МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

ХЕЛЕМСКИЙ
АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

КЛОЧЕНКО МАКСИМА АНДРЕЕВИЧА

Содержание

Лекция 1 **6**
Введение. Норма . . . 6
Преднорма. Норма . . . 6
Почти гильбертовы пространства. . . . 9
Определение и примеры. Скалярное произведение . . . 9
Нормированные пространства. Неравенство Коши—Буняковского . . . 11
Ортогональные и ортонормированные системы векторов . . . 13

Лекция 2 **15**
Почти гильбертовы пространства . . . 15
Ортогонализация Грама—Шмидта . . . 15
Расстояние. Ближайшая точка . . . 16
Ряд Фурье . . . 18
Базис. Базис Шаудера . . . 20
Операторы . . . 20
Ограниченные операторы . . . 20

Лекция 3 **22**
Операторы . . . 22
Ограниченные операторы (продолжение) . . . 22
Топологический и изометрический изоморфизмы . . . 24
Ограниченность и непрерывность . . . 26
Функционалы . . . 27
Продолжение оператора . . . 29
Продолжение оператора . . . 29
Формулировка теоремы Хана—Банаха . . . 29

Лекция 4 **31**
Продолжение оператора . . . 31
Доказательство теоремы Хана—Банаха . . . 31
Комплексная форма теоремы Хана—Банаха . . . 34
Следствия теоремы Хана—Банаха . . . 36

Лекция 5 **38**
Банаховы пространства . . . 38
Функционалы в пространстве непрерывных функций . . . 38
Понятие банахова и гильбертова пространства . . . 39
Простейшие свойства банаховых пространств . . . 41
Продолжение по непрерывности . . . 43
Гильбертовы пространства . . . 45
Теорема Рисса—Фишера . . . 45

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6 **47**
Гильбертовы пространства . . . 47
Эквивалентные и подобные операторы . . . 47
Ближайший вектор в гильбертовом пространстве . . . 48
Теорема об ортогональном дополнении . . . 50
Сопряжённые и самосопряжённые операторы . . . 51
Ортогональные и сопряжённые операторы . . . 51

Лекция 7 **54**
Сопряжённые и самосопряжённые операторы . . . 54
Банахов и гильбертов сопряжённые операторы . . . 54
Основные свойства гильбертова сопряжённого оператора . . . 56
Сопряжённость и геометрия . . . 58
Самосопряжённые операторы . . . 59
Теорема Банаха—Штейнхауса. Теорема Банаха . . . 61
Теорема Банаха—Штейнхауса . . . 61

Лекция 8 **63**
Теорема Банаха—Штейнхауса. Теорема Банаха . . . 63
Следствия теоремы Банаха—Штейнхауса . . . 63
Теорема Банаха . . . 64
Пополнение . . . 65
Понятие пополнения. Теорема единственности . . . 65
Теорема существования . . . 67
Компактность и сверхограниченность . . . 69
Понятие компактности и сверхограниченности . . . 69

Лекция 9 **71**
Компактность и сверхограниченность . . . 71
Примеры сверхограниченности. Эквивалентные условия сверхограниченности . . . 71
Эквивалентные условия компактности . . . 72
Компактность и конечномерность . . . 75
Мажорирующая норма . . . 77

Лекция 10 **78**
Компактность и сверхограниченность . . . 78
Сверхограниченность и конечномерность . . . 78
Теорема Рисса . . . 79
Равностепенная непрерывность. Теорема Арцела . . . 81
Компактные операторы . . . 82
Понятие компактного оператора . . . 82
Свойство аппроксимации . . . 84

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11 **86**
Компактные операторы . . . 86
Свойство аппроксимации (продолжение) . . . 86
Компактные операторы между гильбертовыми пространствами . . . 86
Теорема Шмидта . . . 87
Доказательство теоремы Шмидта . . . 89

Лекция 12 **93**
Компактные операторы . . . 93
Компактные операторы и гильбертово сопряжение . . . 93
Теорема Гильберта—Шмидта . . . 94
Унитарно-эквивалентные операторы . . . 97
Ядерные операторы . . . 98

Лекция 13 **101**
Компактные операторы . . . 101
Доказательство теоремы о ядерном операторе . . . 101
Фредгольмовы операторы . . . 102
Понятие фредгольмова оператора . . . 102
Первая теорема Фредгольма . . . 104
Альтернатива Фредгольма . . . 105

Лекция 14 **107**
Фредгольмовы операторы . . . 107
Третья теорема Фредгольма . . . 107
Традиционная формулировка теоремы Фредгольма . . . 108
Фредгольмовы операторы в банаховых пространствах . . . 109
Начало спектральной теории . . . 110
Понятие спектра . . . 110

Лекция 15 **113**
Начало спектральной теории . . . 113
Элементы алгебры . . . 113
Взгляд на спектры со стороны алгебры . . . 115
Законом отображения спектров для полиномиального исчисления . . . 116

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 1

Введение. Норма

Преднорма. Норма

Рассмотрим линейное пространство E над полем скаляров $\mathbb{C}$. Иногда в этом курсе мы будем рассматривать в качестве примера также случаи для поля $\mathbb{R}$.

Определение. *Преднормой*, или *полунормой*, в E называют функцию

$$\|\cdot\| \,:\, E \to \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

где $x \mapsto \|x\|$, причём выполняются следующие условия,

$$1)\ \|\lambda x\| = \lambda \|x\|, \tag{1.2}$$

$$2)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \text{(неравенство треугольника).} \tag{1.3}$$

Если для данной преднормы верно, что $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, то такую преднорму называют *нормой*.

Определение. Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *преднормированным пространством*, если $\|\cdot\|$ — преднорма, и *нормированным пространством*, если $\|\cdot\|$ — норма.

Отметим, что если в одном и том же линейном пространстве задать две разные нормы, то мы будем иметь дело с двумя разными нормированными пространствами.

Иногда приходится рассматривать пространства не с одной преднормой, а с целым семейством преднорм — такие пространства называют *полинормированными*. Если норма задана в алгебре A, и при этом норма произведения пары векторов равна произведению норм этих векторов, то пару $(A, \|\cdot\|)$ называют *нормированной алгеброй*. Также вводят *матрично нормированные пространства* — в таких пространствах норма вводится не только в самом пространстве, но и во всех пространствах матриц разной размерности над ним.

Всякое нормированное пространство автоматически является метрическим — понятие метрического пространства мы предполагаем известным. Напомним, что в метрическом пространстве расстоянием $d(x, y)$ между векторами x и y называют норму их разности,

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{1.4}$$

Аналогично говорят и о *предметрических пространствах*, в которых расстоянием является преднорма такой же разности — то есть, из нулевого расстояния между точками не следует, что это одна и та же точка,

$$d(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y.$$

В математической жизни предметрические пространства встречаются — например, в действительном анализе нам встречались измеримые пространства, в которых была задана мера. Такие пространства являются предметрическими, потому что

$$d(A, B) = \mu(A \vartriangle B).$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если мы возьмём два множества меры нуль, мы получим, что расстояние между ними равно нулю, хотя это, вообще говоря, два разных множества.

Как только мы задаём метрическое или предметрическое пространство, сразу возникают два очень важных геометрических объекта.

Определение. *Замкнутым единичным шаром* называют множество векторов

$$Ш_E = \{x : \ \|x\| \leq 1\}. \tag{1.5}$$

Определение. Аналогично, *открытым единичным шаром* называют множество векторов

$$Ш_E^0 = \{x : \ \|x\| < 1\}. \tag{1.6}$$

Как нам известно, метрическое пространство является частным случаем *топологического пространства*, потому что есть условия, при которых метрика задаёт некоторую топологию. В связи с этим,

Задача 1. Доказать, что в соответствующей топологии замкнутый шар $Ш_E$ будет замкнут, а открытый шар $Ш_E^0$ — открыт.

Рассмотрим некоторые примеры преднормированных пространств.

Пример 0. Положим преднорму любого вектора равной нулю. Такое пространство называют *антидискретным*.

$$\forall x, \|x\| \equiv 0.$$

Пример 1. Зададим на линейном пространстве E линейный функционал $f : E \to \mathbb{C}$. С таким функционалом будет связана преднорма,

$$\|x\|_f = |f(x)|,$$

то есть, модуль комплексного числа $f(x)$. Несложно проверить все аксиомы и увидеть, что кроме случая одномерного пространства это всегда преднорма, а не норма.

Пример 2. В курсе действительного анализа мы имели дело с измеримым пространством X с мерой μ, $L(X, \mu)$. Такое пространство состоит из интегрируемых на X функций $x(t)$, а преднорма будет иметь вид

$$\|x\| = \int_X |x(t)|\, dt.$$

Пример 3. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$. Векторы из него будем обозначать $\xi(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Норму в этом пространстве будет задавать число $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|\xi\|_p = \sqrt[p]{\sum_i^n |\xi_k|^p}.$$

Мы не будем рассматривать доказательство этого утверждения, вместо этого отметим, нужно уметь это доказывать в трёх случаях: 1, p и ∞, причём особенное внимание следует уделить конкретному случаю $p = 2$. Для первого всё очевидно, а для третьего заметим, что

$$\|\xi\|_\infty = \max\left\{|\xi_k|\right\}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Введём обозначение,

$$\mathbb{C}_p^n = l_p^n, \tag{1.7}$$

перейдя вместе с этим от конечномерных пространств к пространствам последовательностей. Выделяют различные пространства последовательностей, не все из которых имеют естественные нормы. Итак, рассмотрим некоторые пространства последовательностей,

Пример 4. Пространство *финитных последовательностей* c_{00} — каждая из этих последовательностей содержит только некоторое конечное число ненулевых членов.

Пример 5. c_0 — пространство последовательностей, у которых при $n \to \infty$ имеет место стремление $\xi_n \to 0$. В отличие от финитных последовательностей, в этом случае мы уже можем ввести норму,

$$\|\xi\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|.$$

Несложно заметить, что в данном случае $\sup|\xi_n| = \max|\xi_n|$, однако мы всё же будем писать здесь супремум, потому что именно супремум будет нужен в более общих случаях.

Пример 6. $c_b = l_\infty$ — пространство ограниченных последовательностей. Как мы уже отметили, в нём норма имеет вид

$$\|\xi\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|.$$

Пример 7. Наконец, бесконечномерным аналогом пространства $\mathbb{C}_p^n$ является l_p, состоящий из тех ξ, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p,$$

норма такого пространства будет иметь вид

$$\|\xi\| = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p}.$$

Опять же, необходимо уметь доказывать те же три случая.

Отметим теперь, что последовательности являются частным случаем функций. Перейдём же к функциям.

Пример 8. В качестве примера рассмотрим множество $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Норма такого пространства будет иметь вид

$$\|\xi\| = \max_{a\le t\le b} \max|x(t)|.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 9. Рассмотрим пространство $C^n[a,b]$ n раз дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$. В норме этого пространства уже будет участвовать не только сама функция, но и её производные,

$$normax = \max_{0\le k\le n}\max_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)|,$$

где под $k^{(0)}(x)$, как обычно, подразумевается $k(x)$.

Наконец, впоследствии мы будем рассматривать пространство $C^\infty[a,b]$ *гладких* на отрезке $[a,b]$ функций — это пространство уже не будет иметь естественной нормы, о нём нам придётся говорить уже только как о полинормированном пространстве.

Когда мы рассмотрели дифференцируемые функции, имеет смысл перейти к рассмотрению интегрируемых функций $L_p(X,\mu)$ на пространстве X с мерой μ.

Пример 10. Помня, что функции называются *эквивалентными*, если они совпадают на множестве полной меры, запишем класс эквивалентности тех функций x, у которых сходится интеграл

$$\int_X |x(t)|^p\,d\mu.$$

Равно как и в случае последовательности, это ещё не норма — норма получается снова извлечением корня p-той степени,

$$\|x\| = \sqrt[p]{\int_X |x(t)|^p\,d\mu}.$$

Равно как и в случае последовательности, здесь нужно уметь доказывать три случая, для $n = 1, 2, \infty$.

Случай $n = \infty$ заслуживает отдельного упоминания. Чтобы аккуратно определить это пространство, отметим, что оно состоит из классов эквивалентности *существенно ограниченных* функций — то есть таких, у которых для некоторого C множество $\{t:\ |x(t)| > C\}$ имеет меру нуль. Очевидно, что функция $1/t$ будет примером подобной функции. Нормой функции будет являться инфимум обладающих таким свойством C,

$$\|x\|_\infty = \inf\{C\}.$$

Задача 2. Доказать, что норма $\|x\|_\infty$ из последнего примера является нормой.

Отметим, наконец, что в нашем курсе пространством X чаще всего будет отрезок, некоторая прямая или окружность, а мерой μ — мера Лебега.

Почти гильбертовы пространства.

Определение и примеры. Скалярное произведение

Перейдём к обсуждению *почти гильбертовых пространств* (*near-Hilbert spaces*). Примером такого пространства может являться пространство, в котором мы живём, если полем скаляров взять поле действительных чисел. Традиционно для обозначения таких пространств используется буква H, в честь Гильберта.

Начнём издалека.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. *Сопряжённо билинейным*, или *полуторалинейным* (*sesquilinear*) *функционалом* называют функцию $\mathcal{S}$ двух переменных,

$$\mathcal{S} : H \times H \to \mathbb{C} \quad (\mathbb{R}), \tag{1.8}$$

обладающую двумя свойствами:

1) линейностью по первому аргументу,

$$\mathcal{S}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{S}(x, z) + \mu \mathcal{S}(y, z), \tag{1.9}$$

2) сопряжённой линейностью по второму аргументу,

$$\mathcal{S}(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda} \mathcal{S}(x, y) + \overline{\mu} \mathcal{S}(x, z). \tag{1.10}$$

С заданием такого функционала возникает связанная с ним квадратичная форма,

$$Q(x) := \mathcal{S}(x, x). \tag{1.11}$$

Оказывается, и это нетривиально, что и сопряжённо билинейный функционал $\mathcal{S}$ можно выразить через его квадратичную форму с помощью *полярного тождества*,

$$\mathcal{S}(x, y) = \sum_{k=0}^{3} \frac{i^k}{4} Q(x + i^k y), \tag{1.12}$$

где i — это мнимая единица.

Задача 3. Доказать, что полярное тождество верно. Доказать также, что при скалярах $\mathbb{R}$ бывает так, что $Q \equiv 0$, а $S \not\equiv 0$.

Задача 4. Написать аналог полярного тождества в действительных числах — там будет только два слагаемых.

Пользуясь вот этим общим определением, введём одно из важнейших, наверное, понятий нашего годового курса — *скалярное произведение* (*inner product*).

Определение. *Предскалярным*, или *полускалярным*, *произведением* называют сопряжённо билинейный функционал $\langle x, y \rangle$, удовлетворяющий следующим двум свойствам,

1) симметричностью,

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \tag{1.13}$$

2) положительной определённостью,

$$\langle x, x \rangle \geq 0. \tag{1.14}$$

Если верно также, что

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0, \tag{1.15}$$

то такой функционал называют *скалярным произведением*, а видоизменённое свойство *строго положительной определённостью*.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. *Почти гильбертовым пространством H* называют пару линейного пространства X и скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$H = (X, \langle\cdot,\cdot\rangle)\,. \tag{1.16}$$

Сразу же перейдём к примерам.

Пример 1. Конечномерное пространство $\mathbb{C}_2^n = l_2^n$ — это то же $\mathbb{C}^n$, в котором введено скалярное произведение следующего вида,

$$\langle\xi,\eta\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\eta_k}.$$

Если вдруг мы возьмём ту же сумму до некоторого $m < n$, мы получим предскалярное произведение.

Пример 2. Бесконечномерное пространство l_2, с суммой аналогичного ряда в качестве скалярного произведения,

$$\langle\xi,\eta\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\overline{\eta_k}.$$

Мы помним, что в l_2 сходится ряд из квадратов модулей комплексных чисел. Отсюда следует, что рассмотренный ряд тоже сходится — это классическое неравенство Коши—Буняковского.

Пример 3. $L_2(X,\mu)$ со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \int_X x(t)\overline{y(t)}\,d\mu.$$

Заметим, что эти пространства также будут и гильбертовыми, однако в этом качестве мы их сейчас ещё не рассматриваем.

Нормированные пространства. Неравенство Коши—Буняковского

Теорема 1 (Неравенство Коши—Буняковского[1]). *Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — предскалярное произведение. Тогда*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\,. \tag{1.17}$$

◀ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\langle tx + y, tx + y\rangle \le 0$. Раскроем это с использованием аксиомы билинейности, получая

$$t^2\langle x, x\rangle + \underbrace{t\langle y, x\rangle + t\langle x, y\rangle}_{\le 2t|\langle x,y\rangle|} + \langle y, y\rangle \ge 0,$$

потому что выделенные фигурной скобкой члены являются комплексно сопряжёнными числами. Получаем квадратный трёхчлен, про которые мы знаем, что они не меньше нуля тогда, когда их детерминант не меньше нуля, то есть,

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \le 0. \qquad ▶$$

[1] Или Коши—Буняковского—Шварца. В учебниках встречаются различные варианты комбинаций этих фамилий. — *Прим. лектора.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Оказывается, что если наше пространство почти гильбертово, то оно является и нормированным. В самом деле, введём норму как

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{1.18}$$

С помощью этого обозначения можно переписать неравенство Коши—Буняковского как

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \tag{1.19}$$

Предложение 1. *В случае предскалярного произведения такая $\|x\|$ является преднормой, а в случае скалярного произведения — нормой.*

◀ Помимо неравенства треугольника все доказательства не представляют сложности. Докажем неравенство треугольника. Возведём норму суммы векторов в квадрат, получая

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle \, ,$$

который мы сразу можем оценить как

$$\|x + y\|^2 \leq \langle x, x\rangle + |\langle y, x\rangle| + |\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \, ,$$

откуда, используя нами введённые обозначения, получим

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \, . \qquad ▶$$

Итак, беря различные скалярные произведения, мы можем получить целый класс нормированных пространств.

Раз мы получили нормированное пространство, мы также получили метрическое и топологическое пространство, а значит, можем говорить и о сходящихся последовательностях. Значит, можно рассмотреть следующее предложение,

Предложение 2. *Если в почти гильбертовом пространстве X есть две сходящиеся последовательности векторов, $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то и скалярное произведение $\langle x_n, y_n\rangle$ стремится к $\langle x, y\rangle$.*

◀ Оценим разность $|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle|$, которая, очевидно, должна стремиться к нулю.

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| = |\langle x - x_n, y\rangle - \langle x_n, y - y_n\rangle|,$$

что с помощью неравенства Коши—Буняковского можно оценить как

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leq \left\|x - x_n\right\| \|y\| + \left\|x_n\right\| \left\|y - y_n\right\| .$$

$\|x\|$ и $\|y\|$ — постоянные величины, а $\left\|x_n\right\|$ и $\left\|y_n\right\|$ образуют сходящиеся последовательности, значит, их норма ограничена сверху некоторой константой. Значит, эта оценка сверху стремится к нулю. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Естественным образом должен возникнуть вопрос, есть ли нормы, не задающиеся каким-нибудь скалярным произведением? Назовём нормированное пространство *гильбертизуемым* — пусть это и не очень общепринятый термин — если его норма задаётся скалярным произведением,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Рассмотрим предложение.

Предложение 3 (Равенство параллелограмма). *В любом пространстве с предскалярным произведением выполняется равенство*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.20}$$

Доказательство этого предложения не вызывает трудностей и подробно на лекции не рассматривается.

Выходит, что это — необходимое условие того, чтобы норма задавалась скалярным произведением. Далее же мы замечаем, что неравенство параллелограмма может нарушаться в нормированных пространствах, например в $C[a,b]$, l_1, l_∞, да и даже в l_3. Стало быть, не всякое нормированное пространство гильбертизуемо. А если равенство параллелограмма выполняется?

Теорема 2 (фон Нойманн—Йордан). *Если в нормированном пространстве выполняется равенство параллелограмма, то можно ввести скалярное произведение, порождающее норму этого пространства.*

На лекции доказательство этой теоремы не рассматривается, однако её необходимо доказать самостоятельно. Указание — необходимо использовать полярное тождество, рассматривавшееся ранее на этой лекции. Это тождество, если мы перейдём к скалярным произведениям, примет вид

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} \frac{i^k}{4} \left\|x + i^k y\right\|^2. \tag{1.21}$$

Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Продолжаем изучать геометрию почти гильбертовых пространств. Если бы мы работали с полем скаляров $\mathbb{R}$, мы могли бы говорить даже об углах между векторами. В комплексном поле такого делать нельзя — зато можно говорить о перпендикулярности двух векторов.

С этого момента предскалярными произведениями пользоваться не будем.

Определение. Два вектора в H называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \Leftarrow \langle x, y\rangle. \tag{1.22}$$

Определение. Вектор $x \in H$ называют *ортогональным множеству* $M \subset H$, если

$$\forall y \in M, x \perp M \Leftrightarrow x \perp y. \tag{1.23}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. Два множества $M, N \subset H$ называются *ортогональными*, если

$$\forall x \in M, \forall y \in N, x \perp y \Rightarrow M \perp N. \tag{1.24}$$

Рассмотрим некоторую систему векторов из нашего почти гильбертова пространства, e_ν, $\nu \in \Lambda$; такая система называется *ортогональной*, если

$$1)\ \forall \nu, \mu\ (\nu \neq \mu)\ e_\nu \perp e_\mu, \tag{1.25}$$

$$2)\ \forall \nu\ \left\|e_\nu\right\| \neq 0. \tag{1.26}$$

Если вдобавок верно, что

$$3)\ \forall \nu\ \left\|e_\nu\right\| = 1, \tag{1.27}$$

то систему называют *ортонормированной*. Иногда говорят, если $\|x\| = 1$, что этот вектор — *нормированный*.

Чем же хороши ортогональные системы? Рассмотрим предложение.

Предложение 4. *Ортогональная система обязательно линейно независима.*

◀ Докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0 \Rightarrow \text{все } \lambda_k = 0.$$

рассмотрим e_m среди наших e_k и скалярное произведение всей суммы на e_m,

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, e_m \right\rangle = \lambda_m \langle e_m, e_m \rangle = 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda_m = 0$, но m может быть любым.

Получаем, что любая конечная подсистема линейно независима, а значит, и вся бесконечная система линейно независима. ▶

Рассмотрим теорему.

Теорема 3 (Пифагор). *Пусть есть попарно ортогональные векторы $e_1, \dots, e_n$. Тогда квадрат нормы суммы этих векторов будет равен сумме квадратов их норм,*

$$\left\|e_1 + \dots + e_n\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\|e_k\right\|^2. \tag{1.28}$$

Доказательство этой теоремы на лекции также не приводится.

Какие бывают примеры ортогональных или ортонормированных систем векторов? Рассмотрим их.

Пример 1. В пространствах l_2^n, l_2 — *орты*. Ортами называются последовательности, на всех местах которых стоят нули, а на каком-то одном — единица.

Пример 2. Возьмём $L_2[-\pi, \pi]$. Как известно из курса комплексного анализа, ортогональной системой тут будет

$$e^{int}, n \in \mathbb{Z}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

Почти гильбертовы пространства

Ортогонализация Грама—Шмидта

Любую систему векторов в почти гильбертовом пространстве можно превратить в ортонормированную — для этого есть процесс *ортогонализации Грама—Шмидта*.

Предложение 5 (Ортогонализация Грама—Шмидта). *Пусть в почти гильбертовом пространстве H задана система векторов x_n, не состоящая из одних нулей. Тогда существует ортонормированная система e_n такая, что* $\operatorname{span}\left\{e_n\right\} = \operatorname{span}\left\{x_n\right\}$.

◀ Ясно, что достаточно получить ортогональную систему векторов, а пронормировать её после не вызовет затруднений.

Можно считать, что исходная система x_n линейно независима. Для этого мы вначале исключим все векторы, равные нулю, а после исключим все векторы, которые являются линейной комбинацией других векторов системы. Ясно, что после такого процесса система будет линейно независимой, и её линейная оболочка не изменится.

Дальше будем строить систему векторов e_k такую, что

$$e_k : \forall n, \operatorname{span}\left\{e_1, \dots, e_n\right\} = \operatorname{span}\left\{x_1, \dots, x_n\right\}.$$

Осуществлять такой алгоритм будем с помощью индукции:

1) $n = 1$: положим $e_1 := x_1$,

2) Пусть построено $e_1, \dots, e_n$. Берём x_{n+1} и ищем e_{n+1} как

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + x_{n+1}. \qquad (*)$$

Мы хотим, чтобы $e_{n+1} \perp e_k$. По определению, это означает, что $\left\langle e_{n+1}, e_k \right\rangle = 0$. Тогда,

$$\lambda_k = -\frac{\left\langle x_{n+1}, e_k \right\rangle}{\left\langle e_k, e_k \right\rangle}.$$

Итак, мы построили бесконечную ортогональную систему $e_1, \dots, e_n, \dots$, и при этом, из $(*)$ мы видим, что любой вектор $x_n \in \operatorname{span}\left\{e_1, \dots, e_n, \dots\right\}$. Также несложно видеть, что $e_n \in \operatorname{span}\left\{x_1, \dots, x_n, \dots\right\}$. ▶

Рассмотрим теперь один очень важный пример.

Пример. Возьмём в почти гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и рассмотрим в нём функции ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}.$$

Рассматриваемая система, очевидно, не ортогональна. Ортонормируем её с помощью процесса Грама—Шмидта и получим некоторые функции,

$$e_n(t) = p_n(t) e^{-t^2/2},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

составляющие ортонормированную систему. Такие функции называются *функциями Эрмита*, а входящие в них полиномы $p_n(t)$ — *полиномами Эрмита*. Например, эти функции очень важны в физике — они объединяют квантово-механические теории Гайзенберга и Шрёдингера.

Расстояние. Ближайшая точка

Обсудим теперь ещё одно важное достоинство почти гильбертовых пространств в сравнении с произвольными нормированными пространствами. Перейдём для этого к метрическому пространству M и вспомним понятие *расстояния*. Рассмотрим в пространстве M подмножество $N \subset N$ и точку $x \in M$.

Определение. *Расстоянием от точки до подмножества* называется нижняя грань расстояний от точки до всех точек подмножества,

$$d(x, N) := \inf \{ d(x, y) : \ y \in N \} . \tag{2.1}$$

Определение. *Ближайшей точкой* подмножества N к нашей точке x называют такую точку $y \in N$, что

$$d(x, y) = d(x, N). \tag{2.2}$$

В таком случае, очевидно, вместо inf в определении расстояния следует писать min.

Понятие это довольно деликатное, и в связи с этим имеет смысл рассмотреть несколько задач,

Задача 5. Привести примеры, когда ближайших точек несколько и когда нет ни одной.

В метрическом пространстве такие примеры привести несложно, поэтому имеет смысл рассмотреть и такую задачу,

Задача 6. Привести аналогичные случаи в нормированном пространстве E и его замкнутом подпространстве $F \subset E$.

При решении задачи разумно рассмотреть $E = C[-1, 1]$, а F следующего вида,

$$F = \left\{ x : \ \int_0^1 x(t)\, dt = \int_1^0 x(t)\, dt \right\} .$$

Оказывается, что в таком случае подойдёт любая функция, не входящая в подпространство.

Предложение 6. *В почти гильбертовом пространстве H задали конечную ортонормированную систему $e_1, \dots, e_n$, причём $H_0 = \operatorname{span}\left\{e_1, \dots, e_n\right\}$. Тогда существует единственный ближайший к x вектор $y \in H_0$, который указывается в явном виде,*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle\, e_k. \tag{2.3}$$

При этом $x - y \perp H_0$, а

$$d^2(x, y) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\, \langle x, e_k \rangle\, |^2. \tag{2.4}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ Докажем сперва ортогональность. Для этого достаточно, чтобы разность $x - y$ была ортогональна всем e_k, а тогда она будет ортогональна и любой их линейной комбинации. Возьмём какой-нибудь индекс l и посмотрим, что же такое $\langle x - y, e_l \rangle$,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, e_l \right\rangle = \langle x, e_l \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_l \rangle,$$
$$= \langle x, e_l \rangle - \langle x, e_l \rangle = 0.$$

Ортогональность доказана.

Рассмотрим ортогональную систему $x - y, \langle x, e_k \rangle e_k$. Раз она ортогональна, можно использовать теорему Пифагора,

$$\|x\|^2 = \underbrace{\|x - y\|}_{d(x,y)} + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Но почему же вышло так, что y — ближайший вектор? Мы можем сразу заметить, что

$$d(x, y) \geq d(x, H_0).$$

Докажем обратное неравенство —

$$\forall z \in H_0, d(x, y) \leq d(x, z).$$

Рассмотрим вектор $y - z$ — так как оба вектора $y, z \in H_0$, $y - z \perp x - y$. Вспоминаем снова теорему Пифагора, $\|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$. Последнее утверждение, очевидно, можно переписать как

$$d^2(x, z) = d^2(x, y) + \|y - z\|^2. \qquad (**)$$

Отсюда ясно, что

$$d(x, z) \geq d(x, y).$$

Осталось также доказать, что вектор y — единственный вектор с таким расстоянием от x. Пусть есть ещё одна такая точка z. Тогда из $(**)$ следует, что $\|y - z\|^2 = 0$, а значит, $y = z$. ▶

Стоит обратить внимание на то, что в пространствах из задач 5 и 6 эта теорема не будет верна.

Рассмотрим теперь одно интересное следствие,

Следствие 1 (Неравенство Бесселя). *Пусть e_n — конечная или бесконечная ортонормированная система, тогда $\forall x$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \qquad (2.5)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В частности, из этого следствия несложно показать, что последовательность

$$\xi = (\dots, \langle x, e_n \rangle, \dots),$$

принадлежит l_2, и что её норма, $\|\xi\|_2 \leq \|x\|^2$.

Сколь бы ни были хороши ортонормированные системы, из них можно выделить и самые лучшие.

Определение. Рассмотрим преднормированное пространство E, в котором есть некоторая система векторов e_ν, $\nu \in \Lambda$. Такая система векторов называется *тотальной*, если $\operatorname{span}\left\{e_\nu\right\}$ плотна в нашем пространстве E.

Пример 1. В преднормированном пространстве, в котором всякая преднорма равна нулю, любая непустая система векторов будет линейной.

Пример 2. В пространстве l_2 орты образуют тотальную систему, как и в любом l_p, за исключением l_∞.

Пример 3. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ система функций e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ тоже тотальна.

Задача 7. Доказать это. Указание — теорема Вейерштрасса о полноте тригонометрических многочленов в $C[-\pi, \pi]$.

Пример 4. В пространстве $L_2[0, 1]$ введём *систему Радемахера*: первая функция системы принимает значение 1 на всём отрезке, вторая — 1 от 0 до 1/2 и -1 от 1/2 до 1, третья — 1 от 0 до 1/4, -1 от 1/4 до 2/4, 1 от 2/4 до 3/4 и -1 от 3/4 до 1, и так далее.

Система Радемахера нетотальна.

Отметим также, что ортонормированная система Эрмита, о которой мы говорили, тотальна. Доказывать этот факт мы пока не будем. Систему Радемахера в свою очередь можно дополнить до тотальной, добавив к ней всевозможные произведения составляющих её функций. Получающуюся после такого дополнения систему называют *системой Уолша*.

Предложение 7. *Если H сепарабельно, то в нём существует тотальная не более чем счётная ортонормированная система.*

◀ Выпишем наше множество в виде $x_1, \dots, x_n, \dots$. Применим к нему ортогонализацию Грама—Шмидта, получая систему $e_1, \dots, e_n, \dots$. Отметим, что

$$\operatorname{span}\left\{e_n\right\} = \operatorname{span}\left\{x_n\right\} \supseteq \{x_n\},$$

а $\{x_n\}$ уже плотно, так что и $\operatorname{span}\left\{x_n\right\}$ будет плотно. ▶

Ряд Фурье

Введём важную терминологию.

Определение. Если в почти гильбертовом пространстве H, в котором существует ортонормированная система e_n, взять $x \in H$, то скалярное произведение $\langle x, e_n \rangle$ назовут *n-ным коэффициентом Фурье* вектора x по системе e_k.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. *Рядом Фурье* по системе e_n называют ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n. \tag{2.6}$$

Отметим, что сходимость ряда мы рассматриваем по норме.

Рассмотрим теорему.

Теорема 4. *Если H — почти гильбертово пространство, e_n — тотальная ортонормированная система (для определённости, бесконечная), то для $x \in H$ будет верно,*

$$1)\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \tag{2.7}$$

$$2)\ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \tag{2.8}$$

$$3)\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \Rightarrow \lambda_n = \langle x, e_n \rangle. \tag{2.9}$$

◀ Введём обозначение $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Очевидно, что $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n$. Ясно, что из-за тотальности $\bigcup H_n$ плотно в H, то есть,

$$\forall x, d(x, H_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Из-за конечномерности H_n мы можем сказать, что в каждом H_n есть ближайший к x вектор y_n, который мы можем записать в общем виде. При этом,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, d(x, y_n) = d(x, H_n) < \varepsilon.$$

Из этого следует, что $x = \lim y_n$ при $n \to \infty$.

Вспомним, что

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Итак, утверждение *1)* доказано.

2): вспомним, что

$$d(x, y_n)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Раз $d(x, y_n) \to 0$, то

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2,$$

что и утверждается в *2)*.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Осталось доказать единственность 3). Пусть у нас есть какое-то разложение вектора в ряд,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Возьмём некоторое m и рассмотрим $\langle x, e_m \rangle$. Получим

$$\langle x, e_m \rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, e_m \right\rangle = \lambda_m.$$

Выходит, что наши якобы произвольные коэффициенты оказались коэффициентами Фурье. ▶

Базис. Базис Шаудера

Обобщим только что введённое понятие

Определение. Тотальная ортонормированная система в H называется *базисом* в H.

Обратим внимание, что такое понятие базиса не тождественно алгебраическому базису.

Определение. *Базисом Шаудера* в нормированном пространстве E называют последовательность векторов $e_1, \dots, e_n, \dots$ такую, что любой вектор x единственным образом разлагается в ряд,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Мы видим, что ортонормированный базис — это частный случай базиса Шаудера в предгильбертовом пространстве.

Задача 8. Показать, что это определение имеет смысл только для сепарабельных пространств.

Когда Шаудер представил Банаху примеры такого базиса в некоторых нормированных пространствах, Банах поставил проблему: во всяком ли (полном) нормированном пространстве существует базис Шаудера? В 1972 г. шведский математик П. Энфло доказал теорему, из которой следовало отрицательное решение проблемы Банаха.

Операторы

Ограниченные операторы

Рассмотрим преднормированные пространства E и F. Как мы уже знаем, не менее важно, чем вводить сами пространства, вводить и отображения, переводящие одно пространство в другое с сохранением их внутренней структуры. Примерами таких отображений являются линейные операторы в алгебре или непрерывные отображения в топологии.

Для преднормированных пространств тоже можно ввести такое отображение.

Предложение 8. *Рассмотрим линейный оператор $T: E \to F$, тогда следующие два свойства будут эквивалентны,*

$$1)\ \exists C > 0: \forall x \in E, \|Tx\| \leq C\|x\|, \tag{2.10}$$

$$2)\ \sup_{x \in Ш_E} \|Tx\| = C < \infty, \tag{2.11}$$

и при этом,

$$K^0 = K_0. \tag{2.12}$$

где $K^0 = \inf C$ *из* (2.10)*,* $K_0 = \sup C$ *из* (2.11).

◀ Докажем, что *1)* $\Rightarrow$ *2)*, и что одновременно $K_0 \leq K^0$. Действительно, если взять вектор $x \in Ш_E$, для которого, очевидно, $\|x\| \leq 1$, для некоторой константы будет верно, что $\|Tx\| \leq C$. Возьмём теперь супремум преднормы, равный, согласно введённым нами обозначениям, K_0, тогда получим

$$K_0 \leq C.$$

Но таких констант может быть много, а перейдя от произвольного множества к его нижней грани, получим искомое неравенство,

$$K_0 \leq K^0.$$

Теперь докажем наоборот, что *2)* $\Rightarrow$ *1)*, и что $K_0 \geq K^0$. Не будем забывать, что мы работаем в преднормированном пространстве, в котором у ненулевого вектора может быть и нулевая преднорма. Рассмотрим сперва случай с ненулевой преднормой, $\|x\| > 0$. Рассмотрим вектор

$$\frac{1}{\|x\|}x \in Ш_E.$$

Запишем, что

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\|x\|}\|Tx\| = \|x\| T\left(\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\|\right) \leq K_0\|x\|.$$

Получили неравенство,

$$\|Tx\| \leq K_0\|x\|.$$

Отметим, что если $\|x\| = 0$, то $\forall t > 0, tx \in Ш_E$, поскольку и $\|tx\| = 0$. Тогда несложно видеть, что

$$t\|Tx\| = \|T(tx)\| \leq K_0,$$

потому что $\|Tx\| = 0$. Это приводит нас к тому же неравенству.

Стало быть, K_0 — одна из констант C, и

$$K^0 \leq K_0.$$ ▶

Определение. Оператор $T: E \to F$ называется *ограниченным*, если для него выполнены эквивалентные свойства *1)* и *2)*.

Это определение является одним из важнейших в нашем курсе.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3

Операторы

Ограниченные операторы (продолжение)

На прошлой лекции было дано определение ограниченного оператора. Повторим важное неравенство, которое уже было получено: для линейного оператора $T: E \to F$,

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \, . \tag{3.1}$$

Отметим, что на данный момент $\|T\|$ следует воспринимать просто как некоторое число, сопоставленное оператору — смысл его будет раскрыт позднее.

Линейное пространство всех операторов, действующих из E в F, будем обозначать как

$$\mathscr{L}(E, F).$$

Это пространство содержит подпространство ограниченных линейных операторов,

$$\mathscr{B}(E, F) \subseteq \mathscr{L}(E, F). \tag{3.2}$$

Если пространства E и F совпадают, пишут просто $\mathscr{L}(E)$ и $\mathscr{B}(E)$. Наконец, когда F — просто поле скаляров, например, в нашем случае $\mathbb{C}$, пишут, что $\mathscr{L}(E, \mathbb{C}) = E^\sharp$. Для $\mathscr{B}(E, \mathbb{C})$ используется обозначение $E^\star$.

Рассмотрим теперь $\|T\|$.

Предложение 9. *Выполнены следующие условия:*

1) $\mathscr{B}(E, F)$ *подпространство в* $\mathscr{L}(E, F)$, (3.3)

2) $T \mapsto \|T\|$ *— преднорма*, (3.4)

3) F *— нормированное пространство* $\Rightarrow (\mathscr{B}(E, F), \|\cdot\|)$ *— нормированное*. (3.5)

◀ *1)* Нужно доказать, что в результате сложения двух ограниченных операторов или домножения ограниченного оператора на скаляр также получается ограниченный оператор. Отметим, что второе утверждение совершенно тривиально, поэтому на нём мы останавливаться не будем.

Итак, пусть у нас есть $S, T \in \mathscr{B}(E, F)$. Тогда $\forall x \in E$,

$$\|(S + T)x\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \leq (\|S\| + \|T\|) \, \|x\| \, .$$

Видим, что нам встретилась та же константа, с которой мы имели дело в предложении 8. Значит, сумма ограниченных операторов также является ограниченным оператором.

2) Аксиома со скаляром опять же очевидна, а вот с неравенством треугольника сейчас разберёмся. Мы только что получили, что $\|(S + T)x\| \leq (\|S\| + \|T\|) \, \|x\|$. Вспомним второе эквивалентное условие ограниченности оператора. x у нас будет принадлежать $Ш_E$. Тогда $\|(S + T)x\|$ не превосходит некоторого числа, $\|S\| + \|T\|$. Взяв супремум, получаем

$$\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\| \, ,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а это и есть неравенство треугольника.

3) Почему же пространство не преднормированное? Пусть $\|T\| = 0$. Смотря на неравенство (3.1), получаем, что $\|Tx\| = 0$. В таком случае, поскольку пространство нормированное, получаем, что и $Tx = 0$. Раз x любой, $T = 0$. ▶

Задача 9. Показать, что верно и обратное: если T — норма, то F — нормированное, а не просто преднормированное пространство.

Указание: если $\|y\| = 0$, а $y \neq 0$, то есть оператор с образом $\operatorname{span}\{y\}$, который отличен от нуля, но его преднорма — нуль.

Очевидно, что возможны разные преднормы в разных пространствах операторов, однако *операторной преднормой* принято называть именно ту, которую мы только что рассмотрели.

Вспомним, что у операторов есть ещё и операция композиции: Пусть у нас между множествами E, F и G действуют операторы S и T,

$$E \xrightarrow{S} F \xrightarrow{T} G.$$

В таком случае говорят о *сквозном операторе* TS,

$$TS:\ E \to G, x \mapsto T(Sx).$$

Операция, сопоставляющая паре операторов соответствующий сквозной оператор, как мы знаем, называется *композицией*.

Предложение 10 (Мультипликативное неравенство.). *Если E, F и G — преднормированные пространства, $S \in \mathscr{B}(E, F)$, а $T \in \mathscr{B}(F, G)$, то $TS \in \mathscr{B}(E, G)$, а*

$$\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|\,. \tag{3.6}$$

◀ Для доказательства нужно взять вектор x и посмотреть на преднорму $\|TSx\|$. Про неё можно сказать, что

$$\|TSx\| \leq \|T\|\,\|Sx\| \leq \|T\|\,\|S\|\,\|x\|\,.$$

Дальше снова берём $x \in Ш_E$, берём супремум и получаем как раз искомое мультипликативное неравенство. ▶

Было дано общее, абстрактное определение ограниченного оператора. В то же время, в математической науке встречаются разные классы операторов. Рассмотрим их.

1) *сжимающие операторы*: $\|T\| \leq 1$,
2) *изометрические*: $\|Tx\| = \|x\|$,
3) *коизометрические* (*quotient map*): $T(Ш_E^0) = Ш_F^0$,
4) *строго коизометрические* (*exact quotient map*): $T(Ш_E) = Ш_F$.,

Рассмотрим пару задач, чтобы лучше представить себе ограниченные операторы.

Задача 10. Строго коизометрический оператор всегда будет коизометрическим.

Задача 11 (*). Обратное неверно. Указание: Искать в $C[0,1]^\star$. — даже среди таких функционалов найдутся коизометрические функционалы, не являющиеся строго коизометрическими.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Топологический и изометрический изоморфизмы

В пределах каждой науки, помимо разговора об объектах и об отображениях, говорят ещё и об отождествлении двух объектов — о тех условиях, при которых два объекта в рамках данной теории могут считаться недостаточно различными. Такими отождествлениями являются, например, линейный изоморфизм или гомеоморфизм. В функциональном анализе говорят о двух различных подходах к отождествлению преднормированных пространств, которые мы сейчас рассмотрим на примере ограниченного оператора $T : E \to F$.

Определение. *Топологическим изоморфизмом* называют такой оператор, который сам ограничен, и к которому существует ограниченный обратный оператор.

Пример. Простейшим примером может служить оператор, домножающий каждый вектор пространства на скаляр 2.

Задача 12. Доказать, что T — топологический изоморфизм тогда и только тогда, когда это биекция и существует две константы c и C такие, что для любого вектора

$$c\,\|x\| \le \|Tx\| \le C\,\|x\|\,.$$

Определение. *Изометрическим изоморфизмом* называют биективный изометрический оператор.

Задача 13. Доказать, что T — изометрический изоморфизм тогда, когда он является сжимающим, и когда обратный к нему тоже является сжимающим.

Задача 14. Доказать, что биективный коизометрический оператор тоже является изометрическим изоморфизмом.

Можно отметить, что топологический изоморфизм позволяет отождествить гораздо больше пространств, чем изометрический изоморфизм. Рассмотрим без доказательства следующий пример: пусть у нас есть пространства $C[0,1]$ и $C(\square)$: оказывается, что они топологически, но не изометрически изоморфны.

К этому факту мы ещё вернёмся позднее.

Мы помним, что лучшие среди преднормированных пространств — почти гильбертовы пространства. Можно сформулировать подобные отождествления и для них, сохраняя скалярное произведение. Про топологический изоморфизм мы сейчас говорить не будем, а об изометрическом изоморфизме рассмотрим задачу.

Задача 15. Показать, что для почти гильбертова пространства оператор T изометричен тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение,

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle\,. \tag{3.7}$$

Стоит уточнить, что при рассмотрении почти гильбертовых пространств принято использовать несколько не такую терминологию, как для банаховых пространств. Так, изометрический изоморфизм между двумя почти гильбертовыми пространствами принято называть *унитарным*. Также для того же объекта встречается название *унитарный*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

оператор — такой оператор сохраняет скалярное произведение и к тому же является биекцией. Отметим, что второе из первого, вообще говоря, не следует, что мы вскоре рассмотрим на примерах.

Итак, какие же возникают в математической жизни конкретные классы операторов?

Пример 1. Диагональный оператор в пространствах последовательностей, например l_2 (l_1, l_∞ и другие). Этот оператор представляет собой домножение первых n членов последовательности на соответствующие члены последовательности $\lambda \in l_{00}$, состоящей как раз из n членов,

$$\xi \mapsto (\dots, \lambda_m \xi_m, \dots).$$

Пример 2. Сдвиги в l_2. Существуют различные сдвиги — рассмотрим сперва сдвиг влево на 1,

$$\xi \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots).$$

Несложно видеть, что норма этого оператора равна 1.

Рассмотрим также сдвиг вправо на 1,

$$\xi \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots).$$

Существует также двусторонний сдвиг $T_B \in \mathscr{B}\left(l_2(\mathbb{Z})\right)$, где $l_2(\mathbb{Z})$ — это пространство последовательностей с целочисленными индексами. Несложно понять, как он действует на последовательность.

Перейдём к пространствам функций $L_2(X, \mu)$ и $C[a, b]$.

Пример 3. Оператор умножения на функцию из $L_\infty(X, \mu)$ или $C[a, b]$ соответственно. Нужно разобраться, что, во-первых, мы действительно остались в том же самом пространстве, а, во-вторых, как действует оператор.

Начнём с ответа на второй вопрос,

$$g \mapsto fg,$$

то есть, мы имеем дело с поточечным умножением. Положительный ответ на первый вопрос очевиден.

Пример 4. Оператор неопределённого интегрирования. Он действует в пространстве L_2, для простоты, $L_2[0, 1]$, при этом,

$$T = x(t) \mapsto Tx(s) := \int_0^s x(\tau)\, d\tau.$$

Есть одна интересная тонкость — можно начать вычислять норму этого оператора и ничего не найти. Сейчас мы отметим для себя ответ, однако доказать его мы сможем только много позже.

Для L_2 нормой этого оператора будет $2/\pi$.

Задача 16. Найти норму оператора неопределённого интегрирования в пространствах $L_1[0, 1]$ и $C[0, 1]$.

Пример 5. Интегральный оператор (Фредгольма). Зададим его в пространстве $L_2[a, b]$. Для этого нужна некоторая *производящая функция* $K \in L_2(\square)$, и соответствующий ей оператор имеет вид

$$T_k x(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt.$$

Задача 17. Доказать, что оператор ограничен, и что его норма $\|T_K\| \leq \|K\|_{L_2(\square)}$.

Задача 18. Доказать, что оператор неопределённого интегрирования — частный случай интегрального оператора.

Ограниченность и непрерывность

Зададимся теперь вопросом, какие же общие свойства имеют перечисленные классы операторов? Этими свойствами, оказывается, являются ограниченность и непрерывность. О первой мы только что уже говорили, а вторая является свойством топологическим. Не будем забывать, что любое преднормированное пространство является также и топологическим — так вот, выяснится, что для линейных операторов свойства ограниченности и непрерывности эквивалентны.

Теорема 5. *Пусть E и F — преднормированные пространства, а $T: E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора T эквивалентны:*

1) *T ограничен,*
2) *T непрерывен в* 0,
3) *T непрерывен,*
4) *T равномерно непрерывен.*

◀ Ясно, что между утверждениями существует логическая связь вида *4) ⇒ 3) ⇒ 2)*. Сейчас мы покажем, что и *2) ⇒ 1)*. Для этого вспомним, что же означает непрерывность в нуле — возьмём некоторую окрестность нуля, а именно $\mathscr{U}_F(0,1)$, то есть, открытый единичный шар $Ш_F^0$ в пространстве F. Её прообраз, содержащий нуль, тоже является открытым множеством, ведь в силу свойства *2)* существует такая окрестность нуля $V \in E$, что $T(V) \subseteq Ш_F^0$. Внутри этой окрестности, раз наше пространство F преднормировано, существует некоторый шар $\mathscr{U}_E(0,\delta)$,

$$\mathscr{U}_E(0,\delta) = \{x : \ \|x\| < \delta\}.$$

То есть, из непрерывности в нуле имеем, $\|x\| < \delta$, то $\|Tx\| < 1$.

Значит, докажем, что

$$\exists C : \ \|Tx\| \leq C\,\|x\|, \forall x.$$

Подойдёт, например, константа $C = 2/\delta$. Покажем это. Поскольку наше пространство необязательно нормировано, рассмотрим два случая:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) $\|x\| > 0$. В этом случае на преднорму мы имеем право делить, а тогда
$$\frac{\delta}{2\|x\|}\|Tx\| < 1,$$
а отсюда следует, что
$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta}\|x\|.$$

2) $\|x\| = 0$. В таком случае $\forall t > 0, \|tx\| = 0 < \delta$, а значит, мы снова попадём в открытый единичный шар после применения T,
$$\|T(tx)\| = t\|Tx\| < 1 \ (\forall t > 0),$$
а из произвольности числа t следует, что
$$\|Tx\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| < \frac{2}{\delta}.$$

Итак, *2)* $\Rightarrow$ *1)* доказано. Осталось замкнуть цикл, *1)* $\Rightarrow$ *4)*. На этот раз мы знаем, что есть константа C. Докажем равномерную ограниченность — согласно определению, для некоторого $\varepsilon > 0$, нужно указать δ. Возьмём
$$\delta = \frac{1}{C}\varepsilon.$$
Заметим, что
$$d(x,y) < \frac{1}{C}\varepsilon \Rightarrow d(Tx,Ty) < \varepsilon.$$
В силу линейности оператора T,
$$d(Tx,Ty) = \|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le C\|x-y\| = C\,d(x,y).$$
Подставим значение расстояния,
$$d(Tx,Ty) < \frac{C}{C}\varepsilon = \varepsilon.$$
▶

Несмотря на простоту этого доказательства, отметим, что доказанный факт очень важен: для линейных операторов понятия ограниченности и непрерывности — синонимы.

Функционалы

Вспомним, что изучаемая нами наука носит название *функционального анализа*, которое происходит от слова *функционал*, то есть оператор со значениями в поле скаляров. Исторически рассмотрение функционального анализа и ограничивалось функционалами, о которых задавались всевозможные вопросы.

Остановимся, например, на преднорме оператора — поскольку поле скаляров нормировано, мы можем говорить уже не о преднорме, а о *норме оператора*,
$$\|f\| = \sup\left\{|f(x)| : x \in Ш_E\right\}. \tag{3.8}$$
Отметим, что выше указана норма в пространстве ограниченных функционалов $E^\star$. Помним, что $E^\star \subseteq E^\sharp$. Спросим себя, не одно ли это и то же понятие, с точностью до, скажем, некоторой преднормы.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 19. Показать, что если $\dim E = \infty$, то $E^\star \neq E^\sharp$.

Это очень просто доказать, с использованием аксиомы выбора. Бóльшая часть математиков её использует — однако есть специалисты, которые от неё отказываются. Отметим, что отказ от неё делает невозможным доказательство, например, непрерывности по Коши или по Гейне, так что отказываться от неё мы не будем.

Указание. Использовать следующее следствие аксиомы выбора:

Любая независимая система векторов в линейном пространстве может быть дополнена до алгебраического базиса (базиса Хамеля).

Что такое алгебраический базис? Детально это понятие должно быть разобрано вне лекционного курса, поэтому ограничимся общими соображениями. Алгебраический базис — это такая система векторов, необязательно счётная, в линейном пространстве, что каждый вектор этого пространства записывается единственным образом в виде их линейной комбинации.

Рассмотрим линейное пространство многочленов. Есть у него алгебраический базис? Очевидно, есть — это одночлены. А вот если взять l_2, то орты, которые образуют ортонормированный базис (базис Шаудера), не будут образовывать алгебраический базис. В самом деле, очевидно, что по такому базису невозможно разложить бесконечную последовательность.

Вернёмся к истокам функционального анализа и рассмотрим теперь функционалы. Поставим вопрос о норме функционала.

Итак, рассмотрим пространство последовательностей $E := c_{00}$. Оказывается, что $c_{00}^\sharp = c_\infty$, то есть, множество функционалов на нём ч тосностью до линейного изоморфизма совпадает с множеством всех последовательностей.

Задача 20. Доказать это.

Указание. Оказывается, что для $\xi \in c_{00}$ и $\eta \in c_\infty$,

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k.$$

Отметим, что сумма в каждом случае окажется конечной. Выходит, нужно функционал поочерёдно применять к ортам $\mathbb{P}^n$, чтобы восстановить последовательность η.

По этой схеме мы и перейдём к функциональному анализу, где нужно применять уже не любые, а только ограниченные функционалы.

Задача 21. С точностью до изометрического изоморфизма оказывается, что

1) $c_0^\star = l_1$,
2) $l_1^\star = l_\infty$,
3) $l_2^\star = l_2$.

Получить это.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Продолжение оператора

Продолжение оператора

Отвлечёмся ненадолго от функционалов. В алгебре есть проблема, которая легко (в алгебре) решается — *продолжение оператора*.

Пусть у нас было пространство $E_0 \subset E$, и линейный оператор $T_0 : E_0 \to F$. Можно ли продолжить оператор T_0 до оператора $T : E \to F$ так, чтобы T тоже был линейным оператором?

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "T_0"'] & E \arrow[dl, "T"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Из коммутативной диаграммы получаем, что

$$T(\mathrm{in}) = T_0.$$

Если же мы, к примеру, рассматриваем вектор $x \in E_0$ как вектор из E, то очевидно, что $Tx = T_0 x$.

Задача 22. Показать, что в линейной алгебре, (когда оператор может не сохранять норму), продолжение всегда существует.

Указание аналогично указанию к задаче 19.

Перейдём теперь от алгебры к функциональному анализу. Для этого скажем, что пространство E нормировано, притом нормировано и его подпространство E_0, а оператор T_0 ограничен. Найти необходимо хотя бы ограниченный оператор T.

Задача о нахождении такого оператора была поставлена на заре функционального анализа, и в результате оказалось, что отнюдь не всегда это возможно. Можно привести много контрпримеров, но мы ограничимся указанием на один из них.

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "\mathbb{1}"'] & c_b \arrow[dl, "\times"] \\ c_0 & \end{tikzcd}$$

Филлипсом было показано, с помощью модификации диагонального метода Кантора, что не существует ограниченного продолжения тождественного оператора $\mathbb{1}$.

Формулировка теоремы Хана—Банаха

Результат Филлипса оказался достаточно разочаровывающим для математического сообщества. Иллюстрируемое этим примером свойство является одним из так называемых *патологических свойств* банаховых пространств. Тем не менее, верна следующая теорема.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 6 (Хан—Банах). *Пусть E — преднормированное пространство, а E_0 — его подпространство с существующей в E преднормой. В E_0 задан ограниченный функционал $f_0 \colon E_0 \to \mathbb{R}$. Тогда существует функционал f уже на всём пространстве, $f : E \to \mathbb{R}$, такой что $\|f\| = \|f_0\|$.*

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "f_0"'] & E \arrow[dl, "\exists f"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4

Продолжение оператора

Доказательство теоремы Хана—Банаха

Доказывать эту теорему мы будем, исходя из предположения, что E сепарабельно. В общем случае, опять же, эта теорема доказывается с помощью аксиомы выбора — а точнее, с помощью следующей из неё леммы Цорна.

Итак, приступим к доказательству.

Лемма 1. *Теорема Хана—Банаха верна в случае, когда*

$$\exists x \in E : \; E = \operatorname{span}\left\{E_0, x\right\}. \tag{4.1}$$

Говорят, что коразмерность E_0 *в* E *— что есть то же самое, что и алгебраическая размерность факторпространства — равна* 1*,*

$$\operatorname{codim}_E E_0 = \dim(E/E_0) = 1. \tag{4.2}$$

◀ Не теряя общности мы можем считать, что норма функционала $\left\|f_0\right\| = 1$. Нужно продолжить его так, чтобы $\|f\| = 1$.

Мы хотим сделать, чтобы E выражалось как

$$E = \{z + \lambda x : \; z \in E_0, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

На z функционал уже задан, значит, нам достаточно задать нечто на x. В таком случае, любое продолжение задаётся некоторой константой $c \in \mathbb{R} : \; f(x) = c$. Далее же, в силу линейности функционала, получим

$$f(z + \lambda x) = f_0(z) + \lambda c.$$

Осталось найти константу и доказать выполнение неравенств. Для поиска константы возьмём два произвольных вектора $\forall z_1, z_2 \in E_0$. Вычтем $f_0(z_2) - f_0(z_1)$. Поскольку мы работаем с действительными числами,

$$f_0(z_2) - f_0(z_1) \leq |f_0(z_2 - z_1)| \leq \left\|z_2 - z_1\right\| = \left\|(z_2 + x) - (z_1 + x)\right\|.$$

Применим теперь неравенство треугольника.

$$f_0(z_2) - f_0(z_1) \leq \left\|z_2 + x\right\| + \left\|z_1 + x\right\|.$$

Путём перестановки членов неравенства приведём его к виду

$$-f_0(z_1) - \left\|z_1 + x\right\| \leq -f_0(z_2) + \left\|z_2 + x\right\|.$$

z_1 и z_2 независимо пробегают всё пространство E_0. Тогда возьмём следующим образом супремум левой части и инфимум правой,

$$C_1 := \sup_{z_1 \in E_0} \left(-f_0(z_1) - \left\|z_1 + x\right\|\right),$$

$$C_2 := \inf_{z_2 \in E_0} \left(-f_0(z_2) + \left\|z_2 + x\right\|\right),$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

и неравенство сохранится, приходя к виду

$$C_1 \leq C_2.$$

Тогда получается, что $\forall z \in E_0$ верно следующее неравенство,

$$-f_0(z) - \|z + x\| \leq c \leq -f_0(z) + \|z + x\|,$$

для некоторого $c \in [C_1, C_2]$. Перепишем его как

$$-\|z + x\| \leq f_0(z) + c \leq \|z + x\|.$$

Действительные числа позволяют нам записать, что

$$|f_0(z) + c| \leq \|z + x\|.$$

Начинаем задавать функционал.

$$\forall y \in E, y = z + \lambda x,$$

где $z \in E_0$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда положим

$$f(y) = f_0(z) + \lambda c.$$

Мы получили отображение $f : E \to \mathbb{R}$. Ясно, что это линейный функционал, и что это продолжение f_0: если $y \in E_0$ ($\lambda = 0$), то $z = y$ и мы получаем исходный оператор.

Но почему норма этого функционала та же, то есть, $\|f\| = 1$? Ясно, что раз мы продолжили функционал, то единичный шар, по которому берётся супремум, стал больше, то есть норму меньше мы никак не получим. В то же время, $\forall y \in E$, $|f(y)| \leq \|y\|$. Как обычно, берём $y = z + \lambda x$. Если $\lambda = 0$, то верность этого неравенства очевидна. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда

$$|f(y)| = \left|f\left(\lambda\left(\frac{1}{\lambda}z + x\right)\right)\right| = |\lambda|\left|f_0\left(\frac{1}{\lambda}z\right) + c\right| \leq$$
$$\leq |\lambda|\left\|\frac{1}{\lambda}z + x\right\| = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda z + \lambda x\right\| = \|y\|,$$

то есть, $|f(y)| \leq \|y\|$. Значит, $\|f\| = 1$.

Итак, мы можем каждый раз продолжать наш функционал на один вектор с сохранением нормы. ▶

Перейдём теперь к доказательству теоремы.

◀ Вспомним, что наше пространство сепарабельно, стало быть, есть счётное всюду плотное множество $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in E$. Вводим множества $E_n, n = 1, 2, \ldots$, помня, что E_0 — наше подпространство, а

$$E_{n+1} = \operatorname{span}\left\{E_n, x_n\right\}.$$

Тогда мы получим цепочку неубывающих подпространств, $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$.

Положим теперь

$$E_\infty \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Помним, во-первых, что объединение цепочки подпространств тоже является подпространством, а во-вторых, раз все E_n плотны в E, то плотно в E и E_∞.

Дальше применим доказанную лемму: существует продолжение f_0 до $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ с той же нормой. Продолжаем теперь f_1 до $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}$. Получаем цепочку функционалов $f_n : E_n \to \mathbb{R}$. Теперь вводим новый функционал $f_\infty : E_\infty \to \mathbb{R}$: для $x \in E_n$,

$$f_\infty(x) := f_n(x).$$

Возникает вопрос о корректности такого введения. Заметим, что наш функционал не зависит от n: если $x \in E_m$, и для определённости $m > n$, то f_m является продолжением f_{m-1}, а значит, по цепочке функционалов, и продолжением f_n. Тогда $f_m(x) = f_n(x)$.

Очевидно, f_∞ — линейный функционал, и притом

$$|f_\infty(x)| \le \left\|f_n\right\| \|x\| = \left\|f_{n-1}\right\| \|x\| = \dots = \left\|f_0\right\| \|x\| .$$

Таким образом, мы оценили норму нашего функционала, и она оказалась той же самой: f_∞ ограничен и его норма $\left\|f_\infty\right\|$ не превосходит нормы $\left\|f_0\right\|$.

Обратим внимание на то, что мы продолжили f_0 не на всё E, но на его плотное подпространство. Позже мы рассмотрим принцип продолжения по непрерывности, а сейчас мы столкнёмся с его частным случаем. Изобразим для наглядности коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} E_\infty \arrow[r, hook, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "f_\infty"'] & E \arrow[dl, "f?"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Возьмём произвольный x$\in E$, причём из-за плотности E он будет пределом,

$$x = \lim_{x_n \in E_\infty} x_n.$$

Рассмотрим последовательность чисел $f_\infty(x_n)$, которая окажется фундаментальной: в силу сходимости x_n, $\exists N$, такой что при $m, n > N$,

$$\left\|x_m - x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{\left\|f_\infty\right\|}.$$

(на норму мы делим потому, что в случае $\left\|f_\infty\right\| = 0$ всё очевидно) Тогда,

$$|f_\infty(x_m) - f_\infty(x_n) \le \|f\| \left\|x_m - x_n\right\| < \varepsilon.$$

Фундаментальность последовательности доказана. По критерию Коши наша числовая последовательность сходится, то есть,

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_\infty(x_n) =: f(x).$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Спрашивается, по какому праву мы так обозначили этот предел? Убедимся, что $f(x)$ не зависит от выбора x_n. Пусть нашлась ещё одна последовательность, $x'_n \to x$, тогда оценим разность,

$$|f_\infty(x_n) - f_\infty(x'_n)| \leq \|f_\infty\| \, \|x_n - x'_n\| \to 0.$$

Отсюда ясна корректность.

Итак, мы построили функционал

$$f : E \to \mathbb{R},$$

который, очевидно, линеен. Нужно доказать, что он ограничен и что его норма не увеличилась.

Докажем, что f является продолжением функционала f_0. Рассмотрим $x \in E_0$. Возьмём сходящуюся к нему последовательность $x_n = x, x, \ldots \to x$. Тогда получим, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \|f_\infty(x_n)\| \leq \|f_\infty\| \, \|x_n\| = \|f_0\| \, \|x_n\|,$$

откуда получаем, что

$$|f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_0(x_n)\| = \|f_0\| \, \|x\|,$$

то есть, $\|f\| \leq \|f_0\|$. ▶

Для понимания этого результата полезно рассмотреть две задачи.

Задача 23. Показать, что продолжение f, возникшее ещё в ходе рассмотрения леммы, единственно тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2$.

Задача 24. Пусть $E = \mathbb{R}^2$, E_0 — ось абсцисс или главная диагональ, норма $\|\cdot\|_p$ в E, при $p = 1, 2, \infty$, задаётся так же, как и в l_p^2, и задан функционал $f_0 : \|f_0\| = 1$. Указать, сколько будет продолжений этого функционала с сохранением нормы.

Оказывается, что ответ зависит от p.

Комплексная форма теоремы Хана—Банаха

Итак, мы доказали теорему Хана—Банаха для действительного поля скаляров $\mathbb{R}$, однако для приложений нужно также уметь её доказывать для $\mathbb{C}$.

Теорема 7. *Пусть E — преднормированное пространство, а E_0 — его подпространство с той же преднормой. В E_0 задан ограниченный функционал $f_0 : E_0 \to \mathbb{C}$. Тогда существует функционал f уже на всём пространстве, $f : E \to \mathbb{C}$, такой что $\|f\| = \|f_0\|$.*

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "f_0"'] & E \arrow[dl, "\exists f"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Мы будем работать с комплексным линейным пространством E, но оно также является и действительным линейным пространством — обозначим соответствующее действительное пространство как $E_{\mathbb{R}}$.

Аналогично действительному случаю, начнём рассмотрение с леммы.

Лемма 2. *Если E — комплексное линейное пространство, а $g: E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, то отображение $f: E \to \mathbb{C}$,*

$$f(x) = g(x) - ig(ix),$$

является комплексным линейный функционалом, причём $g = \mathfrak{Re}\, f$ (то есть, $\forall x, g(x) = \mathfrak{Re}\, f(x)$), и если E — преднормированное пространство, а g ограничен, то и f ограничен, и $\|f\| = \|g\|$.

◀ Ясно, что f аддитивен и $\mathbb{R}$-линеен. Нужно доказать, что он $\mathbb{C}$-однороден, то есть, что

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Запишем комплексное число λ в алгебраической форме,

$$\lambda = a + ib = a + bi.$$

Тогда, с одной стороны,

$$f(\lambda x) = f\left((a+bi)x\right) = af(x) + bf(ix),$$

а с другой стороны,

$$\lambda f(x) = (a+bi)f(x) = af(x) + bif(x).$$

Докажем равенство правых частей. Достаточно, чтобы $\forall x$,

$$if(x) = f(ix).$$

Раскроем $f(ix)$,

$$f(ix) = g(ix) - ig(iix) = g(ix) + ig(x) = i\left(g(x) - g(ix)\right) = if(x).$$

Итак, мы получили то, что хотели.

Переходим к доказательству равенства норм. Ясно, что действительная часть не превосходит модуля,

$$\|g\| \le \|f\|.$$

Хотим получить обратное неравенство.

Случай, когда $f(x) = 0$, очевиден. Рассмотрим случай, когда $f(x) \neq 0$. Введём y,

$$y := \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}x.$$

Очевидно, что норма $\|y\| = \|x\|$. Вспоминаем, что мы уже доказали $\mathbb{C}$-линейность, а значит,

$$f(y) = \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}f(x) = |f(x)|.$$

Сделаем очевидный вывод,

$$|f(x)| = f(y) = g(y) \le \|g\|\,\|y\| = \|g\|\,\|x\|. \qquad ▶$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма доказана, но мы пока что ничего не сказали про продолжение комплексного функционала. Перейдём к доказательству теоремы.

◀ Вспомним, что мы имеем функционал f_0, который нужно продолжить с сохранением нормы. Возьмём его действительную часть $g_0 := \mathfrak{Re}\, f_0$. Отметим, что норма может только уменьшиться при взятии действительной части, то есть, $\|g_0\| \leq \|f_0\|$.

Получили действительный функционал, который мы умеем продолжать. Продолжим его до действительного линейного функционала $g : E \to \mathbb{R}$ на всём пространстве, причём с той же нормой $\|g\| = \|g_0\|$.

Действительный линейный функционал мы можем превратить в комплексный,

$$f(x) := g(x) - ig(ix),$$

и при этом,

$$\|f\| = \|g\| = \|g_0\| \leq \|f_0\|.$$

Осталось доказать, что f — продолжение f_0, и тогда знак $\leq$ в этом неравенстве превратится в $=$.

Итак, имеем $x \in E_0 \Rightarrow ix \in E_0$. Тогда

$$f(x) = g(x) - ig(ix) = g_0(x) - ig_0(ix),$$

где нужно вспомнить, что $g_0 = \mathfrak{Re}\, f_0$, а значит,

$$f(x) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) - i\mathfrak{Re}\, f_0(ix) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) - i\mathfrak{Re}\, \left(if_0(x)\right).$$

Вспомним, что в $\mathbb{C}$ имеет место равенство, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}\, iz = -\mathfrak{Im}\, z,$$

а значит, для $x \in E_0$,

$$f(x) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) - i\left(-\mathfrak{Im}\, f_0(x)\right) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) + i\mathfrak{Im}\, f_0(x) = f_0(x).$$

Отсюда очевидно, что f — продолжение f_0. Комплексная форма установлена. ▶

Следствия теоремы Хана—Банаха

Зададимся вопросом, всегда ли для нормированного пространства E можно сказать, что $E^\star \neq 0$? Рассмотрим пример.

Пример. Рассмотрим линейное пространство с «хорошей» метрикой, но не являющееся нормированным — пространство функций $I[0,1] = E$. Это пространство состоит из классов эквивалентных измеримых функций. Введём в нём расстояние

$$d(x,y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) + y(t)|} dt.$$

Задача 25. Показать, что $d(x,y)$ — это расстояние, и что сходимость в нём — это классическая сходимость по мере.

Показать, что на нём нет ненулевых непрерывных функционалов.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 8. *В преднормированном пространстве E, в котором есть вектор x с положительной преднормой $\|x\| > 0$, существует непрерывный функционал, равный по норме 1, и притом $f(x) = \|x\|$.*

◀ Рассмотрим в качестве E_0 линейную оболочку x,

$$E_0 = \operatorname{span}\{x\}.$$

Зададим в нём функционал f_0,

$$f_0 : \lambda x \mapsto \lambda \|x\|.$$

Линейность этого функционала очевидна, как и очевидно, что его норма равна единице. С помощью теоремы Хана—Банаха продолжим этот функционал на всё пространство.▶

Следствие 2. *Если $x_1 \neq x_2$, то $\exists f \in E^\star$, такой что*

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Это иногда выражают словами *непрерывных функционалов достаточно много*, имея в виду, что их достаточно для различения векторов.

Рассмотрим ещё один важный пример.

Задача 26. Показать, что если в преднормированном пространстве E взять замкнутое подпространство $E_1 \subset E$, и вектор $x \in E \setminus E_1$, то существует ограниченный функционал, равный нулю всюду в E_1, и единице на векторе x.

Указание. Нужно заметить, что $\exists C > 0 : \forall z \in E_1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq C \|z + \lambda x\|$.

И ещё одно очень важное следствие из теоремы Хана—Банаха тоже рассмотрим в качестве задачи,

Задача 27. Помимо $E^\star$, мы можем написать и $E^{\star\star} = (E^\star)^\star$. Существует изометрический оператор $i : E \to E^{\star\star}$, $i : x \mapsto \alpha_x : E^\star \to \mathbb{C}$. Действовать α_x будет таким образом, что $\alpha_x(f) = f(x)$. Показать, что $\|\alpha_x\| = \|x\|$.

Для «хороших» пространств бывает, что i не только изометричен, но и сюръективен — такие пространства называются *рефлексивными*.

Вспомним, что на заре функционального анализа основной задачей было описание ограниченных функционалов в конкретных пространствах, например, в пространствах последовательностей. Есть не менее важное пространство, про которое такой вопрос встаёт ребром — пространство непрерывных функций на отрезке $C[0, 1]$. До разработки теории меры получить ответ на этот вопрос было очень сложно — оказалось, что меры и являются функционалами на таких пространствах.

Следующую лекцию мы и начнём с соответствующего результата.

Лекция 5

Банаховы пространства

Функционалы в пространстве непрерывных функций

Один из главных фактов в функциональном анализе — это возможность продолжить функционал с сохранением нормы, как и следует из теоремы Хана—Банаха. Рассмотрим ограниченные функционалы в пространстве ограниченных функций, $C^\star[0,1]$. Решение этой задачи получил Рисс, и мы его здесь рассмотрим, но в несколько более современной форме, причём без доказательства.

В основе этого решения лежит понятие меры на отрезке. На полукольце промежутков вводится счётно-аддитивная мера, которая затем продолжается по Лебегу. Так появляются понятия измеримого по этой мере множества и понятие интеграла по этой мере.

Уточним, однако, что в теореме Рисса используется не просто неотрицательная, но комплексная мера μ,

$$\mu : \mathscr{B}or \to \mathbb{C},$$

где $\mathscr{B}or$ — борелевские множества на $[a,b]$, то есть, минимальная σ-алгебра над $[0,1]$.

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 : \mathscr{B}or \to \mathbb{R}_+.$$

Определение. *Комплексной мерой* называют комплекснозначную функцию, вида,

$$\mu(X) := \nu_0(X) + i\nu_1(X) - \nu_2(X) - i\nu_3(X). \tag{5.1}$$

Множество комплексных мер традиционно обозначают $\mathscr{M}[a,b]$, от слова *measure*, и каждой мере сопоставляется некоторое неотрицательное число, называемое *вариацией* $\|\mu\|$,

$$\|\mu\| = \mathrm{Var}_a^b(\mu) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| : [a,b] = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right\}. \tag{5.2}$$

Ясно, что это определение корректно, так как получившееся число не превзойдёт сумму мер положительных норм; ясно также, что мера не зависит от представления μ через ν_k.

Задача 28. Показать это.

Более важна другая задача,

Задача 29. Проверить, что $\|\cdot\|$ — норма на $\mathscr{M}[a,b]$.

Уже было сказано, что когда есть мера, можно говорить и об интеграле. Рассмотрим интеграл по комплексной мере.

Пусть задали непрерывную функцию $x \in C[a,b]$, тогда

$$\int_a^b x(t)\,d\mu(t) := \sum_{k=0}^{3} \int_a^b x(t)\,d\nu_k(t). \tag{5.3}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 30. Показать, что интеграл не зависит от представления μ через ν_k.

Теперь наконец перейдём к теореме,

Теорема 9 (Рисс). *Существует изометрический изоморфизм* $I : \mathscr{M}[a,b] \to C[a,b]$, *такой что*

$$\mu \mapsto f_\mu : x \mapsto \int_a^b x(t)\, d\mu(t). \tag{5.4}$$

Иными словами,

$$C^\star[a,b] = \mathscr{M}[a,b]. \tag{5.5}$$

Задача 31. Какие вообще функционалы можно предложить на отрезке? Например,

$$f : x \mapsto x(c), a \le c \le b.$$

Найти меру, соответствующую этому функционалу.

Понятие банахова и гильбертова пространства

Мы рассказали о нормированных и почти гильбертовых пространствах почти всё, что можно было рассказать без понятия полноты. Соответственно, перейдём ко введению понятия полноты.

Полное метрическое пространство, напомним, определяется как такое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность имеет предел. Дословно это определение переносится и на предметрические пространства. Вспомним, чем же хороши полные метрические пространства — принципом *вложенных замкнутых подмножеств*.

Вспомним: в полном метрическом пространстве M расположена система вложенных замкнутых подмножеств,

$$M \ni M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots .$$

Если диаметр этих пространств

$$\operatorname{diam} M_n \to 0, (n \to \infty), \tag{5.6}$$

то у них существует единственная общая точка.

Можно сформулировать это элегантнее, получив теорему Бэра. Перед тем, как её написать, нужно ввести несколько определений. Итак, рассматривая подмножество N некоторого метрического пространства $M \supset N$.

Определение. *Разреженными*, или *нигде не плотными*, множествами называют такие множества, что для открытых множеств U, V

$$\varnothing \ne U \subset M \Rightarrow \exists V \subset U, V \ne \varnothing, V \cap N = \varnothing. \tag{5.7}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. *Тощими*, или *множествами первой категории*, называют такие множества N, которые представимы в виде не более чем счётного объединения разреженных множеств N_k,

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k. \tag{5.8}$$

Определение. *Тучными*, или *множествами второй категории*, называют множества, не являющиеся тощими.

Несложно сообразить, что, например, отрезок никак не может быть тощим множеством.

Теорема 10 (Бэр). *Полное метрическое пространство тучно.*

Доказательство этой теоремы мы рассматривать не будем. Эта теорема будет для нас рабочей — в принципе, можно было бы получить то же самое с помощью принципа вложенных замкнутых подмножеств, но это менее удобно.

Введём ещё два очень часто употребимых понятия,

Определение. Полные нормированные пространства называют *банаховыми*.

Определение. Полные почти гильбертовы пространства называют *гильбертовыми*.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пространство многочленов $P[a, b]$ с равномерной нормой не является банаховым, потому что есть фундаментальные последовательности, сходящиеся, например, к $\sin x$, который многочленом не является.

Пример 2. Пространство $\tilde{C}[a, b]$ — пространство непрерывных функций на отрезке с интегральной нормой,

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt,$$

не является банаховым.

Задача 32. Показать это.

Теперь рассмотрим задачу на теорему Бэра, чтобы показать, как просто и элегантно она работает.

Задача 33. Показать, что если нормированное пространство имеет счётный алгебраический базис, то оно не банахово.

Ясно, что отсюда следует утверждение, что пространство многочленов не банахово, но его несложно получить и так.

Простейшие свойства банаховых пространств

Чем же так хороши банаховы пространства? Рассмотрим несколько утверждений, начав с самых простых фактов.

Предложение 11. *Если E — банахово пространство, а F — нормированное пространство, и существует топологический изоморфизм $I: E \to F$, то понятие F также банахово.*

◀ Почему это так? Нужно взять фундаментальную последовательность $y_n \in F$. Мы же возьмём $x_n = I^{-1} y_n$, раз у топологического изоморфизма есть обратный оператор.

Обратим внимание, что последовательность x_n фундаментальна в E, так как

$$\|x_m - x_n\| \leq \|I^{-1}\| \, \|y_m - y_n\| .$$

Пространство E полно, значит,

$$\exists x \in E: \ \lim_{n\to\infty} x_n,$$

а тогда мы можем взять $y := Ix$, для которого

$$\|y - y_n\| \leq \|I\| \, \|x - x_n\| .$$

Отсюда ясно, что

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

▶

Предложение 12. *Если E — нормированное пространство, а $E_0 \subset E$ банахово, то E_0 замкнуто в E.*

◀ Теперь возьмём последовательность $x_n \in E_0$, сходящуюся к $x \in E$. Из её сходимости следует, что она фундаментальна, а E_0 банахово, значит, $x_n \to x' \in E_0$. В нормированном пространстве у одной и той же последовательности не может быть два разных предела, а значит, $x' = x$, то есть, $x \in E_0$. ▶

Можно сделать и утверждение, позволяющее нам с гарантией сказать, когда некоторое пространство банахово.

Предложение 13. *Если E — преднормированное пространство, а F — банахово, то $\mathscr{B}(E, F)$ тоже банахово, в частности, $E^\star$ всегда банахово.*

◀ Возьмём фундаментальную последовательность $T_n \in \mathscr{B}(E, F)$. $\forall x \in E$, $T_n x$ фундаментальна в F, поскольку

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \, \|x\| .$$

Значит,

$$F \ni \lim_{n\to\infty} T_n(x) = Tx.$$

Рассмотрим отображение

$$T: E \to F: x \mapsto Tx.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ясно, что полученное отображение аддитивно,

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}(T_n x + T_n y) = Tx + Ty.$$

Однородность также несложно доказать, а значит, получился линейный оператор,

$$T \in \mathscr{L}(E, F).$$

Заметим, что любая фундаментальная последовательность в нормированном $\mathscr{B}(E, F)$ ограничена, то есть, существует $C > 0$, такая что $\forall n$,

$$\left\|T_n\right\| \le C \Rightarrow \forall x \left\|T_n x\right\| \le C \left\|x\right\|.$$

Теперь рассмотрим, что же происходит при $n \to \infty$? Очевидно, $\left\|T_n x\right\| \to \|Tx\|$. Выходит, T — ограниченный оператор,

$$T \in \mathscr{B}(E, F).$$

Осталось доказать, что T и есть предел последовательности T_n в смысле нашей операторной нормы. Возьмём $\varepsilon > 0$, и, помня, что T_n фундаментальна, получим, что

$$\exists N : \ m, n > N, \left\|T_m - T_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Предположим теперь, что $x \in Ш_E$, а значит,

$$\left\|T_m x - T_n x\right\| < \left\|T_m - T_n\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремим $m \to \infty$. Тогда

$$\left\|Tx - T_n x\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв теперь супремум по всем $x \in Ш_E$, получим,

$$\left\|T - T_n\right\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

▶

Теперь рассмотрим задачу, аналогичную уже поставленной для нормированного пространства операторов.

Задача 34. Показать, что если $\|\cdot\|_E \not\equiv 0$, а $\mathscr{B}(E, F)$ банахово, то и F банахово.

О достоинствах банаховых пространств можно сказать ещё немало — например, в них можно суммировать ряды. Рассмотрим последовательность x_n, образующую формальный ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

который сходится, если фундаментальна соответствующая последовательность частичных сумм. В просто нормированном пространстве такого сказать нельзя.

Рассмотрим соответствующий признак сходимости.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 11 (признак сходимости Вейерштрасса). *В банаховом пространстве E последовательность $x_n \in E$ образует сходящийся ряд, если сходится ряд из норм,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty. \tag{5.9}$$

Доказательство его совершенно аналогично признаку Вейерштрасса для числовых рядов, поэтому приводить его здесь мы не будем.

Продолжение по непрерывности

Определённые теоремы, которые очень часто применяются, принято называть *принципами*. В нашем курсе таких будет несколько, и в частности, один такой принцип мы сейчас рассмотрим.

Мы помним, что не все операторы продолжаются даже до ограниченных, что уж говорить о сохранении нормы. Тем не менее, есть специальная ситуация, когда продолжать оператор можно даже с сохранением нормы.

Теорема 12 (принцип продолжения по непрерывности). *Пусть $E \supset E_0$ — преднормированное пространство, E_0 — плотное подмножество в E, пространство F — банахово и задан ограниченный оператор T_0,*

$$T_0 : E_0 \to F,$$

тогда существует единственное продолжение этого оператора,

$$T : E_0 \to F,$$

сохраняющее норму $\|T\| = \|T_0\|$.

Изобразим содержание этой теоремы с помощью коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "T_0"'] & E \arrow[dl, "\exists T"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Откуда мы найдём T? Всё очень похоже на доказательство теоремы Хана—Банаха: нам нужно всего лишь предъявить такое рассуждение, которое не требовало бы ничего кроме полноты F — там мы аналогичным образом использовали полноту $\mathbb{R}$.

◀ Итак, возьмём $x \in E$, и отметим, что из-за плотности существует сходящаяся к нему фундаментальная последовательность $x_n \to x$. Тогда после применения к этой последовательности оператора T_0 получится некоторый предел,

$$\exists T x := \lim_{n\to\infty} T_0 x_n.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Абсолютно аналогично теореме Хана—Банаха это отображение не будет зависеть от выбора последовательности x_n,

$$x_n - x_n' \to 0 \Rightarrow T_0 x_n - T_0 x_n' \to 0,$$

то есть Tx определено корректно, а дальше мы T определяем как

$$T:\ x \mapsto Tx.$$

Получили, аналогично, не просто отображение, а линейный оператор.

Почему этот оператор продолжает T_0? Возьмём $x \in E_0$, который мы можем определить из любой сходящейся к нему последовательности, лежащей в E_0, среди которых для простоты мы выбираем последовательность $x, x, \ldots \to x$. Очевидно, что

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n = T_0 x,$$

что мы и хотели получить.

Проверим теперь сохранение нормы и ограниченность оператора. Действительно,

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \left\|T_0 x_n\right\| \le \left\|T_0\right\| \left\|x_n\right\|.$$

Поскольку $x_n \to x$, $\left\|x_n\right\| \to \|x\|$, а тогда

$$\|Tx\| \le \left\|T_0\right\| \|x\|,$$

то есть, $\|T\| \le \left\|T_0\right\|$. Обратное неравенство очевидно из-за продолжения оператора.

Осталось доказать ещё единственность. Пусть T_1 ещё одно продолжение, хотя бы ограниченное, но тогда $T_1(x_n) = T_0(x_n)$. При стремлении $n \to \infty$ получаем $T_1(x) = Tx$, а значит, продолжение единственно. ▶

Предложение 14. *Если T_0 — изометрия, то и T — изометрия.*

◀ Действительно, если $Tx = \lim T_0 x_n$, то

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \left\|T_0 x_n\right\| == \lim_{n\to\infty} \left\|T_0 x\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|x_n\right\| = \|x\|.$$ ▶

Рассмотрим важную специальную ситуацию.

Предложение 15. *Если и E, и F — банаховы пространства, в каждом из которых есть плотные подпространства $E_0 \subset E$, $F_0 \subset F$, и задан изометрический изоморфизм I_0^0,*

$$I_0^0:\ E_0 \to F_0,$$

то существует единственный изометрический изоморфизм I,

$$I:\ E \to F,$$

продолжающий I_0^0.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отметим, что это очень мощный метод получения изометрических изоморфизмов больших пространств. Изобразим его тоже с помощью коммутативной диаграммы,

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "I_0^0"] \arrow[d, hook, "\mathrm{in}_E"'] & F_0 \arrow[d, hook, "\mathrm{in}_F"] \\ E \arrow[r, "\exists! I"'] & F \end{tikzcd}$$

Коммутативность диаграммы в этом случае означает, что $\mathrm{in}_F\, I_0^0 = I\, \mathrm{in}_E$.

◀ Для доказательства будем использовать принцип продолжения по непрерывности. Рассмотрим диаграмму для общего случая,

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{in}_E"] \arrow[d, "T_0 = \mathrm{in}_F\, I_0^0"'] & E \arrow[dl, "T := I"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Заменив в этой диаграмме T_0 на $\mathrm{in}_F\, I_0^0$, получаем оператор $T = I$.

Оператор мы построили — нужно теперь доказать, что это то, чего мы хотели. Обратим внимание на $\mathrm{in}_F\, I_0^0$. очевидно, он изометрический. Для доказательства, что это изоморфизм, достаточно показать, что он сюръективен. Положим $F' = \operatorname{Im} I$. Нужно доказать, что $F' = F$.

Рассмотрим I как

$$I|^{F'} : E \to F' : x \mapsto Ix \in F'.$$

Он будет изометрическим изоморфизмом, потому что он изометрия, как и I, и он заведомо сюръективен. Значит, F' — банахово пространство. В таком случае, поскольку $F' \subset F$, F' замкнуто в F, а поскольку оно ещё и плотно, $F' = F$.

Единственность следует из построения. ▶

Ещё одно важное свойство, которое мы, к сожалению, не сможем рассмотреть в рамках курса, полезно рассмотреть в качестве задачи,

Задача 35. Построить в явном виде обратный к I оператор.

Гильбертовы пространства

Теорема Рисса—Фишера

Когда речь идёт о науке с отображениями, естественным образом возникает вопрос о классификации объектов нашей науки. В функциональном анализе, в частности, мы рассматривали целых два отождествления. Для этого нужно придумать некоторые простые, которым так или иначе можно было бы уподобить все наши объекты.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если мы рассматриваем банаховы пространства, то оказывается, что даже с нашим терпимым отождествлением, с топологическим изоморфизмом, количество различных их видов чрезвычайно велико. По-другому обстоит дело в гильбертовых пространствах, рассмотрением которых мы сейчас и займёмся.

Теорема 13 (Рисс—Фишер). *Любые два бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространства унитарно (изометрически) изоморфны, а именно: если H и K — такие пространства, в H взят ортонормированный базис e_n, а в K — ортонормированный же базис e'_n, то существует единственный унитарный оператор U,*

$$U : H \to K : Ue_n = e'_n. \tag{5.10}$$

Отметим, что этот результат означает, что с точки зрения функционального анализа все гильбертовы пространства одинаковы с точностью до изоморфизма.

◀ Берём линейную оболочку $\operatorname{span}\left\{e_n\right\} = H_0$. Ясно, что H_0 — плотное подпространство в H. Аналогично возьмём $K_0 = \operatorname{span}\left\{e'_n\right\}$, которая аналогично будет плотным подпространством в K. Заметим, что существует единственный линейный оператор $U_0^0 : H_0 \to K_0$, который переводит e_n в e'_n. Ясно, что под действием этого оператора,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e'_k.$$

Отметим, что U_0^0 — изометрический изоморфизм. Ясно, что это биекция, и он сохраняет нормы, потому что он сохраняет скалярное произведение, раз для $x = \sum \lambda_k e_k$, $y = \sum \mu_k e_k$ скалярное произведение будет иметь вид

$$\left\langle U_0^0 x, U_0^0 y \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_l} \left\langle e'_k, e'_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_k} = \langle x, y \rangle .$$

Теперь пользуемся предыдущей теоремой о продолжении, согласно которой существует единственный унитарный оператор $U : H \to K$, продолжающий U_0^0. ▶

Эта теорема имеет глубокий смысл с точки зрения физики. Эта теорема означает, что описания квантовой механики Гайзенберга и Шрёдингера эквивалентны, что с её помощью и было получено фон Нойманном и Стоуном. Базисом в l_2 являются орты, а в $L_2(\mathbb{R})$ — функции Эрмита.

Спросим себя, насколько существенно условие сепарабельности? Сформулируем без доказательства результат на этот счёт.

Теорема 14. *1) В любом гильбертовом пространстве существует максимальная ортонормированная система.*

2) Мощность такой системы, называемая гильбертовой размерностью *не зависит от её выбора.*

3) Два гильбертовых пространства унитарно изоморфны тогда и только тогда, когда у них одна и та же гильбертова размерность.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6

Гильбертовы пространства

Эквивалентные и подобные операторы

На прошлой лекции мы вели разговоры об отождествлении различных банаховых и гильбертовых пространств. Заметим, что в математике не менее, чем пространства, важны и сами отображения — возникает вопрос, а их когда можно считать одинаковыми? Вспомним, например, всё тот же пример с началами квантовой механики — были как раз разные операторы, которые по существу оказались одним и тем же. Рассмотрим, что же это значит.

Определение. *Унитарно эквивалентными* называют такие операторы S и T, действующие в гильбертовых пространствах $S: H \to H$ и $T: K \to K$, что существует унитарный оператор $U: H \to K$, делающий следующую диаграмму коммутативной,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & H \arrow[d, "U"] \\ K \arrow[r, "T"'] & K \end{tikzcd}$$

Напомним, что коммутативность диаграммы означает равенство композиций отображений, $US = TU$, или даже, поскольку U по определению биективен, $T = USU^{-1}$. Отметим также, что если U только топологический изоморфизм, то такие операторы S и T называются *подобными*.

Задача 36. Показать, что операторы в конечномерных пространствах подобны тогда и только тогда, когда у них одинаковая жорданова форма.

Сделаем небольшой исторический экскурс: найти жорданову форму конечномерного оператора было большим достижением для математики своего времени, а тут вдруг появился функциональный анализ с бесконечномерными операторами. Может быть, для них тоже можно найти что-нибудь вроде жордановой формы? Не удалось, и более того, трудность возникала уже в самом начале алгебраического рассуждения: вспомним, что введение жордановой формы основывалось на достаточном количестве инвариантных подпространств рассматриваемого оператора. Это понятие допускает перенос на бесконечномерный случай:

Определение. *Инвариантными подпространствами* оператора $T: E \to E$ называются такие подпространства $E_0 \subset E$, что

$$x \in T_0 \Rightarrow Ex \in T_0. \tag{6.1}$$

Проблемой явилось то, что для продвижения дальше по такому пути введения необходимо, чтобы оператор обладал нетривиальным инвариантным замкнутым подпространством. Так, очевидно, что O и E — инвариантные подпространства — есть ли другие?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В алгебре найти такое подпространство достаточно элементарно, но функциональный анализ спрашивает нас, есть ли среди них замкнутые. Эта проблема, получившая название *проблемы инвариантных подпространств*, стояла перед функциональным анализом в течение не одного десятилетия.

Оказалось, что ответ отрицателен. Рассмотрим соответствующую теорему без доказательства.

Теорема 15 (Энфло—Рид). *Существуют E и T без нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, причём (Рид) можно взять $E = l_1$.*

До сих пор стоит открытым следующий вопрос.

Проблема. Верно ли, что для $E = l_2$ (гильбертова пространства) нет нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств?

Ближайший вектор в гильбертовом пространстве

Рассмотрим сейчас примеры гильбертовых пространств, чтобы понять, насколько же они лучше почти гильбертовых пространств.

Вспомним, что согласно предложению 6 в почти гильбертовом пространстве, в котором есть конечномерное подпространство и перпендикулярный ему вектор x, существует ближайший к вектору x вектор этого подпространства. Для бесконечномерного случая же это неверно. Зададимся вопросом, что же будет в гильбертовых пространствах? Рассмотрим его в виде задачи.

Задача 37. Показать, что для почти гильбертова пространства $H \subset l_2$,

$$\begin{aligned} H &:= \operatorname{span}\left\{\mathbb{P}^2, \dots, \mathbb{P}^n, \dots, \xi = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)\right\}, \\ H \supset H_0 &:= \operatorname{span}\left\{\mathbb{P}^2, \dots, \mathbb{P}^n, \dots\right\}, \end{aligned}$$

в H_0 нет ближайшего вектора к ξ.

С таким результатом видно, что далеко в бесконечномерном почти гильбертовом пространстве не продвинуться. А что же с гильбертовыми?

Предложение 16. *Если в гильбертовом пространстве H существует замкнутое подпространство $H_0 \subset H$, то для вектора $x \in H$ существует единственный ближайший вектор в H_0.*

◀ Введём обозначение,

$$d := d(x, H_0) = \inf\{d(x, z) : z \in H_0\}.$$

Согласно определению инфимума мы знаем, что существует последовательность векторов $y_n \in H_0$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Согласно равенству параллелограмма, характеризующему почти гильбертовы пространства,

$$\left\|(x-y_m)+(x-y_n)\right\|^2+\left\|(x-y_m)-(x-y_n)\right\|^2=2\left\|x-y_m\right\|^2+2\left\|x-y_n\right\|^2.$$

Это равенство можно переписать, обозначая всю правую часть за s_{mn}, как

$$4\left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2+\left\|y_m-y_n\right\|^2=s_{mn}-4\left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2.$$

Что получится, когда $m,n\to\infty$? Ясно, что $s_{mn}\to 4d^2$, а вся новая правая часть стремится к нулю, то есть,

$$0\le\left\|y_m-y_n\right\|^2\le 4d^2.$$

В курсе математического анализа рассматривалась и доказывалась лемма о двух миллиционерах, с использованием которой несложно получить, что

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|y_m-y_n\right\|^2=0,$$

а значит, фундаментальность доказана.

Теперь будем пользоваться полнотой, то есть гильбертовостью. Раз последовательность фундаментальна, у неё есть предел y. H_0 замкнуто, значит, $y\in H_0$. Можно сказать, что расстояние $d(x,y)=\lim d(x,y_n)=d$, то есть, y — ближайший к x вектор.

В формулировке предложения фигурировала также единственность ближайшего вектора. Итак, пусть есть другой ближайший вектор из H_0 к x. Рассмотрим другой параллелограмм, со сторонами $x-y$ и $x-z$. Запишем для него равенство параллелограмма,

$$\|(x-y)+(x-z)\|^2+\|z-y\|^2=2\|x-y\|^2+2\|x-z\|^2=4d^2.$$

Тогда выходит, что

$$0\le\|z-y\|^2=4d^2-4\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|^2.$$

Заметим, что вектор $(y+z)/2\in H_0$, а значит,

$$4\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|^2\le 4d^2\Rightarrow\|z-y\|^2\le 0.$$

Значит, $z=y$. ▶

Теперь вспомним, что мы рассматривали предложение 12, позволявшее нам установить, в каких случаях банаховы пространства имеют замкнутые подпространства. Что же будет в гильбертовых пространствах?

Предложение 17. *Если в почти гильбертовом пространстве H существует подпространство $H_0\subset H$ и вектор $x\in H$, то следующие условия эквивалентны,*

1) *x ортогонален H_0, то есть $\forall y\in H_0,\langle x,y\rangle=0$,*

2) *расстояние $d(x,H_0)=\|x\|$, то есть, ближайший вектор к x — это 0.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ Легко из первого вывести второе. В самом деле, берём любой $y \in H_0$ и получаем, что

$$d^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2 = d(x, 0).$$

Теперь получим обратную импликацию. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ выходит, что

$$\|x - \lambda y\| = d(x, \lambda y) \geq \|x\| = d(x, 0).$$

Возведём обе части в квадрат, помня, что квадрат нормы равен скалярному квадрату,

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \cancel{\langle x, x\rangle} - \lambda \langle y, x\rangle - \overline{\lambda} \langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle y, y\rangle \geq \cancel{\langle x, x\rangle},$$

что должно быть верно $\forall \lambda$. Положим $\lambda = t \langle x, y\rangle$, для $t \geq 0$. Получается, что

$$-t \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle - t \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle + t^2 \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle \langle y, y\rangle \geq 0.$$

Если $\langle x, y\rangle \neq 0$, то и сопряжённое к нему $\langle y, x\rangle \neq 0$, а значит, можно на них поделить равенство, получая

$$-2t + t^2 \langle y, y\rangle \geq 0.$$

Поскольку t любое, оно может быть и маленьким — поделим и на него выражение, получая

$$t \langle y, y\rangle \geq 2.$$

Приходим к противоречию, потому что 2 — не маленькое число.

Значит, $\langle x, y\rangle = 0$. ▶

Зачем нам это? Мы воспользуемся этим фактом для доказательства одной очень важной теоремы нашего курса.

Теорема об ортогональном дополнении

Теорема 16 (об ортогональном дополнении). *Если H — гильбертово пространство, $H_0 \subset H$ — замкнутое подпространство, то $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$.*

Оказывается, что в данной ситуации ортогональное дополнение также является и линейным дополнением.

Лемма 3. $x \in H$, $\forall u \in H_0$, $d(x, H_0) = d(x - u, H_0)$.

◀ В самом деле, $d(x, H_0) = \inf\{\|x - v\| : v \in H_0\}$. Очевидно, что это можно переписать в виде

$$\inf\left\{\|x - u - (v - u)\| : v \in H_0\right\}.$$

Но $\{v - u, v : \in H_0\} = H_0$, потому что $\forall w \in H_0$ есть $v - u$ для $v = w + u$. ▶

Перейдём к доказательству теоремы.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ Для x возьмём ближайший вектор в H_0, обозначив его за y. В таком случае, согласно лемме,

$$d(x-y, H_0) = d(x, H_0) = d(x, y) = \|x-y\| = d(x-y, 0).$$

Теперь воспользуемся предложением 17, согласно которому $x - y \perp H_0$. Значит,

$$x = \underbrace{y}_{\in H_0} + \underbrace{(x-y)}_{\in H_0^\perp}$$

.

Осталось доказать единственность такого разложения. Пусть $x = y + z$ и также $x = y_1 + z_1$. Тогда запишем, что

$$y - y_1 = z - z_1,$$

причём оба этих вектора принадлежат как H_0, так и $H_0^\perp$, то есть, этот вектор ортогонален сам себе, а значит, это нуль. ▶

Отметим, что для почти гильбертовых пространств теорема об ортогональном дополнении неверна. Из этой теоремы есть одно замечательное следствие.

Следствие 3. *Если H — гильбертово пространство и $e_\nu \in H$ — система векторов в нём, то следующие условия эквивалентны,*

1) *e_ν тотальна,*

2) *если $\forall \nu, x \perp e_\nu$, то $x = 0$.*

◀ Докажем *1) ⇒ 2)*. Если e_ν тотальна, то $x \in \overline{\operatorname{span}\left\{e_\nu\right\}}$. Отсюда немедленно следует, что $x \perp x$, значит, $x = 0$.

Теперь докажем обратную импликацию. Введём обозначение,

$$H_0 := \overline{\operatorname{span}\left\{e_\nu\right\}}.$$

Как мы помним, $x \in H_0^\perp$. Тогда можно сказать, что $x \perp H_0$, а значит, $x \perp e_\nu$. Значит, по условию, $x = 0$, но мы же взяли любой вектор из ортогонального дополнения — выходит, $H_0^\perp = \{0\}$. Тем не менее, теорема об ортогональном дополнении верна, а значит, e_ν тотальна. ▶

Задача 38. Показать, что это неверно для почти гильбертовых пространств.

Сопряжённые и самосопряжённые операторы

Ортогональные и сопряжённые операторы

Теорема об ортогональном дополнении позволяет нам ввести очень важный класс операторов. Можно даже сказать, что с помощью операторов этого класса строятся все операторы, действующие в гильбертовом пространстве.

Итак, рассмотрим $x \ni H \supseteq H_0$, и, как мы помним, $x = y + z$, где $y \in H_0$, а $z \in H_0^\perp$. y при этом определён однозначно. Введём оператор P_{H_0}, зависящий от подпространства H_0,

$$P_{H_0} : H \to H : x \mapsto y. \tag{6.2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 39. Показать, что P_{H_0} — линейный оператор.

Такой оператор называют *ортогональным проектором*. В нашем курсе других проекторов и не будет, поэтому мы будем называть его просто *проектор*.

Совершенно очевидно, с использованием теоремы Пифагора, что проектор является сжимающим оператором. Отметим также, что существуют векторы $u \in H_0 \neq 0$, такие что $\left\|P_{H_0}u\right\| = \|u\|$, а значит, $\left\|P_{H_0}\right\| = 1$.

Мы находили в курсе разные сопряжённые пространства к тому или иному пространству. Оказывается, что описать сопряжённые пространства можно к совершенно любому гильбертову пространству. Итак, введём новое понятие.

Определение. *Сопряжённым оператором* T называют такой оператор $T : E \to F$, который удовлетворяет следующим аксиомам,

1) аддитивность,
2) $T(\lambda x) = \overline{\lambda} T(x)$.

Рассмотрим ещё одно важное понятие,

Определение. *Комплексно-сопряжённым пространством* к линейному пространству E называют такое пространство E^c, в котором выполнены все те же аксиомы линейного пространства, кроме умножения на скаляр, имеющего следующий вид,

$$\lambda \circ x := \overline{\lambda} x. \tag{6.3}$$

Ясно, что E^c тоже линейное пространство, причём если $\|\cdot\|$ — норма в E, то это ещё и норма в E^c.

Заметим, что если $T : E \to F$ сопряжённо-линейный, то $T : E^c \to F$ обычно линейный, и наоборот $T : E \to F^c$.

Поставим себе задачу описать ограниченные функционалы на заданном гильбертовом пространстве H. Примеры таких функционалов просятся сами: например, возьмём вектор $e \in H$, $f_e : H \to \mathbb{C}$: $x \mapsto \langle x, e\rangle$. Ясно, что этот функционал линеен, и можно заметить, что норма $\left\|f_e\right\| = \|e\|$. В самом деле, если $e = 0$, то это очевидно, а если нет, то нужно рассмотреть $e/\|e\|$,

$$f_e \frac{e}{\|e\|} = \frac{\langle e, e\rangle}{\|e\|} = \|e\|.$$

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что f_e — сжимающий, а супремум достигается как раз на рассмотренном векторе.

Итак, мы построили функционал $f_e \in H_0$. Оказывается, что других функционалов на гильбертовых пространствах в жизни и не бывает.

Естественным образом появляется отображение,

$$I : H \to H^\star : e \mapsto f_e.$$

Отметим, что такое введение означает, что $(Ie)(x) = \langle x, e\rangle$. Это отображение аддитивно и сохраняет норму, однако будет ли оно линейным или однородным оператором? Оказывается, нет.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По определению

$$(I(\lambda e))\,x = \langle x, \lambda e\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, e\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, e\rangle = \overline{\lambda}\,((Ie)\,x)\,,$$

что означает, что $I(\lambda e) = \overline{\lambda} I e$. Это и есть так называемая антиоднородность, то есть, оператор I сопряжённо-линейный.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7

Сопряжённые и самосопряжённые операторы

Банахов и гильбертов сопряжённые операторы

В самом конце прошлой лекции мы выяснили, что естественнее связь сопряжённых пространства будет тогда, когда оператор их свяжет следующим образом,

$$\begin{tikzcd} T:\ E \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

Определение. *Банаховым сопряжённым оператором* к T называют,

$$T^{\star b}:\ F^\star \to E^\star. \tag{7.2}$$

Применим этот оператор к функционалу f. По определению, $T^{\star b} f$ будет прежним функционалом, только применённым к вектору Tx,

$$(T^{\star b} f)x := f(Tx). \tag{7.3}$$

Что же мы видим из такого определения? Во-первых, сразу видно, что

$$\left\|T^{\star b}\right\| \leq \|T\|, \tag{7.4}$$

Задача 40. Показать, что $\left\|T^{\star b}\right\| = \|T\|$.
Указание. Использовать теорему Хана—Банаха.

Отметим, что мы получили интересное отображение,

$$(^{\star b}):\ \mathscr{B}(E, F) \to \mathscr{B}(E^\star, F^\star),$$

действующее как $T \mapsto T^\star$.
Рассмотрим несколько почти очевидных утверждений в качестве задач.

Задача 41. Показать, что $T^{\star b}$ — сжимающий линейный оператор.

Задача 42. Показать, что $(ST^{\star b} = T^{\star b} S^{\star b}$.

Задача 43. Показать, что $\mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{E^\star}$.

Задача 44. Показать, что теорема Хана—Банаха эквивалентна следующему утверждению: *Если I — изометрия, то $I^{\star b}$ — строгая коизометрия.*

Рассмотрим теперь целую серию задач на нахождение сопряжённого оператора для трёх следующих операторов в пространстве c_0.

Задача 45. Описать, как сопряжённый оператор действует в пространстве l_1, помня о том, что между c_0 и l_1 существует биекция, для:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а) диагонального оператора,

б) сдвига вправо,

в) сдвига влево.

Из структуры курса ясно, что за банаховым сопряжённым оператором должен следовать гильбертов сопряжённый оператор. Рассмотрим его. Как мы знаем, гильбертово пространство также является и банаховым, сопряжённый оператор существует. Рассмотрим, какие дополнительные свойства обеспечивает гильбертовость пространства?

Вспоминаем теорему Рисса, согласно которой с сопряжённым гильбертовым пространством $H^\star$ отождествляется само H, но только оператор $I: H \to H^\star: y \mapsto f_y$ не линейный, а сопряжённо-линейный. То же самое, очевидно, верно и для K.

$$\begin{tikzcd} H^\star & K^\star \arrow[l, "T^{\star b}"'] \\ H \arrow[u, "I_H"] & K \arrow[l] \arrow[u, "I_K"'] \end{tikzcd}$$

Обратим внимание, что эта диаграмма коммутативна — а значит, возникает идея: получается, для гильбертова сопряжённого оператора вовсе и не нужно брать сопряжённые пространства: он действует между теми же H и K, только в обратном направлении.

Итак, имея

$$\left(I_H(y)\right)(x) = \langle x, y\rangle,$$

мы хотим получить оператор, действующий из K в H. Положим

$$T^{\star h}: K \to H = I_H^{-1} T^{\star b} I_K. \tag{7.5}$$

Не будем торопиться и отметим, что пока это только отображение. Тем не менее, посмотрев на него, мы можем заметить, что верно следующее предположение,

Предложение 18. *$T^{\star h}$ линеен и не увеличивает норму, $\left\|T^{\star h}\right\| \le \|T\|$.*

◀ Ясно, что $T^{\star h}$ аддитивен, и что сумма переходит в сумму — однако почему же он однороден? Проверим это, непосредственно применив его к некоторому вектору y,

$$\left(T^{\star h}\right)(\lambda y) = I_H^{-1} T^{\star b} I_K y = I_H^{-1} T^{\star b} \overline{\lambda} I_k y = I_H^{-1} \overline{\lambda} T^{\star b} I_k y,$$

далее отметим, что раз I_H сопряжённо-линеен, то и I_H^{-1} тоже сопряжённо-линеен, а тогда

$$\left(T^{\star h}\right)(\lambda y) = \overline{\overline{\lambda}} I_H^{-1} T^{\star b} I_K y = \lambda T^{\star h} y.$$

Докажем теперь утверждение о норме.

$$\left\|T^{\star h} y\right\| = \left\|I_H^{-1} T^{\star b} I_K y\right\|,$$

где, как мы знаем, $T^{\star b}$ — сжимающий оператор, а I_H^{-1} и I_K и вовсе сохраняют изометрию, то есть,

$$\left\|T^{\star h} y\right\| \le \left\|I_k y\right\| = \|y\|. \qquad ▶$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь необходимо ввести соответствующую терминологию.

Определение. *Гильбертовым сопряжённым оператором* к $T: H \to K$ называют

$$T^{\star h}: K \to H. \tag{7.6}$$

Отметим, что в отличие от $T^{\star b}$, $T^{\star h}$ действует не между сопряжёнными, а между самими гильбертовыми пространствами.

Основные свойства гильбертова сопряжённого оператора

В большинстве учебников можно встретить и другое определение гильбертова сопряжённого оператора, которое здесь будет дано в качестве теоремы.

Теорема 17. *Гильбертов сопряжённый оператор — это единственный оператор, для которого верно,*

$$\langle Tx, y\rangle_K = \left\langle x, T^{\star h} y\right\rangle_H. \tag{7.7}$$

Можно определить сопряжённый оператор и таким образом, однако после него потребуется ещё доказывать, что введённый по такой формуле объект действительно будет оператором, не говоря уж о линейности, и поэтому приведённое в этом курсе определение может рассматриваться как более естественное.

◀ Итак, проверяем определение, помня о теореме Рисса.

$$\langle Tx, y\rangle = \left(I_K y\right)(Tx) = T^{\star b}\left(I_K y\right) x = \left(I_H T^{\star h} y\right) x = \left\langle x, T^{\star h} y\right\rangle.$$

Осталось установить единственность. Пусть оператор S удовлетворяет такому же равенству,

$$\langle Tx, y\rangle_K = \langle x, Sy\rangle_H.$$

Почему же это тот же самый оператор? Перепишем это выражение как

$$0 = \langle Tx, y\rangle_K - \langle x, Sy\rangle_H = \left\langle x, \left(T^{\star h} - S\right) y\right\rangle.$$

Поскольку x и y могут быть любыми, возьмём $x := \left(T^{\star h} - S\right) y$, а тогда скалярный квадрат вектора $\left(T^{\star h} - S\right) y = 0$, то есть, этот вектор и сам равен нулю для любого y. Значит, $T^{\star h} = S$. ▶

Мы будем часто пользоваться результатом этой теоремы, а в особенности следующим следствием из неё,

Следствие 4. *Гильбертов сопряжённый оператор — единственный, для которого*

$$\langle y, Tx\rangle_K = \left\langle T^{\star h} y, x\right\rangle_H. \tag{7.8}$$

Доказательство этого следствия совершенно несложно.

Теперь в течение довольно существенного времени мы будем иметь дело только с гильбертовыми сопряжёнными операторами. В связи с этим договоримся обозначать их без буквы h, $T^{\star}$.

Заметим, что у нас снова получилось отображение вида

$$(^{\star}): \mathscr{B}(H, K) \to \mathscr{B}(K, H). \tag{7.9}$$

Разумеется, это не просто отображение: оно как-то реагирует на структуры, существующие в гильбертовых пространствах. Опишем это.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предложение 19. *Для* $(^\star)$ *верны следующие свойства:*

1) $(S+T)^\star = S^\star + T^\star$ *(аддитивность),*

2) $(\lambda S)^\star = \overline{\lambda} S^\star$ *(сопряжённо-однородность),*

3) $(ST)^\star = T^\star S^\star$,

4) $T^{\star\star} = T$ *(период* 2*),*

5) $\left\|T^\star\right\| = \|T\|$.

Все эти свойства мы, разумеется, доказывать не будем — ограничимся *2)*, *4)* и *5)*.

◀ Итак, начнём с антиоднородности *2*. Просто переписываем,

$$(\lambda S)^\star = I_H^{-1}(\lambda S)^{\star b} I_K = I_H^{-1}\left(\lambda S^{\star b}\right) I_K = \overline{\lambda}\left(I_H^{-1} S^{\star b} I_K\right) = \overline{\lambda} S^\star.$$

Теперь перейдём к *4)*. В самом деле,

$$\left\langle \left(T^\star\right)^\star x, y\right\rangle = \left\langle x, T^\star y\right\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Поскольку произведённые действия верны $\forall x, y$, $T = T^{\star\star}$.

Докажем *5)*.

$$\|T\| = \left\|T^{\star\star}\right\| \le \left\|T^\star\right\| \le \|T\| . \qquad ▶$$

Есть одно очень важное тождество, связывающее гильбертов сопряжённый оператор с его нормой. Оно носит название $C^\star$*-тождества*.

Теорема 18. *Для* $T^\star T : H \to H$, $T : H \to H$,

$$\left\|T^\star T\right\| = \|T\|^2 . \tag{7.10}$$

◀ Во-первых, как мы уже знаем,

$$\left\|T^\star T\right\| \le \left\|T^\star\right\| \|T\| \le \|T\|^2 .$$

Во-вторых, вспомним, что согласно определению, норма $T^\star$ —

$$\left\|T^\star T\right\| = \sup_{x \in Ш_H} \left\|T^\star T x\right\| .$$

Мы можем взять супремум и по двум векторам,

$$\left\|T^\star T\right\| = \sup_{x,y \in Ш_H} \left|\left\langle T^\star T x, y\right\rangle\right| = \sup_{x,y \in Ш_H} |\langle Tx, Ty\rangle| .$$

Обратим внимание, что если мы рассматриваем все векторы $y \in Ш_E$, то мы можем взять и конкретный $y = x$, и при этом норма не увеличится.

В таком случае мы получим скалярный квадрат,

$$\left\|T^\star T\right\| \ge \sup_{x \in Ш_H} |\langle Tx, Tx\rangle| = \sup_{x \in Ш_H} \|Tx\|^2 = \|T\|^2 .$$

Получили неравенство в обратную сторону,

$$\left\|T^\star T\right\| \ge \left\|T^2\right\| . \qquad ▶$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Зачем мы, собственно говоря, столько времени в курсе посвятили $C^\star$-тождеству? Дело в том, что если есть абстрактная алгебра, для которой выполнено это тождество, то согласно знаменитой теореме Гельфанда—Наймарка такая алгебра в скрытом виде является самосопряжённой подалгеброй операторов в гильбертовом пространстве. Детально этот факт в наш курс не входит, однако он от этого не менее важен.

Сейчас же всё-таки зададимся вопросом: а почему банахов и гильбертов сопряжённые операторы всё-таки разные? Определяются они по-разному, да, действуют в разных пространствах — но может быть, их можно отождествить? Рассмотрим задачу.

Задача 46. Показать, что взятые в гильбертовом пространстве операторы $\left(i\mathbb{1}_H\right)^{\star b}$ и $\left(i\mathbb{1}_H\right)^{\star h}$ не являются (даже!) унитарно эквивалентными.

В частности, из этого факта следует, что для l_2, с учётом того, что $l_2^\star = l_2$, такие операторы не будут равны друг другу.

Сопряжённость и геометрия

Предложение 20. *Пусть H — гильбертово пространство, $M \subset H$, а тогда*

$$M^{\perp\perp} = (\operatorname{span}\{M\})^- , \tag{7.11}$$

где $^-$ означает замыкание.

◀ Очевидно, что $M \subseteq H$: $M^{\perp\perp}$ — замкнутое подпространство в H и оно содержит M. Необходимо, значит, получить обратное неравенство.

Действительно, что такое $M^{\perp\perp}$? Оно само гильбертово пространство. Согласно теореме об ортогональном дополнении, можно написать

$$M^{\perp\perp} = (\operatorname{span}\{M\})^- \oplus H_1,$$

где

$$H_1 = \left\{x \in M^{\perp\perp} : \ x \perp (\operatorname{span}\{M\})^-\right\}.$$

Надо получить, что $H_1 = 0$. Возьмём вектор $y \in H_1$. Он лежит в $M^{\perp\perp}$. Согласно определению, $y \perp M^\perp$, но также $y \perp (\operatorname{span}\{M\})^-$, а значит, $y \perp y$, то есть $y = 0$. Поскольку y — это произвольно взятый вектор из H_1, $H_1 = \{0\}$. ▶

Теорема 19. *Пусть $T : \ H \to K$, тогда в K верно*

$$(\operatorname{Im} T)^\perp = \left(\operatorname{Ker} T^\star\right), \tag{7.12}$$

а в H верно

$$(\operatorname{Ker} T)^\perp = \left(\operatorname{Im} T^\star\right)^- . \tag{7.13}$$

◀ Итак, сперва докажем для K. Возьмём $y \perp \operatorname{Im} T$, то есть, $\forall x \in H$,

$$\langle y, Tx\rangle = 0.$$

Воспользуемся сопряжённым оператором,

$$\left\langle T^\star y, x\right\rangle = 0,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а значит, $y \in \operatorname{Ker} T^\star$.

Теперь докажем второе утверждение, для H. Вспоминая, что $T = T^{\star\star}$, получим

$$(\operatorname{Ker} T)^\perp = \left(\operatorname{Ker} T^{\star\star}\right)^\perp,$$

а согласно только что доказанному утверждению мы можем сказать ещё и что

$$(\operatorname{Ker} T)^\perp = \left(\operatorname{Im} T^\star\right)^{\perp\perp} = \left(\operatorname{Im} T^\star\right)^- . \qquad \blacktriangleright$$

Задача 47. Показать, что в $\left(\operatorname{Im} T^\star\right)^-$ нельзя отбросить знак $^-$, то есть, что образ в гильбертовом пространстве может не быть замкнутым.

Самосопряжённые операторы

Понятие (гильбертова) сопряжённого оператора позволяет нам ввести важнейший класс операторов — *самосопряжённые*.

Определение. *Самосопряжённым оператором* называют такой оператор $T : H \to H$, что $T^\star = T$.

Теорема 20. *Самосопряжённый оператор — единственный, для которого* $\forall x, y \in H$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle . \tag{7.14}$$

Рассмотрим, что получится, если в теореме 19 заменить сопряжённый оператор самосопряжённым.

Следствие 5. *Если T самосопряжён, то*

$$(\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T; (\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Im} T)^- . \tag{7.15}$$

Когда мы рассмотрели теорему об ортогональном дополнении, к нас появился очень важный класс операторов — проекторы. Рассмотрим предложение о том, как они себя ведут с точки зрения сопряжённости.

Предложение 21. $P : H \to H$ *— проектор, тогда и только тогда он самосопряжён* ($P = P^\star$) *и идемпотентен* ($P = P^2$).

◀ Пусть известно, что P — проектор на замкнутое подпространство H_0. Рассмотрим $P^2x = P(Px)$. Очевидно, $Px \in H_0$, а векторы из H_0 не меняются под действием проектора, а значит,

$$P^2x = Px.$$

Более интересна самосопряжённость. Возьмём $x, y \in H$. По определению проектора $x = Px + z$, где $Px \in H_0$, $z \in H_0^\perp$, и то же самое верно для y, $y = Py + u$, где $Py \in H_0$, $u \in H_0^\perp$. Заметим, что

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + u\rangle = \langle Px, Py\rangle + \cancel{\langle Px, u\rangle}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дальше заметим, что это равно

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px + z, Py\rangle = \langle x, Py\rangle\,,$$

то есть P в самом деле самосопряжён.

Осталось доказать теорему в другую сторону. Пусть нам известны алгебраические свойства оператора, а мы хотим доказать, что он что-то на что-то проектирует. Введём обозначение, $H_0 := \operatorname{Im} P$. Возьмём $x \in H_0$, и тогда для некоторого $y \in H$ будет верно $x = Py$. Тогда $Px = P(Py)$, а раз оператор идемпотентен, $P(Py) = Py = x$. Выходит, что для $x \in H_0$ оператор P ничего не делает.

Докажем, что это подпространство H_0 замкнуто,

$$x \in H_0^- \Leftarrow x = \lim x_n, x_n \in H_0.$$

В таком случае

$$Px = \lim_{n\to\infty} Px_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

А почему это пространство проектирования? Покажем, что $P = P_{H_0}$. По теореме об ортогональном дополнении,

$$H = H_0 \oplus H_0^\perp,$$

тогда $\forall x \in H$, $x = y + z$, где $y \in H_0$ и $z \in H_0^\perp$, и мы хотим показать, что $Px = y$. В самом деле, в силу аддитивности получим, что $Px = Py + Pz$, но раз $z \in H_0^\perp$,

$$0 = \langle Px, z\rangle = \langle x, Pz\rangle = 0,$$

а тогда $Pz \in H_0^\perp$, но поскольку $Pz \in H_0$, $Pz = 0$. ▶

Обратим внимание, что проектор — это вроде бы геометрическое понятие, однако только что мы доказали, что можно сформулировать понятие проектора и в терминах алгебры. Можно показать, что существует целый *алгебро-геометрический словарик*, который мы сейчас и рассмотрим.

алгебра	геометрия
проектор	$P = P^\star = P^2$
унитарный оператор	$U^\star = U^{-1}$
?	$J^\star = J = J^{-1}$
?	$V^\star V = \mathbb{1}$
?	$VV^\star = \mathbb{1}$
?	$W^\star W W^\star W = W^\star W$

Таблица 1: Алгебро-геометрический словарик.

Задача 48. Заполнить пропуски в словарике, обозначенные ?.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема Банаха—Штейнхауса. Теорема Банаха

Теорема Банаха—Штейнхауса

Теорема Банаха—Штейнхауса, как и уже рассмотренная теорема Хана—Банаха, является одной из основных теорем функционального анализа, носящих имя Банаха, и она также является частоприменимой, поэтому её нередко называют *принципом*.

Теорема 21 (Банах—Штейнхаус). *Пусть E — банахово пространство, а F — преднормированное, и задано семейство ограниченных операторов $T_\nu : E \to F$. Также известно, что $\forall x \in E$, $\|T_\nu x\| \leq C_x$, где C_x — некоторая константа, зависящая от x (T_ν* поточечно ограничены*). Тогда существует константа такая константа C, что $\|T_\nu\| \leq C$ (T_ν* равномерно ограничены*).*

Также эту теорему часто называют *принципом равномерной ограниченности*.

Отметим, что говоря формально, равномерная ограниченность сильнее поточечной ограниченности, так как можно взять константу C_x из

$$\|T_\nu x\| \leq C \|x\|.$$

Перейдём к доказательству этой теоремы.

◀ Будем использовать для доказательства теорему Бэра. В принципе, без неё можно было бы и обойтись, но тогда бы потребовалось делать много различных трудоёмких выкладок, чем мы сейчас заниматься не будем — это можно сделать, например, в качестве упражнения. Отметим, что такой подход можно найти в большинстве учебных пособий.

Предположим противное, пусть такой константы C нет. Тогда есть подпоследовательность T_n, для которых $\forall n$, $\|T_n\| > n$.

Теперь возьмём $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим подмножества M_k,

$$M_k = \left\{x \in E : \ \|T_n x\| \leq k, \forall n\right\}.$$

Покажем, что каждое такое подмножество разрежено, то есть в любой лежащей в нём окрестности можно найти окрестность, поменьше, такую что в ней нет точек этого множества.

Возьмём $U(x,r) = x + r\text{Ш}_E^0$ и рассмотрим $n > (k + C_x)/r$. Из того, что $\|T_n\| > n$, следует, что $\exists y' \in \text{Ш}_F$ такой, что $\|T_n y'\| > n$. Будем считать, что $y' \in \text{Ш}_F^0$ (не теряя общности). Тогда возьмём $z = x + ry'$, $z \in U(x,r)$. Ясно, что

$$\|x - z\| \leq \|ry'\| < r.$$

Значит,

$$\|T_n z\| = \|T_n(x + ry')\| \geq r\|T_n y'\| - \|T_n x\| \geq rn - C_x > r\left(\frac{1}{r}(k + C_x)\right) - C_x = k.$$

Итак, $\|T_n(x + ry')\| > k$, то есть, $T_n \notin M_k$, а в силу непрерывности оператора, строгое неравенство верно не только в точке, но и в некоторой её окрестности U_z,

$$Z' \in U_z \Rightarrow \|T_n z >\| > k$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

, в которой $z' \in U_z \Rightarrow \|T_n z'\| > k$. Помня, что пересечение двух окрестностей тоже окрестность, возьмём $U_z \cap U(x, r)$; эта окрестность будет непустой, так как она содержит хотя бы z, и она не содержит точек множества M_k.

Введём множество M,

$$M := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k,$$

про которое сразу можно сказать, что, как объединение счётного числа разреженных множеств, оно тощее. Возьмём любое $x \in E$, а из условия поточечной ограниченности мы имеем $\forall n$, $\|T_n x\| \leq C_x$, а значит, $x \in M_k$ при $k \geq C_x$, а значит, $\forall x, x \in M$. Выходит, что $M = E$, и тут мы и приходим к противоречию, потому что согласно теореме Бэра, E тучно. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8

Теорема Банаха—Штейнхауса. Теорема Банаха

Следствия теоремы Банаха—Штейнхауса

Существует множество применений теоремы Банаха—Штейнхауса в различных областях математики. Рассмотрим одно из них в виде пары задач.

Иногда функциональный анализ рассматривает билинейные операторы вида

$$\mathscr{R}: E \times F \to G.$$

Их ограниченность можно определить хотя бы двумя разными способами:

1) *раздельную ограниченность* вводят, рассматривая операторы

$$\forall x \in E, \mathscr{R}_x: F \to G, y \mapsto \mathscr{R}(x, y),$$
$$\forall y \in F, \mathscr{R}_y: E \to G, x \mapsto \mathscr{R}(x, y).$$

   Билинейный оператор $\mathscr{R}$ называют раздельно ограниченным, если $\mathscr{R}_x$ и $\mathscr{R}_y$ ограничены.

2) *совместную ограниченность* вводят, рассматривая неравенство

$$\|\mathscr{R}(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|. \tag{8.1}$$

   В таком случае, аналогично линейным ограниченным операторам, оператор называют совместно ограниченным тогда, когда существует удовлетворяющая этому неравенству константа C.

Задача 49. Показать, что совместная ограниченность билинейного оператора влечёт его раздельную ограниченность.

Задача 50. Если E или F банахово, то из раздельной ограниченности следует совместная.

Возникает вопрос, насколько существенно условие банаховости пространства E в теореме Банаха—Штейнхауса. Оказывается, очень сильно — существуют поточечно ограниченные семейства операторов, не являющиеся совместно ограниченными.

Задача 51. Рассмотреть функционалы f_n,

$$f_n: \left(c_{00}, \|\cdot\|_\infty\right) \to \mathbb{C}: \xi \mapsto n\xi_n,$$

и показать, что семейство f_n поточечно ограничено, но не совместно ограничено.

Задача 52. Придумать билинейный оператор, раздельно ограниченный, но не совместно ограниченный.

Указание. Пусть $E = F = c_{00}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема Банаха

Теорема Банаха, как и теорема Хана—Банаха, как и теорема Банаха—Штейнхауса, относится к числу основных частоиспользуемых теорем функционального анализа, которые иногда называют принципами. Теорему Банаха также называют *принципом открытости*. Рассмотрим её без доказательства.

Теорема 22 (Банах, принцип открытости). *Пусть E, F — банаховы пространства, а оператор $T: E \to F$ ограничен и сюръективен, тогда существует $\theta > 0$, такое что $T\text{Ш}_E^0 \subseteq \theta\text{Ш}_F^0$.*

Обратим внимание, что в теореме Хана—Банаха банаховость не требуется ни для одного из пространств, в теореме Банаха—Штейнхауса — только для одного из них, а в теореме Банаха — для обоих.

Зададимся вопросом, почему эту теорему называют принципом открытости? Дело в том, что с точки зрения топологии наше утверждение эквивалентно тому, что T — открытое отображение.

Задача 53 (*). Показать это.

Из теоремы Банаха мы выведем *теорему Банаха об обратном операторе*.

Теорема 23 (Банах, об обратном операторе). *Пусть E, F — банаховы пространства, а оператор $T: E \to F$ ограничен и биективен, тогда T^{-1} также ограничен и биективен.*

Иными словами, T — топологический изоморфизм.

◀ Раз оператор T биективен, то он и сюръективен, а значит, существует $\theta > 0$, такое что $T\text{Ш}_E^0 \subseteq \theta\text{Ш}_F^0$. Согласно теореме 5, нам достаточно доказать, что T^{-1} непрерывен в 0, то есть, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ \|y\| < \delta \Rightarrow T^{-1}y < \varepsilon.$$

Берём $\delta = \theta\varepsilon$, тогда

$$\left\|\frac{\theta}{\delta}y\right\| < \theta,$$

то есть, $y \in \theta\text{Ш}_F^0$. Но, согласно принципу открытости, существует $x \in \text{Ш}_E^0$, такой что

$$Tx = \frac{\theta}{\delta}y.$$

Вспомним, что T биективен, а значит,

$$x = T^{-1}\left(\frac{\theta}{\delta}y\right).$$

Раз так, мы можем оценивать, что

$$\left\|T^{-1}y\right\| = \frac{\delta}{\theta}\|x\| < \frac{\delta}{\theta} = \frac{\theta\varepsilon}{\theta} = \varepsilon.$$ ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема Банаха тоже имеет множество следствий и применений, но сперва следует уточнить, что принцип открытости и теорема Банаха — это эквивалентные утверждения.

Задача 54. Вывести принцип открытости из теоремы Банаха.

Указание. Чтобы из сюръективного оператора получить биективный, следует рассмотреть пространство $E/\operatorname{Ker} T$ (а оно банахово), и тогда возникнет оператор

$$T_0 : \ E/\operatorname{Ker} T \to F.$$

Он и удовлетворит требованиям теоремы Банаха.

Из разных приложений теоремы Банаха есть одно очень простое, которое на первый взгляд очень странно выглядит.

Задача 55. Пусть есть линейное пространство E с двумя нормами $\|\cdot\|_k$, $k = 1, 2$, по которым E банахово. Пусть первая норма мажорируется второй, то есть

$$\forall x \in E, \exists C : \ \|\cdot\|_1 \leq C \, \|\cdot\|_2 \, .$$

Показать, что существует константа C', с которой вторая норма мажорируется первой,

$$\|\cdot\|_2 \leq C' \, \|\cdot\|_1 \, ,$$

то есть, две нормы эквивалентны.

Указание. Обратить внимание на тождественный оператор $\mathbb{1} : \ \big(E, \|\cdot\|_2\big) \to \big(E, \|\cdot\|_1\big)$.

Это следствие часто применяется при сравнении норм в разных функциональных пространствах.

На примере двух задач убедимся, что полнота в теореме Банаха об обратном операторе является очень важным условием.

Задача 56. Показать, что теорема Банаха (об обратном операторе) неверна, если пространство F неполно.

Задача 57 (*). Показать, что теорема Банаха (об обратном операторе) неверна, если пространство E неполно.

Указание. Взять нужный алгебраический базис в E и построить по нему норму, которая тоже окажется неполной. Отметим, что когда в линейном пространстве есть алгебраический базис, естественным образом возникает норма, сопоставляющая вектору сумму его линейных коэффициентов.

Пополнение

Понятие пополнения. Теорема единственности

На протяжении последних нескольких лекций мы убедились в том, полные пространства имеют ряд преимуществ над неполными пространствами. Рассмотрим теперь операцию, с помощью которой можно сделать полным произвольно взятое пространство.

Определение. *Пополнением* нормированного пространства E называют пару

$$\left(\overline{E}, i:\ E \to \overline{E}\right), \tag{8.2}$$

где $\overline{E}$ — банахово пространство, а i — изометрия с плотным образом.

Не стоит считать, что $\overline{E}$ — пространство, большее, чем E, потому что между $\overline{E}$ и E существует изометрический оператор.

Пример 1. Рассмотрим типичный пример неполного пространства, $P[0,1]$ с равномерной нормой — но ведь есть же полное пространство $C[0,1]$, и есть естественное вложение, где каждый многочлен рассматривается как непрерывная функция. В данном случае действительно $E \subset \overline{E}$.

Пример 2. Рассмотрим теперь $\tilde{C}[0,1]$ — то есть, пространство непрерывных функций, но с интегральной нормой,

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

. Как мы уже рассматривали, это пространство неполно. Возьмём пространство $L[0,1]$, которое, пусть и состоит из совсем других элементов, из классов эквивалентности, связано с $\tilde{C}[0,1]$ изометрией с плотным образом, а потому является его пополнением.

Возникают вопросы: бывают ли пополнения и много ли их. Начнём отвечать со второго вопроса.

Теорема 24 (единственности пополнения). *Пусть существуют два пополнения нормированного пространства E,*

$$\left(\overline{E}_k, i_k:\ E \to \overline{E}_k\right),$$

тогда существует изометрический изоморфизм $I:\ \overline{E}_1 \to \overline{E}_2$, такой что следующая диаграмма коммутативна,

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2"] & \\ \overline{E}_1 \arrow[rr, "I"'] & & \overline{E}_2 \end{tikzcd}$$

то есть, $I i_1 = i_2$, и $I^{-1} i_2 = i_1$.

◀ Обозначим всё, что мы рассматриваем, на коммутативной диаграмме. Имеем пространство E, которое вкладывается в $\operatorname{Im} i_k$ с помощью изометрических изоморфизмов i_k^0, в то время как $\operatorname{Im} i_k$ вкладываются в $\overline{E}_k$ естественными вложениями, которые мы

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

обозначим j_k.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "i_1^0"'] \arrow[dr, "i_2^0"] \arrow[ddll, bend right, "i_1"'] \arrow[ddrr, bend left, "i_1"] & \\
\operatorname{Im} i_1 \arrow[rr, "I_0^0"'] \arrow[d, hook, "j_1"'] & & \operatorname{Im} i_2 \arrow[d, hook, "j_2"] \\
\overline{E}_1 \arrow[rr, "I"] & & \overline{E}_2
\end{tikzcd}$$

Поскольку изометрический изоморфизм биективен, существует единственный оператор $I_0^0 \colon \operatorname{Im} i_1 \to \operatorname{Im} i_2$, $I_0^0 = i_2^0 \left(i_1^0\right)^{-1}$, который, разумеется, является изометрическим изоморфизмом. Пользуясь продолжением по непрерывности, немедленно получаем I, делающий нижнюю часть диаграммы коммутативной, $I j_1 = j_2 I_0^0$.

Далее мы хотим *включить* в коммутативность и верхнюю часть диаграммы. Для этого воспользуемся тем, что

$$I i_1 = I j_1 i_1^0 = j_2 I_0^0 i_1^0 = j_2 i_2^0 = i_2. \qquad \blacktriangleright$$

Возможно, не будет лишним повторить это доказательство ещё и с векторами, в менее элегантной форме — например, это можно сделать в качестве упражнения.

Теорема существования

Мы доказали, что если пополнение существует, то оно единственно — осталось ответить на вопрос, есть ли оно. Существуют разные доказательства теоремы существования, первое из которых принадлежит Кантору, и работает не только в нормированных, но и просто в метрических пространствах. Мы же рассмотрим другое, которое требует дополнительного факта.

Рассмотрим нормированное пространство E, и второе сопряжённое к нему $E^{\star\star}$. Они связаны некоторым отображением,

$$i \colon E \to E^{\star\star}, \tag{8.3}$$

которое называется *каноническим оператором*. Несложно понять, как естественно связать эти пространства — возьмём вектор $x \in E$, исходя из которого нужно построить функционал на функционалах.

$$x \mapsto \alpha_x \colon E \to \mathbb{C} \colon E^\star \to \mathbb{C} \colon f \mapsto f(x).$$

Получили отображение — ясно, что это линейный оператор. Докажем, что он изометричен.

Предложение 22. *i — изометрия, то есть $\left\|\alpha_x\right\| = \|x\|$.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ Сперва возьмём $|\alpha_x(f)|$,

$$|\alpha_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \, .$$

Если теперь мы возьмём супремум $\|f\|$ по единичному шару, мы заметим, что $\|x\|$ ограничивает произведение норм, а тогда $\|x\|$ — это одна из констант из определения нормы ограниченного функционала, то есть,

$$\left\|\alpha_x\right\| \leq \|x\| \, ,$$

а наш оператор сжимающий.

А почему норма не уменьшается? Вспомним, что

$$\left\|\alpha_x\right\| = \sup_{f \in Ш_{E^\star}} \left|\alpha_x(f)\right| \leq \sup_{f \in Ш_{E^\star}} |f(x)|.$$

Здесь нам понадобится теорема Хана—Банаха, согласно одному из следствий которой (теорема 8) существует такое f, что $\|f\| = 1$, а $\alpha_x(f) = \|x\|$. Значит, наш супремум не может быть меньше, чем $\|x\|$. ▶

В задачах к нашему курсу такое уже встречалось — а также можно было заметить, что $c_0^{\star\star} = l_1^\star = l_\infty$, а $i: \ c_0 \to l_\infty$ — это оператор естественного вложения, действующий между ними.

Теперь нужно ввести одно очень важное для функционального анализа определение, которое также уже упоминалось вскользь.

Определение. *Рефлексивным* называют такое пространство, для которого i сюръективно, а значит, является изометрическим изоморфизмом.

Отметим, что для нормированных пространств i всегда инъективен, так как ненулевой вектор не может перейти в нулевой, а если мы добавляем сюръекцию, получится изометрический изоморфизм. Рассмотрим пару задач для пояснения этого понятия.

Задача 58. Показать, что гильбертово пространство (в частности, l_2) рефлексивно.

Задача 59. Показать, что c_0 и l_1 не рефлексивны.

Указание. Как мы уже получали, $l_1^\star = l_\infty$, а найти в нём функционал, в который ничего не отображается, не слишком сложно.

Стоит отметить, что бывает так, что $E^{\star\star}$ изометрически изоморфно исходному E, и при этом E не рефлексивно. Примером является пространство Джеймса, когда образу оператора i не хватает ровно одной размерности.

Теорема 25 (существования пополнения). *Для любого нормированного пространства E существует пополнение.*

◀ Для доказательства этой теоремы нам нужно попросту предъявить вложение любого пространства E в банахово — тут-то нам и пригодится канонический оператор

$$i: \ E \to E^{\star\star},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

так как $E^{\star\star}$ наверняка банахово (раз любое сопряжённое пространство и так банахово).

Положим

$$\overline{E} := \overline{\operatorname{Im} i}.$$

Обратим внимание, что никто нам не гарантирует, что $\operatorname{Im} i$ будет полным сам по себе — но и никто не запретит нам замкнуть его образ, а тогда мы получим замкнутое подпространство в банаховом пространстве $E^{\star\star}$, которое и само банахово, а образ $\operatorname{Im} i$ плотен в своём замыкании. ▶

Мы будем неоднократно пользоваться следующим несложным утверждением, которое мы сформулируем в виде задачи,

Задача 60. Если H — почти гильбертово пространство, то $(\overline{H}, i)$ — гильбертово пространство, а норма $\|\cdot\|_{\overline{H}}$ задаётся скалярным произведением.

Указание. У нас уже есть i — тогда возьмём $\overline{H} \ni x' = \lim i(x_n \in H)$. Точно так же $\overline{H} \ni y' = \lim i(y_n \in H)$. Нужно определить скалярное произведение $\langle x', y' \rangle$ так, чтобы возникала норма — заметим, что если взять скалярные произведения $\langle x_n, y_n \rangle$, то они будут образовывать фундаментальную числовую последовательность. Тогда возьмём в качестве искомого скалярного произведения предел этой последовательности.

Компактность и сверхограниченность

Понятие компактности и сверхограниченности

Сверхограниченность также иногда называют *полной ограниченностью*.

Понятие компактности восходит к топологии, где аналогичное понятие как раз рассматривается. Мы не будем вводить в этом курсе фундаментальных топологических понятий вроде покрытия или подпокрытия, а ограничимся рассмотрением того, что непосредственно имеет отношение к функциональному анализу.

Определение. *Компактным* называют такое топологическое пространство, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Время от времени мы будем пользоваться одним несложным топологическим утверждением, которое мы рассмотрим в качестве задачи.

Задача 61. Пусть задано два топологических пространства Ω_1 и Ω_2, причём Ω_2 хаусдорфово (то есть любые две разные точки в них обладают непересекающимися окрестностями), а между ними заданы два непрерывных отображения, $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$, также задано плотное подмножество $M \subset \Omega_1$, и пусть на M отображения совпадут,

$$\varphi_1\big|_M = \varphi_2\big|_M. \tag{8.4}$$

Показать, что в таком случае $\varphi_1 = \varphi_2$.

Можно считать, что в функциональном анализе мы рассматриваем достаточно простые — нормированные — пространства, и иногда имеет смысл рассматривать в качестве общего случая метрические пространства. Возникает вопрос, нельзя ли упростить понятие компактности и для метрических пространств. Ответим на него.

Определение. *ε-сетью* (Хаусдорфа) называется подмножество $N \subset M_0 \subset M$ метрического пространства $(M, d) \supset M_0$ такое, что для $\varepsilon > 0$,

$$\forall x \in M_0, \exists y \in N : \ d(y, x) < \varepsilon. \tag{8.5}$$

То есть, какую бы мы ни взяли точку в M_0, ε-шарик с центром в ней содержит точку из N. Иными словами,

$$M_0 \subseteq \bigcup_{y \in N} U(y, \varepsilon). \tag{8.6}$$

Теперь раскроем понятие малости.

Определение. *Сверхограниченным* (вполне ограниченным) называют такое подмножество $M_0 \subset M$, что $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M_0.

Сверхограниченность и есть той малостью, о которой мы говорили для раскрытия понятия компактности.

Но почему мы называем это понятие *сверх*-ограниченностью? Рассмотрим соответствующее предложение,

Предложение 23. *Сверхограниченное множество ограничено.*

◀ В самом деле, рассмотрим M_0 из определения. Тогда в M есть 1-сеть $x_1, \dots, x_n$. Мы хотим получить, что множество расстояний $\{d(y, z) | y, z \in M_0\}$ ограничено.

Возьмём $y \in M_0$. Тогда существует $x_k : \ d(y, x_k) < 1$. В то же время, для любого $z \in M_0$ существует $x_l : \ d(z, x_l) < 1$. Тогда оценим $d(y, z)$,

$$d(y, z) \leq d(y, x_k) + d(x_k, x_l) + d(z, x_l) = 2 + d(x_k, x_l) + \max_{k,l} d(x_k, x_l),$$

а это некоторое конечное число. ▶

Теперь рассмотрим два очевидных предложения.

Предложение 24. *Подмножество сверхограниченного множества само сверхограничено.*

Ясно, что ε-сеть для большего будет также и ε-сетью для меньшего.

Предложение 25. *Сверхограниченное метрическое пространство сепарабельно.*

◀ Возьмём $\varepsilon = 1$ и 1-сеть $y'_1, \dots, y'_n$,
$\varepsilon = 1/2$ и 1/2-сеть $y^2_1, \dots, y^2_n$,
$\varepsilon = 1/3$ и 1/3-сеть $y^3_1, \dots, y^3_n$,
и так далее. Очевидно, что их объединение будет плотным счётным множеством. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9

Компактность и сверхограниченность

Примеры сверхограниченности. Эквивалентные условия сверхограниченности

Пример. Произвольное счётное множество с метрикой

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \neq y, \\ 0, \text{ при } x = y, \end{cases}$$

ограничено (единицей), но не сверхограничено, потому что 1-сеть покроет всё множество, а значит, не будет конечной.

Рассмотрим теперь один положительный пример, который нам очень пригодится впоследствии. Чтобы избавить себя от необходимости писать лишние символы, рассмотрим пространство $\mathbb{R}_1^n$ с нормой

$$\|\xi\|_m = |\xi_1| + \dots + |\xi_n|.$$

Предложение 26. *Любое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}_1^n$ сверхограничено.*

◀ Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдём конечную ε-сеть. Для этого рассмотрим ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}_1^n$, то есть, пусть $\exists C$:

$$\forall \eta \in M, |\eta_k| < C.$$

Тогда возьмём целое число $m \in \mathbb{Z}$,

$$m > \frac{Cn}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим такое подмножество $N_m \subset M$, что

$$N_m = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}_1^n \mid \zeta_k = C\frac{r}{m}, -m \leq r \leq m \right\}.$$

Ясно, что каждая координата пробегает $2m+1$ значений, а значит, N_m содержит $(2m+1)^n$ точек.

Теперь возьмём $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Возьмём также $N_m \ni \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, чтобы

$$|\eta_k - \zeta_k| < \frac{C}{m}.$$

Расстояние между ними будет выражаться как

$$\|\eta - \zeta\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k - \zeta_k| < n\frac{C}{m} < n\frac{C}{Cn/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Вот мы и нашли для заданного ε точку с нужным расстоянием в ε-сети N_m. ▶

Задача 62. Показать то же самое для $\mathbb{C}_1^n$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим теперь разные подходы к понятию сверхограниченности.

Предложение 27. *Если M — метрическое пространство, а $M_0 \subset M$, то следующие утверждения эквивалентны,*

1) *M_0 сверхограничено,*

2) *из каждой последовательности в M_0 можно выделить фундаментальную,*

3) *$N \subset M_0$ такое, что $\exists \theta > 0 : \forall x, y \in N, d(x, y) \geq \theta$, то N конечно.*

◀ Докажем сперва *1) ⇒ 2)*. Пусть есть последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots$. Возьмём $\varepsilon = 1/2$ и конечную 1/2-сеть y_k^1. Каждый $x_n \in U(y_k^1, 1/2)$, значит, есть бесконечное число членов последовательности, лежащее в этом шаре для некоторого k, то есть, возникает подпоследовательность x_n^1.

Возьмём 1/3-сеть y_k^2, и получим аналогичную подпоследовательность x_n^2, лежащую в шаре $U(y_k^2, 1/3)$. Продолжая аналогично, получим таблицу из последовательностей x_n^m, попарное расстояние между членами m-той из которых будет $d(\cdot, \cdot) < 2/n$. Рассмотрим диагональ этой таблицы, x_n^n, и отметим, что попарное расстояние между членами этой последовательности может быть меньше любого наперёд заданного числа в силу произнольности выбора m.

Докажем теперь *2) ⇒ 3)*. Предположим противное, пусть есть $\theta > 0$ такое, что образовалось бесконечное множество N, попарное расстояние между элементами которого не меньше θ. Раз оно бесконечное, выпишем последовательность $x_1, x_2, \dots$, состоящую из разных его элементов. Очевидно, что из такой последовательности нельзя выделить фундаментальную.

Докажем наконец *3) ⇒ 1)*. Опять предположим противное, пусть, существует ε такое, что конечной ε-сети нет, то есть, M_0 не сверхограничено.

Возьмём произвольную точку $\{x_1\} \in M_0$. Это подмножество не может быть ε-сетью, потому что это противоречило бы предположению, а значит, существует $x_2 : d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Теперь рассмотрим конечное множество $\{x_1, x_2\}$. Оно тоже не может быть ε-сетью, а значит, существует и $x_3 : d(x_1, x_3), d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Продолжая это дальше, мы получим последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots$, попарное расстояние между членами которой не меньше ε, а значит, мы пришли к противоречию. ▶

Эквивалентные условия компактности

Мы доказали эквивалентные условия сверхограниченности, однако наша задача была другой — мы хотели получить разные подходы к компактности. Рассмотрим соответствующее предложение.

Предложение 28. *Для метрического пространства M эквивалентны следующие свойства,*

1) *M компактно,*

2) *M полно и сверхограничено,*

3) *из каждой последовательности в M можно выделить сходящуюся,*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4) *каждое бесконечное подмножество в M имеет предельную точку (счётная компактность).*

Следует обратить внимание, что для общих топологических пространств свойство *4)* слабее свойства *1)* — в качестве примера можно рассмотреть отрезок $[0, \dots, \aleph_1)$ с существующей на нём порядковой топологией.

Задача 63 (*). Получить этот результат.

◀ Доказывать будем в последовательности *1)* $\Rightarrow$ *4)* $\Rightarrow$ *3)* $\Rightarrow$ *2)* $\Rightarrow$ *1)*.

Итак, *1)* $\Rightarrow$ *4)*. Пусть N бесконечно и не имеет предельной точки. Есть два варианта: либо N замкнуто, либо N не замкнуто.

а) Пусть N не замкнуто, то есть, существует $x \in \overline{N}$, $x \notin N$, а значит, в любой его выколотой окрестности содержатся точки множества N, что и является определением предельной точки.

б) Пусть теперь N замкнуто. Тогда, если предельной точки нет, $\forall x \in N$, $\exists U_x$, не содержащая точек множества N, кроме самой x. Рассмотрим систему множеств

$$\left\{\{U_x | x \in N\}, M \setminus N\right\},$$

которая получается открытым покрытием, а, раз N компактно, то есть конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}, M \setminus N$. Если $\forall k$, $\exists x \in N$: $x \neq x_k$ (а раз N бесконечно, такой x есть), то x не принадлежит ни одному из U_{x_k} и, очевидно, $x \notin M \setminus N$. Выходит противоречие.

Далее, *4)* $\Rightarrow$ *3)*. Нам дали последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots$, а из неё нужно выделить сходящуюся. Если множество её членов конечно, то всё очевидно — предположим, что это множество бесконечно. В таком случае у нашего множества есть предельная точка, и для $\varepsilon = 1$ в выколотой окрестности этой точки есть $x_{n_1} : d(x, x_{n_1}) < 1$. Продолжая аналогично, получим для $\varepsilon = 1/k$, x_{n_k}, $d(x, x_{n_k}) < 1/k$. Возникает подпоследовательность x_{n_k}, для которых

$$\lim_{k \to \infty} d(x, x_{n_k}) = 0,$$

а значит, x и есть предел этой подпоследовательности.

Теперь докажем *3)* $\Rightarrow$ *2)*. Пусть M неполно, тогда в нём есть фундаментальная последовательность, не имеющая предела. Раз так, мы не сможем выделить в ней сходящуюся подпоследовательность, потому что иначе её предел, в силу фундаментальности, должен был бы быть пределом всей последовательности. Соответственно, пространство полно.

Пусть теперь пространство не сверхограничено, а значит, существует $\theta > 0$ и последовательность x_n, попарное расстояние между членами которой $d(\cdot, \cdot) \geq \theta$. Но тогда x_n даже не фундаментальна, что уж говорить о сходимости.

И теперь осталось доказать только самое трудоёмкое утверждение, *2)* $\Rightarrow$ *1)*. Пусть есть покрытие σ, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Воспользуемся

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

сверхограниченностью: для $\varepsilon = 1$ существует 1-сеть $y_1^1, \dots, y_{m_1}^1$. Возьмём теперь замкнутое множество,

$$V_k^1 := U\left(y_k^1, 1\right)^- .$$

Видим, что это тоже покрытие. Запишем,

$$M = \bigcup_{k=1}^{m_1} U\left(y_k^1, 1\right) = \bigcup_{k=1}^{m_1} V_k^1.$$

Предположим, что в V_1^1 можно выделить конечное подпокрытие, во втором тоже можно, и так далее, и мы получим конечное подпокрытие всего M, которого нет. Значит, хотя бы для какого-то значения k в $V_k^1 =: V^1$ нельзя выделить конечное подпокрытие.

Повторим такое же рассуждение для $\varepsilon = 1/2$. Будет существовать 1/2-сеть $y_1^2, \dots, y_{m_2}^2$. Тогда положим

$$V_k^2 := V^1 \cap \left(U\left(y_k^2, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Как пересечение двух замкнутых множеств, V_k^2 само замкнуто, а объединение всех V_k^2,

$$\bigcup_{k=1}^{m_2} V_k^2 = V^1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m_2} U\left(y_k^2, \frac{1}{2}\right)\right) = V^1 \cap M = V^1.$$

Рассмотрим теперь покрытие всего M, σ, как покрытие всех V_k^2. Предположим, что $\forall k$ удалось выделить конечное подпокрытие — тогда объединяя их, мы получим конечное подпокрытие всего V^1, но ведь мы строили V^1 так, чтобы такого подпокрытия не было, а тогда сделаем аналогичный вывод, что хотя бы для какого-то значения k в $V_k^2 =: V^2$ нельзя выделить конечное подпокрытие.

Берём $\varepsilon = 1/3$, получим соответствующую сеть, заметим аналогично, что V_k^3 будет выглядеть как

$$V_k^3 := V^2 \cap \left(U\left(y_k^3, \frac{1}{3}\right)\right).$$

Снова найдём $V^3 := V_k^3$ для такого значения k, при котором нельзя выделить конечное подпокрытие.

Обратим внимание на диаметры V^1, V^2, и V^3. Очевидно,

$$\operatorname{diam} V^1 \le 2.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} V^2 &\le 1, \\ \operatorname{diam} V^3 &\le \frac{2}{3}, \\ &\vdots\ . \end{aligned}$$

Обратим внимание на это многоточие — мы имеем дело с семейством вложенных множеств,

$$V^1 \subseteq V^2 \subseteq V^3 \subseteq \cdots ,$$

где $\operatorname{diam} V^n \leq 2/n$. Для полных метрических пространств существует принцип вложенных замкнутых подмножеств: если есть вложенные замкнутые подмножества, чьи диаметры стремятся к нулю, то у них существует общая точка $y \in V^n$, $\forall n$, причём $d(x, y) \leq 2/n$.

Получается, если мы возьмём открытый единичный шар $U(x, r)$ такой, что $r > 2/n$, мы получим, что $V^n \subseteq U$. Тогда есть открытое множество, которое содержит x, то есть, $x \in U(x, r)$, дальше мы берём достаточно большое n и видим, что $V^n \in U$. Теперь мы вспоминаем, что конечных подпокрытий у нас быть не может — а тут мы получили одно множество, которое покрывает V^n, где мы и пришли к противоречию. ▶

Рассмотрим одно следствие, уточняющее рассмотренный факт.

Следствие 6. *Пусть M полно, а $M \supset N$ компактно — это утверждение эквивалентно тому, что N сверхограничено и замкнуто.*

◀ Зная, что N компактно, мы получаем сверхограниченность, а замкнутость следует из того, что N — компактное подмножество хаусдорфова пространства.

В обратную сторону нам потребуется полнота — в самом деле, N есть замкнутое подмножество полного множества, а значит, оно и само полно. Формально говоря, это тоже нужно доказать, однако рассуждение тут элементарно и здесь приводится не будет. ▶

Компактность и конечномерность

На этот раз рассмотрим связь топологического понятия компактности с алгебраическим понятием конечномерности.

Предложение 29. *Любой линейный изоморфизм из $\mathbb{C}_1^n$ в нормированное пространство есть топологический изоморфизм.*

Обозначим наш оператор,

$$I : \mathbb{C}_1^n \to E.$$

Заметим, что из предложения следует, что $\dim E = n$.

Раз I — изоморфизм, то есть и линейный оператор I^{-1},

$$I^{-1} : E \to \mathbb{C}_1^n,$$

про который нам нужно доказать, что он тоже является изоморфизмом — тогда мы попросту проверим определение топологического изоморфизма.

Лемма 4. *Любой линейный оператор из $\mathbb{C}_1^n$ в преднормированное пространство ограничен.*

◀ Обозначим такой оператор,

$$T : \mathbb{C}_1^n \to E,$$

Рассмотрим произвольный вектор $\xi \in \mathbb{C}_1^n$, имеющий координаты $\xi = (\dots, \xi_k, \dots)$. В таком случае мы можем представить вектор в качестве линейной комбинации,

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbb{P}^k,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где $\mathbb{P}^k$ — орты нашего пространства.

В таком случае,

$$T\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T\left(\mathbb{P}^k\right),$$

а тогда,

$$\|T\xi\| \leq \sum_{k} |\xi_k| \left\|T\left(\mathbb{P}^k\right)\right\|.$$

Число слагаемых в этой сумме, очевидно, конечно, а значит, можно её ограничить,

$$\|T\xi\| \leq C \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|, C = \max_k \left\|T\left(\mathbb{P}^k\right)\right\|.$$

▶

Перейдём к окончанию доказательства предложения,

◀ Согласно лемме, оператор T ограничен. Осталось доказать, что ограничен оператор T^{-1}.

Рассмотрим пространство E — оно нормировано. В первом пространстве существует выделенное множество (единичная сфера),

$$\mathcal{S} = \left\{\xi \in \mathbb{C}_1^n : \ \|\mathbb{C}\|_1 = 1\right\}.$$

Очевидно, это пространство ограничено, а согласно задаче, рассмотренной в начале этой лекции, оно ещё и сверхограничено. Также оно и замкнуто, потому что если $\xi_n \to \xi$ и $\left\|\xi_n\right\| = 1$, то и $\|\xi\| = 1$. Пространство $\mathbb{C}_1^n$ полно, а значит, $\mathcal{S}_1$ — компакт. Если $\mathbb{C}_1^n \ni \xi \neq 0$, то $I\xi \neq 0$, а тогда корректно определена следующая функция,

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} : \xi \mapsto \|I\xi\|^{-1}.$$

Заметим, что φ — композиция следующего вида,

$$\mathcal{S}_1 \xrightarrow{I} E \setminus \{0\} \xrightarrow{x \mapsto \|x\|} \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \xrightarrow{t \mapsto t^{-1}} \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Очевидно, что каждый из операторов в этой композиции непрерывен, а значит, непрерывен и φ. Тут мы пользуемся теоремой Вейерштрасса, согласно которой каждая функция, непрерывная на компакте (а непрерывный образ компакта — тоже компакт), ограничена на нём.

Заметим, что мы всё ещё не ввели константу для доказательства ограниченности. Пусть $x \neq 0$. По теореме Вейерштрасса,

$$\varphi(\xi) = \|I\xi\|^{-1} \leq C,$$

а поскольку I биективен, $\exists! \eta \in \mathbb{C}_1^n : I\eta = x$, и притом мы знаем, по изоморфности оператора, что $\|\eta\|_1 > 0$.

Теперь посмотрим, что же у нас в итоге получается? Рассмотрим наконец обратный оператор, который нам нужно ограничить по норме,

$$\left\|T^{-1}x\right\|_1 = \|\eta\|_1 = \frac{\|\eta\|_1}{\|x\|}\|x\| = \left(\frac{\|x\|}{\|\eta\|}\right)^{-1}\|x\| =$$
$$= \left(\frac{\|I\eta\|_1}{\|\eta\|}\right)^{-1}\|x\| = \left(\left\|\frac{\eta}{\|\eta\|_1}\right\|\right)^{-1}\|x\|,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

но $\eta / \|\eta\| \in \mathcal{S}_1$, а тогда по выбору C,

$$\left\|T^{-1}x\right\|_1 \leq C\,\|x\|\,. \qquad \blacktriangleright$$

Подведём теперь некоторый итог в виде следующей теоремы.

Теорема 26. *Любые два нормированных пространства одинаковой конечной размерности топологически изоморфны. При этом, любой линейный изоморфизм, действующий между ними, является топологическим изоморфизмом.*

◀ Сразу поймём, что второе утверждение влечёт первое. Тогда возьмём два пространства $E_1, E_2:\ \dim E_1 = \dim E_2 = n$, и между ними действует линейный изоморфизм

$$T:\ E_1 \to E_2.$$

Построим диаграмму,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "T"] & & E_2 \\ & \mathbb{C}_1^n \arrow[ul, "T_1"] \arrow[ur, "T_2"'] & \end{tikzcd}$$

Мы уже доказывали, что T_1 и T_2 — топологические изоморфизмы, а T тогда, чтобы диаграмма была коммутативной и поскольку топологические изоморфизмы биективны,

$$T = T_2 T_1^{-1}.$$

Композиция двух топологических изоморфизмов — это топологический изоморфизм.▶

Мажорирующая норма

Скажем то же самое несколько иначе, вводя новую терминологию.

Определение. Пусть E — произвольное нормированное пространство, в котором определены нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Говорят, что $\|\cdot\|_2$ *мажорирует* $\|\cdot\|_1$, если существует константа C такая, что $\forall x \in E$,

$$\|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2\,. \tag{9.1}$$

Определение. *Эквивалентными* называют такие нормы, каждая из которых мажорирует другую.

Рассмотрим задачу на проверку определения.

Задача 64. Показать, что если одна норма мажорирует другую, то соответствующая ей топология не слабее другой, а если нормы эквивалентны, то топологии совпадают.

Теорема 27. *В конечномерном линейном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

◀ Введём тождественный оператор,

$$\mathbb{1}:\ \left(E, \|\cdot\|_1\right) \to \left(E, \|\cdot\|_2\right).$$

Очевидно, что этот оператор ограничен, а значит, вторая норма мажорирует первую. Точно так же очевидно, что обратный к нему ограничен и первая норма мажорирует вторую. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10

Компактность и сверхограниченность

Сверхограниченность и конечномерность

Вспомним (и отметим, что это очевидно) что полнота метрического пространства — это инвариант топологического изоморфизма, то есть, если есть два топологически изоморфных пространства, то полнота одного влечёт полноту другого. Запишем с учётом этого факта одно следствие из последней теоремы прошлой лекции.

Следствие 7. *Любое конечномерное пространство полно.*

Отметим также предложение.

Предложение 30. *Образ сверхограниченного множества в метрическом пространстве сверхограничен при равномерно непрерывном отображении.*

◀ Утверждение теоремы означает, что если существует непрерывное отображение φ между двумя метрическими пространствами, $\varphi\colon M_1 \to M_2$, то если есть сверхограниченное подмножество $N \subseteq M_1$, то и $\varphi(N)$ сверхограничено. Проверим наличие ε-сети. Пусть нам задан некоторый $\varepsilon > 0$, и тогда по определению равномерной непрерывности существует δ, фигурирующее в определении равномерной нерперывности.

Возьмём в N δ-сеть, состоящую из векторов $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим конечное множество $y_k := \varphi x_k$. Возьмём $\forall y \in \varphi(N)$, а раз он принадлежит образу, то можно написать, что $y = \varphi(x)$ для некоторого $x \in M_2$. Поскольку N — δ-сеть, $\exists x_k\colon d(x, x_k) < \delta$, а тогда по определению равномерной непрерывности,

$$d\left(\varphi(x), \varphi(x_k)\right) = d(y, y_k) < \varepsilon.$$

Вот мы и нашли конечную ε-сеть для M_2. ▶

Следствие 8. *Сверхограниченность метрического пространства — инвариант относительно равномерного гомеоморфизма.*

Отметим, что равномерный гомеоморфизм — это такое равномерно непрерывное отображение, которое биективно, и обратное к которому равномерно непрерывно.

◀ Пусть у нас есть равномерный гомеоморфизм $\varphi\colon M_1 \to M_2$. Докажем, что из сверхограниченности одного из этих метрических пространств будет следовать сверхограниченность другого.

Пусть M_1 сверхограничено, и поскольку равномерный гомеоморфизм φ — непрерывное отображение, а его образом, в силу биективности, будет как раз M_2, M_2 тоже сверхограничено.

То же самое верно и в обратную сторону. ▶

Вспомним, что когда мы доказывали эквивалентные условия ограниченности оператора, мы в том числе доказали, что ограниченный оператор является равномерно непрерывным.

Следствие 9. *Топологический изоморфизм является равномерным гомеоморфизмом.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предложение 31. *В любом конечномерном пространстве множество сверхограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

◀ Мы уже доказали, что из сверхограниченности следует ограниченность. Докажем обратное.

В самом деле, пусть у нас есть конечномерное метрическое пространство E, у которого есть ограниченное подмножество $M \subset E$. Мы помним, что E топологически изоморфно пространству $\mathbb{C}_1^n$. Рассмотрим топологический изоморфизм,

$$I : E \to \mathbb{C}_1^n.$$

Обозначим образ M, $N := I(M)$ — это будет образ ограниченного множества, который и сам ограничен. Отметим, что поскольку $N \subset \mathbb{C}_1^n$, N сверхограничен, и также отметим, что $M = I^{-1}N$, а I^{-1} равномерно непрерывен. Значит, M тоже сверхограничено. ▶

Теорема Рисса

Теперь мы рассмотрим теорему о том, что эквивалентность ограниченности и сверхограниченности не только наблюдается в конечномерных пространствах, но и характеризует их. Как вообще прийти к такой догадке?

Мы можем вообразить себе множество разнообразных нормированных пространств. В них можно смотреть на замкнутый единичный шар — типичный пример ограниченного множества. Во многих пространствах очевидно, что он не может быть сверхограниченным. Рассмотрим это в качестве задачи.

Задача 65. Показать, что в $C[a, b]$, $L_p[a, b]$ $(p = 1, 2, \infty)$, l_p, $\mathscr{B}(H)$ замкнутый единичный шар не сверхограничен.

Указание. Обратить внимание на то, что в сверхограниченном множестве не может быть бесконечного количества точек с большим попарным расстоянием.

Вполне возможно, что именно это Рисс и заметил. Будем идти к теореме, носящей его имя, начав со следующего несложного наблюдения.

Предложение 32. *Если E — нормированное пространство, а $E_0 \subset E$, то*

1) $\forall x \in E, \forall z \in E_0,\ d(x, E_0) = d(x - z, E_0)$,

2) $d(\lambda x, E_0) = |\lambda| d(x, E_0)$.

◀ *1)* В самом деле, расстояние $d(x, E_0)$ выражается как

$$d(x, E_0) = \inf_{y \in E_0} d(x, y) = \inf_{y \in E_0} d(x - z, y - z),$$

потому что когда y пробегает E_0, z тоже пробегает E_0. *2)* Доказательство предоставляется читателям в силу его очевидности. ▶

Теперь перейдём к основному вспомогательному утверждению.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предложение 33 (Лемма о почти перпендикуляре). *Если E — нормированное пространство, в котором есть замкнутое подпространство $E_0 \subset E$, то для $\varepsilon > 0$,*

$$\exists x \in E: \ \|x\| = 1, d(x, E_0) > 1 - \varepsilon. \tag{10.1}$$

В гильбертовом пространстве с этой леммой не было бы никаких проблем — нам было бы достаточно взять вектор из ортогонального дополнения, однако тут у нас нет таких геометрических свойств.

◀ Возьмём $y \in E \setminus E_0$. Поскольку E_0 замкнуто, $d(y, E_0) > 0$. Вспоминаем теперь второе из наших наблюдений: умножив y на скаляр, мы можем считать, что $d(y, E_0) = 1$. Это значит, что мы можем взять $\delta > 0$ настолько маленькое, что

$$\frac{1}{1+\delta} > 1 - \varepsilon.$$

Вспомним теперь определение расстояния до подпространства, согласно которому

$$\exists z \in E_0: \ \|y - z\| < 1 + \delta.$$

Положим x,

$$x := \frac{1}{\|y - z\|}(y - z),$$

и тогда очевидно, что $\|x\| = 1$. Что такое $d(x, E_0$?

$$d(x, E_0) = \frac{1}{\|y - z\|} d(y - z, E_0) = \frac{1}{\|y - z\|} d(y, E_0).$$

Теперь обратим внимание на то, что $\|y - z\| < 1 + \delta$, а тогда

$$d(x, E_0) = \frac{1}{\|y - z\|} d(y, E_0) > \frac{1}{1+\delta} d(y, E_0) > (1 - \varepsilon) \cdot 1 > 1 - \varepsilon. \qquad ▶$$

Вот мы и построили то, что можно назвать ε-перпендикуляром.

Отсюда мы уже можем перейти к самой теореме Рисса.

Теорема 28 (Рисс). *Для нормированного пространства E эквивалентны свойства,*

1) *$Ш_E$ компактен,*

2) *$Ш_E$ сверхограничен,*

3) *E конечномерно.*

◀ Как обычно в таких случаях, будем доказывать по циклу.

Начнём с *3) ⇒ 1)*. Нам известно, что $Ш_E$ сверхограничен (раз он ограничен в конечномерном пространстве), а E полно. Тогда наш $Ш_E$, будучи замкнутым и сверхограниченным в полном пространстве, компактен.

Вывод *1) ⇒ 2)* очевиден.

Докажем *2) ⇒ 3)*. Пусть, напротив, наше пространство E бесконечномерно. Возьмём $x_1 \in E$. Рассмотрим конечномерное пространство $E_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$, которое будет полно и замкнуто в E. Согласно лемме, для $\varepsilon = 1/2$ существует почти перпендикуляр x_2,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\|x_2\| = 1$, $d(x_2, E_1) > 1 - \varepsilon = 1/2$. Рассмотрим пространство $E_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Оно тоже полно, а значит, замкнуто в E. Значит, согласно лемме, для $\varepsilon = 1/2$ существует почти перпендикуляр x_3, $\|x_3\| = 1$, $d(x_3, E_2) > 1 - \varepsilon = 1/2$. Рассмотрим E_3, и так далее. Выходит, что $\forall n$ мы нашли векторы $x_n : d(x_n, E_{n-1}) > 1/2$, то есть,

$$d(x_2, x_1), \dots, d(x_n, x_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Все эти векторы лежат в единичном шаре, $x_n \in Ш_E$, но тогда $Ш_E$ не может быть сверхограниченным. Приходим к противоречию. ▶

Равностепенная непрерывность. Теорема Арцела

На этом мы закончим наше рассмотрение конечномерных пространств. Рассмотрим следующий вопрос: как узнать, является ли некоторое конкретное пространство сверхограниыенным? В качестве примера рассмотрим пространство $C[a, b]$.

Определение. *Равностепенно непрерывным* называется подмножество $M \subset C[a, b]$ такое, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta$, для любого $x \in M$,

$$\big| x(t_1) - x(t_2) \big| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Это понятие подобно понятию равномерной нерперывности, однако если в том случае речь шла об одной функции, то здесь основное неравенство выполняется для всех функций нашего множества M.

Чтобы прочувствовать это понятие, рассмотрим задачу.

Задача 66. Показать, что множество тригонометрических мономов e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ не равностепенно непрерывно.

Критерием сверхограниченности множества в $C[a, b]$ является теорема Арцелá, которую мы рассмотрим без доказательств.

Теорема 29 (Арцела). *Множество $M \subset C[a, b]$ сверхограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Рассмотрим ещё один подобный факт в виде задачи. Рассмотрим пространство l_2 и введём в нём следующее обозначение — назовём *хвостом* $\xi^{(n)}$ последовательность вида

$$\xi^{(n)} := (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots). \tag{10.3}$$

Задача 67. Показать, что $M \subset l_2$ сверхограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и когда,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\xi \in M} \|\xi^{(n)}\| = 0. \tag{10.4}$$

На этом мы закончим рассмотрение сверхограниченности.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Компактные операторы

Понятие компактного оператора

Перейдём к новой большой теме, к компактным операторам. До этого мы рассматривали компактность только на множествах, однако теперь мы покажем, что её вполне можно ввести и для операторов.

Существует много разнообразных линейных операторов. Какие из них можно считать маленькими? Наверное, те, чей образ конечномерен — раз конечномерные пространства, как мы уже показали, маленькие.

Определение. *Конечномерным* называют такой линейный оператор, чей образ конечномерен.

Однако это определение относится к линейной алгебре — а в функциональном анализе конечномерных операторов слишком мало, чтобы с ними можно было бы что-нибудь построить.

Введём некоторые обозначения. Рассмотрим линейное пространство E и его подмножества $M, N \subseteq E$, а также некоторое число $\lambda \in \mathbb{C}$. *Суммой* пространств M и N назовём

$$M + N = \{x + y \mid x \in M, y \in N\}. \tag{10.5}$$

Удлинением λM назовём

$$\lambda M = \{\lambda x \mid x \in M\}. \tag{10.6}$$

Предложение 34. *Пусть E — нормированное пространство, тогда если $M, N \subseteq E$ сверхограничены, то и $M + N$ будет сверхограничена.*

Доказательство мы рассматривать не будем ввиду его очевидности.

Предложение 35. *Пусть E — нормированное пространство, тогда $\forall \lambda$, λM сверхограничено.*

Аналогично не будем рассматривать доказательство.

Теперь введём одно из самых важных понятий в нашем курсе,

Определение. *Компактным* называют оператор $T : E \to F$, для нормированных пространств E и F, такой, что он переводит ограниченное множество в E в сверхограниченное в F.

Раньше такие операторы называли *вполне ограниченными*.

Такой оператор называют компактным потому, что если мы берём образ компактного множества, он тоже будет компактным.

Предложение 36. *T компактен тогда и только тогда, когда образ $Ш_E$ сверхограничен.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ В одну сторону это предложение очевидно как частный случай определения.

Докажем в обратную сторону. Возьмём некоторое ограниченное множество в E, а тогда оно принадлежит некоторому удлинению единичного шара $\lambda Ш_E$. Тогда

$$T(M) \subseteq T\left(\lambda Ш_E\right) = \lambda\left(T\left(Ш_E\right)\right),$$

а сверхограниченность инвариантна относительно удлинения. ▶

Пример 1. Всякий конечномерный ограниченный оператор компактен.

Как мы знаем, у конечномерного оператора конечномерный образ, а значит он отображает замкнутый единичный шар в ограниченное множество в конечномерном пространстве, которое сверхограничено.

Пример 2. Рассмотрим тождественный оператор $\mathbb{1}: E \to E$ в бесконечномерном пространстве E. Он переводит замкнутый единичный шар сам в себя, а по теореме Рисса он не будет сверхограниченным.

Отметим, что всякий компактный оператор ограничен, это достаточно очевидно. Получаем важное подмножество компактных операторов,

$$\mathscr{K}(E, F) \subset \mathscr{B}(E, F), \tag{10.7}$$

обозначение принадлежит Гротендику. Какими свойствами обладает множество компактных операторов?

Предложение 37. *$\mathscr{K}(E, F)$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{B}(E; F)$.*

◀ Докажем сперва, что сумма компактных операторов компактна. Рассматриваем единичный шар и видим, что

$$(S+T)Ш_E \subseteq S\left(Ш_E\right) + T\left(Ш_E\right),$$

а сумма двух сверхограниченных операторов тоже сврехограничена.

Компактность произведения компактного оператора на скаляр очевидна.

Теперь докажем замкнутость, то есть что если некоторый оператор S аппроксимируется компактными, то он и сам компактен, то есть, если в любой окрестности аппроксимируемого оператора можно найти компактный. Зададим $\varepsilon > 0$, а тогда существует компактный оператор T такой, что $\|S - T\| < \varepsilon/2$. Поскольку он компактен, $T\left(Ш_E\right)$ сверхограничен, а значит, существует $\varepsilon/2$-сеть $x_1, \dots, x_n$. Возьмём $x \in S(Ш_E)$, то есть, $x = Sy$, где $y \in Ш_E$, а $\|y\| \leq 1$. Рассмотрим $Ty \in T(Ш_E)$. Тогда есть k такой, что

$$\left\|x_k - Ty\right\| < \varepsilon/2.$$

Нас же интересует норма $\left\|Sy - x_k\right\|$,

$$\left\|Sy - x_k\right\| \leq \|Sy - Ty\| + \left\|Ty - x_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2}\|y\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ ▶

Следствие 10. *Если оператор аппроксимируется конечномерными, то он компактен.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предложение 38. *Пусть есть операторы $S: E \to F$ и $T: F \to G$. Рассмотрим композицию $TS: E \to G$. Тогда если хотя бы один из операторов S, T компактен, то и TS компактен.*

◀ Сперва рассмотрим случай, когда компактен S. Рассмотрим, как обычно, действие оператора на единичный шар $Ш_E$. Как мы знаем, $S\left(Ш_E\right)$ — сверхограниченное множество, а когда мы на него действуем ограниченным (равномерно непрерывным) оператором T, оно таким и остаётся.

Теперь пусть T компактен. Тогда $S\left(Ш_E\right)$ ограничен в силу ограниченности S, а далее получаем то, что ищем, в силу определения компактности. ▶

Полезно рассмотреть цикл задач на определение компактности операторов.

Особо полезно рассмотреть такую задачу.

Задача 68. Интегральный оператор T_K всегда компактен.

Указание. Если $e_m(s)$ — ортонормирванный базис в $L_2[a, b]$, то $e_m(s)e_n(t) \in L_2(\square)$ будет ортонормированным базисом в $L_2(\square)$. Отсюда нужно показать, что наш оператор T_K аппроксимируется конечномерными.

Свойство аппроксимации

Только что мы показали, что если оператор аппроксимируется конечномерными, то он компактен. Возникает вопрос, а бывает ли вообще иначе? Были предприняты разные попытки это доказать, пока за эту задачу не взялся Гротендик. Ему же принадлежит бóльшая часть терминологии, которой мы пользуемся.

Определение. Банахово пространство F обладает свойством аппроксимации, если для любого банахова пространства E любой компактный оператор $T \in \mathscr{K}(E, F)$ аппроксимируется конечномерными.

Ограниченные конечномерные операторы обозначают как

$$\mathscr{F}(E, F). \tag{10.8}$$

Нам известно, что операторы, действующие в гильбертовых пространствах, обладают свойством аппроксимации. Покажем это теперь с использованием определения.

Предложение 39. *Гильбертовы пространства обладают свойством аппроксимации.*

◀ Рассмотрим оператор T,

$$T: E \to H.$$

Нам задан некоторый $\varepsilon > 0$, тогда для $T\left(Ш_E\right)$ существует $\varepsilon/3$-сеть $y_1, \dots, y_n$. Введём подпространство

$$H \supset H_0 = \operatorname{span}\left\{y_1, \dots, y_n\right\}.$$

Поскольку это подпространство замкнуто и конечномерно, на него существует ортогональный проектор $P: H \to H_0$. Очевидно, он конечномерен. Значит, если справа его умножить на T, PT тоже будет конечномерен.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Берём $x \in Ш_E$. Для Tx существует y_k такое, что $\|Tx - y_k\| < \varepsilon/3$. Тогда рассмотрим норму разности,

$$\|Tx - PTx\| \leq \|Tx - y_k\| + \|y_k - Py_k\| + \|Py_k - PTx\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \underbrace{\|P\|}_{1} \underbrace{\|y_k - Tx\|}_{\varepsilon/3} \leq \frac{2}{3}\varepsilon,$$

а когда мы возьмём супремум по всем $x \in Ш_E$, получим

$$\|T - PT\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Компактные операторы

Свойство аппроксимации (продолжение)

В прошлый раз мы начали рассматривать одну из самых интригующих проблем математики прошлого века — свойство аппроксимации. Рассмотрим связанную с этим задачу.

Задача 69 (*). Показать, что если банахово пространство обладает базисом Шаудера, то оно обладает и свойством аппроксимации.

Итак, вернёмся к вопросу: всегда ли можно аппроксимировать конечномерными компактный оператор, действующий между двумя банаховыми пространствами. В результате проверки на разных распространённых примерах, оказалось, что всегда можно — а формально поставил проблему Гротендик: Всякое ли банахово пространство обладает свойством аппроксимации?

Гротендик ответить на этот вопрос не смог, однако он предложил несколько эквивалентных условий свойства аппроксимации.

Контрпример предложил уже упоминавшийся в нашем курсе Энфло.

Теорема 30. *Существуют банаховы пространства, в том числе некоторое замкнутое подпространство c_0, не обладающее свойством аппроксимации.*

Доказательство этой теоремы мы, естественно, не будем рассматривать. Заодно оказалось, что такое подпространство не может обладать базисом Шаудера.

Через некоторое время нашлёлся пример такого пространства и среди классических, пусть и несепарабельных пространств.

Теорема 31 (Шанковский). *Если H — конечномерное гильбертово пространство, то $\mathscr{B}(H)$ не обладает свойством аппроксимации.*

Проблема. Пусть E — банахово пространство, а любой оператор $T \in \mathscr{K}(E, E)$ обладает свойством аппроксимации. Верно ли, что E обладает свойством аппроксимации?

Компактные операторы между гильбертовыми пространствами

Как выглядят компактные операторы между произвольными пространствами, мы не знаем, как не знаем и про любые другие ограниченные. А вот если мы возьмём гильбертовы пространства, всё изменится.

Начнём, как обычно, с предварительных обозначений. Мы будем рассматривать гильбертовы пространства H, K. Возьмём два вектора, $x \in K$, $y \in H$. Введём некоторый оператор, обозначаемый $\circ$,

$$x \circ y \colon H \to K : H \ni z \mapsto \langle z, y \rangle_H \, x. \tag{11.1}$$

Иногда это сокращают как $\langle \cdot, y \rangle \, x$. Иногда ещё вместо $\circ$ пишут знак тензорного произведения $\otimes$, но мы этого делать не будем.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отметим сразу, что размерность образа этого оператора,

$$\dim \operatorname{Im} \langle \cdot, y \rangle x = 1. \tag{11.2}$$

Также очевидно, что он ограничен, так как по неравенству Коши—Буняковского,

$$(x \circ y)z \leq (\underbrace{\|x\| \, \|y\|}_{C} \, \|z\|). \tag{11.3}$$

Задача 70. Показать, что $\|x \circ y\| = \|x\| \, \|y\|$.

Задача 71. Показать, что

$$\begin{aligned} T(x \circ y) &= (Tx) \circ y, \\ (x \circ y)T &= x \circ T^\star y, \\ (x \circ y)\,(u \circ v) &= \langle u, y \rangle \,(x \circ v), \\ (x \circ y)^\star &= y \circ x. \end{aligned}$$

Задача 72. Показать, что любой одномерный ограниченный оператор представим как $x \circ y$ для некоторых x, y.

Указание. Применить теорему Рисса об описании ограниченных функционалов на гильбертовом пространстве.

Теорема Шмидта

Теперь рассмотрим теорему Шмидта, ещё одного из учеников Гильберта.

Теорема 32 (Шмидт). *Пусть T — компактный оператор, действующий между гильбертовыми пространствами $T : H \to K$; $T \neq 0$, и тогда существует конечная или бесконечная,*

1) *ортонормированная система $e'_n \in H$,*
2) *ортонормированная система $e''_n \in K$, той же мощности,*
3) *невозрастающая последовательность положительных чисел $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots > 0$ той же мощности, стремящаяся к нулю, если она бесконечна.*

При этом, оператор T представим как сумма ряда,

$$\sum_{n=1} s_n e''_n \circ e'_n, \tag{11.4}$$

сходящегося в $\mathscr{B}(H, K)$, а $\|T\| = s_1$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, попробуем разобраться, что же она означает. Как будет действовать такой оператор T на вектор x?

$$Tx = \sum_{n=1} s_n \langle x, e'_n \rangle \, e''_n.$$

Отметим, что никто не гарантирует, что этот ряд сходится абсолютно — он сходится в смысле обыкновенного ряда, то есть сходится последовательность его частичных сумм.

Рассмотрим задачу на эквивалентную формулировку теоремы Шмидта.

Задача 73. Показать, что существуют те же объекты, что и в теореме Шмидта, такие что

$$T:\ e'_n \mapsto s_n e''_n, \tag{11.5}$$

а для $x \perp \{e'_n\}$,

$$T:\ x \mapsto 0. \tag{11.6}$$

Задача заключается в том, чтобы увидеть, что её условие непосредственно следует из теоремы и доказать обратное.

Доказательство теоремы Шмидта — дело непростое, и мы увидим, что в нём есть моменты, представляющие самостоятельный интерес. Оказывается, нам понадобятся две леммы.

Лемма 5. *Существует вектор, $e \in H$, $\|e\| = 1$, такой, что*

$$\|Te\| = \|T\|. \tag{11.7}$$

◀ Согласно определению операторной нормы, существует последовательность

$$x_n \in \text{Ш}_H:\ \left\|Tx_n\right\| \to \|T\|, \text{ где, } \left\|x_n\right\| = 1.$$

Заметим, что $T(\text{Ш}_H)$ сверхограничен в силу компактности оператора, а значит, существует фундаментальная последовательность $Tx_{n_k} =: Tx_n$, а при этом рассматриваемое нами пространство полно, а значит, у этой последовательности есть предел,

$$\exists y \in k:\ y = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

и при этом, поскольку норма — непрерывная функция,

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \left\|Tx_n\right\| = \|T\|.$$

Покажем, что исходная последовательность x_n сама фундаментальна. Воспользуемся равенством параллелограмма,

$$\left\|x_m + x_n\right\|^2 + \left\|x_m - x_n\right\|^2 = 2\left\|x_m\right\| + 2\left\|x_n\right\|.$$

Чтобы последовательность была фундаментальна, нам необходимо показать, что величина $\left\|x_m - x_n\right\|^2$ мала. Умножим и поделим первое слагаемое на $\|T\|^2$,

$$\left\|x_m + x_n\right\|^2 = \frac{\|T\|^2 + \left\|x_m + x_n\right\|^2}{\|T\|^2} \geq \frac{\left\|T\left(x_m + x_n\right)\right\|^2}{\|T\|^2}.$$

Раз мы оценили снизу одно слагаемое, второе можно оценить сверху,

$$\left\|x_m - x_n\right\|^2 \leq 2 + 2 - \frac{\left\|T\left(x_m + x_n\right)\right\|^2}{\|T\|^2}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Когда $m, n \to \infty$, $Tx_n, Tx_m \to y$, а в таком случае наше выражение можно переписать,

$$\left\|x_m - x_n\right\|^2 \leq \frac{4\|y\|^2}{\|T\|^2}.$$

Поскольку оценка сверху стремится к нулю,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\|x_m - x_n\right\|^2 = 0.$$

Поскольку полно не только K, но и H, существует такой $e \in H$,

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

и притом $\|e\| = \left\|x_n\right\| = 1$. Поскольку T — непрерывный оператор, $Te = \lim Tx_n = y$, а значит,

$$\|Te\| = \|y\| = \|T\|. \qquad \blacktriangleright$$

Лемма 6. *Пусть нам задали $e \in H$, $\|e\| = 1$, $\|Te\| = \|T\|$, и также $x \in H : x \perp e$, тогда $Tx \perp Te$.*

◀ Предположим противное. Пусть $x \perp e$, но при этом $\langle Tx, Te\rangle \neq 0$. Как известно из комплексного анализа, мы можем сделать наше скалярное произведение положительным, не влияя на ортогональность. Рассмотрим $\left\|T^2\right\|\left(1 + t^2\|x\|^2\right)$ для некоторого $t > 0$. Заметим, что это то же самое, что сумма скалярных квадратов векторов e и tx, которые перпендикулярны, а тогда по теореме Пифагора,

$$\left\|T^2\right\|\left(1 + t^2\|x\|^2\right) = \|T\|^2\|e + tx\|^2 > \|T(e + tx)\|^2.$$

Заменим квадрат нормы на скалярный квадрат,

$$\left\|T^2\right\|\left(1 + t^2\|x\|^2\right) > \langle T(e + tx), T(e + tx)\rangle = \|Te\|^2 + 2t\langle Tx, Te\rangle + t^2\|Tx\|^2,$$

но $\|T\| = \|Te\|$, а тогда после сокращения получим,

$$\|T\|^2 t\|x\|^2 \geq 2\langle Tx, Te\rangle.$$

Число в правой части обязательно положительное, а t мы можем взять настолько маленьким, что неравенства не будет, и тогда придём к противоречию. ▶

Доказательство теоремы Шмидта

Перейдём к продолжению доказательства, вооружившись рассмотренными леммами.
◀ Возьмём e из леммы 5 и положим $e =: e_1'$, а $s_1 := \|T\|$. Тогда по построению мы имеем право ввести вектор e_1'',

$$e_1'' := \frac{Te}{\|T\|},$$

и обратим внимание, что $\left\|e_1''\right\| = 1 = \left\|e_1'\right\|$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Возьмём подпространство $H_1 \subset H : H_1 = \{e_1\}^\perp$. В H_1 тоже действует оператор T. Обозначим его сужение как T_1,

$$T_1 := T|_{H_1} : H_1 \to K.$$

Очевидно, что T_1 тоже компактен. Может случиться так, что оператор вдруг оказался нулевым — тогда мы построение на этом закончим, а рассмотрим этот случай мы позднее.

Пусть $T_1 \neq 0$. Применим лемму 5 к оператору T_1, а тогда существует вектор e_2',

$$e_2' : \ \|e_2'\| = 1, \|T_1 e_2'\| = \|T_1\|.$$

Положим $s_2 = \|T_1\|$. Заметим, что $s_2 \leq s_1$. Теперь введём e_2'',

$$e_2'' = \frac{T_1 e_2'}{\|T_1\|},$$

причём $\|e_2''\| = 1$. Получим, что $Te_2' = s_2 e_2''$, $\|e_2'\| = \|e_2''\| = 1$, и вспомним, что по определению пространства H_1, $e_1' \perp e_2'$. В силу этого из леммы 6 получаем, что $e_1'' \perp e_2''$.

Полагаем $H_2 := \{e_1, e_2\}^\perp$ и T_2,

$$T_2 := T|_{H_2} : H_2 \to K.$$

Опять же, если $T_2 = 0$, то процесс закончен, а мы рассмотрим случай, когда это не так — снова пользуемся леммой 5, которая нам обеспечивает вектор e_3',

$$e_3' : \ \|e_3'\| = 1, \|Te_3'\| = \|T_2 e_3'\| \ \|T_2 e_3'\| = \|T_2\| =: s_3.$$

Введём вектор e_3'',

$$e_3'' = \frac{T_2 e_3'}{\|T_2\|},$$

причём $\|e_3''\| = 1$. e_1', e_2' и e_3' попарно ортогональны, и притом $Te_3' = s_3 e_3''$. Теперь снова воспользуемся леммой 6 и получим, что e_1'', e_2'' и e_3'' также попарно ортогональны.

Подведём подитог — мы получили ортогональную систему $e_1', e_2', e_3' \in H$, ортонормированную систему $e_1'', e_2'', e_3'' \in K$, и две константы $s_1 \geq s_2 \geq s_3$. Что делать дальше? Снова берём $H_3 := \{e_1, e_2, e_3\}^\perp$ и T_3,

$$T_3 := T|_{H_3} : H_3 \to K.$$

Опять же, если $T_3 = 0$, то процесс закончен, а мы рассмотрим случай, когда это не так — снова пользуемся леммой 5, которая нам обеспечивает вектор e_4', и путём аналогичных рассуждений получаем e_4'' и s_4.

Предположим, что T_{n-1} ещё отлично от нуля — тогда в результате такого рассуждения озникают ортонормированные системы $e_1', \dots, e_n' \in H$, $e_1'', \dots, e_n'' \in K$ и числа $s_1 \geq \dots \geq s_n > 0$ такие, что $Te_k'' = s_k e_k''$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Проведём теперь ещё одно вспомогательное рассуждение: пусть есть некоторое пространство H, в котором есть подпространство $\operatorname{span}\left\{e_1', \dots, e_n'\right\}$. Согласно теореме об ортогональном дополнении,

$$H = \operatorname{span}\left\{e_1', \dots, e_n'\right\} \oplus \left(\operatorname{span}\left\{e_1', \dots, e_n'\right\}\right)^{\perp}.$$

Обратим внимание на второе слагаемое — что это за пространство? Можно заметить, что это подпространство H_n, как мы вводили. Вспомним определение прямой суммы, согласно которому $\forall x \in H$,

$$\exists! y \in \operatorname{span}\left\{e_1', \dots, e_n'\right\}, z \in H_n : \ y + z = x.$$

Введём вспомогательный оператор S_n,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} s_k e_k'' \circ e_k'.$$

Легко видеть, что эта сумма — это частичная сумма ряда из условия теоремы.

Тут нам понадобится ещё одна лемма.

Лемма 7. $\forall x \in H, (T - S_n)x = T_n z$, *где все обозначения соответствуют введённым в ходе доказательства.*

◀ Возьмём произвольный $l \in \{1, \dots, n\}$. Что такое будет $S_n e_l'$?

$$S_n e_l' = \sum_{k=1}^{n} s_k \left\langle e_k'', e_k' \right\rangle e_k'' e_l' = s_l e_l'' = T\left(e_l'\right).$$

Не забудем отметить, что $y \in \operatorname{span}\left\{e_l', l = 1, \dots, n\right\}$. Из взятия такой линейной комбинации следует, что $S_n(y) = T(y)$. Иными словами, $\left(T - S_n\right) y = 0$, а это значит, что

$$\left(T - S_n\right) x = \left(T - S_n\right) z = Tz - \sum_{k=1}^{n} s_k \left\langle z, e_k' \right\rangle e_k'' e_l' = 0,$$

так как $\forall k, z \perp e_k'$.

Выходит,

$$S_n(z) = 0 \Rightarrow \left(T - S_n\right) x = Tz = T_n z,$$

по выбору z. ▶

Вернёмся к доказательству теоремы Шмидта.

Итак, пока мы рассуждали до введения леммы, мы упоминали, что будем действовать особенным образом, если $\exists n : \ T_{n-1} \neq 0 \wedge T_n = 0$.

Если такое n существует, то согласно лемме 7, $T = S_n$, а сумма будет конечной,

$$T = \sum_{k=1}^{n} s_k e_k'' \circ e_k'.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если же такого n нет, то системы e'_k, e''_k и s_k будут бесконечными,

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e''_k \circ e'_k.$$

Нужно доказать, что $s_n \to 0$. Заметим, что s_n — убывающая последовательность положительных чисел. Согласно теореме Больцано, у неё есть предел, $\theta := \lim s_n$, а также отметим, что $\theta = \inf s_n$. Спросим себя, чему равно $d\left(Te'_m, Te'_n\right)$ для достаточно больших m, n. Заметим, что

$$d\left(Te'_m, Te'_n\right) = \left\|s_m e''_m - s_n e''_n\right\| = \sqrt{\left\|s_m e''_m\right\|^2 + \left\|-s_n e''_n\right\|^2} = \sqrt{s_m^2 + s_n^2} \geq \sqrt{2}\theta.$$

Видим, что $\theta > 0 \Rightarrow d\left(Te'_m, Te'_n\right) \nrightarrow 0$.

Рассмотрим образ единичного шара $T(\text{Ш}_H)$, содержащий векторы Te'_m, Te'_n. $\theta > 0$ влечёт, что $T(\text{Ш}_H)$ не сверхограничен, а значит, T не компактен, что противоречит условию теоремы.

Согласно лемме 7, если для $x \in H$, где

$$H = \underbrace{\operatorname{span}\left\{e'_1, \dots, e'_n\right\}}_{\ni y} \oplus \underbrace{H_n}_{\ni z},$$

можно представить x как $x = y + z$, то для вспомогательного оператора S_n,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} s_k e''_k \circ e'_k,$$

получим $\left(T - S_n\right) x = T_n z$. Что же это нам даёт? Обратим внимание на норму оператора $T - S_n$. Возьмём $x \in \text{Ш}_H$,

$$\left\|\left(T - S_n\right) x\right\| = \left\|T_n z\right\| \leq \left\|T_n\right\| \|z\| \leq \left\|T_n\right\| \|x\|.$$

Взяв $\sup x$, получим, что

$$\left\|T - S_n\right\| \leq \left\|T_n\right\| = s_n,$$

а мы только что доказали, что $\lim s_n = 0$.

Таким образом получаем, что оператор T есть предел частичных сумм S_n пространстве $\mathscr{B}(H, K)$, а значит, это и есть сумма ряда,

$$T = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n T_n.$$

▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12

Компактные операторы

Компактные операторы и гильбертово сопряжение

Очевидно, можно было бы воспользоваться теоремой Шмидта и для того, чтобы показать, что гильбертово сопряжённый к компактному оператору, действующему между двумя гильбертовыми пространствами, тоже сопряжён — однако эта теорема слишком сильна, и мы докажем этот факт без неё.

Предложение 40. *Сопряжённый к конечномерному оператору сам конечномерен.*

◀ Рассмотрим оператор T,

$$T : H \to K,$$

и сопряжённый к нему оператор $T^\star$,

$$T^\star : K \to H.$$

Мы помним, что для сопряжённых операторов верно, что

$$\operatorname{Ker} T^\star = (\operatorname{Im} T)^\perp .$$

Замыкание в данном случае можно не писать хотя бы потому, что образ конечномерен.

Пространство K мы можем представить как прямую сумму,

$$K = (\operatorname{Im} T) \oplus (\operatorname{Im} T)^\perp = (\operatorname{Im} T) \oplus \left(\operatorname{Ker} T^\star\right).$$

Применим сопряжённый оператор — всё его ядро обратится в нуль, и останется только конечномерный образ, который, очевидно, конечномерен,

$$T(K) = T(\operatorname{Im} T).$$ ▶

Следствие 11. *Сопряжённый к компактному оператору сам компактен.*

◀ Вспомним, что гильбертовы пространства обладают свойством аппроксимации, а значит,

$$T = \lim T_n,$$

где T_n конечномерен. Тогда $T^\star$, так как сопряжение непрерывно,

$$T^\star = \lim T_n^\star,$$

а раз оператор аппроксимируется конечномерными, то он компактен. ▶

Как видим, для доказательства этого несложного факта вовсе не нужно использовать такое тяжёлое оружие, как теорему Шмидта. Но теперь мы всё-таки о ней вспомним, потому что оказывается, что с её помощью можно записать сопряжённый оператор в явном виде.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предложение 41. *Если оператор T разлагается в ряд Шмидта как*

$$T = \sum_{n=1} s_n e''_n \circ e'_n, \tag{12.1}$$

то гильбертово сопряжённый к нему оператор $T^\star$ будет разлагаться в ряд Шмидта как

$$T^\star = \sum_{n=1} s_n e'_n \circ e''_n. \tag{12.2}$$

◀ В самом деле, как мы уже показывали,

$$\left(e''_n \circ e'_n\right) = e'_n \circ e''_n,$$

а гильбертово сопряжение аддитивно и непрерывно, то есть,

$$T^\star = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} s_k e''_k \circ e'_k\right)^\star = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \overline{s}_k \left(e'_k \circ e''_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} s_n e'_n \circ e''_n.$$

Отсюда, очевидно, тоже следует, что сопряжённый к компактному оператору также компактен. ▶

Теорема Гильберта—Шмидта

Из курса линейного анализа мы считаем известным следующий факт.

Предложение 42. *Если $T : H \to H$ — самосопряжённый оператор, то все его собственные значения $\lambda \in \mathbb{R}$, а его собственные векторы с различными собственными значениями ортогональны.*

Задача 74. Показать, что если $H_0 \subset H$ инвариантно для T, то $H_0^\perp$ инвариантно для $T^\star$.

Напомним, что инвариантным подпространством называют подпространство, замкнутое относительно T.

Следствие 12. *Если T самосопряжён, то из инвариантности H_0 следует инвариантность его ортогонального дополнения $H_0^\perp$.*

Зададимся вопросом, а что нам вообще может дать самосопряжённость оператора, действующего из H в него же. Рассмотрим на этот счёт теорему.

Теорема 33 (Гильберт—Шмидт). *Если H — это сепарабельное гильбертово пространство, а $T : H \to H$ — компактный и самосопряжённый оператор, то в H существует ортонормированный базис e_n, состоящий из собственных векторов оператора T. При этом, если взять собственные значения, $Te_n = \lambda_n e_n$, то $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\lambda_n \to 0$. Вдобавок, норма $\|T\| = \max\left|\lambda_n\right|$.*

Отметим, что лекторы по функциональному анализу делятся на две школы — одни доказывают вначале теорему Шмидта, а потом из неё выводят теорему Гильберта—Шмидта, а другие делают наоборот. Оба подхода имеют полное право на существование.

Прежде чем доказывать, рассмотрим задачу для лучшего понимания содержания теоремы.

Задача 75. Показать, что условие теоремы Гильберта—Шмидта эквивалентно равенству для некоторого ортонормированного базиса $e_n \in H$,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \circ e_n, \tag{12.3}$$

где $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\lambda_n \to 0$.

◀ Во-первых, как и в теореме Шмидта, будем считать, что $T \neq 0$, потому что иначе всё тривиально. Вспоминаем теорему Шмидта — у нас есть две ортонормированные системы e'_n и e''_n, s-числа s_n и оператор T,

$$T: \ e'_n \mapsto s_n e''_n.$$

Мы помним также, как действует сопряжённый оператор $T^\star$, который в данном случае равен исходному,

$$T^\star: \ e''_n \mapsto s_n e'_n.$$

Это приводит нас к следующей мысли: введём векторы e_n^+ и e_n^-,

$$\begin{aligned} e_n^+ &:= e'_n + e''_n, \\ e_n^- &:= e'_n - e''_n. \end{aligned}$$

Заметим, что $Te_n^+ = s_n e''_n$, а $Te_n^- = -s_n e'_n$, то есть, оба этих вектора собственные (или равны нулю), но соответствуют разным собственным значениям. Очевидно, что

$$e'_n = \frac{1}{2}\left(e_n^+ + e_n^-\right); e''_n = \frac{1}{2}\left(e_n^+ - e_n^-\right).$$

Заметим также, что векторы e_n^+ и e_n^- не могут быть равны 0 одновременно.

Мы знаем, что числа s_n не возрастают, но никто не гарантирует, что $s_1 \neq s_2$. Вообще говоря, их последовательность может иметь такой вид,

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{n_1} > s_{n_1+1} = s_{n_1+2} = \dots = s_{n_2} > s_{n_2+1} \dots$$

Введём конечномерные подпространства,

$$L_1^+ = \operatorname{span}\left\{e_1^+, \dots, e_{n_1}^+\right\}.$$

Заметим, что любой вектор из L_1^+ — собственный, причём с тем же значением, что и векторы $e_1^+, \dots, e_{n_1}^+$.

$$L_1^- = \operatorname{span}\left\{e_1^-, \dots, e_{n_1}^-\right\}.$$

Для любого вектора e из этого пространства, $Te = -s_1 e$.

$$\begin{aligned} L_2^+ &= \operatorname{span}\left\{e_{n_1+1}^+, \dots, e_{n_2}^+\right\}, \\ L_2^- &= \operatorname{span}\left\{e_{n_1+1}^-, \dots, e_{n_2}^-\right\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получается счётное множество конечномерных (или нулевых) пространств, все из которых нулевыми быть не могут. Возьмём в каждом из них по ортонормированному базису. Введём пространство H_0 следующим образом,

$$H_0 := \operatorname{span}\left\{L_k^{\pm}, k = 1, 2, \dots\right\}.$$

Оно незамкнуто, но это нам пока что не помешает, потому что его ортогональное дополнение H_∞ будет замкнуто. В H_∞ тоже возьмём ортонормированный базис. Объединяя теперь все векторы взятых базисов и произвольно их перенумеровывая, получаем ортонормированную систему e_n.

Обратим внимание, что система e_n тотальна, а значит, может называться ортонормированным базисом — для этого вспомним критерий тотальности системы векторов в гильбертовом пространстве: если есть вектор, ортогональный всем векторам системы, то он нулевой. В самом деле, возьмём такой x, который будет ортогонален всем $L_k^{\pm}$, то есть, $x \perp H_0$, а тогда $x \in H_\infty$, но $H \perp H_\infty$. Значит, $x = 0$, а мы построили ортонормированный базис.

Вспомним теперь, как на наши векторы действует оператор T. Если $e_k \in L_k^{\pm}$, то $Te_k = \pm S_{n_k+1} e_n$, а тогда e_n — собственный вектор с действительным собственным значением. Если же $e_n \in H_\infty$, то это собственный вектор с $\lambda_n = 0 \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\lambda_n \to 0$. Воспользуемся здравым смыслом: выпишем последовательность собственных значений,

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots .$$

Мы помним, что векторы перенумерованы произвольно, но мы также понимаем, что рано или поздно, двигаясь по ним, мы встретим первый вектор пространства L_1^+, рано или поздно попадётся второй, и так далее. Выходит, что если n достаточно велико, то векторы из $L_1^+, L_1^-, \dots, L_m^-$ нам уже встретились и e_n попадает либо в одно из пространств $L_{m+1}^{\pm}, L_{m+2}^{\pm}, \dots$, либо в H_∞. Так или иначе, λ_n — это либо $\pm s_{n_m+1}, \pm s_{n_m+2}, \dots$, либо 0. Поскольку $s_n \to 0$, то и $\lambda_n \to 0$.

Наконец, по теореме Шмидта $\|T\| = s_1$, а это и есть $\max\left|\lambda_n\right|$. ▶

Существует много разных следствий этой теоремы.

Рассмотрим, в том числе, следующую интересную задачу. Как мы уже обсуждали, найти норму оператора неопределённого интегрирования в пространстве $C[0, 1]$ совершенно несложно, на $L_1[0, 1]$ тоже несложно, хотя и немного сложнее, а вот на $L_2[0, 1]$ — это достаточно непростая задача. Мы уже говорили о том, какой у неё будет ответ, а с рассмотренными к этому моменту фактами к ней вполне можно подойти и ради решения.

Задача 76. Найти норму оператора неопределённого интегрирования на $L_2[0, 1]$.

Ответ. $2/\pi$.

Указание. Оператор неопределённого интегрирования T можно представить в виде $T = US$, где U — унитарный оператор, а S — компактный и самосопряжённый, а как найти норму такого оператора, мы уже знаем.

Забегая вперёд, отметим, что с помощью теоремы Гильберта—Шмидта мы получили *модель* класса компактных самосопряжённых операторов. Забегая ещё более вперёд, можно сказать, что для класса просто самосопряжённых операторов тоже существует модель, однако она куда сложнее.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Унитарно-эквивалентные операторы

Мы уже говорили об отождествлении объектов функционального анализа — об изометрическом и топологическом изоморфизмах. Рассматриваемые задачи также вызвали потребность в наличии возможности отождествления операторов, то есть, тех условий, при которых мы могли бы сказать, что два оператора суть один и тот же, просто поразному заданный.

Соответствующее определение у нас уже было, называлось оно *унитарной эквивалентностью*. Напомним его.

Определение. *Унитарно эквивалентными* называют такие операторы S и T, действующие в гильбертовых пространствах $S: H \to H$ и $T: K \to K$, что существует унитарный оператор $U: H \to K$, делающий следующую диаграмму коммутативной,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & H \arrow[d, "U"] \\ K \arrow[r, "T"'] & K \end{tikzcd}$$

Для испытывающих страх перед коммутативными диаграммами отметим, что то же само можно выразить соотношением,

$$T = USU^{-1}. \tag{12.4}$$

Можно отметить, что раз оператор унитарный, то $U^{-1} = U^{\star}$, но на этом мы сейчас останавливаться не будем.

Предложение 43. *В условиях теоремы Гильберта—Шмидта оператор T унитарно эквивалентен диагональному оператору T_λ, действующему в l_2, при условии, что $\mathbb{R}\lambda_n \to 0$.*

◀ Согласно теореме Гильберта—Шмидта мы знаем, что из собственных векторов оператора можно собрать ортонормированный базис. Возьмём такой базис e_n, и у него будут свои собственные значения λ_n. В l_2 есть свой, естественный базис из ортов $\mathbb{P}^n$. Ещё у нас была очень важная теорема Рисса—Фишера, согласно которой для сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства существует единственный унитарный оператор U, который переводит векторы ортонормированного базиса одного пространства в векторы базиса другого пространства, в данном случае,

$$U: e_n \mapsto \mathbb{P}^n.$$

Рассмотрим диаграмму,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "U"'] & H \arrow[d, "U"] \\ l_2 \arrow[r, "T_\lambda"'] & l_2 \end{tikzcd}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Нужно доказать, что эта диаграмма коммутативна. Достаточно взять базис e_n и посмотреть:

$$\begin{tikzcd} e_n \arrow[r, mapsto, "T"] \arrow[d, mapsto, "U"'] & \lambda_n e_n \arrow[d, mapsto, "U"] \\ \mathbb{P}^n \arrow[r, mapsto, "T_\lambda"'] & \lambda_n \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Совпало. ▶

В таких случаях говорят, что построена *модель* компактного самосопряжённого оператора, и оказалось, что это всего-навсего диагональный оператор в пространстве l_2.

На втором курсе доказывается теорема Жордана, согласно которой операторы в конечномерном пространстве имеют жорданову форму. Как мы уже упоминали, попытки обобщить теорему Жордана на бесконечномерный случай на данный момент не увенчались успехом.

Ядерные операторы

Если мы возьмём последовательность из n чисел и потребуем, чтобы она принадлежала одному из стандартных пространств последовательностей, Возникнет класс операторов, которые называют *операторами фон Нойманна—Шеттена*. За рамки наших лекций его рассмотрение выходит. Естественно рассмотреть ещё случай $n = 2$ — что произойдёт, если мы возьмём последовательность $s_n \in l_2$? Возникающие операторы называются *операторами Гильберта—Шмидта*, и они также обладают различными замечательными свойствами. Мы же рассмотрим только случай $n = 1$, то есть, только один класс компактных операторов — *ядерные операторы*.

Определение. *Ядерным* (*trace-class*) называется компактный оператор, действующий между гильбертовыми пространствами, если последовательность чисел s_n из его разложения в ряд Шмидта принадлежит l_1.

Теорема 34. *Пусть H сепарабельно, и $T : H \to H$ — ядерный оператор, а e_n — ортонормированный базис в H, тогда ряд,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle , \tag{12.5}$$

сходится абсолютно, и его сумма не зависит от выбора базиса.

Забегая вперёд, отметим, что из этой теоремы следует, что именно такие операторы имеют след.

Представим себе, что мы находимся в конечномерном гильбертовом пространстве, и в нём нам задали ортонормированный базис. Там у операторов есть матрицы. Обратим внимание, что сумма, подобная (12.5), будет следом матрицы оператора.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Начнём доказательство, как обычно, со введения обозначений. Запишем ряд Шмидта,

$$T = \sum_{n=1} s_n e_n'' \circ e_n'.$$

Разложим векторы e_n', e_n'' в ряд Фурье. Получим, что

$$e_n' = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n', e_k \rangle e_k,$$
$$e_n'' = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n'', e_k \rangle e_k.$$

Нам понадобится для доказательства две леммы.

Лемма 8. $\langle e_n'', e_n' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n'', e_k \rangle \langle e_k, e_n' \rangle.$

Заметим, что такая сумма не может зависеть от выбора базиса в e_k.
◀ Посмотрим на левую часть и обратим внимание, что из-за непрерывности скалярного произведения,

$$\langle e_n'', e_n' \rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n'', e_k \rangle e_k, \sum_{l=1}^{\infty} \langle e_n', e_l \rangle e_l \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k,l=1}^{m} \langle e_n'', e_k \rangle \overline{\langle e_n', e_l \rangle} \langle e_k, e_l \rangle,$$

а это выражение отлично от нуля только при $k = l$, то есть,

$$\langle e_n'', e_n' \rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \langle e_n'', e_k \rangle \langle e_k, e_n' \rangle. \qquad ▶$$

Лемма 9. *Двойной ряд* $\sum_{k,n=1}^{\infty} s_n \langle e_n'', e_k \rangle \langle e_k, e_n' \rangle$ *абсолютно сходится.*

Отметим, что сходимость двойного ряда мы рассматриваем в смысле какой бы то ни было сходимости повторных рядов.
◀ Нужно рассмотреть сумму,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle e_n'', e_k \rangle\right| \left|\langle e_k, e_n' \rangle\right|.$$

Поскольку e_k — коэффициенты Фурье,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle e_n'', e_k \rangle\right|^2 = \left\|e_n''\right\|^2 = 1 < \infty.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То же самое мы знаем и про e'_n,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle e_k, e'_n\rangle\right|^2 = \left\|e'_n\right\|^2 = 1 < \infty.$$

По неравенству Коши—Буняковского,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle e''_n, e_k\rangle\right| \left|\langle e_k, e'_n\rangle\right| \leq \left\|e''_n\right\| e'_n = 1.$$

С учётом этого и того, что s_n сходится, сходится также и повторный ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle e''_n, e_k\rangle\right| \left|\langle e_k, e'_n\rangle\right|,$$

и его сумма не превосходит суммы коэффициентов s_n. ▶

Теперь, раз двойной ряд абсолютно сходится, мы сможем менять повторные суммы местами и получим то, что нам нужно. Завершим доказательство на следующей лекции.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13

Компактные операторы

Доказательство теоремы о ядерном операторе

Перейдём к завершению доказательства теоремы, которую мы начали рассматривать на прошлой лекции.

◀ Из второй леммы запишем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle e_n'', e_n' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n'', e_k \rangle \langle e_k, e_n' \rangle ,$$

и этот ряд абсолютно сходится. Значит, мы можем вставить s_n во внутренний ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle e_n'', e_n' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} s_n \langle e_n'', e_k \rangle \langle e_k, e_n' \rangle .$$

Посмотрим, что же с этим можно сделать.

Обратим внимание, что скалярное произведение линейно по первому аргументу, а значит, внутренний ряд можно переписать как

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_n \langle e_n'', e_k \rangle \langle e_k, e_n' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle s_n \langle e_k, e_n' \rangle e_n'', e_k \rangle =$$

в силу непрерывности скалярного произведения,

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} s_n \langle e_k, e_n' \rangle e_n'', e_k \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} s_n \left(e_n'' \circ e_n' \right) e_k, e_k \right\rangle =$$

в силу сходимости соответствующего ряда,

$$= \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_n e_n'' \circ e_n' \right) e_k, e_k \right\rangle = \langle T e_k, e_k \rangle .$$

Всё это время наш ряд сходился абсолютно. ▶

Введём важную терминологию: эта сумма,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle , \tag{13.1}$$

которая, как мы видим, не зависит от e_k, называется *следом оператора* T и обозначается $\operatorname{tr}(T)$. Отметим, что если ввести бесконечномерную матрицу оператора, след матрицы будет суммой её диагональных членов.

Вслед за доказательством теоремы, рассмотрим задачу.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 77. Что такое след одномерного оператора $\operatorname{tr}(x \circ y)$?

Показать, что $\operatorname{tr}(x \circ y) = \langle x, y \rangle$.

Задача 78. Показать, что для конечномерных ограниченных операторов S, T,

$$\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS). \tag{13.2}$$

Указание. Нужно проверить, что конечномерный оператор представим как сумма одномерных.

Фредгольмовы операторы

Понятие фредгольмова оператора

В функциональном анализе, как мы уже увидели, достаточно естественно появляется понятие *маленького* оператора: очевидно, что *маленький* оператор — это компактный, а вот понятие *большого* оператора нам ещё предстоит рассмотреть.

Начнём с экскурса в историю. Рассмотрим, пусть Фредгольм его и не использовал в своих работах, пространство $L_2[a, b]$, и рассмотрим некий $K \in L_2(\square)$. Какую задачу ставили себе классики? Они хотели уметь решать уравнение, когда задана функция $f(s)$, нужно найти функцию $x(s)$ такую, что

$$x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s). \tag{13.3}$$

Это, очевидно, уравнение. Со времён классиков оно называется *интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Существует, как несложно догадаться, и интегральное уравнение Фредгольма первого рода, в котором нет слагаемого $x(s)$, но оно многократно сложнее приведённого. Мы его рассматривать не будем.

Возникает два естественных вопроса:

1) При каких правых частях уравнение имеет решение?

2) Если уравнение имеет решение, то много ли их, и можно ли их все описать?

Этими вопросами и занимался Фредгольм — он и получил ответы на этот вопрос, написав на этот счёт аналитическую работу. Гильберт, прочитав её, заметил, что результат Фредгольма можно обобщить, получая несколько важных теорем функционального анализа об операторах.

Отойдём ещё раз в формализм, обратившись за терминологией к линейной алгебре. Пусть нам дан оператор,

$$S\colon\ E \to F. \tag{13.4}$$

В линейной алгебре можно рассматривать операторные уравнения вида $Sx = y$, где для данного y нужно понять, при каких x может существовать решение такого уравнения. Оказывается, что в ответе на такой вопрос помогает *однородное уравнение* по отношению к x,

$$Sx = 0. \tag{13.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Вопросы при этом задаются те же самые — найти, при каких x может существовать решение такого уравнения, и описать все его решения. Сразу ясно, что вопрос о правых частях — это вопрос об $\operatorname{Im} S$, а вопрос о единственности связан с $\operatorname{Ker} S$: если x — решение нашего уравнения, то все решения лежат в классе смежности $x + z$, $z \in \operatorname{Ker} S$.

Введём также один новый термин.

Определение. *Коядром* оператора S, $\operatorname{Coker} S$, называют,

$$\operatorname{Coker} S = F / \operatorname{Im} S. \tag{13.6}$$

Пока что мы говорили о вещах, совершенно очевидных с точки зрения алгебры. Перейдём к собственно функциональному анализу.

Определение. *Фредгольмовым* называют ограниченный оператор S между банаховыми пространствами $S : E \to F$ такой, что $\operatorname{Ker} S$ и $\operatorname{Coker} S$ конечномерны, а $\operatorname{Im} S$ замкнут.

Смысл этого определения в том, что этот оператор *большой* — его образ заполняет почти всё пространство, и не хватает ему только конечного числа векторов. Это своего рода антикомпактный оператор.

Оказывается, здесь было дано одно лишнее условие. Проверим это с помощью задачи.

Задача 79. Показать, что для любого ограниченного оператора S,

$$\dim \operatorname{Coker} S < \infty \Rightarrow \operatorname{Im} S \text{ замкнут}. \tag{13.7}$$

Отметим, что из этого утверждения следует, что если вдруг образ оператора незамкнут, то он точно не будет фредгольмовым.

Указание. Рассмотреть разумную норму в $E / \operatorname{Ker} S \oplus \mathbb{C}^n$, где $s = \dim \operatorname{Coker} S$ и применить к нему теорему Банаха об обратном операторе.

Сделаем ещё одно почти алгебраическое наблюдение, призванное облегчить нашу жизнь в дальнейшем.

Предложение 44. *Если F — гильбертово пространство, и $\operatorname{Im} S$ замкнуто, то естественный эпиморфизм (проекция)*

$$\tau : F \to F / \operatorname{Im} S : y \mapsto y + \operatorname{Im} S, \tag{13.8}$$

устанавливает линейный изоморфизм между $(\operatorname{Im} S)^\perp$ *и* $\operatorname{Coker} S$.

◀ В самом деле, по теореме об ортогональном дополнении,

$$F = \operatorname{Im} S \oplus (\operatorname{Im} S)^\perp,$$

и если вдруг $y \in (\operatorname{Im} S)^\perp$ и $\tau(y) = 0$, то $y \in \operatorname{Im} S$, потому что иначе $\dot{y} = 0$. Значит, оператор инъективен.

Почему же оператор сюръективен? Возьмём класс смежности $\dot{y} \in \operatorname{Coker} S$, представитель которого z обязательно должен лежать в $\operatorname{Im} S$. Получается тогда, что

$$\tau(y) = \{y + \operatorname{Im} \tau\} \ni y + z,$$

а тогда класс смежности — это $\{y + z + \operatorname{Im} \tau\} = \dot{y}$. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Первая теорема Фредгольма

Теперь введём специальный класс операторов, которые, как мы увидим, связан с интегральными уравнениями второго рода, и они окажутся фредгольмовыми.

Теорема 35 (Фредгольм, 1-ая). *Возьмём оператор $S: H \to H$, где H — гильбертово пространство, в котором взяли $T \in \mathscr{K}(H)$. Тогда $S = \mathbb{1}_H - T$ — фредгольмов.*

◀ Обозначим подпространство $H_1 := \operatorname{Ker} S$. Тогда $0 = Sx = x - Tx$, а значит, $T|_{H_1} = \mathbb{1}_H$, но T ещё и компактен, а значит, согласно теореме Рисса, H_1 конечномерно, а значит,

$$\dim \operatorname{Ker} S < \infty.$$

С ядром разобрались, а вот доказать конечномерность коядра значительно сложнее. Возьмём $y \in (\operatorname{Im} S)^-$. Нужно доказать, что для какого-нибудь $x \in H$, $y = Sx$ — то есть, сперва мы докажем, что образ нашего оператора замкнут.

Раз $y \in (\operatorname{Im} S)^-$, то

$$\exists x_n' \in H: \ y = \lim_{n\to\infty} Sx_n'.$$

Воспользовавшись теоремой об ортогональном дополнении, разложим,

$$H = \operatorname{Ker} S \oplus (\operatorname{Ker} S)^\perp.$$

Рассмотрим x_n как проекцию x_n' на $(\operatorname{Ker} S)^\perp$. Сразу же видим, что $Sx_n' = Sx_n$, а таким образом,

$$y = \lim_{n\to\infty} Sx_n.$$

Поскольку последовательность Sx_n сходится, она ограничена. Рассмотрим лемму.

Лемма 10. *x_n — ограниченная последовательность.*

◀ Пусть x_n не ограничена. Тогда переходя к подпоследовательности последовательности x_n, можем считать, что $\|x_n\| \to \infty$. Пронормируем такую последовательность,

$$x_n^0 := \frac{1}{\|x_n\|} x_n,$$

а поскольку наш оператор S однороден,

$$Sx_n^0 = \frac{1}{\|x_n\|} Sx_n.$$

Заметим, что Sx_n ограничена, а норма $\|x_n\| \to \infty$, а тогда,

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n^0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n\|} Sx_n = 0.$$

Вспомним определение S и заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n^0 = \lim_{n\to\infty} x_n^0 - Tx_n^0 = 0,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а поскольку оператор T компактен и $x_n^0 \in Ш_H$, Tx_n^0 имеет фундаментальную подпоследовательность. Будем считать, что $Tx_n^0 \to z \in H$, а значит, $x_n^0 \to z$. Но мы брали $x_n^0 \in (\operatorname{Ker} S)^\perp$, которое замкнуто, а значит, $z \in (\operatorname{Ker} S)^\perp$. Вспоминаем, что нормы всех векторов $\|x_n^0\| = 1$, и тогда $\|z\| = 1$.

С другой стороны,

$$Sz = \lim_{n\to\infty} Sx_n^0 = 0,$$

а значит, $z \in \operatorname{Ker} S$. Выходит, что $z = 0$, а значит, мы пришли к противоречию. ▶

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Как мы получили, x_n ограничена. Помним, что

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n' = y.$$

Значит, $x_n - Tx_n \to y$, но T компактен, а x_n — ограниченная последовательность, и тогда Tx_n фундаментальна, а значит, сходится в нашем гильбертовом пространстве. Выходит, что $Tx_n \to y \in H$. Тогда $x_n = Sx_n + Tx_n$, $x_n \to y + u$, а $Sx_n \to Sy + Su$. Вспомним, что мы уже получали, что $Sx_n \to y$, а тогда получается, что $y = Sy + Su = S(y + u)$. Вот мы и нашли вектор из пространства H, применив к которому оператор мы можем получить y. Мы доказали замкнутость образа.

Отметим, что это не всё, что мы хотели доказать. Вспомним, что $\operatorname{Coker} S$ изоморфно $(\operatorname{Im} S)^\perp$, а значит, нам достаточно доказать, что размерность ортогонального дополнения конечна,

$$\dim(\operatorname{Im} S)^\perp < \infty.$$

Вспомним, что $(\operatorname{Im} S)^\perp = \operatorname{Ker} S^\star$, и заметим, что сопряжённый к S оператор будет следующим,

$$S^\star = \mathbb{1}^\star - T^\star,$$

но $T^\star$, как и T, компактен, а тогда $\dim \operatorname{Ker} T^\star < \infty$. ▶

Альтернатива Фредгольма

Это была первая теорема Фредгольма. Есть ещё две.

Теорема 36 (альтернатива Фредгольма). *Оператор $S = \mathbb{1} - T$, где T компактен, инъективен тогда и только тогда, когда он сюръективен.*

◀ Пусть напротив, пусть S инъективен, но не сюръективен. Тогда $\operatorname{Ker} S = 0$, $\operatorname{Im} S \subset H$. Обозначим $H_1 := \operatorname{Im} S$, а $H_2 = S(H_1)$.

Лемма 11. $H_2 \subset H_1$.

◀ Возьмём вектор $x \in H \setminus H_1$. Утверждается, что хотя $Sx \in H_1$, он не принадлежит H_2. Если бы это было не так, то $Sx = Sy$, где $y \in H_1$, но тогда $x \neq y$, а оператор S инъективен. ▶

Лемма 12. *H_2 замкнуто (H_1 замкнуто согласно первой теореме Фредгольма).*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ Возьмём $x \in H_1$. Очевидно, $Sx \in \operatorname{Im} S = H_1$, а значит, существует сужение,

$$S|_{H_1} = S_1 : H_1 \to H_1,$$

действующее так же, как и S. Для того же x получается, что $S_1 x = \mathbb{1} - Tx = x - Tx$, а значит, $Tx = x - S_1 x$, $Tx \in H_1$, и отсюда существует сужение,

$$T|_{H_1} = T_1 : H_1 \to H_1,$$

действующее так же, как и T. Очевидно, T_1 тоже компактен, значит, образ $\operatorname{Im} S_1$ замкнут, а $S_1(H_1) = S(H_1) = H_2$. ▶

Вернёмся к доказательству теоремы. Мы применили S к H_1, получив замкнутое собственное подпространство H_2. Рассмотрим обе доказанные леммы для H_1 вместо H, S_1 вместо S и T_1 вместо T. Тогда положив $H_3 = S_1(H_2) = S(H_2)$, согласно леммам H_3 будет замкнутым собственным подпространством в H_2.

Продолжая, получаем целую последовательность подпространств,

$$H_1 \subset H_2 \subset \cdots ,$$

где каждое $H_{n+1} = S(H_n)$ замкнуто и не совпадает с H_n.

Выберем $x_n \in H_n$ такой, что $x \perp H_{n+1}$ и что $\|x\| = 1$. Вспомним, что применяя компактный оператор $T(\text{Ш}_H)$, мы получим сверхограниченное множество. Проверим, каковым будет расстояние между построенными таким образом векторами $d(Tx_n, Tx_m)$ (пусть $m < n$).

$$Tx_m - Tx_n = (x_m - Sx_m)(x_n - Sx_n) = x_m + \underbrace{(Sx_n - Sx_m - x_n)}_{y}.$$

Обратим внимание на вектор y. Прежде всего мы видим, что $Sx_n \in H_{n+1} \subset H_{m+1}$, то есть $Sx_n \perp x_m$. Посмотрим на второе слагаемое и заметим, что $Sx_m \in H_{m+1}$, $Sx_m \perp x_m$. Третье слагаемое, аналогично, даст нам, что $x_n \in H_n \subset H_{m+1}$, а значит, $x_n \perp x_m$. Раз все три слагаемых ортогональны x_m, то $y \perp x_m$. Воспользуемся теоремой Пифагора, согласно которой,

$$\left\|Tx_m - Tx_n\right\|^2 = \left\|x_m\right\|^2 + \|y\|^2 \geq \left\|x_m\right\|^2 = 1.$$

Получилось, что $d(Tx_m, Tx_n) \geq 1$, что противоречит сверхограниченности множества.

Мы доказали только одну импликацию — осталась вторая. Воспользуемся снова приёмом перехода к сопряжённому оператору. Мы знаем, что $\operatorname{Im} S = H$, и нужно показать, что $\operatorname{Ker} S = 0$. Рассмотрим $S^\star = \mathbb{1}^\star - T^\star$, который тоже компактен, и значит, $\operatorname{Ker} S^\star = (\operatorname{Im} S)^\perp = 0$, а значит, $S^\star$ сюръективен,

$$\overline{\operatorname{Im} S^\star} = \operatorname{Im} S^\star = H,$$

а значит, $(\operatorname{Ker} S)^\perp = H$, то есть, $\operatorname{Ker} S = 0$. ▶

Отметим, что такой оператор S иногда называют *компактным возмущением тождественного оператора*.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14

Фредгольмовы операторы

Третья теорема Фредгольма

Снова рассмотрим компактное возмущение тождественного оператора, и мы уже знаем, что оно фредгольмово, а значит, мы можем говорить о его индексе.

Определение. *Индексом* $\operatorname{Ind} T$ фредгольмова оператора T называют число,

$$\operatorname{Ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T. \tag{14.1}$$

Теорема 37 (Фредгольм, 3-ья). *Если взять компактное возмущение тождественного оператора $S = \mathbb{1} - T$, то его индекс* $\operatorname{Ind} S$ *равен нулю.*

Заметим, что альтернатива Фредгольма является частным случаем этой теоремы.

Это значит, что,

$$\dim \operatorname{Ker} S = \dim \operatorname{Coker} S = \dim (\operatorname{Im} S)^{\perp}. \tag{14.2}$$

◀ Пусть $\dim \operatorname{Ker} S \leq \dim(\operatorname{Im} S)^{\perp}$.

Имеем два конечномерных пространства, $\operatorname{Ker} S$ и $\operatorname{Im} S$, а тогда существует инъективный оператор $R\colon\ \operatorname{Ker} S \to (\operatorname{Im} S)^{\perp}$. Введём инъективный оператор $\hat{S}$,

$$\hat{S}x = Ry + Sz,$$

где

$$H = \underbrace{\operatorname{Ker} S}_{\ni y} \oplus \underbrace{(\operatorname{Ker} S)^{\perp}}_{\ni z}.$$

В доказательстве этой теоремы нам потребуется рассмотреть пару лемм.

Лемма 13. *Оператор $\hat{S}$ инъективен.*

◀ В самом деле, пусть $\hat{S}x = 0$, что мы тогда можем сказать о x? Например, очевидно, что $Ry = -Sz$. По определению, $Ry \perp \operatorname{Im} S$, а $-Sz \in \operatorname{Im} S$, и выходит, что они оба равны нулю.

R инъективен, а значит, из его равенства нулю следует, что $y = 0$. $Sz = 0$, а тогда $z \in \operatorname{Ker} S$. При этом, согласно определению $z \in \operatorname{Ker} S$. Значит, и $x = 0$. ▶

Лемма 14. *Оператор $\hat{S}$ представим как $\mathbb{1} - V$, где V компактен.*

◀ Рассмотрим конечномерный проектор на ядро,

$$P := P_{\operatorname{Ker} S}.$$

Заметим, что $V = \mathbb{1} - S = (\mathbb{1} - \hat{S})P + (\mathbb{1} - \hat{S})(\mathbb{1} - P)$. Посмотрим на эти два слагаемых и обратим внимание, что $(\mathbb{1} - \hat{S})P$ очевидно компактен как произведение справа на компактный, а о $(\mathbb{1} - \hat{S})(\mathbb{1} - P)$ ещё нужно порассуждать.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Возьмём произвольный $x \in H$. Он представим в виде суммы, $x = u + v$, где $u \in \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} S$, а $v \perp \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} S$. Применим к этому вектору оператор $(\mathbb{1} - P)$,

$$(\mathbb{1} - P)x = x - u = v \perp \operatorname{Ker} S,$$

а по определению $\hat{S}$,

$$\hat{S}(\mathbb{1} - P)x = S(\mathbb{1} - P)x,$$

а тогда мы можем написать, добавляя в рассмотрение и второе слагаемое,

$$(\mathbb{1} - S)(\mathbb{1} - P)x = T(\mathbb{1} - P)x,$$

а T компактен, значит, V — сумма двух компактных операторов, то есть, он компактен. ▶

Зачем мы всё это делали? Теперь мы можем применить к инъективному оператору $\hat{S}$ альтернативу Фредгольма, согласно которой, $\hat{S}$ сюръективен.

Продолжаем доказательство. Мы рассматривали инъективный оператор R,

$$R: \ \operatorname{Ker} S \to (\operatorname{Im} S)^{\perp}.$$

Нужно показать, что $(\operatorname{Im} R)^{\perp} = 0$. Возьмём $u \in (\operatorname{Im} R)^{\perp}$. Раз $\hat{S}$ сюръективен,

$$u = \hat{S}x = Ry + Sz,$$

а раз $u \in (\operatorname{Im} R)^{\perp}$, $u \perp Ry$. Про второе слагаемое можно сказать, что раз по определению оператора R $u \in (\operatorname{Im} S)^{\perp}$, $u \perp Sz$. Выходит, что $u \perp u$, а значит, $u = 0$.

Но никто нам не гарантирует, что не верно обратное. Пусть $\dim \operatorname{Ker} S \geq \dim(\operatorname{Im} S)^{\perp}$. Снова рассмотрим сопряжённые операторы, тогда получим,

$$\dim \left(\operatorname{Im} S^{\star}\right)^{\perp} \geq \dim \operatorname{Ker} S^{\star},$$

но сопряжённые операторы мало отличаются от исходных, а значит, в этом неравенстве тоже можно поставить знак $\leq$. ▶

Традиционная формулировка теоремы Фредгольма

Обратим внимание, что Фредгольм получил другой результат, что неудивительно для аналитической работы. Приведём его формулировку теоремы и покажем, что её результат действительно следует из рассмотренных теорем, носящих его имя.

Теорема 38 (Фредгольм, традиционная формулировка). *Рассмотрим пространство $L_2[a, b]$ и неоднородное уравнение Фредгольма второго рода,*

$$x(s) - \int_b^a K(S, t)x(t)\,dt = y(s), \tag{14.3}$$

Фредгольм предложил вместе с ним рассматривать и однородное уравнение,

$$x(s) - \int_b^a K(S, t)x(t)\,dt = 0. \tag{14.4}$$

Тогда верны следующие три утверждения,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) *Существует конечный набор линейно независимых функций,*

$$x_1(s), \dots, x_n(s) \in L_2[a, b], \tag{14.5}$$

являющихся решениями однородного уравнения, причём всякое решение однородного уравнения есть линейная комбинация этих функций.

2) *Существует ещё один конечный набор линейно независимых функций,*

$$z_1(s), \dots, z_n(s) \in L_2[a, b], \tag{14.6}$$

таких, что правые части неоднородного уравнения, для которых есть хотя бы одно решение — это в точности те функции, для которых, $\forall k$,

$$\int_a^b y(t)\overline{z_k(t)}\,dt = 0. \tag{14.7}$$

3) $m = n$.

Не слишком сложно увидеть, что эта теорема является следствием рассмотренных нами только что абстрактных теорем Фредгольма. Возьмём $K(s, t)$ и рассмотрим соответствующий ему интегральный оператор T_K ($K = K(s, t)$), и тогда рассмотренное неоднородное уравнение — это $\left(\mathbb{1} - T_K\right) x = y$, а однородное уравнение — это $\left(\mathbb{1} - T_K\right) x = 0$.

Рассуждая, заметим, что решение *1)* — это функции в точности из $\operatorname{Ker} S$, T_K компактен, а значит, согласно первой тероеме Фредгольма $\operatorname{Ker} S$ конечномерно, а тогда в нём есть базис $x_1(s), \dots, x_n(s)$, векторы которого линейно независимы, и их линейные комбинации покрывают всё ядро.

Заметим также, что решению *2)* соответствует $\operatorname{Im} S$, чьё ортогональное дополнение $(\operatorname{Im} S)^\perp = \operatorname{Coker} S$ тоже конечномерно, и в нём можно тоже взять базис, $z_1(s), \dots, z_m(s)$, и при этом для $y \in \operatorname{Im} S$, $y \perp (\operatorname{Im} S)^\perp$, а значит, $y \perp z_1(s), \dots, z_m(s)$. В нашем конкретном пространстве ортогональность и означает, что

$$\int_a^b y(t)\overline{z_k(t)}\,dt = 0.$$

Пункт *3)* же в точности соответствует третьей теореме Фредгольма.

Фредгольмовы операторы в банаховых пространствах

Сейчас мы работали в гильбертовом пространстве, которое, как мы знаем, очень хорошее. В банаховом пространстве верны все те же три теоремы, только с доказательством придётся больше возиться, поэтому мы рассматривали доказательства только для гильбертова пространства.

Возникает, однако, вопрос — верно ли, что для произнольного банахова пространства индекс тоже может принимать любые целочисленные значения? Оказалось, что нет, не может. Мы рассмотрим соответствующий результат без доказательства.

Теорема 39 (Аргирос—Хойден). *Существуют банаховы пространства, любой ограниченный оператор в которых представим в виде* $S = \lambda\mathbb{1} - T$, *где* $\lambda \in \mathbb{C}$, *а* T *компактен.*

Обратим внимание, что если это так, у таких пространств любой индекс фредгольмова оператора равен нулю.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Начало спектральной теории

Понятие спектра

Подобно тому, как Гамлет встречался со *спектром* (тенью) своего отца, который рассказал ему много очень важных вещей, в математике спектр может рассказать много очень важных вещей об операторе — но нужно уметь спросить.

Рассмотрим оператор $T: E \to E$, и точку $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение. Точка λ называется *регулярной*, если $T - \lambda\mathbb{1}$ — обратимый оператор.

Определение. Точка λ называется *сингулярной*, если она нерегулярна, то есть, $T - \lambda\mathbb{1}$ необратим.

Определение. *Спектром* $\sigma(T)$ оператора T называют множество сингулярных точек.

Когда такое может происходить? Оказывается, существует две возможности,

1) $\operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$, то есть, существует $x \neq 0$, для которого $Tx = \lambda x$, то есть, x — это собственный вектор нашего оператора, которому соответствует собственное значение λ.

   Множество собственных значений оператора обозначают $\sigma_p(T)$, и называют *точечным спектром*.

   Заметим, что когда на первом курсе рассматривались конечномерные операторы, то они были необратимы тогда и только тогда, когда λ — собственное значение.

2) $\operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbb{1}) = 0$, но $\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbb{1}) \subset E$. Примером такого оператора может являться, например, сдвиг вправо. Ввиду тонкостей приложений полезно различать два случая:

   а) $\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbb{1}) \subset E$, но он хотя бы плотен в E (λ — *точка непрерывного спектра*, $\{\lambda\} = \sigma_c(T)$),

   б) $\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbb{1}) \subset E$, и он неплотен ($\lambda \in$ *остаточному спектру* $\sigma_r(T)$).

А что, если ничего из этого не выполняется? Получается, что тогда наш оператор биективен, а поскольку он ограничен и пространство банахово, то обратный оператор тоже будет ограниченным. Получается, что других возможностей для точки спектра нет.

Мы определили спектры и привели традиционную их классификацию. Отметим, что есть и другие весьма разумные классификации. Например, иногда выделяют *существенный спектр* $\sigma_e(T) = \{\lambda \mid T - \lambda\mathbb{1} \text{ не фредгольмов}\}$.

Рассмотрим теперь, что вообще может происходить и какие возникают точки спектра.

Предложение 45. *Пусть $T: E \to E$ — ограниченный оператор, а $\lambda \in \sigma(T)$, и*

$$\|Tx - \lambda x\| \geq c\,\|x\|\,. \tag{14.8}$$

Тогда $\lambda \in \sigma_r(T)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

◀ Ясно, что λ никак не входит в точечный спектр. Нужно доказать, что $\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbb{1})$ неплотен.

Рассмотрим оператор $\tilde{T} : E \to \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbb{1})$, причём $\tilde{T}x = Tx$. Ясно, что получившийся оператор инъективен и сюръективен, а также что он, будучи ограниченным, не увеличивает норму с точностью до константы, но и не уменьшает с точностью до константы. Значит, T — топологический изоморфизм, а его образ топологически изоморфен E, то есть, он полон в E. Тогда его образ замкнут в E, и если бы он был плотен, он бы совпал с E, но это не так.

Значит, непрерывного спектра у нас тоже не может быть. ▶

Рассмотрим теперь довольно важную и интересную теорему.

Теорема 40. *Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, а $T : H \to H$ компактен. Тогда,*

1) $0 \in \sigma(T)$,

2) *все точки $\sigma(T)$, кроме, может быть, 0 — собственные значения оператора, и $\forall \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ пространство $\{x \in H : Tx = \lambda x\}$ конечномерно,*

3) *$\sigma(T)$ не более чем счётен, и если бесконечен, то имеет единственную предельную точку 0.*

◀ *1)* Если вдруг $0 \notin \sigma(T)$, то T обратим, то рассмотрим оператор $TT^{-1} = \mathbb{1}$, который получается компактен, а тогда H конечномерно по теореме Рисса. Этого не может быть.

2) Возьмём $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Перепишем,

$$T - \lambda\mathbb{1} = -\lambda(\mathbb{1} - \lambda^{-1}T),$$

обратив внимание, что выражение в скобках фигурировало в теоремах Фредгольма. Получается, что оператор $\mathbb{1} - \lambda^{-1}T$ фредгольмов, а тогда он необратим (раз мы в спектре) и либо неинъективен, либо несюръективен. По альтернативе Фредгольма, оба эти свойства эквивалентны, и мы можем сказать, что он заведомо неинъективен. Значит, у него имеются собственные векторы, образующие $\operatorname{Ker}(\mathbb{1} - \lambda^{-1}T)$, а, как мы помним, ядро конечномерно.

3) Для доказательства третьего утверждения нам потребуется лемма.

Лемма 15. *У $\sigma(T)$ нет предельных точек, кроме 0.*

◀ Пусть, напротив, $\lambda \neq 0$ — предельная для $\sigma(T)$ точка. Это означает, что есть последовательность разных точек спектра $\lambda_n \to \lambda$. Поскольку $\lambda \neq 0$, можно считать, что все числа $|\lambda_n| \geq \theta > 0$.

Пусть x_n — собственные векторы с собственными значениями λ_n. Введём линейное пространство, равное линейной оболочке первых n векторов x_n,

$$H_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Они линейно независимы, а значит, $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$. Тогда существует $H_n \ni y_n \perp H_{n-1}$. Теперь учтём, что линейная алгебра нам даёт, что

$$H_n = H_{n-1} \oplus \{\mu x_n, \mu \in \mathbb{C}\},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

в частности, $y_n = \mu x_n + z$, $z \in H_{n-1}$. Тогда $\mu x_n = y_n - z$. Применяя к этой разности оператор T, получим, что,

$$Ty_n = \mu T x_n + Tz = \mu \lambda_n x_n + Tz = \lambda_n \left(y_n - z\right) + Tz = \lambda_n y_n + u,$$

где $u = Tz - \lambda_n z$. Посмотрев на него, увидим, что $Tz \in H_{n-1}$, а значит, $u \in H_{n-1}$.

Теперь, если $m < n$, то

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + u - Ty_m = \lambda_n y_n + v,$$

где $v := u - Ty_m$, $v \in H_{n-1}$, $v \perp y_n$, а значит, по теореме Пифагора,

$$\left\|Ty_n - Ty_m\right\|^2 = |\lambda_n|^2 \left\|y_n\right\|^2 + \|v\|^2 \geq \theta^2,$$

а это противоречит компактности оператора T. ▶

Теперь воспользуемся этим результатом. Рассмотрим дополнение нуля в комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Мы можем представить его как объединение счётного числа квадратов. Предположим, что наш спектр всё-таки несчётен, и тогда найдётся какой-нибудь квадрат такой, что его пересечение с нашим спектром бесконечное. Но по двумерному варианту теоремы Больцано в замкнутом квадрате, в котором находится бесконечное множество точек, должна быть и предельная точка этого множества — получаем противоречие. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15

Начало спектральной теории

Элементы алгебры

Мы рассмотрели спектры операторов, но понятие спектра этим не исчерпывается. Не менее важно абстрактное рассмотрение спектров элементов чистых алгебр, о которых что-то будет сказано сегодня, и спектров банаховых алгебр.

Сейчас мы повторим основные определения из курса алгебры, которые нам понадобятся.

Определение. Пусть A — комплексное линейное пространство, в котором задан билинейный оператор m,

$$m:\ A \times A \to A, \tag{15.1}$$

который называют *умножением*, если выполнено свойство ассоциативности,

$$(ab)c = a(bc). \tag{15.2}$$

Комплексной ассоциативной алгеброй называют пару (A, m) из комплексного линейного пространства и оператора умножения.

Пример 0. Примером может служить пространство $\mathscr{B}(E)$, но это пример из функционального анализа, а мы сейчас приведём основные примеры, которые привели бы алгебраисты.

Пример 1. Нулевая алгебра $\mathbb{0}$, состоящая из одного нуля.

Пример 2. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Пример 3. Матрицы M_n с матричным умножением.

Пример 4. Алгебра многочленов $\mathbb{C}[t]$ с формальной переменной t.

Пример 5. Алгебра рациональных функций $\mathbb{C}(t)$.

Пример 6. Алгебра $\mathbb{C}^X = \{\forall f:\ X \to \mathbb{C}.\}$

Определение. *Единицей* $\mathbb{1}$ называют такой элемент алгебры, что

$$a\mathbb{1} = \mathbb{1}a = a. \tag{15.3}$$

Определение. Алгебру с единицей называют *унитальной*.

Других алгебр мы рассматривать не будем, хотя есть много важных неунитальных алгебр.

Задача 80. Показать, что алгебра $\mathscr{K}(E)$ неунитальна.

Определение. Элементы $a, b \in A$ называют *перестановочными*, или говорят, что они *коммутируют*, если

$$ab = ba. \tag{15.4}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. Алгебру, все элементы которой перестановочные, называют *коммутативной*.

Определение. *Левым обратным* элементом алгебры $a_l^{-1} \in A$ к элементу $a \in A$ называют такой элемент, что

$$a_l^{-1} a = \mathbb{1}. \tag{15.5}$$

Определение. *Правым обратным* элементом алгебры $a_r^{-1} \in A$ к элементу $a \in A$ называют такой элемент, что

$$a a_l^{-1} = \mathbb{1}. \tag{15.6}$$

Определение. *Обратным* элементом алгебры $a^{-1} \in A$ к элементу $a \in A$ называют такой элемент, что

$$a^{-1} a = a a^{-1} = \mathbb{1}. \tag{15.7}$$

Предложение 46. *Если у $a \in A$ есть левый и правый обратный, то они совпадают, а значит, являются просто обратными.*

Доказательство следует из ассоциативности умножения и предоставляется читателю.

Определение. Элемент $a \in A$ называют *обратимым*, если к нему существует обратный.

Множество обратимых элементов алгебры A мы будем обозначать $\operatorname{Inv} A$, и в этом множестве есть специальное отображение в себя,

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv} A \to \operatorname{Inv} A\colon a \mapsto a^{-1}. \tag{15.8}$$

Предложение 47. *1) Пусть у нас есть n обратимых элементов $a_1, \dots, a_n$. Тогда и их произведение, $a_1 \cdots a_n \in \operatorname{Inv} A$.*

2) Если произведение $a_1 \cdots a_n \in \operatorname{Inv} A$ обратимо и элементы $a_1, \dots, a_n$ перестановочны, то каждый из них обратим.

◀ *1)* Выпишем обратный элемент в явном виде, $a_1^{-1} \cdots a_n^{-1}$.

2) Зная, что $a_1 \cdots a_n$ обратимо, введём обозначение, $b := a_1 \cdots a_n$. Поскольку все элементы перестановочны, нам достаточно доказать, что первый из них обратим. В самом деле,

$$b(a_2 \cdots a_n) a_1 = \mathbb{1},$$

а значит, к a_1 есть левый обратный. Можно также написать, что

$$a_1 (a_2 \cdots a_n) b = \mathbb{1},$$

значит, есть и правый обратный. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Взгляд на спектры со стороны алгебры

Определение. Для элемента $a \in A$, точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной*, если $a - \lambda\mathbb{1}$ обратим, и *сингулярной*, если $a - \lambda\mathbb{1}$ необратим.

Определение. Множество сингулярных точек называется *спектром* $\sigma(a)$ элемента a.

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Reg} a, \tag{15.9}$$

где $\operatorname{Reg} a$ — множество регулярных точек элемента a.

Очевидно, что спектр оператора является спектром элемента алгебры $\mathscr{B}(E)$.

Задача 81. Найти спектры элементов всех выписанных выше примеров чистых алгебр.

Когда вводится в математике новая структура, принято договариваться о том, какие отображения, согласованные с данной структурой. В данном случае такими отображениями являются *гомоморфизмы*,

Определение. *Гомоморфизмом* называют такой линейный оператор между алгебрами A, B, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Определение. *Унитальным* называют такой гомоморфизм, что $\mathbb{1}_A \mapsto \mathbb{1}_B$.

Предложение 48. *Унитальный гомоморфизм φ переводит* $\operatorname{Inv} A$,

$$\varphi(\operatorname{Inv} A) \subseteq \operatorname{Inv} B. \tag{15.10}$$

◀ Пусть был обратимый элемент a, тогда

$$\varphi\left(a^{-1}\right)\varphi(a) = \varphi\left(a^{-1}a\right) = \varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Аналогично показывается то же самое для правого обратного элемента. ▶

Следствие 13. *При унитальных гомоморфизмах $\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*

◀ В самом деле, поскольку спектр — это дополнение ко множеству обратимых элементов, нужно доказать, что $\operatorname{Reg} a \subseteq \operatorname{Reg} \varphi(a)$.

И правда, если $a - \lambda\mathbb{1}$ обратим, то $\varphi(a - \lambda\mathbb{1})$ тоже обратим, а значит, мы попали в регулярную точку. ▶

Задача 82. Показать, что при унитальных гомоморфизмах спектр может сохраниться, а может и уменьшится.

Введём очень важный класс гомоморфизмов. Рассмотрим многочлен $p \in \mathbb{C}[t]$,

$$c_0 + \dots + c_n t^n, c_k \in \mathbb{C}. \tag{15.11}$$

Зафиксируем на какое-то время наше значение и рассмотрим отображение γ_p,

$$\gamma_p : \mathbb{C}[t] \to A : \ p \mapsto p(a). \tag{15.12}$$

Задача 83. Проверить, что это отображение — унитальный гомоморфизм.

Определение. *Полиномиальным исчислением от элемента a* называют рассмотренное нами отображение γ_p.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Закон отображения спектров для полиномиального исчисления

Введём обозначение, чтобы потом меньше писать. Если есть множество $M \subseteq \mathbb{C}$ и многочлен p, то *значением многочлена p от множества M* назовём множество,

$$p(M) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in M\}. \tag{15.13}$$

Теперь рассмотрим теорему, называемую *законом отображения спектров для полиномиального исчисления*.

Теорема 41. *Если $A \ni a$ — элемент унитальной алгебры, а $p \in \mathbb{C}[t]$, отличный от свободного члена, то*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)). \tag{15.14}$$

◀ Пусть $\mu \in \sigma(p(a))$. Нужно показать, что это заявление про μ эквивалентно тому, что $\mu = p(\lambda)$ для $\lambda \in \sigma(a)$.

Рассмотрим многочлен $p(t) - \mu$ — рассмотренный как функция с учётом кратности, он имеет n корней. Значит, его можно разложить на линейные множители,

$$p(t) - \mu = c\left(t - \lambda_1\right) \cdots \left(t - \lambda_n\right),$$

где $c \neq 0$. Видим, что $\mu \in \sigma(p(a))$ эквивалентно тому, что $p(a) - \mu\mathbb{1}$ необратим. Согласно определению гомоморфизма, это эквивалентно тому, что необратим элемент $\gamma_p(p(t) - \mu)$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что необратим следующий элемент,

$$\gamma_p\left(c(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)\right).$$

Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что необратим

$$c\left(a - \lambda_1\mathbb{1}\right) \cdots \left(a - \lambda_n\mathbb{1}\right),$$

а это всё равно, что необратим хотя бы один из элементов $a - \lambda_k\mathbb{1}$ для $k = 1, \ldots, n$. Отметим, что $p\left(\lambda_l - \mu\right) = 0$ для любого λ_l, в том числе и для λ_k. Выходит, что $\mu = p(\lambda)$ для некоторого λ из спектра, то есть,

$$\mu \in p(\sigma(a)). \qquad ▶$$

Из этого утверждения есть множество интересных следствий. Рассмотрим простейшие.

Напомним, что *идемпотентом* называют такой элемент $a \in A$, что

$$a^2 = a. \tag{15.15}$$

Следствие 14. *Спектр идемпотента состоит не более чем из двух точек,* $\{0, 1\}$.

◀ Рассмотрим многочлен $p(t) = t - t^2$. Ясно, что когда этот многочлен мы применим к идемпотенту, мы получим нуль, а значит,

$$\sigma(p(a)) = 0,$$

а значит, $p(\sigma(a)) = 0$, а тогда для любого $\lambda \in \sigma(a)$,

$$\lambda - \lambda^2 = 0,$$

а это то, что нам и нужно, потому что у этого уравнения как раз два корня. ▶

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 84. Найти спектр нильпотентного элемента, то есть такого, некоторая степень которого равна нулю.

Предложение 49. *Если d — обратимый элемент A, а b — произвольный элемент, то из необратимости db следует необратимость b.*

◀ Докажем, что обратимость b эквивалентна обратимости db. В одну сторону мы уже доказывали, что это так.

$$b = \left(d^{-1}d\right) b = d^{-1}(db),$$

что есть произведение двух обратимых элементов, а значит, он обратим. ▶

С помощью этого докажем другое предложение.

Предложение 50. *Для $a \in \operatorname{Inv} A$ (что эквивалентно тому, что $0 \notin \sigma(a)$),*

$$\sigma\left(a^{-1}\right) = (\sigma(a))^{-1}. \tag{15.16}$$

◀ Возьмём $\lambda \in \sigma\left(a^{-1}\right)$, то есть, $a^{-1} - \lambda\mathbb{1}$ необратим. Перепишем это,

$$a^{-1} - \lambda\mathbb{1} = a^{-1} - \lambda a^{-1}a = -\lambda a^{-1}\left(a - \lambda^{-1}\mathbb{1}\right),$$

где все элементы необратимы, то есть, $\lambda^{-1} \in \sigma(a)$, или иными словами,

$$\lambda \in (\sigma(a))^{-1}. \qquad ▶$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ