МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

ХЕЛЕМСКИЙ
АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
АСПИРАНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Лекция 1

Банаховы алгебры

Определение и примеры

Определение 1. *Банахова алгебра* A - алгебра, являющаяся банаховым пространством, в которой выполняется мультипликативное неравенство

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|. \tag{1.1}$$

Если алгебра унитальная(с единицей), то предполагаем, что $\|\mathbb{1}_A\| = 1$

Предложение 1 (Совместная непрерывность умножения). *Пусть в нашем метрическом пространстве $a_n \to a, b_n \to b$, тогда $a_n b_n \to ab$*

Доказательство.

$$\|ab - a_n b_n\| = \|(a - a_n)b + a_n(b - b_n)\| \leqslant \|a - a_n\|\|b\| + \|a_n\|\|b - b_n\|.$$

$\|a - a_n\|\|b\| \to 0$, так как b - константа, $\|a - a_n\| \to 0$. $\|a_n\| \leqslant C$, так как это сходящаяся последовательность, $\|b - b_n\| \to 0 \Rightarrow \|a_n\|\|b - b_n\| \to 0$. $\square$

Пример 1. Выделим три источника банаховых алгебр:

1) Теория функций.
$C(\Omega), \Omega-$компакт. Является банховой алгеброй относительно поточечного умножения.
$C^n[0;1]$ с нормой $\|x\| = \|x\|_\infty + \left\|x'\right\|_\infty + ... + \frac{\|x^{(n)}\|_\infty}{n!}$ (такая норма необходима для выполнения мультипликативного неравенства).
l_∞.

2) Теория операторов.
Операторы на каком-нибудь банаховом пространстве, умножение: композиция.
$\mathscr{B}(E)$ - все ограниченные операторы в банаховом пространстве.
$\mathscr{K}(E)$-компактные операторы в банаховом пространстве. Если E - бесконечномерное, то в $\mathscr{K}(E)$ нет единицы.

3) Гармонический анализ.
$l_1(\mathbb{Z})$, умножение - свёртка: $(\xi * \eta)_n := \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m \eta_{n-m}$

Задача 1. Проверить, что $l_1(\mathbb{Z})$ - банахова алгебра.

Замечание. $l_1(\mathbb{Z})$ - это винерова алгебра с точностью до изоморфизма.

Спектр элементов банаховой алгебры

Определение 2. A - комплексная асоциативная унитальная алгебра. *Спектром элемента* $a \in A$ называется

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda \mathbb{1}_A)^{-1} \nexists\}. \tag{1.2}$$

Замечание. Для $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}(t)$ не существует нормы, делающей эти алгебры банаховыми.

Предложение 2. *A-унитальная банахова алгебра, тогда*

1) $U(\mathbb{1}, 1) \subseteq Inv\ A$, то есть если $\|a\| < 1$, то $\mathbb{1} - a$ обратим

2) $inv : Inv\ A \to Inv\ A : a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в $\mathbb{1}$.

Доказательство.

1) Будем доказывать с помощью ряда Карла Ноймана. Пусть $\|a\| < 1$, рассмотрим формальный ряд $\mathbb{1} + a + a^2 + ... + a^n + ...$ В силу мультипликативного неравенства $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$. Так как $\|a\| < 1$, значит ряд мажорируется геометрической прогрессией и по признаку Вейерштрасса ряд сходится, поэтому у него есть предел, обозначим его $b \in A$.

$$(\mathbb{1} - a)b = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{1} - a)b_n = (b_n = \mathbb{1} + a + a^2 + ... + a^n) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{1} - a^n) = \mathbb{1},$$

значит b -правый обратный. Самостоятельно проверить, что $b(\mathbb{1} - a) = \mathbb{1}$

2) Так как пространство метрическое, достаточно доказать утверждение на языке последовательностей. Надо доказать, что из $c_n \to \mathbb{1} \Rightarrow c_n^{-1} \to \mathbb{1}$ (из доказанного в 1) можем не теряя общности считать, что все c_n обратимы). Обозначим

$$d_n := \mathbb{1} - c_n, d_n \to 0,$$

тогда можем представить c_n^{-1} как

$$c_n^{-1} = (\mathbb{1} - d_n)^{-1} = \mathbb{1} + d_n + ... + d_n^k + ... \text{ (ряд Ноймана)},$$

$$\mathbb{1} - c_n^{-1} = -d_n - ... - d_n^k - ...,$$

теперь можем оценить норму

$$\|\mathbb{1} - c_n^{-1}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|d_n^k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|d_n\|^k = \frac{\|d_n\|}{1 - \|d_n\|} \to 0.$$

□

Всюду далее A - унитальная банахова алгебра.

Следствие.

$$\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|a\|\}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть $|\lambda| > \|a\|$. Надо доказать, что $(a - \lambda \mathbb{1})$ - обратим $(\lambda \in Reg\ a)$.

$$a - \lambda \mathbb{1} = -\lambda(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a), \ \|\lambda^{-1}a\| < 1 \Rightarrow (\mathbb{1} - \lambda^{-1}a) \in Inv\ A$$

по пункту 1) предложения 2. □

Следующее предложение значительно усиливает предложение 2.

Предложение 3. *A- унитальная банахова алгебра, тогда*

1) $Inv\ A$ -открыто.

2) inv - непрерывно.

Доказательство.

1) $a \in Inv\ A$, надо найти r: $U(a,r) \subset Inv\ A$. Утверждается, что подойдёт $r = \|a^{-1}\|^{-1}$, для любого $b \in U(a,r)$, покажем, что b обратим. $b = a - c$, где $\|c\| < r$, тогда $b = a(\mathbb{1} - a^{-1}c)$. По мультипликативному неравенству

$$\|a^{-1}c\| \leqslant \|a^{-1}\|\|c\| \leqslant \ \|a^{-1}\|r < 1 \Rightarrow \mathbb{1} - a^{-1}c \in Inv\ A$$

по предложению 2. Значит b обратим, как произведение обратимых.

2) Надо чтобы $a_n \to a \in Inv\ A \Rightarrow a_n^{-1} \to a^{-1}$.
$a_n a^{-1} \to aa^{-1} = \mathbb{1}$, тогда по пункту 2) предложения 2 получаем, что

$$(a_n a^{-1})^{-1} = a a_n^{-1} \to \mathbb{1} \Rightarrow a^{-1}(a a_n^{-1}) = a_n^{-1} \to a^{-1}.$$

□

Следствие. *$\sigma(a)$ замкнут.*

Доказательство. Надо доказать, что $Reg\ a = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ открыто. Рассмотрим $\lambda_n \in \mathbb{C}, \ \lambda_n \to \lambda \in Reg\ a$. Необходимо показать, что $\lambda_n \in Reg\ a$, начиная с некоторого n.
$a - \lambda \mathbb{1} = \lim\limits_{n \to \infty} (a - \lambda_n \mathbb{1})$, по пункту 1) предложения 3 $Inv\ A$ открыто, значит, начиная с некоторого n, $\{(a - \lambda_n \mathbb{1})\}$ открыто, то есть $\lambda_n \in Reg\ a$. □

Следствие. *$a \in Inv\ A, \ \|a\| \leqslant 1, \ \|a^{-1}\| \leqslant 1$, тогда $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$ ($\mathbb{T}$-единичная окружность).*

Доказательство. $\sigma(a), \ \sigma(a^{-1}) \subseteq \mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$ - единичный замкнутый диск). Если бы $\lambda \in \sigma(a), |\lambda| < 1$, то $|\lambda^{-1}| > 1$ и $\{\sigma(a)\}^{-1} \subsetneq \mathbb{D}$. Из последней лекции предыдущего семестра известно, что $\{\sigma(a)\}^{-1} = \sigma(a^{-1}) \Rightarrow \sigma(a^{-1}) \subsetneq \mathbb{D}$ получили противоречие. □

Частный случай.

E - банахово пространство. В нём задан изометрический изоморфизм $U : E \to E$, тогда из $U \in \mathscr{B}(E) \Rightarrow \sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$ ($\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$).

Определение 3. *Резольвентной функцией для* a называется

$$R : Reg\ a \to A : \lambda \mapsto (a - \lambda\mathbb{1})^{-1}. \tag{1.4}$$

Изучим некоторые свойства R.

Предложение 4. *R - непрерывна.*

Доказательство. Надо доказать, что если $\lambda_n \to \lambda \in Reg\ a \Rightarrow R(\lambda_n) \to R(\lambda)$. Знаем, что $a - \lambda_n\mathbb{1} \to a - \lambda\mathbb{1}$, из непрерывности обратного элемента получаем, что

$$R(\lambda_n) = (a - \lambda_n\mathbb{1})^{-1} \to (a - \lambda\mathbb{1})^{-1} = R(\lambda).$$

□

Предложение 5 (тождество Гильберта)**.** *Пусть* $\lambda, \mu \in Reg\ a$. *Тогда*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\mu)R(\lambda). \tag{1.5}$$

Доказательство.

$$R(\mu)(a - \mu\mathbb{1}) = \mathbb{1} = (a - \lambda\mathbb{1})R(\lambda).$$

$$R(\lambda) - R(\mu) = R(\mu)(a - \mu\mathbb{1})(R(\lambda) - R(\mu))(a - \lambda\mathbb{1})R(\lambda) =$$
$$= R(\mu)(a - \mu\mathbb{1})R(\lambda)(a - \lambda\mathbb{1})R(\lambda) - R(\mu)(a - \mu\mathbb{1})R(\mu)(a - \lambda\mathbb{1})R(\lambda) =$$
$$= R(\mu)(a - \mu\mathbb{1})\mathbb{1}R(\lambda) - R(\mu)\mathbb{1}(a - \lambda\mathbb{1})R(\lambda) = R(\mu)((a - \mu\mathbb{1}) - (a - \lambda\mathbb{1}))R(\lambda) =$$
$$= R(\mu)(\lambda - \mu)R(\lambda) = (\lambda - \mu)R(\mu)R(\lambda)$$

□

Рассмортим $f \in A^*$ - ограниченный функционал и функцию комплексного переменного

$$w_f : Reg\ a \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto f(R(a)). \tag{1.6}$$

Предложение 6. *w_f голоморфна.*

Доказательство. Проверим $\mathbb{C}$-дифференцируемость по Риману.
$\lambda, \lambda_0 \in Rega, \lambda \to \lambda_0$.

$$\frac{w_f(\lambda) - w_f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{f(R(\lambda)) - f(R(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} = f\left(\frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right).$$

Применяем тождество Гильберта и получаем :

$$f\left(\frac{(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0)R(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}\right) = f(R(\lambda_0)R(\lambda))$$

$R(\lambda) \to R(\lambda_0)$ из непрерывности R, таким образом $R(\lambda_0)R(\lambda) \to R(\lambda_0)^2$. Из непрерывности f получаем, что $f(R(\lambda_0)R(\lambda)) \to f(R(\lambda_0)^2) \Rightarrow$ искомый предел существует, значит w_f - голоморфмна. □

Теорема 1 (О непустоте спектра). *A- унитальная, банахова алгебра, $A \neq 0$(в частности единица не ноль), $a \in A$,тогда $\sigma(a) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть напротив $\sigma(a) = \emptyset \Rightarrow Reg\ a = \mathbb{C}$, то есть $R : \mathbb{C} \to A$. Для любого $f \in A^*$ $w_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - целая функция. Берем $\lambda \neq 0$, тогда

$$R(\lambda) = (a - \lambda\mathbb{1})^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a)^{-1}.$$

Пусть $\lambda \to \infty$, тогда $\lambda^{-1}a \to 0 \Rightarrow \mathbb{1} - \lambda^{-1}a \to \mathbb{1}$, тогда по пункту 2) предложения 2

$$(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a)^{-1} \to \mathbb{1} \ \Rightarrow \ R(\lambda) \to 0.$$

$|w_f| = |f(R(\lambda))| \leqslant \|f\|\|R(\lambda)\|$, значит $w_f(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, следовательно w_f - ограничена, значит $w_f \equiv const \to 0 \Rightarrow w_f(\lambda) = 0$. По следствию из теоремы Хана-Банаха $R(\lambda) = 0$ в A, значит для любого a

$$a\mathbb{1} = a(a - \lambda\mathbb{1})(a - \lambda\mathbb{1})^{-1} \to 0 \Rightarrow a = 0.$$

Противоречие. □

Задача 2. Любой непустой компакт Ω в $\mathbb{C}$ есть спектр некоторого элемента некоторой банаховой алгебры (даже оператора в l_2)
Указание. Рассмотреть $A = C(\Omega)$ (или диагональные операторы).

Дадим два эквивалентных определения изометрического изоморфизма.

Определение 4. *Изометрическим изоморфизмом (банаховых алгебр)* называется

1) изометрический гомоморфизм обладающий обратным изометрическим гомоморфизмом.

2) гомоморфизм, который является изометрическим изоморфизмом банаховых пространств.

Задача 3 (Теорема Гельфанда - Мазура). Пусть A - банахово тело ($InvA = A\backslash\{0\}$), тогда существует изометрический изоморфизм $A \simeq \mathbb{C}$

Определение 5. *Спектральным радиусом элемента $a \in A$* называется

$$r(a) = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \tag{1.7}$$

Теорема 2 (без доказательства).

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} \tag{1.8}$$

Лекция 2

Банаховы алгебры

В прошлой лекции была сформулирована теорема о том, что $r(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$. Существуют элементы, у которых этот предел равен нулю, они называются *обобщённые нульстепены.* Эти элементы мешают коммутативной банаховой алгебре состоять из функций.

Определение 6. *Функциональная банахова алгебра* это подалгебра $C(\Omega)$ на некотором компакте Ω с поточечным умножением и с полной нормой $\|\cdot\| \geqslant \|\cdot\|_\infty$.

Далее будет сформулирована одна из основных теорем теории банаховых алгебр.

Теорема 3 (Гельфанда)(без доказательства)**.** *A - коммутативная унитальная банахова алгебра, в которой нет обобщённых нульстепенных элементов кроме 0, тогда она совпадает с точностью до изометрического изоморфизма банаховых алгебр с некоторой функциональной банаховой алгеброй.*

Из этой теоремы следует, что в скрытом виде, например, $L_\infty(X,\mu) = C(\Omega)$ на каком-то компакте Ω.

Полинормированные пространства

Определение и примеры

Для описания некоторых, нужных для классического анализа, сходимостей одной нормы мало. Мы можем привести несколько таких примеров.

Пример 2. Сходимости:

1) $C^\infty[a,b]$. Сходимость: $x_n \to x$, значит $\forall k = 0, 1, \ldots\ x_n^{(k)} \rightrightarrows x^{(k)}$. Эта сходимость называется классической.

2) $\mathscr{O}(\mathbb{D}^0)$ - голоморфные функции на открытом единичном диске. Сходимость: $w_n \to w$, значит $\forall K \subset \mathscr{O}(\mathbb{D}^0)\ w_n|_K \rightrightarrows w$. Эта сходимость называется Вейерштрассовской.

3) $c_\infty = \mathbb{C}^\mathbb{N}$. Покоординатная сходимость.

Задача 4. Нет нормы в соответствующем пространстве, которая задавала бы

1) Классичекую сходимость.

2) Вейершрассовскую сходимость.

3) Покоординатную сходимость.

Определение 7. *Полинормированное пространство* $(E, \|\cdot\|_\nu)$ - это линейное пространство, в котором задано семейство $\|\cdot\|_\nu,\ \nu \in \Lambda$ преднорм.

Когда задано полинормированное пространство, имеет смысл рассматривать, так называемые *преднормы, сопутствующие данной системе*, то есть необходимо выбрать конечное число преднорм из семейства и рассматривать преднорму

$$\|\cdot\|' := \max\{\|\cdot\|_{\nu_1}...\|\cdot\|_{\nu_N}\}. \tag{2.1}$$

Лучше всего, когда задана система, одновремено рассматривать также сопутствующие преднормы.

Пример 3. Примеры полинормированных пространств:

0) Сильнейшее полинормированное пространство - линейное пространство со всеми существующими преднормами.

0а) Слабейшее полинормированное пространство - линейное пространство с одной преднормой $\|\cdot\| \equiv 0$.

1) $C^\infty[a,b]$. Индексное множество $\Lambda = 0,1,2...$, $\|x\|_n = \max\{|x^{(n)}(t)|; a \leqslant t \leqslant b\}$ - стандартная норма.

2) $\mathscr{O}(U)$. Индексное множество $\Lambda = \{K \subset U\}$, преднорма: $\|w\|_K = \max\{|w(z)|; z \in K\}$.

3) c_∞. Индексное множество $\Lambda = \mathbb{N}$, преднорма: $\|\xi_n\| = |\xi_n|$.

4) $\mathscr{B}(H)$ - все ограниченные операторы в гильбертовом пространстве.

4а) Индексное множество $\Lambda := H$, преднорма: $\|T\|_x := \|Tx\|$ (обозначается so и называется сильной операторной преднормой).

4б) Индексное множество $\Lambda = H \times H$, преднорма: $\|T\|_{x,y} := |\langle Tx, y\rangle|$(обозначается wo и называется слабой операторной преднормой).

Топология в полинормированных пространствах

В прошлом семестре мы рассматривали преднормированное пространство, оно является предметрическим, если оно предметрическое, то оно топологическое. Теперь у нас полинормированное пространство, предметрическим его вообще говоря не сделаешь, а вот топологическим можно сделать.

Определение 8. Зафиксируем $x \in E,\ \nu_1...\nu_n,\ r > 0$. *Стандартным открытым шаром* называется

$$U_{x,\nu_1,...\nu_n,r} = \{y \in E : \|y - x\|_{\nu_k} < r,\ k = 1,...n\}. \tag{2.2}$$

Замечание. Если пользоваться сопутствующими преднормами, то можно ограничиться одним шаром и рассмотреть $\{y \in E : \|y - x\|' < r\}$. Также заметим, что $U_{x,\nu_1,...\nu_n,r} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{x,\nu_k,r}$.

Определение 9. $x \in M$ называется *внутренней точкой подмножества* $M \subset E$, если она принадлежит M вместе с некоторым стандартным открытым шаром.

Определение 10. *Открытым подмножеством* E называется подмножество, у которого все точки внутренние.

Задача 5. Проверить, что стандартный открытый шар является открытым множеством.

Предложение 7 (доказать самостоятельно)**.** *Совокупность открытых множеств - топология в пространстве* E.

Указание. $U_{x,\nu_1,\dots\nu_n,r} \cap U_{x,\mu_1,\dots\mu_m,s} \subseteq U_{x,\nu_1,\dots\nu_n,\mu_1,\dots\mu_m,\min\{r,s\}}$. Будем называть эту топологию *топологией, порождённой заданным семейством преднорм.*

Задача 6. Данная топология не меняется если к заданным преднормам присоединить все сопутствующие.

Задача 7. Предбаза этой топологии это $U_{x,\nu,r},\ \nu \in \Lambda,\ r > 0$.

Предложение 8. $x_n \to x$ *в нашей топологии, порождённой семейством преднорм* $\Leftrightarrow$

$$\forall \nu \in \Lambda\ \|x - x_n\|_\nu \to 0$$

$(x_n \to x$ *в любом преднормированном пространстве* $(E, \|\cdot\|_\nu))$.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть задано $\nu, \varepsilon > 0$. Рассмотрим стандартный шар $U_{x,\nu,\varepsilon}$, начиная с некоторого n, $x_n \in U_{x,\nu,\varepsilon}$, то есть $\|x - x_n\|_\nu < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Возьмём открытое $U \ni x$, x - внутренняя точка, значит $U \supset U_{x,\nu_1,\dots\nu_n,r}$. Знаем, что $\forall k = 1...n$ $\|x - x_m\|_{\nu_k} \to 0$, значит, начиная с некоторого номера,

$$\max\{\|x - x_m\|_{\nu_k}\} < r,\ k = 1, ...n,$$

значит, начиная с некоторого номера, $x_m \in U_{x,\nu_1,\dots\nu_n,r}$, следовательно, начиная с некоторого номера, $x_m \in U$.

$\square$

Отсюда немедлено следует описание сходимостей в нужных пространствах:

- в $C^\infty[a, b]$ - классическая,
- в $\mathscr{O}(\mathbb{D}^0)$ - вейерштрассовская,
- в c_∞ - покоординатная,
- $(\mathscr{B}(H), so)$ - повекторная: $\forall x\ T_n x \to Tx$,
- $(\mathscr{B}(H), wo)$ - попробовать самостоятельно доказать. Подсказка: сходимость матричных элементов в любом базисе.

Задача 8. Когда последовательность векторов сходится в сильнейшем полинормированном пространстве? (В слабейшем какая угодно к чему угодно).

В топологии выделяется важный класс пространств - хаусдорфовы. Это когда две разные точки обладают непересекающимися окрестностями. Этот факт выражается на языке преднорм. Всюду далее, если не оговаривается другое, у нас есть пространство E с заданым сеймейством преднорм.

Предложение 9. *E - хаусдорфово* $\Leftrightarrow$ $\forall x \neq 0\ \exists \nu \in \Lambda :\ \|x\|_\nu > 0.$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Рассмотрим $x \neq y$, значит $x - y \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists \nu \in \Lambda : \|x - y\|_\nu := \Theta > 0$. Тогда из неравенства треугольника

$$U(x, \nu, \frac{\Theta}{2}) \cap U(y, \nu, \frac{\Theta}{2}) = \emptyset.$$

$\Rightarrow$ $x \neq 0$, значит $\exists U_{0,\nu_1,\ldots\nu_n,r} :\ x \notin U_{0,\nu_1,\ldots\nu_n,r}$, тогда $\exists k :\ \|x\|_{\nu_k} \geqslant r > 0.$

□

Операторы в полинормированных простраcтранствах

Теорема 4. *Рассмотриим $(E, \|\cdot\|_\mu)$, $\mu \in \Gamma$ и $(F, \|\cdot\|_\nu)$, $\nu \in \Lambda$ и линейный оператор $T : E \to F$, тогда данные утверждения эквивалентны:*

1) T - непрерывен (в любой точке).

2) T - непрерывен в 0.

3) $\forall \nu \in \Lambda\ \exists \mu_1, \ldots\mu_n \in \Gamma$ и $C > 0 : \forall x \in E$

$$\|Tx\|_\nu \leqslant C \max\{\|x\|_{\mu_k}, k = 1, \ldots n\} \tag{2.3}$$

Можно переформулировать для сопутствующей преднормы в E: T ограничен как оператор из $(E, \|\cdot\|'_\mu)$ в $(F, \|\cdot\|_\nu), \nu \in \Lambda$.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3) Возьмем шар $U_{0,\nu,1} \in F$. Знаем, что по непрерывности $\exists U_0 \subset E :$ $T(U_0) \subset U_{0,\nu,1}$. U_0 содержит $U_{0,\mu_1,\ldots\mu_n,r}$ такой, что $T(U_{0,\mu_1,\ldots\mu_n,r}) \subset U_{0,\nu,1}$, то есть когда $\|x\|' < r$ выполнено $Tx \in U_{0,\nu,1}$, то есть $\|Tx\|_\nu < 1$.
Положим

$$y := \frac{r}{2\|x\|' x}, \text{ ясно, что } \|y\|' = \frac{r}{2} < r.$$

Поэтому $\|Ty\|_\nu < 1$, значит

$$\left\| \frac{r}{2\|x\|'} Tx \right\|_\nu < 1,$$

то есть

$$\|Tx\|_\nu < \frac{2}{r}\|x\|'.$$

Осталось положить $C = \frac{2}{r}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Надо для U_{Tx} найти V_x такое, что $T(V_x) \subset U_{Tx}$. Достаточно считать, что $U_{Tx} = U_{Tx,\nu_1,..\nu_M,r}$. Знаем, что $\forall k\ \exists \|\cdot\|'_k$ в E такая, что $\forall z \in E$

$$\|Tz\|_\nu \leqslant C_k\|z\|'_k \tag{$*$}$$

Положим $\|\cdot\|' := \max\{\|\cdot\|'_k, k = 1, ...n\}$, возьмем $s := \min\limits_k\{\frac{r}{C_k}\}$. Рассмотрим

$$V_x := \{y : \|y - x\|' < s\}.$$

Хотим, чтобы $T(V_x) \subset U_{Tx}$. Если $y \in V_x$, то из $(*)$ следует, что

$$\|Ty - Tx\| \leqslant C_k\|y - x\|'_k \leqslant C_k\|y - x\|' \leqslant C_k s \leqslant r,$$

то есть $Ty \in U_{Tx}$.

$\square$

Обозначение. $\mathscr{B}(E,F)$ - множество непрерывных операторов из E в F.
$\mathscr{B}(E,F) \subset \mathscr{L}(E,F)$ - все линейные операторы.

Следствие. *$\mathscr{B}(E,F)$ подпространство $\mathscr{L}(E,F)$.*

Доказательство. Рассмотрим $S, T \in \mathscr{B}(E,F)$,зададим $\nu \in \Lambda$, нужно доказать, что $S + T \in \mathscr{B}(E,F)$. S ограничен между $(E, \|\cdot\|^{(1)})$ в $(F, \|\cdot\|_\nu)$, T ограничен между $(E, \|\cdot\|^{(2)})$ в $(F, \|\cdot\|_\nu)$. Введём

$$\|\cdot\|' := \max\{\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}\}.$$

Тогда S и T оба ограничены между $(E, \|\cdot\|')$ в $(F, \|\cdot\|_\nu)$, тогда $S+T$ ограничен между $(E, \|\cdot\|')$ в $(F, \|\cdot\|_\nu)$, значит $S + T$ - непрерывен. Доказать, что cT - непрерывен самостоятельно. $\square$

Топологии, заданные различными семействами преднорм

Определение 11. Система $\|\cdot\|_\nu\ \nu \in \Lambda$ *мажорирует* $\|\cdot\|$, если есть сопутствующая преднорма $\|\cdot\|'$ такая, что $\|\cdot\| \leqslant C\|\cdot\|'$ для некоторой $C > 0$. Система $\|\cdot\|_\nu$ *мажорирует систему* $\|\cdot\|_\mu\ \mu \in \Gamma$, если она мажорирует любую преднорму из системы $\|\cdot\|_\mu$. Системы называются *эквивалентными*, если каждая мажорирут другую.

Предложение 10. *Рассмотрим τ_1, τ_2 - топологии заданные разными сесействами преднорм. Первая система мажорирует вторую $\Leftrightarrow$ τ_1 не слабее τ_2 $(\tau_1 \subseteq \tau_2)$.*

Доказательство. Первое заявление эквивалентно тому, что $\mathbb{1} : (E, \|\cdot\|_\nu) \to (E, \|\cdot\|_\mu)$ - непрерывен из теоремы 4, то есть $\mathbb{1} : (E, \tau_1) \to (E, \tau_2)$ - непрерывен (прообраз открытого в τ_2 открыт в τ_1), значит, что в первой топологии открытых множеств не меньше чем во второй. $\square$

Следствие. *Обе топологии совпадают $\Leftrightarrow$ наши системы эквивалентны.*

Задача 9. Система преднорм в $\mathscr{O}(U)$ эквивалентна своей счётной подсистеме.

Задача 10. Топология в E может быть задана одной преднормой (E преднормировано) $\Leftrightarrow$ система $\|\cdot\|_\nu$ эквивалентна своей конечной подсистеме.

Лекция 3

Полинормированные пространства

Задача 11. Топология в E задаётся предметрикой $\Leftrightarrow$ система $\|\cdot\|_\nu$ эквивалентна своей счётной подсистеме.
Указание Если есть подсистема $\|\cdot\|_n$, то рекомендуется рассмотреть

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x-y\|_n}{2^n(1+\|x-y\|_n)}.$$

Оказывается это будет предметрикой.

Задача 12. Сильнейшее полинормированное топологическое пространство не метризуемо (разрешается использовать существование алгебраического базиса).

Определение 12. *Топологическим изоморфизмом* между полинормированными пространствами называется $T : E \to F$, если он сам непрерывный и существует непрерывный обратный.

Задача 13. В пространстве $C^\infty[a,b]$. Доказать, что $D : x \mapsto x^{'}$ непрерываен.

Задача 14. В $\mathscr{O}(\mathbb{D}^0)$. Доказать, что $D : w \mapsto w^{'}$ непрерывен.
Указание Использовать интегральные формулы комплексного анализа.

Задача 15. В $C^\infty[a,b]$ умножение на гладкую функцию непрерывный оператор (использовать формулу Лейбница).

Задача 16. При фиксированном $S \in \mathscr{B}(H)$ рассмотрим операторы $T \mapsto ST$ и $T \mapsto TS$ в $\mathscr{B}(H)$ непрерывны как в сильной операторной топологии, так и в слабой.

Слабые топологии

Функционалы в полинормированных пространствах

Сейчас всё будет задаваться с помощью функционалов, пусть в теореме 4 F будет полем скаляров.

Теорема 5 (Частный случай теоремы 4)**.** *Пусть задан линейный функционал $f : (E, \|\cdot\|_\nu, \nu \in \Lambda) \to \mathbb{C}$, тогда следующие условия эквивалентны*

1) f - непрерывен.

2) f - непрерывен в 0.

3) $\exists \nu_1, ...\nu_n \in \Lambda,\ C > 0 :\ \forall x \in E\ |f(x)| \leqslant C \max\{\|x\|_{\nu_k}, k = 1...n\}$

Мораль(чтобы на экзамене не говорить глупости): функционал непрерывен, когда найдется хоть одна сопутствующая преднорма, по которой он непрерывен в классическом смысле.
Обозначение. E^* - непрерывные линейные функционалы на E.

Задача 17. В сильнейшем полинормированном пространстве $E^* = E^{\#}$, то есть все линейные функционалы непрерывны.

Как и в прошлой лекции фиксируем $(E, \|\cdot\|_\nu, \nu \in \Lambda)$.

Предложение 11. *Пусть E - хаусдорфово. Тогда $\forall x \in E,\ x \neq 0\ \exists f \in E^*:$ $f(x) \neq 0$. (Можно понимать как : на хаусдорфовом пространстве достаночно непрерывных функционалов, чтобы различать разные векторы).*

Доказательство. По хаусдорфовости $\exists \nu \in \Lambda:\ \|x\|_\nu > 0$. Теперь рассмотрим $(E, \|\cdot\|_\nu)$. По теореме Хана-Банаха $\exists f$ - ограниченный на $(E, \|\cdot\|_\nu)$ с $f(x) = 1$. И он непрерывен. □

Определение и основные свойства

Определение 13. *Слабая система преднорм в E:*

$$\Lambda = E^*,\ \|x\|_f = |f(x)|. \tag{3.1}$$

Обозначается w, топология тоже обозначается w и называется слабой.

Определение 14. *Слабая* система преднорм в E^*:*

$$\Lambda = E,\ \|f\|_x = |f(x)|. \tag{3.2}$$

Обозначается w^*, топология тоже обозначается w^* и называется слабой*.

Посмотрим, какие сходимости в определённых выше топологиях.

- Слабая: $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in E^*\ f(x_n) \to f(x)$.
- Слабая*: $f_n \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow \forall x \in E\ f_n(x) \to f(x)$.

Будем сравнивать топологии.

Предложение 12. *Слабая топология не сильнее исходной.*

Доказательство. Надо показать, что исходная система мажорирует $\|\cdot\|_f$ $\forall f \in E^*$. Из непрерывности f

$$\forall x \in E\ |f(x)| \leqslant C\|x\|'$$

для сопутствующей к заданной преднормы.

$$\|x\|_f = |f(x)| \Rightarrow \|x\|_f \leqslant C\|x\|'.$$

□

Некоторые факты, связанные с линейной алгеброй

Предложение 13. *$dim\ E = \infty,\ f_1, ...f_n \in E^{\#}$,
$E_n = \{x \in E : f_1(x) = ... = f_n(x) = 0\}$ ($E_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k$), тогда $dim\ E_n = \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим $T : E \to \mathbb{C}^n :\ x \mapsto (f_1(x), ...f_n(x))$. Ясно что $Ker\ T = E_n$. В E существует $F \subset E :\ E = E_n \oplus F$. $T|_F : F \to \mathbb{C}^n$ - инъективен, следовательно $T(F) \subset \mathbb{C}^n$ изоморфно F, значит $T(F)$- конечномерно, а значит и F конечномерно. E бесконечномерно, а значит и E_n бесконечномерно. □

Предложение 14. *Если E - полинормированное пространство, $dim\ E = \infty$, то любая окрестность нуля содержит бесконечномерное прстранство.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $U_{0,f_1,...f_n,r} \subset E$, он содержит $\{x : f_1(x) = ... = f_n(x) = 0\}$ $(0 < r!)$, а по предыдущему предложению это бесконечномерное подпространство. □

Задача 18. Если бесконечномерное E ещё и хаусдорфово, то $dim\ E^* = \infty$.

Предложение 15. (E^*, w^*) *всегда хаусдорфово.*

Доказательство. Берем $f \in E^*,\ f \neq 0$, значит $\exists x \in E :\ f(x) \neq 0 \Rightarrow \|f\|_x > 0$ □

Лемма 1. *E - линейное пространство, пусть $\exists f_1, ...f_n \in E^{\#} : \forall x \neq 0\ \exists k : f_k(x) \neq 0$ (то есть $\bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k = 0$). Тогда $E^{\#} = span\{f_1, ...f_n\}$.*

Доказательство. Из предложения 13 $dim\ E < \infty$, иначе $dim\ E_n = \infty$, а у нас оно 0. Пусть $e_1, ...e_m$ - алгебраический базис в E. Из курса линейной алгебры: в этом случае $E^{\#}$ - тоже конечномерно, даже m - мерно, причем существует линейный изоморфизм
$$I : E^* \to \mathbb{C}^m :\ f \mapsto (f(e_1), ...f(e_n)) \qquad (*).$$
Пусть напротив $E^0 := span\{f_1, ...f_m\}, E^0 \subsetneq E^{\#}$. Тогда $I(E^0) \subsetneq \mathbb{C}^m$. Тогда
$$\exists \hat{g} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C},\ \hat{g} \neq 0,\ \hat{g}|_{I(E^0)} = 0,$$
в частности
$$\hat{g}(I(f_k)) = 0,\ k = 1, ...m. \qquad (**)$$
Из линейной алгебры: всякий функционал на $\mathbb{C}^m$ задаётся m числами $\eta = (\eta_1, ...\eta_m)$ и действует так: возьмём вектор $\xi = (\xi_1, ...\xi_m)$,
$$\xi \mapsto \sum_{l=1}^{m} \eta_l \xi_l.$$
Это верно и для $\hat{g}$. Так как $\hat{g} \neq 0$, значит $(\eta_1, ...\eta_m) \neq 0$. Зафиксируем $(\eta_1, ...\eta_m)$ для $\hat{g}$.
По $(*)$
$$I(f_k) = (f_k(e_1), ...f_k(e_m)).$$

Из $(**)$ $\hat{g}(I(f_k)) = 0$, тогда получаем, что

$$\sum_{l=1}^{m} \eta_l f_k(e_l) = 0 \Rightarrow f_k(\sum_{l=1}^{m} \eta_l e_l) = 0,$$

но из-за линейной независимости получается, что $\sum\limits_{l=1}^{m} \eta_l e_l \neq 0$. Оказалось, что есть вектор отличный от 0, что все f_k от него дают 0. Противоречие. $\square$

Предложение 16. *Пусть E любое, $f_1, ...f_n \in E^{\#}$ и ещё $f \in E^{\#}$ такие, что если для $x \in E$ $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$, то и $f(x) = 0$ (то есть $\bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k \subseteq Ker\ f$). Тогда $f \in span\{f_1, ...f_n\}$.*

Доказательство. Пусть $E_0 := \bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k$. Имеем, что $f|_{E_0} = 0$. Рассмотрим факторпространство E/E_0. И построим диаграмму

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "f_k"] & \\ E/E_0 \arrow[r, "\tilde{f}_k"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Имеем естественную сюръекцию $\tau : E \to E/E_0$:
$x \mapsto x + E_0$ и $f_k : E \to \mathbb{C}$, так как $f_k = 0$ на E_0, значит корректно определён

$$\tilde{f}_k : E/E_0 \to \mathbb{C} : \ \tilde{f}_k(x + E_0) := f_k(x),$$

но ведь и $f|_{E_0} = 0$, значит так же появляется

$$\tilde{f} : E/E_0 \to \mathbb{C} : \ \tilde{f}(x + E_0) := f(x).$$

$\tilde{f}_k$ удовлетворяет условиям леммы 1, а именно, если $\dot{x} = x + E_0 \neq 0$, тогда есть $\tilde{f}_k$ с $\tilde{f}_k(\dot{x}) \neq 0$, действительно, $\dot{x} \neq 0$, значит $x \notin E_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{n} Ker\ f_k$, значит $\exists f_k$ с $f_k(x) \neq 0$, иначе говоря, $\tilde{f}_k(\dot{x}) = f_k(x) \neq 0$. Тогда $(E/E_0)^{\#} = span\{\tilde{f}_1, ...\tilde{f}_n\}$, в частности $\tilde{f} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{f}_k$, но тогда

$$f(x) = \tilde{f}(x + E_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{f}_k(x + E_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x).$$

Это означает, что $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$. $\square$

Сопряжённые пространства

Рассматриваем $(E, \|\cdot\|_\nu, \nu \in \Lambda)$. Нас интересуют пространства $(E, w)^*$ и $(E^*, w^*)^*$.

Предложение 17. *Функционал на E непрерывен в $w \Leftrightarrow$ он непрерывен в исходной топологии (то есть $(E, w)^* = E^*$).*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Рассмотрим $\mathbb{1} : (E, \text{исх}) \to (E, w)$, он непрерывен, возьмем $f : (E, w) \to \mathbb{C}$ - непрерывный, видим, что из-за того что композиция непрерывных неперывна, то $(E, w)^* \subseteq E^*$.
- $\Leftarrow$ Надо: $f \in E^*$ непрерывен по одной из сопутствующих преднорм ($|f(x)| \leqslant C\|x\|'$). По определению слабой топологии $\|x\|_f = |f(x)|$ то есть $|f(x)| \leqslant 1 \cdot \|x\|_f$.

□

Терминология. Будем рассматривать $\alpha : E^* \to \mathbb{C}$, он называется *функционалом означивания*, если $\exists x \in E : \ \alpha(f) = f(x)$. Термин употребляется для любого подпространства в $E^\#$.

Предложение 18. *$\alpha : E^* \to \mathbb{C}$ непрерывен в w^*-топологии $\Leftrightarrow$ он функционал означивания.*

Доказательство.

- $\Leftarrow$ Надо: $|\alpha(f)| \leqslant C\|f\|'$ к системе w^*. Но $|\alpha(f)| = |f(x)| = \|f\|_x \leqslant 1 \cdot \|f\|_x$.

Обратно в следующей лекции. □

Лекция 4

Слабые топологии

Сопряжённые пространства

Докажем предложение 18 в обратную сторону.

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\alpha(f)$ - непрерывен в w^*, значит $\exists x_1, ...x_n,\ C>0:\ \forall f$

$$|\alpha(f)| \leqslant C\max\{\|f\|_{x_k},\ k=1...n\} = C\max\{|f(x_k)|,\ k=1,...n\}. \qquad (*)$$

Введём функционалы $\alpha_k : E^* \to \mathbb{C} : f \mapsto f(x_k)$ - это функционалы означивания. Если $\alpha_k(f)=0$, то неравенство $(*)$ заведомо выполнено, значит

$$\alpha(f) = |\alpha(f)| \leqslant C\cdot 0 = 0.$$

В предложении 16 надо подставить E^* вместо E, α_k вместо f_k, α вместо f и отсюда $\alpha = \sum\limits_k \lambda_k\alpha_k$, значит

$$\forall f\ \ \alpha(f) = \sum_k \lambda_k\alpha_k(f) = \sum_k \lambda_k f(x_k) = f\left(\sum_k \lambda_k x_k\right).$$

Положим $x := \sum\limits_k \lambda_k x_k$, тогда $\alpha(f) = f(x)$.

□

Задача 19. Если E хаусдорфово, то с точностью до линейного изоморфизма $(E^*, w^*)^* = E$.

Слабые топологии в нормированных пространствах

Теперь рассматриваем E - нормированное пространство, норма задаёт "нормовую топологию". Помним, что всегда слабая топология не сильнее нормовой, так как она не сильнее исходной.

Предложение 19. *Если E бесконечномерное нормированное пространство, то w строго слабее нормовой.*

Доказательство. Нужно показать, что в слабой топологии открытых множеств существенно меньше. Знаем, что окрестность 0 в слабой топологии содержит бесконечномерное подпространство, а в нормовой топологии $Ш^0_E$ не содержит никакого подпространства. □

Задача 20 (*)**.** В l_1 последовательность сходится слабо $\Leftrightarrow$ она сходится по норме. Верен ли этот факт в l_2? Нет.

Рассмотрим E^*, там три топологии: w, w^* и нормовая.

Предложение 20. *В E^* w^* не сильнее w.*

Доказательство. Достаточно показать, что система преднорм w^* - часть системы преднорм w, то есть любая преднорма $\|\cdot\|_x$ $x \in E$ есть $\|\cdot\|_\alpha,\ \alpha : E^* \to \mathbb{C}$. Положим $\alpha : f \mapsto f(x)$. Осталось показать, что α непрерывен по норме.

$$|\alpha(f)| = |f(x)|,\ f \in E^*,$$

f - ограничен, значит

$$|\alpha(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\|\|f\|.$$

Значит α ограничен с константой $C := \|x\|$. Итак, $\|\cdot\|_\alpha$ входит в систему (E^*, w). $\square$

Задача 21. Если E рефлексивно (в частности если оно гильбертово), то $w^* = w$.

Задача 22. Если $E = l_1 = c_0^*$, то w^* строго слабее w.
Указание. $l_1^* = l_\infty$. Нужно взять $(1, 1, 1, 1, 1, ...)$.

Сопряжённые операторы

E, F - полинормированные, $E \xrightarrow{T} F$ возникает естественно хотя бы линейный $T^* : F^* \to E^*$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T^*f"'] & F \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Определение 15. $T^* : F^* \to E^*$ называется *сопряжённым к T*, если

$$T^*f(x) = f(Tx) \tag{4.1}$$

Теорема 6. *T^* непрерывен относительно w^* топологии в E^* и F^*.*

Доказательство. Берём $\|\cdot\|_x,\ x \in E$,

$$\|T^*f\|_x = |f(Tx)| = \|f\|_{Tx} \leqslant 1 \cdot \|f\|_{Tx}.$$

$\square$

Задача 23 (*). E, F нормированные, $S : F^* \to E^*$ ограничен по норме, тогда $S = T^*$ для ограниченного $T : E \to F \Leftrightarrow S$ непрерывен относительно w^*.

Достаточные подпространства

Нас интересует, E - полинормированное, рассматриваем E^* с w^*, плотные подпространства в (E^*, w^*). Напоминание: $E^0 \subseteq E^\#$. Говорят, что оно называется *достаточным*, если

$$\forall x \in E,\ x \neq 0\ \exists f \in E^0 :\ f(x) \neq 0. \tag{4.2}$$

На одной из предыдущих лекций была доказана достаточность E^*.

Лемма 2. *Пусть E^0 достаточно, $x_1, ...x_n \in E$ линейно независимые и любые $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{C}$. Тогда $\exists f \in E^0 : \ f(x_k) = \lambda_k, \ k = 1, ...n$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $T : E^0 \to \mathbb{C}^n : \ f \mapsto (f(x_1), ...f(x_n))$. Надо доказать, что T сюръективен. Пусть это не так, то есть $T(E^0) \subsetneq \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ - гильбертово, значит

$$\exists \xi \in \mathbb{C}^n, \ \xi \neq 0 : \ \xi \perp T(E^0),$$

то есть $\forall f \in E^0$ $\langle Tf, \xi\rangle = 0$. Но если $\xi = (\xi_1, ...\xi_n)$, то это означает, что $\sum\limits_k f(x_k)\overline{\xi_k} = 0$, то есть $f(x) = 0$ для $x = \sum\limits_k \overline{\xi_k} x_k, \ \overline{\xi_k}$ не все 0, значит $x \neq 0$. Получаем противоречие с достаточностью E^0. □

Предложение 21. *E - полинормированное пространство, $E^0 \subset E^*$, пусть E^0 достаточно. Тогда E^0 плотно в E^* относительно топологии w^*.*

Доказательство. Берем $f \in E^*$ и его окрестность U_f в w^*- топологии E^*. Знаем, что

$$U_f \supseteq U_{f,x_1,...x_n,\varepsilon} = \{g : \ \|f - g\|_{x_k} = |f(x_k) - g(x_k)| < \varepsilon, k = 1, ...n\}.$$

Возьмем максимальную линейно независимую подсистему $x_1, ...x_m, \ m \leqslant n$. Положим $\lambda_k := f(x_k), \ k = 1...n$ и получаем, что по лемме 2

$$\exists g \in E^0 : \ g(x_k) = f(x_k).$$

Отсюда $g \in U_{f,x_1,...x_n,\varepsilon} \subset U_f$. □

Теорема 7 (Банаха - Алаоглу) (без доказательства)**.** *E - нормированное. Рассмотрим $Ш_{E^*} = \{f \in E^* \ \|f\| \leqslant 1\}$, тогда этот шар компактен в w^* - топологии.*

Задача 24. E - сепарабельное нормированное пространство, задана последовательность функционалов $f_n \in E^*$, ограниченныч в совокупности по норме. Тогда $\exists f_{n_k}$, которая слабо* сходится в в E^*, то есть $\forall x \in E$ $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Пробные и обобщённые функции

Основные пространства пробных функций

1. $\mathcal{D} = C^\infty_{00}$ - бесконечно гладкие функции с компактным носителем (финитные). Примеры:

- горбушка
$$г(t) = C\exp^{\frac{t}{t^2-1}} \tag{4.3}$$
- в -1 и 1 равна нулю вместе со всеми своими призводными, вне отрезка доопределяется нулём.

- шляпа
$$ш_{a,b,r}(t) = C\int\limits_{a-\frac{r}{2}}^{b+\frac{r}{2}} г(c(s-t))ds, a \leqslant b \tag{4.4}$$

Задача 25. Если c такова, что г(cs) сосредоточена на отрезке $[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}]$, а C такова, что $C \int\limits_{-\infty}^{\infty}$ г$(cs)ds = 1$, то

$$\text{ш}_{a,b,r}(t) = \begin{cases} a - r \leqslant t \leqslant a & \text{возрастает от 0 до 1} \\ a \leqslant t \leqslant b & \text{ш} \equiv 1 \\ b \leqslant t \leqslant b + r & \text{убывает от 1 до 0} \end{cases}$$

Утверждается, что она принадлежит $\mathcal{D}$

Определение 16. *Стандартной преднормой в $\mathcal{D}$* называется

$$\|\phi\|_n^{(N)} = \max_{k=0,\dots n}\big(\max_{t\in[-N,N]} |\phi^{(k)}(t)|\big),\ \phi \in \mathcal{D}. \tag{4.5}$$

Сходимость по такой преднорме - классическая сходимость.
В $\mathcal{D}$ есть естественная последовательность подпространств

$$\mathcal{D}_N = \{\phi \in \mathcal{D} :\ \phi = 0 \text{ вне } [-N, N]\}, \tag{4.6}$$

ясно, что $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{D}_N$.

Определение 17. Преднорма $\|\cdot\|$ в $\mathcal{D}$ называется *допустимой*, если

$$\forall N\ \exists n,\ C > 0 :\ \forall \phi \in \mathcal{D}_N \text{ выполняется } \|\phi\| \leqslant C\|\phi\|_n^N. \tag{4.7}$$

По-другому: $\forall N$ на $\mathcal{D}_N \subset C^\infty[-N, N]$ преднорма мажорируется стандартной (для разных $\mathcal{D}_N$ разные стандартные).

Обозначение. d - система допустимых преднорм в $\mathcal{D}$, аналогично обозначаем и топологию. Ясно, что система вместе с каждой парой содержит и максимум из этих двух преднорм, следовательно не надо специально рассматривать сопутствующие, так как они уже входят в систему. Также все стандартные заведомо допустимы.

Пример 4.

1) Рассмотрим непрерывную функцию на прямой $\alpha(t) > 0$, свяжем с этой функцией преднорму (на самом деле норму)

$$\|\phi\|_\alpha = \max\{\alpha(t)|\phi(t)|, t \in \mathbb{R}\},\ \phi \in \mathcal{D}.$$

Ясно, что она допустимая, достаточно $n = 0$, а $C = \max\{\alpha(t)\, t \in [-N, N]\}$.

2) Возьмем преднорму $\|\phi\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\phi^{(k)}(k)|$. Она допустимая, самим придумать n и C для каждого N.

2. $\mathcal{S}$ - пространство Шварца.

Определение 18. *Быстро убывающая гладкая функция* это такая $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\forall p, q = 0, 1, ...$ выполняется

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p \phi^{(q)}(t)| < \infty. \tag{4.8}$$

Лекция 5

Пробные и обобщённые функции

Основные пространства пробных функций

2. Продолжаем рассматривать $\mathcal{S}$ - пространство Шварца. Состоит из гладких бесконечно убывающих функций.
Пример: $\phi(t) = \exp^{-\frac{t^2}{2}}$.

Пространство снабжается счётной системой преднорм (которые являются нормами, вообще говоря):

$$\|\phi\|_{p,q} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p \phi^{(q)}(t)|. \tag{5.1}$$

Обозначается данная система преднорм и топология s.

3. $\mathcal{E} = C^\infty(\mathcal{R})$. Система преднорм - стандартные преднормы $\|\cdot\|_n^N$. Топология и система преднорм обозначается e.

Видим, что существует такое соотношение $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

В $\mathcal{E}$ - классическая сходимость, то есть равномерная со всеми производными на любом отрезке.

В $\mathcal{S}$ сформулируем в виде задачи.

Задача 26. $\phi_m \to \phi$ в $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow$ $\forall p$ $t^p\phi_m \to t^p\phi$ классически на всей $\mathbb{R}$.

В $\mathcal{D}$ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8. *$\phi_m \to \phi$ в $\mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$*

1) $\exists N:$ все $\phi_m = 0$ вне $[-N, N]$

2) сужение ϕ_m на $[-N, N]$ сходится к ϕ классически.

Доказательство.

$\Leftarrow$ Заменим ϕ_m на $\phi - \phi_m$, а ϕ на 0. Теперь достаточно доказать, что новая $\phi_m \to 0$. Надо, чтобы для любой допустимой преднормы $\|\phi_m\| \to 0$. Возьмём N из условия 1), знаем, что все $\phi_m \in \mathcal{D}_N$. Там

$$\|\cdot\| \leqslant C\|\cdot\|_n^N. \tag{$*$}$$

Но пункт 2) означает, что $\|\phi_m\|_n^N \to 0 \Rightarrow \|\phi_m\| \to 0$.

$\Rightarrow$ Пусть нет общего носителя. Тогда $\exists t_k \in \mathbb{R}$ и подпоследовательность ϕ_{m_k} : $|t_k| \to \infty$, а $\phi_{m_k}(t_k) \neq 0$ и существует непрерывная $\alpha(t) > 0$ на $\mathbb{R}$ с

$$\alpha(t_k) = \frac{1}{|\phi_{m_k}(t_k)|},$$

она даже кусочно-линейная (построить слушателям). По α можем построить преднорму $\|\cdot\|_\alpha$ - она допустимая (пример из прошлой лекции), значит $\|\phi_{m_k}\|_\alpha \to 0$.

$$\|\phi_{m_k}\|_\alpha = \max_{\mathbb{R}} |\alpha(t)\phi_{m_k}(t)| \geqslant \alpha(t_k)|\phi_{m_k}(t_k)| = 1.$$

Противоречие, 1) доказан.
Раз есть общий носитель, то $\forall \phi_m \in \mathcal{D}_N$, стандартные преднормы допустимы, получаем, что $\|\phi_m\|_n^N \to 0$, а это и есть классическая сходимость на $[-N, N]$.

□

Ясно, что все три пространства хаусдорфовы.

Задача 27. $\mathcal{S}, \mathcal{E}$ - метризуемы, а $\mathcal{D}$ не метризуемо.

Предложение 22. *$\mathcal{D}$ плотно в $(\mathcal{E}, e)$.*

Доказательство. Достаточно для $\phi \in \mathcal{E}$ найти $\phi_m \in \mathcal{D}: \ \phi_m \to \phi$ в $(\mathcal{E}, e)$. Значит нужно, чтобы $\forall N, n \ \|\phi - \phi_m\|_n^N \to 0, \ (m \to \infty)$. Возьмём $\phi_m := \phi ш_{-m,m,1}$, подставляем и получаем, что для достаточно больших m

$$\phi - \phi_m \equiv 0 \text{ на } [-N, N].$$

Дальше ясно. □

Задача 28. $\mathcal{D}$ плотно в $(\mathcal{S}, s)$.
Указание. Взять функции $\phi_m = г(\frac{t}{m})$.

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Можем рассматривать меньшие пространства как подмножества больших и сравнивать топологиии.

Предложение 23. *d строго сильнее, чем топология строго сильнее чем топология в $(\mathcal{E}, e)$*

Доказательство. Не слабее, так как допустимых преднорм больше, чем стандартных. Строго сильнее: построим хотя бы одну $\phi_m \in \mathcal{D}$, сходящуюся в $(\mathcal{E}, e)$, но не в $\mathcal{D}$. Берём

$$\phi_m(t) := \phi(t - m),$$

$\|\phi_m\|_n^N$ с некоторого момента 0. Но нет сходимости в $\mathcal{D}$, так как нет общего носителя.

□

Задача 29. d строго сильнее, чем унаследованная из $(\mathcal{S}, s)$. s строго сильнее, чем унаследованная из $(\mathcal{E}, e)$.
Указание. Для второго взять не только сдвигающийся горб, но и уменьшающийся.

Рассмотрим операторы в данных пространствах.

Предложение 24. *$D : \mathcal{D} \to \mathcal{D} : \phi \mapsto \phi'$ непрерывен.*

Доказательство. Взяли допустимую $\|\cdot\|$, достаточно найти $|||\cdot|||$ и C, чтобы $\|D\phi\| \leqslant C|||\phi|||$. Положим $|||\phi||| = \|\phi'\|$ (слушателям доказать, что она допустима как и исходная).

$$\|D\phi\| \leqslant 1 \cdot |||\phi|||.$$

□

Задача 30. D непрерывен как оператор в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$.

Задача 31. Для $\psi \in \mathcal{E}$ оператор $\phi \mapsto \phi\psi$ непрерывен в $\mathcal{D}$ и в $\mathcal{E}$.

Задача 32. Если ψ умеренно растущаяя: $|\psi(t)| \leqslant C(1 + |t|)^p$ для какого-то p. Тогда оператор $\phi \mapsto \phi\psi$ неперерывен в $(\mathcal{S}, s)$.

Обобщённые функции

Определение 19. Непрерывный функционал на $(\mathcal{D}, d)$ называется *обобщённая-функция.* Непрерывный функционал на $(\mathcal{S}, s)$ называется *обобщённая-функция-умеренного-роста.* Непрерывный функционал на $(\mathcal{E}, e)$ называется *обобщённая-функция-с-компактным-носителем.*

Обозначение. Пространства обобщённых функций $\mathcal{D}^*, \mathcal{S}^*, \mathcal{E}^*$.

Предложение 25. $f \in \mathcal{D}^\#,\ f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ - *обобщённая-функция* $\Leftrightarrow\ \ \forall N\ \exists n = n(N),\ C = C(N):$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_N\ |f(\phi) \leqslant C\|\phi\|_n^N. \qquad (*)$$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Достаточно найти допустимую преднорму такую, что $\forall \phi\ |f(\phi)| \leqslant \|\phi\|$. Положим $\|\phi\| = \|\phi\|_f = |f(\phi)|$, она допустима из $(*)$.

$$|f(\phi)| \leqslant 1 \cdot \|\phi\|_f.$$

$\Rightarrow$ Известно, что $f \in \mathcal{D}^*$. Семейство допустимых содежит все сопутствующие и выдерживает умножение на константу, поэтому достаточно считать, что для какой - то допустимой преднормы

$$|f(\phi)| \leqslant \|\phi\|. \qquad (**)$$

Преднорма допустима, то $\forall N\ \exists n,\ C:$ если $\phi \in \mathcal{D}_N,$ то $\|\phi\| \leqslant \|\phi\|_n^N$. Объединим $(*)$ и $(**)$ и получаем нужное неравенство.

□

Предложение 26 (доказать самостоятельно)**.** *Рассмотрим* $f : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$, f - *обобщённая-функция-с-компактным-носителем* $\Leftrightarrow\ \exists N,\ n\ C:\ \forall \phi \in \mathcal{E}\ |f(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_n^N$.

Определение 20. *Обобщённая-функция конечного порядка* f

$$\exists n:\ \forall N\ \exists C\ \forall \phi \in \mathcal{D}_N\ |f(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_n^N. \qquad (5.2)$$

Наименьшее из таких n называется *порядок*, если такого n нет, то говорят, что функция f *бесконечного порядка.*

Задача 33. Рассмотрим $f : \phi \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \phi^{(k)}(k)$. Показать, что это обобщённая-функция бесконечного порядка.

Определение 21. *Локально интегрируемая функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ интегрируемая на любом $[-N, N]$.
Обозначение. L^{loc}

Пусть $f \in L^{loc}$, тогда положим

$$\hat{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)dt. \tag{5.3}$$

Ясно, что он линейный. $\forall n$, если $\phi \in \mathcal{D}_N$, то

$$|f(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_0^N, \text{ где } C = \int_{-N}^{N} |f(t)|dt. \tag{5.4}$$

Таким образом $\hat{f}$ - обобщённая-функция порядка 0.

Определение 22. Обобщённая-функция вида $\hat{f},\ f \in L^{loc}$ называется *регулярной*. Не регулярная функция называется *сингулярной*.

Предложение 27 (без доказательства). *$f \in L[a,b]$ такая, что $\forall \phi \in \mathcal{D}$ равной 0 вне $[a,b]$ выполняется $\int\limits_a^b f(t)\phi(t) = 0$. Тогда $f = 0$ почти всюду.*

δ - функция Дирака

Определение 23. *δ - функция Дирака*

$$\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(0). \tag{5.5}$$

Видно, что это обобщённая-функция порядка 0 (доказать самим).

Теорема 9. *δ - функция сингулярна.*

Доказательство. Зададим последовательность $\phi_n(t) = \text{г}(nt)$. Предположим противное, что $\delta = \hat{f},\ f \in L^{loc}$, тогда

$$\phi(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)dt.$$

Рассмотрим ϕ_n вместо $\phi : \phi_n \to 0$ почти всюду(всюду кроме 0),

$$|f(t)\phi_m(t)| \leqslant |f|\chi_{[-1,1]}.$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_m(t)dt \to 0$$

почти всюду. Это $\phi_n(0) = 1$. Противоречие. ☐

Аналоги δ-функции есть и в $\mathcal{S}$, и в $\mathcal{E}$.

Задача 34. Рассмотрим μ - вероятностная мера на $\mathbb{R}$ ($\mu(\mathbb{R}) = 1$).

$$\phi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t) d\mu(t).$$

Доказать, что это обобщённая-функция порядка 0 и привести пример, когда она сингулярна.

Задача 35.

$$\phi \mapsto v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|t| > \varepsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt.$$

Доказать корректность и то, что получается сингулярная обобщённая-функция порядка 1.

Лекция 6

Пробные и обобщённые функции

Обобщённые функции

Следствие(из предложения 27). $f, g \in L^{loc}$ $\hat{f} = \hat{g} \iff f \overset{п.в.}{=} g$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Ясно.

$\Rightarrow$ $\widehat{f-g} = 0$, значит $\forall \phi \in \mathcal{D}$

$$\int_{\mathbb{R}} (f(t) - g(t))\phi(t)dt = 0 \ \forall \phi \text{ вне } [a, b].$$

$$\int_a^b (f(t) - g(t))\phi(t)dt = 0,$$

тогда $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$ на $[a, b]$.Но вся прямая это счётное объединение отрезков, а мера счётно - аддитивная, значит то же самое на $\mathbb{R}$.

$\square$

Рассмотрим L_1^{loc} - множество классов эквивалентности локально интегрируемых функций.

$$L_1^{loc} = L^{loc}/\{f : \ f \overset{\text{п.в.}}{=} 0\} \tag{6.1}$$

Определим оператор

$$i : L_1^{loc} \to \mathcal{D}^* : \ \tilde{f} \mapsto \hat{f}. \tag{6.2}$$

i - инъективен: $i(\tilde{f}) = i(\tilde{g}) \Rightarrow \hat{f} = \hat{g}$ $\forall$ представителя $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, значит по следствию $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$, то есть $\tilde{f} = \tilde{g}$.

$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E} \hookrightarrow L_1^{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}^*$

Предложение 28 (доказать самим)**.** *Если $f \in L^{loc}$ и умеренного роста, то корректно определён $\hat{f} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ - обобщённая-функция-умеренного-роста*

$$\hat{f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f\phi dt. \tag{6.3}$$

В частности возникает вложение $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}^* : f \mapsto \hat{f}$.

Задача 36. Дать аналогичное обоснование термину обобщённая-функция-с-компактным-носителем.

Вводим топологию (структуру полинормированного пространства) в $\mathcal{D}^*, \mathcal{S}^*, \mathcal{E}^*$. Рассматривем на этих пространствах w^* -топологию.

Определение 24. *δ - образная последовательность* $\phi_n \in \mathcal{D}$ равная нулю вне $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n(t)dt = 1. \tag{6.4}$$

Задача 37. $\hat{\phi}_n \xrightarrow{w^*} \delta$

$\mathcal{D}$ - подпространство в $\mathcal{D}^*$, а $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}^*$.

Предложение 29. *$\mathcal{D}$ плотно в $(\mathcal{D}^*, w^*)$, а $\mathcal{S}$ плотно в $(\mathcal{S}^*, w^*)$.*

Доказательство. Ограничимся случаем $\mathcal{D}^*$, так как для $\mathcal{S}^*$ доказывается аналогично. Надо для $\psi \neq 0 \in \mathcal{D}$ найти $\phi \in \mathcal{D}$ ($\hat{\phi} \in \mathcal{D}^*$), что $\hat{\phi}(\psi) \neq 0$ (по предложению 21). Нужно найти такое ϕ, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi(t)dt \neq 0.$$

Подойдёт $\phi = \bar{\psi}$. □

Обобщённые производные

Постановка задачи : Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "T"] \arrow[d, hook] & \mathcal{D} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{D}^* \arrow[r, "\tilde{T}"] & \mathcal{D}^* \end{tikzcd}$$

Вопрос: можно ли продолжить непрерывный оператор T, чтобы был $\tilde{T} : \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$ w^* - непрерывный и диаграмма была коммутативна.

Теорема 10. *Рассмотрим $D : \mathcal{D} \to \mathcal{D} : \phi \mapsto \phi'$. Тогда $\exists! w^*$ – непрерывный $\tilde{D}$, продолжающий D и он определяется равенством*

$$(\tilde{D}f)(\phi) = f(-D\phi). \tag{6.5}$$

Иными словами, $\tilde{D} = -D^*$.

Доказательство. Сначала докажем единственность. Пусть есть $\tilde{T}$ и $\tilde{S}$, продолжающие D. $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}^*$ и $\mathcal{D}^*$ хаусдорфово. Помним, что тогда операторы совпадают на всём $\mathcal{D}^*$.
Теперь докажем существование. $-D^*$ - непрерывен будучи сопряжённым. Надо:

$$\forall \psi, \phi \in \mathcal{D} \ \tilde{D}\hat{\phi}(\psi) = \widehat{D\phi}(\psi).$$

$$[\tilde{D}\hat{\phi}](\psi) = \hat{\phi}(-D\psi) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi'(t)dt$$

$\psi \in \mathcal{D}_N$ для какого-то N, значит

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi'(t)dt = -\int\limits_{-N}^{N} \phi(t)\psi'(t)dt = -\phi(t)\psi(t)|_{-N}^{N} + \int\limits_{-N}^{N} \phi'(t)\psi(t)dt = 0-0+\widehat{\phi'}(\psi) = \widehat{D\phi}(\psi).$$

□

Определение 25. $\tilde{D}f$ называется *обобщённой производной от* f и обозначается f'.

Задача 38. Всякая регулярная обобщённая функция есть $(m+1)$-ая производная от m раз гладкой. Для любого m.

Задача 39. Возьмём функцию Хевисайда, она равна 0 слева от 0, а справа от 0 равна 1. Обозначается: $\theta(t)$. Доказать, что $\theta' = \delta$.

Задача 40. Рассмотрим функцию $\ln|t|$. $(\ln|t|)'$ - интеграл главного значения.

Единственность оператора дифференцирования обобщённых функций. Почему? Допустим $\mathcal{D}^* \underset{\tilde{S}}{\overset{\tilde{D}}{\rightarrow}} \mathcal{D}^*$, тогда раз он продолжает, то на $\mathcal{D}$ они совпадают, то есть получается, что два оператора совпадают на плотном подпространстве и отображают в хаусдорфово.

Решим дифференциальное уравнение $f' = 0$, оказывается ответом будет также константа, но не локально интегрируемая, а регулярная обобщённая функция - константа.

Лемма 3. *$\phi \in \mathcal{D}$ имеет вид $\psi' : \psi \in \mathcal{D} \ \Leftrightarrow\ \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 0$.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi'(t)dt = \int\limits_{-N}^{N} \psi' dt = 0 - 0 = 0.$$

$\Leftarrow$ Если $\phi \in \mathcal{D}_N$, то положим

$$\psi(t) = \int_{-N}^{t} \phi(\tau)d\tau.$$

Это финитная функция, так как при $t \geqslant N$ $\psi(t) = 0$.

□

Предложение 30. *$f \in \mathcal{D}^*$. Тогда $f' = 0 \Leftrightarrow f = C$, то есть f есть регулярная функция $\hat{C}$ для некоторого C. То есть*

$$f(\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}} C\phi(t)dt \qquad (*)$$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Ввиду очевидности предоставляется слушателям.

$\Rightarrow$ Возьмём любое $\beta \in \mathcal{D} : \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t)dt = 1$. Покажем, что подойдёт $C = f(\beta)$. По определению производной для $\forall\psi \in \mathcal{D}$.

$$0 = f^{'}(\psi) = f(-\psi^{'}).$$

По лемме 3

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t)dt,\ \gamma \in \mathcal{D}\ \Rightarrow f(\gamma) = 0. \tag{$**$}$$

Возьмём $\forall\phi \in \mathcal{D}$ и представим его в виде

$$\phi = \psi + (\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt)\beta,$$

значит

$$\psi = \phi - (\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt)\beta.$$

Ясно, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$. По $(**)$ $f(\psi) = 0$.

$$f(\psi) = f(\phi) - f(\beta)\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = f(\phi) - C\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 0.$$

Значит

$$f(\phi) = C\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt$$

□

Определение 26. Для $f \in \mathcal{D}^*$ обобщённая-функция g называется *первообразной*, если

$$g^{'} = f. \tag{6.6}$$

Задача 41. Любая обобщённая функция имеет первообразную и все превообразные отличаются на константу.

Задача 42. Определить производную обобщённой-функции-умеренного-роста и доказать теорему существования и еденственности.

Задача 43. Определить в $\mathcal{D}^*$ операцию умножения на гладкую функцию.

Сравнение различных типов обобщённых функций

Помним, что $i : \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{E}$, i - непрерывен. $i^* : \mathcal{E}^* \to \mathcal{D}^* : f \mapsto f|_{\mathcal{D}}$.

Предложение 31. i^* - *инъективен.*

Доказательство. Если $i^* f = 0$, то $f = 0$ на $\mathcal{D}$, а $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{E}$, f - непрерывен,а $\mathbb{C}$ хаусдорфово, значит $f = 0$. □

Предложение 32. $g \in \mathcal{D}^*$ *принадлежит* $\mathcal{E}^*$ $\Leftrightarrow$ g *непрерывна относительно топологии* e.

Доказательство.

$\Rightarrow$ $g = i^* f$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{E} \arrow[dl, "f"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

f непрерывна на $(\mathcal{E}, e)$, то есть непрерывна относительно некоторой стандартной нормы. То есть

$$\exists n,\ N,\ C :\ \forall \psi \in \mathcal{E}\ |f(\psi)| \leqslant C \|\psi\|_n^N$$

и это выполнено для всех $\psi = i\phi$, а это означает, что

$$|g(\phi)| = |f(i\phi)| \leqslant C\|\phi\|_n^N.$$

Видим , что g непрерывно относительно e, так как она непрерывна в $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_n^N)$.

$\Leftarrow$ Известно, что g непрерывен онтосительно e, то есть непрерывен относительно стандартной преднормы, то есть

$$\exists N,\ n,\ C :\ \forall \phi \in \mathcal{D}\ |g(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_n^N.$$

Рассмотрим преднормирнованные пространства $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_n^N) \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathcal{E}, \|\cdot\|_n^N)$, $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_n^N)$ плотно в $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_n^N)$. Тогда можем продолжить по непрерывности и получаем ограниченный функционал, то есть непрерывный на e, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{D}, \|\cdot\|_n^N) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"] & (\mathcal{E}, \|\cdot\|_n^N) \arrow[dl, "f"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Это означает, что $g = i^* f$. Значит $g \in \mathcal{D}^*$ лежит в $\mathcal{E}^*$.

□

Определение 27. Пусть $f \in \mathcal{D}^*$. Замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}$ назвается *носителем* f, если для $\phi \in \mathcal{D}$, равной 0 в некоторой окрестности M выполнено $f(\phi) = 0$.

Пример 5. δ, δ', у них $\{0\}$ является носителем.

Лекция 7

Пробные и обобщённые функции

Сравнение различных типов обобщённых функций

Теорема 11. *$f \in \mathcal{D}^*$ принадлежит $\mathcal{E}^*$ $\Leftrightarrow$ у f есть компактный носитель.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ f непрерывна относительно e, то есть непрерывен (=ограничен) относительно некоторой преднормы в $\mathcal{E}$. Это означает, что

$$\forall \phi \in \mathcal{D}\ |f(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_n^N.$$

Отсюда, если $\phi = 0$ вне $[-N, N]$, тем более вне его окрестности,то $f(\phi) = 0$. Значит $[-N, N]$ - носитель f.

$\Leftarrow$ Знаем, что у $f \in \mathcal{D}^*$ есть компактный носитель, берём некоторую окрестность, содержащуюся внутри какого-то $[-N, N]$. Значит если $\psi|_{[-N,N]} = 0$, то $f(\psi) = 0$. Берём шляпу ш $=$ ш$_{-N,N,1}$. Тогда $\forall \phi \in \mathcal{D}$ $\phi - \phi$ш $= 0$ на $[-N, N]$ $\Rightarrow$

$$f(\phi) = f(\phi ш). \tag{$*$}$$

Но $\phi ш \in \mathcal{D}_{N+1}$, значит, что

$$\exists C,\ n:\ |f(\phi ш)| \leqslant C\|\phi ш\|_n^{N+1} = C \max_{k=0,\dots n} \max_{[-N-1,N+1]} |(\phi ш)^{(k)}(t)|. \tag{$**$}$$

$$(\phi ш)^{(k)} = \phi^{(k)}ш + \phi^{(k-1)}ш' + ...$$

Из формулы Лейбница сразу следует, что $\forall t \in [-N-1, N+1]$

$$|(\phi ш)^{(k)}(t)| \leqslant C^{(k)}\|\phi\|_k^{N+1},$$

где

$$C^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} C_l \|ш\|_k^{N+1},$$

C_l - коэффициенты из формулы Лейбница. Объединяем $(*)$ и $(**)$ И видим, что $\forall \phi \in \mathcal{D}$ выполнено

$$|f(\phi)| = |f(\phi ш)| \leqslant CC'\|\phi\|_n^{N+1},$$

где $C' = \max\{C^{(k)} : k = 0, ...n\}$. Таким образом f непрерыиен относительно стандартной преднормы $\|\cdot\|_n^{N+1}$. Это и значит, что f непрерывен относительно e. По предложению 32 всё доказано.

$\square$

Теорема 12 (без доказательства)**.** *Всякая обобщённая функция с компактным носителем есть кратная производная от некоторой регулярной функции, которая к тому же может быть выбрана как угодно гладкой.*

Задача 44. Вывести из предыдущей теоремы, что любая $f \in \mathcal{E}^*$, будучи рассмотрена в $\mathcal{D}$ имеет конечный порядок.

Задача 45. Пусть для обобщённой функции $f \in \mathcal{D}^*$ её носитель это $\{0\}$. Тогда

$$f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta^{(k)}, \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Самосопряжённые операторы и спектральная теорема

Самосопряжённые операторы

Операторы в гильбертовом пространстве можно до некоторого момента можно рассматривать в контексте банаховых алгебр ($A = \mathscr{B}(H)$).

Теорема 13 (о C^* - тождестве). *$\forall T \in \mathscr{B}(H)$ выполнено*

$$\|T^*T\| = \|T\|^2. \tag{7.1}$$

Доказательство.

$\leqslant$

$$\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2.$$

$\geqslant$

$$\forall x \in H \ \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*Tx\|\|x\|.$$

Справа берём sup по $x \in Ш_H$ и получаем

$$\|Tx\|^2 \leqslant \|T^*T\|.$$

Теперь слева берём sup по $x \in Ш_H$ и получаем

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\|.$$

□

Следствие. *Если T - самосопряжённый, то*

$$\|T^2\| = \|T\|^2. \tag{7.2}$$

Напоминание. Если T самосопряжённый, то и T^n самосопряжённый $\forall n$.

Задача 46. T самосопряжённый, тогда $\|T^n\| = \|T\|^n$.
Указание. Это так для $n = 2^k$. Дальше - формула спектрального радиуса.

Предложение 33. *Если T самосопряжённый, то*

$$H = Ker\, T \oplus (Im\, T)^-. \tag{7.3}$$

Предложение 34. *T самосопряжённый и $\exists c > 0: \ \|Tx\| \geqslant c\|x\|$. Тогда T - топологический изоморфизм.*

Доказательство. Обозначим $H_0 = Im\,T$. Рассмотрим коограничение $T_0 : H \to H_0$, он сюръективен, а из оценки инъективен, следовательно линейный изоморфизм. Рассмотрим T_0^{-1} из той же оценки он ограничен ($C = \frac{1}{c}$). Значит T_0 - топологический изоморфизм. Но H_0 полно, значит замкнуто. Из предыдущего предложения $H = Ker\,T \oplus H_0^- = Ker\,T \oplus H_0$. Но $Ker\,T = 0 \ \Rightarrow \ H = H_0, \ T = T_0$. Значит T - топологический изоморфизм. □

Знаем, что $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Теорема 14. *T самосопряжённый. Тогда*

$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|] \tag{7.4}$$

и содержит хотя бы один из концов.

Доказательство.

1) Ни одно чисто мнимое число не принадлежит $\sigma(T)$. Рассматриваем $it, \ t \in \mathbb{R}$. Надо: $T - it\mathbb{1}$ обратим. Достаточно, что $(T - it\mathbb{1})(T + it\mathbb{1})$ обратим(алгебра). Но это оператор $T^2 + t^2\mathbb{1}$. Пусть $x \in H, \ x \neq 0$, рассмотрим

$$\|(T^2+t^2\mathbb{1})x\|\|x\| \overset{\text{К/Б}}{\geqslant} |\langle (T^2+t^2\mathbb{1})x, x\rangle| = \langle T^2x, x\rangle + \langle t^2x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle + t^2\|x\| \geqslant t^2\|x\|.$$

В условиях предложения 34 положим $c := t^2$ и получаем, что $T^2 + t^2\mathbb{1}$ обратим.

2) $\lambda = s + it, \ t \neq 0, s \in \mathbb{R}$. Надо: $T - \lambda\mathbb{1}t$ обратим.

$$T - \lambda\mathbb{1}t = (T - s\mathbb{1}) + it\mathbb{1}.$$

Но первое слагаемое - самосопряжённый оператор, значит работает пункт 1).

Чтобы один из концов принадлежал спектру надо, чтобы один из операторов $T - \|T\|\mathbb{1}, \ T + \|T\|\mathbb{1}$ был не обратим. Достаточно, чтобы их произведение было необратимо, а это $T^2 - \|T\|^2\mathbb{1}$. Достаточно найти $x_n \in H, \ \|x_n\| = 1$, а $(T^2 - \|T\|^2\mathbb{1})x_n \to 0$. Оказывается подойдёт та x_n, для которой $\|Tx_n\| \to \|T\|$(определение нормы T).

$$\begin{gathered}\langle T^2x_n - \|T\|^2x_n, T^2x_n - \|T\|^2x_n\rangle = \\ = \|T^2x_n\|^2 - \|T\|^2\langle x_n, T^2x_n\rangle - \|T\|^2\langle T^2x_n, x_n\rangle + \|T\|^4\langle x_n, x_n\rangle \leqslant \\ \leqslant 2\|T\|^4 - 2\|T\|^2\|Tx_n\|^2.\end{gathered}$$

Устремим $x_n \to \infty$ и получаем, что $2\|T\|^4 - 2\|T\|^2\|Tx_n\|^2 \to 0$, значит

$$T^2x_n - \|T\|^2x_n \to 0.$$

□

Задача 47. Любой компакт на отрезке есть спектр некоторого самосопряжённого оператора.

Замечание. e^{iT}. Если T - самосопряжённый, то оператор унитарный.

Непрерывное функциональное исчисление

Определение 28. A - комплексная ассоциативная алгебра. Отображение $(^*) : A \to A,\ (^*)(a) = a^*$ называется *инволюция*, если выполнено

1) $(a+b)^* = a^* + b^*$

2) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

3) $(ab)^* = b^* a^*$

4) $a^{**} = a$

Алгебра с инволюцией называется *инволютивная алгебра* или **- алгебра.* Элемент называется *самосопряжённым*, если $a^* = a$.

Пример 6. Инволютивные алгебры:

1) $A = \mathbb{C}[t]$. $(c_0 + ... + c_n t^n)^* = \overline{c_0} + ... + \overline{c_n} t^n$. То есть $P^*(z) = \overline{P(\overline{z})}$.

2) $A = C(\Omega)$. $f^*(t) = \overline{f(t)}$.

3) $A = \mathscr{B}(H)$. T^* - сопряжённый оператор.

Определение 29. Гомоморфизм $\phi : A \to B$ называется *инволютивным (* - гомоморфизмом)*, если
$$\phi(a^*) = \phi(a)^*. \tag{7.5}$$
** - изоморфизм*(инволютивный изоморфизм).

Предложение 35 (доказать самим)**.** *$\gamma_p : \mathbb{C}[t] \to \mathscr{B}(H)$ от $T \in \mathscr{B}(H)$, $p \mapsto p(T)$. Если T самосопряжённый, то γ_p - инволютвный гомоморфизм, то есть*
$$p^*(T) = p(T)^*. \tag{$*$}$$

Рассматриваем T самосопряжённый. Знаем, что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Для $p \in \mathbb{C}[t]$ положим
$$\|p\|_\sigma = \max\{|p(t)|, t \in \sigma(T)\}. \tag{7.6}$$

Предложение 36. $\forall p \in \mathbb{C}[t]$
$$\|p\|_\sigma = \|p(T)\|. \tag{7.7}$$

Доказательство. $p(t) = c_0 + ... + c_n t^n$.

Пусть сначала $p^* = p$, то есть все $c_k \in \mathbb{R}$. Знаем, что
$$\sigma(p(T)) \subseteq [-\|p(T)\|, \|p(T)\|]$$
и содержит один из концов. Тогда
$$\|p(T)\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(p(T))\}.$$
$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$, значит
$$\max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(p(T))\} = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ вида } p(t),\ t \in \sigma(T)\}.$$

Дальше ясно.

Теперь докажем общий случай, где $c_k \in \mathcal{C}$.Положим $q = p^*p$, у него действительные коэффициенты, то есть q самосопряженный в $\mathbb{C}[t]$, значит

$$\|q(T)\| = \|q\|_\sigma = \max\{|p^*(t)p(t)| : \ t \in \sigma(T)\} = \max\{|p(t)|^2 : \ t \in \sigma(T)\} = \|p\|^2_\sigma. \quad (**)$$

γ_p - гомоморфизм, отсюда

$$\gamma_p(q) = \gamma_p(p^*)\gamma_p(p),$$

то есть

$$q(T) = p^*(T)p(T) = p(T)^*p(T).$$

По C^* - тождеству получится

$$\|q(T)\| = \|p(T)\|^2 \ \Rightarrow \ \|p\|^2_\sigma = \|p(T)\|.$$

$\square$

Рассмотрим любой $[a, b] \supseteq \sigma(T)$,

$$i_0 : \mathbb{C}[t] \to C[a, b] : p \mapsto p|_{[a,b]}. \quad (7.8)$$

Заметим, что это полиномиальное исчисление от $\mathbf{t}$: $t \mapsto t$. Ясно, что есто * - гомоморфизм * - алгебр $p^* \mapsto \overline{p(t)}$. Обозначим

$$\mathscr{P} := Im\, i_0 \quad (7.9)$$

и рассмотрим коограничение

$$i : \mathbb{C}[t] \to \mathscr{P}. \quad (7.10)$$

Лекция 8

Самосопряжённые операторы и спектральная теорема

Непрерывное функциональное исчисление

Обозначим $\tilde{p} := i(p)$, тогда

$$\tilde{p^*} = \overline{\tilde{p}}. \tag{$*$}$$

Можем рассмотреть $\gamma = \gamma_p i^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[t] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "\gamma_p"] & \\ \mathscr{P} \arrow[r, "\gamma"] & \mathscr{B}(H) \end{tikzcd}$$

$$\gamma(\tilde{p}) = \gamma_p(p) = p(T) \tag{$**$}$$

γ - инволютвный гомоморфизм.

Лемма 4. *γ - сжимающий оператор.*

Доказательство.

$$\|\gamma(\tilde{p})]\| \overset{(**)}{=} \|p(T)\| = \max\{|p(s)| : \ s \in \sigma(T)\} \leqslant \max\{|p(s) : \ s \in \sigma(T)\} = \|\tilde{p}\|_\infty.$$

□

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"] & C[a,b] \arrow[dl, "\gamma_c"] \\ \mathscr{B}(H) & \end{tikzcd}$$

$\mathscr{P}$ плотно в $C[a,b]$ по теореме Вейерштрасса. По непрерывности существует единственное продолжение γ с сохранением нормы

$$\gamma_c : C[a,b] \to \mathscr{B}(H), \ \|\gamma_c\| = \|\gamma\|. \tag{8.1}$$

$\mathbf{t} : s \mapsto s \in C[a,b]$ переходит в $\gamma(\mathbf{t}) \overset{(**)}{=} \gamma_p(t) = T$. Как следствие $\gamma_c(\mathbf{t}) = T$.

Теорема 15. *γ_c - унитальный инволютивный гомоморфизм, переводящий $\mathbf{t}$ в T.*

Доказательство.
Гомоморфизм. Надо: $\gamma_c(fg) = \gamma_c(f)\gamma_c(g)$. Пусть $f = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{p_n}, \ g = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{q_n}$ в $C[a,b]$. Тогда

$$\gamma_c(fg) = \gamma_c((\lim_{n\to\infty} \tilde{p_n})(\lim_{n\to\infty} \tilde{q_n})) = \gamma_c(\lim_{n\to\infty} \tilde{p_n}\tilde{q_n}) = \lim_{n\to\infty} \gamma_c(\tilde{p_n}\tilde{q_n}) = \lim_{n\to\infty} \gamma(\tilde{p_n}\tilde{q_n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \gamma(\tilde{p_n})\gamma(\tilde{q_n}) = \lim_{n\to\infty} \gamma(\tilde{p_n}) \lim_{n\to\infty} \gamma(\tilde{q_n}) = \lim_{n\to\infty} \gamma_c(\tilde{p_n}) \lim_{n\to\infty} \gamma_c(\tilde{q_n}) = \gamma_c(f)\gamma_c(g).$$

Инволютивность. Надо: $\gamma_c(\overline{f}) = [\gamma_c(f)]^*$. Пусть $f = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{p_n}$ в $C[a,b]$. Тогда $\overline{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\tilde{p_n}}$. Отсюда

$$\gamma_c(\overline{f}) = \gamma_c(\lim_{n\to\infty} \overline{\tilde{p_n}}) = \lim_{n\to\infty} \gamma_c(\overline{\tilde{p_n}}) = \lim_{n\to\infty} \gamma(\overline{\tilde{p_n}}) = \lim_{n\to\infty} [\gamma(\tilde{p_n})]^* =$$

$$= [\lim_{n\to\infty} \gamma(\tilde{p_n})]^* = [\lim_{n\to\infty} \gamma_c(\tilde{p_n})]^* = [\gamma_c(f)]^*.$$

Унитальность. Надо: $\gamma_c(\equiv 1)$ переходит в $\mathbb{1}_H$. $\equiv 1 \in \mathscr{P}$,

$$\gamma_c(\equiv 1) = \gamma(\equiv 1) = \gamma_p(\mathbb{1}_{\mathbb{C}[t]}) = \mathbb{1}_H.$$

□

Определение 30. γ_c называется *непрерывным функциональным исчислением от T на* $[a,b]$.

Обозначение.

$$\gamma_c(f) = f(T). \tag{8.2}$$

Получается, что мы доказали что

$$(fg)(T) = f(T)g(T),$$

$$\overline{f}(T) = f(T)^*$$

Обозначение. $f \in C[a,b]$

$$\|f\|_\sigma = \max\{|f(\lambda) : \ \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{8.3}$$

Очевидно, что если $f_n \rightrightarrows f$, то $\|f_n\|_\sigma \to \|f\|_\sigma$. $\|f\|_\sigma$ - это преднорма.

Предложение 37.

$$\|f(T)\| = \|f\|_\sigma. \tag{8.4}$$

Доказательство. Снова $\tilde{p_n} \rightrightarrows f$.

$$\|f(T)\| = \|\gamma_c(f)\| = \|\gamma_c(\lim_{n\to\infty} \tilde{p_n})\| = \|\lim_{n\to\infty} \gamma_c(\tilde{p_n})\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|\gamma(\tilde{p_n})\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n(T)\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n\|_\sigma = \|f\|_\sigma.$$

□

Следствие.

$$Ker\ \gamma_c = \{f : \ f|_{\sigma(T)} = 0\}. \tag{8.5}$$

Эквивалентное утверждение: $f(T) = g(T) \ \Leftrightarrow \ f = g$ *на спектре.*

Предложение 38. *Пусть $\beta : C[a,b] \to \mathscr{B}(H)$ - ограниченный унитальный гомоморфизм, переводящий $\mathbf{t}$ в T. Тогда $\beta = \gamma_c$.*

Доказательство. β и γ_c - непрерывны, а $\mathscr{B}(H)$ - хаусдорфово, значит достаточно, что они совпадают на плотном множестве в $C[a,b]$. Подойдёт $\mathscr{P}$. Возьмём $\tilde{p} = c_0(\equiv 1)+c_1\mathbf{t}+...+c_n\mathbf{t}^n$. Тогда $\beta(\tilde{p}) = c_0+c_1T+...+c_nT^n$. Но это $\gamma_p(p) = \gamma_c(\tilde{p})$. □

Предложение 39. *Пусть $\sigma(T)$ содержится в $[a,b]$ и $[c,d]$, пересечение которых тоже отрезок. Тогда, если $f_1 \in C[a,b],\ f_2 \in C[c,d]$ совпадают на $[a,b]\cap[c,d]$, то $f_1(T) = f_2(T)$.*

Доказательство. Достаточно считать, что $[a,b] \supset [c,d]$. Существует естественный $\tau : C[a,b] \to C[c,d] :\ \mathbf{t}_1 \mapsto \mathbf{t}_2,\ f_1 \mapsto f_2$.

$$\begin{tikzcd} C[a,b] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\gamma_c^1"] & \\ C[c,d] \arrow[r, "\gamma_c^2"] & \mathscr{B}(H) \end{tikzcd}$$

Покажем, что диаграмма коммутативна ($\gamma_c^2\tau = \gamma_c^1$).
$\mathbf{t}_1 \xrightarrow{\tau} \mathbf{t}_2 \xrightarrow{\gamma_c^2} T$. По предложению 38 равенство доказано, значит

$$f_1(T) = \gamma_c^1(f_1) = \gamma_c^2\tau(f_1) = f_2(T).$$

□

Задача 48. $T = P_{H_0},\ [a,b] \ni \{0,1\}$. Найти $f(P_{H_0})$.

Задача 49. $h \in C[a,b],\ \overline{h} = h,\ T_h : L_2[a,b] \to L_2[a,b] :\ g \mapsto gh,\ [a,b] \supseteq \sigma(T_h)$. Найти $f(T_h)$.

Задача 50. Сформулировать и доказать закон отображения спектров при непрерывном функциональном исчислении.
Указание. Надо доказать $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Положительные операторы

Пусть A - инволютивная алгебра.

Определение 31. $a \in A$ называется *положительным*, если $a^* = a$ и $\sigma(a) \in [0,\infty)$, обозначается $a \geqslant 0$. В частности, если $A = \mathscr{B}(H)$, получаем определение *положительного оператора.*

Задача 51. Проверить, что это обобщает определение первого курса.

Предложение 40. $f \in C[a,b],\ f \geqslant 0$ *в обычном смысле. Тогда* $f(T) \geqslant 0$.

Доказательство. Помним, что $f(T) = \gamma_c(f) \Rightarrow\ f(T)$ самосопряжённый.
Надо: $\sigma(f(T)) \subseteq [0, \infty)$. Знаем: $\sigma(f) = \{f(t) : t \in [a, b]\} \subseteq [0, \infty)$, а $\gamma_c : f \mapsto f(T)$ - унитальный гомоморфизм. Поэтому

$$\sigma(f(T)) = \sigma(\gamma_c(f)) \subseteq \sigma(f) \subseteq [0, \infty).$$

□

Рассматриваем $S : H \times H \to \mathbb{C}$ сопряжённо билинейной функционал, а его квадратичной формой называется $Q(x) := S(x, x)$. Пусть пока T любой.

Определение 32. *Квадратичная форма от* T это

$$Q_T : H \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle Tx, x\rangle. \tag{8.6}$$

Предложение 41 (полярное тождество)(доказать самим)**.**

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} \frac{i^k}{4}\langle T(x + i^k y), (x + i^k y)\rangle = \sum_{k=0}^{3} \frac{i^k}{4} Q_T(x + i^k y). \tag{8.7}$$

Предложение 42. $T = 0\ \Leftrightarrow\ Q_T \equiv 0$.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Из полярного тождества $\langle Tx, y\rangle \equiv 0 \Rightarrow Tx = 0\ \forall x$, то есть $T = 0$.

□

Предложение 43. T *самосопряжённый* $\Leftrightarrow$ Q_T *принимает действительные значения.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} = \overline{\langle Tx, x\rangle}$.

$\Leftarrow$ Надо доказать, что $T^* - T = 0$. Доостаточно доказать, что $Q_{T^*-T} \equiv 0$.

$$\langle (T^* - T)x, x\rangle = \langle T^* x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle - \langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} - \langle Tx, x\rangle = 0.$$

□

$T \geqslant 0$. Взяли отрезок $[a, b] \subset [0, \infty),\ [a, b] \supseteq \sigma(T)$. Возьмём функцию $\sqrt{\mathbf{t}} : t \mapsto \sqrt{t}$.

Обозначение.

$$\sqrt{T} := \sqrt{\mathbf{t}}(T) = \gamma_c(\sqrt{\mathbf{t}}) \tag{8.8}$$

Из того, что $\sqrt{\mathbf{t}} \geqslant 0$ следует, что $\sqrt{T} \geqslant 0$.

Определение 33. $\sqrt{T}$ называется *арифметическим квадратным корнем из* T.

Предложение 44.

$$(\sqrt{T})^2 = T \tag{8.9}$$

Доказательство.

$$(\sqrt{T}) = [\sqrt{\mathbf{t}}(T)]^2 = [\gamma_c(\sqrt{\mathbf{t}})]^2 = \gamma_c[(\sqrt{\mathbf{t}})^2] = \gamma_c(\mathbf{t}) = T.$$

□

Задача 52. $\sqrt{T}$ - это единственный $S \geqslant 0$ с $S^2 = T$.
Указание. Взять $\tilde{p_n} \rightrightarrows \sqrt{\mathbf{t}}$ и $q_n(t) = p_n(t^2)$.

Предложение 45. *Пусть $T \geqslant 0$, а x таков, что $\langle Tx, x\rangle = 0$. Тогда $Tx = 0$.*

Доказательство.

$$0 = \langle Tx, x\rangle = \langle(\sqrt{T})^2 x, x\rangle = \langle\sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle = \|\sqrt{T}x\|^2.$$

Значит, $\sqrt{T}x = 0$. Но

$$Tx = \sqrt{T}(\sqrt{T}x) = \sqrt{T} \cdot 0 = 0.$$

□

Теорема 16. *Следующие свойства $T \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны*

1) $T \geqslant 0$

2) $T = S^2$ для $S \geqslant 0$

3) $T = S^2$ для самосопряжённого S

4) $T = S^*S$ для $S \in \mathscr{B}(H)$

5) $Q_T(x) = \langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in H$.

Доказательство.

1) ⇒ 2) Положим $S = \sqrt{T}$.

2) ⇒ 3) ⇒ 4) Очевидно.

4) ⇒ 5) $\langle Tx, x\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle \geqslant 0$.

5) ⇒ 1) Знаем, что T самосопряжённый. Надо: для $t > 0$ $-t \notin \sigma(T)$, то есть $T + t\mathbb{1}$ обратим. Достаточно, что

$$\forall x \in H \ \|(T + t\mathbb{1})x\| \geqslant c\|x\|.$$

$$\langle Tx + tx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle + t\langle x, x\rangle \geqslant t\|x\|^2.$$

По К/Б

$$\langle Tx + tx, x\rangle \leqslant \|Tx + tx\|\|x\|$$

и получаем неравенство для $c = t$.

□

Лекция 9

Самосопряжённые операторы и спектральная теорема

Положительные операторы

Определение 34. $S, T \in \mathscr{B}(H)$, $S \geqslant T$, если

$$S - T \geqslant 0 \text{ или } \langle Sx, x\rangle \geqslant \langle Tx, x\rangle. \tag{9.1}$$

Задача 53. $P \geqslant Q$ - ортогональные проекторы. Что это означает алгебраически и геометрически (алгебраически $PQ = QP = Q$).

Предложение 46. *Если $T \geqslant 0$, то*

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \; x \in Ш_H\}. \tag{9.2}$$

Доказательство.

$$\sup\{\langle Tx, x\rangle : \; x \in \text{Ш}_H\} = \sup\{\langle \sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle : \; x \in \text{Ш}_H\} =$$

$$= \sup\{\|\sqrt{T}x\|^2 : \; x \in \text{Ш}_H\} = \|\sqrt{T}\|^2 = \|T\|.$$

□

Задача 54. Для любого самосопряжённого T

$$\sup\{\langle Tx, x\rangle : \; x \in \text{Ш}_H\} = \max\{\sigma(T)\},$$

$$\inf\{\langle Tx, x\rangle : \; x \in \text{Ш}_H\} = \min\{\sigma(T)\}.$$

Указание. $\langle (T + t\mathbb{1})x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle + t$.

Задача 55. Если T - самосопряжённый, тогда

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle : \; x \in \text{Ш}_H\}.$$

Предложение 47. *Пусть $f \geqslant g \geqslant 0$ на $\sigma(T)$. Тогда*

$$Ker\ f(T) \subseteq Ker\ g(T). \tag{9.3}$$

Доказательство.

$$f - g \geqslant 0 \;\Rightarrow\; f(T) - g(T) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \langle f(T)x, x\rangle \geqslant \langle g(T)x, x\rangle \geqslant 0.$$

Тогда

$$f(T)x = 0 \;\Rightarrow\; \langle g(T)x, x\rangle \;\Rightarrow\; g(T)x = 0.$$

□

T самосопряжённый, зафиксируем $a < \min \sigma(T),\ b > \max \sigma(T),\ \sigma := \sigma(T)$.

$$f \in C(\mathbb{R}),\ f = f_+ - f_-,\ (f_- := (-f)_+).$$

$f = \mathbf{t}$ и появляются $\mathbf{t}_+, \mathbf{t}_-$.

Положим

$$T_+ := \mathbf{t}_+(T),\ T_- := \mathbf{t}_-(T),\ |T| := T_+ + T_-.$$

Видим, что

$$T_+T_- = T_-T_+ = 0,$$

$$Im\, T_+ \subseteq Ker\, T_-,$$

$$Im\, T_- \subseteq Ker\, T_+.$$

Задача 56. $|T| = |\mathbf{t}|(T)$.

Определение 35. *Семейство подпростhанств в H асоциированных с T $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$H_\lambda = Ker\,[(\mathbf{t} - \lambda)_+(T)]. \tag{9.4}$$

Предложение 48. *Семейство H_λ обладает следующими свойствами*

1) $\lambda < \min \sigma \ \Rightarrow\ H_\lambda = 0$

2) $\lambda > \max \sigma \ \Rightarrow\ H_\lambda = H$

3) $\lambda \leqslant \mu \ \Rightarrow\ H_\lambda \leqslant H_\mu$ *("возрастание").*

Доказательство. Пусть $c = \min \sigma,\ d = \max \sigma$. Рассматриваем $[c, d]$.

1) При $\lambda < c$.

$$(\mathbf{t} - \lambda)_+ > \lambda - c > 0.$$

$$0 = Ker\,(\lambda - c)\mathbb{1} \supseteq Ker\,(\mathbf{t} - \lambda)_+(T) \ \Rightarrow\ H_\lambda = 0.$$

2) При $\lambda > d$.

$$(\mathbf{t} - \lambda)_+ = 0 \text{ на } [c, d].$$

Значит,

$$(\mathbf{t} - \lambda)_+(T) = 0(T) = T.$$

3) При $\lambda \leqslant \mu$.

$$(\mathbf{t} - \lambda)_+ \geqslant (\mathbf{t} - \mu)_+ \ \Rightarrow\ Ker\,(\mathbf{t} - \lambda)_+(T) \subseteq Ker\,(\mathbf{t} - \mu)_+(T).$$

□

Задача 57 (*)**.** $\mu \notin \sigma \ \Leftrightarrow$ в некоторой окрестности μ H_μ постоянно.

Задача 58 (*)**.** μ - собственное значение: $\bigcup\{H_\lambda : \lambda < \mu\}^- \subsetneq H_\mu$. Называется "точка разрыва".

Введём

$$P_\lambda := P_{H_\lambda} \tag{9.5}$$

разложение единицы для T.

Задача 59. Найти H_λ

а) для проектора

б) для оператора умножения на $\mathbf{t}$ в $L_2[a,b]$

в) для диагонального оператора в l_2.

Задача 60. Проверить, что P_λ обладает следующими свойствами

1) $\lambda < \min\sigma \;\Rightarrow\; P_\lambda = 0$.

2) $\lambda < \max\sigma \;\Rightarrow\; P_\lambda = \mathbb{1}_H$.

3) $\lambda < \mu \;\Rightarrow\; P_\lambda \leqslant P_\mu$.

Спектральная теорема

Пусть E - банахово пространство, $[a,b] \in \mathbb{R}$, $\phi : [a,b] \to E$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Зададим разбиение $\Lambda :\; a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$, $d(\Lambda) = \max\{\lambda_k - \lambda_{k-1} : k = 1, \ldots n\}$. Положим

$$\Sigma_\Lambda(f,\phi) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)[\phi(\lambda_k) - \phi(\lambda_{k-1})] \in E. \tag{9.6}$$

Определение 36. $\Sigma_\Lambda(f,\phi)$ называется *интегральная сумма Римана - Стильтьеса, соответствующая* ϕ, f *и* Λ.

Определение 37. Пусть $x \in E$ таков, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta$: как только Λ таково, что $d(\Lambda) < \delta$, $\|x - \Sigma_\Lambda(f,\phi)\| < \varepsilon$. Тогда x называется *интегралом Римана - Стильтьеса от функции* f *по векторнозначной функции* ϕ и обобозначается

$$x = \int_a^b f(\lambda)d\phi(\lambda). \tag{9.7}$$

$E := \mathscr{B}(H)$, $\phi := \mathbb{P} : [a,b] \to \mathscr{B}(H) :\ \lambda \mapsto P_\lambda$. В роли f выступает $\mathbf{t}$.

Теорема 17 (спектральная теорема Гильберта в аналитической форме)(без доказательства). *Пусть T самосопряжённый, $\mathbb{P}$ - разложение единицы, $a < \min\sigma$, $b > \max\sigma$. Тогда*

$$T = \int_a^b \lambda d\mathbb{P}(\lambda). \tag{9.8}$$

Более того, для любой $f \in C[a,b]$ выполнено

$$f(T) = \int_a^b f(\lambda)d\mathbb{P}(\lambda). \tag{9.9}$$

Следствие 1. *Любой самосопряжённый оператор аппроксимируется линейной комбинацией проекторов с действительными коэффициентами.*

Следствие 2. *Любой оператор аппроксимируется линейной комбинацией проекторов с комплексными коэффициентами.*

Задача 61. Любой оператор есть линейная комбинация четырёх унитарных, а самосопряжённый даже двух.
Указание. При $\sigma \subseteq [-1, 1]$ рассмотреть функции $(t \pm i\sqrt{1-t^2})(T)$.

Задача 62. Проверить, что спектральная теорема верна для

1) проектора
2) умножения на независимую переменную $\mathbf{t}$ в $L_2[a, b]$
3) диагонального оператора
4) самосопряжённого комплексного оператора.

Теорема 18 (геометрическая форма спектральной теоремы)(без доказательства). *Пусть T самосопряжённый, тогда $\exists (X, \mu)$ и $\mathbb{R}$ - значная $h \in L_\infty(X, \mu)$: T унитарно эквивалентен*

$$T_h \in \mathscr{B}(L_2(X, \mu)),\ T_h(g) = hg. \tag{9.10}$$

Унитарная эквивалентность это, когда $\exists U$: диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad T \quad} & H \\ \downarrow{\scriptstyle U} & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ L_2(X,\mu) & \xrightarrow{T_h} & L_2(X,\mu) \end{array}$$

Задача 63. Проверить геометрическую форму спектральной теоремы для

1) проектора
2) умножения на независимую переменную $\mathbf{t}$ в $L_2[a, b]$
3) диагонального оператора
4) самосопряжённого комплексного оператора.

Преобразование Фурье

Классическое преобразование Фурье

Пусть $\phi \in L_1(\mathbb{R})$.

Определение 38. *Классическое предпразование Фурье функции ϕ* - это

$$[F(\phi)](s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-ist} dt. \tag{9.11}$$

Иногда для удобства будем обозначать $\psi = [F(\phi)](s)$.

Пример 7.

1) $\phi = \chi_{[a,b]}$. Тогда
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-isa} - e^{-isb}}{is},\ s \neq 0,\ \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(b-a).$$

2) Функция Гаусса
$$\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$
Тогда
$$\psi(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Задача 64. Доказать чему равно преобразование Фурье для функции Гаусса, зная, что $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$.

Обозначение.
$$C_0(\mathbb{R}) = \{\psi \in C(\mathbb{R}) :\ \psi(s) \to 0,\ |s| \to \infty\}. \tag{9.12}$$
Такие функции называеются *исчезающие на бесконечности.*

Теорема 19. *Пусть $\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $F(\phi) \in C_0(\mathbb{R})$, и отображение $F : L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}) : \phi \mapsto F(\phi)$ - ограниченный оператор нормы $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $F(\phi)$ - ограничена, или $F(\phi) \in B(\mathbb{R})$ - ограниченные функции с равномерной нормой. Действительно,
$$|\psi(s)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\phi\|_1,$$
значит
$$\|F(\phi)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$
$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$
значит при $\phi \geqslant 0$ норма достигается. Получаем $F : L_1(\mathbb{R}) \to B(\mathbb{R})$ нормы $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Заметим, что $C_0(\mathbb{R})$ - замкнутое подространство в $B(\mathbb{R})$ (доказать самим, что предел по равномерной норме функции из $C_0(\mathbb{R})$ сам принадлежит $C_0(\mathbb{R})$). Если ϕ - ступенька (пример 7 пункт 1)), то $\psi \in C_0(\mathbb{R})$, то же самое для ступенчатых функций, но мы помним, что любая функция из $L_1(\mathbb{R})$ приближается ступенчатыми функциями (есть предел линейной комбинации ступенчатых). Значит, образ будет пределом по равномерной норме каких-то функций из $C_0(\mathbb{R})$, а так как это замкнутое подпространство, он будет лежать в $C_0(\mathbb{R})$. $\square$

Определение 39. Оператор $F : L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ называется *классическим преобразование Фурье.*

Теорема 20 (без доказательства)**.**

1) *$Ker F = 0$, то есть F - инъективен (иногда этот пункт называют теоремой единственности: $F(\phi_1) = F(\phi_2) \ \Rightarrow\ \phi_1 \overset{п.в.}{=} \phi_2$)*

2) *$Im\,F \subsetneq C_0(\mathbb{R})$, но $Im\,F$ плотен в $C_0(\mathbb{R})$.*

Лекция 10

Преобразование Фурье

Классическое преобразование Фурье

Теорема 21. *Пусть* $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ *имеет непрерывную производную, причём* $\phi' \in L_1(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$[F(\phi')](s) = is[F(\phi)](s) \tag{10.1}$$

(в частности $F(\phi) = o(\frac{1}{s})$*).*

Доказательство. ϕ имеет значение в точках, из интегрируемости ϕ на $\mathbb{R}$ следует, что $\exists a_n,\ b_n \in \mathbb{R},\ a_n \to -\infty,\ b_n \to \infty :\ \phi(a_n),\ \phi(b_n) \to 0$(доказать самим).

$$[F(\phi')(s)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi'(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} \phi'(t)e^{-ist}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \left(\phi(t)e^{-ist}|_{a_n}^{b_n} - \int\limits_{a_n}^{b_n} \phi(t)de^{-ist} \right) = 0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} (-is)\phi(t)e^{-ist}dt =$$

$$= is \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-ist}dt = is[F(\phi)](s).$$

□

Следствие. *Если у* ϕ n *непрерывных производных, то* $F(\phi) = o(\frac{1}{s^n})$, *а если* ϕ *бесконечно гладкая, то* $[F(\phi)](s)$ *убывает быстрее любой отрицательной степени* s.

Теорема 22. *Пусть* $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $\boldsymbol{t}\phi \in \mathbb{R}$. *Тогда* $[F(\phi)](s)$ *непрерывно дифференцируема и*

$$[F(\phi)]'(s) = -i[F(\boldsymbol{t}\phi)](s). \tag{10.2}$$

Доказательство. $\forall r \in \mathbb{R}$ положим

$$\alpha(r) = [F(\mathbf{t}\phi)](r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} t\phi(t)e^{-irt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t,r)dt \qquad (*),$$

где $\beta(t,r) = t\phi(t)e^{-irt}$.

Рассмотрим функцию β в полосе $R \times [0,s]$. Она интегрируема как функция двух переменных, так как её модуль допускает повторный интеграл.

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times[0,s]} \beta(t,r)dtdr = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}\times[0,s]} \beta(t,r)dtdr \overset{(*)}{=} \int\limits_0^s \alpha(r)dr.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_0^s t\phi(t)e^{-itr}dr \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}} t\phi(t) \left(\int\limits_0^s e^{-itr}dr \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}} t\phi(t) \left[\frac{1}{-it}(e^{-ist} - 1) \right] dt =$$

$$= i\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-ist} - i\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = i\sqrt{2\pi}[F(\phi)](s) - i\sqrt{2\pi}[F(\phi)](0).$$

Получаем

$$\int\limits_0^s \alpha(r)dr = i[F(\phi)](s) - i[F(\phi)](0).$$

Дифференцируем по s и получаем

$$\alpha(s) = [F(\mathbf{t}\phi)](s) = i[F(\phi)]'(s).$$

$\square$

Следствие. *Если $\boldsymbol{t}^n\phi \in L_1(\mathbb{R})$, то $F(\phi)$ n раз гладкая. Если это верно для любого n, то $F(\phi)$ бесконечно гладкая.*

Задача 65. Пусть для $b > 0$ $e^{b|t|}\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $[F(\phi)](s)$ продолжается до аналитической функции в полосе от $-b$ до b.
Указание. Рассмотреть

$$\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} t\phi(t)e^{-izt}dt.$$

Задача 66. Пусть ϕ как в прошлой задаче и $\int\limits_{\mathbb{R}} t^n\phi(t)dt = 0$ $n = 0, 1, 2....$ Тогда $\phi \overset{\text{п.в.}}{=} 0$.

Задача 67. Система Эрмита тотальна.

Свёртка

Определение 40. $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Пусть для почти всех $t \in \mathbb{R}$ существует интеграл Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(\tau)\psi(t-\tau)d\tau. \tag{10.3}$$

Тогда такая функция называется *свёрткой ϕ и ψ* и обозначается $(\phi * \psi)(t)$.

Пример 8. $a > 0,\ \psi(t) = \frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]},\ \phi \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Тогда

$$(\phi * \psi)(t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{t-a}^{t+a} \phi(\tau)d\tau.$$

Задача 68. горб $*$ ступенька $=$ шляпа.

Задача 69. $\phi \in L_1(\mathbb{R}),\ \psi$ финитная и гладкая. Тогда $\phi * \psi$ - гладкая и

$$(\phi * \psi)' = \phi * \psi'.$$

Теорема 23. *Пусть $\phi, \psi \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\exists \phi * \psi \in L_1(\mathbb{R})$ и*

$$\|\phi * \psi\|_1 \leqslant \|\phi\|_1 \|\psi\|_1. \tag{10.4}$$

Доказательство. Положим $\alpha(t,\tau) = \phi(\tau)\psi(t-\tau)$, фиксируем t, она интегрируема, так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\alpha(t,\tau)| dt \right) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(\tau)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(t-\tau)| dt \right) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(\tau)| \|\psi\|_1 d\tau = \|\phi\|_1 \|\psi\|_1.$$

Рассматриваем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(\tau)\psi(t-\tau) d\tau \right) dt$$

в скобках $\phi * \psi$ и по теореме Фубини она существует. Теперь оценим

$$\|\phi * \psi\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi * \psi|(t) dt \leqslant \|\phi\|_1 \|\psi\|_1.$$

□

Задача 70. $L_1 * L_\infty$ такая свёртка существует в любой точке, она ограничена и равномернонепрерывна.

Задача 71. $L_2 * L_2 \subseteq C_0$

Задача 72 (*)**.** $L_1 * L_2 \subseteq L_2,\ \|\phi * \psi\|_2 \leqslant \|\phi\|_1 \|\psi\|_2.$
Указание. Рассмотреть $\sqrt{|\phi(t)|},\ \sqrt{|\phi(t)\psi(t-\tau)|} \in L_2$.

Задача 73. Свёртка обладает свойствами умножения и $(L_1, *)$ коммутативная банахова алгебра.

Теорема 24. *Пусть $\phi_1, \phi_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$[F(\phi_1 * \phi_2)](s) = \sqrt{2\pi}[F(\phi_1)](s)[F(\phi_2)](s). \tag{10.5}$$

Иначе: если $\mathcal{F} = \sqrt{2\pi}F$, то $\mathcal{F}(\phi_1 * \phi_2) = \mathcal{F}(\phi_1)\mathcal{F}(\phi_2)$, $\mathcal{F}$ - гомоморфизм.

Доказательство. Зафиксируем s и рассмотрим

$$\beta(t,\tau) = \phi_1(\tau)\phi_2(t-\tau)e^{-ist}.$$

Она интегрируема на $\mathbb{R}^2$, так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\beta(t,\tau) d\tau \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}} (|\phi_1| * |\phi_2|)(t) dt \leqslant \|\phi_1\|_1 \|\phi_2\|_1.$$

$$[F(\phi_1 * \phi_2)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (\phi_1 * \phi_2)(t) e^{-ist} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_1(\tau) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_2(t-\tau) e^{-ist} dt \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_1(\tau) e^{-is\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_2(t-\tau) e^{-is(t-\tau)} dt \right) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_1(\tau) e^{-is\tau} [F(\phi_2)](s) d\tau =$$

$$= \sqrt{2\pi} [F(\phi_1)](s) [F(\phi_2)](s).$$

□

Преобразование Фурье в пространстве Шварца

Предложение 49. *Пусть $\phi \in \mathcal{S}$. Тогда $F(\phi)$ бесконечно гладкая и $\forall p, q = 0, 1, 2...$ выполнено*

$$s^p [F(\phi)]^{(q)}(s) = \sum_{k=0}^{q} \sum_{l=0}^{p} \lambda_{k,l} [F(\boldsymbol{t}^k \phi^{(l)})](s), \tag{10.6}$$

где $\lambda_{k,l}$ не зависят от ϕ.

Доказательство. Из формулы (10.2)

$$[F(\phi)]^{(q)}(s) = [(F(\phi))']^{(q-1)}(s) = -i[F(\mathbf{t}\phi)]^{(q-1)}(s) = ... = (-i)^q [F(\mathbf{t}^q \phi)](s).$$

Теперь применим формулу (10.1)

$$s^p [F(\phi)]^{(q)}(s) = (-i)^q s^p [F(\mathbf{t}^q \phi)](s) = (-i)^{q+1} s^{p-1} [F((\mathbf{t}\phi)')](s) = ... =$$

$$= (-i)^{p+q} [F((\mathbf{t}^q \phi)^{(p)})](s).$$

По формуле Лейбница $[F((\mathbf{t}^q \phi)^{(p)})]$ есть сумма $[F(\mathbf{t}^k \phi^{(l)})]$ с фиксированными коэффициентами. □

Следствие. $\phi \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; F(\phi) \in \mathcal{S}$.

Если $\phi \in \mathcal{S}$, то можем записать формулы как коммутативные диаграммы. Пусть

$D : \phi \mapsto \phi', \; M : \phi \mapsto \mathbf{t}\phi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{D} & \mathcal{S} \\ \big\downarrow{\scriptstyle F} & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{iM} & \mathcal{S} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{M} & \mathcal{S} \\ \big\downarrow{\scriptstyle F} & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{iD} & \mathcal{S} \end{array}$$

Предложение 50. *$F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ непрерывен относительно топологии s, то есть относительно $\| \cdot \|_{p,q}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\|\cdot\|_{p,q}$. Надо: $\|F(\phi)\|_{p,q} \leqslant C\|\phi\|'$. Помним. что

$$s^p[F(\phi)]^{(q)}(s) = \sum_{k=0}^{q}\sum_{l=0}^{p} \lambda_{k,l}[F(\mathbf{t}^k\phi^{(l)})](s).$$

$$\|F(\phi)\|_{p,q} = \max_{\mathbb{R}} |s^p[F(\phi)]^{(q)}(s)| \leqslant \sum_{k,l} |\lambda_{k,l}| \max_{\mathbb{R}} |[F(\mathbf{t}^k\phi^{(l)})](s)| \leqslant$$

$$\leqslant C \max_{k,l} \|F(\mathbf{t}\phi^{(l)})\|_{C_0(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \max_{k=0\ldots q,\ l=0\ldots p} \|\mathbf{t}^k\phi^{(l)}\|_1.$$

$\exists \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+1}dt := C_1$.

$$\|\mathbf{t}^k\phi^{(l)}\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |t^k\phi^{(l)}(t)|dt \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|t^{k+2}\phi^{(l)}(t)|}{t^2+1}dt + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|t^k\phi^{(l)}(t)|}{t^2+1}dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \max_{t\in\mathbb{R}} |t^{k+2}\phi^{(l)}(t)| + C_1 \max_{t\in\mathbb{R}} |t^k\phi^{(l)}(t)| = C_1(\|\phi\|_{k+2,l} + \|\phi\|_{k,l}).$$

Отсюда

$$\|F(\phi)\|_{p,q} \leqslant \frac{CC_1}{\sqrt{2\pi}} \max_{0\leqslant k\leqslant q,\ 0\leqslant l\leqslant p} (\|\phi\|_{k+2,l} + \|\phi\|_{k,l}) \leqslant 2\frac{CC_1}{\sqrt{2\pi}} \max_{0\leqslant k\leqslant q+2,\ 0\leqslant l\leqslant p} \|\phi\|_{k,l}.$$

$\square$

Лекция 11

Преобразование Фурье

Обратное преобразование Фурье

Определение 41. $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ *обратным преобразованием Фурье* называется

$$[\breve{F}(\phi)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{ist} dt. \tag{11.1}$$

Введём оператор

$$\Sigma : L_1(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}), \mathcal{S} \to \mathcal{S} : \ \phi \mapsto w : \ w(t) = \phi(-t). \tag{11.2}$$

Ясно, что Σ топологический автоморфизм каждого из этих пространств.

$$\Sigma^2 = \mathbb{1}, \ \breve{F} = F\Sigma = \Sigma F \text{ (доказать самим)}.$$

Предложение 51.

$$\breve{F} F M = M \breve{F} F, \ \breve{F} F D = D \breve{F} F. \tag{11.3}$$

Доказательство. Докажем для оператора в M, для D аналогично.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "M"'] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, "iD"'] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, "-M"'] \arrow[d, "\Sigma"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, "M"'] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

$$\Sigma F F = \breve{F} F.$$

Коммутативность нижнего квадрата:

$$\Sigma(-M)\phi(t) = \Sigma(-t\phi(t)) = t\phi(-t) = M\Sigma\phi(t).$$

$$\breve{F} F M = \Sigma F F M = \Sigma F(iD)F = \Sigma(-M)FF = M\Sigma FF = M\breve{F}F.$$

□

Предложение 52. *Пусть $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ линейный оператор, перестановочный с M. Тогда $\exists \alpha \in \mathcal{E}$ такой, что*

$$[G\phi](t) = \alpha(t)\phi(t). \tag{11.4}$$

G - оператор умножения на гладкую функцию.

Доказательство. Сначала докажем лемму

Лемма 5. *Пусть для некоторых $\phi \in \mathcal{S}$ и $a \in \mathbb{R}$ $\phi(a) = 0$. Тогда*

$$[G\phi](a) = 0. \tag{11.5}$$

Доказательство. ϕ гладкая, $\phi(a) = 0 \;\Rightarrow\; \phi(t) = (t-a)\psi(t),\;\psi(t)$ тоже гладкая, $\psi(t) = (t-a)^{-1}\phi(t) \in \mathcal{S}$. Поэтому можем записать

$$\phi = (M - a\mathbb{1})\psi.$$

G перестановочен с $M - a\mathbb{1}$, значит

$$G\phi = G(M - a\mathbb{1})\psi = (M - a\mathbb{1})G\psi \;\Rightarrow$$

$$G\phi(t) = (t-a)G\psi(t) \;\Rightarrow$$

$$G\phi(a) = 0.$$

□

Следствие.

$$\phi_1(a) = \phi_2(a) \;\Rightarrow\; [G\phi_1](a) = [G\phi_2](a). \tag{11.6}$$

Продолжаем доказывать предложение. Для любого a фиксируем $\phi_a \in \mathcal{S}$ с $\phi_a(a) = 1$. Полагаем

$$\alpha(a) = [G\phi_a](a). \tag{$*$}$$

Надо: $[G\phi](a) = \alpha(a)\phi(a)$.

- $\phi(a) = 0$. Используем лемму 5.
- $\phi(a) \neq 0$. Полагаем

  $$\psi := \frac{1}{\phi(a)}\phi,\;\psi(a) = 1 = \phi_a(a).$$

  Из следствия

  $$[G\psi](a) = [G\phi_a](a) = \alpha(a) \;\Rightarrow$$

  $$[G\phi](a) = \phi(a)G\psi(a) = \phi(a)\alpha(a).$$

Осталось показать, что α гладкая. Достаточно показать, что на (b,c) $\alpha(a)$ совпадает с некоторой гладкой. Берём шляпу $\text{ш}|_{(b,c)} \equiv 1$. Тогда $\forall a \in (b,c)$

$$\text{ш}(a) = 1 = \phi_a(a).$$

Отсюда

$$\alpha(a) = [G\phi_a](a) = [G\text{ш}](a) \text{ на } (b,c).$$

G действует в $\mathcal{S}$, значит $G\text{ш} \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\;$ гладкая. □

Предложение 53. *Пусть для $\alpha \in \mathcal{E}$ корректно определён $M_\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$: $\phi(t) \mapsto \alpha(t)\phi(t)$ и пусть известно, что M_α перестановочен с D. Тогда $\alpha \equiv const$.*

Доказательство. Для любого ϕ

$$(DM_\alpha\phi)(t) = (M_\alpha\phi)'(t) = (\alpha\phi)'(t) = \alpha'(t)\phi(t) + \alpha(t)\phi'(t).$$

С другой стороны

$$(M_\alpha D\phi)(t) = \alpha(t)[D\phi](t) = \alpha(t)\phi'(t).$$

Значит $\alpha'(t)\phi(t) = 0$. Возьмём $\phi \in \mathcal{S}$ с $\phi(t) \neq 0$ и получаем

$$\alpha'(t) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha \equiv const.$$

□

Теорема 25. *$F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ обладает обратным оператором и это $\breve{F}$. Как следствие, F - топологический изоморфизм $\mathcal{S}$ на себя.*

Доказательство. $\breve{F}F$ перестановочен с M, значит это умножение на гладкую функцию, но он перестановочен и с D, значит

$$\breve{F}F = C\mathbb{1}.$$

В частности

$$\breve{F}F(e^{-\frac{t^2}{2}}) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Рассмотрим левую часть

$$\Sigma FF(e^{-\frac{t^2}{2}}) = \Sigma F(e^{-\frac{t^2}{2}}) = \Sigma(e^{-\frac{t^2}{2}}) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

значит $C = 1$. Теперь наоборот

$$F\breve{F} = F\Sigma F = \breve{F}F = \mathbb{1}.$$

□

Следствие 1. *$Im\, F$ плотен в $C_0(\mathbb{R})$, так как содержит $F(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.*

Следствие 2. *$F^2 = \breve{F}^2 = \Sigma$, а $F^4 = \mathbb{1}$.*

Доказательство.

$$F^2 = \Sigma\Sigma FF = \Sigma\breve{F}F = \Sigma\mathbb{1} = \Sigma.$$

□

Задача 74. F - топологический автоморфизм полинормированных алгебр

$$F : (\mathcal{S}, *) \to (\mathcal{S}, \cdot).$$

Задача 75. $\phi \in \mathcal{S}$, случилось, что

$$\int_{\mathbb{R}} t^n\phi(t)dt,\; n = 0, 1, 2...$$

Верно ли что тогда $\phi \equiv 0$.
Указание. $[F(\phi)](0)$ с точностью до константы.

Преобразование Фурье обобщённых функций

Преобразование Фурье определено в $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, но не в $\mathcal{E}$.

Задача 76 (*)**.** Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{F} & F(\mathcal{D}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{D}^* & \xrightarrow{?} & \mathcal{D}^* \end{array}$$

Доказать, что не существует непрерывного в w^* топологии, делающего диаграмму коммутативной.
Указание. Рассмотреть $f \mapsto Tf(\psi)$, ψ - фиксированная, она w^* непрерывна.

Теорема 26. *Существует единственный $\tilde{F} : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$ w^* - непрерывный и продолжающий F, то есть делающий диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{S}^* \end{array}$$

коммутативной, а именно

$$\tilde{F} = F^*, \ \text{,то есть } (F^* f)\phi = f(F(\phi)) \tag{11.7}$$

При этом $\tilde{F}$ - топологический автоморфизм полинормированных пространств.

Доказательство. Единственность: $\mathcal{S}$ - плотно в (S^*, w^*), поэтому существует не более одного оператора, совпадающего с заданным, действующего на $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}^*$ хаусдорфово).

F^*, будучи сопряжённым, непрерывен в w^*. Надо: $F^*\hat{\phi} = \widehat{F\phi}$. Пусть $\psi \in \mathcal{S}$

$$[F^*(\hat{\phi})](\psi) = \hat{\phi}(F\psi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(s)[F(\psi)](s)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)e^{-ist}dt \right) ds.$$

Ясно, что $\phi(s)\psi(t)e^{-ist}$ интегрируема на плоскости, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)e^{-ist}dt \right) ds = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(s)e^{-ist}ds \right) \psi(t)dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} [F(\phi)](t)\psi(t)dt = \widehat{F(\phi)}(\psi).$$

Рассмотрим $\tilde{F}$, обратным будет $(\breve{F})^*$:

$$\breve{F}^* F^* = (F\breve{F})^* = (\mathbb{1}_{\mathcal{S}})^* = \mathbb{1}_{\mathcal{S}^*}.$$

В другом порядке аналогично. □

Определение 42. $\tilde{F} : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$ называется *преобразованием Фурье обобщённой функции умеренного роста*

$$\tilde{F}(f)(\phi) = f(F(\phi)). \tag{11.8}$$

Пример 9. $f = \delta$, утверждается, что $\tilde{F}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Доказательство.

$$F^*\delta(\phi) = \delta F(\phi) = F(\phi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(\phi).$$

□

Задача 77. $\tilde{F}(\hat{1}) = \sqrt{2\pi}\delta$.

Задача 78. $f = \widehat{e^{iat}t^k}$. Найти $\tilde{F}(f)$.

Задача 79. $\phi \mapsto \phi^{(k)}(a)$. Найти $\tilde{F}$.

Лекция 12

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье обобщённых функций

Предложение 54. *Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{tikzcd} L_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i_1"] & C_0(\mathbb{R}) \arrow[d, hook, "i_0"] \\ \mathcal{S}^* \arrow[r, "\tilde{F}"] & \mathcal{S}^* \end{tikzcd}$$

$i_0,\ i_1 : \phi \mapsto \hat{\phi}$. *Диаграмма корректна и коммутативна.*

Доказательство. Сначала докажем лемму.

Лемма 6. $i_0,\ i_1$ *корректно определены и непрерывны в соответствующих топологиях.*

Доказательство.

а) Рассматриваем i_1, возьмём $\psi \in \mathcal{S}$ и рассмотрим $\|\cdot\|_\psi$.

$$\|i_1(\phi)\|_\psi = |i_1(\phi)(\psi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(t)|\|\psi\|_{C_0(\mathbb{R})}dt \leqslant C\|\phi\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

где $C = \|\psi\|_{C_0(\mathbb{R})}$.

б) Рассматриваем i_0, возьмём $\psi \in \mathcal{S}$ и рассмотрим $\|\cdot\|_\psi$. $\phi \in C_0(\mathbb{R})$

$$\|i_0(\phi)\|_\psi = |i_0(\phi)(\psi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(t)|\|\phi\|_{C_0(\mathbb{R})}dt \leqslant C_1\|\phi\|_{C_0(\mathbb{R})},$$

где $C_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(t)|dt = \|\psi\|_{L_1(\mathbb{R})}$.

□

Продолжим доказываеть предложение. Будем сравнивать $\tilde{F}i_1$ с i_0F. Они оба $L_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^*$. Достаточно, чтобы они совпадали на плотном подпространстве - $\mathcal{S}$. Возьмём $\phi \in \mathcal{S}$

$$(\tilde{F}i_1)(\phi) = \tilde{F}(\hat{\phi}) = \widehat{F(\phi)} = (i_0F)(\phi).$$

□

Теорема 27 (единственности)**.** $F : L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ *инъективен.*

Доказательство. Пусть для $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ $F(\phi) \equiv 0 \ \Rightarrow\ i_0F(\phi) = 0 \ \Rightarrow\ \tilde{F}i_1(\phi) = 0$. Но $\tilde{F}$ инъективен, значит $i_1(\phi) = 0$, то есть $\hat{\phi} = 0 \ \Rightarrow\ \phi \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, иначе говоря $\phi = 0$ в $L_1(\mathbb{R})$. □

Задача 80. Пусть для $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ $F(\phi) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\breve{F}F(\phi) \overset{\text{п.в.}}{=} \phi$.

Указание. $\widehat{\breve{F}F} = \hat{\phi}$.

Преобразование Фурье квадратично интегрируемых функций

Рассмотрим пространство $L_2(\mathbb{R})$, там не всегда сходится обычное преобразование Фурье, например для $\phi = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

$\mathcal{S}$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}$ ещё и почти гильбертово.

Предложение 55. *F - унитарный изоморфизм в почти гильбертовом $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Знаем, что это биекция. Надо только доказать, что

$$\langle F(\phi), F(\psi)\rangle = \langle \phi, \psi\rangle.$$

$$\langle F(\phi), F(\psi)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} F(\phi)(s)\overline{F(\psi)(s)}ds = \int\limits_{\mathbb{R}} F(\phi)(s)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)e^{-ist}dt\right)}ds.$$

Получили функцию двух переменных $F(\phi)(s)\overline{\psi(t)}e^{ist} \in L_2(\mathbb{R}^2)$, значит

$$\int\limits_{\mathbb{R}} F(\phi)(s)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)e^{-ist}dt\right)}ds = \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} F(\phi)(s)e^{its}ds\right)\overline{\psi(t)}dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\overline{\psi(t)}dt = \langle \phi, \psi\rangle.$$

□

Теорема 28 (Планшереля)**.** *Существует ограниченный оператор $F_\bullet : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ однозначно определённый тем, что она совпадает на $\mathcal{S}$ с F. Он унитарный и как следствие выполняется равенство Планшереля:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F_\bullet(\phi)(s)|^2 ds = \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(t)|^2 dt. \tag{12.1}$$

Наконец, если $\phi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то $F(\phi) \overset{п.в.}{=} F_\bullet(\phi)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S} \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ L_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{F.} & L_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

$\mathcal{S}$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$, i - унитарный оператор, значит существует единственное продолжение по непрерывности.

Равенство Планшереля выполняется из унитарности оператора. Теперь рассмотрим две диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{F} & C_0(\mathbb{R}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_0} \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{S}^* \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{F_\bullet} & L_2(\mathbb{R}) \\ \big\downarrow i_2 & & \big\downarrow i_2 \\ \mathcal{S}^* & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{S}^* \end{array} \tag{2}$$

Предложение 56. *Диаграмма (2) коммутативна, то есть $\tilde{F}$ продолжает $F_\bullet$.*

Доказательство. Вначале докажем лемму.

Лемма 7. *i_2 непрерывен.*

Доказательство. Зафиксируем $\psi \in \mathcal{S}$ и $\|\cdot\|_\psi$.

$$\|i_2(\phi)\|_\psi = \|\hat{\phi}\|_\psi = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi(t)dt\right| = \langle \phi, \overline{\psi}\rangle \overset{\text{К/Б}}{\leqslant} \|\phi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2} \leqslant C\|\phi\|_{L_2},$$

где $C = \|\psi\|_{L_2}$. □

Теперь сравним $\tilde{F}i_2$ с i_2F.. Они оба $L_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^*$, достаточно доказать, что они совпадают на $\mathcal{S}$. $\forall \phi \in \mathcal{S}$

$$[\tilde{F}i_2](\phi) = \tilde{F}(\hat{\phi}) = \widehat{F(\phi)} = i_2[F_\bullet(\phi)] = i_2F_\bullet(\phi).$$

□

Закончим доказательство теоремы.
$\phi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$

$$i_1\phi = \hat{\phi} = i_2\phi \;\Rightarrow\; \tilde{F}i_1\phi = \tilde{F}i_2\phi,$$

$$\tilde{F}i_1\phi = i_0F\phi = \widehat{F(\phi)},$$

$$\tilde{F}i_2\phi = i_2F_\bullet\phi = \widehat{F_\bullet(\phi)}.$$

По теореме единственности $F(\phi)$ совпадает с $F_\bullet(\phi)$ почти всюду. □

Рассмотрим

$$\Sigma_\bullet : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) : \phi \mapsto \omega : \omega(t) = \phi(-t). \tag{12.2}$$

Предложение 57.

$$F_\bullet^2 = \Sigma_\bullet,\; F_\bullet^4 = \mathbb{1}_{L_2}. \tag{12.3}$$

Доказательство. Сравниваем $F_\bullet^2$ и $\Sigma_\bullet$. Если они совпадают на плотном подпространстве $\mathcal{S}$, то они совпадают. На $\mathcal{S}$ $F_\bullet^2$ это F^2, а $\Sigma_\bullet$ это Σ, а на $\mathcal{S}$

$$F^2 = \Sigma.$$

Второе равенство это немедленное следствие первого. □

Следствие.

$$\sigma(F_\bullet) \subseteq \{1, -i, -1, i\}. \tag{12.4}$$

Доказательство.

$$\forall p \in \mathbb{C}[t]\ p(\sigma(F_\bullet)) = \sigma(p(F_\bullet)).$$

Возьмем $p(t) = t^4$

$$\sigma(F_\bullet)^4 = \sigma(F_\bullet^4) = \sigma(\mathbb{1}) = 1.$$

□

Задача 81. $F_\bullet^{-1}$ - продолжение по непрерывности $\breve{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Задача 82. Написать коммутативную диаграмму с использованием $F_\bullet$, T_a $M_{e^{ita}}$ ($T_a\phi(t) := \phi(t-a)$).

Функции Эрмита

Рассматриваем $h_n(t) = p_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$, $deg\, p_n(t) = n$ - функции Эрмита.

Лемма 8.

$$\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)} = (-1)^n t^n e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}},\ \lambda_k \in \mathbb{Z}. \tag{12.5}$$

Доказательство. Доказываем по индукции
$n = 1$.

$$\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' = -te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Пусть верно для n, рассмотрим при $n+1$

$$\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n+1)} = \left(\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]^{(n)}\right)' = \left[(-1)^n t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right]' + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k t^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' =$$

$$= (-1)^n t^n \left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right) + (-1)^n n t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}} + \alpha'(t) =$$

$$= (-1)^{n+1} t^{n+1} e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k t^{n+1-k} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Самим доказать, что сумма нужная нам. □

Лемма 9.

$$F\left(t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = (-i)^n t^n e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{k=1}^{n} (i)^n \lambda_k t^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{12.6}$$

где λ_k те же, что и в лемме 8.

Доказательство. Помним, что в $\mathcal{S}$

$$F(\mathbf{t}\phi) = i[F(\phi)]'$$

$$F\left(t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = i\left[F\left(t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]' = i^n \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)}.$$

По лемме 8

$$i^n \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)} = (-i)^n t^n e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{k=1}^{n} i^n \lambda_k t^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

□

Задача 83. Функции Эрмита $h_0 = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $h_1 = te^{-\frac{t^2}{2}}$, $h_2, h_3 = ?$

Введём

$$H_n = span\{h_0, ...h_n\} = span\left\{t^k e^{-\frac{t^2}{2}}, k = 0, 1, ...n\right\}, \tag{12.7}$$

$H_0 \subset H_1 \subset .... \subset H_n$, $H_n = span\{H_{n-1}, h_n\} = span\left\{H_{n-1}, t^n e^{-\frac{t^2}{2}}.\right\}$

Лекция 13

Преобразование Фурье

Функции Эрмита

Теорема 29. *Функции Эрмита h_n, $n = 0, 1, 2...$ суть собственные векторы оператора $F_\bullet$, а собственные значения суть $(-i)^n$.*

Доказательство. Рассматриваем пространства H_n. Из леммы 9

$$F\left(t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = (-i)^n t^n e^{-\frac{t^2}{2}} + \phi,\ \phi = \sum_{k=1}^{n} (i)^n \lambda_k t^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

$\phi \in H_{n-1} \ \Rightarrow$

$$F_\bullet(t^n e^{-\frac{t^2}{2}}) = F(t^n e^{-\frac{t^2}{2}}) \in H_n \ \Rightarrow$$

H_n - инвариантное подпространство относительно $F_\bullet$, оно также инвариантно относительно $F_\bullet^3$.

Утверждение 1.

$$F_\bullet \perp H_{n-1}. \tag{13.1}$$

Доказательство. Надо: $\phi_0 \in H_{n-1} \ \Rightarrow \ \langle F_\bullet(h_n), \phi_0 \rangle = 0$.

$F_\bullet^3$ - унитарный оператор вместе с $F_\bullet$. Поэтому

$$\langle F_\bullet(h_n), \phi_0 \rangle = \langle F_\bullet^3 F_\bullet(h_n), F_\bullet^3 \phi_0 \rangle = \langle h_n, F_\bullet^3 \rangle = 0,$$

так как $h_n \perp H_{n-1}$, а H_{n-1} инвариантно относительно $F_\bullet^3$. □

Утверждение 2.

$$F_\bullet(h_n) = \lambda h_n \text{ для } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{13.2}$$

Доказательство. $F_\bullet(h_n) \in H_n = span\{H_{n-1}, h_n\}$, поэтому

$$F_\bullet(h_n) = \phi_1 + \lambda h_n,\ \phi_1 \in H_{n-1}.$$

Надо: $\phi_1 = 0$.
По утверждению 1

$$0 = \langle F_\bullet(h_n), \phi_1 \rangle = \langle \phi_1 + \lambda h_n, \phi_1 \rangle = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle + \lambda \langle h_n, \phi_1 \rangle = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle \ \Rightarrow \ \phi_1 = 0.$$

□

Итак, $F_\bullet(h_n) = \lambda h_n$, необходимо найти λ.

Помним, что $h_n \in H_n = span\left\{H_{n-1}, t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right\}$, поэтому

$$h_n = \mu t^n e^{-\frac{t^2}{2}} + \psi,\ \psi \in H_{n-1}, \tag{$*$}$$

причём $\mu \neq 0$.

Из леммы 9

$$F_\bullet(h_n) = \mu\left[(-i)^n t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right] + \mu\phi + F_\bullet(\psi), \tag{$**$}$$

где $\phi \in H_{n-1}$. Из утверждения 2 $(**) = \lambda(*)$ $\Rightarrow$

$$0 = \mu\left[(-i)^n - \lambda\right] t^n e^{-\frac{t^2}{2}} + \mu\phi + F_\bullet(\psi) - \lambda\psi.$$

Положим

$$\chi := \mu\phi + F_\bullet(\psi) - \lambda\psi \in H_{n-1}.$$

$\mu \neq 0$

$$((-i)^n - \lambda)t^n e^{-\frac{t^2}{2}} = -\mu^{-1}\chi.$$

Но $t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \in H_n \setminus H_{n-1} \Rightarrow (-i)^n - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = (-i)^n$. □

Задача 84. Считая, что h_n ортонормированный базис доказать, что $F_\bullet$ унитарно эквивалентен T_λ в l_2, $\lambda = (1, -i, -1, i, 1, -i, ...)$.

Задача 85. Предложить модель оператора $F_\bullet$ в $L_2[0,4]$.

Задача 86 (*). $L_2 * L_2 = F(L_1)$ причём для $\phi, \psi \in L_2$

$$\phi * \psi = F\Sigma(F_\bullet(\phi)F_\bullet(\psi)).$$

Указание. $\phi_n \to \phi, \psi_n \to \psi$, $\phi_n, \psi_n \in \mathcal{S}$. Заметить, что $\phi_n * \psi_n \rightrightarrows \phi * \psi$ и то, что свёртка переходит в поточечное произведение.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ