусть $Se_n = E_n, x \in l_2$ и $x = \sum x_k e_k$, тогда $f(x) = \sum x_k E_k$. Применим оператор сдвига вправо и влево к обоим элементам и получим: $A_r x = \sum x_k e_{k+1}, A_r f = \sum x_k E_{k+1} = \sum x_k e^{it} e^{ikt} = e^{it} f(t) \implies A_r \sim$

$C, C = e^{it}$. Аналогично получаем, что $A_l \sum C^*, C^* f = e^{-it} f(t)$. Для дальнейшего решения введем определение.

Определение. Пусть H - гильбертово, тогда A - нормально, если $AA^* = A^*A$.

Примеры:

1) Если A - самосопряженный, то он нормальный.

2) Если U - унитарный, то есть $U^* = U^{-1}$, то U - нормальный оператор.

3) Возьмем в пространстве $L_2(\Omega, \mu)$ оператор $A_\phi f = \phi f, \phi \in L_\infty(\Omega, \mu)$. Очевидно, что $A_\phi^* = A_{\overline{\phi}} \implies A_\phi$ - нормальный, так как $A_\phi^* A^\phi = A_\phi A_\phi^* = A|\phi|^2$.

4) Оператор $A_\alpha x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 ... \alpha_n x_n)$ в l_2 нормальный, так как $A_\alpha A_\alpha^* = A_\alpha^* A_\alpha = A_{|\alpha|^2}$.

5) Операторы сдвига вправо и влево в l_2 не нормальные.

Теорема. Если A - нормален, то $\sigma_r(A) = 0$.

Теорема. Если $L_2(\Omega, \mu), \phi \in L_\infty(\omega, \mu), A_\phi f = \phi \cdot f \implies \sigma(A_\phi) = essE(\phi)$ - существенные значения ϕ.

Определение. $essE(\phi) = \{\lambda : \forall \varepsilon > 0\ \mu\{x : |\phi(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0\}$. Если $\mu\{x : \phi(x) = \lambda\} = 0$ и $\lambda \in essE(\phi) \implies \lambda \in \sigma_c(A)$. Если $\mu\{x : \phi(x) = \lambda\} > 0 \implies \lambda \in \sigma_p(A)$.

Продолжение решения. Функция e^{it} пробегает всю окружность при $t \leq 0 \leq 2\pi, |e^{it}| = 1 \implies |\lambda| = 1 \implies \sigma(A_r) = \sigma(A_l) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ - непрерывный спектр. Для функции e^{-it} все аналогично.

Семинар 14

Спектральный радиус оператора

Определение. Пусть X - банахово, $A \in B(X)$. Для $\lambda \in C$ $\exists$ последовательность Вейля, если $\exists x_n \in X : ||x_n|| = 1$ и $||(A - \lambda I)x_n|| \to 0$.
Теорема. Если $\exists$ последовательность Вейля, то $\lambda \in \sigma(A)$.
Доказательство. От противного, пусть $\lambda \notin \sigma(A) \implies \exists(A - \lambda I)^{-1} \in B(X), y_n = (A - \lambda I)x_n \implies y_n \to 0$ и $(A - \lambda I)^{-1}y_n = x_n$, но $||(A - \lambda I)^{-1}y_n|| = 1 \neq 0$ - противоречие с непрерывностью оператора.
Задача 1. Пусть в $L_2[a; b]$ дан оператор $\phi \in L_\infty[a; b], A_\phi f = \phi f$. Найти спектр оператора.
Решение. По теореме с предыдущего семинара мы знаем, что если $\lambda \in essE(\phi)$, то $\lambda \in \sigma(A)$. Действительно, $M_n\{x : |\phi(x) - \lambda| < \frac{1}{n}\}, \mu(M_n) > 0$. Пусть $f_n = \frac{\chi_{M_n}}{\sqrt{\mu(M_n)}}, ||f_n|| = 1$. Проверим, что это последовательность Вейля: $||(A - \lambda I)f_n||^2 = \int_{M_n} \frac{|\phi(x)-\lambda|^2}{\mu(M_n)}dx < \frac{1}{n^2}\int_{M_n} \frac{dx}{\mu(M_n)} = \frac{1}{n^2} \to 0$. Если $\mu\{x : \phi(x) = \lambda\} > 0$, то возьмем в качестве собственных функций $f = \chi_{\{x:\phi(x)=\lambda\}} \implies \forall M \subset \{x : \phi(x) = \lambda\},\ \mu(M) > 0, f = \chi_M$.

Пусть $\lambda \notin essE(\phi) : \exists\varepsilon > 0 : \mu\{x : |\phi(x) - \lambda| < \varepsilon\} = M_\varepsilon = 0$. Построим резольвенту, для этого решим уравнение $(A_\phi - \lambda I)f = g \implies (\phi(x) - \lambda)f = g \implies f = \begin{cases} \frac{g}{\phi(x)-\lambda}, \notin M_\varepsilon \\ 0, x \in M_\varepsilon \end{cases}$. Проведем оценку: $||(A_\phi - \lambda I)^{-1}g||^2 = \int_{\Omega\setminus M_\varepsilon} \frac{|g|^2}{|\phi(x)-\lambda|^2}d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega\setminus M_\varepsilon} |g|^2 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega |g|^2 d\mu = \frac{1}{\varepsilon^2}||g||^2 \implies ||(A_\phi - \lambda I)^{-1}|| \leq \frac{1}{\varepsilon} \implies \lambda \notin \sigma(A_\phi)$.
Задача 2. В пространстве C[a;b] дан оператор $A_\phi f = \phi f$, причем $\phi \in C[a; b]$ - фиксированная. Найти спектр такого оператора.
Решение. Найдем собственные значения:$A_\phi f = \lambda f, f \neq 0 \implies \exists x_0 : f(x_0) \neq 0 \implies \exists u(x_0)$ - окрестность в x_0 такая, что функция f сохраняет знак в этой окрестности. Получаем: $(\phi(x) - \lambda)f(x) = 0 \implies \phi(x) = \lambda\ \forall x \in u(x_0) \implies \lambda \in \sigma_p(A_\phi)$ если $\exists(\alpha; \beta) \subset [a; b] : \phi|_{(\alpha;\beta)} = \lambda$.

Пусть теперь $(A_\phi - \lambda I)f = g \implies (\phi(x) - \lambda)f = g \implies f = \frac{g}{\phi(x)-\lambda}\forall x \in [a; b] \implies \sigma(A_\phi) = E(\phi) = \{\lambda : \exists x \in [a; b] : \phi(x) = \lambda\}$. Множество $E(\phi)$ - замкнуто, тогда если $\lambda \notin E_\phi, dist(\lambda, E(\phi)) = \underset{[a;b]}{min}|\phi(x) - \lambda| = d > 0 \implies ||(A_\phi - \lambda I)^{-1}|| = \max \frac{1}{|\phi(x)-\lambda|} = \frac{1}{min(\phi(x)-\lambda)} = \frac{1}{d} < \infty \implies \sigma(A_\phi) = E(\phi) = \{\lambda : \exists x \in [a; b]\ \phi(x) = \lambda\}$. Если $\exists(\alpha; \beta) \subset [a; b] : \phi|_{(\alpha;\beta)} = \lambda \implies \lambda \in \sigma_p(A_\phi)$. Иначе, $\lambda \in \sigma_r(A_\phi)$.
Определение. Пусть X - банахово пространство, $A \in B(X)$, тогда спектральный радиус оператора $r(A) = \underset{\lambda\in\sigma(A)}{max}|\lambda| \implies r(A) \leq ||A||$.

Теорема. Спектральный радиус оператора $r(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$.
Задача 3. Показать, что если $A = A^*$, то $r(A) = ||A||$.

Решение. $\forall A \in B(H), ||AA^*|| = ||A^*A|| = ||A||^2$. Если $A = A^*$, то $||A^2|| = ||A||^2 \implies ||A^{2^k}|| = ||A||^{2^k} \implies r(A) = \lim_{k\to\infty} ||A^{2^k}||^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} ||A||^{\frac{2^k}{2^k}} = ||A||$.
Теорема Гильберта-Шмидта. Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, $dimH = \infty, A = A^* \in K(H) \implies \exists$ ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} H$: $Ae_k = \lambda_k e_k$. При этом, если занумеровать $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_k|$, то $|\lambda_1| = ||A||$ и $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Заметим, что если λ_i - все различны, то отвечающие им собственные векторы ортогональны и образуют базис.
Задача 4. Рассмотрим оператор $Af = \int_0^x f(t)dt$ в $L_2[0;1]$. Найти его норму.
Решение. Мы уже знаем, что $A \in K(L_2[0;1]), ||A|| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, A^*f = \int_x^1 f(t)dt \implies A^*A$ - самосопряженный и компактный $\implies \lambda_1(A^*A) = ||A^*A|| = ||A||^2$. Тогда $A^*Af = \lambda f \implies \int_x^1 (\int_0^t f(s)ds)dt\lambda f(x) \implies -\int_0^x f(t)dt = \lambda f^{'}(x) \implies -f = \lambda f^{''}$. Легко заметить, что $(A^*Af, f) = ||Af||^2 \geq 0$. Получаем дифференциальное уравнение $-f = \lambda f^{''}$ с начальными условиями, $f(1) = 0,\ f^{'}(0) = 0$. Общее решение уравнения имеет вид: $f(x) = acos\frac{x}{\sqrt{\lambda}} + bsin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$. Подставляя начальные условия, уравнение сведется к $f(x) = acos\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Коэффициент а не может равнять нулю, так как мы ищем нетривиальные решения $\implies cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + \pi n \implies \lambda_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+\pi n)^2}, n = 0, 1, 2....$ Максимальное соответствующее значение достигается при $n = 0, \lambda_0 = \frac{4}{\pi^2} \implies ||A|| = \frac{2}{\pi} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть оператор не достигает своей верхней оценки.
Теорема. Если $A = A^* \in B(H)$, то $\sigma(A) \subset [\inf\limits_{||x||=1} (Ax, x);\ \sup\limits_{||x||=1} (Ax, x)]$.
Задача 5. Решим уравнение $th\mu = \frac{-1}{\mu}$. Его корни $\mu_n \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2n-1}{2}\pi$. Показать, что $cos(\mu_n x)$ - ортонормированная система, но не базис. Если же добавить к этой системе вектор $ch(\mu_0 x)$, где μ_0 - решение уравнения $th\mu = \frac{1}{\mu}$, то она образует ортогональный базис в $C[0;1]$.
Решение. Возьмем в $L_2[0;1]$ $(Af)(x) = \int_0^1 max(x,t)f(t)dt, A = A^* \in K(H)$. Найдем собственные значения и функции: $Af = \lambda f \implies \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 tf(t)dt = \lambda f(x) \implies xf(x) + \int_0^x f(t)dt - xf(x) = \lambda f^{'}(x) \implies f(x) = \lambda f^{''}(x)$. Получаем дифференциальное уравнение с краевыми условиями: $f^{'}(0) = 0, f(1) = f^{'}(1)$. Рассмотрим несколько случаев:
1) Если $\lambda > 0$, то $f = ash\frac{x}{\sqrt{\lambda}} + bch\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$. Подставляя краевые условия получим: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}sh\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = ch\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Пусть $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \mu \implies th\mu = \sqrt{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ и $\exists! \mu_0 : f = bch\mu_0 x$.
2) Если $\lambda < 0$, то $f = asin\frac{x}{\sqrt{-\lambda}} + bcos\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}$. Подставляя краевые условия получим: $cos\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}sin\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$. Пусть $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} = \mu > 0 \implies tg\mu = -\frac{1}{\mu}$ и $\mu_n \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2n-1}{2}\pi \implies \lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}, n = 1, 2... \implies f_n = cos\mu nx$.
Норму оператора даст большее из чисел: $\frac{1}{\mu_0^2}, \frac{1}{\mu_1^2}$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ