МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

БОГАЧЕВ
ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФКИ МГУ
БАРМИНА МАКСИМА АЛЕКСАНДРОВИЧА

Содержание

Лекция 1. Введение в функциональный анализ

Рекомендуемая литература по курсу

[1] Богачёв В. И., Смолянов О. Г. «Действительный и функциональный анализ. Университетский курс»

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа»

[3] Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ»

[4] Богачёв В. И. «Функциональный анализ»

Краткая история функционального анализа

Возникновение этой области как отдельной области математики связывают с именем Стефана Банаха и его выдающейся монографией «Теория линейных операций» (Banach. «Théorie des opérations linéaires»), изданная в начале 1930-х годов сперва на польском, а затем на французском. Так как Банах родился и жил во Львове, который после окончания войны перешел в Украинскую ССР, в 1948 году его книга была переведена на украинский язык и издана под названием «Курс функціонального аналізу». Если сравнивать монографию Банаха с книгой Колмогорова и Фомина, можно найти много общего, последняя явно многое позаимствовала из трудов Банаха, как результаты, так и структуру изложения.

Совсем скоро этот курс был включен в обязательную программу на мехмате МГУ, инициатором этого стал Андрей Николаевич Колмогоров, первое время он назывался «Анализ 3». Хотя сам Колмогоров не участвовал в исследованиях функционального анализа, он оценил это направление и его перспективность в таких передовых для страны исследованиях, как атомный проект, а в дальнейшем и космический проект, в которые в дальнейшем будут широко были вовлечены математики, имеющие отношение к функциональному анализу и дифференциальным уравнениям. Там математики занимались компьютерным моделированием, нужно было обсчитывать решения очень сложным многомерных нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений, например, модели теории взрыва и теории горения.

Примерно в то же время похожий курс появился на физическом факультете ЛГУ (ныне - СПбГУ). Это известный пятитомный курс высшей математики В. И. Смирнова, пятый том которого посвящен функциональному анализу. Монументальный труд Смирнова более фундаментальный, чем у Колмогорова и Фомина, так как он был написан по свежим работам первооткрывателей — фон Неймана, Стоуна и других классиков, теоремы которых будут рассмотрены в нашем курсе.

Программа курса

Программа, похожая на то, что у нас будет, есть в книгах [4] и [1].

Курс будет состоять из трёх основных ингредиентов:

1) Пространства
2) Компакты
3) Линейные операторы и линейные функционалы

Метрическое пространство

Определение 1.1. *Топологическое пространство* (X, τ) — это множество X с набором подмножеств τ, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $\varnothing, X \in \tau$,
2. $U, V \in \tau \Longrightarrow U \cap V \in \tau$,
3. $U_\alpha, V_\alpha \in \tau \Longrightarrow U_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Это семейство называется *топологией*, его элементы называются *открытыми*.

Определение 1.2. *Метрическое пространство* (X, d) — это подкатегория топологических пространств, где d — *метрика* $d\colon X \times X \to [0, \infty)$, обладающая следующими свойствами:

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) > 0,\ x \neq y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — неравенство треугольника.

В неравенстве треугольника некоторые элементы могут совпадать, особенно это актуально, если в пространстве меньше трёх элементов. Для удобства, пустое множество также причисляют к метрическим пространствам, при этом оно не является линейным пространством, так как в нем должен быть 0.

Определение 1.3. *Открытый шар* $U(a, r)$, $r > 0$ в метрическом пространстве — это

$$U(a, r) = \{x : d(a, x) < r\}.$$

Определение 1.4. Непустое множество $U \neq \varnothing$ *открыто* тогда и только тогда, когда всякая его точка входит в U с открытым шаром какого-то радиуса вокруг неё. То есть открытое множество заведомо является объединением открытых шаров.

Упражнение 1.1. Убедиться, что при добавлении к открытым множествам пустого, получится топология. Нужно проверить несколько условий, наименее очевидное из которых — что пересечение двух открытых открытых. С помощью неравенства треугольника проверить, что открытый шар является открытым множеством, то есть всякая точка открытого шара входит в этот шар с шаровой окрестностью некоторого радиуса.

Не всякое топологическое пространство получается из метрического.

Определение 1.5. Топологическое пространство называется *метризуемым*, если на нём можно придумать метрику, которая порождает исходную топологию.

Пример *(метрическое пространство)*. Есть непустое множество $\Omega \neq \varnothing$, а $B(\Omega)$ — множество всех неограниченных вещественных или комплексных функций на Ω. Между двумя такими функциями можно ввести расстояние $d(f, g) = \sup\limits_u \left|f(u) - g(u)\right|$.

Упражнение 1.2. Проверить, что неравенство треугольника выполнено, и что получено метрическое пространство.

Это пространство — простой и наглядный пример метрического пространства. Кроме этого, оно универсально. Нестрого — других метрических пространств нет.

Определение 1.6. Метрические пространства *изометричны*, если между ними есть взаимно однозначное отображение, сохраняющее расстояние.

Теорема Банаха

Теорема 1.1 *(Банаха)*. Пусть (X, d) — непустое метрическое пространство. Тогда оно изометрично части пространства $B(X)$.

Замечание. На первый взгляд, теорема выглядит подозрительно, так как $B(X)$ не зависит от метрики d, которая на одном пространстве X может быть совершенно разной. Философски это можно обосновать так: $B(X)$ настолько большое, что для каждой метрики d будет какое-то своё подмножество $B(X)$, изометричное (X, d).

Доказательство. Хотим каждой точке пространства X сопоставить ограниченную функцию и получить отображение $m \mapsto f_m \in B(X)$ так, что расстояние между точками будет равно расстоянию между функциями

$$d(m_1, m_2) = d(f_{m_1}, f_{m_2}) = \sup_x \left| f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x) \right|.$$

Построим в явном виде функцию f_m по точке m, используя имеющуюся метрику d:

$$f_m \colon m \mapsto d(x, m).$$

Это хорошая идея, так как расстояние между этими функциями будет равно

$$\sup_x \left| d(x, m_1) - d(x, m_2) \right| = d(m_1, m_2),$$

так как, по неравенству треугольника, это не может быть больше $d(m_1, m_2)$. При этом эта функция не годится, так как нам нужно получить ограниченную функцию, а эта функция может быть неограничена при неограниченном пространстве X. Чтобы таких проблем не было, вычтем из каждой f_m расстояние до фиксированной точки m_0:

$$f_m \colon m \mapsto d(x, m) - d(x, m_0).$$

В таком случае расстояние между функциями не изменится, так как общие части сократятся при вычитании. При этом функция стала ограниченной: по неравенству треугольника, значение функции в любой точке x по модулю не превосходит расстояния между фиксированными при вычислении точками m и m_0. ■

Таким образом, мы получили функциональное пространство, в которое вкладываются все существующие метрические пространства. Другими словами, не существует никаких метрических пространств, кроме пространств вида $B(X)$ и их частей.

Такие пространства довольно интересны: если мы возьмем в качестве X прямую с обычной метрикой, то пространство функций, ограниченных на этой прямой — это линейное пространство. Получается, что мы нашли нелинейное отображение прямой в линейное пространство с сохранением расстояния.

Нормированное пространство

Определение 1.7. *Нормированное пространство* X — это линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с заданной *нормой* $x \mapsto \|x\|$ такой, что

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.

Важно не путать метрику и норму — там было две переменных, здесь одна. Кроме того, там не было дополнительных структур на множестве, а здесь линейное пространство.

Пример *(нормированного пространства)*. $B(\Omega)\colon \|f\| = \sup\limits_{\omega}\Big|f(\omega)\Big|$.

Как только у нас есть норма, сразу возникает *порожденная метрика* $d(x, y) = \|x-y\|$, для которой автоматически выполняется неравенство треугольника для метрик, которое было введено ранее.

Если метрическое пространство является линейным, то можно задать два вопроса: порождается ли эта метрика какой-то нормой и можно ли придумать такую норму, что топология, порожденная этой нормой будет такая же, какая была порождена метрикой.

Приведем пример метрики в пространстве $\mathbb{R}^n$, которую нельзя породить никакой нормой:

Пример. Метрика, получаемая по формуле $d(x, y) = \|x - y\|$ не может быть ограниченной, так как мы можем вынести скаляр из нормы. Поэтому любая ограниченная метрика в пространстве $\mathbb{R}^n$ не может быть порождена никакой нормой.

Утверждение 1.1 *(б/д)*. Всякое нормированное пространство линейно изометрично линейному подпространству в пространстве $B(\Omega)$.

Лекция 2. Основные понятия и начальные теоремы

Евклидово пространство

Определение 2.1. *Евклидово пространство E* (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) — это линейное пространство со *скалярным произведением* — функцией двух переменных (x, y) со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

В случае $\mathbb{R}$ требуется, чтобы эта функция была

1. симметрична: $(x, y) = (y, x)$,
2. линейна по первому аргументу: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
3. неотрицательна: $(x, x) \geq 0$, а $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

В случае $\mathbb{C}$ требуется, чтобы эта функция была

1. симметрична с сопряжением: $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2. линейна по первому аргументу: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
3. неотрицательна: $(x, x) \geq 0$, а $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Сопряжение в комплексном случае необходимо, чтобы скаляр получился неотрицательным. Это условие необходимо для того, чтобы из скалярного произведения получалась норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Проверим неравенство треугольника в вещественном случае:

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}.$$

Возведя это неравенство в квадрат, получим

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

После повторного возведения в квадрат получим неравенство Коши–Буняковского:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Это неравенство следует из аксиоматического неравенства $(x + ty, x + ty) \geq 0\ \forall t$ если рассмотреть когда дискриминант этого уравнения неотрицателен или при корректном подборе параметра t. Так как оно всегда верно, то и исходное неравенство треугольника выполняется.

Получили, что скалярное произведение — функция двух переменных, из нее можно получить норму, функцию от одного переменного, из которой можно получить метрику, функцию от двух переменных, но это не то же самое, что и скалярное произведение.

Полные (банаховы) пространства

Когда из нормы или из скалярного произведения получается метрика, можно говорить о полноте полученного пространства.

Определение 2.2. Полное нормированное пространство — это *банахово пространство*.

Определение 2.3. Полное евклидово пространство — это *гильбертово пространство* (Hilbert).

Приведем основные примеры полных пространств, которые нужно знать.

Пример. В универсальном пространстве $B(\Omega)$ присутствуют все рассмотренные выше объекты.

Пример. Пространство бесконечных ограниченных последовательностей:

$$c_0 = \left\{x = (x_n)\colon x_n \to 0, \|x\| = \sup |x_n|\right\}$$

Пример. При $1 \le p < \infty$ пространство абсолютно сходящихся рядов степени p:

$$\ell^p = \left\{x = (x_n)\colon \|x\|_p = \left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}$$

В пространстве ℓ^2 есть скалярное произведение: в вещественном случае $(x, y) = \sum x_n y_n$, а в комплексном — $(x, y) = \sum x_n \overline{y_n}$.

Пример. Пространство $L^p(\mu)$ по мере μ — это пространство классов эквивалентных функций, измеримых относительно этой меры, с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty,$$

где в формуле берется любой представитель класса эквивалентности, так как они почти всюду равны, и у разных представителей одного класса такая норма будет одинаковая. Нужно уметь проверять, что выполнено неравенство треугольника. В случае $p = 2$ это следует из того, что такая норма порождается скалярным произведением $(f, g) = \int f g \, d\mu$ в вещественном случае, или $(f, g) = \int f \overline{g} \, d\mu$ в комплексном случае.

Это классические банаховы пространства, наиболее часто используемые в приложениях. Помимо них существуют и другие банаховы пространства, например, пространство Цирельсона, пространство операторов.

Сепарабельность пространств

Определение 2.4. Топологическое пространство X *сепарабельно*, если в X есть счетное всюду плотное множество, то есть множество, которое присутствует в каждом непустом открытом множестве.

Пример. Пространство $B(\Omega)$ сепарабельно $\iff \Omega$ конечно.

Пример. Пространство ℓ^p, $1 \le p < \infty$ сепарабельны.

Пример. Пространство непрерывных функций $C[a, b]$ сепарабельно.

Пример. Пространство $L^p(\mu)$ сепарабельно, если μ — борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Для неборелевских мер оно может быть несепарабельно.

Упражнение 2.1. Показать, что приведенные выше пространства действительно являются сепарабельными.

Пример *(несепарабельного гильбертова пространства)*. Возьмем непустое множество $T \neq \varnothing$ и рассмотрим $\ell^2(T)$ — функции на T, равные нулю вне счетного множества, для которых сходится ряд $\sum\limits_t \left|x(t)\right|^2 < \infty$. Также определим скалярное произведение:

$$(x, y) = \sum_t x(t)\, y(t).$$

Если T счетно, то получим классическое пространство ℓ^2, а для несчетных T получим, что $\ell^2(T)$ несепарабельно, так как если рассмотреть функции

$$e_t(s) = \begin{cases} 1, & s = t, \\ 0, & s \neq t, \end{cases}$$

то расстояние между разными функциями всегда будет равно $\sqrt{2}$:

$$\|e_t - e_{t'}\| = \sqrt{2},\ t \neq t'.$$

Упражнение 2.2. Пусть U — открытый диск в комплексной плоскости, $H^2(U)$ — это голоморфные в U функции из $L^2(U)$ по классической, плоской мере Лебега со скалярным произведением из $L^2(U)$:

$$(f, g) = \iint\limits_U f\,\overline{g}\,dx\,dy.$$

Это линейное подпространство в гильбертовом пространстве, следовательно, это евклидово пространство. Доказать, что это также гильбертово пространства. Выяснить, сепарабельно ли оно.

Комментарий. Не все голоморфные фунции на круге будут из $L^2(U)$, например, функция с полюсом на границе круга будет голоморфной, но при этом не будет входить в $L^2(U)$

Теорема фон Неймана – Йордана

Рассмотренные примеры универсальны, т. к. всякое абстрактное гильбертово пространство изоморфно (как гильбертово пространство, линейный изоморфизм, сохраняющий скалярное произведение) пространству $L^2(\mu)$ для подходящей меры μ или пространству $\ell_2(T)$ для множества T подходящей мощности.

Замечание. Если дана норма, то иногда любопытно знать, можно ли получить эту норму из скалярного произведения, или нет. Про некоторые нормы довольно легко понять, что их нельзя получить из скалярного произведения

Пример. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ норму вектора с двумя компонентами:

$$\big\|(x_1, x_2)\big\| = |x_1| + |x_2|.$$

Эту норму нельзя получить из скалярного произведения, так как круг для нормы, порождаемой склалярным произведением, круглый, а здесь он квадратный.

Теорема 2.1 *(фон Неймана – Йордана)*. Норма $\|\cdot\|$ нормированного пространства порождается скалярным произведением $\Longleftrightarrow$ выполнено *равенство параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Часть $\Longrightarrow$ банальна, так как если норма получается из скалярного произведения, то при подсчете скалярных квадратов сократятся скалярные произведения и останутся только квадраты.

Отметим, что если в пространстве все двухмерные плоскости евклидовы, то оно само тоже евклидово.

Теорема Бэра и следствия из неё

Теорема 2.2 *(о вложенных шарах)*. Если B_n — замкнутые шары радиуса $r_n \to 0$ в полном метрическом пространстве X и они вложены: $B_{n+1} \subset B_n$, то $\bigcap\limits_n B_n$ — точка.

Доказательство. Из условия следует, что центры — фундаментальная последовательность, значит, они к чему-то сходятся, и это принадлежит всем шарам. ■

В теореме важно, что радиусы r_n стремятся к нулю. В произвольном метрическом пространстве без этого условия может не быть сходимости шаров.

Упражнение 2.3. Если шары взяты в банаховом пространстве, то не обязательно, чтобы радиусы r_n стремятся к нулю, чтобы $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$.

Определение 2.5. Множество *нигде не плотное*, если в каждом шаре есть подшар, не пересекающийся с этим множеством.

Упражнение 2.4. Доказать, что множество нигде не плотное, если его замыкание не имеет внутренних точек.

Теорема 2.3 *(Бэра)*. Полное метрическое пространство X нельзя представить как объединение последовательности нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть $X = \bigcup\limits_n X_n$, где X_n — нигде не плотные множества.

Возьмем замкнутый шар B_1 такой, что $B_1 \cap X_1 = \varnothing$.

Найдем в B_1 замкнутый шар B_2 радиуса менее $\frac{1}{2}$ радиуса B_1, такой, что $B_2 \cap X_2 = \varnothing$.

Продолжим брать вложенные B_n, радиусы будут идти к 0, поэтому $\exists x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, который не будет пересекаться ни с одним из B_n, получили противоречие. Значит, полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. ■

Определение 2.6. Функция f на метрическом пространстве X *непрерывна*, если $f(x_n) \to f(x)$ при $x_n \to x$. Аналогично для отображения $f : X \to Y$, где Y — тоже метрическое пространство.

Упражнение 2.5 *(непрерывность в топологических пространствах)*. Показать, что непрерывность равносильна тому, что $f^{-1}(U)$ открыто для всех открытых $U \subset \mathbb{R}$ или $U \subset Y$.

Следствие 2.1 *(теоремы 2.3)*. X — полное метрическое пространство, а $f_n: X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, причем для каждого x имеет $\sup_n \left|f_n(x)\right| < \infty$, то есть в каждой точке последовательность непрерывных функций ограничена. Тогда существует шар B положительного радиуса такой, что f_n на этом шаре равномерно ограничены:

$$\sup_n \sup_{x\in B} \left|f_n(x)\right| < \infty.$$

Доказательство. Пусть $X_N = \left\{x : \left|f_n(x)\right| \leq N \ \forall n\right\}$ для $N \in \mathbb{N}$.

Упражнение 2.6. Проверить, что X_N замкнуты.

Рассмотрим $X = \bigcup_N X_N$. По теореме Бэра, какое-то X_N содержит открытый шар, так как если замкнутое множество не содержит шаров, то у него нет внутренностей, и оно нигде не плотно, и мы полное пространство представили в виде объединения нигде не плотных, что невозможно. ■

Упражнение 2.7. Пусть X — полное пространство, $f_n: X \to \mathbb{R}$ непрерывны, а $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Доказать, что f имеет точки непрерывности.

Упражнение 2.8. Пусть на комплексной плоскости есть последовательность голоморфных функций, и она в каждой точке комплексной функции к чему-то сходится. Показать, что во всяком диске найдется поддиск, на котором предел — голоморфная функция.

Лекция 3. Компакты

Компактные пространства и их свойства

Определение 3.1. *Компактное пространство* — хаусдорфово пространство, в котором из всякого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение 3.2. *Хаусдорфово пространство* — это пространство, в котором разные точки обладают дизъюнктными окрестностями

Определение 3.3. Множество в хаусдорфовом пространстве называют *компактом*, если оно компактно как самостоятельное пространство.

Таким образом, компактность множества не зависит от его расположения в хаусдорфовом пространстве.

Вспомним основные *свойства компактов*:

1. Замкнутое множество в компакте — компакт, так как если есть замкнутое множество Z в пространстве X, то его дополнение $X \setminus Z$ открыто, можем убрать его из подпокрытия X и получим Z.

2. Образ компакта при непрерывном отображении в хаусдорфово пространство — компакт. Так как если образ покрыт открытыми V_α:

$$f(X) \subset \bigcup_\alpha V_\alpha,$$

то из-за непрерывности $f^{-1}(V_\alpha)$ открыты и $X \subset \bigcup\limits_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$, значит, можно выбрать конечное число, которые будут покрывать соответствующее V.

3. Бесконечная последовательность в компакте имеет предельную точку, то есть такую точку, что во всякой ее окрестности бесконечно много точек последовательности: пусть у каждой точки x есть окрестность V_x, в которой конечное число членов последовательности, то можем выбрать конечное подпокрытие, и последовательность была конечной, чего быть не может.

Упражнение 3.1. Пусть K_α — компакты в X, и всякий конечный поднабор имеет непустое пересечение. Тогда всеобщее пересечение не пусто: $\bigcap\limits_\alpha K_\alpha \neq \varnothing$

Вполне ограниченные множества

Определение 3.4. Множество *вполне ограничено* в метрическом пространстве, если для всякого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным числом открытых шаров радиуса ε.

Пример. В пространстве ℓ^∞ шар ограниченный, но не вполне ограниченный, потому что в шаре имеется последовательность точек с отдаленными от 0 расстояниями.

Обозначим через $N_\varepsilon(A)$ наименьшее число открытых шаров радиуса ε, покрывающих A (если такое число существует). Определим *метрическую эктропию* A как

$$H_\varepsilon(A) = \log_2 N_\varepsilon(A).$$

Лемма 3.1 *(критерий вполне ограниченного множества)*. A вполне ограниченно тогда и только тогда, когда всякая бесконечная последовательность в A содержит фундаментальную подпоследовательность.

Аналогично, B не вполне ограниченно $\Longleftrightarrow$ при некотором $\varepsilon > 0$ есть бесконечно много b_n, образующих решетку с

$$d(b_n, b_k) \geq \varepsilon, \ n \neq k.$$

Доказательство. Пусть A вполне ограничено и дана бесконечная последовательность $\{a_n\} \subset A$, из которой мы хотим извлечь фундаментальную. Покроем A шарами радиуса $U_1, \ldots, U_k$ радиуса 1. Какой-то, скажем, U_1, содержит бесконечно много a_n, будем рассматривать только этот шар. U_1 покроем конечным числом шаров радиуса $\frac{1}{2}$, какой-то, U_2, такой, что $U_2 \cap U_1$ содержит бесконечно много a_n, и так далее, продолжим строить множества на уменьшающихся к 0 радиусах, беря разные точки $a_{j_n} \in U_n$ в этих шарах. Таким образом во вполне ограниченном множестве мы построили фундаментальную последовательность.

В другую сторону: пусть A не вполне ограничено. Тогда при некоторых ε нельзя покрыть конечным числом шаров радиуса ε. Возьмем $a_1 \in A$, тогда найдется $a_2 \in A$ такое, что $d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$, далее найдется a_3 такое, что $d(a_1, a_3) \geq \varepsilon$ и $d(a_3, a_3) \geq \varepsilon$, и так далее, по индукции, построим a_n так, чтобы взаимные расстояния между разными элементами было не меньше ε:

$$d(a_n, a_k) \geq \varepsilon, \ n \neq k.$$

В полученной последовательности $\{a_n\}$ нет фундаментальных подпоследовательностей, так как все взаимные расстояния не меньше ε. ∎

Критерий Хаусдорфа

Теорема 3.1 *(критерий Хаусдорфа)*. Пусть X — метрическое пространство. Тогда равносильны следующие утверждения:

1) X компактно;
2) X вполне ограниченно и полно;
3) всякая бесконечная последовательность в X имеет сходящуюся подпоследовательность.

Отметим, что 1) и 3) сохраняются при гомеоморфизме, при этом отдельные части 2) при гомеоморфизме могут не сохраняться — неполный отрезок гомеоморфен полной прямой, а вполне ограниченный интервал гомеоморфен не ограниченной прямой. А так как это равносильно 1), то совмество это будет топологическим инвариантом.

Также, в случае метрического пространства 1) и 3) равносильны, но если их вывести из контекста метрических пространств, то они уже не будут равносильными.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Из 1) следует вполне ограниченность: каждую точку покрываем шаром радиуса ε и выбираем конечное подпокрытие; из 1) следует полнота: если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в компакте, то из-за компактности имеет предельную точку, которая и будет пределом из-за фундаментальности.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Если $\{x_n\}$ бесконечна, то сначала извлекаем фундаментальную подпоследовательность (по лемме 3.1), тогда, из-за полноты, она сходится.

3) $\Longrightarrow$ 2) : Из 3) следует вполне ограниченность по лемме 3.1. Если же $\{x_n\}$ фундаментальна, то берем в ней сходящуюся подпоследовательность, ее предел — предел всей $\{x_n\}$.

2) + 3) $\Longrightarrow$ 1) : Пусть $X \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, где U_α — открытые. Пусть нет конечного подпокрытия. Покроем X замкнутыми шарами радиуса 1 в конечном числе (используем вполне ограниченность). Тогда среди этих шаров есть какой-то V_1, не покрывающийся никаким конечным набором U_α. Этот шар будет вполне ограниченным, так как он является частью вполне ограниченного пространства. Покроем V_1 конечным числом замкнутых шаров радиуса $\dfrac{1}{2}$. Среди них есть V_2 такой, что $V_1 \cap V_2$ не покрывается конечным числом U_α. Продолжим по индукции, будем находить замкнутые шары V_n радиуса $\dfrac{1}{n}$ такие, что $V_1 \cap V_2 \ldots \cap V_n$ не покрывается конечным набором U_α. По модификации теоремы о

вложенных шарах получим, что $\bigcap\limits_1^\infty V_n$ — это точка x (из-за полноты). Существует α такое, что $x \in U_\alpha \Longrightarrow$ существует шар $B(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$ радиуса $\varepsilon > 0$. В итоге получаем, что $x \in B(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$. Возьмем $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$, тогда $V_n \subset B(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$ (см. рис. 3.1). Получили противоречие, поэтому конечное подпокрытие существует. ■

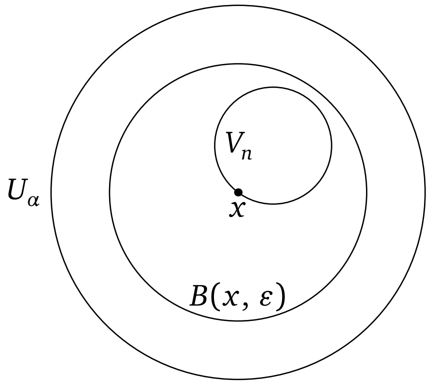

Рис. 3.1: Взаимное расположение областей в доказательстве теоремы 3.1.

Упражнение 3.2. Пусть X и Y — компакты и $f : X \to Y$ — непрерывная взаимнооднозначная. Показать, что f^{-1} тоже непрерывна.

Упражнение 3.3. Доказать, что для компакта верна теорема Бэра: если $X = \bigcup\limits_n X_n$, где X_n замкнуты, то некоторое X_n имеет внутренние точки.

Упражнение 3.4. Привести пример подпространства $X \subset [0, 1]$ (с той же метрикой, что и в $[0, 1]$), для которого верна теорема Бэра, но X не гомеоморфна никакому полному метрическому пространству.

Компакты в функциональном пространстве

Предложение 3.1. Если X — бесконечномерное нормированное пространство, то найдется последовательность точек $x_n \in X$ с $\|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_k\| \geq \dfrac{1}{2}$, $n \neq k$. В частности получаем, что шары в X не вполне ограничены.

Упражнение 3.5. Показать, что можно сделать взаимные расстояния не меньше единицы: $\|x_n - x_k\| \geq 1$.

Доказательство. Будем доказывать по индукции: пусть есть $x_1, \ldots, x_n$ с $\|x_i\| = 1$ и $\|x_i - x_j\| \geq \dfrac{1}{2}$. Найдем x_{n+1}: возьмем v, который не лежит в L — линейной оболочке

$x_1, \ldots, x_n$. Заметим, что $\mathrm{dist}(v, L) > 0$, где $\mathrm{dist}(v, L) = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\|$. Это верно, так как нет $y_j \in L\colon \|y_j - v\| \to 0$. Возьмем базис $e_1, \ldots, e_n$ в L и представим в нем y_j:

$$y_j = y_{j,1} e_1 + \ldots + y_{j,n} e_n.$$

Выберем подпоследовательность со сходящимися компонентами: $y_{j,k} \to c_k$, тогда сам $y_j \to c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n \in L$. Таким образом, действительно $\alpha = \mathrm{dist}(v, L) > 0$. Возьмем $y \in L$ так, что $\|v - y\| \sim \alpha$, скажем, $\|v - y\| < \dfrac{5}{4}\alpha$.

Упражнение 3.6. Показать, что можно взять точную оценку: $\|v - y\| = \alpha$.

В качестве x_{n+1} можем взять $x_{n+1} = \dfrac{v - y}{\|v - y\|}$. Проверим, что $\|x_{n+1} - z\| \geq \dfrac{1}{2}$ $\forall z \in L$:

$$\|x_{n+1} - z\| = \left\| \frac{v - y}{\|v - y\|} - z \right\| = \frac{1}{\|v - y\|} \left\| v - \underbrace{y - z\,\|v - y\|}_{\text{в } L} \right\| \geq \frac{1}{\|v - y\|}\,\alpha \geq \frac{4}{5} > \frac{1}{2}.$$

■

Лекция 4. Компакты в конкретных пространствах

Теорема об эквивалентности норм

Теорема 4.1. На $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны и эквиваленты стандартной евклидовой норме $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$, то есть если p — норма на $\mathbb{R}^n$, то она оценивается с двух сторон евклидовой нормой: $c_1\,|x| \le p(x) \le c_2\,|x|$, где $c_1,\, c_2 > 0$ — числа.

Из этого вытекает, что на всяком конечномерном линейном подпространстве, на котором априори никаких норм нет, все нормы эквиваленты между собой, так как если их с обеих сторон можно оценить евклидовой нормой, то их можно оценить и друг другом.

Доказательство. $x = \sum x_i\, e_i$, где e_i — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$p(x) = p\Big(\sum x_i\, e_i\Big) \underset{(*)}{\le} \sum p(x_i\, e_i) = \sum |x_i|\, p(e_i) \underset{(**)}{\le} \sqrt{n}\, \max_i p(e_i) \sqrt{\sum x_i^2},$$

где при переходе $(*)$ используется неравенство треугольника для нормы, а при переходе $(**)$ — неравенство Коши.

Из этого дополнительно следует, что

$$\Big|p(x) - p(y)\Big| \underset{(*)}{\le} p(x-y) \le C\,|x-y|,$$

где при переходе $(*)$ используется неравенство треугольника. Это значит, что функция p липшицева на $\mathbb{R}^n$ по евклидовой норме $\Longrightarrow$ p непрерывна $\Longrightarrow$ есть $\mu = \min\limits_{|x|=1} p(x)$, причем $\mu > 0$, так как p — норма. Получаем, что $\mu\,|x| \le p(x)$ при $|x| = 1$, а, значит, и при всех x.

■

Следствие 4.1. В нормированном пространстве конечномерные подпространства замкнуты.

Доказательство. Пусть размерность X_0 конечна: $N = \dim X_0 < \infty$ и $\{x_n\} \subset X_0$ фундаментальна. Тогда на X_0 есть норма из $\mathbb{R}^N$. Из этого следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по этой норме и сходится по ней к некоторому вектору $x_0 \in X_0$, а, значит, сходится по исходной норме. ■

Следствие 4.2. Если X — бесконечномерное нормированное пространство, то существует такая разнесенная последовательность $\{x_n\}$ на единичной сфере $\|x_n\| = 1$, у которой $\|x_n - x_k\| \ge 1,\ n \ne k$.

Упражнение 4.1. Показать, что оценку можно улучшить до $\|x_n - x_k\| \geq 2,\ n \neq k$.

Критерии компактности в конкретных пространствах

Мы ограничимся рассмотрением критериев вполне ограниченности в пространствах непрерывных функций, ограниченных функций и ℓ^2. Чтобы получить из них критерии компактности, дополнительно необходимо, чтобы пространство было замкнутым.

Пример. В $\mathbb{R}^n$ критерий компактности простой — множество ограничено когда оно лежит в шаре. В остальных пространствах к этому условию будут добавляться некоторые дополнительные.

Пространство последовательностей

Предложение 4.1. $K \subset \ell^2$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда

1) K ограничено;
2) у отдельных элементов хвосты ряда стремятся к нулю равномерно по последовательности: $\sup\limits_{x\in K} \sum\limits_{n=N}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Предположим, что K вполне ограничено. Тогда выполнено условие 1). Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 1$. Рассмотрим $\dfrac{\varepsilon}{4}$– сеть, которая состоит из векторов $v_1, \ldots, v_M \in K$. Возьмем N таким, чтобы $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |v_{i,n}| \leq \dfrac{\varepsilon^2}{4}$. Пусть $x \in K$. Найдем в $\dfrac{\varepsilon}{4}$– сети такой элемент v_i, что $\|x - v_i\| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |x_n - v_{i,n} + v_{i,n}|^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2\,|x_n - v_{i,n}|^2 + 2\,|v_{i,n}|^2 \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 + 2\,\frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2 < \varepsilon.$$

Обратно, пусть K ограничено и выполнено условие 2). Нужно изготовить конечную ε– сеть для заданного $\varepsilon > 0$. Возьмем такое N, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} x_n^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{8}$ для $x \in K$. Рассмотрим проекцию K на $\mathbb{R}^n$: $\widetilde{K} = \left\{\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0),\ x \in K\right\}$. Получаем, что множество $\widetilde{K}$ ограничено, поэтому в нем есть конечная $\dfrac{\varepsilon}{8}$– сеть $v_1, \ldots, v_m$. Для исходного K приблизим проекцию $x \in K$ элементом сети v_j: $\|\widetilde{x} - v_j\| < \dfrac{\varepsilon}{8}$. Тогда

$$\|x - v_j\| = \|x - \widetilde{x} + \widetilde{x} - v_j\| \underset{(*)}{\leq} \|x - \widetilde{x}\| + \|\widetilde{x} - v_j\| \leq \varepsilon,$$

где при переходе $(*)$ используется неравенство треугольника. ■

Упражнение 4.2. Проверить, что аналогичные критерии вполне ограниченности применимы в ℓ^p и в пространстве сходящихся к нулю последовательностей.

Пример. Рассмотрим *эллипсоид* $E = \left\{x\colon \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{x_i}{\alpha_i}\right)^2 \le 1\right\}$, где $\alpha_i > 0$ — полуоси эллипсоида. Очевидно, что он замкнут. Добавив условие, когда этот эллипсоид будет вполне ограниченным, получим критерий компактности: E компактен $\Longleftrightarrow \alpha_i \to 0$. Необходимость этого очевидна, так как если $\alpha_i \not\to 0$, мы можем по соответствующим ортам найти разнесенную последовательность. Так как $\alpha_i \to 0$, то они ограниченны и дополнительно можем проверить выполнение условия достаточности:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\left|\frac{x_i}{\alpha_i}\right|^2 \le \sup_{i\ge N}\alpha_i^2 \to 0.$$

Упражнение 4.3. Проверить, что всякий компакт в ℓ^2 лежит в некотором компактном эллипсоиде.

Пространство ограниченных функций

Теорема 4.2. Множество $K \subset B(\Omega)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда

1) K ограничено;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ есть конечное разбиение Ω на такие части $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, что $\left|f(x)-f(y)\right| \le \varepsilon$ при всех $f \in K$, если $x, y \in \Omega_i$.

Доказательство. Пусть K вполне ограничено, тогда получаем условие 1). Для $\varepsilon > 0$ возьмем $\dfrac{\varepsilon}{8}$– сеть из функций $f_1, \ldots, f_M$. Для этих функций делим Ω на куски $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ так, что $\left|f_i(x)-f_i(y)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{8}$ если $x, y \in \Omega_j$, $1 \le i \le M$. Для произвольной функции $f \in K$ найдем соответствующую f_i, такую, что $\|f - f_i\| < \dfrac{\varepsilon}{8}$. Тогда $\left|f(x) - f(y)\right| \le 3\dfrac{\varepsilon}{8}$ для $x, y \in \Omega_j$.

В другую сторону, пусть выполнены 1) и 2), дано $\varepsilon > 0$ и мы ищем ε– сеть. Функции можно оценить некоторой константой: $|f| \le M$, $f \in K$. В отрезке $[-M, M]$ возьмем такие точки $c_1, \ldots, c_L$, чтобы $c_i < c_{i+1}$ и $|c_{i+1} - c_i| < \dfrac{\varepsilon}{8}$. Возьмем $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ так, чтобы $\left|f(x)-f(y)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{8}$ для $x, y \in \Omega_j$ и $f \in K$. Тогда искомой ε– сетью для K будут ступенчатые функции — константы c_i на Ω_j, так как их конечное число. В самом деле, пусть $f \in K$, смотрим на Ω_j, значение f на Ω_j лежат в отрезке длины $\dfrac{\varepsilon}{8}$. Возьмем c_i, ближайшую к отрезку, тогда получим, что $\left|f(x)-c_i\right| \le \varepsilon$ на $x \in \Omega_j$. ■

Пространство непрерывных функций

Теорема 4.3 *(Асколи–Арцела́).* Множество $K \subset C[a,b]$ вполне ограниченно тогда и только тогда, когда

1) K ограничено;

2) K равностепенно непрерывно:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \text{если } |x-y| < \delta, \text{ то } \left|f(x)-f(y)\right| < \varepsilon\ \forall f \in K.$$

Доказательство. Пусть K вполне ограничено, тогда получаем условие 1). Для $\varepsilon > 0$ возьмем $\frac{\varepsilon}{8}$– сеть из функций $f_1, \ldots, f_N$. Найдем $\delta > 0$ так, чтобы $\left|f_i(x)-f_i(y)\right| \le \frac{\varepsilon}{8}$ при $|x-y| < \delta$, тогда получим условие 2), так как для $f \in K$ сначала можем приблизить f_i так, что $\|f-f_i\| < \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда при $|x-y| < \delta$ имеем

$$\left|f(x)-f(y)\right| = \left|f(x)-f_i(x)+f_i(x)-f(y)+f_i(y)-f_i(y)\right| \underset{(*)}{\le}$$
$$\underset{(*)}{\le} \left|f(x)-f_i(x)\right| + \left|f_i(x)-f_i(y)\right| + \left|f_i(y)-f(y)\right| < \varepsilon,$$

где при переходе $(*)$ используется неравенство треугольника.

Обратно, пусть выполнены условия 1) и 2), дано $\varepsilon > 0$ и ищем ε– сеть. Достаточно находить узлы такой ε– сети в объемлющем пространстве ограниченных функций $B[a,b] \supset C[a,b]$, так как по ним можно найти узлы 2ε– сети в исходном пространстве $C[a,b]$: каждую $g_i \in B[a,b]$ можно заменить на $f_i \in C[a,b]$, попадающую в ε– окрестность g_i, если такая f_i существует. Но $K \subset B[a,b]$ вполне ограничено по теореме 4.2. Общий модуль непрерывности для функций из K будет иметь вид

$$W(t) = \sup_{\substack{f \in K \\ x,y\colon |x-y| \le t}} \left|f(x)-f(y)\right|.$$

■

Лекция 5. Теоремы о неподвижных точках

Теорема о сжимающем отображении

Определение 5.1. Если есть отображение $f: X \to X$, то *неподвижная точка* x_0 — это решение уравнения $x_0 = f(x_0)$.

Теорема 5.1 *(о сжимающем отображении)*. X — полное метрическое пространство, $f: X \to X$ липшицева с константой меньше 1: $d\big(f(x), f(y)\big) \le L\, d(x, y)$, $L < 1$. Тогда существует единственная точка $\widehat{x}$ такая, что $\widehat{x} = f(\widehat{x})$.

Доказательство. Докажем единственность: если $f(y) = y$, то

$$d(\widehat{x}, y) = d\big(f(\widehat{x}), f(y)\big) \le L\, d(\widehat{x}, y) \Longrightarrow d(\widehat{x}, y) = 0.$$

Докажем существование: возьмем фиксированную точку $x_0 \in X$ и построим последовательно ее траекторию следующими итерациями: $x_n = f(x_{n-1})$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, так как $d(x_{k+1}, x_k) \le L\, d(x_k, x_{k-1}) \le \ldots \le L^k\, d(x_1, x_0)$, а

$$d(x_{n+m}, x_n) \le d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \le$$
$$\le L^{n+m-1}\, d(x_1, x_0) + \ldots + L^n\, d(x_1, x_0) \le \frac{L^n}{1-L}\, d(x_1, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, существует предел $\widehat{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда из непрерывности f получим, что $\widehat{x} = \lim f(x_n) = f(\widehat{x})$. ■

Упражнение 5.1. Привести пример неполного метрического пространства, в котором эта теорема будет верна.

Теорема Боля–Брауэра

Теорема 5.2 *(Боля–Брауэра)*. Если V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, и $f: V \to V$ непрерывна, то существует неподвижная точка $\widehat{x} \in V : \widehat{x} = f(\widehat{x})$.

Достаточно доказать теорему для какого-то компакта с внутренностью, и тогда это будет верно сразу для всех. Это верно и в общем случае: если в каком-то пространстве теорема верна для всех непрерывных отображений: $V \xrightarrow{f} V$, а пространство W ему гомеоморфно, то тогда теорема верна и для пространства $W : W \xrightarrow{g} W$, потому что при наличии непрерывного отображения из W в W мы можем устроить отображение по диаграмме

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V \\ W \arrow[r, "g"] & W \arrow[u, "h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Поэтому эта теорема дает не только выпуклые компакты, но и гомеоморфные им множества. Например, кольцо на плоскости не является выпуклым и не гомеоморфно выпуклому, так как в нем есть неподвижная точка при повороте.

Теорема Шаудера о неподвижной точке

Теорема 5.3 *(Шаудера о неподвижной точке)*. V — выпуклый компакт в банаховом пространстве X. Дано непрерывное отображение $f: V \to V$. Тогда существует неподвижная точка $\widehat{x} \in V : \widehat{x} = f(\widehat{x})$.

Доказательство. Достаточно для всех $\varepsilon > 0$ иметь приближенные неподвижные точки $x_\varepsilon \in V$ такие, что $\left\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\right\| \le \varepsilon$. Тогда из последовательности $\left\{x_{\frac{1}{n}}\right\}$ выбираем сходящуюся к точке $\widehat{x} \in V$, поэтому $f(\widehat{x}) = \widehat{x}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$– сеть $x_1, \ldots, x_N \in V$. Построим функции

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{если } \|x - x_i\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|x - x_i\| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \beta_i(x) > 0$ на V, потому что каждая точка V попадает внутрь одного из это шаров, на котором соответствующее β_i положительно. Из этого следует, что функция

$$\alpha_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j(x)}$$

непрерывна на V, причем $0 \le \alpha_i \le 1$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(x) \equiv 1$ на V. Все функции β_i, α_i непрерывны на V, поэтому отображение

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\, x_i$$

непрерывное. Оно отображает V в S, где S — выпуклая оболочка x_i, многогранник в конечномерном пространстве. Возьмем отображение

$$\psi(x) = g\big(f(x)\big),$$

оно также непрерывно на V, при этом $\psi(S) \subset S$. По теореме 5.2 получаем точку $z \in S$: $\psi(z) = z$, иначе говоря, $z = g\big(f(z)\big)$. Покажем, что эта точка ε – неподвижная для f, для этого оценим $\big\|f(z) - z\big\|$:

$$
\begin{aligned}
\|f(z) - z\| &= \Big\|f(z) - g\big(f(z)\big)\Big\| = \\
&= \Big\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\big(f(z)\big) f(z) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\big(f(z)\big) x_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\big(f(z)\big)\big(f(z) - x_i\big)\Big\| \le \\
&\le \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\big(f(z)\big) \big\|f(z) - x_i\big\| = \sum_{i\,:\,\alpha_i\left(f(z)\right)>0} \alpha_i\big(f(z)\big) \big\|f(z) - x_i\big\| \le \varepsilon,
\end{aligned}
$$

так как $\alpha_i\big(f(z)\big) > 0$ лишь при $\big\|f(z) - x_i\big\| < \varepsilon$. Таким образом, мы построили ε– неподвижную точку, и есть точное решение. ■

Упражнение 5.2. Привести пример непрерывного отображения $f : U \to U$, где U — замкнутый единичный шар в ℓ^2 без неподвижных точек.

Упражнение 5.3. Доказать, что так можно сделать в каждом бесконечномерном банаховом пространстве.

Применение теоремы Шаудера

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение для функций $x \in C[a, b]$:

$$x(t) = w(t) + \int_a^t \psi\big(s, x(s)\big)\, ds.$$

Пусть w и ψ — ограниченные, непрерывные функции по своим аргументам. Заметим, что отображение

$$f(x)(t) = w(t) + \int_a^t \psi\big(s, x(s)\big)\, ds$$

действует из $C[a, b]$ в $C[a, b]$ и непрерывно, так как если x_n равномерно сходится к x, то $f(x_n)$ равномерно сходятся к $f(x)$.

Отметим, что если $|w| \le C_1$, $|\psi| \le C_2$, то $\big|f(x)(t)\big| \le C_1 + C_2(b - a)$, то есть все эти функции получаются равномерно ограниченными.

Рассмотрим эти функции относительно общего модуля непрерывности:

$$\left|f(x)(t+\Delta)-f(x)(t)\right| = \left|w(t+\Delta)-w(t)+\int\limits_t^{t+\Delta}\psi\big(s,\,x(s)\big)\,ds\right| \le \left|w(t+\Delta)-w(t)\right|+C_2\,|\Delta| \underset{\Delta\to 0}{\rightrightarrows} 0,$$

так как функция $w(t)$ равномерно непрерывна. Получаем, что образ f лежит в каком-то компакте K.

Определение 5.2. *Выпуклая оболочка* множества — это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное. Это пересечение будет выпукло, а также это будет наименьшее выпуклое множество, содержащее данное. Оно будет состоять из *выпуклых линейных комбинаций* вида $t_1v_1+\ldots+t_nv_n$, где $t_j \ge 0$, а $\sum\limits_{j=1}^{n} t_j = 1$.

Упражнение 5.4. Проверить, что замыкание выпуклой оболочки компакта в банаховом пространстве — выпуклый компакт.

Построенный таким образом выпуклый компакт $V \supset K$ годится, так как образ V лежит в образе всего пространства, который лежит в K, поэтому образ V будет лежать в V и он подойдет для теоремы 5.3.

Упражнение 5.5. Построить пример компакта в ℓ^2, у которого выпуклая оболочка не компакта.

Следствие 5.1 *(теоремы Шаудэра)*. X — банахово пространство. Если $f: X \to K$ непрерывно и K — компакт, то существует неподвижная точка $\widehat{x}\in X : \widehat{x} = f(\widehat{x})$.

Это следствие можно получить из упражнения 5.4, для этого достаточно взять замкнутую выпуклую оболочку K.

Пойдем другим способом, и явно предъявим выпуклый компакт, который отображается сам в себя: возьмем модуль непрерывности функции $w(t)$:

$$\omega(t) = \sup_{\substack{t,\Delta \\ |\Delta|\le r}} \left|w(t+\Delta)-w(t)\right| \text{ и } \omega_0(t) = \omega(t)+C_2\,|t|.$$

Тогда, из теоремы 5.2 следует, что множество

$$\{f : |f| \le C,\ f \text{ имеет модуль непрерывности } \omega_0\}$$

является выпуклым компактом по построению.

Применения теоремы Шаудера многогранны, так, если в качестве w взять константу, то получим решения обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью.

Отметим что часть условий теоремы Шаудера можно ослабить, модифицировав рассуждения, например, не обязательно, чтобы ψ был равномерно ограниченным по двум аргументам.

Упражнение 5.6. Показать, что всякий компакт в банаховом пространстве лежит в замкнутой выпуклой оболочке некоторой последовательности x_n, стремящейся к нулю. А выпуклые компакты — это все такие замкнутые выпуклые оболочки.

Лекция 6. Линейные функционалы в банаховом пространстве

Линейные функционалы. Основные понятия

Определение 6.1. Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Отображение $\ell : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется *функционалом*.

Функционал называется *непрерывным*, если

$$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : \|x - x_0\| < \delta : \left|\ell(x) - \ell(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Функционал называется *линейным*, если $\ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y)$.

$\operatorname{Ker}\ell = \left\{x : \ell(x) = 0\right\}$ — *ядро функционала*, замкнутое линейное подпространство.

Утверждение 6.1. Если $\ell \equiv 0$, то $\operatorname{Ker}\ell = X$. Если $\ell \not\equiv 0$, то для всякого $v \notin \operatorname{Ker}\ell$ выполнено $\operatorname{Ker}\ell \oplus \langle v \rangle = X$, где $\langle v \rangle$ — линейная оболочка.

Линейные функционалы позволяют проще работать с линейными пространствами.

Пусть $\left(X, \|\cdot\|\right)$ — нормированное пространство. В нем можно выделить класс непрерывных линейных функционалов.

Отметим, что если $\dim X < \infty$, то все линейные функционалы непрерывны, так как в базисе все можно записать в координатах: $\ell(x) = x_1 \ell(e_1) + \ldots + x_n \ell(e_n)$, а $\|x\| \sim \max\limits_n |x_n|$.

Утверждение 6.2. Если $\dim X = \infty$, то всегда существует разрывный линейный функционал.

Доказательство. Чтобы построить такой функционал, возьмем бесконечномерный базис $\{e_\alpha\}$ — *базис Гамеля* и выделим в нем счетную подсистему $\left\{e_{\alpha_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{e_\alpha\}$. Можно считать, что $\|e_{\alpha_k}\| = \dfrac{1}{k}$. Положим $\ell(e_{\alpha_k}) = 1$, а на остальных нулем. По линейности это продолжается до линейного функционала. Тогда $\ell(e_{\alpha_k}) = 1 \not\to 0 = \ell(0)$, при этом $e_{\alpha_k} \to 0$, значит, непрерывности нет. ■

Пример. В пространстве $C[0, 1]$ возьмем в качестве нормы — $\|x\| = \int\limits_0^1 \left|x(t)\right| dt$, а в качестве функционала — $\ell(x) = x(0)$. Этот функционал разрывный, так как есть последовательность функций (см. рис. 6.1), для которых $\|x_n\| = \dfrac{1}{2n} \to 0$, а $\ell(x_n) \equiv 1$.

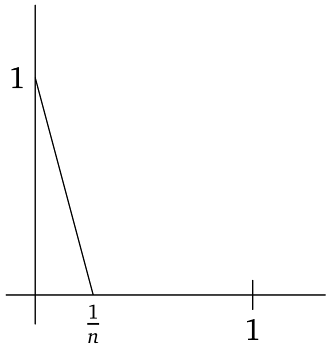

Рис. 6.1: Общий вид функций из примера для пространства $C[0, 1]$

Пространство $\operatorname{Ker}\ell = \{x : x(0) = 0\}$ — гиперплоскость, которая дополняется до всего пространства единицей: $\operatorname{Ker}\ell \oplus \langle 1 \rangle = C[0, 1]$, при этом эта гиперплоскость всюду плотна, потому что любую непрерывную функцию можно приблизить функцией из ядра.

Замечание. Это верно и в общем случае: ядро разрывного функционала всегда задает гиперплоскость, которая всюду плотна.

Теорема о линейных непрерывных функционалах

Теорема 6.1. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство и ℓ — линейный функционал на X. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) ℓ непрерывен;

2) ℓ непрерывен в нуле;

3) ℓ ограничен в окрестности нуля;

4) $\ell(x) \le C\,\|x\|$;

5) $\operatorname{Ker}\ell$ замкнуто.

Определение 6.2. Наилучшая константа в утверждении 4) называется *нормой линейного функционала*, то есть $\|\ell\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |\ell(x)|$.

Упражнение 6.1. Проверить, что норма функционала действительно является нормой на пространстве непрерывных линейных функционалов.

Доказательство *(теоремы)*. Автоматически верны переходы 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3).

3) $\Rightarrow$ 4): на шаре $B(0,r)$ верна оценка $\left|\ell(x)\right| \le M$. Возьмем $x \ne 0$ и рассмотрим выражение $\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{x}{\|x\|} \in B(0,r)$. Тогда $\left|\ell\left(\dfrac{r\,x}{2\,\|x\|}\right)\right| \le M \Longleftrightarrow \left|\ell(x)\right| \le \dfrac{2M}{r}\,\|x\|$.

4) $\Rightarrow$ 1): $\left|\ell(x)-\ell(y)\right| = \left|\ell(x-y)\right| \le C\,\|x-y\|$ — ℓ липшицев, а, значит, и непрерывен.

1) $\Rightarrow$ 5): если ℓ непрерывен, то автоматически множество его нулей $\{x : \ell(x)=0\}$ замкнуто, так как если мы возьмём такую последовательность $\{x_n\}$, что $\ell(x_n)=0$, а $x_n \to a$, то из непрерывности будет следовать, что $\ell(a)=0$, то есть ядро замкнуто.

5) $\Rightarrow$ 1): пусть $\operatorname{Ker}\ell$ замкнуто. Предположим, что ℓ разрывен, тогда найдётся такая последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \to 0$, а $\ell(x_n) \ge \delta > 0$. Возьмем такой вектор v, что $\ell(v)=1$. Он найдется, так как функционал не может быть тождественным нулём, иначе бы на нём не было проблем с разрывом. Тогда $x_n - \ell(x_n)v = y_n \in \operatorname{Ker}\ell$. Поделим обе части на $\ell(x_n)$, получим, что

$$\underbrace{\frac{x_n}{\ell(x_n)}}_{\to 0} - v = \frac{y_n}{\ell(x_n)} \in \operatorname{Ker}\ell.$$

Получили, что v не из ядра отличается от элемента из ядра на что-то, стремящееся к нулю. Это противоречит замкнутости $\operatorname{Ker}\ell$. ■

Если в последнем пункте доказательства предположить, что ℓ разрывно, то сразу получим, что ядро всюду плотно, так как вектор v можно взять произвольным.

Отметим, что у нас уже есть два факта о пространствах, по которым мы можем судить, конечномерно ли оно:

Утверждение 6.3. Пространство конечномерно тогда и только тогда, когда все линейные функционалы непрерывны.

Утверждение 6.4. Пространство конечномерно тогда и только тогда, когда замкнутый шар единичного радиуса — компакт.

Продолжение линейных непрерывных функционалов

Пусть X — линейное пространство, $Y \subset X$ — подпространство. Возьмем ℓ — линейный функционал на Y. Хотим продолжить ℓ на X. Для этого найдем в Y базис Гамеля $\{e_\alpha\} \subset Y$, дополним его до базиса X и определим ℓ на новых базисных равным нулю.

Пусть теперь X — нормированное пространство, , $Y \subset X$ — подпространство, а ℓ — непрерывный линейный функционал. Хотим продлить ℓ на X до непрерывного линейного функционала. Тогда такое простое рассуждение уже не подойдёт.

Пример. Возьмём пространство Z — гиперплоскость, которая всюду плотна в X, если $\dim X = \infty$. Это ядро какого-то разрывного линейного функционала, который мы умеем строить. Значит, Z дополняется вектором до всего X: $Z \oplus \langle v \rangle = X$. В качестве Y возьмём прямую $\langle v \rangle$, а в качестве ℓ — $\ell(\lambda v) = \lambda$. Это непрерывный линейный функционал, так как в одномерном случае все функционалы непрерывны. Наивное продолжение: $\ell = 0$ на Z получается разрывным линейным функционалом.

Определение 6.3. Функция $p\colon X \to \mathbb{R}$ называется *однородно выпуклой*, если выполнены условия :

1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$;
2) $\forall \alpha \ge 0\colon p(\alpha x) = \alpha\, p(x)$.

Замечание. Всякая однородно выпуклая функция будет выпуклой, так как

$$p\big(tx + (1-t)\,y\big) \le p(tx) + p\big((1-t)\,y\big) = t\,p(x) + (1-t)\,p(y).$$

Определение 6.4. Функция $p\colon X \to [0, +\infty)$ — *полунорма*, если

1. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Пример *(однородно выпуклых функционалов)*. норма; полунорма и функционал Минковского.

Теорема Хана–Банаха

Теорема 6.2 *(Хана–Банаха)*. Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$; $p\colon X \to \mathbb{R}$ — однородно выпуклая функция; $Y \subset X$ — подпространство; ℓ — линейный функционал на Y и для всех y выполнено неравенство $\ell(y) \le p(y)$. Тогда существует линейный функционал L на X такой, что $L|_Y = \ell$ и $L(x) \le p(x)\ \forall x \in X$.

Доказательство. 1) Попробуем продолжить функционал на $Y \oplus \langle v \rangle$, где $v \notin Y$. На такой множестве функционал может быть устроен только как $L(y+\lambda v) = \ell(y) + \lambda \cdot C$ в силу его линейности. Остается понять, чему равно C.

Мы хотим, чтобы выполнялось неравенство $\ell(y) + \lambda \cdot C \le p(y+\lambda v)\ \forall y \in Y,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\lambda = 0$, то неравенство автоматически выполнено. Для $\lambda > 0$ получаем, что

$$C \le p\left(\frac{y}{\lambda} + v\right) - \ell\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Так как $\dfrac{y}{\lambda}$ является таким же произвольным, как и y, то $C \le p(y+v)-\ell(y)\ \forall y \in Y$.

Если $-\mu = \lambda < 0$, то неравенство примет вид

$$C \ge \ell\left(\frac{y}{\mu}\right) - p\left(\frac{y}{\mu} - v\right),$$

или, $C \ge \ell(y) - p(y-v)\ \forall y \in Y$.

Нам нужно, чтобы выполнялись условия и для $\lambda > 0$, и для $\lambda < 0$. Рассмотрим множество $A = \left\{\ell(y) - p(y-v) \,\middle|\, y \in Y\right\}$ и множество $B = \left\{p(y+v) - \ell(y) \,\middle|\, y \in Y\right\}$. Необходимо, чтобы точка C разделяла эти два множества: $A \le C \le B$. По аксиоме полноты, такое C будет существовать, если $A \le B$. Сравним отдельные элементы из A и B:

$$\ell(y) - p(y-v) \le p(z+v) - \ell(z) \iff \ell(\underbrace{y+z}_{\in Y}) \le p(y-v) + p(z+v), \text{ где } y, z \in Y$$

так как $\ell(y+z) \le p(y+z) = p(y+z-v+v) \le p(y-v) + p(z+v)$ по однородности.

Упражнение 6.2. Повторить рассуждение для выпуклых функций p. Готовое рассуждение приведено в книге [1].

2) Применяем лемму Цорна: возьмем пару (Z, L), где $Z \subset X$ — подпространство, такое, что $Y \subset Z$; L — линейный функционал на Z и $L|_Y = \ell$. Отношение порядка $(Z_1, L_1) \le (Z_2, L_2)$ значит, что $Z_1 \subset Z_2$, $L_2|_{Z_1} = L_1$. Получилось частично упорядоченное множество, нужно проверить, что в нём у каждой цепочки есть мажоранта. Возьмём $\left\{(Z_\alpha, L_\alpha)\right\}$ — цепь, тогда мажорантой для неё будет $\bigcup\limits_\alpha Z_\alpha$, $L|_{Z_\alpha} = L_\alpha$. Это линейное пространство, так как для всяких $x \in Z_\alpha$, $y \in Z_\beta$ при $Z_\alpha \subset Z_\beta$ они оба лежат в $Z_\beta \Longrightarrow$ $\Longrightarrow ax + by \in Z_\beta$. Аналогично, линейность будет проверяться на Z_β, где соответствующий L_β линеен. Получили линейное пространство $\bigcup\limits_\alpha Z_\alpha \supset Y$ и линейный функционал, для которого $L|_Y = \ell$, так как так происходит для всех L_α. Поэтому, по лемме Цорна, существует максимальный элемент (Z, L), при этом $Z = X$, иначе можем повторно применить 1) и построить больший элемент. ■

Замечание. Важно понимать, что продолжение в теореме Хана–Банаха может быть не единственное.

Некоторые следствия теоремы Хана–Банаха

Следствие 6.1. Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{C}$ и $p(x)$ — *полунорма* на X; $Y \subset X$ — подпространство; ℓ — линейный функционал на Y и $\left|\ell(y)\right| \le p(y)$ для всех

$y \in Y$. Тогда существует линейный функционал L на X такой, что $L|_Y = \ell$ и $\left|L(x)\right| \le p(x)$ для всех $x \in X$.

Замечание. В вещественном случае, если $p(x)$ — полунорма, то оценка также будет $\left|\ell(x)\right| \le p(y)$, так как можем записать отдельно неравенства для y и $-y$: $\ell(y) \le p(y)$ и $\ell(-y) \le p(y)$.

Доказательство. Рассмотрим X как линейное пространство над $\mathbb{R}$ и

$$\ell_R = \operatorname{Re}\ell = \frac{\ell + \overline{\ell}}{2}.$$

Это линейный функционал над $\mathbb{R}$. Справедлива оценка $\left|\ell_R(y)\right| \le p(y)$, так как это действительная часть функционала, который так оценивался. Тогда, по теореме 6.2, существует продолжение L_R с оценкой $\left|L_R(x)\right| \le p(x)$.

Вспомним, что $\underline{\ell(y)} = \ell_R(y) + \underset{\sim\sim\sim}{i\ell_I(y)}$, тогда

$$\ell(iy) = \ell_R(iy) + i\,\ell_I(iy) \xRightarrow{\cdot(-i)} \underline{\ell(y)} = \underset{\sim\sim\sim}{-i\ell_R(iy)} + \ell_I(iy),$$

так как $\ell(y)$ — линейный функционал на $\mathbb{C}$. Функционал $\ell(y)$ мы смогли представить двумя способами, поэтому вещественные и мнимые части обоих представлений должны совпадать: $\ell_I(y) = -\ell_R(iy)$. Так как мы уже продолжили ℓ_R, именно это мы и будем считать правильным способом продолжить мнимую часть.

То есть искомым продолжением функционала ℓ будет $L(x) = L_R(x) - iL_R(ix)$. Проверим, что это так:

1) $L(x)$ линейный, так как L_R линейный: $L(x+z) = L(x)+L(z)$; $L(\alpha x)_{\alpha\in\mathbb{R}} = \alpha L(x)$. Любое комплексное число можно разложить на действительную и мнимую части, поэтому достаточно проверить, что $L(ix) = i\,L(x)$:

$$L(ix) = L_R(ix) + i\,L_R(x) = i\,L(x).$$

2) $L(y) = \ell(y)\ \forall y \in Y$ по построению, так как $L_R(y) = \ell_R(y)$, $L_R(iy) = \ell_R(iy)$.

3) Проверим, что $\left|L(x)\right| \le p(x)$. Если $L(x) = 0$, то это очевидно. Пусть $L(x) \ne 0$, тогда существует такое φ, что $e^{i\varphi} L(x) = \left|L(x)\right|$. Это означает, что

$$p(x) = p(e^{i\varphi}x) \ge L_R(e^{i\varphi}x) = L(e^{i\varphi}x) = \left|L(x)\right|$$

в силу однородности $p(x)$. Получили нужную оценку. ■

Следствие 6.2 *(продолжение по Хану–Банаху)*. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство; $Y \subset X$ — подпространство; ℓ — непрерывный линейный функционал на Y. Тогда существует такой линейный непрерывный функционал L на X, что $L|_Y = \ell$ и $\|L\| = \|\ell\|$.

Доказательство. $|\ell(y)| \le \|\ell\| \cdot \|y\| = p(y)$. Значит, по теореме 6.2, существует продолжение L, такое, что $|L(x)| \le \|\ell\| \cdot \|x\|$, следовательно, L непрерывна и $\|L\| \le \|\ell\|$, но при этом $\|L\|$ не может быть меньше, иначе бы и $\|\ell\|$ была меньше. ■

Следствие 6.3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Тогда

1) для всякого $x \neq 0$ существует такой линейный непрерывный функционал ℓ, что $\|\ell\| = 1$, а $\ell(x) = \|x\|$;

2) для всяких линейно независимых $x_1, \ldots, x_n$ существуют такие линейные непрерывные функционалы $\ell_1, \ldots, \ell_n$, что $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$. В частности, если $\dim X = \infty$, то пространство непрерывных линейных функционалов X^* имеет бесконечную размерность.

Доказательство. 1) Возьмём на $\langle x \rangle$ $\ell(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Заметим, что $\|\ell\| = 1$. По теореме 6.2, функционал продолжается на всё X, это и есть искомый функционал.

2) Возьмём в качестве Y линейную оболочку $x_1, \ldots, x_n$ и на Y линейные функционалы $\ell_i : \ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ — дуальный базис в конечномерном пространстве. Так как пространство Y конечномерное, в нём все линейные функционалы ℓ_i непрерывны. По теореме 6.2 ℓ_i продолжаются на X. ■

Лекция 7. Сопряженные пространства. Ортонормированный базис

Выпуклые множества. Функционал Минковского

Определение 7.1. Множество V называется *выпуклым*, если для любых $u, v \in V$, отрезок, их соединяющий, также лежит в V, то есть $tv + (1-t)v \in V\ \forall t \in [0, 1]$.

Это определение можно расширить и для большего числа точек: если есть n точек: если $u_1, \ldots, u_n \in V$, то $t_1u_1 + \ldots + t_nu_n \in V$, где $t_j \geq 0$, $\sum t_j = 1$.

Упражнение 7.1. Привести пример нормированного бесконечномерного пространства и выпуклого множества в нём, чтобы линейная оболочка это множества была всем пространством, но при этом внутренних точек в ней не было.

Упражнение 7.2. Пусть V — выпуклое множество. 0 — его внутренняя точка (либо можно использовать более слабое условие: 0 — *алгебраически внутренняя точка*, то есть пересечение прямой, проведенная через вектор a и выпуклого множества, содержит интервал (см. рис. 7.1)). В таком случае можно устроить *функционал Минковского* множества V:

$$P_V(x) = \inf\left\{t > 0 \colon \frac{x}{t} \in V\right\}.$$

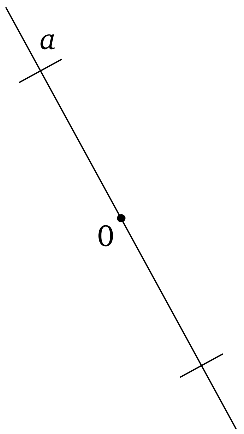

Рис. 7.1: Пример для упражнения 7.2, когда пересечение прямой и выпуклого множества содержит интервал

Отметим, что P_V — выпуклая функция. Также, если V симметрична относительно 0, то P_V — полунорма.

Разделение множеств гиперплоскостью

Теорема 7.1 *(о разделении)*. Пусть U и V выпуклы в нормированном пространстве и U открыто, $U \cap V = \varnothing$. Тогда существует замкнутая гиперплоскость Γ, разделяющая U и V (см. рис. 7.2). Другими словами, существуют такие непрерывный линейный функционал $\ell \neq 0$ и число c, что $U \subset \{x : \ell(x) \leq c\}$, а $V \subset \{x : \ell(x) \geq c\}$.

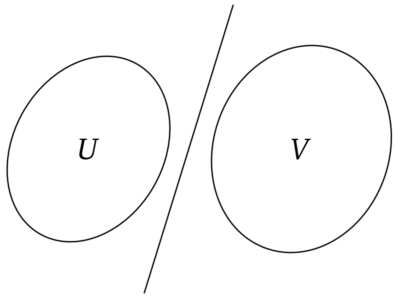

Рис. 7.2: Пример разделяющей гиперплоскости между U и V в теореме 7.1

Идея доказательства. Необходимо открытое множество U сдвинуть в 0 и устроить на нем функционал Минковского и грамотно примененить теорему 6.2 к некоторому функционалу.

Полное доказательство теоремы можно найти в [2] и [1].

Упражнение 7.3. Показать, что без открытости U утверждение теоремы может быть неверно.

Следствие 7.1. Пусть V — замкнутое выпуклое множество и точка $a \notin V$. Тогда есть разделяющая гиперплоскость.

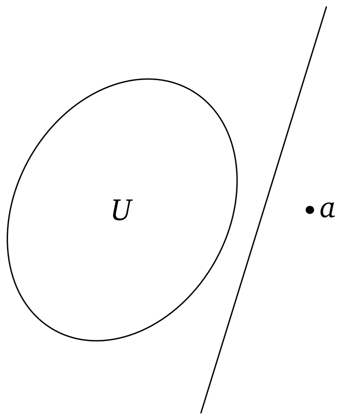

Рис. 7.3: Пример разделяющей гиперплоскости между U и a в следствии 7.1

Доказательство. В качестве открытого множества из теоремы 7.1 возьмём открытый шар из открытого дополнения V, с центом в точке a. ■

Замечание. Аналогично можно отделить не только одну точку, но и выпуклый компакт.

Следствие 7.2. Всякое замкнутое выпуклое множество есть пересечение полупространств.

Доказательство. Каждую точку из дополнения мы можем отделить полупространством (следствие 7.1), а затем можем взять пересечение тех полупространств, которые содержали это множество. Пересечение выпуклых множеств выпукло, пересечение замкнутых множеств замкнуто, поэтому в пересечении получится замкнутое выпуклое множество. Отметим, что мы получили именно исходное множество и лишних точек быть не может, так как иначе мы могли бы еще раз отделить их гиперплоскостью. ■

Иногда бывает полезно рассмотреть точку на границе выпуклого множества. Тогда разделяющая гиперплоскость будет касательной (см. рис. 7.4).

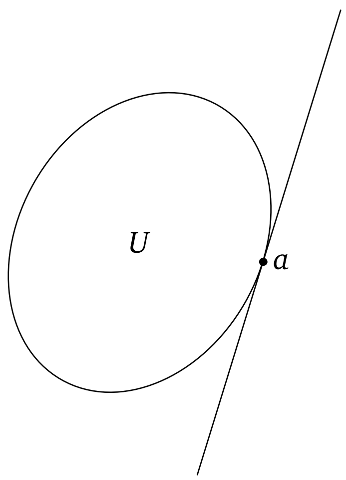

Рис. 7.4: Пример касательной гиперплоскости к U в точке a

Сопряженные пространства

Пусть X — нормированное пространство; X^* — пространство непрерывных линейных функционалов на X. Оно тоже нормированное: $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \left|f(x)\right|$

Упражнение 7.4. Доказать, что X^* — банахово пространство.

Естественно возникает второе сопряженное пространство X^{**}.

Пример. Если $X = c_0$ — пространство стремящихся к нулю последовательностей, то $X^* \simeq \ell^1$, а $X^{**} \simeq \ell^\infty$, то есть второе сопряженное может не совпадать с первым, так как здесь X и X^* — сепарабельные пространства, а X^{**} — нет.

Упражнение 7.5. Доказать, что ℓ_1^* несепарабельно.

Упражнение 7.6. Доказать, что если X^* — сепарабельно, то X тоже сепарабельно.

Рассмотрим отображение $j\colon X \to X^{**}$. Это $j(x)(f) = f(x)$. Получили вложение исходного нормированного пространства в его второе сопряженное.

Определение 7.2. Если $j(X) = X^{**}$, то X называют *рефлексивным*.

Замечание. Рефлексивность не равносильна изоморфности второму сопряженному: существуют примеры не рефлексивных пространств, которые изометричны своим вторым сопряженным.

Предложение 7.1. j — изометрия на образ (сохраняет расстояние): $\|j(x)\| \equiv \|x\|$.

Доказательство. $\|j(x)\| \le \|x\|$, так как, по определению, с учетом $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$,

$$\|j(x)\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\le 1}} |j(x)(f)| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\le 1}} |f(x)| \le \|x\|.$$

В другую сторону: пусть $x \neq 0$ (для нуля неравенство очевидно), тогда по следствию 6.2 теоремы Хана–Банаха, существует такой функционал $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. ■

Замечание. Если отказаться от аксиомы выбора для несчетных пространств, теорема 6.2 Хана–Банаха и все следствия из нее будут по-прежнему верны для сепарабельных пространств.

Следствие 7.3. Нормированное пространство X линейно изометрично линейному подпространству в банаховом пространстве. Поэтому если взять замыкание этого линейного подпространства, получится еще одно банахово пространство.

Задача 7.1 *(Банаха, б/д)*. Если X — сепарабельное нормированное пространство, то X линейно изометрично линейному подпространству в пространстве $C[0, 1]$.

Также, все возможные сечения единичного шара в $C[0, 1]$ линейными подпространствами дадут все возможные шары сепарабельных пространств.

Евклидовы пространства. Ортонормированный базис

Определение 7.3. Пространство E — евклидово, если это линейное пространство со скалярным произведением на нём.

В вещественном случае скалярное произведение $(\cdot,\cdot)\colon E\times E\to E$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $(x, y) = (y, x)$;

2) $(\alpha x+\beta z, y)=\alpha(x, y)+\beta(z, y)$;

3) $(x, x)\geq 0$, $(x, x)=0 \Longleftrightarrow x=0$.

В комплексном случае:

1) $(x, y)=\overline{(y, x)}$

Пример. $(u, v)=\sum u_j\,\overline{v_j}$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Определение 7.4. *Ортонормированная система* векторов $\{v_\alpha\}$ — это набор попарно ортогональных единичных векторов: $\|v_\alpha\|=1$, $(v_\alpha, v_{\alpha'})=0$, $\alpha\neq\alpha'$

Определение 7.5. *Ортонормированный базис* $\{e_\alpha\}$— это ортонормированная система, такая, что для всякого вектора $x\in E$ есть векторы e_{α_n} из этого набора и числа c_n, такие, что вектор $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,e_{\alpha_n}$, то есть $\left\|x-\sum\limits_{n=1}^{N}c_n\,e_{\alpha_n}\right\|\to 0$.

Напомним, что $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ — норма, порожденная скалярным произведением, по умолчанию она считается нормой евклидова пространства, хотя могут быть определены и другие нормы.

В счетном случае базис $\{e_n\}$ такой, что всякий вектор раскладывается в $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,e_n$.

Упражнение 7.7 *(из [2])*. Привести пример евклидова пространства, в котором нет ортонормированного базиса.

На следующей лекции мы рассмотрим примеры базисов и докажем, что ортонормированный базис всегда есть в сепарабельных и полных пространствах.

Утверждение 7.1. В линейной оболочке ортонормированных векторов $e_1,\ldots,e_n$ есть *ближайший* к элементу $x\in E$ элемент $\overline{x}=\sum\limits_{1}^{n}(x, e_i)\,e_i$. Другими словами, это элемент, на котором реализуется минимум расстояния.

Доказательство. Рассмотрим $\left\|x-\sum\limits_{1}^{n} c_j e_j\right\|^2$ и сравним её с комбинацией из утверждения. Заметим, что $x-\overline{x}\perp e_j\ \forall j$, тогда $x-\overline{x}\perp\overline{x}-\sum c_j e_j$ как линейной комбинации e_j. Поэтому

$$\left\|x-\sum_{1}^{n} c_j e_j\right\|^2=\left\|x-\overline{x}+\overline{x}-\sum_{1}^{n} c_j e_j\right\|^2=\left\|x-\overline{x}\right\|^2+\left\|\overline{x}-\sum_{1}^{n} c_j e_j\right\|^2>\left\|x-\overline{x}\right\|^2,$$

если $\overline{x}\neq\sum c_j e_j$ — точный минимум достигается, причем только на этом элементе. ■

Теорема 7.2. Если евклидово пространство E сепарабельно, то имеется ортобазис.

Доказательство. Есть $\{v_n\}$ — счетное всюду плотное множество. Для построения базиса воспользуемся *процессом ортогонализации Грама-Шмидта*:

1) $e_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|},\ v_1\neq 0;$

2) $e_2\perp e_1$ из плоскости, порожденной v_1 и v_2, если v_2 не коллинеарен с v_1;

... и так далее;

$n+1$) $e_{n+1}\perp e_1,\ldots,e_n,\ \|e_{n+1}\|=1,\ e_{n+1}$ из линейной оболочки $e_1,\ldots,e_n$ и $v_{k_{n+1}}$, где $v_{k_{n+1}}$ — первый вектор не из линейной оболочки $e_1,\ldots,e_n$.

Таким образом, система $\{e_n\}$ — ортонормированная и её линейная оболочка равняется линейной оболочке исходной системы, то есть, она всюду плотна.

Проверим, что $\sum\limits_{1}^{N}(x,e_n)e_n\to x\ \forall x$: пусть $\varepsilon>0$. Найдем такие числа $c_1,\ldots,c_N$, что $\left\|x-\sum\limits_{1}^{N} c_j e_j\right\|<\varepsilon$. Из экстремальности, $\left\|x-\sum\limits_{1}^{N}(x,e_j)e_j\right\|<\varepsilon\Longrightarrow\left\|x-\sum\limits_{1}^{M}(x,e_j)e_j\right\|<\varepsilon$ для $M\geq N$. То есть, $x=\sum\limits_{1}^{\infty}(x,e_j)e_j$. ■

Замечание. Если $x=\sum\limits_{1}^{\infty} c_j e_j$, то $c_j\equiv(x,e_j)$.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{1}^{N} c_j e_j\to x\Longrightarrow$ для каждого фиксированного n верно, что $\left(\sum\limits_{1}^{N} c_j e_j,e_n\right)\to(x,e_n)$, причём $\left(\sum\limits_{1}^{N} c_j e_j,e_n\right)=c_n$ из-за попарной ортогональности векторов e_j. Значит, $c_j\equiv(x,e_j)$. ■

Лекция 8. Ортогональные проекции. Примеры базисов в гильбертовых пространствах

Ортогональная проекция вектора

Лемма 8.1. Пусть E — евклидово пространство; E_0 — замкнутое подпространство; вектор $h \in E$. Тогда для вектора $h_0 \in E_0$ равносильны следующие условия:

1) $h - h_0 \perp E_0$, то есть $h - h_0 \perp x \ \forall x \in E_0$;

2) h_0 — ближайший к h в E_0.

Доказательство. Если $h - h_0 \perp E_0$, то для всякого $v \in E_0$ верно, что

$$\|h-v\|^2 = \|h-h_0+h_0-v\|^2 = \|h-h_0\|^2 + \|h_0-v\|^2 > \|h-h_0\|^2,$$

если $v \neq h_0$, то есть h_0 — ближайший к h в E_0.

Пусть теперь h_0 — ближайший, а $x \in E_0$. Проверим, что $(h-h_0, x) = 0$.

Один из способов — предположить, что это не так и $(h-h_0, x) = c > 0$ (если оно комплексное, то дополнительно умножаем на фазу, чтобы оно стало положительным). Из этого легко получить противоречие, подобрав нужную линейную комбинацию.

Другой способ — возьмём функцию $F(t) = (h-h_0-tx, h-h_0-tx)$. В вещественном случае она имеет минимум при $t = 0$, так как h_0 — ближайшая $\Longrightarrow F'(0) = 0$. Тогда $(h-h_0, x) = 0$. В комплексном случае нужно домножить на фазовый множитель, чтобы получить вещественное. ■

Замечание. Такой h_0 есть не всегда.

Упражнение 8.1. Построить пример евклидова пространства E, когда такого h_0 не существует.

Замечание. Условие, что E_0 замкнуто нигде в доказательстве не использовалось и не обязательно, в следующем утверждении мы покажем, что такое E_0 есть в сепарабельных пространствах.

Теорема 8.1. Если пространство H гильбертово; H_0 — замкнутое линейное подпространство, то для всякого $h \in H$ есть ближайший элемент $h_0 \in H_0$, такой, что $h - h_0 \perp H_0$. При этом h_0 с таким свойством — единственный.

Определение 8.1. Элемент h_0 называется *ортогональной проекцией* вектора h на подпространство H_0.

Доказательство. Если $h \in H_0$, то $h_0 = h$.

Пусть $h \notin H_0$, тогда можно ввести $\delta = \inf\limits_{y\in H_0} \|h-y\| > 0$ из-за замкнутости, так как если бы это был 0, можно было бы устроить последовательность сходящихся к H элементов в H_0. Возьмём такие $y_n \in H_0$, что $\|h - y_n\|^2 < \delta^2 + \frac{1}{n}$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, так как расстояние между проекциями можно оценить из неравенства параллелограмма (см. рис. 8.1): $\|y_n-y_k\|^2+\|2h-y_n-y_k\|^2 = 2\,\|h-y_n\|^2+2\,\|h-y_k\|^2$. Отсюда получаем, что

$$\|y_n-y_k\|^2 = 2\,\|h-y_n\|^2+2\,\|h-y_k\|^2-4\,\left\|h-\frac{y_n+y_k}{2}\right\|^2 \leq 2\delta^2+\frac{2}{n}+2\delta^2+\frac{2}{k}-4\,\left\|h-\frac{y_n+y_k}{2}\right\|^2 \leq,$$

где $\left\|h-\frac{y_n+y_k}{2}\right\|^2 \geq \delta^2$, так как $\frac{y_n+y_k}{2} \in H_0$, поэтому

$$\leq 2\delta^2+2\delta^2+\frac{2}{n}+\frac{2}{k}-4\delta^2 = \frac{2}{n}+\frac{2}{k}.$$

Следовательно, существует $h_0 = \lim y_n \in H_0$, причем, из оценки, $\|h-h_0\| = \delta$, то есть h_0 — искомый. Другого нет, так как если есть другой такой же $\widehat{h}$, то $h-h_0 \perp H_0$ и $h-\widehat{h} \perp H_0$, поэтому $\widehat{h}-h_0 \perp H_0$, что может быть только при $\widehat{h}-h_0 = 0$.

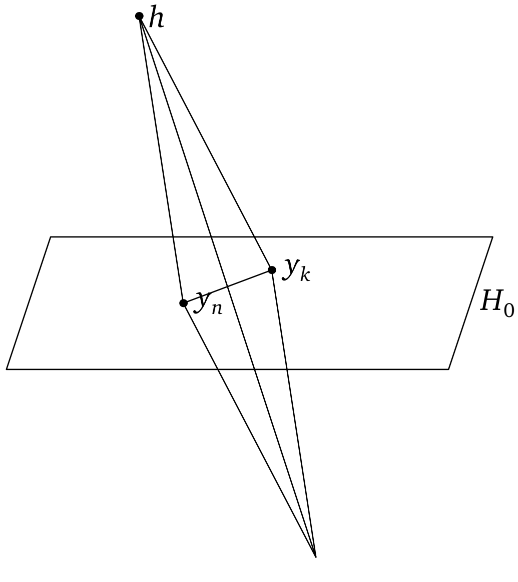

Рис. 8.1: Приближенные проекции вектора $h \notin H_0$

■

Следствие 8.1. Если положить $P_{H_0}h = h_0$, то получим, что оператор проектирования $h \mapsto P_{H_0}h$ линейный, а $P_{H_0}^2 = P_{H_0}$.

Доказательство. Возьмем $h_1, h_2 \in H$. Тогда $h_1 - P_{H_0}h_1 \perp H_0$, $h_2 - P_{H_0}h_2 \perp H_0$. Из этого следует, что $h_1 + h_2 - P_{H_0}h_1 - P_{H_0}h_2 \perp H_0$, то есть

$$P_{H_0}h_1 + P_{H_0}h_2 = P_{H_0}(h_1 + h_2).$$

Аналогично проверяется, что $P_{H_0}(\lambda h) = \lambda P_{H_0}h$.

Получили оператор ортогонального проектирования. Это линейный оператор, квадрат которого равен ему самому. ■

Теорема о существовании ортонормированного базиса

Теорема 8.2. Если пространство $H \neq 0$ гильбертово, то в H есть ортонормированный базис.

Доказательство. Рассмотрим разные ортонормированные наборы Λ_i. Такие наборы есть, например, наборы из одного вектора. Введём для них отношение частичного порядка: $\Lambda_1 < \Lambda_2$, если $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Хотим найти максимальный элемент среди всех таких наборов, который и будет искомым базисом. По лемме Цорна нужно, чтобы цепь имела мажоранту. В данном случае, цепь — это семейство таких наборов, таких, что про всякие два можно сказать, какой из них больше, а мажоранта — это элемент этого пространства, который больше всех. Для этого нужно объединить все элементы этой цепи, и получится набор, который их все содержит, так как если мы возьмем два вектора из него, один пришел из одного набора, а другой из другого, но эти наборы были сравнимы и среди них был больший. Следовательно, появляется максимальное ортонормированное семейство $\{e_\alpha\}$. Максимальность состоит в том, что к этому набору нельзя добавить еще один вектор, чтобы все вектора были попарно ортогональны.

Проверим, что $\{e_\alpha\}$ является базисом в гильбертовых пространствах. Пусть H_0 — замкнутая линейная оболочка $\{e_\alpha\}$. Тогда $H_0 = H$, иначе существует вектор $h \neq 0$, такой, что $h \perp H_0$ и мы можем отнормировать его и добавить к набору, чего не может быть у максимального набора. Получили, что линейная оболочка всюду плотна.

Итог: для всякого $x \in H$ есть последовательность конечных линейных комбинаций $\{e_\alpha$, сходящихся к x, то есть есть счетная часть $\{e_{\alpha_n}\}$, линейные комбинации которых сходятся к x. Из этого следует, что $\sum\limits_1^N (x, e_{\alpha_n}) e_{\alpha_n} \to x$. ■

Примеры ортонормированных базисов

Пример. $\ell^2(\mathbb{R})$ — функции на $\mathbb{R}$ со счётными носителями и $\sum\limits_t \left|f(t)\right|^2 < \infty$. Это пространство — гильбертово, со скалярным произведением $(f, g) = \sum\limits_t f(t)\, g(t)$. Базис в этом пространстве устроен так:

$$e_t(s) = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$$

Мощность этого базиса — это мощность $\mathbb{R}$, то есть континуум. Если бы мы взяли вместо $\mathbb{R}$ другое множество, базис бы имел его мощность, то есть мощность ортонормированного базиса может быть любой, как и мощность множества.

Пример. Возьмём в качестве меры μ меру Лебега на отрезке $[0, 1]$ в степени континуум. Тогда в $L_2(\mu)$ ортонормированный базис образуют функции, построенные следующим образом: берём базис $\{\varphi_n\}$ в $L_2[0, 1]$ и произведения вида $\varphi_{k_1}(x_{t_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi_{k_n}(x_{t_n})$. Таких произведений тоже будет континуум.

Пример. Берём результат ортогонализации последовательности функций $\{\psi_n\}$ в пространстве $L^2(\mu)$.

Для меры μ на отрезке $[a, b]$ результат ортогонализации — это функции $1, x, x^2, \ldots$. Это базис, так как линейная оболочка плотна.

Пример. Возьмём на $\mathbb{R}$ гауссовскую меру со стандартной гауссовской плотностью (вероятностная мера на $\mathbb{R}$):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

При этом гауссовская мера множества будет $\gamma(B) = \int\limits_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx$.

Результатом ортогонализации степеней $1, x, x^2, \ldots$ будут *многочлены Чебышёва–Эрмита* $H_0 = 1,\ H_1 = x, \ldots$, которые компактно можно записать в виде

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

Проверить, базис ли это, можно, например, с помощью преобразования Фурье, которое будет рассмотрено в курсе позднее.

Упражнение 8.2. Проверить, что $\{H_n\}$ — ортонормированная система в $L^2(\gamma)$, где γ — стандартная гауссовская мера.

Пример. В комплексном пространстве $L^2[0, 2\pi]$ ортонормированным базисом будут функции

$$e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ортонормированность можно легко проверить, посчитав соответствующие интегралы — попарные скалярные произведения окажутся нулями. Чтобы показать, что это базис, мы можем разложить функцию $f \in L^2[0, 2\pi]$ в ряд Фурье:

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, e_n)\, e_n.$$

Если функция гладкая 2π–периодическая, то этот ряд равномерно сходится к ней (это будет показано на следующей лекции), значит, можем приближать любые функции в $L^2[0, 2\pi]$.

Лекция 9. Сопряженные пространства. Линейные операторы

Первая теорема Рисса

Теорема 9.1 *(Рисса о функционалах на гильбертовом пространстве)*. Всякий непрерывный линейный функционал ℓ на гильбертовом H имеет вид скалярного произведения с вектором: $\ell(x) = (x, v)$, где $v \in H$, $\|\ell\| = \|v\|$

Доказательство. Возьмём $H_0 = \operatorname{Ker}\ell$ — это замкнутое линейное подпространство. Если $\ell \neq 0$, то коразмерность этого пространства равна 1 и существует единичный ортогональный вектор e: $e \perp H_0$, $\|e\| = 1$. Подбираем λ так, чтобы $v = \lambda e$. Это можно сделать из соотношения $\ell(e) = (e, \lambda e) = \overline{\lambda}$, то есть $\lambda = \overline{\ell(e)}$. Такой $v = \lambda \cdot e$ годится: возьмём $\ell_0(x) = (x, v)$, получим, что $\ell_0 = \ell$ на H_0, и $\ell_0(e) = \ell(e)$. ■

Пример. На $L^2(\mu)$ функционал имеет вид $\ell(f) = \int f g \, d\mu$, $g \in L^2(\mu)$; на ℓ^2 получается функционал $\ell(x) = \sum x_n y_n$, $(y_n) \in \ell^2$.

Если $1 < p < \infty$, то $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Значит, общий вид функционала — $\ell(x) = \sum x_n y_n$, $(y_n) \in p^q$, $\|y\|_{\ell^q} = \|\ell\|$.

Упражнение 9.1. Показать, что $\big(L^p(\mu)\big)^* \simeq L^q(\mu)$, а общий вид функционала будет $\ell(f) = \int f g \, d\mu$, $g \in L^q(\mu)$, $\|g\|_{L^q} = \|\ell\|$.

Такие пространства будут рефлексивны (следствие теоремы 9.1).

Случай, когда $1 < p < 2$, следует из гильбертового случая $p = 2$. В этом случае для конечной меры μ получается, что $L^2 \subset L^p$. Тогда непрерывный функционал на L^p останется непрерывным функционалом на L^2, и он непрерывен по норме L^q, из этого следует, что $g \in L^q$.

Упражнение 9.2. Рассмотреть случай $p = 1$, когда $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$, но $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$, а также $\big(L^1(\mu)\big)^* \simeq L^\infty(\mu)$ и $(L^\infty)^* \neq L^1$. Такие пространства не будут рефлексивны.

Вторая теорема Рисса

Теорема 9.2 *(Рисса о функционалах на $C(K)$, где K — метрический компакт)*. Всякий непрерывный линейный функционал ℓ на $C(K)$ имеет вид $\ell(f) = \int\limits_K f(x)\,\mu(dx)$, где μ — ограниченная борелевская мера на K (возможно, знакопеременная).

Доказательство. Для случая $K = [0, 1]$ продолжим ℓ на ограниченные борелевские функции по Хану–Банаху, и после этого можно устроить функцию $\Phi(t) = \widetilde{\ell}\big(I_{[0,1]}\big)$ как результат продолжения ℓ к индикатору. После этого можно проверить, что Φ имеет ограниченную вариацию, и тогда $\ell(f) = \int f(t)\,d\Phi(t)$ с μ из Φ — совпадает с интегралом Стилтьеса, так как исходный функционал был с конечной нормой.

Замечание. Подробно эта проверка проведена в [2].

Из этого следует случай, когда $K \subset [0, 1]$, так как функцию, непрерывную на компакте в отрезке, можно непрерывным образом линейно интерполировать на весь отрезок, и тогда получим, что $C(K) \subset C[0, 1]$, и функционал можно продолжить на $C[0, 1]$, где он задастся мерой. Остаётся проверить, что это мера сосредоточена на K. В частности, годится K_0 — канторовское множество.

Для общего метрического компакта есть непрерывная сюръекция $h = K_0 \to K$. Получаем, что в $C(K_0)$ есть подпространство функций вида $g(h)$, $g \in C(K)$. На нём есть непрерывный линейный функционал $\ell_0(g \circ h) = \ell(g)$. Тогда есть мера μ_0 на K_0, которая можно продолжить по Хану–Банаху на $C(K_0)$ и это продолжение задаётся как $\ell_0(g \circ h) = \int\limits_{K_0} g \circ h\, d\mu_0$; μ — образ μ_0 при h. Эта мера и есть нужная, так как

$$\int\limits_K g\, d\mu = \int\limits_{K_0} g \circ h\, d\mu_0 = \ell(g).$$

Для неметрических компактов теорема Рисса также верна, однако, доказательство этого довольно трудоёмко. ∎

Линейные операторы. Теорема Банаха–Штейнгауза

Пусть X и Y — банаховы, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$.

Лемма 9.1. A непрерывен тогда и только тогда, когда $\|A\| < \infty$.

Доказательство. Если $\|A\| < \infty$, то из определения нормы следует, что

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Поэтому $\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \le \|A\| \cdot \|x - y\|$, то есть A липшицева, а, значит, и непрерывна.

Если A непрерывен в 0, то $\|Ax\| \le 1$ при $\|x\| \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Из этого следует, что $\|Ax\| \le \dfrac{1}{\varepsilon}$ при $\|x\| \le 1$, то есть $\|A\| \le \dfrac{1}{\varepsilon}$. ∎

Теорема 9.3 *(Банаха–Штейнгауза; принцип равномерной ограниченности)*. Если X и Y — банаховы пространства; дано семейство непрерывных линейных операторов $A_\alpha : X \to Y$, причём это семейство на каждом векторе ограничено, то есть

$$\sup_\alpha \|A_\alpha x\| < \infty \ \forall x \in X.$$

Тогда они равномерно ограниченны на шаре, то есть $\sup\limits_\alpha \|A_\alpha\| < \infty$.

Доказательство. Сводится к последовательности A_n, потому что в неограниченном множестве чисел есть неограниченная счетная часть. Тогда получается, что числовые функции $f_n(x) = \|A_n x\|$ непрерывны, и эти функции ограничены на каждой точке:

$$\sup_n \left|f_n(x)\right| < \infty \ \forall x.$$

Тогда, по следствию 2.1 из теоремы 2.3 Бэра, $\left\{f_n(x)\right\}$ равномерно ограничена на некотором шаре. Из аддитивности A_n следует, что она равномерно ограничена на некотором шаре с центром в нуле, а, значит, равномерно ограниченны на единичном шаре. ■

Упражнение 9.3. Проверить, что если $\{\alpha_n\}$ — числа и ряд $\sum \alpha_n x_n$ сходится для всех $(x_n) \in \ell^2$, то $(\alpha_n) \in \ell^2$.

Эквивалентость двух теорем Банаха

Теорема 9.4 *(Банаха об обратном операторе)*. Пусть X, Y — банаховы; $A\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор и он взаимно однозначно отображает X на Y. Тогда $A^{-1}\colon Y \to X$ тоже непрерывен.

Теорема 9.5 *(Банаха о замкнутом графике)*. Пусть X, Y — банаховы; $A\colon X \to Y$ — линейный оператор. A непрерывен тогда и только тогда, когда $\Gamma_A = \left\{(x, Ax)\right\}$ (график A) замкнут в произведении $X \times Y$.

Упражнение 9.4. Проверить, что если K_1, K_2 — компакты и $f : K_1 \to K_2$ — какое-то отображение компактов, то f непрерывно тогда и только тогда, когда график замкнут.

Утверждение 9.1. Утверждения теорем 9.4 и 9.5 эквивалентны.

Доказательство. Пусть верна теорема 9.4, и $A\colon X \to Y$ имеет замкнутый график Γ_A. Хотим доказать, что A непрерывен. Устроим оператор $B\colon \Gamma_A \to X$, который (x, Ax) переводит в x. Он непрерывный и взаимно однозначный. Тогда, по теореме 9.4, обратный оператор B^{-1}, который ставит в соответствие x пару (x, Ax), непрерывен. Тогда непрерывны его вторая компонента и сам оператор A.

Пусть теперь верна теорема 9.5, и оператор $A\colon X \to Y$ непрерывен и взаимно однозначен. Тогда график Γ_A замкнут как график непрерывного. Из этого следует, что график обратного $\Gamma_{A^{-1}}$ тоже замкнут, так как график замкнутого множества будет гомеоморфизмом: $X \times Y \mapsto Y \times X$, $(x, y) \mapsto (y, x)$. ■

Доказательство теоремы 9.4 будет приведено на следующей лекции.

Пример. Пусть оператор $T : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ — линейный и непрерывный, то есть

$$\|Tf\|_{L^2} \leq c\,\|f\|_{L^2},$$

причём все функции из образа этого оператора непрерывны: $T\big(L^2[0, 1]\big) \subset C[0, 1]$. Тогда, по теореме 9.5, $T : L^2 \to C$ непрерывен с оценкой $\|Tf\|_C \leq \widetilde{c}\,\|f\|_{L^2}$.

Упражнение 9.5. Проверить, что в рассмотренном примере график замкнут.

Лекция 10. Доказательство теоремы Банаха. Компактные операторы

Доказательство теоремы Банаха об обратном операторе

На прошлой лекции были рассмотрены теоремы Банаха 9.4 об обратном операторе и 9.5 о замкнутом графике. Мы установили, что эти теоремы равносильны, то есть при наличии доказательства у одной из теорем, доказательство для второй теоремы получается просто. Мы рассмотрим доказательство теоремы 9.4 с помощью дополнительной леммы:

Лемма 10.1. Пусть X, Y — банаховы с *открытыми* единичными шарами U_X и U_Y; $A\colon X \to Y$ непрерывный линейный оператор, и замыкание образа открытого шара $A(U_X)$ содержит открытый шар U_Y, то есть $U_Y \subset \overline{A(U_X)}$. Тогда $U_Y \subset A(U_X)$.

Доказательство. Из условия следует, что $A(sU_X) \cap sU_Y$ плотно в sU_Y $\forall s > 0$, так как умножение на положительный скаляр — гомеоморфизм.

Пусть $y \in U_Y$. Возьмём $0 < \varepsilon < 1 - \|y\|$, получим, что

$$\left\|(1-\varepsilon)^{-1} y\right\| < 1,$$

это элемент открытого единичного шара U_X, тогда существует такой $x_1 \in U_X$, что

$$\left\|(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1\right\| < \varepsilon.$$

Другими словами, $(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 \in \varepsilon U_Y$, тогда существует такой элемент $x_2 \in \varepsilon U_X$, что

$$\left\|(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 - Ax_2\right\| < \varepsilon^2.$$

По индукции продолжим строить такие $x_n \in \varepsilon^{n-1} U_X$, что

$$\left\|(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 - \ldots - Ax_n\right\| < \varepsilon^n.$$

Это условие означает, что $(1-\varepsilon)^{-1} y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Ax_n$. Отметим, что $\|x_n\| < \varepsilon^{n-1}$, поэтому

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in X,$$

так как ряд из норм $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$ сходится, а пространство банахово. Следовательно,

$$Ax = (1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} Ax_n = y.$$

Оценим $\|x\| \le (1-\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < (1-\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1} = 1$, то есть $x \in U_X$. ■

Доказательство *(теоремы 9.4 об обратном операторе)*. Пусть $A\colon X \to Y$, $Y = A(X)$. Представим X как объединение шаров радиуса n: $X = \bigcup\limits_n n\,U_X$, поэтому $Y = \bigcup\limits_n nA(U_X)$. По теореме 2.3 Бэра, существует такое n, что $\overline{nA(U_X)}$ содержит шар $y_0+\varepsilon\,U_Y$. Так как все эти множества — это растяжения U_Y, то заменив центры и радиус, можно считать, что $n=1$, то есть $y_0+\varepsilon\,U_Y \subset \overline{A(U_X)}$. Так как $A(U_X)$ центрально-симметрично, то в замыкании $A(U_X)$ также лежит центрально-симметричный шар: $-y_0+\varepsilon\,U_Y \subset \overline{A(U_X)}$. Из выпуклости $\overline{A(U_X)}$ следует, что шар с центром в нуле также будет лежать в нём: $\varepsilon\,U_Y \subset \overline{A(U_X)}$ (см. рис. 10.1).

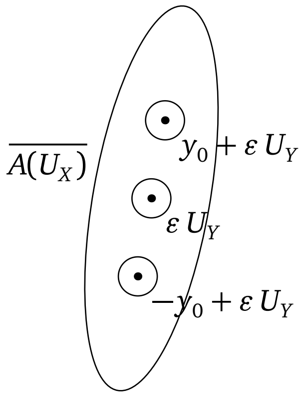

Рис. 10.1: Расположение шаров внутри центрально–симметричного $\overline{A(U_X)}$ в доказательстве теоремы 9.4.

Чтобы оказаться в точности в ситуации леммы 10.1, нужно оператор A заменить на оператор $\dfrac{A}{\varepsilon}$. Тогда получаем, что $\varepsilon U_Y \subset A(U_X)$, следовательно, $A^{-1}(U_X) \subset \varepsilon^{-1}\,U_X$. Это значит, что $\|A^{-1}\| \le \varepsilon^{-1}$. ■

Некоторые следствия из теоремы об обратном операторе

Следствие 10.1. Верна и теорема 9.5 о замкнутом графике.

Упражнение 10.1. Пусть X, Y — банаховы; $A\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор, который уже не инъективен, а сюръективен: $A(X) = Y$. Тогда A переводит открытые в открытые.

Замечание. Это можно сделать двумя способами: либо с помощью факторизации по ядру свести это к основной теореме, либо проанализировав доказательство теоремы.

Следствие 10.2. Пусть X — линейное пространство; p_1 и p_2 — две нормы, причём $p_1 \le p_2$. Если X полно по обеим нормам, то также $p_2 \le C \cdot p_1$, где C — некоторая константа, то есть нормы эквивалентны.

Упражнение 10.2. Привести пример двух банаховых норм, которые не эквивалентны, так как между ними нет оценки ни в одну из сторон.

Доказательство *(следствия 10.2)*. Возьмём $X = (X, p_2)$, $Y = (X, p_1)$; оператор $Ax = x$, тогда оценка $p_1 \le p_2$ говорит, что $A\colon X \to Y$ непрерывный, потому что норма в образе оценивается через норму исходного пространства. Так как это взаимно однозначное соответствие, то A^{-1} тоже непрерывен, то есть нормы эквивалентны. ■

Компактные операторы

Определение 10.1. X, Y — банаховы; $K\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. K —*компактный* оператор, если образ замкнутого единичного шара лежит в компакте.

Стоит обратить внимание, что в определении не требуется, чтобы образ был компактом, только его замыкание. В банаховом пространстве это условие равносильно вполне ограниченности образа шара. Из этих соображений следует, что вместо единичного замкнутого шара можно говорить про какой угодно шар ненулевого радиуса.

Пример. Оператор $K\colon X \to Y$ — непрерывный линейный, причем $\dim K(X) < \infty$. Тогда K компактен, так как в конечномерном пространстве ограниченные множества вполне ограничены. Таким оператором будет, например, $Kx = \ell_1(x)a_1 + \ldots + \ell_n(x)a_n$, где $\ell_1, \ldots, \ell_n$ — некоторые непрерывные линейные функционалы, $a_1, \ldots, a_n$ — некоторые векторы.

Если $\dim X = \infty$, то единичный оператор $I\colon X \mapsto X$ не компактен, так как шары в бесконечномерных пространствах не компактны. Также не будут компактны операторы вида $\lambda \cdot I + K$, где $\lambda \neq 0$ — некоторый компакт, K — некоторый компактный оператор.

Замечание. Существуют банаховы пространства, в которых все некомпактные операторы представимы в виде $\lambda \cdot I + K$, однако для произвольного банахова пространства могут существовать некомпактные операторы, для которых такое представление невозможно.

Свойства компактных операторов

Теорема 10.1 *(свойства компактных операторов)*.

1) Если $A, B: X \to Y$ — компактные операторы, то $A + B$ тоже компактен.
2) Если $K: X \to Y$ — компактный линейный оператор; $T: Y \to Z$ — непрерывный линейный оператор, то композиция $T \circ K$ компактна. Если $S: Z \to X$ — непрерывный линейный оператор, то композиция $K \circ S$ компактна.
3) Если $K_n: X \to Y$ — компактные линейные операторы и $\|K - K_n\| \to 0$, то оператор K тоже компактный. Другими словами, множество компактных операторов замкнуто по операторной норме.

Доказательство. 1) Рассмотрим отображение $Y \times Y \to Y$, когда $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$. Оно непрерывно, поэтому если $C_1, C_2 \subset Y$ — компактные множества, то множество $C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1,\ c_2 \in C_2\}$ — тоже компакт. Следовательно, если U — замкнутый единичный шар в X и $A(U) \subset C_1$, $B(U) \subset C_2$, где C_1 и C_2 — компакты, а их сумма также лежит в компакте: $(A+B)(U) \subset (C_1 + C_2)$.

2) Если $K(U) \subset C$, где C — компакт, то $T(C)$ — тоже компакт для непрерывного T. Следовательно, $T \circ K$ — компактный оператор.

Упражнение 10.3. Проверить аналогичное утверждение для оператора S, применяемого с другой стороны.

3) Пусть $\|K - K_n\| \to 0$. Нам нужно показать, что $K(U)$ вполне ограничен. Для $\varepsilon > 0$ возьмём такое n, что $\|K - K_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Из этого следует, что $K_n(U)$ — это $\dfrac{\varepsilon}{2}$– сеть для $K(U)$. Так как операторы K_n компактны, то $K_n(U)$ имеет конечную $\dfrac{\varepsilon}{2}$– сеть $y_1, \ldots, y_N$. Следовательно, $y_1, \ldots, y_N$ — это ε– сеть для $K(U)$. ■

Лекция 11. Сопряжённые операторы. Критерии компактности

Условия компактности некоторых операторов

Пример *(диагональный оператор)*. $K = \ell^2 \to \ell^2$, который задаётся ограниченной последовательностью: $Kx = (k_1x_1, k_2x_2, \ldots)$, $\sup\limits_n |k_n| < \infty$.

Утверждение 11.1. Оператор K компактен $\Longleftrightarrow k_n \to 0$.

Доказательство. Если $k_n \not\to 0$, то существует подпоследовательность $\{k_{n_j}\}$, которая отделена от нуля: $|k_{n_j}| \geq \varepsilon > 0$, тогда $\|Ke_{n_j} - Ke_{n_\ell}\| \geq \varepsilon$ и K — не компактен.

Если $k_n \to 0$, то возьмём операторы $K_n x = (k_1x_1, \ldots, k_nx_n, 0, 0, \ldots)$, они будут сходиться по норме к K, так как $\|K - K_n\| = \sup\limits_{j>n} |k_j| \to 0$. ■

Пример *(интегральный оператор)*. $K\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, который задаётся формулой

$$Kf(t) = \int \mathscr{K}(t, s) f(s)\,\mu(ds), \text{ где } \mathscr{K} \in L^2(\mu \otimes \mu).$$

Утверждение 11.2. K, заданный такой формулой — оператор. Он также является компактным оператором

Доказательство. Данный интеграл существует, так как если интеграл

$$\iint \left|\mathscr{K}(s, t)\right|^2 \mu(dt)\,\mu(ds)$$

конечный, то по Фубини получим, что при почти каждом t функция аргумента s будет из L^2, тогда произведение двух функций из L^2 будет из L^1, более того, эта функция измеримая по t. Покажем, что заданный таким образом K будет непрерывным оператором из L^2.

Для ограниченных функций справедлива оценка

$$\int \left|Kf(t)\right|^2 \mu(dt) \overset{\text{КБ}}{\leq} \int \int \left|\mathscr{K}(t, s)\right|^2 \mu(ds) \int \left|f(s)\right|^2 \mu(ds)\,\mu(dt),$$

где КБ — неравенство Коши–Буняковского. Так как $\left|f(s)\right|^2$ не зависит от t, то

$$\|Kf\|_{L^2(\mu)} \leq \|\mathscr{K}\|_{L^2(\mu\otimes\mu)} \|f\|_{L^2(\mu)}.$$

С помощью срезок можем получить такую оценку для всех функций, а не только ограниченных, поэтому оператор задан корректно. Из этой оценки следует оценка для оператора: $\|K\| \le \|\mathscr{K}\|_{L^2(\mu\otimes\mu)}$.

Возьмём $\mathscr{K}_n$ вида $\mathscr{K}_n(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_j(t)\psi_j(s)$, они будут приближать $\mathscr{K}$ в L^2, так как $\|\mathscr{K} - \mathscr{K}_n\|_{L^2(\mu\otimes\mu)} \to 0$. Это можно доказать, например, заметив, что если $e_n(t)$ — ортонормированный базис в L^2 для меры, то на квадрате ортонормированным базисом будут все возможные произведения вида $e_n(t)e_k(s)$, и тогда мы можем приближать $\mathscr{K}$ её начальными суммами. Тогда, используя эти ядра для операторов

$$K_n f(t) = \int \mathscr{K}_n(t,s) f(s)\mu(ds),$$

получим, что $K_n f(t) = \sum\limits_{1}^{n} \varphi_j(t) \cdot \int \psi_j(s) f(s)\mu(ds)$, это конечномерный оператор, так как его образ разложился в конечную линейную комбинацию φ_j. Следовательно, эти операторы приближают исходный оператор по норме: $\|K - K_n\| \to 0$. ■

Замечание. Можно придумать пример компактного оператора, который задается в интегральном виде, но функция $\mathscr{K}$ не является квадратично интегрируемой.

Пример *(оператор Вольтерра, Volterra)*. Оператор в $C[a,b]$, который задаётся формулой для первообразной: $Vf(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds$.

Этот оператор компактен по теореме Асколи–Арцела́, так как образ шара — это равномерно ограниченные 1–липшицевы функции.

Пример. Оператор в $C[a,b]$, заданный формулой, аналогично предыдущим, но теперь функция $\mathscr{K}$ непрерывная, а мера — лебеговская:

$$Kf(t) = \int\limits_a^b \mathscr{K}(t,s) f(s)\,ds.$$

Упражнение 11.1. Проверить, что заданный таким образом оператор является компактным.

Указание. Использовать равномерную непрерывность функции на квадрате, а также теорему Асколи–Арцела.

Упражнение 11.2. Данный пример не покрывает оператор Вольтерра. Придумать, что можно попросить у функции двух переменных $\mathscr{K}$, чтобы из одной формулы получался и оператор Вольтерра, и такой оператор с непрерывным ядром.

Сопряженные операторы

Рассмотрим непрерывный линейный оператор $A\colon X \to Y$ в банаховых пространствах.

Определение 11.1. Для A мы можем устроить *банахов сопряженный оператор*, который будет действовать между сопряженными пространствами: $A^*\colon Y^* \to X^*$. Он будет действовать на $\ell \in Y^*$ по следующей формуле: $(A^*\ell)(x) = \ell(Ax)$, где $A^*\ell \in X^*$.

Утверждение 11.3. Норма полученного оператора совпадает с нормой исходного: $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство.

$$\|A^*\| = \sup_{\substack{\ell \in Y^* \\ \|\ell\| \le 1}} \|A^*\ell\| = \sup_{\|\ell\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} \left|\ell(Ax)\right|.$$

При этом справедлива оценка $\left|\ell(Ax)\right| \le \|\ell\|\,\|Ax\| \le \|\ell\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$, поэтому при $\|\ell\| \le 1$ и $\|x\| \le 1$ верно, что $\|A^*\| \le \|A\|$.

В другую сторону: возьмём $\varepsilon > 0$ и найдем вектор x_ε, на котором A почти достигает своей нормы: $\|x_\varepsilon\| = 1$, на котором $\|Ax_\varepsilon\| \ge \|A\| - \varepsilon$. По теореме Хана–Банаха, существует такой функционал $\ell \in Y^*$, что $\|\ell\| = 1$, а $\ell(Ax_\varepsilon) = \|Ax_\varepsilon\| \ge \|A\| - \varepsilon$. Из этого следует, что $\|A^*\| \ge \|A\| - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, то есть на самом деле верно равенство $\|A^*\| = \|A\|$. ∎

Определение 11.2. Пусть H — гильбертово пространство; $A\colon H \to H$ — оператор. *Гильбертов сопряженный оператор* — это оператор $A^*\colon H \to H$, который действует по формуле $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Такой оператор существует, так как функционал $x \mapsto (Ax, y)$ непрерывен, и, по теореме Рисса, существует такой вектор v_y, что $(Ax, y) = (x, v_y)$. После проверки, что v_y зависит линейно от y, можем положить, что $A^*y := v_y$.

Отличия между банаховым сопряженным и гильбертовым сопряженным начинаются в комплексном случае. Рассмотрим, например, умножение на скаляр: для банахового сопряженного $(\lambda A)^* = \lambda A^*$; для гильбертового сопряженного же $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

По умолчанию, если не оговорено другого, под *сопряженным оператором* подразумевают гильбертов сопряженный оператор.

Упражнение 11.3. Проверить, что для гильбертова сопряженного оператора $A^{**} = A$.

Упражнение 11.4. Для банахововых сопряженных операторов дополнительные сопряжения могут давать новые операторы: $A\colon X \to Y$, $A^*\colon Y^* \to X^*$, $A^{**}\colon X^{**} \to Y^{**}$, и так далее. Доказать, что $A^{**}|_X = A$.

Замечание. У нас была теорема, что X изометрично вложено в X^{**}. Формула из упраженения означает, что если $F \in X^{**}$ задаётся элементом $v \in X$, то $A^{**}F \in Y^{**}$ задаётся элементом $Av \in Y$.

Критерии компактности непрерывных линейных операторов

Теорема 11.1. $K : X \to Y$ — непрерывный линейный оператор в банаховых пространствах. Он компактен тогда и только тогда, когда компактен сопряженный оператор $K^* : Y^* \to X^*$.

Доказательство. Пусть K компактен; U — замкнутый единичный шар в X; W — замкнутый единичный шар в Y^*. Это значит,$K(U) \subset S$, где S — некоторый компакт в Y. Хотим показать,что $K^*(W) \subset$ лежит в некотором компакте в X^*, то есть если дана последовательность $\{w_n\} \subset W$, то последовательность образов $\{K^* w_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Здесь $K^* w_n$ — функционалы на X; нужна подпоследовательность, равномерно сходящаяся на U.

$$K^* w_n(x) = w_n(Kx),\ x \in U,\ y = Kx \in S.$$

Поэтому нужно из $\{w_n\}$ выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на S. Так как $\|w_n\| \leq 1$, то $\{w_n\}$ на S равномерно ограничены и равномерно липшицевы. Из теоремы Асколи–Арцела получаем равномерно сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, K^* — компакт.

Пусть теперь K^* — компакт. Тогда получаем, что $K^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ — тоже компактен. В силу упражнения 11.4 получаем, что K тоже компактен, так как сужение компактного оператора на подпространство будет компактно. ■

Пусть H — гильбертово пространство с базисом $\{e_n\}$, и $P_n x$ — это проекция на линейную оболочку $e_1, \dots, e_n$, то есть $P_n x = \sum_1^n (x, e_i) e_i$.

Теорема 11.2. Непрерывный линейный оператор $K : H \to H$ компактен $\Longleftrightarrow$ он приближается по норме композициями с проекторами: $\|K - P_n K\| \to 0$ $\Longleftrightarrow$ он приближается по норме композициями в другом порядке: $\|K - K P_n\| \to 0$.

Другими словами, в гильбертовом пространстве компактные операторы — пределы по норме конечномерных операторов.

Доказательство. В одну сторону ясно. Пусть K — компактный оператор; U — замкнутый единичный шар, тогда $K(U) \subset S$, где S — некоторый компакт. Нужно доказать, что $\|Kx - P_nKx\| \to 0$ равномерно по $x \in U$. Вместо этого можно проверить, что $\|y - P_n y\| \to 0$ равномерно по $y \in S$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмём ε– сеть $y_1, \dots, y_N \in S$, это конечное число элементов, на которых сходимость есть. Найдём такой $n(\varepsilon, N)$, что $\|y_j - P_n y_j\| \le \varepsilon$ для всех $j \le N$ и для всех $n \ge n(\varepsilon, N)$. Получаем, что для всякого $y \in S$ для $n \ge n(\varepsilon, N)$ верно, что $\|y - P_n y\| = \|y - y_j + y_j - P_n y_j + P_n y_j - P_n y\| \le \|y - y_j\| + \|y_j - P_n y_j\| + \|P_n y_j - P_n y\| \le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$.

Так как K^* компактен, то $\|K^* - P_nK^*\| \to 0$, при этом

$$\|K - KP_n\| = \left\|K^* - (KP_n)^*\right\| = \|K^* - P_n^*K^*\| = \|K^* - P_nK^*\| \to 0,$$

так как проекторы самосопряженные. ■

Замечание. В банаховых пространствах могут существовать компактные операторы, которые не приближаются конечномерными (доказал Пер Энфло, его пример нетривиальный).

Слабая и *– слабая сходимость

Пусть X — банахово пространство; X^* — сопряжённое.

Определение 11.3. x_n *сходятся слабо* к x в X, если $\ell(x_n) \to \ell(x)$ для всех $\ell \in X^*$.

Определение 11.4. ℓ_n *сходятся *–слабо* к ℓ в X^*, если $\ell_n(x) \to \ell(x)$ для всех $x \in X$.

Пример. Рассмотрим функции из пространства непрерывных функций: $x_n \in C[0, 1]$.

Утверждение 11.4. x_n сходятся слабо к $x \iff x_n(t) \to x(t)\ \forall t$ и $\left|x_n(t)\right| \le M\ \forall n, \forall t$, то есть слабая сходимость в данном случае — это поточечная сходимость плюс равномерная ограниченность.

Упражнение 11.5. Устроить пример, когда x_n поточечно сходятся к 0, но не являются равномерно ограниченными.

Доказательство *(утверждения 11.4)*. Если оба условия выполнены, то для меры μ на $[a, b]$ получаем, что для общего вида непрерывного функционала, полученного из теоремы Рисса, это условие выполняется: $\int x_n(t)\,\mu(dt) \to \int x(t)\,\mu(dt)$ по теореме Лебега.

Если x_n сходятся слабо к x, то поточечная сходимость $x_n(t) \to x(t)$ обеспечена, так как мы можем брать дираковские функционалы $\delta_t(x) = x(t)$ со значением в точке. Равномерную ограниченность можно получить из леммы, приведенной ниже. ■

Лемма 11.1. Если x_n сходятся слабо к x, то $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$, то есть нормы x_n равномерно ограничены.

Доказательство. У нас $x_n \in X^{**}$ и $x_n(\ell) = \ell(x_n)$. Тогда, по теореме 9.3 Банаха–Штейнгауза, нормы ограничены: $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$. ■

Из этого также видно, что существуют последовательности, которые слабо сходятся, а по норме не сходятся.

Утверждение 11.5. Пусть H — гильбертово с базисом $\{e_n\}$. Тогда x_j слабо сходятся к x в $H \iff$ координаты сходятся: $(x_j, e_n) \to (x, e_n)$ $\forall n$ и нормы ограничены в совокупности: $\sup\limits_j \|x_j\| < \infty$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что у слабо сходящихся нормы ограничены, а координатные функции — это непрерывные функционалы.

Проверим достаточность: пусть оба условия выполнены, будем считать, что $x = 0$ (так как мы можем вычесть x из всех). Тогда координаты сходятся к нулю. Возьмем вектор $v \in H$, тогда $(x_j, v) = (x_j, v - P_n v + P_n v) = (x_j, v - P_n v) + (x_j, P_n v)$, где P_n — проекции. Заметим, что $\left|(x_j, v - P_n v)\right| \le \|v - P_n v\| \sup\limits_j \|x_j\| < \varepsilon$ при больших n. Также, для фиксированного n, $(x_j, P_n v) \to 0$, то есть $\left|(x_j, P_n v)\right| < \varepsilon$ при больших j. Объединяя все эти условия, получим, что $\left|(x_j, v)\right| < 2\varepsilon$ при больших j, значит, есть слабая сходимость. ■

Пример. Векторы базиса e_n слабо сходятся к 0, если базис бесконечен, но при этом $\|e_n\| \equiv 1$ — нет сходимости по норме.

Лекция 12. Топология двойственности. Слабые топологии

Топология двойственности

Вспомним определения 11.3 и 11.4: для слабой сходимости $\ell(x_n) \to \ell(x)$, для *–слабой сходимости $\ell_n(x) \to \ell(x)$.

Топологии, которые стоят за этими сходимостями — частный случай одной более общей конструкции.

Рассмотрим E — линейное пространство; F — некоторое линейное пространство линейных функций на E. Для них можно ввести *топологию двойственности* $\sigma(E, F)$. *Базисные окрестности нуля* для неё будут иметь вид

$$U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(0) = \Big\{x : \big|f_j(x)\big| < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n,\ f_j \in F\Big\}.$$

Если функционал один, то наглядно такую окрестность можно представить как полосу между двумя гиперплоскостями, значение в которых равно ± 1. Для нескольких пересекающихся функционалов, получим окрестность, содержащую некоторое линейное подпространство в бесконечномерном пространстве, которое является пересечением ядер.

Базисные окрестности точки a — это сдвинутые базисные окрестности нуля, то есть

$$U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(a) = U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(0) + a = \Big\{x : \big|f_j(x-a)\big| < \varepsilon\Big\}.$$

Определение 12.1. Непустое множество U *открыто* в топологии двойственности $\sigma(E, F)$, если каждая точка из U входит в U со своей базисной окрестностью.

Утверждение 12.1. Определенная таким образом топология двойственности является топологией.

Доказательство. Напомним, что в топологии допускаются произвольные объединения и конечные пересечения. Возможность объединения зашита уже в определении, проверим, что пересечение двух открытых также открыто. Для этого достаточно проверить, что пересечение двух базисных открыто. Пусть точка c попадает в пересечение: $c \in U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(0) + a \cap U_{g_1,\ldots,g_m,\delta}(0) + b$. Из этого следует, что в пересечение войдёт также $U_{f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m,r}(0)+c$ при малых $r > 0$. Так, годится $r > 0$, которое меньше всех разностей вида $\varepsilon - \left|f_j(c-a)\right|$ и $\delta - \left|g_\ell(c-b)\right|$. Действительно, пусть $x-c \in U_{f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m,r}(0)$, тогда из неравенств треугольника будет вытекать, что $x-a \in U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(0)$ и $x-b \in U_{g_1,\ldots,g_m,\delta}(0)$:

$$\left|f_j(x-a)\right| = \left|f_j(c-a)+f_j(x-a)-f_j(c-a)\right| \leq \left|f_j(c-a)\right| + \left|f_j(x-c)\right| < \varepsilon,$$

так как у нас $\left|f_j(x-c)\right|$ меньше дефицита $\left|f_j(c-a)\right|$ до ε. Аналогично выполняется проверка с функционалами g. ■

Непрерывные функции на топологии двойственности

Теорема 12.1. Множество линейных функций на E, непрерывных в $\sigma(E, F)$, есть F.

Доказательство. Всякий $f \in F$ непрерывен, так как множества вида $\left\{x : \left|f(x)\right| < \varepsilon\right\}$ открыты, то есть линейный функционал f непрерывен в нуле, а, значит, и везде.

В другую строну. Пусть ℓ — непрерывная линейная функция на E. Так как функционал ℓ непрерывен, то множество $U = \left\{x : \left|\ell(x)\right| < 1\right\}$ открыто и содержит 0, значит, существует базисная окрестность нуля $U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(0) \subset U$. Получаем, что $\bigcap\limits_1^n \operatorname{Ker} f_j \subset U$. Это некоторое линейное подпространство, на котором функционал ℓ ограничен по модулю, но такое может быть только если $\ell = 0$ на $\bigcap\limits_1^n \operatorname{Ker} f_j$. Воспользуемся дополнительной леммой, и теорема будет доказана. ■

Лемма 12.1. Если линейная функция ℓ равна 0 на пересечении $\bigcap\limits_1^n \operatorname{Ker} f_j$, то ℓ есть линейная комбинация f_j, то есть $\ell = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$, где $c_1, \ldots, c_n$ — некоторые числа.

Доказательство. Пусть $n = 1$ и $\ell|_{\operatorname{Ker} f_1} = 0$. Нужно показать, что из этого следует, что $\ell = c \cdot f_1$.

Если $f_1 = 0$, то $\ell = 0$ и пропорциональность есть.

Пусть $f_1 \neq 0$, то есть существует такой вектор a, что $f_1(a) = 1$. Тогда $\ell = \ell(a) \cdot f_1$, так как $\ell(a) = \ell(a) \cdot 1 = \ell(a) \cdot f_1(a)$ и на элементе a эти функционалы равны; на $\operatorname{Ker} f_1$ выполнено равенство $\ell = 0 = \ell(a) \cdot f_1$. Получаем, что ℓ и $\ell(a) \cdot f_1$ равны всюду, так как они равны на гиперплоскости нулей функционала и одном дополнительном векторе a, который алгебраически дополняет ядро функционала, то есть равны на их линейных комбинациях, которые составляют всё.

Индукция: пусть верно для $n \geq 1$ и $\ell = 0$ на $\bigcap\limits_1^{n+1} \operatorname{Ker} f_j$. Рассмотрим $L = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ и заметим, что сужение ℓ на L есть 0 на $\bigcap\limits_1^n \operatorname{Ker} f_j \cap L$. Получаем, что $\ell = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$

на L. Возьмём линейный функционал $\varphi = \ell - c_1 f_1 - \ldots - c_n f_n$, для него $\varphi|_L = 0$, то есть $\varphi = 0$ на ядре f_{n+1}. Тогда, из случая $n = 1$, получаем, что $\varphi = c \cdot f_{n+1}$, а ℓ есть линейная комбинация $f_1, \ldots, f_{n+1}$. ■

Слабая и *– слабая топологии

Определение 12.2. Если в качестве E взять банахово пространство X, а в качестве F — его сопряженное, X^*, то получим *слабую топологию* $\sigma(X, X^*)$.

Определение 12.3. Если $E = X^*$, а $F = X$, то есть векторы действуют как функционалы на X^*, то получим **– слабую топологию* $\sigma(X^*, X)$.

Определение 12.4. *Сходимость к x в $\sigma(E, F)$* — это сходимость $f(x_n) \to f(x)\ \forall f \in F$.

То есть, слабая и *– слабая сходимости будут частными случаями этой сходимости.

Замечание. Могут существовать другие топологии с такими же сходимостями.

Можно проверить, что топология двойственности — это самая слабая локально выпуклая топология, при которой сопряженное будет F.

Теорема 12.2 *(Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки)*. Пусть X — банахово пространство. Тогда замкнутые шары в X^* компактны в *– слабой топологии $\sigma(X^*, X)$.

Замечание. Исторически эта теорема была выведена из теоремы Тихонова о том, что произведение отрезков компактно в тихоновской топологии (можно показать, что она связана с этой топологией).

Пример. Возьмём банахово пространство последовательностей $X = \ell^\infty$. Рассмотрим на нём координатные функционалы $f_n(x) = x_n$, $\|f_n\| = 1$. Из последовательности $\{f_n\}$ нельзя выбрать *– слабо сходящуюся подпоследовательность, так как для всякой подпоследовательности координатных функций найдется вектор, на котором она не сходится, несмотря на то, что компактность есть.

Теорема 12.3. Пусть X — сепарабельное банахово пространство; $f_n \in X$ — непрерывные линейные функционалы, которые равномерно ограничены: $\|f_n\| \le C$. Тогда существует *– слабо сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_j\}$ всюду плотно в единичном шаре в X. Выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ так, что она сходится на всех x_j. Сделать это можно с помощью приёма Кантора: сначала на x_1, потом на x_2, и так далее, а затем извлечь из них «диагональную», она и будет сходиться на всех x_j. Тогда $f_{n_k}(x)$ сходится на всех

x. Чтобы показать это, достаточно проверить фундаментальность этой последовательности на единичном шаре $\|x\| \leq 1$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такое x_j, что $\|x_j - x\| < \varepsilon$, тогда $f_{n_k}(x) = f_{n_k}(x_j) + f_{n_k}(x - x_j)$, где $f_{n_k}(x_j)$ сходится, а $f_{n_k}(x - x_j)$ оценивается через $C\varepsilon$. Получили, что наша последовательность сколь угодно мало отличается от сходящейся, то есть она сходящаяся. Тогда, по теореме 9.3 Банаха–Штейнгауза, $f(x) = \lim f_{n_k}(x)$ — непрерывный функционал. ■

Пример. В гильбертовом пространстве всякая ограниченная по норме последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность (так как для гильбертовых пространств *– слабая и слабые сходимости можно отождествить).

Замечание. В общем банаховом пространстве это не верно.

Упражнение 12.1. Проверить, что в $C[0, 1]$ из последовательности функций $f_n(t) = \sin nt$ нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 12.4. Непрерывный линейный оператор $K: H \to H$ в гильбертовом пространстве H компактен тогда и только тогда, когда он переводит слабо сходящиеся к 0 в сходяшиеся по норме: если $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} 0$, то $\|Kx_n\| \to 0$. При этом образ замкнутого шара компактен.

Доказательство. Пусть K — компактен и $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} 0$; пусть $\|Kx_n\| \not\to 0$. Можно считать, что $\|Kx_n\| \geq c > 0$. Есть сходящая подпоследовательность $Kx_{n_j} \to y$, получаем, что $y \neq 0$. Но если взять скалярное произведение с вектором v, получим, что $(Kx_{n_j}, v) \to (y, v)$. С другой сторону, $(Kx_{n_j}, v) = (x_n, K^*v) \to 0$. Следовательно, $y = 0$, получили противоречие. Значит, $\|Kx_n\| \to 0$.

Обратно, пусть слабо сходящиеся переходят в сходящиеся по норме; пусть есть векторы из шара $\|x_n\| \leq 1$. Тогда из $\{x_n\}$ выберем слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$. Из этого будет следовать, что Kx_{n_j} сходится, и из каждой последовательности в образе мы можем выбрать сходящуюся, то есть образ шара лежит в компакте. Следовательно, K — компактный.

Покажем, что образ шара замкнут. Если $Kx_n \to y$, то возьмём подпоследовательность x_{n_j}, которая слабо сходится к x. Тогда $Kx_{n_j} \to Kx$ по норме, и, следовательно, $y = Kx$, то есть образ замкнут. Так как образ замкнут, и лежит в компакте, то он компактен. ■

Лекция 13. Спектральная теория. Введение

Спектр. Основные понятия

Пусть X — комплексное банахово пространство; $A\colon X \to X$ — непрерывный линейный оператор. Бывает полезно из данного оператора вычитать скалярные: $A-\lambda\cdot I$.

Определение 13.1. *Спектр* оператора A, обозначаемый как $\sigma(A)$, — это множество таких точек комплексной плоскости, что оператор $A-\lambda I$ не обратим:

$$\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon A-\lambda I \text{ не обратим}\}$$

Определение 13.2. *Резольвентное множество* — это дополнение к спектру, $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$.

По теореме Банаха, если оператор обратим, то есть $\lambda\notin\sigma(A)$, то оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ непрерывен.

Бывают *две причины необратимости*: либо оператор $A-\lambda I$ не инъективен, либо оператор $A-\lambda I$ не сюръективен (либо оба). В конечномерном случае эти две причины склеились: необратимый оператор будет не инъективен и не сюръективен. В бесконечномерном случае эти причины не склеиваются.

Пример. Оператор $A\colon \ell^2\to\ell^2$; $(x_n)\mapsto(0, x_1, x_2,\ldots)$ инъективен, но не сюръективен, поэтому $0\in\sigma(A)$, но не собственное число. Оператор $B\colon (x_n)\mapsto(x_2, x_3,\ldots)$, напротив, сюръективен, но не инъективен.

Предложение 13.1. Пусть $A\colon X\to X$ — непрерывный линейный оператор, который обратим; $D\colon X\to X$ — непрерывный линейный оператор. Тогда $A+D$ обратим, если

$$\|D\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Доказательство. Отметим, что $A+D=A(I+A^{-1}D)$. Чтобы произведение операторов было обратимо, нужно, чтобы оба сомножителя были обратимы. Оператор A обратим по условию. Достаточное условие обратимости оператора вида $I-B$ — это $\|B\|<1$. Это видно из формулы для геометрической прогрессии: $(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\ldots$. Отметим, что из определения нормы, по индукции, $\|B^n\|\le\|B\|^n$, поэтому ряд $I+B+B^2+\ldots+B^n+\ldots$ сходится по операторной норме. Если умножить этот ряд слева или справа на $I-B$, то получим единичный оператор: $(I-B)(I+B+B^2+\ldots)=(I+B+B^2+\ldots)(I-B)=I$.

У нас $\|A^{-1}D\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|D\| < 1$. ■

Замкнутость и непустота спектра

Следствие 13.1. Множество обратимых операторов (резольвентное множество) открыто по операторной норме.

Следствие 13.2. Спектр замкнут.

Следствие 13.3. Спектр A лежит в диске радиуса $\|A\|$: $\sigma(A) \subset \{z\colon |z| \le \|A\|\}$

Доказательство. Пусть $|\lambda| > \|A\|$, тогда $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$, где $\|\lambda^{-1}A\| = \dfrac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$.

■

Предложение 13.2. Если $X \ne 0$, то тогда $\sigma(A) \ne \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\sigma(A) = \varnothing$. Тогда резольвента оператора $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ задана для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Зафиксируем вектор $v \in X$ и функционал $\ell \in X^*$, тогда возникает комплекснозначная функция $\varphi(\lambda) = \ell\big(R(\lambda)\,v\big)$; $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Оценим функцию φ. Пусть $|\lambda| > \|A\|$, тогда

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = -\lambda^{-1}\big(I + \lambda^{-1}A + (\lambda^{-1}A)^2 + \ldots\big).$$

Пользуясь этим, получим оценку для нормы:

$$\big\|R(\lambda)\big\| \le |\lambda|^{-1}\big(1 + \|\lambda^{-1}A\| + \ldots\big) = \frac{|\lambda|^{-1}}{1 - \|\lambda^{-1}A\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \to 0,$$

когда $|\lambda| \to \infty$. Тогда $\big|\varphi(\lambda)\big| \le \|\ell\| \cdot \|v\| \cdot \big\|R(\lambda)\big\| \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0$.

Покажем, что функция φ голоморфна на резольвентном множестве. Пусть λ_0 — фиксированная точка из резольвентного множества (в нашем случае — любая). Проверим, что $\varphi(\lambda_0 + z)$ при малых $|z|$ разлагается в степенной ряд по z.

$$R(\lambda_0+z) = (A-\lambda_0 I - zI)^{-1} = (A-\lambda_0 I)^{-1}\big(I - z\,(A-\lambda_0 I)^{-1}\big)^{-1} = B\,(I - zB)^{-1} = B\,(I + zB + z^2B^2 + \ldots)$$

при достаточно малых z, где $B = (A - \lambda_0 I)^{-1}$. Получаем, что

$$\varphi(\lambda_0 + z) = \ell\big(B\,(I + zB + z^2B^2 + \ldots)\,v\big) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

так как B и ℓ — непрерывные операторы; $c_0, c_1, \ldots$ — конкретные коэффициенты, выражающиеся через ℓ, B и v.

Таким образом, мы получили, что $\varphi(\lambda)$ аналитична, тогда, по теореме Лиувилля, $\varphi(\lambda)\equiv 0$ при всех ν и ℓ. Из этого следует, что $R(\lambda)=0$, получили противоречие. Значит, спектр не пуст. ■

Примеры явно вычисляемых спектров

Пример. Пусть $A\colon \ell^2\to\ell^2$ — диагональный оператор: $Ax=(\alpha_1x_1,\,\alpha_2x_2,\ldots)$. Для него мы знаем, что $\|A\|=\sup|\alpha_n|$.

Ясно, что все α_n лежат в спектре $\sigma(A)$, так как это собственные числа, с ними мы получаем оператор с ненулевым ядром. Замыкание последовательности $\{\alpha_n\}$ тоже лежит в спектре $\sigma(A)$, так как спектр замкнут.

Если λ не лежит в замыкании $\sigma(A)$, то $|\lambda-\alpha_n|\geq\varepsilon>0$, тогда оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, это умножение на $\dfrac{1}{\alpha_n-\lambda}$, будет ограничен, так как справедлива оценка $\dfrac{1}{|\alpha_n-\lambda|}\leq\varepsilon^{-1}$, и обратный оператор будет явно задаваться, поэтому $\lambda\notin\sigma(A)$.

Итог: спектр $\sigma(A)$ — это замыкание последовательности $\{\alpha_n\}$.

Из этого следует, что всякий непустой компакт $K\subset\mathbb{C}$ в гильбертовом пространстве есть чей-то спектр. В банаховом пространстве могут существовать компакты, которые не будут ничьим спектром.

Отметим, что собственные числа оператора A — это числа $\{\alpha_n\}$, и спектр получился намного больше, чем набор всех собственных чисел. Например, если взять в качестве $\{\alpha_n\}$ последовательность, всюду плотную в единичном диске, получим, что спектром будет весь единичный диск (оценка из следствия 13.3 максимально достигается), но собственных чисел будет только счетное число.

Пример. Пусть A — оператор в комплексном пространстве непрерывных функций $X=C[0,1]$, задаваемый формулой умножения на аргумент: $Ax(t)=tx(t)$. Мы считали, что $\|A\|=1$. Для него оператор $A-\lambda I$ — это умножение на $(t-\lambda)$. Такой оператор обратим тогда и только тогда, когда $\lambda\notin[0,1]$. Обратный оператор в таком случае — это $By(t)=\dfrac{y(t)}{t-\lambda}$. То есть здесь $\sigma(A)=[0,1]$.

При этом у оператора A нет собственных чисел, так как если бы у него существовали такие собственное число λ и собственная функция $v(t)$, что $Av(t)=\lambda v(t)$, то верно было бы и равенство $t\,v(t)=\lambda\,v(t)$, из которого следует, что $v=0$, а мы не считаем 0 собственной функцией.

Замечание. Множество собственных чисел (*точечный спектр*) оператора в гильбертовом пространстве — это ограниченное множество, которое является счётным объединением компактов.

Упражнение 13.1. Привести примеры операторов с множеством собственных чисел, равным

1) открытому диску $\{\lambda\colon |\lambda| < 1\}$;

2*) замкнутому диску $\{\lambda\colon |\lambda| \le 1\}$;

3*) замкнутому квадрату $\{\lambda\colon |\operatorname{Re}\lambda| \le 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \le 1\}$.

Оператор умножения на функцию и его спектр

Пример. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — вероятностное пространство; $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция; $A\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ — ограниченный оператор умножения на φ, задаваемый формулой $A_\varphi x(\omega) = \varphi(\omega)\,x(\omega)$. Оказывается, что спектр $\sigma(A_\varphi)$ — это множество существенных значений φ, то есть

$$\sigma(A_\varphi) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \mu\Big(\omega\colon \big|\varphi(\omega) - \lambda\big| < \varepsilon\Big) > 0\ \forall \varepsilon > 0\Big\}.$$

λ не является существенным если при некотором $\varepsilon > 0$ есть такая $\widetilde{\varphi} \overset{\text{п.в.}}{=} \varphi$, что

$$\big|\widetilde{\varphi}(\omega) - \lambda\big| \ge \varepsilon > 0.$$

Упражнение 13.2. Привести пример, когда множество существенных значений и истинное множество значений функций не содержатся одно в другом (неверно, что все существенные значения принимаются и неверно, что все принимаемые значения являются существенными); Доказать, что эти множества обязательно пересекаются (неверно, что все истинные значения несущественны).

Утверждение 13.1. Спектр A равен множеству существенных значений.

Доказательство. Из определения, если λ не существенное, то $\lambda \notin \sigma(A_\varphi)$, потому что есть обратный оператор $\dfrac{1}{\widetilde{\varphi}(\omega) - \lambda}\,y(\omega)$

Пусть λ — существенное значение, то есть можно взять множества

$$\Omega_N = \Big\{\omega\colon \big|\varphi(\omega) - \lambda\big| < \frac{1}{N}\Big\},\ \mu(\Omega_N) > 0.$$

Предположим, что $A_\varphi - \lambda$ обратим, значит, есть обратный. Возьмём функции

$$x_N(\omega) = \frac{I_{\Omega_N}(\omega)}{\sqrt{\mu(\Omega_N)}},\ \|x_N\|_{L^2} = 1.$$

Применим к ним оператор, получим $(A_\varphi - \lambda)\,x_N = \dfrac{(\varphi-\lambda)\,I_{\Omega_N}}{\sqrt{\mu(\Omega_N)}}$. Тогда

$$\left\|(A_\varphi - \lambda)\,x_N\right\|_{L^2}^2 = \int\limits_{\Omega_N} \frac{\left|\varphi(\omega) - \lambda\right|^2}{\mu(\Omega_N)}\,\mu(d\omega) \le \frac{1}{N^2} \to 0.$$

Итого получаем, что $\|x_N\|_{L^2} \equiv 1$, а $\left\|(A_\varphi - \lambda)\,x_N\right\|_{L^2} \to 0$. Тогда из этого будет следовать противоречие с обратимостью $A_\varphi - \lambda$, так как если он обратим, то тогда

$$x_N = (A_\varphi - \lambda)^{-1}\,(A_\varphi - \lambda)\,x_N \to 0,$$

но такого быть не может, так как $\|x_N\| = 1$. ■

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ