МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИ. СЕМИНАРЫ

ТИМАШЕВ
ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Оглавление

Семинар 1. Примеры групп Ли: симплектическая и унитарная группы. ... 4

Упражнение 1 ... 4

Симплектическая группа ... 5

Унитарная группа ... 7

Семинар 2. Связность и компоненты связности. ... 10

Разбор задач домашнего задания ... 10

Задача 7 ... 10

Задача 6 ... 11

Связность и компоненты связности ... 12

Семинар 3. Вычисление касательных алгебр Ли. ... 14

Разбор задач домашнего задания ... 14

Задача 4 ... 14

Задача 5 ... 14

Алгебры Ли ... 16

Задача ... 17

Семинар 4. Вычисление правоинвариантных векторных полей и экспоненциального отображения на группе Ли. Вычисление дифференциала экспоненциального отображения в произвольной точке. ... 19

Задача ... 19

Разбор задач домашнего задания ... 20

Задача 4 ... 20

Задача 6 ... 20

Вычисление дифференциала экспоненциального отображения в произвольной точке ... 21

Семинар 5. Глобальные свойства экспоненциального отображения для $GLn(\mathbb{C})$ и $SL2(\mathbb{R})$. ... 24

Разбор задач домашнего задания ... 24

Задача 3 ... 24

Задача 4 ... 24

Глобальные свойства экспоненциального отображения для конкретных групп Ли ... 25

Семинар 6. Структура экспоненциального отображения и однопараметрических подгрупп для $SL2(\mathbb{R})$. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли. ... 28

Разбор задач домашнего задания ... 28

Задача 2b ... 28

Структура экспоненциального отображения и однопараметрических подгрупп для $SL2(\mathbb{R})$ 29

Теорема Картана 31

Семинар 7. Завершение доказательства теоремы Картана. Разложение присоединённого представления группы Ли GLn на неприводимые слагаемые. 33

Завершение доказательство теоремы Картана 33

Разбор задач домашнего задания 34

Задача 3 34

Гомоморфизмы и линейные представления групп Ли 34

Задача 34

Задача 36

Семинар 8. Плотная обмотка тора. Двулистное накрытие $SU2\mathbb{C} \cong U1\mathbb{H} \longrightarrow SO\mathbb{H}im \cong SO3\mathbb{R}$. 37

Разбор задач домашнего задания 37

Задача 3 37

Плотная обмотка тора 37

Задача 39

Задача 41

Семинар 9. Двулистное накрытие $U2\mathbb{H} \longrightarrow SO5\mathbb{R}$. Автоморфизмы алгебры Гейзенберга. Многообразие Грассмана. 42

Разбор задач домашнего задания 42

Задача 2 42

Задача 5b 44

Задача 45

Задача 46

Многообразие Грассмана 46

Семинар 10. Вторая гомотопическая группа. Точная гомотопическая последовательность расслоения группы Ли над однородным многообразием. Вычисление фундаментальной группы у $GLn\mathbb{C}$. 49

Разбор задач домашнего задания 49

Задача 4b 49

Задача 6 49

Вторая гомотопическая группа 52

Точная гомотопическая последовательность расслоения группы Ли над однородным многообразием 55

Семинар 11. Вычисление фундаментальной группы у $SOn\mathbb{R}$. Спинорная группа. 59

Разбор задач домашнего задания 59

Задача 1 59

Задача 4 59

Задача 2b 61

Спинорная группа 62

Семинар 12. $Spin6\mathbb{R} \simeq SU4\mathbb{C}$. Простота алгебры Ли $\mathfrak{sl}n\mathbb{K}$. Вычисление формы Киллинга для алгебры Ли $\mathfrak{gl}n\mathbb{K}$. 65

Разбор задач домашнего задания 65

Задача 2 65

Задача 1a 66

Задача 6 68

Утверждение 69

Вычисление формы Киллинга для алгебры Ли $\mathfrak{sl}n\mathbb{K}$ 70

Семинар 13. Теория представлений группы Ли $SLn\mathbb{K}$ и алгебры Ли $\mathfrak{sl}n\mathbb{K}$, классификация неприводимых представлений. 72

Представления $SLn\mathbb{K}$ 72

Семинар 1. Примеры групп Ли: симплектическая и унитарная группы.

Упражнение 1. Пусть G – многообразие + группа, причем умножение $\mu\colon G \times G \longrightarrow G,\ (x,y) \mapsto xy$ дифференцируемо. Доказать, что отображение инверсии $\iota\colon G \times G \longrightarrow G,\ \ x \mapsto x^{-1}$ также дифференцируемо.

Доказательство.
Отображение инверсии ι можно задать как неявную функцию на многообразии G с помощью уравнения $\mu(x,y) = xy = e$, тогда $y = \iota(x)$. Пусть $\dim G = n$ и в окрестности точки x заданы локальные координаты $x_1, \dots, x_n$, а в окрестности точки y заданы локальные координаты $y_1, \dots, y_n$. В локальных координатах это уравнение превращается в систему функциональных уравнений, задающую x^{-1} как неявную функцию от x.

Применим теорему о неявной функции. Убедимся, что условия этой теоремы выполнены – рассмотрим якобиан отображения $\mu\colon G \times G \longrightarrow G,\ \ (x,y) \mapsto xy$:

$$\left(\frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial x_j}, \frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial y_k}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial x_j}}_{x_1,\dots,x_n} & \underbrace{\frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial y_k}}_{y_1,\dots,y_n} \end{array}\right) \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{array}$$

- минор $\left|\frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial y_k}\right|$ должен быть отличен от нуля. Зафиксируем точку $x = x_0$. Матрица $\left(\frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial y_k}\right)$ – это матрица Якоби отображения $f(y) = x_0 y$, которое является левым сдвигом на элемент x_0:

$$\begin{aligned} l_{x_0} = f\colon\ & G \longrightarrow G \\ & y \mapsto x_0 y \end{aligned}$$

Но левый сдвиг является диффеоморфизмом, он обратим: $\left(l_{x_0}\right)^{-1} = l_{x_0^{-1}}$, поэтому $\left|\frac{\partial \mu_i(x,y)}{\partial y_k}\right| \neq 0$ и отображение инверсии ι дифференцируемо. ■

На лекции мы рассмотрели некоторые примеры групп Ли – немного расширим наш запас примеров, строя новые группы Ли как подгруппы в имеющихся группах Ли. Рассмотрим группу $GL_n(\mathbb{K})$ – как уже не раз отмечалось, ее можно рассматривать как группу невырожденных линейных операторов $GL(V)$, $\dim V = n$. Если на V имеется какая-то

дополнительная структура, то можно рассматривать те линейные операторы, которые эту структуру “уважают”.

Например, ортогональные операторы “уважают” (сохраняют) скалярное произведение, т.е. некоторую невырожденную симметрическую билинейную форму β на V: $O_n(\mathbb{K}) \simeq O(V,\beta)$, где

$$\beta(x,y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Т.е. $g \in O(V,\beta) \Leftrightarrow \beta(x,y) = \beta(gx,gy), \forall x,y \in V$.

Вместо стандартного скалярного умножения $\beta(x,y)$ можно рассматривать произвольное скалярное умножение, записанное в координатах с помощью невырожденной симметрической билинейной формы. Над полем $\mathbb{C}$ матрицу скалярного умножения всегда можно привести к единичному виду с помощью соответствующей замены координат, т.е. группа $O(V,\beta)$ будет одной и той же для всех β. Над полем $\mathbb{R}$ это уже не так (однозначно будут определены только индексы инерции p,q, $p+q=n$): $O_{p,q}(\mathbb{R}) \simeq O(V,\beta)$, где

$$\beta(x,y) = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_{p+q}y_{p+q},$$

$$B = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix}}_{q} \end{pmatrix}$$

Симплектическая группа.

Другой пример: рассмотрим невырожденную кососимметрическую билинейную форму ω на V, $\dim V = 2n$ (такие формы еще называют *симплектическими*). Как мы знаем из курса линейной алгебры, существует базис пространства V, в котором ω записывается в каноническом виде:

$$\omega(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \dots + x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}$$

Ее матрица в каноническом виде:

$$\Omega = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & \cdots & & \\ -1 & 0 & \cdots & & \mathbf{0} \\ \hline \cdots & \cdots & & & \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & \mathbf{0} & \cdots & 0 & 1 \\ & & \cdots & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Соответствующий базис $(e_1, \dots, e_{2n})$ называется *симплектическим базисом*.

Канонический вид определен однозначно, но иногда бывает удобно по-другому упорядочить базисные векторы пространства V. Другие канонические виды симплектической формы:

$$\Omega = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & -1 & & & \end{array}\right)$$

Этот вид соответствует такому упорядочению симплектического базиса: $(e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2n})$.

Если мы расположим базисные векторы следующим образом: $(e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2n-2}, \dots, e_4, e_2)$, то Ω примет следующий вид:

$$\Omega = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \iddots & \cdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & -1 & & & \\ \cdots & \iddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ -1 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right)$$

Рассмотрим группу преобразований пространства V, которые сохраняют симплектическую форму ω. Эта группа называется симплектической и обозначается $Sp(V, \omega)$:

$$Sp_{2n}(\mathbb{K}) \cong Sp(V, \omega) = \{g \in GL(V) \mid \omega(x, y) = \omega(gx, gy), \ \ \forall x, y \in V\},$$

Выясним, является ли эта группа группой Ли, т.е. подгруппой Ли в $GL_{2n}(\mathbb{K})$ и если да, то какова ее размерность. Имеем $\forall x, y \in V$:

$$x^T \Omega y = (gx)^T \Omega (gy) \Leftrightarrow x^T \Omega y = x^T g^T \Omega g y \Leftrightarrow \Omega = g^T \Omega g$$

Итак, $\Omega = g^T \Omega g$ – уравнение, которое задает симплектическую группу $Sp(V, \omega)$. Так как $Sp(V, \omega)$ – подгруппа в $GL(V)$, то для того, чтобы доказать, что она является подгруппой

Ли, достаточно проверить, что $Sp(V,\omega)$ – подмногообразие в окрестности e (см. предложение 1 в лекции 1 курса лекций), а для этого нужно проверить, что матрица Якоби J соответствующей системы функциональных уравнений имеет в e максимально возможный ранг.

Матричное уравнение $\Omega = g^T\Omega g$ задает $\frac{m(m-1)}{2}$ (где $m = 2n$) независимых функциональных уравнений на элементы матрицы g (так как Ω кососимметрична и нам достаточно найти элементы g выше главной диагонали). Вместо того, чтобы искать ранг матрицы J, будем интерпертировать ее строки как дифференциалы соответствующих функций, и найдем размерность пространства решений системы уравнений, которая задается этой матрицей:

$$d(g^T\Omega g - \Omega) = dg^T\Omega g + g^T\Omega dg \underset{\text{при } g=E}{=} dg^T\Omega + \Omega dg = 0$$

Обозначая $\Omega dg = Y$, получаем уравнение $Y = Y^T$, решением которого являются все симметрические матрицы. Размерность пространства симметрических матриц равна $\frac{m(m+1)}{2}$, значит, и размерность пространства решений системы уравнений равна $\frac{m(m+1)}{2}$. Тогда $rk\, J = m^2 - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$. Следовательно, $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ – подгруппа Ли в $GL_{2n}(\mathbb{K})$ и $\dim Sp_{2n}(\mathbb{K}) = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$.

Унитарная группа.

Рассмотрим унитарную группу $U_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$:

$$G = U_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid gg^* = e\} \quad (g^* = \bar{g}^T \text{– эрмитово сопряженная матрица})$$

Проверим, является ли $U_n(\mathbb{C})$ подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{C})$. Заметим, что условие $gg^* = e$ задает систему вещественно (но не комплексно, так как операция сопряжения не является комплексно дифференцируемой) дифференцируемых уравнений.

$GL_n(\mathbb{C})$ – группа Ли над $\mathbb{C}$ размерности n^2, и группа Ли над $\mathbb{R}$ размерности $2n^2$. Проверим, является ли $U_n(\mathbb{C})$ вещественной подгруппой Ли в вещественнной группе Ли $GL_n(\mathbb{C})$. Будем действовать аналогично предыдущему примеру (см. проверку, является ли симплектическая группа группой Ли):

$$d(gg^* - e) = dg \cdot g^* + g \cdot (dg)^* \underset{\text{при } g=e}{=} dg + (dg)^* = 0$$

Соответствующая однородная система линейных уравнений: $X + X^* = 0 \Leftrightarrow X^* = -X$, т.е. матрицы X, удовлетворяющие этой системе, являются косоэрмитовыми, и

пространство решений этой системы является пространством косоэрмитовых матриц. Размерность этого пространства над $\mathbb{R}$ равна $n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, следовательно, $rk\, J = 2n^2 - n^2 = n^2$, откуда следует, что $U_n(\mathbb{C})$ – <u>вещественная</u> группа Ли (так как условие $gg^* = e$ задает систему из n^2 уравнений, потому что матрица gg^* эрмитова, а размерность пространства эрмитовых матриц равна размерности пространства косоэрмитовых матриц) размерности n^2.

Ортогональная группа $O_{p,q}(\mathbb{R})$ – это группа операторов, сохраняющих скалярное умножение, а унитарная группа $U_n(\mathbb{C})$ – это группа операторов, сохраняющих эрмитово скалярное умножение: $U_n(\mathbb{C}) \simeq U(V)$, где V – эрмитово комплексное векторное пространство, $\dim V = n$ с эрмитовым скалярным умножением:

$$(z \mid w) = \bar{z}_1 w_1 + \cdots + \bar{z}_n w_n$$

Если $g \in U(V)$, то

$$(z \mid w) = (gz \mid gw), \ \ \forall z, w \in V$$

Комплексное векторное пространство V с базисом $e_1, \dots, e_n$ можно рассматривать как вещественное векторное пространство размерности $2n$ с базисом $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$. Тогда

$$(z \mid w) = \bar{z}_1 w_1 + \cdots + \bar{z}_n w_n = (z, w) + i[z, w]$$

Имеем:

$$(w, z) + i[w, z] = (w \mid z) = \overline{(z \mid w)} = (z, w) - i[z, w],$$

откуда следует, что (z, w) – симметрическая билинейная форма, а $[z, w]$ – кососимметрическая билинейная форма.

Если $z_k = x_k + iy_k$ и $w_k = u_k + iv_k$, то $\bar{z}_k w_k = (x_k u_k + y_k v_k) + i(x_k v_k - y_k u_k)$ и

- $(z, w) = \cdots + x_k u_k + y_k v_k + \cdots$ - стандартное скалярное умножение с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $[z, w] = \cdots + x_k v_k - y_k u_k + \cdots$ - стандартное кососкалярное умножение с матрицей

$$\Omega = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & -1 & & & \end{array}\right)$$

Таким образом, задание на комплексном векторном пространстве V эрмитового скалярного умножения $(\cdot\,|\,\cdot)$ равносильно заданию на V евклидова скалярного умножения $(\cdot\ ,\ \cdot)$ и симплектической формы $[\cdot\ ,\ \cdot]$, связанных соотношением:

$$(z, w) = [z, iw], \ \ \forall z, w \in V$$

- следует из того, что $-[z, w] + i(z, w) = i(z \mid w) = (z \mid iw) = (z, iw) + i[z, iw]$.

Так как $U_n(\mathbb{C})$ сохраняет эрмитово скалярное умножение (а значит, и его вещественную и мнимую части), то $U(V) \subseteq O(V_{\mathbb{R}}), Sp(V_{\mathbb{R}}), GL(V) \subset GL(V_{\mathbb{R}})$. Несложно проверить, что $U(V)$ является пересечением любых двух из подгрупп $O(V_{\mathbb{R}}), Sp(V_{\mathbb{R}}), GL(V)$.

Семинар 2. Связность и компоненты связности.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 7. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{K}$.
(a) Доказать, что группа ее обратимых элементов $G = A^{\times}$ является группой Ли.
(b) Что это за группа Ли, если $A = \mathbb{K}[x]/(x^2)$?

Решение.
(a) Понятно, что G является топологическим пространством, так как $G \subset A \cong \mathbb{K}^n$. Докажем, что G открыто в A. Для примера рассмотрим частный случай $A = Mat_n(\mathbb{K})$. В этом случае $G = GL_n(\mathbb{K}) = \{a \mid \det a \neq 0\}$ открыто в A. Воспользуемся этим примером, вложив алгебру A в алгебру $L(A) \simeq Mat_n(\mathbb{K})$:

$$A \hookrightarrow L(A) \simeq Mat_n(\mathbb{K})$$
$$a \mapsto l_a\colon\ x \mapsto ax$$

Это инъективный гомоморфизм алгебр, можно считать, что A – подалгебра в $L(A)$. Мы хотим доказать, что $G = A \cap GL(A)$, т.е. a обратим $\Leftrightarrow$ l_a обратим.
$\Longrightarrow$:
Если a обратим, то $\exists\, b = a^{-1}$, тогда $l_b = (l_a)^{-1}$.
$\Longleftarrow$:
Пусть $\exists\, (l_a)^{-1}$ – это равносильно тому, что l_a инъективен и сюръективен. Тогда $\exists\, b$, такой что $l_a(b) = 1$. Но $l_a(b) = ab$, т.е. элемент a обратим справа. Для того, чтобы доказать, что a обратим слева, умножим это равенство на a:

$$l_a(ba) = aba = 1 \cdot a = a = l_a(1)$$

Применяя к обеим частям равенства $(l_a)^{-1}$, получаем, что $ba = 1$, т.е. a обратим слева.

Итак, $G = A^{\times}$ открыто в A, поэтому G – многообразие, также G является группой. Структуры многообразия и группы согласованны, так как они согласованны в $GL(A)$, поэтому $G = A^{\times}$ является группой Ли.

(b) Если $A = \mathbb{K}[x]/(x^2)$, то

$$G \simeq \left\{\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0\right\}$$

Элемент $a = \lambda + \mu x \in A$ обратим тогда и только тогда, когда $\lambda \neq 0$. Имеем:

$$l_a\colon\ 1 \mapsto \lambda + \mu x$$
$$x \mapsto \lambda x$$

В базисе $\{1, x\}$:

$$l_a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

В базисе $\{x, 1\}$:

$$l_a = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Переходя от языка матриц к языку абстрактной теории групп:

$$G \simeq \left\{\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0\right\} \simeq \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \leftrightarrow \left(\lambda,\ \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

■

Задача 6. Пусть на (правом) кватернионном векторном пространстве $\mathbb{H}^n$ задана стандартная положительно определенная эрмитова полуторалинейная форма $\gamma(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n$. Доказать:

(a) $\mathbb{H}$-линейные операторы, сохраняющие γ, задаются унитарными кватернионными матрицами, т.е. такими $g \in GL_n(\mathbb{H})$, что $g^* g = e$ (здесь $*$ обозначает эрмитово сопряжение кватернионных матриц);
(b) Группа унитарных кватернионных матриц $U_n(\mathbb{H}) \subset GL_n(\mathbb{H})$ является подгруппой Ли. Какова ее размерность?
(c) Разложим $\gamma(x, y) = \alpha(x, y) + k\omega(x, y)$ в соответствии с разложением $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus k\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$ (здесь k – одна из кватернионных единиц). Тогда α и ω – эрмитово скалярное умножение и симплектическая форма на комплексном векторном пространстве $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$ соответственно, причем $\omega(x, y) = \alpha(xk, y)$.
(d) Доказать, что $U_n(\mathbb{H})$ есть пересечение любых двух из трех подгрупп $GL_n(\mathbb{H})$, $U_{2n}(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ в $GL_{2n}(\mathbb{C})$, где унитарная и симплектическая группы рассматриваются по отношению к формам α и ω соответственно.

Решение.
(c) Заметим, что

$$\gamma(y, x) = \alpha(y, x) + k\omega(y, x) = \overline{\gamma(x, y)} = \overline{\alpha(x, y)} - \overline{\omega(x, y)}k = \overline{\alpha(x, y)} - k\omega(x, y),$$

откуда следует, что α эрмитова, а ω кососимметрична и билинейна. Так как $\gamma(x, x) = \alpha(x, x)$, то α – эрмитово скалярное умножение (т.к. α положительно

определена). Несложно показать, что ω – симплектическая форма на $\mathbb{H}^n$ (т.е. ω не только кососимметрична и билинейна, но и невырождена). Имеем: $\gamma(xk,y) = -k\gamma(x,y)$. С другой стороны, $\gamma(xk,y) = \alpha(xk,y) + k\omega(xk,y)$ и $-k\gamma(x,y) = -k\alpha(x,y) + \omega(x,y)$, откуда $\omega(x,y) = \alpha(xk,y)$.

(d) Теперь несложно понять, что $U_n(\mathbb{H}) \subset GL_n(\mathbb{H}), U_{2n}(\mathbb{C}), Sp_{2n}(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{C})$, и $U_n(\mathbb{H})$ есть пересечение любых двух из трех подгрупп $GL_n(\mathbb{H})$, $U_{2n}(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ в $GL_{2n}(\mathbb{C})$, так как $U_n(\mathbb{H})$ состоят из матриц $\mathbb{H}$-линейных операторов, которые сохраняют γ, а значит, α и ω. Например, пусть g $\mathbb{H}$-линеен и сохраняет α, тогда он сохраняет и ω:

$$\omega(gx,gy) = \alpha(gxk,gy) = \alpha(g(xk),gy) = \alpha(xk,y) = \omega(x,y)$$

■

Связность и компоненты связности.

Для некоторых конкретных групп Ли выясним, связны ли они, и если нет, то выясним, на какие компонетны связности они распадаются.

1) $G = GL_n(\mathbb{K})$ – связна при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
– несвязна при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Состоит из двух компонент связности (матриц с положительным и отрицательным определителем): $GL_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{R})^+ \sqcup GL_n(\mathbb{R})^-$.

Доказательство.
Связность $GL_n(\mathbb{C})$ и $GL_n(\mathbb{R})^+$: пусть $g \in GL_n(\mathbb{K})$ – методом Гаусса приведем ее к единичной матрице. Несложно понять, что это можно сделать элементарными преобразованиями только первого типа и третьего типа (последним шагом), что соответствует умножению слева на элементарные матрицы $U_i(c_i)$ и $U(d)$:

$$U(d)U_N(c_N)\cdots U_1(c_1)g = E,$$

откуда

$$g = U_1(-c_1)\cdots U_N(-c_N)U(d^{-1})$$

Тогда $g(t) = U_1(-c_1t)\cdots U_N(-c_Nt)U(d(t)^{-1})$ – гладкая кривая в $GL_n(\mathbb{C})$, соединяющая $g = g(1)$ с $E = g(0)$, где $d(t)$ – некоторый путь, не проходящий через 0, соединяющий 1 и d,

$$U(d(t)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d(t) \end{pmatrix}$$

Это означает, что $GL_n(\mathbb{C})$ и $GL_n(\mathbb{R})^+$ связны.

Связность $GL_n(\mathbb{R})^-$ следует из равенства $GL_n(\mathbb{R})^- = r \cdot GL_n(\mathbb{R})^+$, где

$$r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ связна.

Доказательство.
Выберем базис, в котором матрица симплектической формы имеет канонический вид:

$$\Omega = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \iddots & \cdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & -1 & & & \\ \cdots & \iddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ -1 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right)$$

Попробуем действовать так же, как и в пункте 1, т.е. привести произвольную симплектическую матрицу $g \in Sp_{2n}(\mathbb{K})$ некоторыми стандартными преобразованиями (матрицы которых симплектичны) к единичной матрице. Для этого вместо матриц $U_k(c_k)$ выберем матрицы, отличающиеся от $U_k(c_k)$ наличием элемента $\pm c_k$, стоящего на месте, симметричном c_k относительно побочной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ c_k & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & c_k & & 1 \end{pmatrix}$$

Умножением g на такие матрицы добьемся того, что получим матрицу, первый столбец и последняя строка которой совпадает с первым столбцом и последней строкой единичной матрицы. Далее зануляем оставшиеся элементы в первой строке и последнем столбце, и приходим к случаю $Sp_{2n-2}(\mathbb{K})$, и т.д.

Далее действуем как в случае $GL_n(\mathbb{K})$. ■

Семинар 3. Вычисление касательных алгебр Ли.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 4. Найти компоненты связности группы Ли $O_n(\mathbb{C})$.

Решение.
Группа $O_n(\mathbb{C})$ состоит из двух компонент связности: $O_n(\mathbb{C})^0 = SO_n(\mathbb{C})$ и $O_n(\mathbb{C})\backslash SO_n(\mathbb{C})$. В самом деле, выберем базис, в котором матрица квадратичной формы, сохраняемой этой группой, имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \iddots & \cdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 1 & & & \\ \cdots & \iddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ 1 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right)$$

Далее, рассуждениями, аналогичными рассуждениям из решения последней задачи прошлого семинара (доказать, что группа $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ связна), получаем, что $SO_n(\mathbb{C})$ связна.

Другая компонента связности – это $O_n(\mathbb{C})\backslash SO_n(\mathbb{C})$ (объяснить это можно, например, тем, что $O_n(\mathbb{C})\backslash SO_n(\mathbb{C}) = rSO_n(\mathbb{C})$, т.е. это смежный класс матрицы r, где r – несобственная ортогональная матрица, например, матрица отражения вдоль какой-то координатной прямой). ■

Задача 5.
(a) Из каких матриц состоит группа Ли $O_{1,1}(\mathbb{R})$ и как устроены ее компоненты связности?
(b) Доказать, что группа Ли $O_{p,q}(\mathbb{R})^0$ состоит из псевдоортогональных матриц, у которых определитель и левый верхний угловой минор порядка p положительны.
(c) Вычислить группу компонент связности $O_{p,q}(\mathbb{R})/O_{p,q}(\mathbb{R})^0$.

Решение.
(a) Будем считать, что псевдоскалярное умножение, сохраняемое группой $O_{1,1}(\mathbb{R})$, имеет стандартный вид $(x \mid y) = x_1y_1 - x_2y_2$. (т.е. эта группа сохраняет квадратичную форму $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$). Тогда группа $O_{1,1}(\mathbb{R})$ состоит из следующих матриц:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

где $a^2 - b^2 = 1$, т.е. $b \in \mathbb{R}$, $a = \pm\sqrt{1 + b^2}$.

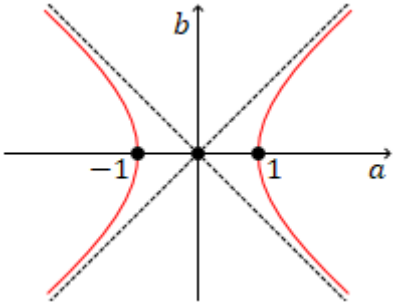

Рис. 3.1. Компоненты связности

Таким образом, каждому из двух видов матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$ соответствует две компоненты связности, т.е. всего имеется 4 компоненты связности.

Компоненту связности $O_{1,1}(\mathbb{R})^0$ зададим параметрически:

$$O_{1,1}(\mathbb{R})^0 = \left\{ g = \begin{pmatrix} ch\, t & sh\, t \\ sh\, t & ch\, t \end{pmatrix},\ \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

- такие преобразования плоскости осуществляют движение по правой ветке гиперболы, нарисованной на рис. 3.1. Аналогично, остальные компоненты связности $O_{1,1}(\mathbb{R})$ задаются комбинациями знаков $(sgn(a), sgn(det))$. Несложно понять, что

$$\pi_0\left(O_{1,1}(\mathbb{R})\right) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

- в самом деле, представители компонент связности $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ образуют группу $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(b) Будем считать, что псевдоскалярное умножение, сохраняемое группой $O_{p,q}(\mathbb{R})$, имеет матрицу

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{p\times p} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix}}_{q\times q} \end{array}\right)$$

Пусть $g \in O_{p,q}(\mathbb{R})$. В пункте (a) мы выяснили, что комоненты связности различаются знаком определителя матрицы и знаком a, т.е. знаком левого верхнего углового минора. В общем случае ситуация аналогичная: разделим матрицу $g \in O_{p,q}(\mathbb{R})$ на 4 блока:

$$g = \left(\begin{array}{c|c} p \times p & p \times q \\ \hline q \times p & q \times q \end{array}\right)$$

Заметим, что левый верхний угловой минор Δ размера $p \times p$ отличен от нуля. В самом деле, в противном случае столбцы матрицы Δ были бы линейно зависимы, т.е. существовала бы их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и линейная комбинация первых p столбцов матрицы g с теми же коффициентами принадлежала бы линейной оболочке последних q столбцов матрицы g – противоречие (так как псевдоскалярное умножение на первых p столбцах матрицы g определено положительно, а на последних q столбцах матрицы g определено отрицательно).

Теперь путем умножения на матрицы из $O_{p,q}(\mathbb{R})$, задающие повороты в координатных плоскостях (обычные или гиперболические) приведем g к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \pm 1 \end{matrix}}^{p \times p} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \pm 1 \end{matrix}}_{q \times q} \end{array}\right)$$

- снова получаем 4 компоненты связности, которые задаются знаком определителя и левого верхнего углового минора порядка p.

(c) Из вышеприведенных рассуждений вытекает, что $\pi_0\left(O_{p,q}(\mathbb{R})\right) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ■

Алгебры Ли.

Начнем с того, что вспомним алгебры Ли для некоторых классических матричных групп Ли, известных нам: $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{K})$, $U_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{K})$:

- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid tr\xi = 0\}$
- $\mathfrak{o}_n(\mathbb{K}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \xi^T = -\xi\}$
- $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \xi^* = -\xi\}$
- $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \Omega^{-1}\xi^T\Omega = -\xi\}$

Если в последнем примере мы выберем следующий вид матрицы Ω:

$$\Omega = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \iddots & \cdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & -1 & & & \\ \cdots & \iddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ -1 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right)$$

тогда будет выполнено соотношение $\Omega^{-1} = -\Omega$ и условие $\Omega^{-1}\xi^T\Omega = -\xi$ превратится в $\Omega\xi^T\Omega = \xi$. Это дает нам возможность более наглядно описать матрицы, входящие в $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ (для этого нужно выбрать произвольную строку матрицы и проследить, куда она переходит при умножении на Ω справа и слева):

$$\xi = \left(\begin{array}{c|c} + & + \\ & + \\ \hline + & \\ + & - \end{array}\right)$$

- матрица ξ должна быть кососимметричной относительно побочной диагонали для диагональных блоков и симметричной для антидиагональных блоков.

Задача. Найти алгебру Ли группы Ли $G = \mathbb{R}^2$ с операцией $xy = \begin{pmatrix} x_1 + e^{-x_2}y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$.

Решение.
Вначале проверим, что это действительно группа Ли. Проверка того, что G – группа:

- Ассоциативность $(xy)z = x(yz)$:

$$(xy)z = \begin{pmatrix} x_1 + e^{-x_2}y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + e^{-x_2}y_1 + e^{-x_2-y_2}z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$x(yz) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 + e^{-y_2}z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + e^{-x_2}(y_1 + e^{-y_2}z_1) \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix}$$

- Нейтральный элемент:

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Обратный элемент:

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} -x_1e^{x_2} \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Проверка того, что G – группа Ли: очевидно, что умножение μ: $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$ и инверсия ι: $G \times G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^1$ являются дифференцируемыми отображениями.

Алгебра Ли: $\mathfrak{g} = T_e G \simeq \mathbb{R}^2$. Коммутатор: пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in T_e G$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in T_e G$, $g(s) = \begin{pmatrix} \xi_1 s \\ \xi_2 s \end{pmatrix} \in G$, $h(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 t \\ \eta_2 t \end{pmatrix} \in G$. Тогда

$$\partial_{[\xi,\eta]} f = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} \big(f(g(s)h(t)) - f(h(t)g(s))\big)$$

Выберем в качестве f вектор-функцию, координатами которой являются координатные функции, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} \big(g(s)h(t) - h(t)g(s)\big) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} \left(\begin{pmatrix} \xi_1 s + e^{-\xi_2 s}\eta_1 t \\ \xi_2 s + \eta_1 t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta_1 t + e^{-\eta_2 t}\xi_1 s \\ \xi_2 s + \eta_1 t \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, $[\xi, \eta] = (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1, 0)$. ■

Семинар 4. Вычисление правоинвариантных векторных полей и экспоненциального отображения на группе Ли. Вычисление дифференциала экспоненциального отображения в произвольной точке.

Задача. В конце прошлого семинара мы нашли касательную алгебру Ли группы Ли $G = \mathbb{R}^2$ с операцией $xy = \begin{pmatrix} x_1 + e^{-x_2} y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ – это $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2$ со структурой $[\xi, \eta] = (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1, 0)$. Найдем правоинвариантные векторные поля на G, а также вычислим экспоненциальное отображение exp: $\mathfrak{g} \longrightarrow G$.

Решение.
Напоминание: векторное поле на G называется правоинвариантным, если оно инвариантно относительно всех диффеоморфизмов правого сдвига r_y: $G \nrightarrow G$, $x \mapsto xy$, $\forall y \in G$. Любое правоинвариантное векторное поле на G имеет следующий вид: $\xi_*(y) = d_e r_y(\xi)$ для некоторого $\xi \in T_e G$. Для краткости в дальнейшем будем пользоваться обозначением $d_e r_y(\xi) = \xi y$.

$$d(xy)|_{x=e} = (dx_1 - e^{-x_2} dx_2 y_1,\ \ dx_2)|_{x_1=x_2=0} = (dx_1 - dx_2 y_1,\ \ dx_2)$$

Получаем

$$\xi_*(y) = \xi y = (\xi_1 - \xi_2 y_1,\ \ \xi_2)$$

Геометрическая иллюстрация:

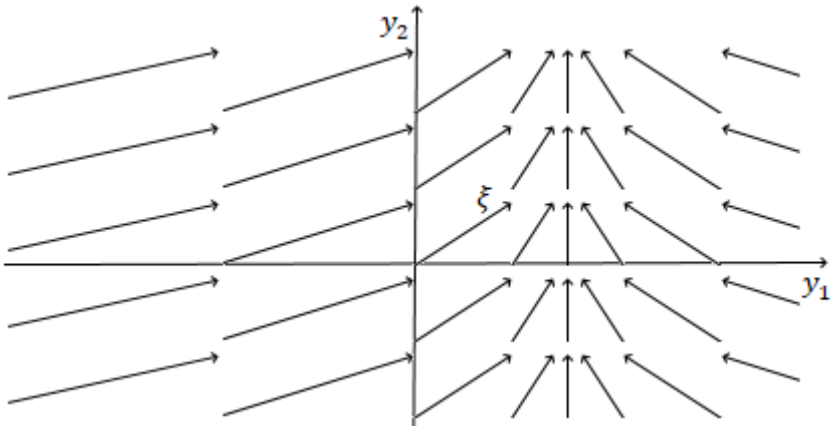

Рис. 4.1.Правоинвариантное векторное поле

Экспоненциальное отображение: поймем, как устроены фазовые кривые. Пусть $y(t)$ – фазовая кривая для ξ_*, $y(0) = (0,0)$. Имеем:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \xi_1 - \xi_2 y_1 \\ \dot{y}_2 = \xi_2 \end{cases}$$

Решение второго уравнения очевидно: $y_2(t) = \xi_2 t$, решение первого уравнения ищем в виде $y_1(t) = c(t)e^{-\xi_2 t}$. Дифференцируя, получаем $\dot{y}_1(t) = \dot{c}(t)e^{-\xi_2 t} - c(t)\xi_2 e^{-\xi_2 t}$, откуда $\dot{c}(t) = \xi_1 e^{\xi_2 t}$. Из условия $y(0) = (0,0)$ получаем $c(0) = 0$, тогда $c(t) = \frac{\xi_1}{\xi_2}\left(e^{\xi_2 t} - 1\right)$. Чтобы не оставлять ξ_2 в знаменателе, можно разложить $e^{\xi_2 t}$ в ряд: $e^{\xi_2 t} = \xi_2 t + \frac{\xi_2^2 t^2}{2!} + \frac{\xi_2^3 t^3}{3!} + \cdots$, тогда $c(t) = \xi_1 t + \xi_1 \xi_2 \frac{t^2}{2} + \xi_1 \xi_2^2 \frac{t^3}{6} + \cdots$. Итак,

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}\left(1 - e^{-\xi_2 t}\right) \\ y_2(t) = \xi_2 t \end{cases}$$

Таким образом, $y(t) = \exp(t\xi)$ и $\exp \xi = \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\left(1 - e^{-\xi_2}\right),\ \xi_2\right)$. ■

Разбор задач домашнего задания.

Задача 4. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $G = A^\times$ - группа Ли ее обратимых элементов. Доказать, что $\mathfrak{g} = A^-$ – *присоединенная алгебра Ли* к ассоциативной алгебре A, т.е. векторное пространство A с новой операцией (вместо ассоциативного умножения): $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$.

Решение.
Как было доказано ранее (см. семинар 2, задача 7), множество $G = A^\times$ открыто в A, поэтому касательное пространство в точке e канонически отождествляется с A (так как A – векторное пространство конечной размерности). Далее рассуждаем так же, как в примере, рассмотренном на лекциях (см. лекцию 3): пусть $\xi, \eta \in T_e G$, $\xi = \dot{g}(0)$, $\eta = \dot{h}(0)$, $g(t), h(s) \in G$, $g(0) = h(0) = e$, тогда

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} (g(t)h(s) - h(s)g(t)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\xi h(s) - h(s)\xi) = \xi\eta - \eta\xi$$

■

Задача 6. Определим на группе Ли G векторнозначную (со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$) дифференциальную 1-*форму Маурера-Картана*: $\theta(v) = vg^{-1} \in \mathfrak{g}$, $\forall g \in G$, $v \in T_e G$. Доказать, что форма Маурера-Картана удовлетворяет *структурному уравнению*:

$$d\theta = \frac{1}{2}\theta \wedge \theta$$

(внешнее произведение двух дифференциальных 1-форм α, β со значениями в $\mathfrak{g}$ определяется обычной формулой, только умножение числовых значений заменяется на умножение в $\mathfrak{g}$: $(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) = [\alpha(\xi), \beta(\eta)] - [\alpha(\eta), \beta(\xi)]$).

Доказательство.
Воспользуемся общей формулой: если ω – 1-форма на многообразии X, то $d\omega$ – 2-форма и

$$d\omega(v_1, v_2) = \partial_{v_1}\omega(v_2) - \partial_{v_2}\omega(v_1) + \omega([v_1, v_2])$$

Применим эту формулу к форме Маурера-Картана (в качестве v_1 и v_2 выберем правоинвариантные поля ξ_* и η_*):

$$d\theta(\xi_*, \eta_*) = \underbrace{\partial_{\xi_*}\underbrace{\theta(\eta_*)}_{=\eta}}_{=0} - \underbrace{\partial_{\eta_*}\underbrace{\theta(\xi_*)}_{=\xi}}_{=0} + \theta([\xi_*, \eta_*]) = \theta([\xi, \eta]_*) = [\xi, \eta] = [\theta(\xi_*), \theta(\eta_*)]$$

То, что форма Маурера-Картана удовлетворяет структурному уравнению, вытекает из следующего равенства:

$$(\theta \wedge \theta)(v_1, v_2) = [\theta(v_1), \theta(v_2)] - [\theta(v_2), \theta(v_1)] = 2[\theta(v_1), \theta(v_2)]$$

■

Вычисление дифференциала экспоненциального отображения в произвольной точке.

Определение. *Экспоненциальное отображение* $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ определяется следующим образом: $\exp(\xi) = g(1)$, где $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа, соответствующая полю ξ_*.

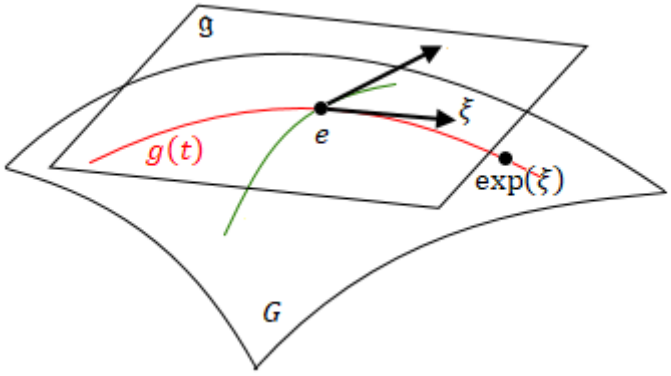

Рис. 4.2. Экспоненциальное отображение

Отметим, что без ограничения общности можно считать группу Ли G связной. Как было отмечено на лекциях (см. лекцию 4), $d_0 \exp = id_{\mathfrak{g}}$, откуда следует, что exp – локальный

диффеоморфизм в 0. Посмотрим, как устроено экспоненциальное отображение в окрестности других точек $\mathfrak{g}$.

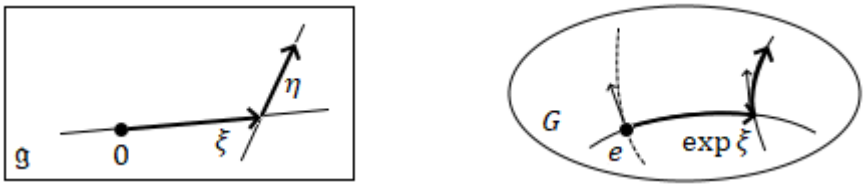

Рис. 4.3. К вычислению $d_\xi \exp(\eta)$

Пусть $\xi \in \mathfrak{g}$. Прямая, содержащая ξ, переходит в однопараметрическую подгруппу. Пусть η – касательный вектор к $\mathfrak{g}$ в точке ξ. Рассмотрим прямую $\xi + \eta s$, на которой лежит вектор η – ее образ будет $\exp(\xi + \eta s)$. Нам нужно вычислить

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(\xi + \eta s) = d_\xi \exp(\eta)$$

Сдвинем этот вектор правым сдвигом обратно в e. Сдвинем эту кривую на вот эту точку ($\exp(\xi)$), точнее обратную к этой точке: рассмотрим кривую $g(s) = \exp(\xi + \eta s)\exp(-\xi)$ и у этой кривой будем считать касательный вектор в e при $s = 0$. Найдем $\dot{g}(0)$ и сдвинем его обратно на $\exp(\xi)$, т.е. $d_\xi \exp(\eta) = \dot{g}(0)\exp(\xi)$.

Удобно ввести еще один параметр на кривой $g(s)$ и рассмотреть двупараметрическую поверхность $g(t,s) = \exp t(\xi + \eta s)\exp(-t\xi)$. Заметим, что $g(0,s) = g(t,0) = e$. Обозначим

$$\eta(t) = \left.\frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} \in \mathfrak{g}$$

Имеем: $\eta(0) = 0$. Нас интересует $\eta(1)$. Попробуем восстановить кривую $\eta(t)$:
Можно считать, что $g(t,s)$ лежит в достаточно малой окрестности e. В локальных координататах:

$$\dot{\eta}(t) = \left.\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \frac{\partial g(t,s)}{\partial t}$$

Имеем:

$$\frac{\partial g(t,s)}{\partial t} = (\xi + \eta s)\exp t(\xi + \eta s)\exp(-t\xi) + \exp t(\xi + \eta s)\exp(-t\xi)\,(-\xi) =$$

$$= (\xi + \eta s)g(t,s) - g(t,s)\xi$$

Тогда

$$\dot{\eta}(t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \big((\xi + \eta s)g(t,s) - g(t,s)\,\xi\big) =$$

$$= \eta \underbrace{g(t,0)}_{=e} + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left(\xi \underbrace{g(t,s)}_{=y(s)}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left(\underbrace{g(t,s)}_{=y(s)}\xi\right)$$

Воспользуемся тем, что ξ – касательный вектор: $\xi = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=0} x(u)$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}(\xi y(s) - y(s)\xi) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial u}\Big|_{s=u=0}\big(x(u)y(s) - y(s)x(u)\big) = [\xi, \eta(t)]$$

Итак, мы получили следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\eta}(t) = \eta + [\xi, \eta(t)]$$
$$\eta(0) = 0$$

Рассмотрим $[\xi, \cdot\,] = ad(\xi)$ – присоединенный оператор на $\mathfrak{g}$. Это дифференциальное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\dot{\eta}(t) = ad(\xi)\eta(t) + \eta$$

Его решение дает следующая задача:

Задача 1 (предлагается в качестве д/з на следующий семинар). Пусть $x(t) \in \mathbb{K}^n$ – вектор-функция вещественного параметра t, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\dot{x}(t) = A(t) + y$, где $y \in \mathbb{K}^n$ и A – линейный оператор на $\mathbb{K}^n$, с начальным условием $x(0) = 0$. Доказать:

$$x(t) = \frac{\exp(tA) - E}{A}(y), \quad \text{где} \quad \frac{\exp(tA) - E}{A} = tE + \frac{t^2}{2!}A + \frac{t^3}{3!}A^2 + \cdots$$

Используя задачу 1, можно решить приведенное выше дифференциальное уравнение и найти $\eta(1)$, а затем найти $d_\xi \exp(\eta)$ по формуле $d_\xi \exp(\eta) = \eta(1)\exp(\xi)$. Результат отражен в следующей задаче (формула Хелгасона):

Задача 2 (предлагается в качестве д/з на следующий семинар). Вывести формулу для дифференциала экспоненциального отображения $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ в произвольной точке:

$$d_\xi \exp(\eta) = \frac{\exp ad(\xi) - E}{ad(\xi)}(\eta)\exp(\xi), \qquad \forall\, \xi, \eta \in \mathfrak{g}$$

Семинар 5. Глобальные свойства экспоненциального отображения для $GL_n(\mathbb{C})$ и $SL_2(\mathbb{R})$.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 3. Доказать, что экспоненциальное отображение вырождено в точке $\xi \in \mathfrak{g}$ только и только тогда, когда оператор $ad(\xi)$ имеет собственное значение вида $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Доказательство.
Воспользуемся задачей 2 из конца прошлого семинара:

$$d_\xi \exp(\eta) = \frac{\exp ad(\xi) - E}{ad(\xi)}(\eta)\exp(\xi), \qquad \forall\, \xi, \eta \in \mathfrak{g}$$

Осталось понять, имеет ли оператор

$$B = \frac{\exp A - E}{A} = tE + \frac{t^2}{2!}A + \frac{t^3}{3!}A^2 + \cdots$$

где $A = ad(\xi)$, собственное значение 0?

Можно считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и оператор $ad(\xi)$ записан в жордановой нормальной форме – тогда достаточно рассмотреть случай, когда A – жорданова клетка.

Если $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $B = \begin{pmatrix} \frac{e^\lambda - E}{\lambda} & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \frac{e^\lambda - E}{\lambda} & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{e^\lambda - E}{\lambda} \end{pmatrix}$ – этот оператор имеет собственное значение 0 тогда и только тогда, когда $\frac{e^\lambda - E}{\lambda} = 0$, т.е. при $\lambda = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. ■

Задача 4. Пусть $g(t)$ - гладкая кривая на группе Ли G с $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = \xi$. Доказать, что

$$\exp(\xi) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство.
Так как дифференциал экспоненциального отображения в нуле – это тождественное отображение, то $g(t) = \exp \xi(t)$, где $\xi(t)$ – некоторая кривая в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям $\xi(0) = 0$ и $\dot{\xi}(0) = \xi$. Имеем:

$$g(t) = \exp \xi(t) = \exp\big(t\xi + o(t)\big)$$

Тогда

$$g\left(\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\right) = \exp\left(\left(\frac{1}{n}\xi + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot n\right) = \exp\big(\xi + o(1)\big) \xrightarrow[\text{при } n\to\infty]{} \exp \xi$$

■

Глобальные свойства экспоненциального отображения для конкретных групп Ли.

Поймем, обладает ли экспоненциальное отображение следующими свойствами:

- инъективность
- сюръективность
- локальная диффеоморфность

1. $G = GL_n(\mathbb{C})$

$$\exp\colon\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

- не инъективно

Например, для $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\xi = \begin{pmatrix} 2\pi ik & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\pi ik \end{pmatrix} \Longrightarrow \exp \xi = \begin{pmatrix} e^{2\pi ik} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{2\pi ik} \end{pmatrix} = E$$

- сюръективно

Для сюръективности необходимо и достаточно получить в образе exp любую жорданову

клетку $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$:

$$\exp\begin{pmatrix} \mu & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\mu & e^\mu & \frac{e^\mu}{2!} & \ddots & \ddots \\ 0 & e^\mu & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{e^\mu}{2!} \\ \ddots & \ddots & \ddots & e^\mu & e^\mu \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & e^\mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^\mu & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & e^\mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & e^\mu \end{pmatrix}$$

- получившаяся матрица подобна жордановой клетке с собственным значением e^μ. Выбирая μ так, чтобы $e^\mu = \lambda$, получим, что в образе exp лежит произвольная жорданова клетка, а значит, и произвольная матрица из $GL_n(\mathbb{C})$.

- локально не диффеоморфно

Воспользуемся задачей 3, разобранной в начале семинара: экспоненциальное отображение вырождено в точке $\xi \in \mathfrak{g}$ только и только тогда, когда оператор $ad(\xi)$ имеет собственное значение вида $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Для простоты в качестве ξ рассмотрим диагональную матрицу:

$$\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Поймем, как действует оператор $ad(\xi) = [\xi, \cdot\,]$ на пространстве $Mat_n(\mathbb{C})$: пусть $\eta \in Mat_n(\mathbb{C})$, тогда:

$$\eta \mapsto \xi\eta - \eta\xi,$$
$$\eta_{ij} \mapsto \eta_{ij}(\lambda_i - \lambda_j),$$

откуда следует, что оператор $ad(\xi)$ имеет собственные значения $\lambda_i - \lambda_j$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Тогда, если $\lambda_i - \lambda_j = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то локальная диффеоморфность отсутствует.

2. $G = SL_2(\mathbb{R})$

$$\exp\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

- не сюръективно

Пусть $\xi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Ее собственные значения противоположны и комплексно сопряжены, т.е. могут иметь место следующие три варианта: $\{\lambda, -\lambda\}$, $\{0, 0\}$, $\{i\lambda, -i\lambda\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что

$$\xi \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\exp(t\xi) \sim \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-t\lambda} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos t\lambda & -\sin t\lambda \\ \sin t\lambda & \cos t\lambda \end{pmatrix}$$

Заметим, что в первом случае $tr \geq 2$, во втором $tr = 2$, а в третьем $-2 \leq tr \leq 2$. Так как, например, для матрицы $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$ при $a > 1$ выполнено $tr\, g < -2$, то $g \notin Im(\exp)$, следовательно, отображение exp не сюръективно.

- топология exp на $SL_2(\mathbb{R})$

$\det \xi = -x^2 - yz$ – квадратичная форма на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ сигнатуры (1,2).

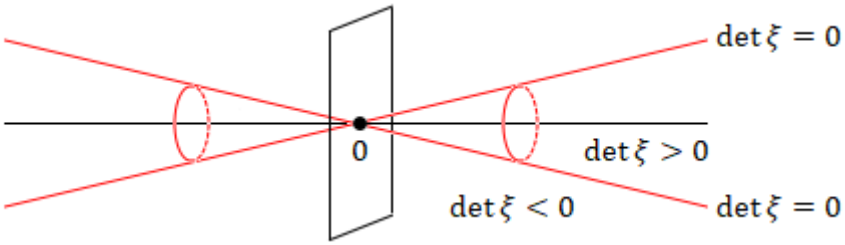

Рис. 5.1. $\det\xi = -x^2 - yz$ – квадратичная форма на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

Поймем, где отображение exp вырождено – для этого снова воспользуемся задачей 3, разобранной в начале семинара. Собственные значения $ad(\xi)$:

$$ad(\xi) = \{2\lambda, 0, -2\lambda\} \text{ или } \{0, 0, 0\} \text{ или } \{2\lambda i, 0, -2\lambda i\}$$

Отсюда следует, что exp вырождено $\Leftrightarrow \xi \sim \begin{pmatrix} 0 & -\pi k \\ \pi k & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $\det\xi = (\pi k)^2, k \neq 0$. Получаем семейство двуполостных гиперболоидов:

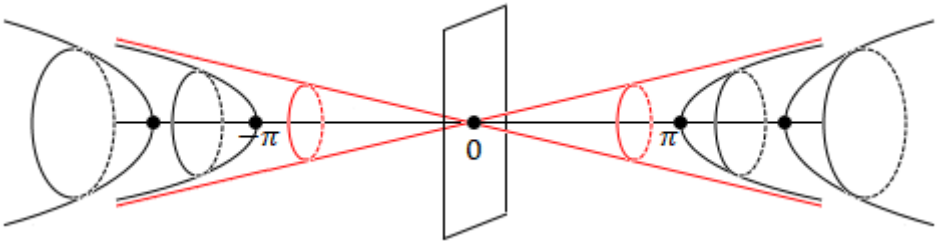

Рис. 5.2. Семейство двуполостных гиперболоидов $\det\xi = (\pi k)^2, k \neq 0$

Отметим, что на связных компонентах $\{\det\xi \neq (\pi k)^2, k \neq 0\}$ отображение exp инъективно.

- топология $SL_2(\mathbb{R})$

Из курса линейной алгебры хорошо известно полярное разложение: $SL_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \times P$, где $P = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, d > 0, ad - b^2 = 1\right\}$ – положительно определенные симметрические матрицы с определителем, равным 1. С точки зрения топологии: $P \approx \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$, а $SO_2(\mathbb{R}) \approx S^1$. Таким образом:

$$SL_2(\mathbb{R}) \approx S^1 \times \mathbb{R}^2$$

Закончим обсуждение топологии $SL_2(\mathbb{R})$ на следующем семинаре.

Семинар 6. Структура экспоненциального отображения и однопараметрических подгрупп для $SL_2(\mathbb{R})$. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 2b. Доказать, что экспоненциальное отображение диффеоморфно отображает пространство $\mathfrak{p}_n$ вещественных симметрических матриц размера $n \times n$ на открытое подмножество положительно определенных матриц $P_n \subset \mathfrak{p}_n$.

Доказательство.
Экспоненциальное отображение:

- локально диффеоморфно

Всякую матрицу $\xi \in \mathfrak{p}_n$ в подходящем ортонормированном базисе можно записать в виде $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, тогда $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ – положительно определенная симметрическая матрица.

Воспользуемся задачей 3, разобранной на прошлом семинаре: экспоненциальное отображение вырождено в точке $\xi \in \mathfrak{g}$ только и только тогда, когда оператор $ad(\xi)$ имеет собственное значение вида $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Как мы выяснили на прошлом семинаре, $ad(\xi)$ имеет собственные значения (с учетом кратности) $\lambda_i - \lambda_j \quad (i, j = 1, \dots, n)$ – в нашем случае все собственные значения действительны, поэтому локально exp является диффеоморфизмом.

- сюръективно

Если $g \in P_n$, то $g \sim \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$, где $\mu_i > 0$. Выбирая $\mu_i = e^{\lambda_i}$, получим, что в образе exp лежит произвольная матрица из P_n.

- инъективно

Пусть V – евклидово пространство, на котором действует оператор ξ. Имеем:

$$V = V_{\lambda_1}(\xi) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}(\xi),$$

где $V_{\lambda_i}(\xi)$ – собственные подпространства оператора ξ.

На каждом из этих собственных подпространств $g = \exp(\xi)$ действует как оператор умножения на e^{λ_i} соответственно, причем все e^{λ_i} попарно различны (так как λ_i попарно различны). Отсюда следует, что $V_{\lambda_i}(\xi) = V_{e^{\lambda_i}}(g)$, т.е. мы можем однозначно восстановить оператор ξ по оператору g. ■

Структура экспоненциального отображения и однопараметрических подгрупп для $SL_2(\mathbb{R})$

Продолжим обсуждение свойств отображения exp: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$, которое мы начали на прошлом семинаре.

- топология $SL_2(\mathbb{R})$

Из курса линейной алгебры хорошо известно полярное разложение: $SL_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \times P$, где $P = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, d > 0, ad - b^2 = 1\right\}$ – положительно определенные симметрические матрицы с определителем, равным 1. С точки зрения топологии: $P \approx \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$, а $SO_2(\mathbb{R}) \approx S^1$. Таким образом:

$$SL_2(\mathbb{R}) \approx S^1 \times \mathbb{R}^2$$

- цилиндр, изображенный на рис. (развертка):

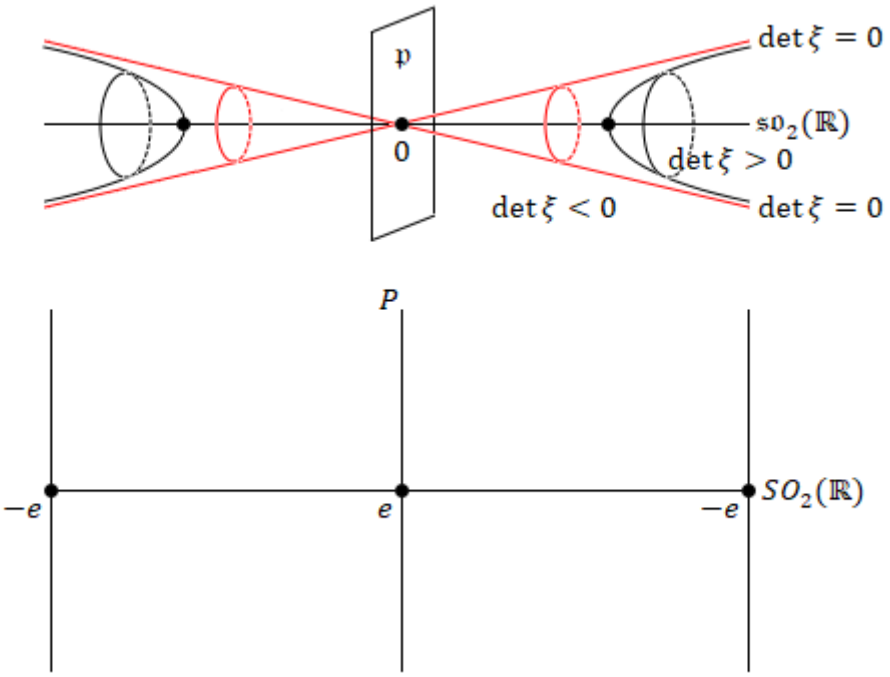

Рис. 6.1. $SL_2(\mathbb{R}) \approx S^1 \times \mathbb{R}^2$

- структура экспоненциального отображения для $SL_2(\mathbb{R})$

Используем утверждение задачи 2b, разобранной в начале семинара: exp: $\mathfrak{p}_n \rightarrow P_n$, также используем то, что exp: $\mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \rightarrow SO_2(\mathbb{R})$ – накрытие.

Посмотрим, что происходит со следом матрицы при умножении матриц из $SO_2(\mathbb{R})$ и P:

$$\begin{pmatrix} \cos t\lambda & -\sin t\lambda \\ \sin t\lambda & \cos t\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t\lambda - b\sin t\lambda & b\cos t\lambda - d\sin t\lambda \\ a\sin t\lambda + b\cos t\lambda & b\sin t\lambda + d\cos t\lambda \end{pmatrix}$$

- след получившейся матрицы равен $(a+d)\cos t\lambda$, т.е. при перемножении матриц из $SO_2(\mathbb{R})$ и P след матрицы из P (равный $a+d$) умножается на $\cos t\lambda$. Получаем следующую картину:

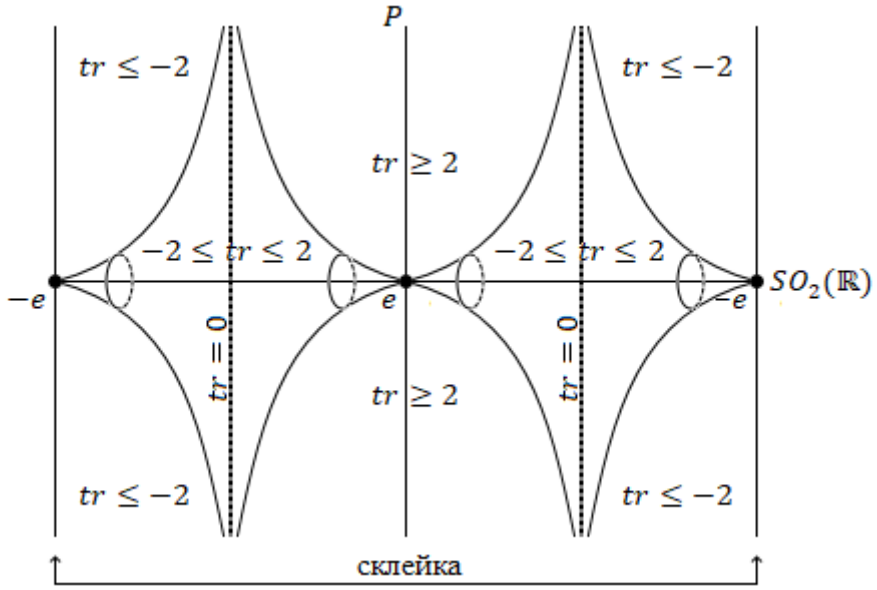

Рис. 6.2. След матриц из $SL_2(\mathbb{R})$

- структура однопараметрических подгрупп для $SL_2(\mathbb{R})$

Экспоненциальные однопараметрические подгруппы, соответствующие матрицам, подобным $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, будут заметать область, где $tr \geq 2$.

Экспоненциальные однопараметрические подгруппы, соответствующие матрицам, подобным $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, будут заметать область, где $tr = 2$.

Экспоненциальные однопараметрические подгруппы, соответствующие матрицам, подобным $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, будут заметать область, где $-2 \leq tr \leq 2$ (граница где $tr = -2$ не заметается, если матрица не равна $-e$).

Заштрихованные области лежат вне области экспоненциального отображения.

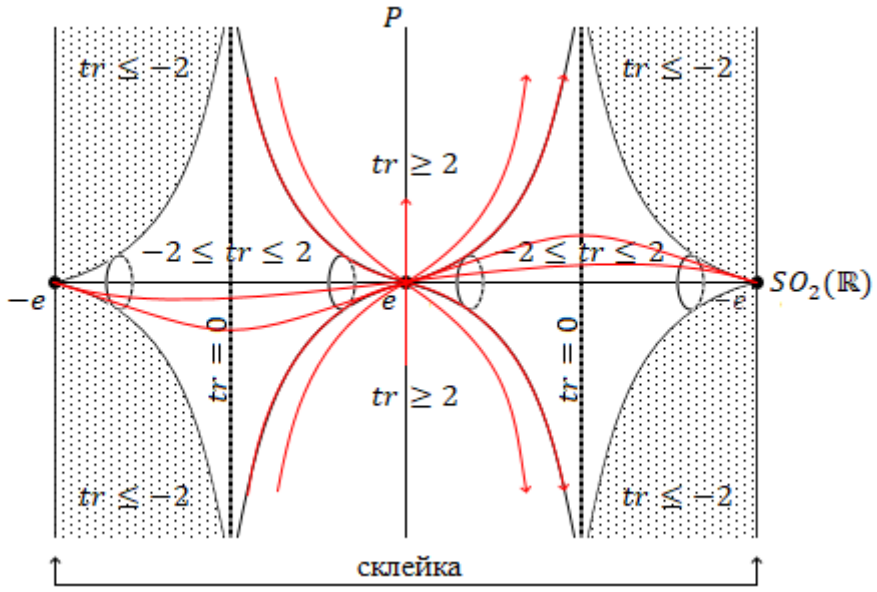

Рис. 6.3. Структура однопараметрических групп из $SL_2(\mathbb{R})$

Теорема Картана.

Как мы отмечали еще в начале нашего курса, подгруппа Ли всегда замкнута в объемлющей группе Ли. Замечательно, что (для вещественного случая) верно и обратное – всякая замкнутая подгруппа в группе Ли является подгруппой Ли.

Теорема Картана. Пусть G – вещественная группа Ли, $H \subset G$ – замкнутая подгруппа. Тогда H – вещественная подгруппа Ли.

Замечание. Для комплексных групп Ли и комплексных подгрупп Ли теорема неверна: в качестве контрпримера можно рассмотреть $G = \mathbb{C}^\times$, $G = \mathbb{T}^1$.

Доказательство.
Для того, чтобы доказать, что H – подгруппа Ли, попробуем построить ее алгебру Ли $\mathfrak{h}$ (которая является подалгеброй в $\mathfrak{g}$). Для этого построим следующую конструкцию: рассмотрим последовательность $h_n \in H$, такую что $h_n \longrightarrow e$ при $n \longrightarrow \infty$, тогда $h_n = \exp(\xi_n)$ при $n \gg 0$, где ξ_n – последовательность в $\mathfrak{g}$, такая что $\xi_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Векторы ξ, такие что $c_n\xi_n \longrightarrow \xi$ при $n \longrightarrow \infty$, и составляют алгебру Ли $\mathfrak{h}$ (если бы мы знали, что H – подгруппа Ли).

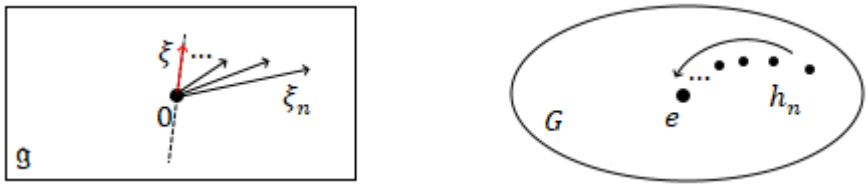

Рис. 6.4. К доказательству теоремы Картана

Из условия нам известно лишь, что H – замкнутая подгруппа. Положим

$$\mathfrak{h} = \left\{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi = \lim_{n\to\infty} c_n\xi_n,\ \ \exp(\xi_n) = h_n \in H,\ \ \lim_{n\to\infty} h_n = e\right\}$$

Тогда:

1) $\exp \mathfrak{h} \subseteq H$.

В самом деле, пусть $k_n = [c_n]$, тогда $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} k_n\xi_n$ и $\exp \xi = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{h_n{}^{k_n}}_{\in H} \in H$.

2) $\mathfrak{h}$ замкнуто относительно умножения на скаляры.

В самом деле, $c^{\xi} = \lim\limits_{n\to\infty} cc_n\xi_n$.

3) $\mathfrak{h}$ замкнуто относительно сложения.

Доказательство этого свойства оставляется читателю в качестве упражнения (см. следующий семинар).

Следовательно, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ – подпространство. Осталось доказать следующее свойство:

4) Существует окрестность $\underbrace{U_0}_{\ni 0} \subset \mathfrak{g}$ и окрестность $\underbrace{U}_{\ni e} \subset G$, такие что U_0 диффеоморфно отображается на U, и $U \cap H$ является диффеоморфным образом $U_0 \cap \mathfrak{h}$. В качестве такого диффеоморфизма удобно взять не exp, а его модификацию φ:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s} \xrightarrow{\varphi} G$$
$$\xi = \xi' + \xi'' \mapsto \varphi(\xi) = \exp(\xi')\exp(\xi'')$$

Отсюда будет следовать, что $\mathfrak{h}$ – подгруппа Ли. Доказательство свойства 4 мы проведем на следующем семинаре.

Семинар 7. Завершение доказательства теоремы Картана. Разложение присоединённого представления группы Ли GL_n на неприводимые слагаемые.

Завершение доказательство теоремы Картана.

3) $\mathfrak{h}$ замкнуто относительно сложения.

Доказательство.
Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{h}$ – докажем, что $\xi + \eta \in \mathfrak{h}$. Имеем (см. пункты 1,2): $\exp(t\xi), \exp(t\eta) \in H$, тогда и $h(t) = \exp(t\xi)\exp(t\eta) \in H$. Рассмотрим последовательность $\exp\left(\frac{\xi}{n}\right)\exp\left(\frac{\eta}{n}\right)$, тогда $n\exp^{-1}\left(\exp\left(\frac{\xi}{n}\right)\exp\left(\frac{\eta}{n}\right)\right) \longrightarrow \xi + \eta$ при $n \longrightarrow \infty$. Имеем:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(t) = \xi + \eta$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\exp^{-1} h(t) = \xi + \eta \in \mathfrak{h}$$

4) Существует окрестности $\underbrace{U_0}_{\ni 0} \subset \mathfrak{g}$ и $\underbrace{U}_{\ni e} \subset G$, такие что

$$\varphi\colon\ U_0 \rightrightarrows U$$
$$\varphi(U_0 \cap \mathfrak{h}) = U \cap H,$$

где

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s} \xrightarrow{\varphi} G$$
$$\xi = \xi' + \xi'' \mapsto \varphi(\xi) = \exp(\xi')\exp(\xi'').$$

Доказательство.

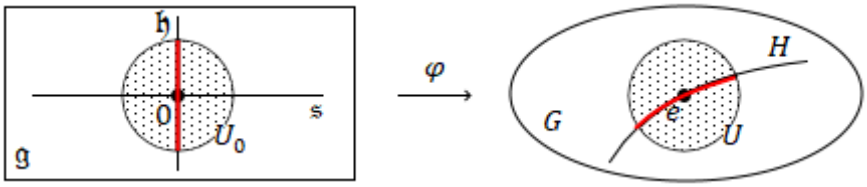

Рис. 7.1. К доказательству теоремы Картана

Включение $\varphi(U_0 \cap \mathfrak{h}) \subset U \cap H$ почти очевидно – оно следует из конструкции окрестностей U_0 и U и того, что $\exp \mathfrak{h} \subset H$.

Включение $\varphi(U_0 \cap \mathfrak{h}) \supset U \cap H$ докажем от противного: иначе существует последовательность $h_n \in H$, $h_n \longrightarrow e$, такая что $h_n = \varphi(\xi_n)$ и $\xi_n \notin \mathfrak{h}$. Воспользуемся тем, что $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, $h_n = \exp(\xi_n')\exp(\xi_n'')$ - так как $\exp(\xi_n') \in H$ и $h_n \in H$, то и $\exp(\xi_n'') \in H$. Получили последовательность $\xi_n'' \in \mathfrak{s}$, $\xi_n'' \longrightarrow 0$, $\exp(\xi_n'') \in H$. За счет перехода к подпоследовательности можно добиться того, чтобы последовательность $c_n\xi_n''$ имела конечный ненулевой предел ξ'', откуда следует, что $\xi'' \in \mathfrak{h}$. С другой стороны. $\xi'' \in \mathfrak{s}$, т.е. $\xi'' \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = 0$ – противоречие. ■

Разбор задач домашнего задания.

Задача 3. Доказать, что всякий непрерывный гомоморфизм групп Ли дифференцируем.

Доказательство.
Воспользуемся следующей коммутативной диаграммой (коммутативность которой сразу вытекает из того, что φ – гомоморфизм):

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "l_g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \arrow[d, "l_{\varphi(g)}"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

Поэтому достаточно доказать дифференцируемость гомоморфизма φ в e. Выберем базис $\xi_1, \dots, \xi_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и рассмотрим отображение

$$\psi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$$
$$\xi = t_1\xi_1 + \dots + t_n\xi_n \mapsto \exp(t_1\xi_1)\cdots\exp(t_n\xi_n)$$

- локальный диффеоморфизм. Тогда

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$
$$\exp(t_1\xi_1)\cdots\exp(t_n\xi_n) \mapsto \exp(t_1\eta_1)\cdots\exp(t_n\eta_n)$$

где $\eta_i \in \mathfrak{h}$. Параметры $t_1, \dots, t_n$ можно считать координатными функциями на G в окрестности e. Образ точки из G кординатами $t_1, \dots, t_n$ будет точкой $\exp(t_1\eta_1)\cdots\exp(t_n\eta_n)$ в H, которая дифференцируемо зависит от $t_1, \dots, t_n$. ■

Гомоморфизмы и линейные представления групп Ли.

Задача. Разложить присоединенное представление группы Ли $GL_n(\mathbb{K})$

$$Ad\colon GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}))$$
$$Ad(g)\xi = g\xi g^{-1}$$

на неприводимые слагаемые.

Решение.
Для того, чтобы разложить это представление на неприводимые слагаемые, нужно найти инвариантные подпространства в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ относительно действия сопряжениями группы $GL_n(\mathbb{K})$. Воспользуемся следующей идеей: часто бывает, что инвариантные подпространства проще искать не относительно представления группы Ли, а относительно представления алгебры Ли.

Имеем: $d(Ad) = ad$, $ad(\eta)\xi = [\eta, \xi] = \eta\xi - \xi\eta$ и $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \underset{ad}{\curvearrowright} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ – найдем инвариантные пространства для этого действия. Некоторые из них можно угадать сразу: например, пространство скалярных матриц $\mathbb{K}E$ или пространство матриц с нулевым следом $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Нам повезло – имеет место разложение $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}E \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, осталось понять, содержат ли $\mathbb{K}E$ и $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ собственные инвариантные подпространства. Очевидно, что $\mathbb{K}E$ не может содержать меньшие инвариантные подпространства (так как оно одномерно), осталось проверить $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

Воспользуемся следующей идеей: если мы будем применять к произвольной ненулевой матрице $\xi \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ операторы $ad(\eta)$ и получим $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, то собственных подпространств нет, а если получим меньшее множество, то его линейная оболочка будет инвариантным подпространством. В качестве η достаточно рассматривать базисные векторы (в силу линейности ad), т.е. матричные единицы. Имеем:

$$ad(E_{ij})\xi = [E_{ij}, \xi] = E_{ij}\xi - \xi E_{ij} = \begin{pmatrix} & & -\xi_{1i} & & \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ \xi_{j1} & \cdots & \xi_{jj} - \xi_{ii} & \cdots & \xi_{jn} \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ & & -\xi_{ni} & & \end{pmatrix}$$

Так как $\xi \neq 0$, то $\exists \xi_{ij} \neq 0$. Если $i \neq j$ (т.е. рассматриваемый ненулевой элемент находится не на диагонали), то у матрицы $\xi' = [E_{ji}, \xi]$ он будет стоять уже на диагонали, т.е. $\xi'_{ii} \neq 0$. Тогда $\xi'' = [E_{ji}, \xi'] = -2\xi_{ij}E_{ji}$, т.е. применяя дважды коммутирование с E_{ji} к произвольной матрице из $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, мы получаем матричную единицу E_{ji}.

Если мы рассмотрим ее коммутатор с E_{kj}, то получим $[E_{kj}, E_{ji}] = E_{ki}$ $(k \neq i)$, т.е. мы получим матричные единицы, первый индекс которых пробегает все возможные значения (не равные i, при фиксированном втором индексе i). Воспользовавшись равенством $[E_{im}, E_{ki}] = -[E_{ki}, E_{im}] = -E_{km}$ $(m \neq k)$, мы получим матричные единицы, второй индекс которых пробегает все возможные значения (не равные j, при фиксированном первом индексе j). Таким образом, мы из произвольной матрицы можем

получить любую матричную единицу, не лежащую на диагонали. Диагональные матричные единицы получаются при помощи равенства $[E_{km}, E_{mk}] = E_{kk} - E_{mm}$.

Таким образом, действуя присоединенными операторами, из произвольной ненулевой матрицы из $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ мы можем получить все пространство $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, т.е. разложение $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}E \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ и есть разложение присоединеннного представления на неприводимые слагаемые. ■

Задача. Пусть G – связная компактная комплексная группа Ли. Доказать, что G коммутативна.

Доказательство.
Рассмотрим присоединенное представление $Ad\colon\ G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$. Так как G компактна, то и ее образ $Ad(G)$ будет компактной подгруппой в $GL(\mathfrak{g})$. Как известно, существует $Ad(G)$-инвариантное эрмитово скалярное умножение $(\cdot\,|\,\cdot)$ на $\mathfrak{g}$, другими словами, $Ad(G) \subset U(\mathfrak{g})$, где $U(\mathfrak{g})$ – группа унитарных операторов на эрмитовом пространстве $\mathfrak{g}$. Тогда $ad(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{u}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ – группа косоэрмитовых операторов на $\mathfrak{g}$. Но косоэрмитовы операторы диагонализуемы с чисто мнимыми собственными значениями, следовательно, $ad(\mathfrak{g}) = 0$ (так как это алгебра Ли над $\mathbb{C}$, а умножение оператора с чисто мнимыми собственными значениями на i даст оператор с вещественными собственными значениями), откуда следует, что $\mathfrak{g}$ коммутативна, тогда (в силу связности) и G коммутативна. ■

Семинар 8. Плотная обмотка тора. Двулистное накрытие $SU_2(\mathbb{C}) \cong U_1(\mathbb{H}) \longrightarrow SO(\mathbb{H}_{im}) \cong SO_3(\mathbb{R})$.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 3. Описать все одномерные комплексные линейные представления следующих вещественных и комплексных групп Ли:
(a) $\mathbb{R}$;
(b) $\mathbb{C}$;
(c) $\mathbb{C}^\times$;
(d) $\mathbb{T}$.

Решение.
(b) Пусть $\mathcal{R}$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ - искомое представление. Тогда $d\mathcal{R}$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, откуда следует, что $d\mathcal{R}(\xi) = \mu\xi$ (так как $d\mathcal{R}$ – линейное отображение, а $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство). Теперь воспользуемся хорошо знакомой нам коммутативной диаграммой (восстановим отображение по его дифференциалу):

$$\begin{tikzcd}
t\xi \in \mathbb{C} \arrow[r, "\mathcal{R}"] & \mathbb{C}^\times \ni e^{t\mu\xi} \\
\xi \in \mathbb{C} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\mathcal{R}"] & \mathbb{C} \ni \mu\xi \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Таким образом, все одномерные комплексные линейные представления группы Ли $\mathbb{C}$ имеют вид $\mathcal{R}(z) = e^{\mu z}$, $\mu \in \mathbb{C}$.

(c) Пусть $\mathcal{R}$: $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ - искомое представление. Рассуждая точно так же, как и в пункте (b), получаем, что все одномерные комплексные линейные представления группы Ли $\mathbb{C}$ имеют вид $\mathcal{R}(z) = e^{\mu z}$, $\mu \in \mathbb{Z}$. ■

Плотная обмотка тора.

В курсе лекций (см. лекция 5, теорема 2) мы обсуждали, что $Ker\,\varphi$, где φ: $G \longrightarrow H$ – гомоморфизм групп Ли, всегда является подгруппой Ли, а $Im\,\varphi$ – подгруппа Ли только в том случае, если G компактна. В качестве иллюстрации того, что $Im\,\varphi$ может не быть подгруппой Ли, предлагалось рассмотреть следующий пример:

Задача. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу на двумерном торе: $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2$, $\varphi(t) = \left(e^{2\pi i\alpha t}, e^{2\pi i\beta t}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Доказать, что $Im\,\varphi$ плотен в $\mathbb{T}^2$ и не является подгруппой Ли тогда и только тогда, когда $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ (плотная обмотка тора).

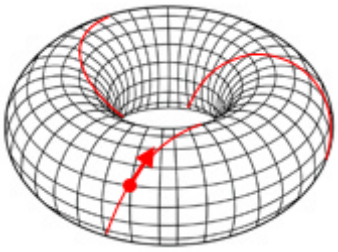

Рис. 8.1. Обмотка тора

Доказательство.

Если $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}$, то $Im\,\varphi \simeq \mathbb{T}$ – подгруппа Ли. В самом деле, рассмотрим развертку тора – кривая $\varphi(t) = \left(e^{2\pi i\alpha t}, e^{2\pi i\beta t}\right)$ перейдет в прямую, которая замкнется (т.е. заметет не весь квадрат, а в какой-то момент перейдет в себя):

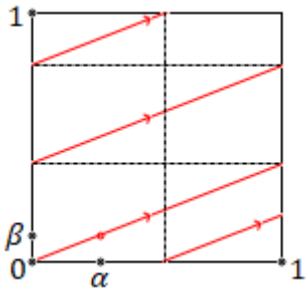

Рис. 8.2. $\varphi(t)$ на развертке тора

Это следует из того, что при $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}$ данная прямая на плоскости обязательно пройдет через точку с целыми координатами, что равносильно возврату в точку $(0,0)$ на развертке.

Если $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, то докажем, что $Im\,\varphi$ плотен в $\mathbb{T}^2$, т.е. что в развертке тора прямая с направляющим вектором (α, β) будет пересекать сколь угодно малую окрестность произвольной точки (a, b):

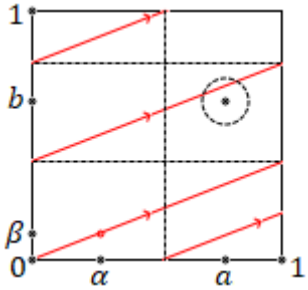

Рис. 8.3. $Im\,\varphi$ плотен в $\mathbb{T}^2$

Точка на прямой $\varphi(t)$ имеет координаты $(\alpha t, \beta t)$ – она будет лежать в сколь угодно малой окрестности произвольной точки (a, b), если для некоторых целых m и n выполнено:

$$\begin{cases} |\alpha t - a - m| < \varepsilon \\ |\beta t - b - n| < \varepsilon \end{cases}$$

Подберем t так, чтобы $\alpha t - a - m = 0$ (т.е. $t = \frac{a+m}{\alpha}$) – осталось добиться выполнения второго неравенства. Имеем: $\left|\frac{\beta}{\alpha}(a+m) - b - n\right| < \varepsilon$. Обозначим $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, тогда это условие можно переписать в виде:

$$|(\gamma a - b) - (\gamma m - n)| < \varepsilon$$

Здесь $c = \gamma a - b$ – фиксированное число. Осталось найти такие целые m и n, что $|(\gamma m - n) - c| < \varepsilon$.

Рассмотрим множество $\Gamma = \{\gamma m - n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ – несложно видеть, что это абелева подгруппа в $\mathbb{R}$ (свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\gamma, 1$): $\Gamma = \langle \gamma, 1 \rangle_{\mathbb{Z}}$. Докажем, что Γ плотна в $\mathbb{R}$:

- 0 – предельная точка для Γ

- в самом деле, иначе пересечение Γ с достаточно маленькой окрестностью нуля было бы конечным множеством, и Γ была бы дискретна, следовательно, Γ была бы решеткой и $rk\,\Gamma \leq 1$ – противоречие.

- в любой окрестности произвольной точки из $\mathbb{R}$ лежит точка из Γ

- так как 0 – предельная точка для Γ, то можно выбрать сколь угодно малый элемент $\delta \in \Gamma$ – складывая его с самим собой нужное число раз, мы останемся в Γ (так как Γ – группа), и попадем в заданную окрестность.

Итак, $Im\,\varphi$ плотен в $\mathbb{T}^2$. Из этого сразу следует, что $Im\,\varphi$ не является подгруппой Ли (т.к. $Im\,\varphi$ не является подмногообразием в $\mathbb{T}^2$: двумерным многообразием он быть не может, так как покрыт счетным числом одномерных многообразий, а одномерным многообразием быть не может, так как одномерное многообразие не может быть всюду плотно в двумерном многообразии). ■

Задача. Рассмотрим группу $U_1(\mathbb{H}) = \{g \in \mathbb{H} \mid g\bar{g} = N(g) = 1\}$. С топологической точки зрения это – трехмерная сфера: если $g = x + iy + ju + kv$, то $N(g) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2$:

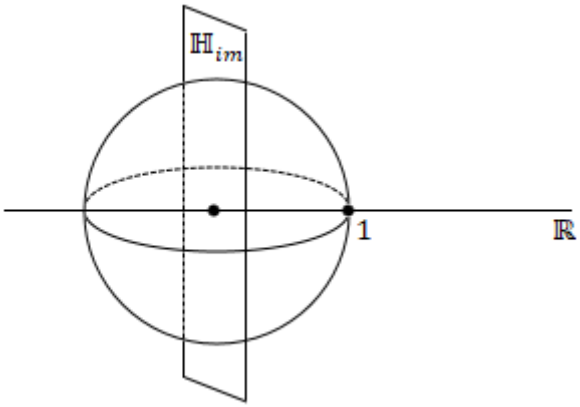

Рис. 8.4. Группа $U_1(\mathbb{H})$

(здесь $\mathbb{H}_{im} = \langle i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$ – пространство чисто мнимых кватернионов). Легко видеть, что $\mathfrak{u}_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}_{im}$. Найти присоединенное представление

$$Ad\colon\ U_1(\mathbb{H}) \longrightarrow GL(\mathbb{H}_{im})$$
$$Ad(g)\xi = g\xi g^{-1}$$

Решение.

Ad – представление трехмерной сферы $U_1(\mathbb{H})$ в трехмерном пространстве $\mathbb{H}_{im}$. Оно обладает следующим свойством: на $\mathbb{H}_{im}$ существует инвариантное скалярное умножение

$$(\xi \mid \xi) = \xi\bar{\xi} = N(\xi)$$

В самом деле:

$$(g\xi g^{-1} \mid g\xi g^{-1}) = g\xi g^{-1} \cdot \bar{g}^{-1}\bar{\xi}\bar{g} = \xi\bar{\xi} = N(\xi)$$

Таким образом, Ad отображает $U_1(\mathbb{H})$ в группу ортогональных преобразований $\mathbb{H}_{im}$, которая изоморфна группе $O_3(\mathbb{R})$:

$$Ad\colon\ U_1(\mathbb{H}) \longrightarrow O(\mathbb{H}_{im}) \simeq O_3(\mathbb{R})$$

Ядро этого гомоморфизма состоит из кватернионов, норма которых равна 1, и которые коммутируют со всеми чисто мнимыми кватернионами, т.е. из ± 1:

$$Ker(Ad) = \{g \in \mathbb{H} \mid g\xi g^{-1} = \xi,\ \ \forall \xi \in \mathbb{H}_{im}\} = \{\pm 1\}$$

Таким образом, $Ker(Ad)$ – нульмерная группа Ли. Так как $\dim U_1(\mathbb{H}) = 3$ и $\dim O(\mathbb{H}_{im}) = 3$, то $d(Ad) = ad$ – изоморфизм, следовательно, Ad – локальный диффеоморфизм, т.е. Ad гомоморфно сюръективно отображает $U_1(\mathbb{H})$ на связную компоненту единицы группы $O(\mathbb{H}_{im})$, т.е. на $SO(\mathbb{H}_{im})$:

$$Ad\colon\ U_1(\mathbb{H}) \longrightarrow SO(\mathbb{H}_{im}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$$

Так как $Ker(Ad) = \{\pm 1\}$, то глобально отображение Ad не будет являться диффеоморфизмом, это – двулистное накрытие.

Таким образом, мы построили двулистное накрытие группы $SO_3(\mathbb{R})$ с помощью группы $U_1(\mathbb{H})$. В нем легко узнать уже знакомый нам гомоморфизм: это двулистное накрытие трехмерного проективного пространства с помощью трехмерной сферы. Также стоит отметить, что $U_1(\mathbb{H}) \simeq SU_2(\mathbb{C})$ – накрытие $SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$ является одним из фундаментальных гомоморфизмов в теории групп Ли, который находит широкое применение в физике (это простейший пример спинорного двулистного накрытия ортогональной группы). ■

Задача. Рассмотрим линейное представление $\mathcal{R}$ группы Ли $U_1(\mathbb{H}) \times U_1(\mathbb{H})$ в пространстве $\mathbb{H}$ по формуле $\mathcal{R}(g_1, g_2)q = g_1 q g_2^{-1}$. Доказать, что гомоморфизм $\mathcal{R}$ – двулистное накрытие группы Ли $SO(\mathbb{H}) \simeq SO_4(\mathbb{R})$, где структура евклидова пространства на $\mathbb{H}$ задается кватернионной нормой.

Семинар 9. Двулистное накрытие $U_2(\mathbb{H}) \longrightarrow SO_5(\mathbb{R})$. Автоморфизмы алгебры Гейзенберга. Многообразие Грассмана.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 2. Группа Ли $U_2(\mathbb{H})$ действует заменами переменных в пространстве эрмитовых полуторалинейных форм на $\mathbb{H}^2$, которое можно отождествить с пространством эрмитовых кватернионных матриц $Herm_2(\mathbb{H})$.
(a) Разложить это линейное представление на неприводимые слагаемые.
(b) Построить с его помощью двулистное накрытие $U_2(\mathbb{H}) \longrightarrow SO_5(\mathbb{R})$.

Решение.
(b) $U_2(\mathbb{H}) \curvearrowright Herm_2(\mathbb{H})$:

$$x \mapsto gxg^{-1} = gxg^*$$

Все матрицы $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $Herm_2(\mathbb{H})$ должны удовлетворять условию $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$, т.е. имеют вид $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$, $a, d \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $Herm_2(\mathbb{H})$ разлагается в прямую сумму:

$$Herm_2(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \cdot \mathrm{E} \oplus Herm_2(\mathbb{H})_0,$$

где $Herm_2(\mathbb{H})_0$ - подпространство матриц с нулевым следом.

Докажем, что группа $U_2(\mathbb{H})$ действует на подпространстве $Herm_2(\mathbb{H})_0$ ортогональными преобразованиями. Для этого введем на $Herm_2(\mathbb{H})_0$ квадратичную форму: пусть $x = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix} \in Herm_2(\mathbb{H})_0$, тогда

$$(x \mid x) = \frac{1}{2} tr(x^2) = a^2 + b\bar{b}$$

Эта квадратичная форма инвариантна относительно сопряжения, она задает на подпространстве $Herm_2(\mathbb{H})_0$ структуру 5-мерного евклидова пространства над $\mathbb{R}$, на котором группа $U_2(\mathbb{H})$ действует ортогональными преобразованиями. Таким образом, имеется линейное представление:

$$\mathcal{R}\colon\ U_2(\mathbb{H}) \longrightarrow O(Herm_2(\mathbb{H})_0) \simeq O_5(\mathbb{R})$$

Найдем его ядро:

$$g \in Ker\,\mathcal{R} \Leftrightarrow \forall x \in Herm_2(\mathbb{H})_0\colon\ gx = xg$$

Можно считать, что $x \in Herm_2(\mathbb{H})$ (так как $Herm_2(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \cdot \mathrm{E} \oplus Herm_2(\mathbb{H})_0$, а матрицы из $\mathbb{R} \cdot \mathrm{E}$ коммутируют со всеми). Имеем:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $b = c = 0$ и $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $a\bar{a} = 1$, $d\bar{d} = 1$. Далее:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $a = d$ и $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $a\bar{a} = 1$. Далее:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ai \\ -ai & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $ai = ia$, аналогично $aj = ja$ и $ak = ka$, следовательно, $a \in \mathbb{R}$. Учитывая, что $a\bar{a} = 1$, получаем, что $a = \pm 1$. Подытожим:

$$Ker\, \mathcal{R} = \{\pm E\}$$

Тогда $\dim Ker(d\mathcal{R}) = 0$, т.е. $d\mathcal{R}$ является инъекцией. Докажем его сюръективность – для этого найдем $\dim U_2(\mathbb{H})$ и $\dim O_5(\mathbb{R})$. Воспользуемся известным фактом: $\dim O_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$, откуда $\dim O_5(\mathbb{R}) = 10$. Далее, $\dim U_2(\mathbb{H}) = \dim \mathfrak{u}_2(\mathbb{H}) = 10$. Итак, $\dim U_2(\mathbb{H}) = \dim O_5(\mathbb{R})$, т.е. $d\mathcal{R}$ - сюръекция.

Таким образом, $\mathcal{R}$ - двулистное накрытие. Так как группа $U_2(\mathbb{H})$ связна, то $Im\, \mathcal{R} = O_5(\mathbb{R})^0 = SO_5(\mathbb{R})$.

(а) Итак, мы построили двулистное накрытие $U_2(\mathbb{H}) \longrightarrow SO_5(\mathbb{R})$. Теперь с его помощью можно ответить на первый вопрос задачи: разложение

$$Herm_2(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \cdot \mathrm{E} \oplus Herm_2(\mathbb{H})_0$$

является искомым, так как исходное представление в $Herm_2(\mathbb{H})_0$ сводится к представлению группы $SO_5(\mathbb{R})$ в $Herm_2(\mathbb{H})_0$, которое, очевидно, является неприводимым (представление ортогональной группы в евклидовом пространстве, на котором эта группа действует, является неприводимым, например, потому, что любой вектор данной длины можно преобразованием из этой группы перевести в любой другой вектор данной длины – на единичной сфере действие этой группы транзитивно, и инвариантных подпространств нет). ■

Задача 5b. Найти группу всех автоморфизмов $Aut(\mathfrak{g})$ и группу внутренних автоморфизмов $Inn(\mathfrak{g})$, а также соответствующие алгебры Ли дифференцирований для следующей алгебры Ли:

(b) $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение.

Восстановим группу Ли G по ее касательной алгебре $\mathfrak{g}$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Начнем с нахождения $Inn(\mathfrak{g})$: пусть $\xi = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, тогда $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$Ad(g)\xi = g\xi g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x & -cx+y+dz \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В базисе $\mathfrak{g}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$Ad(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & a & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$Inn(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \simeq \mathbb{K}^2$$

Теперь найдем $Aut(\mathfrak{g})$. Заметим, что $\mathbb{K}e_3$ является инвариантным подпространством. Также $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = 0$, откуда следует, что $\mathbb{K}e_3 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (т.е. линейная оболочка e_3 является центром алгебры Ли $\mathfrak{g}$). $Aut(\mathfrak{g})$ сохраняет $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, поэтому

$$Aut(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

– осталось выяснить, что может стоять на месте пустых элементов. Вспомним, что $Inn(\mathfrak{g})$ – подгруппа в $Aut(\mathfrak{g})$. Несложно заметить, что любую матрицу $A \in Aut(\mathfrak{g})$ можно представить в виде произведения $A = Ad(g) \cdot A_0$, где $Ad(g) \in Inn(\mathfrak{g})$, а A_0 имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Осталось исследовать матрицы вида A_0. Пусть $A_0 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Aut(\mathfrak{g})$ – подставим образы базисных векторов, стоящие по столбцам этой матрицы, в единственное нетривиальное коммутаторное тождество $[e_1, e_2] = e_3$, получим

$$[ae_1 + ce_2, be_1 + de_2] = (ad - bc)e_3 = \lambda e_3,$$

откуда $\lambda = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Обозначим $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда

$$A_0 = \begin{pmatrix} & A & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \simeq GL_2(\mathbb{K})$$

и

$$Aut(\mathfrak{g}) = GL_2(\mathbb{K}) \ltimes \mathbb{K}^2$$

Нахождение соответствующих алгебр Ли дифференцирований оставляется читателю. ■

Задача. Пусть $\mathcal{R}\colon G \longrightarrow GL(V)$ – линейное представление группы Ли, и $U \subset V$ – подпространство. Доказать, что его *нормализатор*

$$N_G(U) = \{g \in G \mid \mathcal{R}(g)U = U\}$$

- подгруппа Ли.

Доказательство.
Воспользуемся следующей идеей: рассмотрим частный случай $G = GL(V)$, тогда множество $\mathcal{R}(g)U = U$ (обозначим его $GL(V,U)$) состоит из линейных операторов на V, сохраняющих U. В согласованном базисе:

$$GL(V,U) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что $GL(V,U)$ – подгруппа Ли. А $N_G(U)$ – полный прообраз $GL(V,U)$ при гомоморфизме $\mathcal{R}$, следовательно, тоже подгруппа Ли. Ее касательная алгебра:

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(U) = Lie\big(N_G(U)\big) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \rho(\xi)U \subseteq U\},$$

где $\rho = d\mathcal{R}\colon\ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – дифференциал отображения $\mathcal{R}$ (в самом деле, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(U)$ – полный прообраз $\mathfrak{gl}(V)$ при гомоморфизме ρ). ■

Задача. Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – связная подгруппа Ли. Доказать, что $N_G(H)$ – подгруппа Ли и найти $Lie\big(N_G(H)\big)$.

Доказательство.
Воспользуемся предыдущей задачей:

$$N_G(H) = \{g \in G \mid Ad(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\} = N_G(\mathfrak{h})$$

- подгруппа Ли (также воспользовались тем, что $Ad(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \Leftrightarrow i_g(H) = gHg^{-1} = H$). Также из предыдущей задачи следует, что

$$Lie\big(N_G(H)\big) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid ad(\xi)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}\}$$

В качестве упражнения читателю оставляется разбор случая несвязной группы H. ■

Многообразие Грассмана.

Многообразием Грассмана, или грассманианом линейного пространства V размерности n называется многообразие, состоящее из его m-мерных подпространств. Обозначение:

$$Gr_m(\mathbb{K}^n) = \{U \subset V = \mathbb{K}^n \mid \dim U = m\}$$

Поймем, что это действительно дифференцируемое многообразие. В самом деле, каждое подпространство задается своим базисом: $U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Образуем из этих базисных векторов матрицу $n \times m$:

$$\begin{array}{c} \quad v_1 \ \cdots \ v_m \\ m\left\{\begin{pmatrix} \det \neq 0 \\ \hline * \end{pmatrix}\right. \\ n \times m \end{array}$$

Это еще нельзя считать координатами на $Gr_m(\mathbb{K}^n)$ (в силу неоднозначности выбора базиса), добьемся однозначности следующим образом: столбцы этой матрицы линейно независимы, т.е. ее ранг равен m и хотя бы один минор размера $m \times m$ отличен от нуля (без ограничения общности можно считать, что это минор, расположенный в верхнем левом углу). Заменой базиса в U можно добиться того, чтобы этот минор превратился в единичную матрицу:

$$\begin{array}{c} \quad v_1 \ \cdots \ v_m \\ m\left\{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \hline & * & \end{pmatrix}\right. \\ n \times m \end{array}$$

Базис такого вида для всякого подпространства U уже определен однозначно, и можно считать, что матричные элементы, расположенные ниже m-ой строки, являются координатами подпространства U.

Таким образом, мы имеем локальную карту на множестве всех подпространств, для которых выделенный минор отличен от нуля. Другая локальная карта получается для другого выделенного минора, и т.д. – несложно понять, что отображения склейки на пересечении таких карт будут дифференцируемыми. Полученный атлас задает структуру дифференцируемого многообразия на грассманиане. Из приведенных рассуждений сразу вытекает, что $\dim Gr_m(\mathbb{K}^n) = m(n-m)$.

Также несложно понять, что естественное действие группы Ли $GL_n(\mathbb{K}) = GL(V)$ на $Gr_m(\mathbb{K}^n)$ в этих координатах будет дифференцируемым.

Это транзитивное действие, следовательно (см. курс лекций, лекцию прошлой лекции)

$$Gr_m(\mathbb{K}^n) \simeq GL_n(\mathbb{K})/H,$$

где H – стабилизатор $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$, т.е.

$$GL(V,U) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Выбор подгруппы H однозначно задает структуру многообразия на грассманиане: выбираем $S \subset GL_n(\mathbb{K})$ – подмногообразие, трансверсальное к H, так что $S \times H \twoheadrightarrow SH \subset GL_n(\mathbb{K})$. Выберем

$$S = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline * & E \end{array}\right)$$

Упражнение. Доказать, что $Gr_m(\mathbb{K}^n)$ компактен.

Семинар 10. Вторая гомотопическая группа. Точная гомотопическая последовательность расслоения группы Ли над однородным многообразием. Вычисление фундаментальной группы у $GL_n(\mathbb{C})$.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 4b. Доказать, что многообразие Грассмана $Gr_m(\mathbb{K}^n)$ компактно.

Доказательство.
Рассмотрим действие $K \curvearrowright Gr_m(\mathbb{K}^n)$ (если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $K = O_n(\mathbb{R})$, а если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $K = U_n(\mathbb{C})$). Это действие транзитивно (для любых двух m-мерных подпространств в $\mathbb{K}^n$ существует ортогональное (соответственно, унитарное) преобразование, переводящее одно в другое – например, можно выбрать ортонормированный базис в каждом из них, дополнить эти базисы до ортонормированного базиса $\mathbb{K}^n$ и выбрать преобразование, переводящее один ортонормированный базис в другой). Следовательно, орбитное отображение $K \longrightarrow Gr_m(\mathbb{K}^n)$ сюръективно, а так как K компактна, то и $Gr_m(\mathbb{K}^n)$ компактно. ■

Задача 6.
(a) Доказать, что множество $LGr(\mathbb{K}^{2n}) \subset Gr_n(\mathbb{K}^{2n})$ лагранжевых подпространств в симплектическом векторном пространстве $\mathbb{K}^{2n}$ является подмногообразием, и вычислить его размерность.
(b) Будет ли лагранжев грассманиан $LGr(\mathbb{K}^{2n})$ компактным многообразием?

Решение.
(a) Докажем, что действие $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \curvearrowright LGr(\mathbb{K}^{2n})$ транзитивно. Воспользуемся следующим фактом, известным из курса линейной алгебры: если V – симплектическое пространство, $U \subset V$, U – лагранжево подпространство, тогда можно выбрать базис V: $\overbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{базис } U}, e_{n+1}, \dots, e_{2n}}^{\text{базис } V}$ так, что в этом базисе симплектическая форма имеет матрицу

$$\Omega = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \iddots & \cdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & -1 & & & \\ \cdots & \iddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ -1 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right)$$

Таким образом, для любых двух подпространств из $LGr(\mathbb{K}^{2n})$ можно выбрать такой базис – преобразование, переводящее один базис в другой, сохраняет симплектическую форму, т.е. $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \curvearrowright LGr(\mathbb{K}^{2n})$ транзитивно.

Зафиксируем базис V: $\overbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{базис } U}, e_{n+1}, \dots, e_{2n}}^{\text{базис } V}$. Стабилизатор H подпространства U состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, которые одновременно являются симплектическими:

$$H = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \cap Sp_{2n}$$

Итак, $LGr(\mathbb{K}^{2n})$ – однородное многообразие.

Вычислим размерность H – воспользуемся тем, что размерность однородного пространства для действия группы G со стабилизатором в точке h равна разности размерностей G и стабилизатора h, т.е. $\dim LGr(\mathbb{K}^{2n}) = \dim Sp_{2n}(\mathbb{K}) - \dim H$. Для удобства перейдем к алгебрам Ли. Имеем:

$$\mathfrak{h} = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \cap \mathfrak{sp}_{2n}$$

(здесь матрицы вида $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ уже не обладают условием невырожденности).

Ранее (см. семинар 3) мы уже находили вид матриц $\xi \in \mathfrak{sp}_{2n}$:

$$\xi = \left(\begin{array}{c|c} + & + \\ & + \\ \hline + & \\ + & - \end{array}\right)$$

- матрица ξ должна быть кососимметричной относительно побочной диагонали для диагональных блоков и симметричной для антидиагональных блоков.

Для того, чтобы вычислить $\dim \mathfrak{h}$, нужно найти количество независимых матричных элементов для матриц, входящих в $\mathfrak{h}$ – диагональные блоки дают n^2, а антидиагональные $\frac{n(n+1)}{2}$ (учитываем только верхний антидиагональный блок, так как нижний равен нулю, как следует из задания $\mathfrak{h}$). Всего получаем

$$\dim \mathfrak{h} = n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Соответственно, для вычисления $\dim \mathfrak{sp}_{2n}$ нужно к $\dim \mathfrak{h}$ добавить $\frac{n(n+1)}{2}$ (т.е. количество независимых матричных элементов для нижнего антидиагонального блока):

$$\dim \mathfrak{sp}_{2n} = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = 2n^2 + n$$

Тогда

$$\dim LGr(\mathbb{K}^{2n}) = \dim \mathfrak{sp}_{2n} - \dim \mathfrak{h} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Будем действовать по аналогиии с предыдущей задачей – попытаемся найти компактную подгруппу в Sp_{2n}, которая действует на $LGr(\mathbb{K}^{2n})$ транзитивно. Рассмотрим случай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и воспользуемся тем, что $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Как обсуждалось ранее, стандартное эрмитово скалярное умножение на $\mathbb{C}^n$ можно представить в виде суммы евклидовой и симплектической частей:

$$h(z,w) = \sum_j \overline{z_j} w_j = (z,w) + i[z \mid w] = \sum_j x_j u_j + y_j v_j + \sum_j x_j v_j - y_j u_j,$$

где $z_j = x_j + iy_j,\ w_j = u_j + iv_j$. Иными словами, на симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ можно ввести комплексную и евклидову структуру так, что они дадут структуру эрмитова пространства на $\mathbb{R}^{2n}$.

Ранее мы обсуждали (см. семинары 1,2), что пересечение любых двух подгрупп из набора $O_{2n}(\mathbb{R})$, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, $GL_{2n}(\mathbb{C})$ дает $U_n(\mathbb{C})$ – в частности, это означает, что существует вложение $U_n(\mathbb{C})$ в $Sp_{2n}(\mathbb{R})$. Докажем, что $U_n(\mathbb{C})$ действует на $LGr(\mathbb{R}^{2n})$ транзитивно, для этого вычислим размерность орбиты произвольного элемента.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис $\mathbb{C}^n$, тогда $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ – базис $\mathbb{R}^{2n}$, а векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис лагранжева подпространства (обозначим его U). Найдем стабилизатор U в $U_n(\mathbb{C})$ – это комплексные унитарные матрицы, которые одновременно являются вещественными, т.е. ортогональные матрицы: $U_n(\mathbb{C}) \cap H = O_n(\mathbb{R})$. Тогда размерность орбиты равна

$$\dim U_n(\mathbb{C}) - \dim O_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Итак, размерность орбиты равна размерности $LGr(\mathbb{R}^{2n})$, откуда следует, что $U_n(\mathbb{C})$ действует на $LGr(\mathbb{R}^{2n})$ транзитивно, а значит, $LGr(\mathbb{K}^{2n})$ компактен.

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ рассуждаем аналогично, только нужно группы $O_{2n}(\mathbb{R})$, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, $GL_{2n}(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})$ заменить на $O_{2n}(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$, $GL_{2n}(\mathbb{H})$, $U_n(\mathbb{H})$ соответственно. ■

Вторая гомотопическая группа.

Среди связных групп Ли особую роль играют односвязные группы Ли. Обсудим, как понять, является ли данная группа Ли односвязной, а также более общий вопрос – как вычислить фундаментальную группу Ли.

Мощным инструментом для вычисления фундаментальной группы является точная гомотопическая последовательность расслоений. Помимо этого нам также понадобится вторая гомотопическая группа.

Элементами фундаментальной группы являются классы гомотопных петель $\pi_1(X, x_0)$. Петля – это непрерывный образ отрезка, концы которого отображаются в одну и ту же точку, поэтому вместо отрезка можно говорить про окружность, т.е. можно сказать, что петля – это непрерывный образ окружности, при котором выделенная точка окружности переходит в выделенную точку на многообразии:

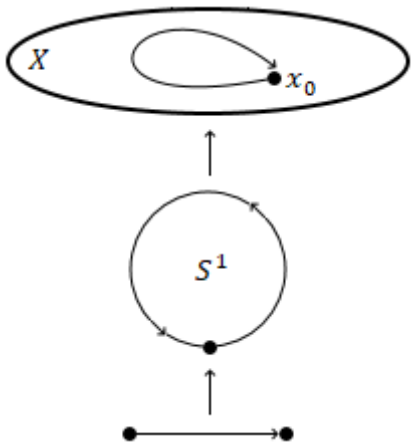

Рис. 10.1. Петля – непрерывный образ окружности

Элементами же второй гомотопической группы $\pi_2(X, x_0)$ являются классы гомотопных сфероидов – мы непрерывно отображаем уже не окружность, а двумерную сферу так, чтобы отмеченная точка на сфере перешла в отмеченную точку на многообразии. По аналогии с отрезком в одномерном случае, сфероид можно заменить на замкнутый диск, граница которого непрерывно отображается в выделенную точку на многообразии (вместо диска также можно рассматривать, например, квадрат):

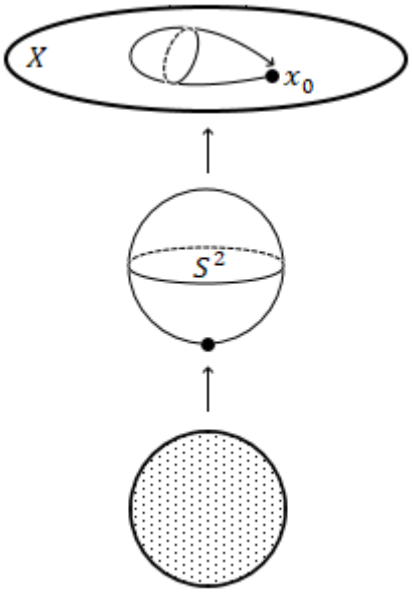

Рис. 10.2. Сфероид – непрерывный образ диска

Как и петли, сфероиды можно перемножать:

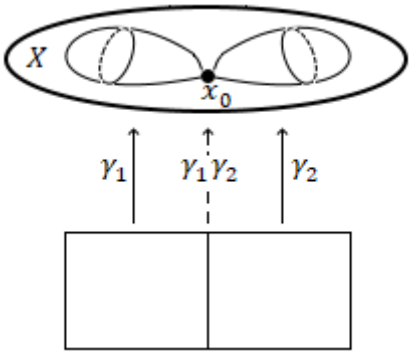

Рис. 10.3. Умножение сфероидов

Определение. Пусть X – многообразие, $x_0 \in X$ – базисная точка. *Вторая гомотопическая группа* $\pi_2(X, x_0)$ – это множество классов гомотопных сфероидов на X в точке x_0.

Умножение во второй гомотопической группе устроено следующим образом: $[\gamma][\delta] = [\gamma\delta]$ – произведением классов гомотопии сфероидов γ и δ является класс гомотопии сфероида $\gamma\delta$. Несложно проверить, что произведение сфероидов согласованно с гомотопией (т.е. при непрерывном деформировании отображений γ_1 и γ_2 отображение $\gamma_1\gamma_2$ также будет деформироваться нерерывно). Нейтральный элемент в $\pi_2(X, x_0)$ – это класс сфероидов, отображающийся в x_0.

Как и $\pi_1(X, x_0)$, группа $\pi_2(X, x_0)$ зависит лишь от связной компоненты X, содержащей x_0, и не зависит от x_0 (внутри связной компоненты) с точностью до изоморфизма.

Отметим, что все высшие гомотопические группы (в частности, $\pi_2(X, x_0)$) являются абелевыми. Наглядное доказательство этого факта можно видеть на следующем рисунке (светло-синие области отображаются в точку x_0):

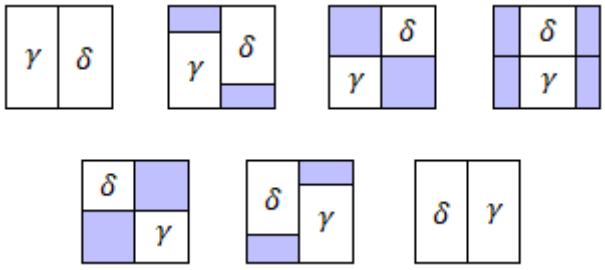

Рис. 10.4.Доказательство того, что $\pi_2(X, x_0)$ – абелева группа

Примеры вторых гомотопических групп.

1) $\pi_2(\mathbb{K}^n) = \{0\}$ (любой сфероид в $\mathbb{K}^n$ можно стянуть в точку)

2) $\pi_2(S^n) = \begin{cases} 0, & n > 2 \\ \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$

- $n > 2$: для всякого диференцируемого отображения $\gamma\colon S^2 \longrightarrow S^n$ существует точка в S^n, не принадлежащая $Im\,\gamma$, т.е. можно считать, что S^2 принадлежит проколотой сфере S^n, которая диффеоморфна $\mathbb{K}^n$, а $\pi_2(\mathbb{K}^n) = \{0\}$
- $n = 2$: этот случай оставляется читателю для самостоятельного разбора (см. задачу 1 на следующем семинаре)
- $n = 1$: так как $\mathbb{R}$ является односвязным накрытием для S^1, а S^2 односвязна, то можно воспользоваться свойством подъема (см. лекцию 10):

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ S^2 \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & S^1 \end{tikzcd}$$

односвязно

- образом отбражения $\tilde{\gamma}\colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ будет отрезок, а отрезок можно стянуть в точку, т.е. $[\tilde{\gamma}] = 0$, но тогда и $[\gamma] = 0$.

Отметим, что точная структура гомотопических групп сфер до конца неизвестна. Более полное освещение вопроса можно найти в книге “Курс гомотопической топологии” (авторы А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс).

Точная гомотопическая последовательность расслоения группы Ли над однородным многообразием.

Вернемся к группам Ли. Пусть группа Ли G действует на многообразии X транзитивно, $x_0 \in X$, $H = G_{x_0}$ – стабилизатор точки x_0, тогда $X \approx G/H$ (орбита точки диффеоморфна фактору группы по стабилизатору точки). Орбитное отображение

$$\begin{gathered} G \longrightarrow X \\ g \mapsto gx_0 \end{gathered}$$

является локально тривиальным расслоением со слоями, диффеоморфными H (см. лекцию 8):

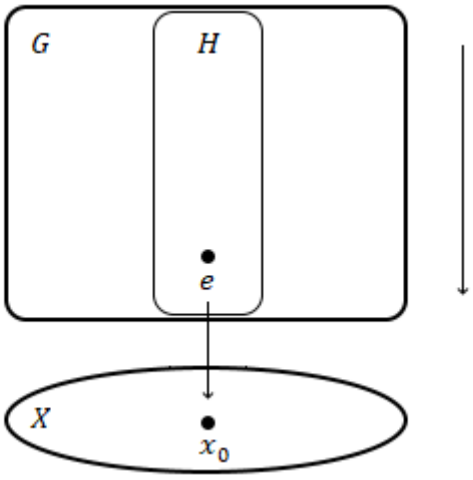

Рис. 10.5. $X \approx G/H$

Имеет место точная гомотопическая последовательность расслоения (эта последовательность существует для любого локально тривиального расслоения, условие того, что G является группой Ли, не является важным):

$$1 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(G) \longleftarrow \pi_0(H) \longleftarrow \pi_1(X) \longleftarrow \pi_1(G) \longleftarrow \pi_1(H) \longleftarrow \pi_2(X) \longleftarrow \cdots$$

Связывающие гомоморфизмы.

Все гомоморфизмы в указанной последовательности определяются естественно, кроме $\partial_1\colon \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(H)$ и $\partial_2\colon \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(H)$ – это т.н. связывающие гомоморфизмы.

- $\partial_1\colon \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(H)$:

Поймем, как по петле γ в X определить компоненту связности H. Так как орбитное отображение $G \longrightarrow X$ – не накрытие, а локально тривиальное расслоение, то подъем петли γ не однозначен, но единственен с точностью до гомотопии.

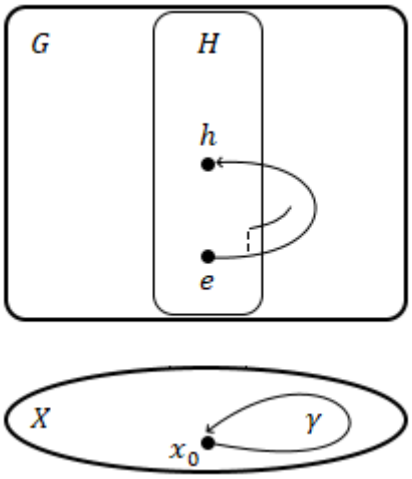

Рис. 10.6. $\partial_1\colon\ \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(H)$

Петлю поднимаем по кусочкам (горизонтально поднимаем достаточно маленькие участки петли, на которых расслоение тривиально, склейка образов таких участков происходит при помощи сдвигов на элементы H), в итоге мы попадем в некоторый элемент $h \in H$. По определению, $\partial_1[\gamma] = [h]$, т.е. образом класса $[\gamma]$ является та связная компонента подгруппы H, в которую попадают концы петель из $[\gamma]$.

- $\partial_2\colon\ \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(H)$:

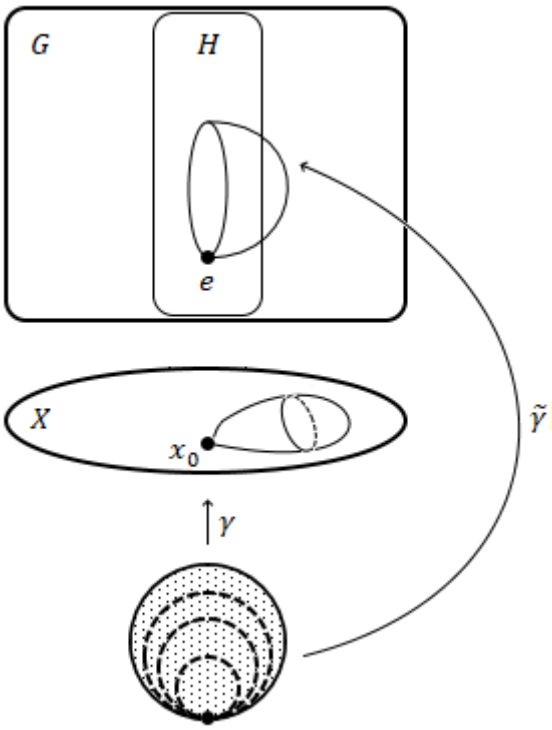

Рис. 10.7. $\partial_2\colon\ \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(H)$

Отображение ∂_2 определяется похоже: сфероид – это образ диска, чья граница отображается в точку x_0. Отображение γ из диска в X можно поднять наверх – выделим на диске точку, и начнем ее раздувать, пока не дойдем до его границы – получим окружности (петли), лежащие внутри диска, которые касаются границы в выделенной точке – возникает деформация петли внутри диска. Каждую из этих петель можно поднять наверх, а значит, и деформацию можно непрерывно поднять наверх.

При поднятии петель возникают пути с началом в e и концом в H, а последняя петля (соответствующая границе диска) будет целиком лежать в H (потому что при проекции вниз она отобразится в точку x_0). Такми образом, можно определить $\partial_2[\gamma] = [\tilde{\gamma}|_{S^1}]$ (где S^1 – это граница диска) – см. рис. 10.7.

Проверим, что ∂_1 и ∂_2 являются гомоморфизмами – для ∂_2 это довольно понятно из конструкции (∂_2 является гомоморфизмом для любых топологических пространств), а для ∂_1 оказывается существенным, что H – группа Ли (так как в общем случае $\pi_0(H)$ не обязана быть группой). Имеем:

$$\partial_1[\gamma\delta] = [hg] = [h][g] = \partial_1[\gamma]\partial_1[\delta]$$

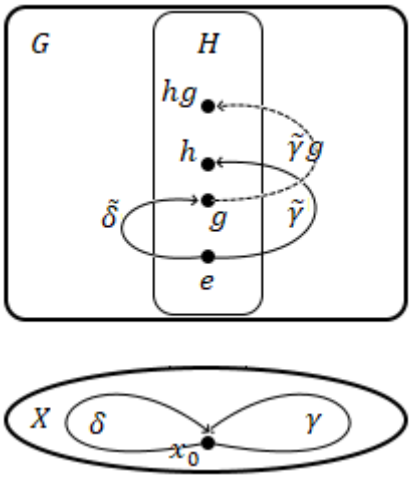

Рис. 10.8. ∂_1 – гомоморфизм

Обсудим, что означает понятие точной последовательности гомоморфизмов. Точность означает, что ядро каждого отображения равно образу следующего отображения. $\pi_0(X)$ не является группой, поэтому точность отображения $\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(G)$ означает, что его ядро попадает в связную компоненту X, содержащую выделенную точку x_0. Точность отображения $1 \longleftarrow \pi_0(X)$ означает, что отображение $\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(G)$ сюръективно. Применим точную гомотопическую последовательность для вычисления фундаментальных групп некоторых групп Ли.

$$1 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(G) \longleftarrow \pi_0(H) \longleftarrow \pi_1(X) \longleftarrow \pi_1(G) \longleftarrow \pi_1(H) \longleftarrow \pi_2(X) \longleftarrow \cdots$$

Пример. $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Для нахождения $\pi_1(G)$ воспользуемся точной гомотопической последовательностью – для этого нужно многообразие X, на котором G действует транзитивно и подгруппа H, которая является стабилизатором точки на этом многообразии.

Возьмем $X = \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \sim S^{2n-1}$, H – стабилизатор e_1:

$$H = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & GL_{n-1}(\mathbb{C}) & \\ 0 & & & \end{array}\right) \sim GL_{n-1}(\mathbb{C})$$

Получаем

$$1 \longleftarrow \pi_0(S^{2n-1}) \longleftarrow \pi_0\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_0\big(GL_{n-1}(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_1(S^{2n-1}) \longleftarrow \pi_1\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \longleftarrow$$

$$\longleftarrow \pi_1\big(GL_{n-1}(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_2(S^{2n-1})$$

Имеем: $\pi_0(S^{2n-1}) = 1$, $\pi_0\big(GL_n(\mathbb{C})\big) = 1$, $\pi_0\big(GL_{n-1}(\mathbb{C})\big) = 1$, $\pi_1(S^{2n-1}) = 0$, при $n > 1$, $\pi_2(S^{2n-1}) = 0$ – получаем более короткую точную последовательность

$$\pi_1(S^{2n-1}) \longleftarrow \pi_1\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_1\big(GL_{n-1}(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_2(S^{2n-1}),$$

крайние члены которой равны нулю. Это означает, что $\pi_1\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \simeq \pi_1\big(GL_{n-1}(\mathbb{C})\big)$, откуда следует, что $\pi_1\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \simeq \pi_1\big(GL_1(\mathbb{C})\big)$. Так как $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \sim S^1$, то $\pi_1\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \simeq \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Семинар 11. Вычисление фундаментальной группы у $SO_n(\mathbb{R})$. Спинорная группа.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 1. Доказать, что $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (указание: $S^2 = U_1(\mathbb{H})/U_1(\mathbb{C})$).

Доказательство.
Заметим, что $U_1(\mathbb{H}) \approx S^3$ (в самом деле, пространство кватернионов $\mathbb{H}$ – это четырехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, а кватернионы, по модулю равные единице, т.е. $U_1(\mathbb{H})$, образуют в этом пространстве трехмерную сферу), аналогично $U_1(\mathbb{C}) \approx S^1$ ($\mathbb{C}$ – это двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, а комплексные числа, по модулю равные единице, т.е. $U_1(\mathbb{C})$, образуют в этом пространстве одномерную сферу).

Теперь воспользуемся точной гомотопической последовательностью расслоения группы Ли над однородным пространством (S^2 – база расслоения, S^1 – слой расслоения, S^3 – тотальное пространство):

$$1 \longleftarrow \pi_0(S^2) \longleftarrow \pi_0(S^3) \longleftarrow \pi_0(S^1) \longleftarrow \pi_1(S^2) \longleftarrow \pi_1(S^3) \longleftarrow \pi_1(S^1) \longleftarrow \pi_2(S^2) \longleftarrow \pi_2(S^3)$$

Имеем: $\pi_1(S^3) = 0$, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_2(S^3) = 0$ – получаем более короткую точную последовательность

$$\pi_1(S^3) \longleftarrow \pi_1(S^1) \longleftarrow \pi_2(S^2) \longleftarrow \pi_2(S^3),$$

крайние члены которой равны нулю. Это означает, что $\pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (так как по определению точной последовательности, ядро отображения $\pi_1(S^1) \longleftarrow \pi_2(S^2)$ совпадает с образом отображения $\pi_2(S^2) \longleftarrow \pi_2(S^3)$, то есть, равно нулю, а образ отображения $\pi_1(S^1) \longleftarrow \pi_2(S^2)$ совпадает с ядром отображения $\pi_1(S^3) \longleftarrow \pi_1(S^1)$, то есть, равен $\pi_1(S^1)$, поэтому отображение $\pi_1(S^1) \longleftarrow \pi_2(S^2)$ является изоморфизмом). ■

Задача 4.
(a) Доказать, что $\mathbb{CP}^n$ односвязно.
(b) Вычислить фундаментальную группу у $\mathbb{RP}^n$.

Решение.
(a) Группа $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ транзитивно действует на $\mathbb{CP}^n$ (в самом деле, точки проективного пространства – это прямые в векторном пространстве, размерность которого на 1 больше, а любую прямую в векторном пространстве можно перевести в

любую другую прямую под действием подходящего линейного преобразования из SL_{n+1}).

Найдем стабилизатор $[e_1] \in \mathbb{CP}^n$ (прямой, натянутой на e_1):

$$G_{[e_1]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1/\det g & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & g \in GL_n(\mathbb{C}) & \\ 0 & & & \end{array}\right) \approx GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \sim GL_n(\mathbb{C})$$

Теперь воспользуемся точной гомотопической последовательностью расслоения группы Ли над однородным пространством:

$$\pi_0\big(GL_n(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_1(\mathbb{CP}^n) \longleftarrow \pi_1\big(SL_{n+1}(\mathbb{C})\big)$$

Имеем: $\pi_0\big(GL_n(\mathbb{C})\big) = 1$, $\pi_1\big(SL_{n+1}(\mathbb{C})\big) = 1$, откуда следует, что $\pi_1(\mathbb{CP}^n) = 1$, т.е. $\mathbb{CP}^n$ односвязно.

(b) Элементы проективного пространства $\mathbb{RP}^n$ – это прямые в векторном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проодящие через начало координат. Каждая такая прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$ пересекает сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в двух точках:

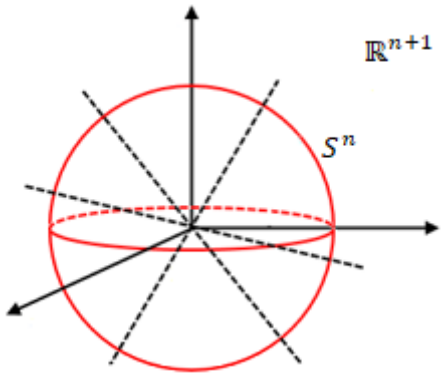

Рис. 11.1. Построение отображения $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$

- получаем отображение из S^n в $\mathbb{RP}^n$, которое каждой из диаметрально противоположных точек на сфере сопоставляет точку в $\mathbb{RP}^n$. Получается двулистное накрытие $S^n \xrightarrow{2:1} \mathbb{RP}^n$. Так как S^n односвязна, то порядок $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ равен двум, т.е. $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$.

Приведенные рассуждения справедливы при $n > 1$, при $n = 1$ имеем $\mathbb{RP}^1 \approx S^1$ и $\pi_1(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{Z}$. ■

Задача 2b. Вычислить фундаментальную группу у $O_n(\mathbb{R})$.

Решение.
Группа $G = O_n(\mathbb{R})$ транзитивно действует на $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Найдем стабилизатор $e_n \in S^{n-1}$:

$$G_{e_n} = \left(\begin{array}{ccc|c} & O_{n-1}(\mathbb{R}) & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq O_{n-1}(\mathbb{R})$$

Таким образом, $S^{n-1} = O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$. Точная гомотопическая последовательность:

$$1 \longleftarrow \pi_0(S^{n-1}) \longleftarrow \pi_0\big(O_n(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_0\big(O_{n-1}(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_1(S^{n-1}) \longleftarrow \pi_1\big(O_n(\mathbb{R})\big) \longleftarrow$$

$$\longleftarrow \pi_1\big(O_{n-1}(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_2(S^{n-1})$$

Имеем: $\pi_0(S^{n-1}) = 1$, $\pi_1(S^{n-1}) = \begin{cases}\mathbb{Z}, \text{при } n = 2\\ 1, \text{при } n > 2\end{cases}$, $\pi_2(S^{n-1}) = \begin{cases}\mathbb{Z}, \text{при } n = 3\\ 1, \text{при } n \neq 3\end{cases}$, откуда следует, что при $n > 3$ получаются более короткие точные последовательности

$$\pi_0(S^{n-1}) \longleftarrow \pi_0\big(O_n(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_0\big(O_{n-1}(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_1(S^{n-1}),$$

$$\pi_1(S^{n-1}) \longleftarrow \pi_1\big(O_n(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_1\big(O_{n-1}(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_2(S^{n-1}),$$

крайние члены которых равны нулю. Это означает, что $\pi_0\big(O_n(\mathbb{R})\big) \simeq \pi_0\big(O_{n-1}(\mathbb{R})\big)$ и $\pi_1\big(O_n(\mathbb{R})\big) \simeq \pi_1\big(O_{n-1}(\mathbb{R})\big)$, откуда следует, что $\pi_0\big(O_n(\mathbb{R})\big) \simeq \pi_0\big(O_3(\mathbb{R})\big)$ и $\pi_1\big(O_n(\mathbb{R})\big) \simeq \pi_1\big(O_3(\mathbb{R})\big)$.

Осталось найти $\pi_0\big(O_3(\mathbb{R})\big)$ и $\pi_1\big(O_3(\mathbb{R})\big)$. Имеем:

$$1 \longleftarrow \pi_0(S^2) \longleftarrow \pi_0\big(O_3(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_0\big(O_2(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_1(S^2) \longleftarrow \pi_1\big(O_3(\mathbb{R})\big) \longleftarrow$$

$$\longleftarrow \pi_1\big(O_2(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_2(S^2)$$

Так как $\pi_0(S^2) = 1$, $\pi_1(S^2) = 1$, получаем точную последовательность

$$1 \longleftarrow \pi_0\big(O_3(\mathbb{R})\big) \longleftarrow \pi_0\big(O_2(\mathbb{R})\big) \longleftarrow 1,$$

откуда $\pi_0\big(O_3(\mathbb{R})\big) \simeq \pi_0\big(O_2(\mathbb{R})\big)$. Матрицы из $O_2(\mathbb{R})$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

где $a^2 + b^2 = 1$. Матрицы каждого вида образуют компоненту связности (которые отличаются, например, знаком определителя), которая топологически эквивалентна окружности. Таким образом, $\pi_0(O_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$, откуда и $\pi_0(O_n(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 2$.

Для нахождения $\pi_1(O_3(\mathbb{R}))$ воспользуемся тем, что $\pi_1(O_3(\mathbb{R})) = \pi_1(SO_3(\mathbb{R}))$, а как мы знаем (см. семинар 8), имеется двулистное накрытие группы $SO_3(\mathbb{R})$ с помощью группы $U_1(\mathbb{H})$, и $U_1(\mathbb{H}) \approx S^3$ – односвязное многообразие. Значит, $\pi_1(O_3(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$. ■

Спинорная группа.

Итак, мы выяснили, что $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 3$. Следовательно, универсальное накрытие π: $\widetilde{SO_n(\mathbb{R})} \xrightarrow{2:1} SO_n(\mathbb{R})$ – двулистное. Группа $\widetilde{SO_n(\mathbb{R})}$ называется вещественной *спинорной группой* и обозначается $Spin_n(\mathbb{R})$.

$$\pi\colon \widetilde{SO_n(\mathbb{R})} \xrightarrow{2:1} SO_n(\mathbb{R}) \simeq Spin_n(\mathbb{R})/Z,$$

где $Z = Ker\,\pi \simeq \mathbb{Z}_2$.

Спинорная группа замечательна тем, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ можно проинтегрировать до представления спинорной группы. На группу $SO_n(\mathbb{R})$ это представление спускается только в том случае, если оно тривиально на $Z = Ker\,\pi$. Бывают представления спинорной группы, которые на $SO_n(\mathbb{R})$ не спускаются, например, представление пространства спиноров.

С некоторыми из спинорных групп мы уже знакомы:

- $Spin_3(\mathbb{R}) \simeq U_1(\mathbb{H}) \simeq SU_2(\mathbb{C})$,
- $Spin_4(\mathbb{R}) \simeq U_1(\mathbb{H}) \times U_1(\mathbb{H})$,
- $Spin_5(\mathbb{R}) \simeq U_2(\mathbb{H})$.

Упражнение. Доказать, что $Spin_6(\mathbb{R}) \simeq SU_4(\mathbb{C})$.

Начиная со $Spin_7(\mathbb{R})$, подобных изоморфизмов предъявить уже нельзя.

Рассмотрим группу $SL_2(\mathbb{R})$. Имеет место равенство $SL_n(\mathbb{R}) \approx SO_n(\mathbb{R}) \times P_n$, где P_n – многообразие положительно определенных симметрических вещественных $n \times n$ матриц с определителем 1. P_n топологически эквивалентно векторному пространству размерности $\frac{n(n+1)}{2}$ – проще всего это понять, рассмотрев экспоненциальное отображение

exp: $\mathfrak{p}_n \rightarrow P_n$, где $\mathfrak{p}_n$ – пространство симметрических $n \times n$ матриц с нулевым следом. P_n открыто в $\mathfrak{p}_n$, и отображение exp диффеоморфно отображает $\mathfrak{p}_n$ на P_n.

Для $n = 2$ (см. также семинары 5,6 – обсуждение топологии $SL_2(\mathbb{R})$) имеем:

$$SL_2(\mathbb{R}) \approx SO_2(\mathbb{R}) \times P_2$$

$SO_2(\mathbb{R})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, где $c = \cos t$, $s = \sin t$, а P_2 состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, где $a, d > 0, ad - b^2 = 1$. С точки зрения топологии: $P_2 \approx \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$, а $SO_2(\mathbb{R}) \approx S^1$. Таким образом:

$$SL_2(\mathbb{R}) \approx S^1 \times \mathbb{R}^2$$

Отсюда видно, что $\pi_1(SL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$. Теперь рассмотрим $G = \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ – универсальное накрытие $SL_2(\mathbb{R})$. Нетрудно понять, что

$$G = \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$$

Это соображение показывает, что на $\mathbb{R}^3$ можно ввести структуру группы Ли так, чтобы получить группу G, универсально накрывающую $SL_2(\mathbb{R})$, причем ядром этого накрытия является бесконечная циклическая группа $Z \simeq \pi_1(SL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$. Координаты в G (в предыдущих обозначениях): (t, a, b).

Упражнение. Написать в координатах (t, a, b) формулы для умножения и инверсии в G.

В заключение обсудим еще один факт, связанный с группой $SL_2(\mathbb{R})$. Из курса алгебры известно, что $[SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{R})] = SL_2(\mathbb{R})$, откуда следует, что $[G, G] = G$. Кроме того, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Так как все линейные представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ вполне приводимы, то и все линейные представления G также вполне приводимы. Это позволяет доказать следующее утверждение.

Утверждение. $G = SL_2(\mathbb{R})$ не является линейной группой Ли.

Доказательство.
Докажем от противного – пусть существует вложение $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$. Это означает, что существует точное комплексное линейное представление $\mathcal{R}$: $G \hookrightarrow GL(V)$, а значит, V может быть разложено в прямую сумму: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, где $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}|_{V_i}$ неприводимы.

Ядро накрытия $Ker\, \pi = Z \simeq \mathbb{Z}$ – дискретная центральная подгруппа, т.е. $\forall z \in Z$: $\mathcal{R}(z)$ коммутирует с $\mathcal{R}(g)$, $\forall g \in G$.

Тогда (по лемме Шура) $\mathcal{R}(z)|_{V_i}$ является скалярным линейным оператором, т.е. задается скалярной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_i(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i(z) \end{pmatrix}$$

С другой стороны, поскольку $G = [G, G]$, то и $\mathcal{R}(G) = [\mathcal{R}(G), \mathcal{R}(G)] \subset SL(V)$, аналогично $\mathcal{R}_i(G) = [\mathcal{R}_i(G), \mathcal{R}_i(G)] \subset SL(V_i)$, т.е. определитель матриц $\mathcal{R}(z)|_{V_i}$ равен 1, откуда следует, что $\lambda_i(z)$ – корни степени n_i из единицы. Следовательно, $\mathcal{R}(Z)$ конечно, но Z бесконечно – противоречие с тем, что существует точное комплексное линейное представление $\mathcal{R}$: $G \hookrightarrow GL(V)$. ■

Семинар 12. $Spin_6(\mathbb{R}) \simeq SU_4(\mathbb{C})$. Простота алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Вычисление формы Киллинга для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Разбор задач домашнего задания.

Задача 2. Доказать, что $Spin_6(\mathbb{R}) \simeq SU_4(\mathbb{C})$ (указание: рассмотреть естественное действие $SU_4(\mathbb{C})$ на пространстве $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ и найти в нем 6-мерное инвариантное вещественное подпространство).

Доказательство.
Обсудим общий план доказательства. Для доказательства того, что некоторая группа изоморфна спинорной группе, нужно придумать гомоморфизм из этой группы на соответствующую ортогональную группу, который является двулистным накрытием, т.е. в нашем случае гомоморфизм $SU_4(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_6(\mathbb{R})$.

Придумать гомоморфизм – значит придумать линейное представление $SU_4(\mathbb{C})$ в вещественном 6-мерном векторном пространстве, которое сохраняет некоторое скалярное умножение. Легко придумать комплексное 6-мерное представление: у группы $SU_4(\mathbb{C})$ есть естественное 4-мерное представление в пространстве $\mathbb{C}^4$, из которого легко изготовить 6-мерное, рассмотрев представление во внешнем квадрате $\Lambda^2\mathbb{C}^4$. На этом пространстве есть $\mathbb{C}$-билинейная симметрическая форма

$$b(u,w) = u \wedge w / e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

(здесь под делением понимается умножение $u \wedge w$ на коффициент пропорциональности между $u \wedge w$ и $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$). Эта форма невырождена: рассмотрим ее значения на базисных векторах пространства $\Lambda^2\mathbb{C}^4$:

$$b\big(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\big) = sgn(i,j,k,l),$$

- матрица b будет состоять из трех диагональных блоков вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (остальные элементы будут равны нулю), ее определитель отличен от нуля.

Поймем, что в $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ есть 6-мерное инвариантное вещественное подпространство: на $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ есть эрмитово скалярное умножение

$$h(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) = \begin{vmatrix} (v_1 \mid v_3) & (v_1 \mid v_4) \\ (v_2 \mid v_3) & (v_2 \mid v_4) \end{vmatrix},$$

$e_i \wedge e_j$ – ортонормированный базис.

Формы b и h связаны между собой соотношением

$$h(u,w) = b(\sigma(u),w),$$

где σ – невырожденный полулинейный (т.е. $\sigma(\lambda u) = \bar{\lambda}\sigma(u)$) оператор на $\Lambda^2\mathbb{C}^4$, такой что $\sigma^2 = id$:

$$\sigma(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l \ ((i,j,k,l) \text{ – четная перестановка})$$

Пространство $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ раскладывается в прямую сумму:

$$\Lambda^2\mathbb{C}^4 = V_+ \oplus V_-,$$

где V_+ - подпространство, на котором σ действует тождественно, а V_- – подпространство, на котором σ действует умножением на -1. Они связаны соотношением $V_- = iV_+$ (вытекает из того, что σ полулинеен), т.е. можно считать, что V_+ – вещественная часть $\Lambda^2\mathbb{C}^4$, а V_- – чисто мнимая часть $\Lambda^2\mathbb{C}^4$. Легко видеть, что

$$V_+ = \left\langle \begin{matrix} e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 & i(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \\ e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2 & i(e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2) \\ e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 & i(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \end{matrix} \right\rangle_{\mathbb{R}},$$

иными словами,

$$V_+ = \alpha e_1 \wedge e_2 + \bar{\alpha} e_3 \wedge e_4 + \beta e_1 \wedge e_3 + \bar{\beta} e_4 \wedge e_2 + \gamma e_1 \wedge e_4 + \bar{\gamma} e_2 \wedge e_3,$$

где α, β, γ – произвольные комплексные числа.

Таким образом, $V = V_+$ – вещественное 6-мерное подпространство, инвариантное относительно действия группы $SU_4(\mathbb{C})$. Форма $h = b$ задает на V евклидово скалярное умножение.

Итак, мы построили гомоморфизм $SU_4(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_6(\mathbb{R}) = SO(V)$. Группы $SU_4(\mathbb{C})$ и $SO_6(\mathbb{R})$ имеют одну и ту же вещественную размерность (15), ядром этого гомоморфизма являются операторы $\pm E$. Так как $SU_4(\mathbb{C})$ и $SO_6(\mathbb{R})$ связны, этот гомоморфизм является двулистным накрытием. ■

Задача 1а. Вычислить фундаментальную группу у следующих групп Ли:
(a) $O_n(\mathbb{C})$;
(b) $O_{p,q}(\mathbb{R})$.

Решение.
(a) В качестве однородного многообразия, на котором действует группа $O_n(\mathbb{C})$,

рассмотрим $X = S^{n-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 1\}$. Легко видеть, что на X группа $O_n(\mathbb{C})$ действует транзитивно: любой вектор из X можно дополнить до ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^n$, а любые два ортонормированных базиса можно перевести друг в друга с помощью преобразования из $O_n(\mathbb{C})$.

Так как $z_j = x_j + iy_j$, то уравнение $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 1$ сводится к двум уравнениям:

$$\begin{cases} 2i\sum_j x_j y_j = 0 \\ \sum_j \left(x_j^2 - y_j^2\right) = 1 \end{cases}$$

Заметим, что $X \sim S^{n-1}$ – в самом деле:

$$\begin{cases} 2i\sum_j x_j y_j = 0 \\ \sum_j \left(x_j^2 - y_j^2\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_j x_j y_j = 0 \\ \sum_j x_j^2 = 1 + \sum_j y_j^2 \end{cases}$$

Рассмотрим гомотопию $y_j \longrightarrow ty_j, \quad t \longrightarrow 0$ – при этом первое уравнение системы не изменится, а слагаемое $\sum_j y_j^2$ в правой части второго уравнения умножится на t^2. Чтобы второе уравнение не изменилось, умножим x_j на соответствующий множитель $t'(t, y)$. При $t = 1$ получаем многообразие X, при $t = 0$ сферу S^{n-1}.

Точная гомотопическая последовательность:

$$\cdots \longleftarrow \pi_1(X) \longleftarrow \pi_1\big(O_n(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_1\big(O_{n-1}(\mathbb{C})\big) \longleftarrow \pi_2(X) \longleftarrow \cdots$$

При $n > 3$ имеем $\pi_1(X) = \pi_2(X) = 0$, поэтому $\pi_1\big(O_n(\mathbb{C})\big) \simeq \pi_1\big(O_{n-1}(\mathbb{C})\big)$, откуда следует, что $\pi_1\big(O_n(\mathbb{C})\big) \simeq \pi_1\big(O_3(\mathbb{C})\big)$. Далее действуем как в задаче 2b из прошлого семинара, и получаем, что $\pi_1\big(O_3(\mathbb{C})\big) \simeq \mathbb{Z}_2$.

(b) В качестве однородного многообразия, на котором действует группа $O_{p,q}(\mathbb{R})$, рассмотрим $X = Gr_p^+(\mathbb{R}^{p,q})$ – грассманиан положительно определенных p-мерных подпространств. Каждое такое подпространство задается набором из p линейно независимых вектор-столбцов, причем верхний $p \times p$ минор невырожден – подходящей заменой базиса можно добиться того, чтобы этот минор превратился в единичную матрицу:

$$\begin{array}{c} \quad v_1 \cdots v_p \\ p\left\{\begin{pmatrix} \det \neq 0 \\ \hline \\ \end{pmatrix}\right. \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \hline & X & \end{pmatrix}$$

- как обсуждалось на семинаре 9, именно так вводятся локальные координаты на многообразии Грассмана (только тогда мы выбирали минор, отличный от нуля, а в нашем случае этот минор всегда один и тот же, так как подпространства положительно определены, т.е. $Gr_p^+(\mathbb{R}^{p,q})$ содержится в одной карте $Gr_m(\mathbb{K}^n)$).

Найдем матрицу Грама системы векторов $v_1, \dots, v_p$:

$$(E \mid X^T)\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & -E \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} E \\ \hline X \end{array}\right) = E + X^T X$$

(здесь $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы с индексами инерции p, q). Получившаяся матрица должна быть положительно определена – так как она симметрическая, то это означает, что собственные значения положительны: $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$. Легко видеть, что при замене $X \mapsto tX$, $0 \leq t \leq 1$ сохраняется условие положительной определенности: собственные значения матрицы $E + t^2 X^T X = (1 - t^2)E + t^2(E + X^T X)$ будут равны $1 + t^2\lambda_i > 0$.

Отсюда следует, что $Gr_p^+(\mathbb{R}^{p,q})$ стягиваемо в точку, а значит, группы $\pi_1(X)$ и $\pi_2(X)$ тривиальны. Стабилизатор точки на многообразии $X = Gr_p^+(\mathbb{R}^{p,q})$ равен $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$. Точная гомотопическая последовательность:

$$\cdots \longleftarrow \pi_1(X) \longleftarrow \pi_1\left(O_{p,q}(\mathbb{R})\right) \longleftarrow \pi_1\left(O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})\right) \longleftarrow \pi_2(X) \longleftarrow \cdots$$

Т.е. $\pi_1\left(O_{p,q}(\mathbb{R})\right) \simeq \pi_1\left(O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})\right) \simeq \pi_1\left(O_p(\mathbb{R})\right) \times \pi_1\left(O_q(\mathbb{R})\right)$. Группу $\pi_1(O_n(\mathbb{R}))$ мы находили ранее (см. прошлый семинар). ■

Задача 6. Рассмотрим группу $N_3(\mathbb{R})$ верхних унитреугольных вещественных матриц размера 3×3. Доказать:

(а) $[N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})]$ – подгруппа Ли, состоящая из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ – дискретная центральная подгруппа в $N_3(\mathbb{R})$.
(c) В любом линейном представлении группы Ли $N_3(\mathbb{R})$ элементы подгруппы $[N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})]$ записываются в подходящем базисе верхними унитреугольными матрицами.
(d) $G = N_3(\mathbb{R})/Z$ не является линейной группой Ли.

Доказательство.
(a,b) Имеем:

$$\mathbb{R}^3 \approx N_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Переходя к алгебрам Ли, получаем

$$[N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = Z\big(N_3(\mathbb{R})\big),$$

откуда следует пункт (b).

(c) Группа $N_3(\mathbb{R})$ разрешима (ее коммутант абелев, второй коммутант тривиален). По теореме Ли, для всякого ее комплексного линейного представления существует базис, в котором эта группа записывается верхнетреугольными матрицами (см. следствие 1 из теоремы Ли, лекция 14 в курсе лекций). Тогда в этом базисе элементы группы $[N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})]$ записываются верхними унитреугольными матрицами.

(d) Пусть группа G линейна: $G \hookrightarrow GL_N(\mathbb{C})$ – это означает, что задано точное линейное представление $\mathcal{R}\colon G \longrightarrow GL_N(\mathbb{C})$, и в некотором базисе $\mathcal{R}(G)$ записывается верхнетреугольными матрицами размера $N \times N$. Имеем:

$$[G, G] = [N_3(\mathbb{R}), N_3(\mathbb{R})]/Z \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$$

Так как $\mathbb{T}$ компактна, то для $\mathcal{R}|_{\mathbb{T}}$ есть инвариантное эрмитово скалярное умножение, значит, в подходящем базисе $\mathcal{R}(\mathbb{T}) \subseteq U_N(\mathbb{C})$. Операторы из $U_N(\mathbb{C})$ диагонализуемы, так как к тому же операторы $\mathcal{R}([G, G])$ записываются верхними унитреугольными матрицами, т.е. их собственные значения равны 1, то $\mathcal{R}(\mathbb{T}) = E$, т.е. представление $\mathcal{R}$ не является точным – противоречие. ■

На лекциях в качестве упражнения предлагалось доказать, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ проста (см. лекцию 15). Докажем это утверждение.

Утверждение. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ проста.

Доказательство.
Допустим, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ содержит ненулевой идеал $\mathfrak{h}$. Докажем, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Пусть $0 \neq x \in \mathfrak{h}$, $tr\, x = 0$,

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Коммутируя x с матричными единицами e_{ij}, получаем

$$[x, e_{ij}] = xe_{ij} - e_{ij}x = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} i\text{-ый} \\ \text{столбец } x \end{array} \\ i & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{array}{c} x_{ji} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline & \mathbf{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(j\text{-ая строка } x) \\ \\ \\ \end{array} \\ & j \end{array}$$

- матрица, на месте i-ой строки которой стоит j-ая строка матрицы x, умноженная на -1, а на месте j-го столбца стоит i-ый столбец матрицы x, остальные элементы равны 0. На пересечении i-ой строки и i-го столбца стоит элемент $-x_{ji}$, на пересечении j-ой строки и j-го столбца стоит элемент x_{ji}.

Если $x_{ji} \neq 0$ $(j \neq i)$, то еще раз прокоммутируем с e_{ij}:

$$\big[[x, e_{ij}], e_{ij}\big] = -2x_{ji}e_{ji}$$

– получим матрицу, на пересечении i-ой строки и j-го столбца которой стоит элемент $-2x_{ji}$, а остальные элементы равны нулю. С помощью матрицы $\big[[x, e_{ij}], e_{ij}\big]$ можно получить все матрицы из $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, т.е. $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

Если не существует ненулевых $x_{ji} \neq 0$ $(j \neq i)$, то матрица x диагональна – прокоммутировав ее с подходящей недиагональной матричной единицей, получим недиагональную матрицу и применим рассуждение, приведенное выше. ■

Вычисление формы Киллинга для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

То, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ полупроста, можно вывести из того, что $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ проста и некоммутативна, но мы пойдем другим путем – вычислим форму Киллинга. Вначале вычислим форму Киллинга для $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$:

$$(x \mid y)_{ad} = tr\big(ad(x)ad(y)\big)$$

Поймем, как устроены присоединенные операторы $ad(x) = [x\,,\cdot\,]$. Матрица x может быть разложена по базису:

$$x = \sum_{i,j} x_{ij} e_{ji},$$

поэтому

$$ad(x) = \sum_{i,j} x_{ij} ad\big(e_{ji}\big).$$

Как известно, $\big[e_{ji}, e_{kl}\big] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$, поэтому

$$[x, e_{kl}] = \sum_{i,j} x_{ij}\delta_{jk} e_{il} - x_{ij}\delta_{il} e_{kj}$$

и для

$$y = \sum_{p,q} y_{pq} e_{pq}$$

имеем

$$\big[y, [x, e_{kl}]\big] = \sum_{i,j,p,q} x_{ij} y_{pq}\big(\delta_{jk}\delta_{qi} e_{pl} - \delta_{jk}\delta_{lp} e_{iq} - \delta_{il}\delta_{qk} e_{pj} + \delta_{il}\delta_{jp} e_{kq}\big).$$

Осталось вычислить след – для этого нужно рассмотреть слагаемые e_{pl} при $p = k$, e_{iq} при $i = k, q = l$, e_{pj} при $p = k, j = l$, e_{kq} при $q = l$.

Дальнейшее предоставляется читателю (нужно закончить вывод формы Киллинга для $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, затем ограничить ее на $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ и убедиться, что она невырождена).

Семинар 13. Теория представлений группы Ли $SL_n(\mathbb{K})$ и алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, классификация неприводимых представлений.

Представления $SL_n(\mathbb{K})$.

Как известно из теоремы Вейля (см. лекцию 16), все линейные представления полупростых алгебр Ли вполне приводимы, поэтому описание линейных представлений полупростых групп и алгебр Ли сводятся к описанию их неприводимых представлений. Рассмотрим в качестве примера группу Ли $SL_n(\mathbb{K})$ и алгебру Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ – уже на этом примере видны все основные идеи и конструкции, которые работают и в общем случае.

Всякое вещественное представление $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ можно превратить в комплексное с помощью процедуры комплексификации, которое можно продолжить по линейности до комплексного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Группа $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ односвязна, поэтому всякое ее комплексное представление можно проинтегрировать до комплексного представления группы Ли $SL_n(\mathbb{C})$ (по которому можно восстановить вещественное и комплексное представления $SL_n(\mathbb{R})$). Таким образом, нам неважно, какие объекты рассматривать – вещественное/комплексное представление алгебры/группы Ли SL_n – все они взаимно-однозначно соответствуют друг другу. В дальнейшем для удобства будем рассматривать $\mathbb{C}$ в качестве основного поля.

1) Рассмотрим в $SL_n(\mathbb{C})$ подгруппы (и соответствующие им алгебры Ли):

- верхнетреугольных невырожденных матриц:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix},\ \det = 1 \right\} \text{ – подгруппа Бореля}$$

- диагональных невырожденных матриц:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix},\ \det = 1 \right\}, \qquad \mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix},\ tr = 0 \right\}$$

- верхних унитреугольных матриц:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- нижних унитреугольных матриц:

$$N^- = \left\{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathfrak{n}^- = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Пусть имеется линейное представление $SL_n \curvearrowright V$. Группа B связна и разрешима. Из теоремы Ли (см. лекцию 14) следует, что V содержит одномерное B-инвариантное подпространство $\langle v_0 \rangle$, тогда произвольный элемент $b \in B$ действует на v_0 с помощью умножения на коэффициент $\lambda(b)$:

$$bv_0 = \lambda(b)v_0,$$

где λ: $B \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ - вес. При этом $N = [B, B]$ и $\lambda|_N = 1$. Так как $B = T \leftthreetimes N$, то вес λ однозначно задается своими значениями на элементах из T (а элементы из N оставляют v_0 на месте: $Nv_0 = v_0$, $\mathfrak{n}v_0 = 0$).

2) Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ состоит из подалгебр Ли, изоморфных $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{sl}_{ij}(\mathbb{C}) = \begin{array}{c} i \\ j \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccc} & * & & * & \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ & * & & * & \\ \end{array}\right) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \quad (i < j)$$

$$\begin{array}{ccc} & i & j \end{array}$$

Их базис:

$$e_{ij} \text{ (повышающие)}, \quad e_{ji} \text{ (понижающие)}, \quad h_{ij} = [e_{ij} - e_{ji}] = e_{ii} - e_{jj}$$

Имеем:

- $e_{ij}v_0 = 0$ (так как $e_{ij} \in \mathfrak{n}$)
- $h_{ij}v_0 = d\lambda(h_{ij})v_0$ (так как $h_{ij} \in \mathfrak{t}$).

Из теории представлений $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ следует, что $d\lambda(h_{ij})$ – целое неотрицательное число. λ однозначно определяется своим дифференциалом $d\lambda$ (как гомоморфизм связной группы Ли), $d\lambda$: $\mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{C}$ – линейная функция, т.е. однозначно определяется своими значениями на базисе $h_{i,i+1} \coloneqq h_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Обозначим эти значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, т.е. $\lambda_i = d\lambda(h_i)$ – целые неотрицательные числа (они называются числовыми отметками веса). Таким образом, вес можно себе представлять как элемент некоторой целочисленной решетки.

3) Рассмотрим $V_0 \subseteq V$ – наименьшее инвариантное подпространство, содержащее вектор v_0 и поймем, как оно устроено. Заметим, что $v = e_{j_1 i_1} \cdots e_{j_m i_m} v_0 \in V_0$ и решим вспомогательную задачу:

Задача. Вычислить:

- 1. xv, где $x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}$
- 2. $e_{ij}v$

Решение.
1.

$$xv = xe_{j_1i_1} \cdots e_{j_mi_m}v_0 = e_{j_1i_1}xe_{j_2i_2} \cdots e_{j_mi_m}v_0 + [x, e_{j_1i_1}]e_{j_2i_2} \cdots e_{j_mi_m}v_0$$

Заметим, что $[x, e_{ji}] = (x_j - x_i)e_{ji}$. Обозначим $x_j - x_i = \alpha_{ji}(x)$, $\alpha_{ji} \in \mathfrak{t}^*$. Такие веса называются корнями (α_{ji} – отрицательные корни, $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ – положительные корни). Тогда $[x, e_{j_1i_1}] = \alpha_{j_1i_1}(x)e_{j_1i_1}$. Далее перебрасываем x через $e_{j_2i_2}$, используем то, что $[x, e_{j_2i_2}] = \alpha_{j_2i_2}(x)e_{j_2i_2}$ и т.д. В итоге получаем:

$$xv = (\lambda + \alpha_{j_1i_1} + \cdots + \alpha_{j_mi_m})(x)v = (\lambda - \alpha_{i_1j_1} - \cdots - \alpha_{i_mj_m})(x)v$$

Таким образом, веса векторов, получаемых из вектора v действием понижающих операторов, получаются вычитанием из λ положительных корней α_{ij}.

Положительные корни $\alpha_{ij}(x) = x_i - x_j$ порождают пространство линейных функций на $\mathfrak{t}$, базис образуют корни $\alpha_{i,i+1}$ (обозначение: $\alpha_{i,i+1} = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n-1$ – простые корни). Корень α_{ij} выражается через простые корни как

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1}$$

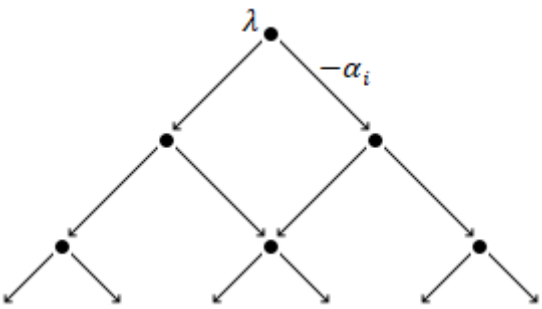

Рис. 13.1. К задаче

2. Будем действовать аналогично:

$$e_{ij}v = e_{ij}e_{j_1i_1} \cdots e_{j_mi_m}v_0 = e_{j_1i_1}e_{ij}e_{j_2i_2} \cdots e_{j_mi_m}v_0 + [e_{ij}, e_{j_1i_1}]e_{j_2i_2} \cdots e_{j_mi_m}v_0$$

Имеем: $[e_{ij}, e_{j_1 i_1}] = \delta_{jj_1} e_{ii_1} - \delta_{ii_1} e_{j_1 j}$ – перебрасывая e_{ij} через остальные сомножители, в итоге получим, что e_{ij} – линейная комбинация векторов вида $e_{q_1 p_1} \cdots e_{q_k p_k} v_0$, где $q_i < p_i$.

Вывод: $V_0 = \langle e_{j_1 i_1} \cdots e_{j_m i_m} v_0 \mid i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m,\ m \geq 0 \rangle$.

Лемма. $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright V_0$ неприводимо.

Доказательство.
Пусть $U \subset V_0$ – инвариантное подпространство, тогда $V_0 = U \oplus W$, где W тоже инвариантно. Как было проиллюстрировано на рис. 13.1, существует единственный весовой вектор v_0 с весом λ, откуда следует, что $v_0 \in U$, либо $v_0 \in W$ (терминология: v_0 – старший вектор, λ – старший вес). Следовательно, $U = V_0$, либо $W = V_0$. ■

4) Неприводимое представление $SL_n(\mathbb{C})$ однозначно определяется своим старшим весом с точностью до изоморфизма.

Доказательство.
Пусть V_1, V_2 – два неприводимых представления $SL_n(\mathbb{C})$ со старшим весом λ, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ – старшие векторы. Рассмотрим $V = V_1 \oplus V_2$ и $v_1 + v_2 = v_0 \in V$. v_0 – тоже старший вектор веса λ, потому $V_0 \subset V$– инвариантное подпространство, порожденное v_0, неприводимо (по лемме).

Рассмотрим проекции $\pi_1\colon V_0 \longrightarrow V_1$ и $\pi_2\colon V_0 \longrightarrow V_2$ – это гомоморфизмы представлений, причем $\pi_i(v_0) = v_i \neq 0$. Следовательно, по лемме Шура, π_1 и π_2 – изоморфизмы, поэтому $V_1 \simeq V_0$ и $V_2 \simeq V_0$, откуда следует, что $V_1 \simeq V_2$. ■

5) Осталось понять, для каких старших весов существуют неприводимые представления, и как их построить. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Введем т.н. фундаментальные веса: $\omega_i = \left(0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0\right)$ – они образуют базис в решетке весов, и $\lambda = \lambda_1 \omega_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \omega_{n-1}$.

Задача.

- 1) Доказать, что $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ – неприводимое представление старшего веса ω_k (старший вектор $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$).
- 2) Рассмотрим $SL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright (\mathbb{C}^n)^{\otimes \lambda_1} \otimes (\Lambda^2 \mathbb{C}^n)^{\otimes \lambda_2} \otimes \cdots$. Доказать, что в этом пространстве существует старший вектор веса λ.

Решение этой задачи предоставляется читателю. Решив ее, он получит полную классификацию неприводимых представлений $SL_n(\mathbb{C})$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ