МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

ШЕЙПАК
ИГОРЬ АНАТОЛЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Теория Фредгольма **4**
Постановка задачи (разрешимость уравнения) . . . 4
Леммы . . . 4
Теоремы Фредгольма . . . 8
Следствие (спектр компактного оператора) . . . 11

Лекция 2. Спектр компактного оператора. Полинормированные пространства **12**
Спектр компактного оператора . . . 12
Полинормированные пространства . . . 14
Естественная топология в полинормированном пространстве . . . 16
Операторы в полинормированных пространствах . . . 17
Пространства основных функций . . . 18

Лекция 3. Обобщенные функции. Сингулярность **22**
Утверждения про пространства основных функций . . . 22
Обобщенные функции . . . 25
Сингулярность дельта-функции Дирака . . . 27
Порядок сингулярности и носитель обобщенной функции . . . 29

Лекция 4. Операции над обобщенными функциями **31**
Идея введения операций над обобщенными функциями . . . 31
Достаточное подпространство . . . 32
Операции над обобщенными функциями . . . 35

Лекция 5. Решение простейших уравнений. Структура обобщенных функций **40**
Решение простейших уравнений . . . 40
Порядок сингулярности . . . 43
Структура обобщенных функций . . . 44
Локально конечное покрытие . . . 46
Теорема о представлении произвольной обобщенной функции . . . 48

Лекция 6. Теоремы о носителе. Преобразование Фурье обобщенных функций **50**
Теорема о носителе . . . 50
Теорема о разложении функции с одноточечным носителем . . . 51
Теорема о компактности носителя . . . 54
Преобразование Фурье обобщенных функций . . . 56

Лекция 7. Преобразование Фурье в пространстве Шварца **59**
Условие Дини . . . 59
Теоремы . . . 60
Операторы M и D в пространстве Шварца . . . 62
Эквивалентность систем полунорм . . . 63

Теорема о непрерывности преобразования Фурье 66

Лекция 8. Биективность преобразования Фурье в пространстве Шварца. Формула обращения 68
Леммы 68
Формула обращения в $\mathcal{S}$ 69
Теорема о непрерывном продолжении 72
Интегральное тождество Парсеваля 74
Преобразование Фурье в L_2 75

Лекция 9. Преобразование Фурье в L_2. Его спектр. Свертка 79
Лемма о равенстве функций 79
Теорема Планшереля 80
Функция, убывающая экспоненциально 82
Теорема о полноте системы функций 83
Функции Эрмита 84

Лекция 10. Свертка функций 88
Свертка основных функций 88
Свертка обобщенной и основной функции 93
Свертка двух обобщенных функций 94

Лекция 11. Функциональное исчисление операторов 97
Свертка в L_2 97
Спектральная теорема. Постановка вопроса 99
Теорема об отображении спектра для многочленов 100
Функциональное исчисление 101
Теорема о непрерывном исчислении 102

Лекция 12. Борелевское функциональное исчисление. Конструкция интеграла Римана — Стилтьеса 107
Борелевское функциональное исчисление для самосопряженного оператора A 107
Проекторнозначная мера 111
Интеграл Римана — Стилтьеса и Лебега — Стилтьеса 112

Лекция 13. Спектральная теорема 115
Спектральная теорема (в трех формулировках) 115
Циклический вектор 115
Теорема (о подобии оператору умножения на независимую переменную) . 116
Теорема (случай, когда нет циклического вектора) 117
Теорема 118
Теорема (унитарные инварианты самосопряженного оператора) 121

Лекция 1. Теория Фредгольма

Постановка задачи (разрешимость уравнения)

Весенний семестр мы начнем с темы, продолжающей темы, на которых мы остановились в прошлом семестре[1].

Пусть X – банахово пространство, $A \in K(X)$ (компактный оператор в X). Ставится вопрос о *разрешимости* уравнения[2]

$$(I - A)x = y. \tag{1}$$

Здесь $y \in X$ – известная правая часть, $x \in X$ требуется найти.

Замечание 1.1. Далее задачу (1) мы будем рассматривать не в банаховом, а в гильбертовом пространстве. Те места, где соображения для гильбертова и банахова пространства будут существенно отличаться, будут оговорены особо.

Оказывается удобно изучать не одно уравнение (1), а следующие четыре.

1. Уравнение (1):
$$(I - A)x = y.$$
2. Однородное уравнение, связанное с (1):
$$(I - A)x = 0.$$
3. Уравнение для функционалов с сопряженным оператором A':
$$(I - A')f = g. \tag{2}$$
4. Связанное с уравнением (2) однородное уравнение:
$$(I - A')f = 0.$$

Замечание 1.2. Уравнения 1 и 2 мы рассматриваем в пространстве X, а уравнения 3 и 4 – в X^*.

Для краткости будем обозначать $T = I - A$.

Леммы

Лемма 1.1. *Справедливо*
$$\dim KerT < \infty.$$

[1] Спектральные операторы и теорема Гильберта – Шмидта.
[2] $(I - A)$ можно называть компактным возмущением тождественного оператора.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker} T$. Тогда

$$(I - A)x = 0.$$

Это верно $\Longleftrightarrow$

$$Ix = Ax.$$

В свою очередь, равенство выше можно переписать как

$$A\Big|_{\operatorname{Ker} T} = I.$$

Оператор слева компактен, а значит, компактен и I. Это, как мы знаем, возможно только в случае, если $\operatorname{Ker} T$ конечномерно. □

Лемма 1.2. *$\operatorname{Im} T$ замкнут.*

Доказательство. Напомним следующее вспомогательное утверждение. Если $A \in B(X, Y)$, X – банахово, Y – нормированное и $\exists\ C > 0$ такая, что $\forall\ x$

$$\|Ax\| \geq C|x\|, \tag{3}$$

то $\operatorname{Im} A$ замкнут.[3]

Докажем сначала утверждение леммы для гильбертова пространства. Обозначим

$$H_0 := \operatorname{Ker} T$$

– это замкнутое подпространство. Все H раскладывается в прямую сумму

$$H = H_0 \oplus \underbrace{H_1}_{=H_0^{\perp}}.$$

Тогда

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T\Big|_{H_0}.$$

Покажем, что у $T\Big|_{H_1}$ $\exists\ C > 0$ такое, что $\forall\ x \in H_1$

$$\|Tx\| \geq C\|x\|.$$

(От противного) Предположим, что такой константы нет. Тогда $\exists\ x_n \in H_1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и

$$\|Tx_n\| \ \to\ 0, \quad n \ \to\ \infty.$$

Отсюда $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – предкомпактное множество. Тогда $\exists$ подпоследовательность $n_k \ \to\ \infty$ такая, что

$$Ax_{n_k} \ \to\ x,$$
$$(I - A)x_{n_k} \ \to\ 0,$$

[3]Заметим, что из условия (3) следует, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

откуда $x_{n_k} \to x$. Отсюда

$$(I - A)x = 0,$$

то есть $x \in \operatorname{Ker} T = H_0$. С другой стороны, $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in H_1$. Отсюда $x \in H_1 \cap H_0$, то есть $x = 0$. Но для $\forall\ k\ \|x_{n_k}\| = 1$, откуда по непрерывности нормы $\|x\| = 1$. Получаем противоречие.

Вкратце обсудим, как проводить доказательство в случае банахового пространства. Определим

$$X_0 := \operatorname{Ker} T, \quad \dim X_0 < \infty.$$

X_0 – замкнуто.

Надо использовать следующий факт. Конечномерное подпространство X_0 в банаховом пространстве X всегда дополняется замкнутым подпространством X_1. Иными словами, $\exists\ X_1$ – тоже замкнутое и такое, что

$$X = X_0 \oplus X_1.$$

□

Лемма 1.3. *(Для гильбертовых пространств) Пусть $T = I - A$, $A \in K(H)$, H – гильбертово. Тогда*

$$H = Ker T \oplus Im T^*$$

и

$$H = Ker T^* \oplus Im T.$$

Замечание 1.3. Если T – произвольный ограниченный оператор, то верны равенства

$$H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T^*},$$
$$H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \overline{\operatorname{Im} T}.$$

Доказательство. (Лемма 1.3)

1. Проверим, что $\operatorname{Ker} T \perp \operatorname{Im} T^*$. Пусть $y \in \operatorname{Im} T^*$. Тогда $\exists\ z$ такое, что $y = A^* z$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} T$. Тогда

   $$(x, y) = (x, A^* z) = (Ax, z) = 0,$$

   так как $Ax = 0$.

2. Осталось показать, что

   $$\operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^* = H.$$

   Пусть $\exists\, h \in H$ такое, что $h \perp (\operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^*)$. Тогда $h \perp \operatorname{Im} T^*$, откуда $h \perp T^* x$ $\forall\ x \in H$. Тогда

   $$(h, T^* x) = 0, \quad \forall\ x \in H.$$

   Перекинув T^*, получим

   $$(Th, x) = 0, \quad \forall x \in H,$$

   откуда $Th = 0$, а значит, $h \in \operatorname{Ker} T$ и $h \perp \operatorname{Ker} T$. Следовательно, $h = 0$.

□

Замечание 1.4. Для банаховых пространств

$$\operatorname{Im} T' = (\operatorname{Ker} T)^{\perp},$$

где

$$T' : \ X^* \ \to \ X^*.$$

Заметим, что, если $f \in X^*$, а $x \in X$, то $f \perp x$ означает, что $f(x) = 0$.

Лемма 1.4. *Пусть H – гильбертово, $A \in K(H)$, $T := I - A$. Если $KerT = \{0\}$, то $ImT = H$. Аналогично, если $KerT^* = \{0\}$, то $ImT^* = H$.*

Доказательство. (От противного) Пусть $\operatorname{Im} T = H_1 \subset H$.

Учитывая инъективность T ($\operatorname{Ker} T = \{0\}$), построим цепочку подпространств

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset H_{n+1} \supset \ldots$$

Здесь

$$H_{n+1} = TH_n.$$

Для $\forall\ n = 1, 2, \ldots\ \exists\ x_n \in H_n$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $x_n \perp H_{n+1}$. Получим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченную. Так как A – компактный, $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпактен, а значит, можно выделить фундаметальную подпоследовательность.

Покажем это. Пусть $m > n$. Тогда, с учетом, что $A = I - T$,

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|x_n - \underbrace{\underbrace{Tx_n}_{\in H_{n+1}} - \underbrace{x_m}_{\in H_m} + \underbrace{Tx_m}_{\in H_{m+1}}}_{\in H_{n+1}}\| \tag{4}$$

Тогда $x_n \perp Tx_n + x_m - Tx_m$. Тогда

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \sqrt{\|x_n\|^2 + \|Tx_n + x_m - Tx_m\|^2} \geq 1.$$

Выделить фундаментальную последовательность нельзя. Получаем противоречие. Отсюда $\operatorname{Im} T = H$. □

Замечание 1.5. (Для банаховых пространств) Здесь показываем, что $\operatorname{Im} T = X_1$. Если $X_1 \neq X$, то строим цепочку

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset X_{n+1},$$

где $X_{n+1} = TX_n$. Вместо конструкции в доказательстве выше нужно использовать лемму о почти $\perp$. $\forall\ n\ \exists\ x_n \in X_n$ такой, что $\|x_n\| \geq 1$,

$$\rho(x_n, X_{n+1}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Далее рассуждения повторяют доказательство 1.4.

Лемма 1.5. *Пусть H – гильбертово, $A \in K(H)$, $T := I - A$. Если $ImT = H$, то $KerT = \{0\}$.*

Аналогично, если $ImT^* = H$, то $KerT^* = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} T = H$. Тогда по лемме 1.3 $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$, откуда по лемме 1.4 получаем, что $\operatorname{Im} T^* = H$. Наконец, по лемме 1.3, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. □

Теоремы Фредгольма

Пусть H – гильбертово, $A \in K(H)$. Имеем уравнения

$$(I - A)x = y, \tag{5}$$

$$(I - A)x = 0, \tag{6}$$

$$(I - A^*)f = g, \tag{7}$$

$$(I - A^*)f = 0, \tag{8}$$

где $x, y, f, g \in H$.

Теорема 1.1. *(1-ая теорема Фредгольма) Уравнение (5) имеет решение $\iff$ $y \perp$ решениям уравнения (8).*

Аналогично, уравнение (7) имеет решение $\iff$ $y \perp$ решениям уравнения (6).

Доказательство. По лемме 1.3,

$$H = \operatorname{Ker} T \underset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} T^*,$$

$$H = \operatorname{Ker} T^* \underset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} T.$$

Если $\exists$ решение уравнения (5), то $y \in \operatorname{Im} T \perp \operatorname{Ker} T^*$ – решение уравнения (8). $\square$

Замечание 1.6. По теореме 1.1, если уравнение (5) имеет решение y, то $y \perp$ решениям уравнения (8). В банаховых пространствах уравнение (8) выглядит как

$$(I - A')f = 0, \quad f \in X^*.$$

Тогда перпендикулярность $y \in X$ и $f \in X^*$ понимается как

$$f(y) = 0.$$

Теорема 1.2. *(2-ая теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма) Либо уравнение (5) имеет решение $\forall$ y и тогда это решение – единственное, либо уравнение (6) имеет ненулевое решение.*

Аналогично для уравнений (7) и (8): либо уравнение (7) имеет решение $\forall$ g и тогда это решение – единственное, либо уравнение (8) имеет ненулевое решение.

Доказательство. Из лемм 1.4 и 1.5 следует, что

$$\operatorname{Ker}(I - A) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(I - A) = H,$$

$$\operatorname{Ker}(I - A^*) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(I - A^*_{=} H.$$

Уравнение (5) имеет решение для $\forall$ y:

$$\operatorname{Im}(I - A) = H \iff \operatorname{Ker}(I - A) = \{0\},$$

откуда получаем, что оператор $T = I - A$ биективен. По теореме Банаха об обратном операторе, $\exists$ T^{-1} – ограниченный. Тогда $x = T^{-1}y$.

Если решение $\exists$ не для любого y, то $\operatorname{Im} T \neq H$, откуда получаем, что $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. $\square$

Теорема 1.3. *(3-я теорема Фредгольма) Пусть H – гильбертово, $A \in K(H)$. Тогда*

$$\dim Ker(I-A) = \dim Ker(I-A^*).$$

Замечание 1.7. Теорема верна и в банаховых пространствах:

$$\dim \operatorname{Ker}(I-A) = \dim \operatorname{Ker}(I-A').$$

Доказательство. (Теорема 1.3) Докажем теорему для гильбертовых пространств. Пусть

$$\dim \operatorname{Ker}(I-A) = n, \quad \dim \operatorname{Ker}(I-A^*) = m.$$

Пусть $n < m$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – ОНБ в $\operatorname{Ker}(I-A)$, а $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ – ОНБ в $\operatorname{Ker}(I-A^*)$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = Tx - \sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\psi_i = (I - \underbrace{A}_{\text{компактный}})x -$$

$$- \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\psi_i}_{\text{конечномерный} \Rightarrow \text{компактный}} = (I - \underbrace{B}_{\text{компактный}})x.$$

Для оператора $\mathcal{S}$ применимы леммы 1.1 – 1.5 и теоремы 1.1, 1.2.

Найдем ядро оператора $\mathcal{S}$. Пусть

$$\mathcal{S}x = 0,$$

$$(I-A)x - \sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\psi_i = 0,$$

$$\underbrace{(I-A)x}_{\in \operatorname{Im}(I-A)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\psi_i}_{\in \operatorname{Ker}(I-A^*)}.$$

По лемме 1.3 эти векторы ортогональны. Отсюда

$$(I-A)x = 0,$$

то есть

$$x \in \operatorname{Ker}(I-A).$$

Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{n}(x,\varphi_i)\psi_i = 0,$$

откуда $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n\ (x,\varphi_i) = 0$, а значит, $x \perp \operatorname{Ker}(I-A)$.

Получаем, что $x = 0$, то есть $\operatorname{Ker}\mathcal{S} = \{0\}$. По лемме 1.4, $\operatorname{Im}\mathcal{S} = H$. Тогда уравнение

$$\mathcal{S}x = y$$

разрешимо $\forall\ y$ (теорема 1.2).

Решим уравнение

$$\mathcal{S}x = \psi n + 1,$$

то есть

$$(I - A)x - \sum_{i=1}^{n}(x, \varphi_i)\psi_i = \psi_{n+1}.$$

Умножим это уравнение скалярно на ψ_{n+1}. Получим

$$\underbrace{((I - A)x, \psi_{n+1})}_{=(x,(I-A^*)\psi_{n+1})=0} - \sum_{i=1}^{n}(x, \varphi_i)\underbrace{(\psi_i, \psi_{n+1})}_{=0} = (\psi_{n+1}, \psi_{n+1}) = \|\psi_{n+1}\|^2 = 1.$$

Получаем противоречие. Следовательно, $n \geq m$.

Если $n > m$, надо рассмотреть оператор

$$\widetilde{S}x = T^*x - \sum_{i=1}^{m}.$$

Проверяется, что

$$\operatorname{Ker}\widetilde{\mathcal{S}} = \{0\},$$

откуда получаем, что уравнение $\widetilde{\mathcal{S}}x = y$ имеет решение $\forall\ y$. Тогда уравнение $\widetilde{S}x = \varphi_{m+1}$ не имеет решений – противоречие. □

Еще раз проговорим следующее. Либо

$$(I - A)x = y$$

имеет решение для любой правой части, тогда $\operatorname{Ker}(I - A) = \{0\}$, либо в $\operatorname{Im}(I - A)$ не попадают y, которые ортогональны решениям

$$(I - A^*)f = 0. \tag{9}$$

Таких решений конечное число, а значит, на y надо наложить конечное число условий ортогональности. Тогда y будет зависить от произвольного конечного числа констант, равного размерности пространства решений (9). Его размерность, в свою очередь, равна размерности исходного уравнения.

Определение 1.1. Уравнения вида

$$\underbrace{f(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt}_{=Af\ -\ \text{компактный}} = g(x)$$

в $C[a,b]$ или $L_p[a,b]$ называетс *уравнениями Фредгольма 2-го рода.*

Определение 1.2. *Уравнениями Фредгольма 1-го рода* называются уравнения вида

$$\int_a^b K(x,t)f(t)dt = g(x),$$

или, в операторной формулировке,

$$Af = g, \quad A \in K(X).$$

Следствие (спектр компактного оператора)

Следствие. (Спектр компактного оператора) Пусть X – банахово пространство, $\dim X = \infty$, $A \in K(X)$. Тогда

1. $0 \in \sigma(A)$;
2. Если $\lambda \in \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$, то $\lambda \in \sigma_p(A)$ – собственное значение конечной кратности;
3. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ конечное число собственных значений таких, что $|\lambda| \geq \varepsilon$.

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Пусть $0 \in \rho(A)$, тогда $\exists\ A^{-1} \in B(X)$. Тогда

$$AA^{-1} = I,$$

где A – компактный, а A^{-1} – ограниченный, а значит, AA^{-1} – также компактный. Но тождественный оператор I компактен только при $\dim X < \infty$. Получили противоречие с первоначальным утверждением. Значит, $0 \in \sigma(A)$.

Перейдем к пункту 2. Пусть $\lambda \notin 0$. Рассмотрим уравнение

$$(A - \lambda I)x = y.$$

Поскольку $\lambda \neq 0$, поделим это уравнение на λ:

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)x = -\frac{y}{\lambda}.$$

По альтернативе Фредгольма, либо это уравнение имеет единственное решение, то есть

$$\operatorname{Ker}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right) = \{0\}, \quad \operatorname{Im}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right) = X,$$

что эквивалентно тому, что

$$\operatorname{Ker}\,(A - \lambda I) = \{0\}, \quad \operatorname{Im}\,(A - \lambda I) = X,$$

откуда получаем, что $\exists\ (A - \lambda I)^{-1} \in B(X)$, а значит, $\lambda \in \rho(A)$, либо уравнение $(I - A/\lambda)x = 0$ имеет ненулевое решение, то есть $\exists\ x_0 \neq 0$ такой, что

$$\left(A - \frac{A}{\lambda}\right)x_0 = 0.$$

Это эквивалентно тому, что $Ax_0 = \lambda x_0$, откуда получаем, что x_0 – собственный вектор, λ – собственное значение. □

Лекция 2. Спектр компактного оператора. Полинормированные пространства

Спектр компактного оператора

В этой лекции закончим говорить о спектре компактного операторa. Затем начнем теорию обобщенных функций.

Напомним, в прошлый раз доказали пункты 1 и 2 (кроме конечной кратности) следующей теоремы.

Следствие. Пусть X – банахово, $\dim X = \infty$, $A \in K(X)$. Тогда

1. $0 \in \sigma(A)$;
2. Если $\lambda \in \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$, то $\lambda \in \sigma_p(A)$ – собственное значение конечнй кратности;
3. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ конечное число собственных значений таких, что $|\lambda| \geq \varepsilon$.

Доказательство. (Продолжение)

2. Напомним, что геометрическая кратность собственного значения λ – это $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

   Пусть $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. Тогда

   $$Ax = \lambda x, \quad \lambda \neq 0,$$

   откуда

   $$\frac{A}{\lambda} x = x = Ix,$$

   то есть

   $$\underbrace{\frac{A}{\lambda}\Big|_{\operatorname{Ker}(A-\lambda I)}}_{\text{компактен}} = I.$$

   Из компактности тождественного оператора следует, что $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < \infty$.

3. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, то есть линейный оператор, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – собственные вектора с *различными* собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима.

   Для доказательства этого факта применим метод математической индукции.

   1) Возьмем $e_1 \neq 0$. Линейная независимость выполняется.
   2) Пусть доказали линейную независимость для $e_1, e_2, \ldots, e_n$, которые соответствуют $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$.

      Пусть есть $n+1$ вектор $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$. Строим линейную комбинацию

      $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n + \ldots + \alpha_{n+1} e_{n+1} = 0. \tag{10}$$

Применим к (10) оператор A. С другой стороны, умножим (10) на λ_{n+1}. Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 e_1 + \alpha_2\lambda_2 e_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n e_n + \ldots + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}e_{n+1} = 0 \\ \alpha_1\lambda_{n+1} e_1 + \alpha_2\lambda_{n+1} e_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_{n+1} e_n + \ldots + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}e_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим, что

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) e_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) e_2 + \ldots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) e_n = 0.$$

Все $(\lambda_i - \lambda_{n+1}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. По предположению индукции $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы. Тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Из (10) следует, что и $\alpha_{n+1} = 0$.

Вернемся к доказательству пункта 3 теоремы (от противного). Предположим, что $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\exists$ бесконечно много различных собственных значений таких, что $|\lambda| > \varepsilon$.

Выберем счетный набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Выберем по одному собственному вектору для каждого λ_i, то есть образуем пары (λ_i, e_i), $i = 1, 2, \ldots$ Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ линейно независима.

Строим цепочку расширяющихся пространств

$$X_n = < e_1, e_2, \ldots, e_n >,$$

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_{n-1} \subset X_n \subset \ldots$$

Для $\forall\ n$ X_n замкнуты (конечномерны). По лемме о почти перпендикуляре $\forall\ n \geq 2\ \exists\ x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$ такие, что

$$\underbrace{\rho(x_n, X_{n-1})}_{= \inf\limits_{z_{n-1} \in X_{n-1}} \|x_n - z_{n-1}\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Здесь $\varepsilon = 1/2$.

Разложим x_n по базису:

$$x_n = c_n e_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} c_k e_k}_{\in X_{n-1}}.$$

Положим

$$y_n := \frac{x_n}{\lambda_n}.$$

Здесь

$$\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

– ограниченное множество.

Так как A – компактный, то $\{Ay_n\}_{n=1}^{\infty}$ – предкомпактное множество. Следовательно, из $\{Ay_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Прежде, чем перейти к выделению фундаментальной подпоследовательности, запишем в явном виде

$$y_n = \frac{c_n e_n}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k e_k}{\lambda_n}.$$

Тогда

$$Ay_n = c_n e_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k \lambda_k e_k}{\lambda_n}}_{X_{n-1}} = x_n + \underbrace{z_{n-1}}_{\in X_{n-1}}.$$

Здесь

$$z_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k \lambda_k e_k}{\lambda_n} - \sum_{k=1}^{n-1} c_k e_k.$$

Вернемся к фундаментальной подпоследовательности. Пусть $n > m$, $n-1 \geq m$. Тогда

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \Big\| x_n + \underbrace{\underbrace{z_{n-1}}_{\in X_{n-1}} - \underbrace{x_m}_{\in X_m} - \underbrace{z_{m-1}}_{\in X_{m-1}}}_{\in X_{m-1}} \Big\| > \frac{1}{2}.$$

Получаем противоречие с выделением фундаментальной подпоследовательности.

Следовательно, наше начальное предположение неверно и $\exists$ конечное число собственных значений таких, что $|\lambda_i| > \varepsilon$.

□

Полинормированные пространства

Следующие несколько лекций будут посвящены теории обобщенных функций. Коротко говоря, *обобщенная функция (ОФ)* – это линейный непрерывный функционал на специальных полинормированных пространствах.

Прежде, чем приступить непосредственно к теории обобщенных функций, повторим то, что мы говорили о полинормированных пространствах ранее.

Определение 2.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Функция

$$p: \ X \ \to \ \underbrace{\mathbb{R}_0^+}_{=[0,\infty)}$$

называется *полунормой*, если

1. $\forall\ x \in X\ p(x) \geq 0$;

2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x);$$
3. $\forall\ x, y \in X$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Единственное отличие полунормы от нормы состоит в том, что она может быть равна 0 не только на нулевых элементах.

Пример 2.1. (Примеры полунорм)

1. Пусть X – пространство последовательностей вида
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$
тогда полунормой будет функция
$$p_n(x) = |x_n|.$$
2. Пространство $C[0,1]$, $f \in C[0,1]$. Полунормой будет
$$p_x(f) = |f(x)|.$$
3. Пространство $C^n[0,1]$. Здесь полунорма
$$p_j(f) = \max_{x \in [0,1]} |f^{(j)}(x)|, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Везде далее либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо (в первую очередь) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Определение 2.2. X – линейное пространство над полем $\mathbb{k}$ – *полинормированное*, если на X задана система полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ и определена сходимость
$$x_n \ \to \ x,$$
если $\forall\ \alpha \in \Lambda$
$$p_\alpha(x_n - x) \ \to \ 0.$$

Определение 2.3. Будем говорить, что система полунорм *разделяет точки*, если $\forall\ x, y \in X$ таких, что $x \neq y\ \exists\ \alpha$ такое, что
$$p_\alpha(x - y) \neq 0.$$

Естественная топология в полинормированном пространстве

Определим

$$U_{\varepsilon,p_{\alpha_1},p_{\alpha_2},\ldots,p_{\alpha_n}}(x_0) = \{x \in X : \ \forall\, i = 1,2,\ldots,n \ p_{\alpha_i}(x_0 - x) < \varepsilon\}$$

– *стандартный шар в полинормированном пространстве.*

В качестве базы топологии возьмем все стандартные шары, $\emptyset$.

Напомним, что множество M открыто, если $\forall\, x \in M \ \exists$ стандартный шар с центром в точке x, лежащий в M.

Проверим выполнение аксиом топологии.

1. $\emptyset$ лежит в топологии, а
$$X = \bigcup_{x_0 \in X} U_{\varepsilon,p_{\alpha_j}}(x_0).$$
2. Произвольное объединение открыто.
3. Для пересечения докажем следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Пусть*

$$U_1 := U_{\varepsilon,p_{\alpha_1},\ldots,p_{\alpha_n}}(a),$$
$$U_2 := U_{\delta,p_{\beta_1},\ldots,p_{\beta_n}}(b).$$

Тогда $U_1 \cap U_2$ открыто.

Доказательство. 1. Если $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, то доказано.

2. Если $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, то достаточно доказать, что $\exists$ стандартный шар $V \subset U_1 \cap U_2$.

   Пусть $\exists$ точка $c \in U_1 \cap U_2$. Построим
   $$V = U_{r,p_{\alpha_1},p_{\alpha_2},\ldots,p_{\alpha_n},p_{\beta_1},\ldots,p_{\beta_m}}(c),$$
   где r выберем следующим образом:
   $$r := \min_{1\le i\le n,\, 1\le j\le m} \left(\varepsilon - p_{\alpha_i}(a-c), \delta - p_{\beta_j}(b-c)\right).$$
   Убедимся, что выбранное таким образом r нам подходит.

   Пусть $x \in V$. Тогда
   $$p_{\alpha_i}(a-x) \le p_{\alpha)i}(x-c) + p_{\alpha_i}(a-c) <$$
   $$< r + p_{\alpha_i}(a-c) \le \varepsilon - p_{\alpha_i}(a-c) + p_{\alpha_i}(a-c) = \varepsilon.$$
   Следовательно, $x \in U_1$.

   Аналогично,
   $$p_{\beta_j}(x-b) \le p_{\beta_j}(x-c) + p_{\beta_j}(b-c) < r + p_{\beta_j}(b-c) \le$$
   $$\le \delta - p_{\beta_j}(b-c) + p_{\beta_j}(b-c) = \delta.$$
   Отсюда $x \in U_2$.

   Следовательно, $x \in U_1 \cap U_2$.

□

Утверждение 2.2. $(X, \{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ – *полинормированное пространство.*
Сходимость в X по системе полунорм совпадает со сходимостью по топологии.

Доказательство. Возьмем стандартный шар

$$U_{\varepsilon,p_{\alpha_1},p_{\alpha_2},\dots,p_{\alpha_n}}(x_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Покажем, что $x_n \to x_0$. По определению, тогда $\forall\ \alpha$

$$p_\alpha(x_n - x_0) \to 0.$$

Иными словами, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall\ n \geq N$

$$p_\alpha(x_n - x_0) < \varepsilon.$$

Это означает, что все такие $x_n \in U_{\varepsilon,p_\alpha}(x_0)$. Тогда, очевидно, если x_n сходится по топологии, то оно сходится и по системе полунорм.

Утверждение в обратную сторону следует из представления

$$U_{\varepsilon,p_{\alpha_1},p_{\alpha_2},\dots,p_{\alpha_n}}(x_0) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\varepsilon,p_{\alpha_i}}(x_0).$$

□

Везде далее считаем, что система полунорм различает точки (это равносильно тому, что топология хаусдорфова). Это позволяет нам делать предельные переходы.

Операторы в полинормированных пространствах

Определение 2.4. Пусть $(X, \{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ и $(Y, \{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma})$ – два полинормированных пространства над одним полем. Тогда отображение

$$A:\ X \to Y$$

– *линейное*, если

$$A(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2.$$

Определение 2.5. Отображение A – *непрерывное*, если $\forall\ \beta \in \Gamma\ \exists\ C > 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ такие, что $\forall\ x \in X$

$$q_\beta(Ax) \leq C \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(x).$$

Это эквивалентно тому, что $\exists\ c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ такие, что

$$q_\beta(Ax) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i p_{\alpha_i}(x).$$

Напомним, что в нормированных пространствах X и Y отображение A было непрерывным, когда

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Определение 2.6. Пусть на линейном пространстве X заданы две системы полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ и $\{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. Будем говорить, что эти системы *эквивалентны*, если

1. $\forall\ \beta\in\Gamma\ \exists\ C\geq 0$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\Lambda$ такие, что $\forall\ x\in X$

$$q_\beta(x)\leq C\sum_{n=1}^{n}p_{\alpha_i}(x);$$

2. $\forall\ \alpha\in\Lambda\ \exists\ \widetilde{C}\geq 0$, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\in\Lambda$ такие, что $\forall\ x\in X$

$$p_\alpha(x)\leq \widetilde{C}\sum_{n=1}^{n}q_{\beta_i}(x).$$

То, что написано выше, можно переформулировать так. Возьмем оператор перекладывания

$$J:\ (X,\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})\ \to\ (X,\{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma}),$$
$$Jx=x.$$

Тогда

$$J^{-1}:\ (X,\{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma})\ \to\ (X,\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}).$$

Здесь J, J^{-1} непрерывны. Тогда требования 2.6, очевидно, выполняются.

Пространства основных функций

Рассмотрим некоторые пространства.

1. **Пространство финитных функций**

$$\mathcal{D}:=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}):\ \operatorname{supp}\varphi\text{ – компакт }\}.$$

Иными словами, для $\varphi\in\mathcal{D}\ \exists\ [a,b]$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi\subset[a,b]$. Здесь

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{x:\ \varphi(x)\neq 0\}}.$$

Поймем, почему пространство $\mathcal{D}$ непусто. Во-первых, в нем заведомо есть нулевая функция. Построим пример ненулевой функции $\in\mathcal{D}$.

Пример 2.2. Рассмотрим

$$\psi(x)=\begin{cases}e^{-1/x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

Ее производная имеет вид

$$\psi'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}e^{-1/x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

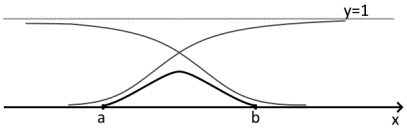

Рис. 2.1. Функция $\varphi_{a,b}$

В общем случае

$$\psi^{(n)}(x) = P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\psi(x).$$

Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x^{2n}}} = 0.$$

Это еще не финитная функция. Определим

$$\varphi_{a,b}(x) = \psi(b-x)\psi(x-a), \quad a < b$$

– функцию «типа шапочки» (рис. 2.1). Такая $\varphi_{a,b} \in \mathcal{D}$.

Определение 2.7. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ *сходится к* 0 *в* $\mathcal{D}$:

$$\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0,$$

если

1. $\exists\ [a,b]$ такой, что $\forall\ n$
$$\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a,b];$$
2. $\forall\ j \geq 0$
$$\varphi_n^{(j)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0.$$

Определение 2.8. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ *сходится к* φ *в* $\mathcal{D}$:

$$\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi,$$

если

1. $\exists\ [a,b]$ такой, что $\forall\ n$
$$\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a,b], \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b];$$
2. $\forall\ j \geq 0$
$$\varphi_n^{(j)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(j)}.$$

Стандартная полунорма на $\mathcal{D}$ определяется как

$$\|\varphi\|_{C^n[-a,a]} = \sum_{j=0}^{n} \max_{[-a,a]} \left|\varphi^{(j)}(x)\right|, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Определение 2.9. *p – допустимая полунорма в $\mathcal{D}$*, если $\forall\ a > 0\ \exists\ C = C(a) > 0$, $n = n(a) \in \mathbb{N}_0$ такие, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$ выполнено

$$p(\varphi) \leq C\|\varphi\|_{C^n[-a,a]}.$$

Пример 2.3. (Допустимые полунормы в $\mathcal{D}$)

1. Стандартная полунорма (11) допустима.
2. Так как полунорма p вида

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\varphi^{(k)}(k)\right| \leq \|\varphi\|_{C^{[a]+1}[-a,a]},$$

   где $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$, такая p является допустимой.
3. Пусть $\alpha(x) \in C(\mathbb{R})$. Определим

$$p_\alpha(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} |\alpha(x)\varphi(x)|.$$

   Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$. Тогда

$$p_\alpha(\varphi) = \max_{[-a,a]} |\alpha(x)\varphi(x)| \leq \max_{[-a,a]} |\alpha(x)| \max_{[-a,a]} |\varphi(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{\max_{[-a,a]} |\alpha(x)|}_{C(a)} \|\varphi\|_{C[-a,a]}, \quad n(a) = 0.$$

Покажем полинормированность $\mathcal{D}$. Возьмем все допустимые нормы.

Утверждение 2.3. *$\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi \iff \varphi_n \to \varphi$ по всем допустимым полунормам.*

Доказательство. Сходимость $\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$ по определению означает, что

1. $\exists\ [a, b]$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi_n, \varphi \subset [a, b]$;
2. $\forall\ j > 0$

$$\varphi_n^{(j)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(j)}.$$

$\Rightarrow$ Пункт 2 из определения выше – это сходимость по $\|\cdot\|_{C^n[a,b]}\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$. Отрезок $[a, b]$ можно расширить до симметричного, откуда следует сходимость по

$$\|\cdot\|_{C^n[-\max(|a|,|b|),\max(|a|,|b|)]}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$$

– стандартная норма. Получили, что $\varphi_n \to \varphi$ по стандартной норме, следовательно, и по допустимой, так как допустимая полунорма мажорируется стандартной.

$\Leftarrow$ Достаточно проверить существование общего отрезка.

(От противного) Пусть такого отрезка нет, носитель неограничен. Не ограничивая общности, считаем, что он уходит на $+\infty$. $\forall\ k\ \exists\ x_k > k$ такая, что $\varphi_{n_k}(x_k) \neq 0$, где $n_k < n_{k+1} < \ldots$. Поскольку $\operatorname{supp} \not\subset [-1, 1]$, $\exists\ n_1$ такой, что $x_1 > 1\ \varphi_{n_1}(x_1) \neq 0$.

Построим функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi_{n_k}(x_k)}, & x = x_k \\ \text{по непрерывности в остальных точках} \end{cases}$$

– такая функция порождает допустимую полунорму p_α. Тогда

$$p_\alpha(\varphi_{n_k}) \geq |\alpha(x_k)\varphi(x_k)| \geq 1.$$

Это противоречит сходимости по всем допустимым полунормам к 0. Следовательно, $\exists\ [a, b]$, содержащий все носители φ_n, φ, и пункт 2 сходимости в $\mathcal{D}$ выполнен по всем допустимым полунормам, в частности, по стандартным. $\square$

Лекция 3. Обобщенные функции. Сингулярность

Утверждения про пространства основных функций

Напомним, что на прошлой лекции ввели пространство $\mathcal{D}$ – пространство гладких финитных функций. Положим

$$\mathcal{S} := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ \forall\, p, q \in \mathbb{N}_0 \ \|\varphi\|_{p,q} := \sup_{\mathbb{R}} |x^p \varphi^{(q)}(x)| < \infty \right\}$$

– *пространство быстроубывающих функций*, оно же *пространство Шварца*. Заметим, что $\mathcal{S}$ – полинормированное пространство с полунормами $\|\cdot\|_{p,q}$. Кроме того, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

Пример 3.1. Приведем пример $\varphi \in S \setminus \mathcal{D}$:

$$\varphi = e^{-x^2}.$$

Ее n-ая производная имеет вид

$$\varphi^{(n)} = P_n(x) e^{-x^2}.$$

Сходимость в $\mathcal{D}$ не метризуется. Сходимость в $\mathcal{S}$ можно задать метрикой.

Рассмотрим еще одно классическое пространство. Определим

$$\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$$

с полунормами

$$\|\varphi\|_{n,N} = \|\varphi\|_{C^\infty[-N,N]} = \sum_{j=0}^{n} \max_{[-N,N]} |\varphi^{(j)}(x)| \sim \max_{0 \le j \le n} \max_{[-N,N]} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Эквивалентная система полунорм имеет вид

$$\|\varphi\|_n := \|\varphi\|_{n,n} = \sum_{j=0}^{n} \max_{[-n,n]} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Очевидно,

$$\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{\|\cdot\|_{n,N}\}.$$

В обратную сторону,

$$\|\varphi\|_{n,N} \le \|\varphi\|_m, \quad m = \max(n, N).$$

Утверждение 3.1.

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$$

плотно и непрерывно.

Доказательство. Вложение пространств как множеств очевидно.

Возьмем оператор вложения

$$J: \mathcal{D} \to \mathcal{S}.$$

Для $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$J\varphi = \varphi \in \mathcal{S},$$

то есть оператор J позволяет нам смотреть на φ как на функцию из более широкого пространства.

Покажем непрерывность оператора вложения. Мы должны проверить, что $\forall\ p, q$, $\varphi \in \mathcal{D}$ (заметим, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$)

$$\|\varphi\|_{p,q} = \sup_{\mathbb{R}} \left|x^p \varphi^{(q)}(x)\right| \leq \underbrace{\max_{[-a,a]} |x^p|}_{=C(a,b)} \max_{[-a,a]} |\varphi^{(q)}| = C(a,p) \leq C(a,p)\|\varphi\|_{C^q[-a,a]}$$

– стандартная полунорма, а следовательно, допустима.

Получили, что $\mathcal{D}$ вложено в $\mathcal{S}$ непрерывно.

Покажем плотность. Надо показать, что $\forall\ f \in \mathcal{S}\ \exists\ f_n \in \mathcal{D}$ такие, что $\forall\ p, q \in \mathbb{N}_0$

$$\|f - f_n\|_{p,q} \to 0.$$

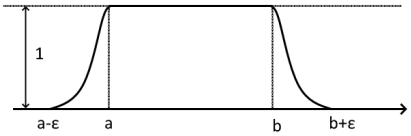

Рис. 3.1. Функция $\varphi_{a,b,\varepsilon}$

Определим $\varphi_{a,b,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (рис. 3.1). Заметим, что

$$\varphi_{a,b,\varepsilon} \to I_{(a,b)}, \quad \varepsilon \to 0,$$

то есть функции $\varphi_{a,b,\varepsilon}$ можно называть индикатором (но гладким) отрезка (a, b). Предположим, такие функции $\exists$. Тогда их производная $\varphi'_{a,b,\varepsilon}$ имела бы следующий

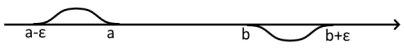

Рис. 3.2. Функция $\varphi'_{a,b,\varepsilon}$

вид (рис. 3.2). Это функции типа «шапочки», а значит,

$$\varphi_{a,b,\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi_{a-\varepsilon,a}(t) - \varphi_{b,b+\varepsilon}(t)\right) dt.$$

Заметим, что

$$\int_{a-\varepsilon}^{a} \varphi_{a-\varepsilon,a}(t)dt = \int_{b}^{b+\varepsilon} \varphi_{b,b+\varepsilon}(t)dt.$$

Далее, определим $\varphi_{-1,1,1}$ и $\varphi_n(x) = \varphi_{-1,1,1}(x/n)$.

Пусть $f \in \mathcal{S}$. Определим

$$f_n := \varphi_n f \in \mathcal{D}.$$

Здесь

$$\|f - f_n\|_{p,q} = \sup_{\mathbb{R}} \left|x^p (f - \varphi_n f)^{(q)}(x)\right| = \sup \left|x^p \left(f(1-\varphi_n)\right)^{(q)}(x)\right|.$$

Займемся плотнее $\left(f(1-\varphi_n)\right)^{(q)}(x)$. Распишем

$$\left(f(1-\varphi_n)\right)^{(q)} = \sum_{j=0}^{q} C_q^j f^{(q-j)}(x)(1-\varphi_n)^{(j)} = f^{(q)}(1-\varphi_n) + \sum_{j=1}^{q} C_q^j f^{(q-j)}(-\varphi_n)^{(j)}. \quad (12)$$

Первое слагаемое (12) (при $j = 0$) оценивается как

$$\leq \sup_{|x|\geq n} \left|x^p f^{(q)}\right| \ \to \ 0, \quad n \ \to \ \infty.$$

Оценим вторую группу слагаемых (12). Заметим, что

$$(\varphi_n)^{(j)} = \varphi_{-1,1,1}^{(j)}\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n^j}.$$

Тогда

$$\sup_{\mathbb{R}} \left|x^p \sum_{j=1}^{q} C_q^j f^{(q-1)} \varphi_n^{(j)}\right| \ \to \ 0, \quad n \ \to \ \infty.$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$.

Перейдем ко второй части доказательства. Покажем, что $\mathcal{S}$ плотно непрерывно вложено в $\mathcal{E}$. Будем брать функции из $\mathcal{D}$, так как $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

a. Покажем непрерывность вложения. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Определим оператор вложения $J\varphi = \varphi \in \mathcal{E}$. Тогда

$$\|\varphi\|_{n,N} = \|\varphi\|_{C^n[-N,N]} \leq \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\|\varphi\|_{0,j}}_{=\sup\limits_x \|\varphi^{(j)}(x)\|}.$$

b. Покажем плотность вложения. Пусть $f \in \mathcal{E}$. Построим

$$\varphi_m = \varphi_{-1,1,1}\left(\frac{x}{m}\right).$$

Определим $f_m = f\varphi_m$, тогда

$$\|f - f_m\|_{n,N} = 0 \ m \geq N.$$

Заметим, что при $m \geq N$ $f_m = f$ на $[-N, N]$, так как $\varphi_m \equiv 1$ на $[-N, N]$.

Следовательно, $\mathcal{D}$, а значит, и $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{E}$.

□

Утверждение 3.2. *$\mathcal{D}$ (а значит $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$) плотно в $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$ по метрикам пространств $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Покажем, что простые функции, то есть функции вида $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k I_{A_k}$ плотны в $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Здесь

$$I_{A_n}(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n \\ 0, & x \notin A_n \end{cases}$$

Множества A_n измеримы и приближаются объединением промежутков $\sqcup_{j=1}^{n_k}(a_j^k, b_j^k)$.

Множество A приближается множествами B_k такими, что

$$I_{B_k}(x) \ \to \ I_A(x).$$

Итого получаем, что простые функции вида $\sum C_k I_(a_k, b_k)$ плотны в $L_(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$.

Индикатор $I(a_k, b_k)$ приближаем функциями вида $\varphi_{a_k, b_k, \varepsilon}$ (рис. 3.2). □

Обобщенные функции

Определение 3.1. *Обобщенные функции* – пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$. Обозначение: $f \in \mathcal{D}'$. Действие функционала традиционно[4] обозначается как $< f, \varphi >$, где $\varphi \in \mathcal{D}$.

Для $f \in \mathcal{D}'$ $\exists\, C > 0$, $p_1, \ldots, p_m$ (допустимые полунормы) такие, что $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$

$$|< f, \varphi >| \le C \sum_{j=1}^{m} p_j(\varphi).$$

Определение 3.2. *Обобщенные функции умеренного (медленного роста)* (обозначение $:= \mathcal{S}'$) – это пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}$ таких, что для $f \in \mathcal{S}'$ $\exists\, C > 0$, $\| \cdot \|_{p_i, q_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ такие, что $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$

$$|< f, \varphi >| \le C \sum_{i=1}^{m} \|\varphi\|_{p_i, q_i}.$$

Определение 3.3. *Пространство обобщенных функций с компактным носителем* (обозначение $\mathcal{E}'$) – это пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}$.

Напомним, что ранее показали, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ плотно и непрерывно. Отсюда $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}'$.

Определение 3.4. Говорят, что $f \in L_{1,\text{loc}}$, если $\forall\, [a, b]$ $f \in L_1[a, b]$.

[4] Хотя, конечно, можно использовать и запись $f(\varphi)$.

Из определения 3.4 следует, что $L_1(\mathbb{R}) \subset L_{1,\text{loc}}$.

Пусть $f \in L_{1,\text{loc}}$. Определим $F_f \in \mathcal{D}'$ (покажем, что это действительно обобщенная функция, ниже) для $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ как

$$< F_f, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

– это линейная операция. Покажем непрерывность F_f в $\mathcal{D}$. Возьмем $\varphi \in \mathcal{D}$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \in [-a, a]$. Будем далее обозначать[5]

$$\mathcal{D}(-a, a) := \{\varphi \in \mathcal{D} :\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]\}.$$

Тогда

$$|< F_f, \varphi >| = \left|\int\limits_{-a}^{a} f(x)\varphi(x)dx\right| \le \int\limits_{-a}^{a} |f(x)||\varphi(x)|dx \le$$

$$\le \max_{[-a,a]} |\varphi(x)| \underbrace{\int\limits_{-a}^{a} |f(x)|dx}_{C(a)} = C(a)\|\varphi\|_{C[-a,a]}$$

– стандартная полунорма, следовательно, допустима. Отсюда получаем, что $F_f \in \mathcal{D}'$ (действительно непрерывный функционал).

Если F_f порождается функцией $f \in L_{1,\text{loc}}$, то вместо записи

$$< F_f, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

будем использовать запись

$$< f, \varphi >= \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Определение 3.5. Обобщенная функция F называется *регулярной*, если $\exists\ f \in L_{1,\text{loc}}$ такая, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< F, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

В этом случае будем вместо обозначения F писать f.

Остальные обобщенные функции – *сингулярны.*

[5] Аналогично можно ввести пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ для всех функций из $\mathcal{D}$, носитель которых лежит в Ω.

Сингулярность дельта-функции Дирака

Пример 3.2. Рассмотрим $\delta(x)$ – *дельта-функцию Дирака*, определяемую для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ как

$$< \delta(x), \varphi >= \varphi(0).$$

Убедимся, что $\delta(x)$ непрерывна. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(-a, a)$. Тогда

$$|< \delta(x), \varphi >| = |\varphi(0)| \leq \max_{[-a,a]} |\varphi| = \|\varphi\|_{C[-a,a]}.$$

Утверждение 3.3. *$\delta(x)$ – сингулярная обобщенная функция.*

Доказательство. (От противного) Пусть $\delta(x)$ – регулярная обобщенная функция. Тогда $\exists\ f \in L_{1,\text{loc}}$ такая, что

$$< \delta(x), \varphi >= \varphi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

1. Рассмотрим $\varphi \in \mathcal{D}(0, +\infty)$, то есть $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$, где $0 < a < b$.

   Возьмем $\varphi_{a,b}$ (рис. 2.1). Так как $a > 0$, $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\varphi_{a,b,\varepsilon} \subset \mathcal{D}(0, +\infty)$ (рис. 3.1). Тогда

   $$\varphi_{a,b,\varepsilon}(0) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\varphi_{a,b,\varepsilon}dx = 0.$$

   Так как $|\varphi_{a,b,\varepsilon}| \leq 1$, то

   $$|f(x)\varphi_{a,b,\varepsilon}| \leq |f| \in L_1[a - \varepsilon, b + \varepsilon].$$

   Тогда

   $$\int\limits_a^b f(x)dx = 0\ \forall\ [a, b] :\ 0 < a < b.$$

2. Рассмотрим $\varphi \in \mathcal{D}(-\infty, 0)$, то есть $\operatorname{supp}\varphi \in [a, b]$, $a < b < 0$.

   Пусть $0 < \varepsilon < b$. Рассмотрим $\varphi_{a,b,\varepsilon}$ (рис. 3.1). Здесь

   $$\varphi_{a,b,\varepsilon}(0) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\varphi_{a,b,\varepsilon}dx.$$

   По теореме Лебега о предельном переходе получим, что

   $$\int\limits_a^b f(x)dx = 0\ \forall\ [a, b] :\ a < b < 0.$$

Пусть

$$\int_a^b f dx = 0 \ \forall \ [a,b], \quad [a,b] \subset [0,\infty) \text{ или } [a,b] \subset (-\infty, 0].$$

Возьмем случай $0 < a < b$. Тогда $\forall\ x > 0$

$$\int_a^b f dx = 0.$$

Дифференцируя, получим, что $f(x) = 0 \ \forall\ x > 0$.

Аналогично можно получить, что $f(x) = 0 \ \forall\ x > 0$. Тогда $f = 0$ почти всюду и для всех $\varphi \in \mathcal{D}$

$$f\varphi = 0 \text{ почти всюду.} \tag{13}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Но $\exists\ \varphi \in \mathcal{D}$ такая, что $\varphi(0) \neq 0$ (например, $\varphi_{-1,1,1}(0) = 1$). Получаем противоречие с (13). □

Замечание 3.1. Итак, выше показали, что $\delta(x)$ не является регулярной. Интегральную запись (такая иногда встречается в литературе) следует понимать так:

$$\int \delta(x)\varphi(x)dx := < \delta, \varphi > = \varphi(0).$$

Пример 3.3. Определим

$$< p\frac{1}{x}, \varphi > = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]. \tag{14}$$

Линейность очевидна.

Покажем непрерывность из последнего представления в (14). Сделаем в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \ldots$ замену $x \mapsto -x$. Получим

$$< p\frac{1}{x}, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{-x}(-dx) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}(dx) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Существование такого интеграла следует из следующих соображений. Справедливо разложение

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \overline{o}(x^2),$$

$$\varphi(-x) = \varphi(0) - x\varphi'(0) + \overline{o}(x^2).$$

Тогда

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \frac{2x\varphi'(x) + \overline{o}(x^2)}{x} = 2\varphi'(0) + \overline{o}(x),$$

откуда и следует, что интеграл $\int\limits_0^\infty \dots$ существует.

Возьмем теперь $\varphi \in \mathcal{D}(-a, a)$. Тогда

$$\left| < p\frac{1}{x}, \varphi > \right| \leq \int\limits_0^a \frac{|\varphi'(t_x)|2x}{x} dx \leq 2a\|\varphi\|_{C^1[-a,a]}.$$

Следовательно, функционал $p\frac{1}{x}$ непрерывен.

В качестве упражнения остается показать, что $p\frac{1}{x}$ – сингулярная обобщенная функция.

Порядок сингулярности и носитель обобщенной функции

Определение 3.6. Пусть $f \in \mathcal{D}'$. Будем говорить, что порядок сингулярности $f \leq p$, $p \in \mathbb{N}_0$, если $\exists$ функции $f_0, f_1, \dots, f_p \in L_{1,\text{loc}}$ такие, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$|< f, \varphi >| = \sum_{j=0}^{p} \int\limits_{\mathbb{R}} f_j(x)\varphi^{(j)}(x)dx \tag{15}$$

Порядок сингулярности *в точности равен* p, если в представлении (15) число p нельзя уменьшить.

Из определения следует, что порядок сингулярности регулярных функций равен 0. Отметим, что из этого не следует, что порядок сингулярности сингулярной функции не может равняться 0.

Порядок сингулярности $\delta(x)$ и $p\frac{1}{x}$ равен 1.

Определение 3.7. Говорят, что $f \in \mathcal{D}'$ *равна нулю в точке* x_0, если $\exists\ U(x_0)$ – такая окрестность, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$

$$< f, \varphi >= 0.$$

Здесь

$$U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Определение 3.8. *Носитель обобщенной функции* – это множество

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R} \setminus \{ \text{ все точки, в которых } f \text{ равна } 0\}.$$

Из определения следует, что $\operatorname{supp} f$ замкнут (так как множество всех точек, в которых $f = 0$, открыто).

Пример 3.4.

$$\operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}.$$

Действительно, если $x > 0$, возьмем $0 < \delta < x$ такое, что $0 < x - \delta < x < x + \delta$. Тогда $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(x - \delta, x + \delta)$

$$< f, \varphi >= 0,$$

где $f = \delta(x)$. Аналогично для $x < 0$.

Так как

$$< f, \varphi_{-1,1,1} >= 1,$$

то $0 \in \operatorname{supp}\delta(x)$.

Лекция 4. Операции над обобщенными функциями

Идея введения операций над обобщенными функциями

Будем пока работать в пространстве $\mathcal{D}'$. Общая схема выглядит следующим образом.

1. Найти в $\mathcal{D}'$ «хорошее» множество, на котором мы умеем эти операции определять.

2. Продолжить (понять, как и почему это можно сделать) операции на все $\mathcal{D}'$.

Напомним, в прошлый раз закончили на понятии регулярных обобщенных функций в $\mathcal{D}'$. Говорили, что $f \in L_{1,\text{loc}}$, если $\forall\ [a,b] \subset \mathbb{R}\ f \in L_1[a,b]$.

Обсудим, как понимать регулярность в $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{E}'$.

Рассмотрим сначала $\mathcal{S}'$. В этом пространстве возьмем $f \in L_{1,\text{loc}}$ и $\exists\ C > 0$, $\exists\ p \in \mathbb{N}_0$ такие, что

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^p)$$

– растет не быстрее полинома. Тогда

$$g(x) := \frac{f(x)}{1 + |x|^{p+2}}$$

интегрируема. $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{f(x)}{1 + |x|^{p+2}}}(1 + |x|^{p+2})\varphi(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{|f(x)|}{1 + |x|^{p+2}}}_{g(x)}(1 + |x|^{p+2})|\varphi(x)|dx \leq \sup_x \left(\left(1 + |x|^{p+2}\right) |\varphi(x)| \right) \|g\|_{L_1} =$$

$$= \|g\|_{L_1} \left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{p+2,0} \right),$$

где, напомним,

$$\|\varphi\|_{p,q} := \sup_x \left| x^p \varphi^{(q)}(x) \right|.$$

Отсюда $f \in \mathcal{S}'$.

Перейдем к регулярности $\mathcal{E}'$. Пусть $f \in L_{1,\text{loc}}$ и $\operatorname{supp} f$ – компакт. Тогда $\exists\ [-N,N]$ такой, что $\operatorname{supp} f \subset [-N,N]$. Тогд для $\varphi \in \mathcal{E}$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f\varphi dx \right| \leq \int\limits_{-N}^{N} |f||\varphi|dx \leq \|\varphi\|_{C[-N,N]} \underbrace{\|f\|_{L_1[-N,N]}}_{<\infty}.$$

Достаточное подпространство

Отступим от конкретных пространств и расмотрим произвольное линейное пространство над некоторым полем.

Определение 4.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Обозначим через X^+ все линейные функционалы.

$M \subset X^+$ называется *достаточным подпространством*, если $\forall\ x \in X,\ x \neq 0,\ \exists\ f \in M$ такая, что $f(x) \neq 0$.

Таким образом, с помощью достаточного подпространства можно отличать ненулевые элементы от 0.

Лемма 4.1. *Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно незвисимые элементы из X, M – достаточное подпространство. Тогда $\forall\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n\ \exists\ f \in M$ такая, что*

$$f(x_i) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. (От противного) Пусть в M нет такого функционала.

Рассмотрим оператор

$$A: \ M \ \to \ \mathbb{C}^n,$$

$$A: \ f \ \mapsto \ (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)).$$

Заметим, что $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{C}^n$, то есть $\operatorname{Im} A \subset \mathbb{C}^n$.

Следовательно, в $(\mathbb{C}^n)'$ (двойственном пространстве) $\exists\ g \neq 0$ (ненулевой функционал) такой, что $g\Big|_{\operatorname{Im} A} = 0$.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим вектор

$$x := \sum_{i=1}^{n} g(e_i) x_i \in X.$$

Так как $g \not\equiv 0$, $\exists\ i$ такой, что $g(e_i) \neq 0$. Кроме того, x_i линейно независимы по условию. Тогда $x \neq 0$.

Пусть $f \in M$. Вычислим

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} g(e_i) x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(e_i) f(x_i) =$$

$$= g\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) e_i\right) = g\left(\underbrace{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)}_{\in \operatorname{Im} A}\right) = 0.$$

Получаем противоречие с определением достаточности подпространства. □

Для того, чтобы как-то продолжить операцию, нам нужна топология.

Напомним, что ранее рассматривали X и X^+ – линейные функционалы. На X^+ вводили $*$-слабую сходимость и $*$-слабую топологию.

Превратим X^+ в полинормированное пространство. Введем

$$p_x(f) = |f(x)| \ \forall \ x \in X.$$

Сходимость в X^+ – сходимость по всем полунормам p_x.

Определим *стандартный шар* в X^+ в $*$-слабой топологии:

$$U_{\varepsilon,x_1,x_2,\ldots,x_n}(f_0) := \left\{ f \in X^+ : \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \right\}, \ \ f_0 \in X^+, \ \ x_i \in X, \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \varepsilon > 0.$$

Все шары образуют базу топологии.

Если X – полинормированное пространство, то X^* – это все непрерывные функции на X. На X^* можно ввести $*$-слабую топологию ($*$-слабую сходимость).

Напомним, что такое $*$-слабая сходимость:

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f,$$

если $\forall \ x \in X$

$$f_n(x) \ \to \ f(x).$$

Теорема 4.1. *Пусть X – полинормированное пространство, X^* – сопряженное к нему, а $M \subset X^*$ – достаточное подпространство. Тогда M плотно в X^* в $*$-слабой топологии.*

Иными словами, $\forall \ f \in X^* \ \forall$

$$U_{\varepsilon,x_0,x_1,\ldots,x_n}(g) := \{ f \in X^* : \ |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n \}$$

$\exists \ f_0 \in M$ такая, что $f_0 \in U_{\varepsilon,x_0,x_1,\ldots,x_n}(g)$.

Доказательство. 1. Заметим, что если $\forall \ i \ f_0(x_i) = g(x_i)$, то

$$|f_0(x_i) - g(x_i)| = 0 < \varepsilon,$$

откуда $f_0 \in U_{\varepsilon,x_0,x_1,\ldots,x_n}(g)$.

2. Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то $\forall \ f \in X^* \ f(x_i) = g(x_i) = 0$. Тогда в окрестности $U_{\varepsilon,\underbrace{0,\ldots,0}_{n}}(g)$ лежат все функционлы из X^* (и из M).

3. Пусть теперь не все x_i равны 0. Перенумеруем $\{x_i\}$ так, чтобы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m \leq n$) – первые m элементов перенумерованной последовательности – были линейно независимы.

   Тогда $\forall \ k = 1, 2, \ldots, n$

   $$x_k = \sum_{i=1}^{m} C_{k,i} x_i$$

   – это разложение по линейно независимой системе.

   По лемме $\exists \ f_0 \in M$ такая, что

   $$f_0(x_i) = \underbrace{g(x_i)}_{\lambda i} \ ß = 1, 2, \ldots, m.$$

Проверим:

$$f_0(x_k) = \sum_{i=1}^{m} C_{k,i} f_0(x_i) = \sum_{i=1}^{m} C_{k,i} g(x_i) = g\left(\sum_{i=1}^{m} C_{k,i} x_0\right) = g(x_k), \ \forall\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда получаем, что

$$f_0 \in U_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(g).$$

□

Утверждение 4.1. • *$\mathcal{D}$ – достаточное подпространство в $\mathcal{D}'$;*

- *$\mathcal{S}$ – достаточное подпространство в $\mathcal{S}'$;*
- *$\mathcal{E}$ – достаточное подпространство в $\mathcal{E}'$.*

Доказательство. Покажем утверждение для $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$.

1. Очевидно, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

   Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ (тогда $f_\varphi \in \mathcal{D}'$), $\psi \in \mathcal{D}$. Тогда

   $$< f_\varphi, \psi >= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x)dx.$$

   Пусть $\operatorname{supp}\psi \in [-a, a]$. Тогда

   $$|< f_\varphi, \psi >| \le \int\limits_{-a}^{a} |\varphi(x)\psi(x)|\, dx \le \underbrace{\max_{[-a,a]} |\psi(x)|}_{=\|\psi\|_{C[-a,a]}} \underbrace{\|\varphi\|_{L_1[-a,a]}}_{=C(a)}.$$

   Итак, получаем, что

   $$|< f_\varphi, \psi >| \le C(a)\|\psi\|_{C[-a,a]}.$$

   Здесь $\|\psi\|_{C[-a,a]}$ – стандартная полунорма.

   По-другому, если $\varphi \in \mathcal{D}$, то $\varphi \in L_{1,\mathrm{loc}}$, а значит, φ – регулярная обобщенная функция.

2. Для $\forall\ \psi \in \mathcal{D}$ возьмем

   $$\varphi := \overline{\psi}.$$

   Тогда

   $$< f_{\overline{\psi}}, \psi >= \int |\psi(x)|^2 dx \neq 0,$$

   если $\psi \neq 0$.

□

Следствие. • $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$ в $*$-слабой топологии;

- $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$ в $*$-слабой топологии.

Доказательство. (Идея доказательства) Надо взять A – непрерывный оператор в $\mathcal{D}$ и продолжить его на $\mathcal{D}'$ так (продолжение обозначим $\widetilde{A}$), чтобы

$$< \widetilde{A} f_\varphi, \psi >=< f_\varphi, A\psi > .$$

Коммутативная диаграмма выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \stackrel{A}{\to} & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}' & \stackrel{\widetilde{A}}{\to} & \mathcal{D}' \end{array}$$

Пусть $\psi_n \to \psi$ в $\mathcal{D}$. Тогда

$$< \widetilde{A} f_\varphi, \psi_n >=< f_\varphi, A\psi_n > \ to \ < f_\varphi, A\psi >=:< \widetilde{A} f_\varphi, \psi > .$$

□

Операции над обобщенными функциями

Перейдем к обсуждению основных операций над обобщенными функциями.

1. **Дифференцирование**:

$$A = \frac{d}{dx}.$$

Утверждение 4.2. *Оператор $A = d/dx$ непрерывен в $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathcal{D}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(-a, a)$.

Для стандартной полунормы

$$\|A\varphi\|_{C^n[-a,a]} \le \|\varphi\|_{C^{n+1}[-a,a]},$$

и, с другой стороны,

$$\|A\varphi\|_{C^n[-a,a]} = \|\varphi'\|_{C^n[-a,a]} = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{[-a,a]} \left|\varphi^{(j)}(x)\right| .$$

Тогда

$$p(A\varphi) \le C(a)\|A\varphi\|_{C^n[-a,a]} \le C(a)\|\varphi\|_{C^{n+1}[-a,a]},$$

где p – допустимая полунорма. Непрерывность в $\mathcal{D}$ доказана.

Перейдем к $\mathcal{S}$. В $\mathcal{S}$

$$\|A\varphi\|_{p,q} = \sup_{c\in\mathbb{R}} \left| x^p \left(\varphi'\right)^{(q)} \right| = \|\varphi\|_{p,q+1}.$$

И, наконец, покажем непрерывность A в $\mathcal{E}$. Напомним, в $\mathcal{E}$ у нас был набор полунорм

$$\|\varphi\|_{n,N} = \|\varphi\|_{C^n[-N,N]}.$$

Тогда

$$\|A\varphi\|_{n,N} \le \|\varphi\|_{C^{n+1}[-N,N]}.$$

□

Теорема 4.2. $\exists!$ *$*-слабо непрерывное продолжение оператора $A = d/dx$ в $\mathcal{D}'$. Этот оператор определяется как*

$$< f', \varphi >= - < f, \varphi' >, \quad \forall\ f \in \mathcal{D}', \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D},$$

$$< \widetilde{A} f, \varphi >= - < f, A\varphi >,$$

где $\widetilde{A}$ – «минус» сопряженный оператор.

Доказательство. Для $\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ и $\psi \in \mathcal{D}$

$$< \widetilde{A} f_\varphi, \psi >=< \varphi', \psi >= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi' \psi dx = \underbrace{\varphi\psi\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int \varphi \psi' f x = - < \varphi, A\psi > .$$

Здесь $\operatorname{supp} \varphi, \psi$ – компакт. Далее продолжаем по $*$-слабой непрерывности. □

Пример 4.1. Из определения следует, что если $f \in AC$, то $f'_{\text{об}} = f'_{\text{кл}}$.
Действительно, $f' \in L_1$,

$$f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t) d\mu,$$

откуда следует, что f' – регулярная обобщенная функция. Тогда

$$< f', \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)' \varphi(x) dx.$$

Пример 4.2. Рассмотрим функцию Хевисайда[6]

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Функция $\theta(x) \in \mathcal{D}'$ и является регулярной обобщенной функцией. По определению,

$$< \theta, \varphi >= \int\limits_0^\infty \varphi(x) dx, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, классическая производная $\theta'_{\text{кл}} = 0$ почти всюду. Обобщенная производная

$$< \theta', \varphi >= - < \theta, \varphi' >= - \int\limits_0^\infty \varphi'(x) dx =$$

$$= - \left(\underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} - \varphi(0) \right) = \varphi(0) =< \delta(x), \varphi > .$$

Отсюда $\theta'_{\text{об}} = \delta(x)$.

[6] Для $\theta(x)$ как обобщенного функционала неважно, какое значение она принимает в отдельной точке $x = 0$.

Замечание 4.1. У обобщенной функции существует сколько угодно обобщенных производных. Пусть $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$< f^{(n)}, \varphi >= (-1)^n < f, \underbrace{\varphi^{(n)}}_{\in \mathcal{D}} >$$

Это свойство можно показать, применив математическую индукцию.

Пример 4.3.

$$< \delta'(x), \varphi >= - < \delta(x), \varphi' >= -\varphi'(0).$$

2. **Умножение на гладкую функцию**:

$$A\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(x), \quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{16}$$

Утверждение 4.3. *Оператор A (16) – непрерывный оператор в $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Для $\varphi \in \mathcal{D}(-a, a)$

$$\|A\varphi\|_{C^n[-a,a]} = \sum_{j=0}^{n} \max_{[-a,a]} \left|(\alpha(x)\varphi(x))^{(j)}\right|. \tag{17}$$

Для $\forall\ j = 0, 1, \ldots, n$

$$(\alpha(x)\varphi(x))^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \alpha^{(j-i)}(x)\varphi^{(i)}(x),$$

тогда

$$\max_{[-a,a]} \left|(\alpha(x)\varphi(x))^{(j)}\right| \le \sum_{i=0}^{j} C_j^i \max_{[-a,a]} (\alpha(x))^{(j-i)} \|\varphi\|_{C^i[-a,a]}.$$

Тогда (17) оценивается следующим образом:

$$\|A\varphi\|_{C^n[-a,a]} \le \sum_{i=0}^{n} C_i \|\varphi\|_{C^i[-a,a]} \le C\|\varphi\|_{C^n[-a,a]}.$$

□

Теорема 4.3. *Для $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\exists!$ $*$-слабо непрерывное продолжение оператора*

$$A: \ \mathcal{D} \ \to \ \mathcal{D},$$
$$A\varphi = \alpha(x)\varphi(x),$$

до оператора[7]

$$\widetilde{A}: \ \mathcal{D}' \ \to \ \mathcal{D}',$$
$$\widetilde{A}d = \alpha(x)f(x).$$

Этот оператор действует так:

$$< \widetilde{A}f, \varphi >=< f, A\varphi >, \quad \forall\ f \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

то есть $\widetilde{A}$ – $*$-слабо сопряженный оператор.

[7]Сейчас, когда вводим продолжение оператора, обозначим его как $\widetilde{A}$. Далее для продолжения будем использовать обозначение A (как и для первоначального оператора).

Доказательство. Для $\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ \psi \in \mathcal{D}$

$$< \widetilde{A}_\varphi, \psi >= \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\alpha(x)\varphi(x)}_{\in\mathcal{D}} \psi(x)dx = \int \varphi(x) \left(\underbrace{\alpha(x)\psi(x)}_{\in\mathcal{D}} \right) dx =< f_\varphi, A\psi > .$$

В силу $*$-слабой плотности $\exists$ продолжение до $\widetilde{A}$. Оно единственно в силу хаусдорфовости $*$-слабой топологии. $\square$

В $\mathcal{S}'$ можно умножать на $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $|\alpha(x)| \leq C\,(1 + |x|^p)$, $C > 0$, $p \in \mathbb{N}_0$, со всеми производными.

Например, на функции

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i,$$

$$\alpha(x) = \cos x, \quad \alpha(x) = \sin(x)$$

умножать можно, а на функции

$$\alpha(x) = e^{x^2}, \quad \alpha(x) = \cos x e^{x^2}$$

умножать нельзя.

3. **Замена переменных**. Пусть $f \in \mathcal{D}'$, $\alpha \in C^\infty$. Обсудим, как понимать $f(\alpha(x))$, и, в частности, $\delta(ax + b)$.

Пусть

$$\alpha(x) :\ \mathbb{R} \ \to\ \mathbb{R}$$

взаимно-однозначно, $\alpha(x) \in C^\infty$ и $\alpha(x) \neq 0$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\psi \in \mathcal{D}$. Сделаем переход $\varphi \ \mapsto\ f_\varphi \in \mathcal{D}'$. Поймем, как будет выглядеть

$$< \varphi\left(\alpha(x)\right), \psi >= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(\alpha(x)\right) \psi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\psi\left(\alpha^{-1}(y)\right)\left(\alpha^{-1}(y)\right)' dy,$$

где, если $\alpha(x) = y$, $\alpha^{-1}(y) = x$ – обратна формула.

Теорема 4.4. *Для $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$,*

$$\alpha :\ \mathbb{R} \ \to\ \mathbb{R}$$

биективно, $\alpha'(x) = 0$ определена замена переменных в $\mathcal{D}'$, которая определяется $\forall$ $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$ как

$$< f\left(\alpha(x)\right), \varphi(x) >=< f(y), \varphi\left(\alpha^{-1}(y)\right)\left(\alpha^{-1}(y)\right)' > .$$

Пример 4.4. Рассмотрим $\delta(ax + b)$. Здесь $\alpha(x) = y = ax + b$, откуда $x = (y - b)/a$, $a \neq 0$. Тогда

$$< \delta(ax + b), \varphi(x) >=< \delta(y), \varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a} >= \varphi\left(\frac{-b}{a}\right)\frac{1}{a} =< \frac{1}{a}\delta\left(x + \frac{b}{a}\right), \varphi > .$$

Рассмотрим еще одну теорему, которая позволит вычислять производные для кусочно-гладких функций.

Пример 4.5. Посмотрим на функцию $f = [x]$ – целую часть x. Ее классическая производная $f'_{\text{кл}} = 0$ почти всюду. А вот чему равна ее обобщенная производная $f'_{\text{об}}$, нужно понять.

Определение 4.2. Говорят, что $f \in KC^1(\mathbb{R})$ (*кусочно-гладкая функция*), если $\exists$ $\{x_i\}_{i=1}^N$, $N \leq \infty$ (если $N = \infty$, то предельная точка $\{x_i\}$ только ∞) и $f \in C^1(x_{i-1}, x_i)$ $\forall$ i. Кроме того, $\exists$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} f(x_i \pm \varepsilon) =: f(x_i \pm 0)$$

и

$$h := f(x_i + 0) - f(x_i - 0) < \infty.$$

Теорема 4.5.

$$f'_{об} = \underbrace{f'_{кл}}_{\exists\ п.в.} + \sum_{i=1}^{N} h_i \delta(x - x_i).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= - \left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi'(x)dx \right) = - \left(\sum f(x)\varphi(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\varphi(x)dx \right). \qquad (18)$$

Здесь

$$f(x)\varphi(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = f(x_i - 0)\varphi(x_i) - f(x_{i-1} + 0)\varphi(x_{i-1}),$$

а

$$f(x)\varphi(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = f(x_{i+1} - 0)\varphi(x_{i+1}) - f(x_i + 0)\varphi(x_i),$$

Из двух записей выше видно, что слагаемые в сумме $\sum f(x)\varphi(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}$ группируются как

$$\varphi(x_i)\left(f(x_i - 0) - f(x_i + 0)\right) = -\varphi(x_i)h_i.$$

Продолжая (18), окончательно получаем, что

$$< f', \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=1}^{N} h_i \underbrace{\varphi(x_i)}_{<\delta(x-x_i),\varphi>}.$$

□

Вернемся к примеру 4.5. С учетом теоремы 4.5 получим, что

$$f'_{\text{об}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta(x - i).$$

Лекция 5. Решение простейших уравнений. Структура обобщенных функций

Решение простейших уравнений

Обсудим решение некоторых простейших уравнений в обобщенных функциях.

1. Уравнение

$$f' = 0, \quad f \in \mathcal{D}'. \tag{19}$$

Понимание этого уравнение следующее. Для $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< f', \varphi >=< 0, \varphi >= 0,$$

что, с учетом определения производной обобщенной функции, то же самое, что

$$< -f, \varphi' >=< f, \varphi' >= 0. \tag{20}$$

Введем пространство

$$\mathcal{D}_0 := \{\psi \in \mathcal{D} :\ \exists\ \varphi \in \mathcal{D} :\ \psi = \varphi'\} \subset \mathcal{D}.$$

Из (20)

$$f\Big|_{\mathcal{D}_0} = 0.$$

Опишем $\mathcal{D}_0$ как ядро некоторого функцинала из $\mathcal{D}'$.

Утверждение 5.1. $\psi \in \mathcal{D}_0 \iff$

$$\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0}_{<1,\psi>=0}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int\limits_{a}^{b} \varphi'(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \varphi(b) - \varphi(a)\ \to 0$$

в силу финитности функции φ.

$\Leftarrow$ Положим

$$\varphi(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(t)dt.$$

Так как $\psi \in \mathcal{D}$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $\operatorname{supp}\psi \in [a, b]$. Если $x < a$, очевидно, $\varphi(x) \equiv 0$. Если же $x > b$, то $\varphi(x) \equiv$ const.

Но по условию

$$\lim_{b \to \infty} \int_{-\infty}^{b} \psi(t)dt = 0,$$

откуда получаем, что правее точки b $\varphi(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\psi = \varphi'$.

В $\mathcal{D}$ $\exists$ φ_1 такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)dt = 1.$$

Например, можно взять $C\varphi_{-1,1,\varepsilon}$ или $C\varphi_{-1,1}$. Константа C здесь выбирается таким образом, чтобы

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{-1,1}(t)dt = 1.$$

Для $\forall$ $\varphi \in \mathcal{D}$ положим

$$\varphi_0(x) := \varphi(x) - \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 0,$$

откуда $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$. □

Так как $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$,

$$< f, \varphi_0 >= 0.$$

С другой стороны,

$$< f, \varphi_0 >=< f, \varphi > - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt \underbrace{< f, \varphi_1 >}_{=\text{const}} = 0,$$

то есть

$$< f, \varphi >= C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt =< C, \varphi > .$$

Поэтому решением уравнения (20) является константа, то есть $f \equiv \text{const}$.

Следствие. В классе $\mathcal{D}'$ $\forall$ $f \in \mathcal{D}'$ $\exists$ первообразная, то есть $\forall$ $g \in \mathcal{D}'$ $\exists$ решение уравнения

$$f' = g. \tag{21}$$

Если $\exists$ другое решение $h \in \mathcal{D}'$, то $f - h = C \equiv \text{const}$.

Доказательство. Запись (21) означает, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< f', \varphi >=< g, \varphi > .$$

Тогда

$$- < f, \varphi' >=< g, \varphi > /$$

Обозначим $\psi := \varphi'$. Тогда

$$< f, \psi >=< g, -\int\limits_{-\infty}^{x} \psi(t)dt > .$$

По показанному ранее, $\psi \in \mathcal{D}_0$. Знаем f на $\mathcal{D}_0$. Надо продолжить f на все $\mathcal{D}$.

Возьмем произвольную $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)dt = 1.$$

Определим проекцию $\varphi \in \mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_0$:

$$\varphi_0(x) := \varphi(x) - \varphi_1(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt.$$

Определим первообразную f:

$$< f, \varphi >=< g, -\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt.$$

Проверим: если $\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$, то $\varphi_{n0} \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$, где φ_{n0} – проекции функций φ_n:

$$\varphi_{n0} := \varphi_n(x) - \varphi_1(x) \int \varphi_n(t)dt,$$

или, эквивалентно,

$$\varphi_{n0} := \varphi_n(x) - \varphi_1(x) < 1, \varphi_n >,$$

откуда $\varphi_{n0} \to 0$.

Если $\exists$ другая первообразная h такая, что $h' = g$, то, с учетом $f' = g$, получим, что

$$(f - h)' = 0,$$

откуда по первой части (решение уравнения) получаем, что $f - h \equiv \text{const}$. □

2. Рассмотрим (не дифференциальное) уравнение

$$xf = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) понимается так. $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< xf, \varphi >= 0,$$

что эквивалентно тому, что

$$< f, x\varphi >= 0.$$

Положим

$$\mathcal{D}_0 := \{\psi \in \mathcal{D} :\ \exists\ \ \varphi \in \mathcal{D} :\ \ \psi = x\varphi\}.$$

Заметим, что $f\Big|_{\mathcal{D}_0} = 0$. Надо продолжить f на все $\mathcal{D}$.

Аналогично соображениям выше, опишем $\mathcal{D}_0$ как ядро некоторого функционала из $\mathcal{D}'$.

Утверждение 5.2. $\psi \in \mathcal{D}_0 \iff \psi(0) =< \delta(x), \psi >= 0.$

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть $\psi \in \mathcal{D}$. Тогда $\psi \in C^\infty$,

$$\psi(x) = \psi(0) + x\psi'(0) + \overline{o}(x),$$

откуда

$$\psi(x) = x\left(\psi'(0) + \overline{o}(1)\right).$$

Заметим, что $\psi(x) \in C^\infty$ и финитна. Тогда $\psi'(0) + \overline{o}(1) =: \varphi \in C^\infty$ и финитна, а значит, $\varphi \in \mathcal{D}$. $\square$

Возьмем произвольную $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ такую, что $\varphi_1(0) = 1$ (например, $\varphi_{-1,1,\varepsilon}$). Для $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ строим проекцию

$$\varphi_0(x) := \varphi(x) - \varphi_1(x)\varphi(0),$$

откуда $\varphi_0(x) = 0$, а значит, $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$. Из того, что

$$< f, \varphi_0 >= 0,$$

следует, что

$$< f, \varphi > -\varphi(0)\underbrace{< f, \varphi_1 >}_{=\text{const}} = 0,$$

откуда

$$< f, \varphi >= C\varphi(0) =< C\delta(x), \varphi > .$$

Получили, что все решения уравнения (22) это $f = C\delta(x)$, $C \in \mathbb{C}$.

Порядок сингулярности

Напомним, ранее было понятие порядка сингулярности обобщенной функции. *Порядок сингулярности* $\leq p \in \mathbb{N}_0$, если $\exists\ f_0, f_1, \ldots, f_p \in L_{1,\text{loc}}$ такие, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< f, \varphi >= \sum_{j=0}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} f_j \varphi^{(j)} dx, \tag{23}$$

и в точности равен p, если число p в (23) нельзя уменьшить.

Разберем подробнее, почему в определении порядка сингулярности сначала говорится, что он $\leq p$. Напомним, что ранее была функция $\delta(x)$, кроме того, мы проверяли, что $\theta' = \delta(x)$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Кроме того,

$$X_+' = \theta, \quad X_+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Можно продолжить цепочку рассуждений дальше и построить

$$\left(\frac{X_+^2}{2}\right)' = X_+$$

и так далее. Эта цепочка показывает, что нельзя ограничить порядок сингулярности сверху:

$$< \delta(x), \varphi >= - < \theta, \varphi' >=< X_+, \varphi'' >= - < \left(\frac{X_+^2}{2}\right)', \varphi''' > .$$

Задача 5.1. *Решить в* $\mathcal{D}'$

$$x^n f^{(m)} = 0.$$

Структура обобщенных функций

Напомним, что

$$\mathcal{D}(a,b) = \{\varphi \in \mathcal{D} : \ \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]\}.$$

Лемма 5.1. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'$. *Тогда* $\forall\ (a,b)\ \exists\ C := C(a,b,f),\ \exists\ n = n(a,b,f) \in \mathbb{N}_0$ *такие, что* $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

$$|< f, \varphi >| \leq C\|\varphi\|_{C^n[a,b]}.$$

Доказательство. (От противного) Пусть утверждение леммы не выполняется. Тогда $\forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ \varphi_N \in \mathcal{D}(a,b)$ такая, что

$$|< f, \varphi_N >| > N\|\varphi_N\|_{C^N[a,b]}.$$

Рассмотрим

$$\psi_N := \frac{\varphi_N}{N\|\varphi_N\|_{C^N[a,b]}} \ \xrightarrow{\mathcal{D}}\ 0,$$

но $| < f, \psi_N > | \geq 1$. Получаем противоречие с непрерывностью функционала f. $\square$

Теорема 5.1. $\forall\ f \in \mathcal{D}',\ \forall\ (a,b)\ \exists\ m \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* m *зависит от* f u $(a,b),\ \exists$ $f_0, f_1, \ldots, f_m \in L_2[a,b]$ *такие, что* $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

$$< f, \varphi >= \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}} f_j(x)\varphi^{(j)}(x)dx = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j < f_j^{(j)}, \varphi >,$$

где второе представление следует из того, что

$$< f_j, \varphi^{(j)} >= (-1)^j < f_j^{(j)}, \varphi > .$$

Доказательство. Из непрерывности функционала f следует, что $\exists\, C > 0$ и $\exists\, m \in \mathbb{N}$ такие, чт $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

$$| < f, \varphi > | \leq C \|\varphi\|_{C^{m-1}[a,b]}.$$

Норма в $C^{m-1}[a,b]$ имеет вид

$$\|\varphi\|_{C^{m-1}[a,b]} = \sum_{j=0}^{m-1} \max_{[a,b]} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Для $\forall\ j = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\varphi^{(j)}(x) = \int_a^x \varphi^{(j+1)}(t)dt.$$

Напомним, что $\varphi^{(j)}(a) = 0\ \forall\ j \geq 0$.

Справедлива оценка

$$\left|\varphi^{(j)}(x)\right| \leq \int_a^x 1 \cdot \left|\varphi^{(j+1)}(t)\right| dt \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b \left|\varphi^{(j+1)}(x)\right|^2 dx} \sqrt{\int_a^b 1^2 dt} = C \sqrt{\int_a^b \left|\varphi^{(j+1)}(t)\right|^2 dt}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\max_{[a,b]} \left|\varphi^{(j)}(x)\right| \leq C \sqrt{\int_a^b \left|\varphi^{(j+1)}(x)\right|^2 dx}.$$

Тогда

$$|< f, \varphi >| \leq C_1 \sqrt{\sum_{j=0}^{m} \int_a^b \left|\varphi^{(j+1)}(x)\right|^2 dx}. \tag{24}$$

Здесь константа изменилась в силу того, что для

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \ldots + \sqrt{A_m} \leq \sqrt{m+1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m} A_i}.$$

Рассмотрим пространство H_m: пополнение $\mathcal{D}(a,b)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{H_m} = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \varphi^{(j)}(x) \overline{\psi^{(j)}(x)} dx.$$

Квадрат этой нормы имеет вид

$$\|\varphi\|^2_{H_m} = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b || \, dx = \sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|^2_{L_2[a,b]}.$$

H_m – гильбертово пространство. Неравенство (24) означает, что f непрерывен в H_m на функциях из $\mathcal{D}(a,b)$. Так как $\mathcal{D}(a,b)$ плотно в H_m, то можно продолжить f по непрерывности на все пространство H_m.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в H_m. Тогда

$$\|\varphi_n - \varphi_k\|^2 = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \left|\varphi_n^{(j)}(x) - \varphi_k^{(j)}(x)\right|^2 dx \;\to\; 0, \quad n,k \to \infty,$$

то есть $\forall\, j = 0,1,\ldots,m$ последовательности $\left\{\varphi_n^{(j)}\right\}$ фундаментальна в $L_2[a,b]$. Тогда $\forall\, j = 0,1,\ldots,m\ \exists$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(j)} =: \varphi^{[j]} \in L_2[a,b].$$

Каждому элементу φ из H_m можно сопоставить набор $\left\{\varphi^{[j]}\right\}_{j=0}^{m}$,

$$(\varphi,\psi)_{H_m} = \sum_{j=0}^{m} \left(\varphi^{[j]}, \psi^{[j]}\right)_{L_2[a,b]}.$$

По теореме Рисса,

$$< f, \varphi >= (\{f\}, \varphi)_{H_m},$$

то есть функционалу f сопоставляется $\{f\} \in H_m$. Элементу $\{f\}$, в свою очередь, ставится в соответствие набор $\left\{f^{[j]}\right\}_{j=0}^{m}$, где $\forall\, j = 0,1,\ldots,m\ f^{[j]} \in L_2[a,b]$. Таким образом,

$$< f, \varphi >= \sum_{j=0}^{m} \left(f^{[j]}, \varphi^{[j]}\right)_{L_2[a,b]}.$$

Но на $\varphi \in \mathcal{D}[a,b]$

$$< f, \varphi >= \sum_{j=0}^{m} \left(\varphi^{(j)},$$

Локально конечное покрытие

Для того, чтобы перейти к случаю всего пространства, надо научиться «резать» прямую на отрезки.

Пусть $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$, $\forall\, U_k$ – открытая ограниченная область и $\forall\, x\ \exists$ лишь *конечное* число областей $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots, U_{k_m}$, k_i зависят от x, таких, что $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{k_i}$.

Иными словами, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *локально конечное покрытие* – то есть конечное покрытие открытыми ограниченными областями.

На прямой открытое множество U имеет вид

$$U = \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k), \quad N \leq \infty.$$

При этом, вообще говоря, может быть такое, что одно из $b_i = +\infty$, одно из $a_i = -\infty$. Поскольку выше мы требовали, что U_k ограничены, такой ситуации быть не может (все a_i и b_i конечны).

Пример 5.1. Локально конечным будет покрытие $U_k = (k, k+2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 5.2. *Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ – локально конечное покрытие $\mathbb{R}$ открытыми и ограниченными областями. Тогда $\exists$ система функций $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, обладающая следующими свойствами:*

1. $e_k \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;
2. $\forall\ k\ 0 \leq e_k(x) \leq 1$;
3. $supp\, e_k \subset U_k$;
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k(x) \equiv 1$.

Такая система функций называется разложением (или разбиением) единицы.

Доказательство. Рассмотрим замкнутое множество

$$F_1 := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} U_k.$$

Построим открытое множество V_1 такое, что $F_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$. Кроме того, построим функцию $h_1 \in \mathcal{D}$ такую, что

$$h_1\Big|_{V_1} \equiv 1, \quad \operatorname{supp} h_1 \subset U_1$$

(h_1 – функция типа $\varphi_{a,b,\varepsilon}$).

Далее, предположим, построили $V_1, V_2, \ldots, V_m$ и $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Рассмотрим

$$\mathbb{R} \setminus \left[\left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i \right) \cup \left(\bigcup_{k=m+2}^{\infty} U_k \right) \right] =: F_{m+1}.$$

Это замкнутое множество. Строим множество V_{m+1} такое, что

$$F_{\subset} V_{m+1} \subset \overline{V_{m+1}} \subset U_{m+1}.$$

Далее построим функцию $h_{m+1} \in \mathcal{D}$ такую, что

$$h_{m+1}\Big|_{V_{m+1}} \equiv 1, \quad \operatorname{supp} h_{m+1} \subset U_{m+1}.$$

Итак, продолжая рассуждения подобным образом, получим последовательность функций $\{h_k\}$ такую, что $\forall\ x$

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \neq 0$$

и $\forall\ x$ ряд сходится (так как локально конечное покрытие).

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \mathbb{R}$$

– локально конечное покрытие открытыми и ограниченными областями. Положим

$$e_k(x) := \frac{h_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k(x)}.$$

Система функций с требуемыми свойствами построена. □

Теорема о представлении произвольной обобщенной функции

Теорема 5.2. *Пусть $f \in \mathcal{D}'$. Тогда $\exists\ g_l \in L_2(\Omega_l)$, где Ω_l – ограниченная область и $dist(\Omega_l, 0)\ \to\ \infty$, $l \to \infty$, где $dist(\Omega_l, 0) = \inf\limits_{x\in\Omega_l} |x|$, и $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$*

$$< f, \varphi >= \sum_{l=1}^{<} g_l^{(l)}, \varphi > .$$

Заметим, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ этот ряд конечен.

Доказательство. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ – локально конечное покрытие $\mathbb{R}$ открытыми и ограниченными областями. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующее разбиение единицы.

Тогда

$$< f, \varphi >=< f, \sum_{k=1}^{\infty} \varphi e_{k\,\text{supp}\subset U_k} >= \sum_{k=1}^{\infty} < f, \underbrace{\varphi e_k}_{\text{supp}\subset U_k} >= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k} < f_{kj}, (\varphi e_k)^{(j)} >,$$

где $f_{kj} \in L_2(U_k)$. Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k} < f_{kj}, (\varphi e_k)^{(j)} >= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{l=0}^{j} C_j^l < f_{kj}, e_k^{(jl)}\varphi^{(l)} >=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{l=0}^{j} C_j^l < \underbrace{f_{kj}e_k^{(j-l)}}_{\in L_2(U_k)}, \varphi^{(l)} >= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{l=0}^{j} C_j^l(-1)^l < \left(f_{kj}e_k^{(j-l)}\right)^{(l)}, \varphi >=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{m_k}\sum_{j=l}^{m_k} C_j^l(-1)^l < \left(f_{kj}e_k^{(j-l)}\right)^{(l)}, \varphi >= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{f=0}^{m_k} < g_{kl}^{(l)}, \varphi >,$$

где

$$g_{kl} := \sum_{j=l}^{m_k} C_j^l (-1)^l f_{kj} e_k^{j-l}.$$

Положим

$$g_l := \sum_{k=1}^{\infty} g_{kl}$$

и зафиксируем l. Тогда в $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_{kl}$ ненулевые слагаемые только по тем k, для которых $l \le m_k$. Следовательно, сумма конечна.

Обозначим

$$\Omega_l := \bigcup_{k:\ l \le m_k} U_k.$$

Для любого l будет конечное число таких U_k. Отсюда получаем, что $_l$ ограничено.

Так как U_k – локально конечное покрытие, то Ω_l – тоже локально конечное покрытие, а значит,

$$\operatorname{dist}(\Omega_l, 0) \ \to \ \infty.$$

Итого, получили, что

$$< f, \varphi >= \sum_{l=0}^{\infty} < g_l^{(l)}, \varphi >$$

– ряд формально бесконечный, но дл каждой φ этот ряд конечен. □

Лекция 6. Теоремы о носителе. Преобразование Фурье обобщенных функций

Теорема о носителе

Продолжим разговор о структуре обобщенных функций.

Определение 6.1. Пусть $f \in \mathcal{D}'$. Будем говорить, что f *равна* 0 *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\exists$ открытая окрестность этой точки U_{x_0} такая, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{x_0}$

$$< f, \varphi >= 0.$$

Множество точек, в которых $f = 0$, открыто, а

$$\operatorname{supp} f := \mathbb{R} \setminus \{ \text{ множество точек, в которых } f = 0\}$$

– замкнуто.

Теорема 6.1. *(О носителе) Пусть $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$. Тогда*

$$< f, \varphi >= 0.$$

Замечание 6.1. Это обобщение такого факта для обычных функций: если $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Доказательство. (Теорема 6.1) Пусть $x \in \operatorname{supp}\varphi$. Тогда $\notin \operatorname{supp} f$. Следовательно, $\exists$ окрестность точки x U_x такая, что $\forall\ \psi \in \mathcal{D}$ таких, что $\operatorname{supp}\psi \subset U_x$,

$$< f, \psi >= 0.$$

Построим открытое множество V_x такое, что

$$V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$$

для всех $x \in \operatorname{supp}\varphi$. Тогда $\{V_x\}_{x\in\operatorname{supp}\varphi}$ – покрытие $\operatorname{supp}\varphi$ – компакта. Тогда $\exists$ конечное подпокрытие $\{V_{x_k}\}_{k=1}^n$. Положим

$$V := \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}.$$

Очевидно, $\operatorname{supp}\varphi \subset V$.

Построим функции $\psi_k \in \mathcal{D}$ такие, что

$$\psi_k\Big|_{V_{x_k}} > 0 \text{ и } \operatorname{supp}\psi_k \subset U_{x_k}.$$

Далее определим

$$\varphi_k(x) = \frac{\psi_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \psi_k}.$$

Заметим, что сумма в знаменателе $\neq 0$. φ_k обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_k \in \mathcal{D}$;
2. $\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_{x_k}$;
3. $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \equiv 1$ на V.

Тогда

$$\varphi = \varphi \sum_{k=1}^{n} \varphi_k.$$

Отсюда

$$< f, \varphi >= \sum_{k=1}^{n} < f, \varphi \cdot \varphi_k >= 0.$$

□

Теорема о разложении функции с одноточечным носителем

Теорема 6.2. *Пусть $f \in \mathcal{D}'$ и $supp\, f = \{x_0\}$. Тогда*

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta^{(k)}(x - x_0)$$

(сумма обязательно конечна).

Доказательство. Без ограничения общности будем считать что $x_0 = 0$.

1. Выберем отрезок, содержащий начало координат. Например, возьмем $[-2, 2]$. Напомним, что была следующая теорема. $\exists\, C > 0$, $\exists\, m \in \mathbb{N}_0$, $\exists\, g_j \in L_2[-2, 2]$ такие, что $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(-2, 2)$

$$< f, \varphi >= \sum_{j=0}^{m} \int_{-2}^{2} g_j(x) \varphi^{(j)}(x) dx.$$

2. Покажем, что из такого представления для функций $\varphi \in \mathcal{D}(-2, 2)$ и обладающих свойством

$$\varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

будет следовать, что

$$< f, \varphi >= 0.$$

Покажем далее, что для функций $\varphi \in \mathcal{D}(-2, 2)$, $\varphi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ можно построить последовательность функций φ_n таких, что

1) $\varphi_n \equiv \varphi$ на окрестности нуля $U_n \subset [-2, 2]$,

$$\varphi_n \Big|_{U_n} \equiv \varphi.$$

Для каждой φ_n эта окрестность своя.

2) $\forall\ j = 0, 1, 2, \ldots, m$

$$\varphi_n^{(j)} \underset{[-2,2]}{\rightrightarrows} 0.$$

Если такая последовательность уже построена, то

$$< f, \varphi >=< f, \varphi_n >,$$

$$\varphi - \varphi_n\Big|_{U_n} = 0,$$

$$\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} (\varphi - \varphi_n) = \emptyset,$$

откуда

$$< f, \varphi - \varphi_n >= 0,$$

то есть

$$< f, \varphi >=< f, \varphi_n > .$$

Тогда

$$< f, \varphi >=< f, \varphi_n >= \sum_{j=0}^{m} \int_{-2}^{2} g_j(x) \varphi_n^{(j)}(x) dx.$$

Так как

$$\left|g_j(x)\varphi_n^{(j)}\right| \leq \underbrace{\max_{[-2,2]} \left|\varphi_n^{(j)}(x)\right|}_{\to 0} |g_j|,$$

получим, что

$$< f, \varphi_n > \to\ 0, \quad n\ \to\ \infty,$$

откуда

$$< f, \varphi >= 0.$$

3. Осталось построить такую последовательность функций. Введем обозначение $e(x) = \varphi_{-1,1,1}(x)$, $e(nx) = \varphi_{-1,1,1}(nx)$.

   Определим

   $$\varphi_n(x) = \varphi(x) e(nx),$$

   тогда

   $$\varphi_n\Big|_{[-1/n,1/n]} \equiv \varphi.$$

   Для каждого $k = 0, 1, \ldots, m$ посмотрим на $\varphi_n^{(k)}$:

   $$\varphi_n^{(k)}(x) = (\varphi(x)e(nx))^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi^{(k-j)}(x) \left(e(nx)\right)^{(j)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi^{(k-j)} e^{(j)}(nx) n^j,$$

   где

   $$\left|e^{(j)}(nx)n^j\right| \leq M n^j,$$

   где

   $$M := \max_{x\in[-2,2]} \max_{1\leq j\leq m} |e^{(j)}(x)|.$$

Осталось оценить $\varphi^{(n-j)}$. Если $\varphi^{(m)}(0) = 0$, то

$$\varphi^{(m)}\Big|_{[-2/n,2/n]} = \overline{o}(1), \quad n \to \infty.$$

Интегрируем на $[-2/n, 2/n]$. Для $x \in [-2/n, 2/n]$ получим

$$\varphi^{(m-1)}(x) = \int\limits_{-2/n}^{x} \varphi^{(m)}(t)dt.$$

Тогда $\forall\ x \in [-2/n, 2/n]$

$$|\varphi^{(m-1)}(x)| \le \int\limits_{-2/n}^{2/n} |\varphi^{(m)}(t)|dt \le \overline{o}(1)\frac{4}{n} = \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда

$$\max_{[-2/n,2/n]} |\varphi^{(m-1)}(x)| = \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично

$$\max_{[-2/n,2/n]} |\varphi^{(m-j)}(x)| = \overline{o}\left(\frac{1}{n^j}\right).$$

Тогда

$$\left|\varphi^{(k-j)}(x)\right| = \left|\varphi^{(m-(m-(k-j))}(x)\right| = \overline{o}\left(\frac{n^{m-k+j}}{}\right)$$

равномерно по x. Отсюда

$$\left|\varphi^{(k)}(x)\right| \le \sum_{j=0}^{n} C_k^j \overline{o}\left(\frac{1}{n^{m-k+j}}\right) n^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{j} C_k^j \overline{o}\left(\frac{1}{n^{m-k}}\right) = \overline{o}(1) \to 0, \quad \forall\ k = 0, 1, \ldots, m.$$

Самое плохое слагаемое – это $j = k = m \to \overline{o}(1)$.

Итак, показали, что $\varphi_n^{(j)} \underset{[-2,2]}{\rightrightarrows} 0$, $n \to \infty$, $\forall\ j = 0, 1, \ldots, m$.

$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}\ \exists$ тейлоровское представление

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j + \psi_{m+1}(x),$$

$\psi_{m+1} \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\psi_{m+1}^{(k)}(0_=0$, $k = 0, 1, \ldots, m$. К такому представлению нельзя применить f почленно, так как каждое слагаемое не лежит в $\mathcal{D}$. Умножим на $e(x) = \varphi_{-1,1,1}(x)$:

$$\varphi - \varphi e\Big|_{(-1,1)} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{supp}(\varphi - e\varphi) \cap \{0\} = 0.$$

По теореме о носителе

$$< f, \varphi - e\varphi >= 0,$$

откуда

$$< f, \varphi >=< f, \varphi e > .$$

В представлении

$$\varphi e = \sum_{j=0}^{m} \varphi^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}e(x) + \psi_{m+1}(x)e(x)$$

каждое слагаемое лежит в $\mathcal{D}$. Так как

$$e\Big|_{[-1,1]} \equiv 1,$$

$$(\psi_{m+1}e)^{(j)}(0) = 0, \quad \forall\, j = 0, 1, \ldots, m.$$

Итак, так как

$$< f, \psi_{m+1} >= 0,$$

то

$$< f, \varphi >=< f, \varphi e >= \sum_{j=0}^{m} \varphi^{(j)}(0)_{=(-1)^j <\delta^{(j)}(x),\varphi>} < f, \frac{x^j}{j!}e(x) >$$

Положим

$$C_j = (-1)^j < f, \frac{x^j}{j!}e(x) > .$$

Тогда $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< f, \varphi >= \sum_{j=0}^{m} C_j \delta^{(j)}(x).$$

□

Теорема о компактности носителя

Напомним определение пространства

$$\mathcal{E} = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{с полунормами } \|\varphi\|_{C^n[-N,N]}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}_0\right\},$$

а $\mathcal{E}'$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}$ (обобщенные функции с компактным носителем).

Теорема 6.3. *$f \in \mathcal{E}'$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{D}'$, $\operatorname{supp} f$ – компакт.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $f \in \mathcal{E}'$. Тогда $\exists\, C > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ такие, что $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}$

$$|< f, \varphi >| \leq C\|\varphi\|_{C^n[-N,N]}. \tag{25}$$

Напомним следующий факт. Пусть X – полинормированное пространство, $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ – полунормы. Тогда то, что f – непрерывный функционал, означает, что $\exists\, C > 0$, $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые зависят только от f такие, что $\forall\, x \in X$

$$|f(x)| \leq C \sum_{j=1}^{n} p_{\alpha_j}(x).$$

Кроме того, напомним, что

$$\|\varphi\|_{C^n[-N,N]} = \sum_{j=0}^{n} \max_{x\in[-N,N]} \left|\varphi^{(j)}(x)\right|.$$

Тогда в (25) с учетом сказанного выше в правой части должна стоять

$$\sum_{j=0}^{m} \|\cdot\|_{C^n[-N,N]}.$$

Положим $n = \max\limits_{0\leq j\leq m} n_j$, $N = \max\limits_{0\leq j\leq m} N_j$.

Если $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\varphi(t) = 0\ \forall\, t \in [-N, N]$, то есть

$$\varphi\Big|_{C[-N,N]} = 0,$$

то

$$|< f, \varphi >| = 0.$$

Тогда вне $[-N, N]$ $f \equiv 0$, откуда $\operatorname{supp} f \in [-N, N]$, то есть $\operatorname{supp} f$ – компакт.

То, что $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$, было показано ранее.

$\Leftarrow$ Пусть $f \in \mathcal{D}'$. $\exists\, N \in \mathbb{N}$ такое, что $\operatorname{supp} f \subset [-N, N]$. Положим $e(x) := \varphi_{-N,N,1}$.

$$\varphi - \varphi e\Big|_{[-N,N]} = 0.$$

По теореме о носителе

$$< f, \varphi - \varphi e >= 0,$$

откуда

$$< f, \varphi >=< f, \varphi e > .$$

Здесь $\varphi e \in \mathcal{D}(-N-1, N+1)$. Тогда $\exists\, C > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}_0$ такие, что

$$| < f, \varphi e > | \leq C\|\varphi\|_{C^n[-N-1,N+1]}.$$

Отсюда

$$|< f, \varphi >| \leq C\|\varphi\|_{C^n[-N-1,N+1]}.$$

Правая часть в неравенстве выше – полунорма в $\mathcal{E}$. Следовательно, f непрерывна относительно топологии в $\mathcal{E}$, откуда $f \in \mathcal{E}'$. Напомним, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ – плотно и непрерывно. Тогда f продолжается по непрерывности на все $\mathcal{E}$. $\square$

Преобразование Фурье обобщенных функций

Напомним **операции над обобщенными функциями**, рассмотренные ранее.

1. Дифференцирование:

$$< f', \varphi >= - < f, \varphi' >, \quad f \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

2. Умножение на гладкую функцию $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$< a(x)f, \varphi >=< f, a(x)\varphi(x) >, \quad f \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

3. Замена переменной

$$< f(y(x)), \varphi(x) >=< f(y), \varphi(x(y))x'_y >, \quad f \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

где

$$y(x) : \ \mathbb{R} \ \mathbb{R}$$

– биекция, бесконечно гладкая функция, $y'(x) \neq 0$.

Перейдем к обсуждению **преобразования Фурье**.

Определим сначала преобразование Фурье для обычных функций. Затем продолжим его на обобщенные функции.

Определение 6.2. Пусть f – некоторая функция на $\mathbb{R}$. *Преобразование Фурье функции* f определяется как

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx =: \left(\hat{F}f\right)(y),$$

а *обратное преобразование Фурье* как

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx =: \left(\check{F}f\right)(y),$$

Выясним, для какого класса функций можно заведомо утверждать, что преобразование Фурье существует.

Замечание 6.2.

$$\left|f(x)e^{-ixy}\right| = \left|f(x)e^{ixy}\right| = |f(x)|.$$

Теорема 6.4. *Если* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *то* $\exists$ $\hat{f}$, $\check{f} \in C_0(\mathbb{R})$ *и операторы* $\hat{F}$, $\check{F}$ *из* $L_1(\mathbb{R})$ *в* $C_0(\mathbb{R})$ *непрерывны. Здесь* $C_0(\mathbb{R})$ *– непрерывные на прямой функции* $g(y)$ *такие, что* $|g(y)| \to 0$, $|y| \to \infty$,

$$\|g\| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |g(y)|.$$

Доказательство. 1. Преобразование Фурье, очевидно, существует. Оценим

$$\left|\hat{f}(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(x)e^{-ixy}\right| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1}.$$

Следовательно,

$$\sup\left|\hat{f}(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1}.$$

Более того, из написанного следует, что если

$$f_n \underset{L_1(\mathbb{R})}{\rightrightarrows} f,$$

то

$$\hat{f}_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \hat{f}.$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-ixy}dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,|| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f_n(x) - f(x)\right)e^{-ixy}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f_n(x) - f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f_n - f\|.$$

2. Непрерывность. Заметим, что $f(x)e^{-ixy}$ непрерывна по y.

Пусть y_0 – фиксированное и $y_n \to y_0$. Тогда

$$f(x)e^{-ixy_n} \to f(x)e^{-ixy_0}.$$

При этом

$$\left|f(x)e^{-ixy_0}\right| \leq |f(x)| \in L_1(\mathbb{R}).$$

По теореме Лебега о предельном переходе,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy_n}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-ixy_n}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ixy_0}dx,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(y_n) = \hat{f}(y_0),$$

то есть $\hat{f}(y)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}$.

3. Покажем стремление $\hat{f}(y)$ к нулю при $|y| \to \infty$. Напомним, что простые функции плотны в $L_1(\mathbb{R})$. Простые функции – это суммы вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k},$$

где A_k – измеримые множества,

$$\chi_{A_k} = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{m_k} \chi_{(\alpha_{j_k}^n, \beta_{j_k}^n)}.$$

Достаточно посмотреть на $\chi_{\hat{(a,b)}}$, где, напомним,

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Распишем

$$\sqrt{2\pi}\chi_{\hat{(}}a, b) = \int_a^b e^{-ixy} dx = \frac{e^{-iyb} - e^{-iya}}{-iy},$$

$y = 0$ – устранимая особенность. Здесь

$$\left| \frac{e^{-iyb} - e^{-iya}}{-iy} \right| \le \frac{2}{|y|} \to 0, \quad |y| \to \infty.$$

Тогда

$$\hat{f}(y) \to y, \quad |y| \to \infty$$

$\forall\ f \in L_1(\mathbb{R})$ и простой.

Если же $f \in L_1(\mathbb{R})$ – произвольная, то строим $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ и простые. Выше показали, что

$$\hat{f_n}(y) \to 0, \quad |y| \to \infty.$$

Здесь

$$f_n \xrightarrow{L_1} f,$$

то

$$\hat{f_n} \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \hat{f}.$$

Если f_n – простые, то $\hat{f_n}(y) \to 0$, $|y| \to \infty$. Тогда и $\hat{f}(y) \to 0$, $|y| \to \infty$. Итак, получили, что

$$\hat{F}: L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}),$$
$$\check{F}: L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$$

и

$$\|\hat{F}\| = \|\check{F}\| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

□

Лекция 7. Преобразование Фурье в пространстве Шварца

Условие Дини

Продолжим заниматься преобразованием Фурье. Напомним, что в прошлый раз получили

$$\left(\hat{F}f\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx \tag{26}$$

– прямое преобразование Фурье и

$$\left(\check{F}f\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx \tag{27}$$

– обратное преобразование Фурье. Кроме того, показали (для прямого, но обратное, очевидно, не очень сильно отличается), что

$$\hat{F}: \ L_1(\mathbb{R}) \ \to \ C_0(\mathbb{R}),$$

где $C_0(\mathbb{R})$ – непрерывные функции $g(y)$ такие, что $g(y) \ \to \ 0$ при $|y| \ \to \ \infty$.

Перечислим **свойства $\hat{F}$ в паре пространств** $(L_1(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R}))$.

1. $\hat{F}$ – непрерывный оператор, $\left\|\hat{F}\right\| \leq 1/\sqrt{2\pi}$;
2. $\operatorname{Ker}\hat{F} = \{0\}$, то есть $\hat{F}$ инъективен;
3. $\operatorname{Im}\hat{F} \neq C_0(\mathbb{R})$, то есть $\hat{F}$ не сюръективен, а следовательного, не существует ограниченного обратного.

Обсудим смысл «обратного» преобразования Фурье. Напомним следующее определение.

Определение 7.1. Функция f удовлетворяет *условию Дини в точке* x, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ такое, что

$$\left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

Теорема 7.1. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Дини в точке, то*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(y)e^{ixy}dy$$

(интеграл в смысле главного значения на ∞).

Теоремы

Для того, чтобы обратное преобразование Фурье (27) действительно восстанавливало функцию по прямому преобразованию Фурье (26), необходимо перейти в другие пространства.

Докажем теоремы, которые позволят уточнить пространство $C_0(\mathbb{R})$. Нас интересует, во-первых, можно ли уточнить непрерывность функций из $C_0(\mathbb{R})$ (то есть есть ли для них дифференцируемость), и, во-вторых, с какой скоростью эти функции $\to 0$ на бесконечности.

Теорема 7.2. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\hat{f}(y) = \overline{o}\left(\frac{1}{|y|}\right), \quad |y| \to \infty.$$

Доказательство. При $|y| > 1$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{de^{-ixy}}{-iy} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) \frac{e^{-ixy}}{-iy}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ixy} dx,$$

так как $|e^{-ixy}| = 1$ – ограничена и $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Вообще говоря,

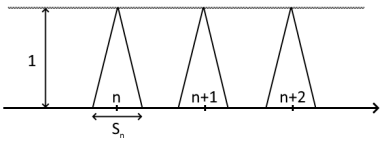

Рис. 7.1. Функция f

для $f \in L_1(\mathbb{R})$ стремление к 0 на бесконечности неверно. Приведем контрпример. Возьмем функцию f вида (рис. 7.1) и потребуем, чтобы $\sum S_n < \infty$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f dx = \frac{1}{2} \sum S_n \cdot 1 = \frac{1}{2} \sum S_n < \infty,$$

то есть $f \in L_1(\mathbb{R})$. С другой стороны, $f(n) = 1$ при $n \in \mathbb{N}$, но для $n \gg 1$

$$f\left(\frac{n+n+1}{2}\right) = 0.$$

Итак, контрпример построен. Покажем, почему в условиях теоремы $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. По формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x) - f(a) = \int\limits_{a}^{x} f'(t) dt,$$

откуда, устремляя $x \to +\infty$, получим, что $\exists$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a) + \int\limits_a^\infty f'(t)dt < \infty,$$

так как $f'(t) \in L_1(\mathbb{R})$. Поскольку $f \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Аналогично для $x \to -\infty$.

Тогда

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overbrace{\frac{1}{iy} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}dx}_{=o(1),\ |y|\to\infty}}^{=o(1/|y|),\ |y|\to\infty}.$$

□

Следствие. Если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R})$ и $f^{(j)} \in L_1(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\hat{f}(y) = \overline{o}\left(\frac{1}{|y|^n}\right), \quad |y| \to \infty.$$

Если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $f_1^{(j)}(\mathbb{R})$, $\forall\ j \geq 0$, то

$$\hat{f}(y) = \overline{o}\left(\frac{1}{|y|^n}\right), \quad |y| \to \infty, \quad \forall\ n.$$

Теорема 7.3. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $xf \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f}(y) \in C^1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Запишем преобразование Фурье для f:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx.$$

Заметим, что

1. $f(x)e^{-ixy}$ дифференцируема по y;
2. Верно, что
$$\left|\frac{d}{dy} f(x)e^{-ixy}\right| = |f(x) \cdot x| \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе можно дифференцировать под знаком интеграла и

$$\frac{d}{dy}\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}dx \in C_0(\mathbb{R}).$$

□

Следствие. Если $x^k f \in L_1(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то $\hat{f}(y) \in C^n(\mathbb{R})$.

Замечание 7.1. Доказательство следствия можно провести методом математической индукции, заметив, что

$$\left(\hat{f}(y)\right)^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)^n e^{-ixy} dx.$$

Операторы M и D в пространстве Шварца

Итак, теорему 7.2 можно сформулировать так: чем глаже функция, тем быстрее убывает ее преобразование Фурье, а теорему 7.3 так: чем быстрее убывает функция, тем глаже ее преобразование Фурье.

Определим *пространство Шварца*

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ \forall\, p, q \in \mathbb{N}_0 : \ \|\varphi\|_{p,q} := \sup_{\mathbb{R}} |x^p \varphi^{(q)}(x)| < \infty \right\}.$$

Из теорем 7.2 и 7.3 следует, что

$$\hat{F} : \ \mathcal{S} \ \to \ \mathcal{S}.$$

Рассмотрим в $\mathcal{S}$ следующие операторы:

1. $M\varphi = x\varphi$;
2. $D\varphi = i\varphi' = i\frac{d\varphi}{dx}$.

Утверждение 7.1. *Операторы D и M непрерывны в $\mathcal{S}$.*

Доказательство. 1. Распишем

$$\|D\|_{p,q} = \sup_{\mathbb{R}} |x^p \varphi^{(q+1)}(x)| = \|\varphi\|_{p,q+1}.$$

Следовательно, D непрерывен.

2. Аналогично,

$$\|M\|_{p,q} = \sup_{\mathbb{R}} |x^p (x\varphi)^{(q)}(x)| = \sup \left| x^p \left(x\varphi^{(q)} + C_q^1 1 \cdot \varphi^{(q-1)} \right) \right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{p+1,q} + C_q^1 \|\varphi\|_{p,q-1}.$$

Отсюда M непрерывна в $\mathcal{S}$.

□

Теорема 7.4. *В $\mathcal{S}$ справедливы следующие коммутационные соотношения:*

$$\hat{F}M = D\hat{F}, \tag{28}$$

$$\hat{F}D = -M\hat{F}, \tag{29}$$

$$\check{F}M = -D\check{F},$$

$$\check{F}D = M\check{F}.$$

Доказательство. Докажем соотношения для прямого преобразования Фурье (для обратного преобразования Фурье – аналогично).

1. Покажем соотношение (28). Запишем

$$\hat{F}Mf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} sf(x)e^{-ixy}dx,$$

$$\left(\hat{F}f\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx.$$

Тогда

$$\left(D\hat{F}f\right)(y) = i\frac{d}{dy}\hat{F}f = i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} sf(x)e^{-ixy}dx = \hat{F}Mf.$$

2. Убедимся в справедливости (29). Запишем

$$\hat{F}Df = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} uf'(x)e^{-ixy}dx$$

и проинтегрируем по частям. Получим

$$\hat{F}Df = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} if(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0, \text{ так как } f\in\mathcal{S}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} if(-ix)e^{-ixy}dx =$$

$$= -y\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ixy}dx = -M\hat{F}f.$$

□

Эквивалентность систем полунорм

Определение 7.2. Системы полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ и $\{q_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ называются *эквивалентными (равносильными) на линейном пространстве* X, если выполнены следующие два условия:

1. $\forall\ \lambda \in \Lambda\ \exists\ C_1 > 0$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Omega$ такие, что $\forall\ x \in X$

$$p_\alpha(x) \le C_1 \sum_{i=1}^{n} q_{\beta_i}(x);$$

2. $\forall\ \beta \in \Omega\ \exists\ C_2 > 0,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \Lambda$ такие, что $\forall\ x \in X$

$$q_\beta(x) \leq C_2 \sum_{i=1}^{m} p_{\alpha_i}(x).$$

По-другому, можно определить оператор вложения

$$J:\ (X, \{p_\alpha\})\ \to\ (X, \{q_\beta\}),$$

$$Jx = x,$$

обратный оператор вложения

$$J^{-1}:\ (X, \{q_\beta\})\ \to\ (X, \{p_\alpha\}).$$

Тогда свойства 1 и 2 определения 7.2 эквивалентны непрерывности J и J^{-1}.

Введем на $\mathcal{S}$ новые системы полунорм:

$$\|\varphi\|_{p,q,1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^p \varphi^{(q)}(x)| dx,$$

$$\|\varphi\|_{p,q,2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^p \varphi^{(q)}(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

Здесь индекс 1 в полунорме отвечает за L_1, а 2 – за L_2.

Старая система полунорм в этих обозначениях

$$\|\varphi\|_{p,q} = \underbrace{\sup_{\mathbb{R}}}_{L_\infty} \|x^p \varphi^{(q)}(x)| = \|\varphi\|_{p,q,\infty}.$$

Теорема 7.5. *Системы полунорм $\|\cdot\|_{p,q,1}$ и $\|\cdot\|_{p,q,2}$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, равносильны системе $\|\cdot\|_{p,q}$.*

Доказательство. Покажем, что $\|\cdot\|_{p,q,1} \sum \|\cdot\|_{p,q}$.

1. Запишем формулу Ньютона – Лейбница с учетом $x\varphi(-\infty) = 0$:

$$x^p \varphi^{(q)} = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(t^p \varphi^{(q)}(t) \right)' dt.$$

Тогда

$$\left| x^p \varphi^{(q)}(x) \right| \leq \int\limits_{-\infty}^{x} \left| t^p \varphi^{(q+1)}(t) + p t^{p-1} \varphi^{(q)} \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| t^p \varphi^{(q+1)}(t) \right| dt + p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| t^{p-1} \varphi^{(q)}(t) \right| dt = \|\varphi\|_{p,q+1,1} + p \|\varphi\|_{p-1,q,1}. \qquad (30)$$

Заметим, что второе слагаемое в (30) при $p = 0$ пропадает, а все (30) не зависит от x. Тогда

$$\underbrace{\sup_{\mathbb{R}} |\,|}_{=\|\varphi\|_{p,q}} \le \|\varphi\|_{p,q+1,1} + p\|\varphi\|_{p+1,q,1}$$

Итак, замажорировали старую полунорму через новую.

2. Теперь,

$$\|\varphi\|_{p,q,1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right| dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) \frac{\left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right|}{1+t^2} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right| + \left|t^{p+2} \varphi^{(q)}(t)\right|}{1+t^2} dt \le$$

$$\le \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|t^{p+2} \varphi^{(q)}(t)\right| \right) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}}_{=\pi} = \pi \left(\|\varphi\|_{p,q} + \|\varphi\|_{p+2,q} \right).$$

Аналогично, покажем, что

$$\|\cdot\|_{p,q,2} \sim \|\cdot\|_{p,q}.$$

1. Распишем

$$x^p \varphi^{(q)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(t^p \varphi^{(q)}(t)\right)' dt = \int\limits_{-\infty}^{x} t^p \varphi^{(q+1)}(t) dt + \int\limits_{-\infty}^{x} p t^{p+1} \varphi^{(q)} dt.$$

Тогда

$$\left|x^p \varphi^{(q)}(x)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t^p \varphi^{(q+1)}(t)\right| dt + p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t^{p+1} \varphi^{(q)}\right| dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|t^{p+2} \varphi^{(q+1)}(t)\right| + \left|t^p \varphi^{(q-1)}\right|}{1+t^2} dt + p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|t^{p+2} \varphi^{(q)}\right|}{1+t^2} + p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|t^{p+1} \varphi^{(q)}\right|}{1+t^2} dt \le$$

$$\le \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t^{p+2} \varphi^{(q+1)}\right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt \right)^{1/2} + p \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t^{p+1} \varphi^{(q)}(t)\right|^2 dt \right)^{1/2} \right] \times$$

$$\times \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right)^{1/2}}_{<\infty} \le C \left(\|\varphi\|_{p+1,q+1,2} + \|\varphi\|_{p,q+1,2} + \|\varphi\|_{p+3,q,2} + \|\varphi\|_{t+1,q,2} \right).$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2. Распишем

$$\|\varphi\|_{p,q,2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+t^2}{1+t^2}\left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right|\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\left|t^p \varphi^{(q)}(t)\right| + \left|t^p \varphi^{(q)}\right|\right)^2}{(1+t^2)^2}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\sup_t \left(\left|t^{p+2} \varphi^{(q)}(t)\right| + \left|t^p \varphi^{(q)}\right|\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2}^2\right)^{1/2}}_{=C} \left[\|\varphi\|_{p+1,q} + \|\varphi\|_{p,q}\right].$$

□

Замечание 7.2. Непрерывность оператора не зависит от выбора системы полунорм, если они равносильны.

Теорема о непрерывности преобразования Фурье

Теорема 7.6. *Оператор $\hat{F}$ (а значит, и $\check{F}$) непрерывен в $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Распишем

$$\left\|\hat{F}\varphi\right\|_{p,q} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^p \left(\hat{F}\varphi\right)^{(q)}\right| =$$

$$= \sup\left|M^p D^q \hat{F}\varphi\right| = \sup\left|\hat{F} D^p M^q \varphi\right|. \tag{31}$$

Напомним, что для $f \in L_1(\mathbb{R})$ было следующее:

$$\left|\hat{F}f\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \in |f(x)|dx,$$

то есть

$$\sup\left|\hat{F}f\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1}.$$

Тогда, продолжая (31), можно оценить

$$\left\|\hat{F}\varphi\right\|_{p,q} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |D^p M^q \varphi|\, dx \leq \sum_{j=0}^{\min(p,q)} C_q^j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\underbrace{(x^p)^{(j)}}_{p(p-1)\ldots(p-j+1)x^{p-j}}\right| \varphi^{(q-j)} = \tag{32}$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(p,q)} C_q^j \frac{p!}{(p-j)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| x^{pj} \varphi^{(q-j)} \right| dx = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} C_q^j \frac{p!}{(p-j)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{pj,q-j,1}$$

В (32) воспользовались тем, что

$$(x^p \varphi)^{(q)} = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} C_q^j \left(x^p\right)^{(j)} \varphi^{(q-j)}.$$

Итак, показали, что $\hat{F}$ непрерывен в $\mathcal{S}$. □

Лекция 8. Биективность преобразования Фурье в пространстве Шварца. Формула обращения

Леммы

На прошлой лекции закончили на непрерывности преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}$.

Покажем биективность $\hat{F}$ в $\mathcal{S}$.

Лемма 8.1. *Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ и в какой-то точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0).$$

Пусть

$$A: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

– линейный оператор и[8] $AM = MA$. Тогда

$$(A\varphi)(x_0) = (A\psi)(x_0).$$

Доказательство. Так как

$$\varphi(x) - \psi(x)\Big|_{x=x_0} = 0,$$

справедливо представление

$$\varphi(x) - \psi(x) = (x - x_0)h(x),$$

где $h(x)$ – некоторая функция $\in \mathcal{S}$. Тогда

$$A\left(\varphi(x) - \psi(x)\right) = A(M - Ix_0)h(x) = (M - Ix_0)Ah(x)_{\in\mathcal{S}} = (x - x_0)(Ah)(x).$$

Подставляя выше x_0 на место x, получим

$$(A\varphi)(x_0) - (A\psi)(x_0) = 0,$$

откуда и получаем утверждение леммы:

$$(A\varphi)(x_0) = (A\psi)(x_0).$$

□

Лемма 8.2. *Пусть*

$$A: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

– линейный оператор и $AM = MA$. Тогда $\exists\ a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, которая растет не быстрее многочлена и такая, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}$

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x).$$

[8] Напомним,

$$(M\varphi)(x) = x\varphi(x).$$

Доказательство. Зафиксируем точку x_0. Построим функцию

$$\varphi_{x_0}(x) = \varphi_{x_0-1,x_0+1,1} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}.$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$ – произвольная. Рассмотрим $\varphi(x)$ и $\varphi(x_0)\varphi_{x_0}(x)$. Заметим, что

$$\varphi_{x_0}(x_0) = 1.$$

Тогда

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0)\varphi_{x_0}(x)\Big|_{x=x_0}.$$

По лемме 8.1,

$$(A\varphi)(x_0) = A\left(\varphi(x_0)\varphi_{x_0}(x)\right)\Big|_{x=x_0} = \varphi(x_0)\underbrace{A\varphi_{x_0}(x_0)}_{a(x_0)}.$$

Цепочка рассуждения проделана для произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}$, поэтому получаем, что

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x).$$

□

Формула обращения в $\mathcal{S}$

Напомним, что в прошлый раз мы доказали коммутационные соотношения в $\mathcal{S}$:

$$\hat{F}M = D\hat{F}, \quad \hat{F}D = -M\hat{F},$$

$$\check{F}M = -D\check{F}, \quad \check{F}D = M\check{F},$$

где

$$(M\varphi)(x) = x\varphi(x), \quad (D\varphi)(x) = i\varphi'(x),$$

а операторы $\hat{F}$ и $\check{F}$, напомним, непрерывны в $\mathcal{S}$.

Построим

$$\check{F}\hat{F}M = \check{F}D\hat{F} = M\check{F}\hat{F},$$

то есть $\check{F}\hat{F}$ коммутирует с M. По лемме 8.2 получаем, что

$$\check{F}\hat{F}\varphi = a(x)\varphi(x).$$

Аналогично,

$$\check{F}\hat{F}D = -\check{F}M\hat{F} = D\check{F}\hat{F}.$$

Убедимся, что если умножение на функцию коммутирует с дифференцированием, такая функция – константа. Получим

$$D\left(a(x)\varphi(x)\right) = a(x)D\varphi(x),$$

$$i\left(a(x)\varphi(x)\right)' = a(x)i\varphi'(x),$$

$$ia'(x)\varphi(x) + ia(x)\varphi'(x) = a(x)i\varphi'(x),$$

откуда

$$ia'(x)\varphi(x) = 0 \ \forall \ \varphi \in \mathcal{S},$$

Отсюда $a'(x) = 0$, а значит, с учетом $a \in C^\infty$ получим, что $a(x) = \text{const}$. Тогда

$$\check{F}\hat{F} = cI, \tag{33}$$

где c – некоторая константа.

Поймем, чему равна c в (33). Напомним формулы

$$(\hat{F}\varphi)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx,$$

$$(\check{F}\varphi)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ixy} dx.$$

Утверждение 8.1. *При таком (см. выше) определении $\hat{F}$ и $\check{F}$ $c = 1$.*

Доказательство. Достаточно проверить утверждение на одной из функций.

Возьмем преобразование Фурье от функции

$$\varphi(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0.$$

Такая $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда

$$\sqrt{2\pi}(\hat{F}\varphi)(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a} + \frac{iy}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{-\frac{y^2}{4a}} dx =$$

$$= e^{-\frac{y^2}{4a}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a} + \frac{iy}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx. \tag{34}$$

Интегрирование по прямой $x + iy/2\sqrt{a}$, $x \in (-\infty, \infty)$ можно заменить на интегрирование по вещественной оси. Интеграл при этом не изменится. Иными словами, наша цель заменить подынтегральную функцию в (34) с $e^{-(\sqrt{a}x + iy/2\sqrt{a})^2}$ на e^{-t^2}, $t \in \mathbb{R}$.

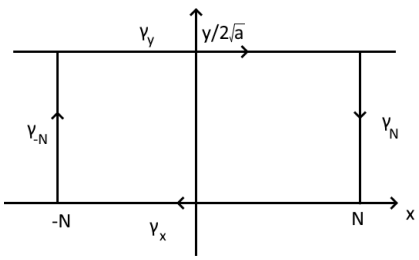

Рис. 8.1. Контур $\Gamma_N = \gamma_{-N} \cup \gamma_y \cup \gamma_N \cup \gamma_x$

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Разобъем (рис. 8.1) контур Γ_N на 4 контура $\gamma_N \cup \gamma_x \cup \gamma_{-N} \cup \gamma_y$.

На отрезках γ_N и γ_{-N}:

$$\left|e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{it}{2\sqrt{a}}\right)^2}\right| = \left|e^{-ax^2}e^{\frac{t}{4a}}\right| \leq e^{\frac{y^2}{4a}}e^{-aN^2} \;\to\; 0, \quad N \; to \; \infty.$$

Отметим, что длины отрезков γ_N и γ_{-N} фиксированы, а функция $e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{iy}{\sqrt{2a}}\right)^2}$ не имеет особенностей внутри Γ_N. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_N N} e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{it}{\sqrt{2a}}\right)^2}dz = 0,$$

где $z = \sqrt{a}x + it/\sqrt{2}a$, $t \in [0, y]$.

Итак, при $N \;\to\; \infty$ получаем, что

$$\underbrace{\int\limits_{\gamma_N}}_{\to 0}\ldots + \int\limits_{\gamma_x}\ldots + \underbrace{\int\limits_{\gamma_{-N}}}_{\to 0}\ldots + \int\limits_{\gamma_y} = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\gamma_x} = -\int\limits_{\gamma_y}.$$

Делаем замену переменной:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x+iy/\sqrt{2}a\right)^2}dx = -\int\limits_{+\infty}^{-\infty} e^{-(\sqrt{a}s)^2}ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}s)^2}ds =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{e} -u^2\frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Здесь сделали замену $\sqrt{a}s = u$, $ds = du/\sqrt{a}$. Итак, получили, что

$$\sqrt{2\pi}\left(\hat{F}e^{-ax^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}},$$

откуда

$$\left(\hat{F}e^{-ax^2}\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}.$$

Возьмем $a = 1/2$. Тогда

$$\left(\hat{F}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = e^{-\frac{y^2}{2}},$$

то есть функция перешла в себя. Значит, $c = 1$. □

Теорема о непрерывном продолжении

Итак, у нас есть оператор

$$\hat{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

– непрерывный, биективный и для которого справедлива формула обращения.

Теорема 8.1. $\exists!$ $*$*-слабо непрерывное продолжение*

$$\widetilde{\hat{F}}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$$

такое, что

$$\widetilde{\hat{F}}\Big|_{\mathcal{S}} = \hat{F},$$

$$< \widetilde{\hat{F}} f, \varphi > = < f, \hat{F}\varphi > .$$

Коммутативная диаграмма выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathcal{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{\widetilde{\hat{F}}} & \mathcal{S}' \end{array}$$

Везде далее вместо $\widetilde{\hat{F}}$ *будем использовать старое обозначение* $\hat{F}$ *для преобразования Фурье в* $\mathcal{S}'$.

Доказательство. Известно, что $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$ в $*$-слабой топологии. Пусть $f \in \mathcal{S}'$. Построим последовательность $f_n \in \mathcal{S}$ такую, что

$$f_n \to f$$

в $*$-слабой топологии. Тогда

$$< f_n, \varphi > \to < f, \varphi >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Напомним, что $\hat{F}$ непрерывен в $\mathcal{S}$. Тогда

$$< \hat{F} f_n, \varphi > = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{F} f_n(y) \varphi(y) dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-ixy} dx \right) \varphi(y) dt.$$

Заметим, что

$$f_n(x)\varphi(y)e^{-ixy} \in L_1(\mathbb{R}^2).$$

По теореме Фубини получаем, что

$$< \hat{F} f_n, \varphi > = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-ixy} dy \right) dx = < f_n, \hat{F}\varphi > \to < f, \hat{F}\varphi > .$$

Отсюда $\forall\ f \in \mathcal{S}'$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}$

$$< \hat{F} f, \varphi > := < f, \hat{F}\varphi > .$$

□

Утверждение 8.2. *(Свойство) В $\mathcal{S}'$ тоже справедлива формула обращения:* $\forall$ $f \in \mathcal{S}'$

$$\check{F}\hat{F}f = f.$$

Доказательство. Распишем для $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}$

$$< \check{F}\hat{F}f, \varphi >=< \hat{F}f, \check{F}\varphi >=< f, \underbrace{\hat{F}\check{F}}_{=I}\varphi >=< f, \varphi >,$$

то есть $\check{F}\hat{F} = I$ в $\mathcal{S}'$. □

Следствие.

$$\operatorname{Ker}\hat{F} = \{0\}$$

как оператора из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$.

Доказательство. Построим

1. $J_1 :\ L_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'$;
2. $J_2 :\ C_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'$.

Вложения $*$-слабо непрерывны. Убедимся в том, что такие вложения существуют.

1. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда

$$|< J_1 f, \varphi >| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)\varphi(x)|dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \int |f(x)|dx = \|f\|_{L_1}\|\varphi\|_{0,0}.$$

2. Пусть $f \in C_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда

$$|< J_2 f, \varphi >| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)\varphi(x)|dx \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|dx = \|f\|_{C_0(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{0,0,1}.$$

Тогда справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\hat{F}} & C_0(\mathbb{R}) \\ J_1 \downarrow & & \downarrow J_2 \\ \mathcal{S}' & \underset{\text{биективно}}{\xrightarrow{\hat{F}}} & \mathcal{S}' \end{array}$$

Отсюда получаем, что $\hat{F}$ инъективно из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$. Это равносильно утверждению следствия. □

Напомним, что преобразование Фурье – функционал, действующий как

$$< \hat{F}f, \varphi >=< f, \hat{F}\varphi >$$

(и не представим в виде интеграла в случае, когда функционалы сингулярны, а не регулярны).

Пример 8.1. Пусть $f = \delta(x)$,

$$< \delta(x), \varphi >= \varphi(0).$$

Тогда

$$< \hat{F}\delta, \varphi >=< \delta(x), \hat{F}\varphi >= \hat{\varphi}(0) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx \Big|_{y=0}}_{\hat{\varphi}(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\varphi} (x)dx =< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi > .$$

Тогда можем записать ответ в виде

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Интегральное тождество Парсеваля

Теорема 8.2. *(Интегральное тождество Парсеваля) Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Тогда*

$$\left(\hat{\varphi}, \hat{\psi}\right)_{L_2(\mathbb{R})} = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})} .$$

В частности,[9] *при $\varphi = \psi$*

$$\|\hat{\varphi}\|^2_{L_2} = \|\varphi\|^2_{L_2}.$$

Доказательство. Распишем

$$\left(\hat{\varphi}, \hat{\psi}\right)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\hat{y})\overline{\hat{\psi}(y)}dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(y) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ixy} dx\right)} dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(x) e^{ixy} dx\right) dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\varphi}(y) e^{ixy} dy\right)}_{\check{F}\hat{\varphi}=\check{F}\hat{F}\varphi=\varphi} \overline{\psi}(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\psi}(x)dx = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})}$$

□

[9] Напомним, что в случае, когда H – гильбертово, сепарабельное бесконечномерное пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ОНБ, каждому $x \in H$ можно сопоставить его коэффициенты Фурье $x_n = (x, e_n)$. Тогда справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \sum |x_n|^2.$$

Это и является аналогом написанного здесь для случая H.

Преобразование Фурье в L_2

Напомним, что D, а значит, и $\mathcal{S}$ плотны в $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$. Характеристические функции отрезка $\chi_{(a,b)}$ можно приблизить поточечно функциями $\varphi_{a,b,\varepsilon} \in \mathcal{D}$ (рис. 3.1). Следовательно, простые функции можно приблизить функциями из $\mathcal{D}$. Простые функции плотны в $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.

В L_1 у нас и так было определено преобразование Фурье. Обсудим, до какого оператора можно продолжить преобразование Фурье в L_2.

Утверждение 8.3. *Пусть X – банахово, $X_0 \subset X$ – подпространство, оператор*

$$A: \ X_0 \ \to \ X_0$$

– линейный и $A \in B(X_0)$ (ограничен, а значит, непрерывен).

Тогда $\exists!$ продолжение до ограниченного оператора в X с той же нормой.

Доказательство. Пусть $x \in X \setminus X_0$. Тогда $\exists\ x_n \in X_0$ такие, что

$$x_n \ \overset{\|\cdot\|_X}{\to} \ x.$$

Тогда

$$\|Ax_n - Am\| \le \|A\| \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{\to 0, \quad n,m \to \infty},$$

откуда получаем, что $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная. Тогда $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n =: Ax.$$

Так как lim сохраняет линейные операции, то A линеен.

Покажем единственность. Предположим, некоторая последовательность $x'_n \ \to x$. Тогда $\{Ax'_n\}_{n=1}^{\infty}$ тоже фундаментальна. Убедимся, что

$$\lim_{n\to\infty} Ax'_n = Ax.$$

Построим третью последовательность из $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$:

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots \ \to \ x.$$

Тогда

$$Ax_1, Ax'_1, Ax_2, Ax'_2, \dots, Ax_n, Ax'_n, \dots$$

– фундаментальна в X, а значит, предел единственнен.

Обсудим, почему сохраняется норма. Очевидно, норма не может уменьшиться:

$$\left\|A\Big|_X\right\| \ge \left\|A\Big|_{X_0}\right\|.$$

Справедлива оценка

$$\|Ax_n\| \le \|A\|\|x_n\|,$$

откуда, перейдя к пределу по n, получим, что

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|.$$

Итак, норма сохраняется. □

Напомним, что из интегрального равенства Парсеваля следует, что

$$\left\| \hat{F}\Big|_{\mathcal{S}} \right\|_{L_2} = 1$$

– изометрия.

Следствие. $\hat{F}$ можно продолжить до унитарного оператора в $L_2(\mathbb{R})$ единственным образом в силу плотности $\mathcal{S}$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Действительно, берем $f \in L_2$, $f_n \in \mathcal{S}$ такие, что

$$f_n \overset{L_2}{\to} f.$$

Тогда

$$\|f_n - f_m\| \to 0, \quad n, m \to 0.$$

По интегральному равенству Парсеваля

$$\left\| \hat{f_m} - \hat{f_n} \right\|_{L_2} = \|f_n - f_m\|_{L_2} \to 0.$$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n =: \hat{f}$.

Как и ранее, методом «гребенки» можно убедиться, что предел не зависит от выбора последовательности f_n. □

Сравним классическое преобразование Фурье с его продолжением из следствия . В $\mathcal{S}$ (и в L_1)

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Заметим, что $\mathcal{S}$ плотно в $L_1(\mathbb{R})$ (здесь определено обычное преобразование Фурье $\hat{F}$) и в $L_2(\mathbb{R})$ (здесь ранее построили продолжение $\hat{F}_{L_2}$). Попробуем связать $\hat{F}$ и $\hat{F}_{L_2}$.

Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения, а затем – теорему, которая поможет установить связь между $\hat{F}$ и $\hat{F}_{L_2}$.

Лемма 8.3. *Пусть $\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \cup L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\exists\ \varphi_n \in \mathcal{D}$ такие, что*

1. *Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, то*
$$\varphi_n \overset{L_1}{\to} \varphi;$$
2. *Если $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то*
$$\varphi_n \overset{L_2}{\to} \varphi.$$

В частности, если $\varphi \in L_1 \cap L_2$, то $\varphi_n \to \varphi$ и в L_1, и в L_2.

Доказательство. Представим

$$\varphi = u(x) + iv(x),$$

где $u(x)$, $v(x)$ – вещественные функции. Представим эти функции в виде

$$u(x) = u_+(x) - u_-(x), \quad u_+, u_- \geq 0,$$

$$v(x) = v_+(x) - v_-(x), \quad v_+, v_- \geq 0.$$

Иными словами, для u, например,

$$u_+(x) = \max(0, u(x)), \quad u_- = -\min(0, u(x)).$$

Итак, $\forall\ \varphi \in L_1 \cup L_2$ можно представить в виде линейной комбинации неотрицательных функций. Поэтому без ограничения общности будем считать $\varphi \geq 0$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Положим

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x)\chi_{[-N,N]}, & \varphi(x) < N \\ N\chi_{[-N,N]}, & \varphi \geq N \end{cases}$$

Функция φ_N ограничена и вне $[-N, N]$ равна 0. Отсюда следует, что $\varphi_N \in L_2[-N, N]$, а значит, $\varphi_N \in L_1[-N, N]$. По определению $\varphi \geq \varphi_N$.

1. Пусть $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. Оценим

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{L_1} = \int\limits_{\{x:\ \varphi<N\}} (\varphi(x) - \varphi_N(x))dx + \int\limits_{\{x:\ \varphi\geq N\}} (\varphi(x) - \varphi_N(x))dx =$$

$$= \int\limits_{\{x:\ |x|>N\}} \varphi(x)dx + \int\limits_{\{x:\ \varphi(x)\geq N\}\cap\{x:\ |x|\leq N\}} (\varphi(x) - \varphi_N(x))dx +$$

$$+ \int\limits_{\{x:\ \varphi(x)\geq N\}\cap\{x:\ |x|>N\}} (\varphi(x) - \varphi_N(x))dx \leq \int\limits_{\{x:\ |x|>N\}} \varphi(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{\{x:\ \varphi(x)\geq N\}\cap\{x:\ |x|\leq N\}} \varphi(x)dx + \int\limits_{\{x:\ \varphi(x)\geq N\}\cap\{x:\ |x|>N\}} \varphi(x)dx =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{\{x:\ |x|>N\}} \varphi(x)dx}_{\to 0,\ N\to\infty} + \underbrace{\int\limits_{x:\varphi(x)\geq N} \varphi(x)dx}_{\to 0,\ N\to\infty} \ \to\ 0, \quad N\ \to\ \infty.$$

Второй интеграл здесь $\to\ 0$, так как $\mu(\{x:\ \varphi(x) \geq N\})\ \to\ 0$, $N\ \to\ \infty$.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

2. Пусть $\varphi \in L_2$. Для каждого N выберем $\varphi_{n,N} \in \mathcal{D}$ $(\in \mathcal{S})$. Тогда

$$\varphi_{n,N} \ \to \ \varphi_N$$

в L_1 (если $\varphi \in L_1$) и в L_2 (если $\varphi \in L_2$).

Выберем $n = n(N)$ такое, что

$$\left\|\varphi_{n(N),N} - \varphi_N\right\| < \frac{1}{N}.$$

Здесь норма – это норма в $L_1[-N, N]$ или в L_2.

Тогда получаем, что

$$\varphi_{n(N),N} \ \to \ \varphi, \quad N \ \to \ \infty,$$

в L_1 (если $\varphi \in L_1$) или в L_2 (если $\varphi \in L_2$).

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Преобразование Фурье в L_2. Его спектр. Свертка

Лемма о равенстве функций

Напомним, в прошлый раз была доказана следующая лемма.

Лемма 8.3. *Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \cup L_2(\mathbb{R})$, то $\exists\ \varphi_n \in \mathcal{D}$ такие, что*

1. *Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, то*
$$\|\varphi_N - f\|_{L_1} \to 0;$$
2. *Если $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то*
$$\|\varphi_N - f\|_{L_2} \to 0;$$
3. *Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то*
$$\|\varphi_N - f\|_{L_1, L_2} \to 0;$$

Докажем еще одну лемму.

Лемма 9.1. *Пусть $\varphi_n \in C(\mathbb{R})$ и $\varphi_n \overset{L_1(\mathbb{R})}{\to} \varphi$, $\varphi_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \psi$ (по норме $C_0(\mathbb{R})$). Тогда $\varphi = \psi$ в $L_1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. Тогда

1. $\varphi_n \chi_{[-N,N]} \overset{L_2[-N,N]}{\to} \varphi\chi_{[-N,N]}$;
2. $\varphi_n \chi_{[-N,N]} \underset{[-N,N]}{\rightrightarrows} \psi\chi_{[-N,N]}$.

Покажем, что из равномерной сходимости следует сходимость в L_2:

$$\|\varphi_n - \psi\|^2_{L_2[-N,N]} = \int\limits_{-N}^{N} |\varphi_n - \psi|^2\, dx \le \underbrace{\sup[-N,N]\,|\varphi_n - \psi|^2}_{\to 0,\ n\to\infty} \cot 2N.$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi_n \chi_{[-N,N]} \overset{L_2[-N,N]}{\longrightarrow} \psi\chi_{[-N,N]}\ \forall\ N \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\varphi\chi_{[-N,N]} = \psi\chi_{[-N,N]}$ почти всюду. В силу произвольности $N \in \mathbb{N}$ получаем, что $\varphi = \psi$ почти всюду на $\mathbb{R}$, то есть $\varphi = \psi$ в $L_2(\mathbb{R})$. □

Теорема Планшереля

Теорема 9.1. *(Планшерель)* $\exists!$ *унитарный оператор* U *в* $L_2(\mathbb{R})$ *такой, что для* $\forall$ $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$

$$Uf = \hat{F}f, \quad \hat{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx.$$

Доказательство. Напомним равенство Парсеваля. Для $\forall$ $f, g \in \mathcal{S}$

$$(f, g)_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\hat{f}, \hat{g}\right)_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{35}$$

Так как $\mathcal{S}$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$, $\exists!$ продолжение $\hat{F}$ до унитарного оператора U в $L_2(\mathbb{R})$. Продолжение строим следующим образом. Для $\forall$ $f \in L_2(\mathbb{R})$ строим последовательность $f_n \in \mathcal{S}$:

$$f_n \ \to \ f \text{ в } L_2(\mathbb{R}).$$

В силу (35) получаем, что

$$\left\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\right\|_{L_2} = \|f_n - f_m\|_{L_2},$$

то есть $\left\{\hat{f}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда у нее существует в L_2 предел:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n =: Uf.$$

Вообще говоря, такая $f_n \in \mathcal{S}$ не является единственной. Возьмем другую $f_n' \ \to \ f$ в L_2. Воспользуемся методом «гребенки». Последовательность

$$f_1, f_1', f_2, f_2', \ldots, f_n, f_n', \ldots \ \to \ f,$$

$$\hat{f}_1, \hat{f}_1', \hat{f}_2, \hat{f}_2', \ldots, \hat{f}_n, \hat{f}_n', \ldots$$

фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. Итак, получаем, что у $\left\{\hat{f}_n\right\}$ и $\{f_n\}$ один и тот же предел Uf.

Осталось показать, что для $\forall$ $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ $Uf = \hat{F}f$.

По лемме 8.3, $\exists$ $\varphi_n \in \mathcal{D}$ $(\subset \mathcal{S})$ такая, что

$$\varphi_n \ \overset{L_2}{\to} \ f, \quad \varphi_n \ \overset{L_1}{\to} \ f.$$

Тогда

$$U\varphi_n \ \overset{L_2}{\to} \ Uf \text{ и } \underbrace{\hat{F}\varphi_n}_{\in C_0(\mathbb{R})} \ \rightrightarrows \ \underbrace{\hat{F}f}_{\in C_0(\mathbb{R})}.$$

При этом $U\varphi_n = \hat{F}\varphi_n = \hat{\varphi}_n \in \mathcal{S}$, значит, непрерывны.

По лемме 9.1, $Uf = \hat{F}f$. $\square$

Пример 9.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

Заметим, что $f(x) = O(1/x)$ при $|x| \to \infty$, $f \notin L_1(\mathbb{R})$, но $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Вычислим ее преобразование Фурье:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} e^{-ixy} dx.$$

Будем брать интеграл по контуру (рис. 9.1). От вещественной переменной x перей-

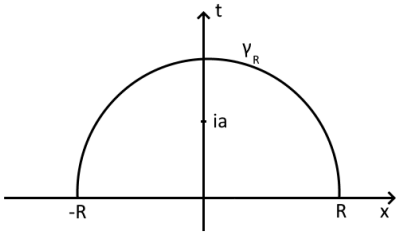

Рис. 9.1. Контур Γ_R, $y < 0$

дем к $z = x + it$. Будем считать, что $R \gg 1$ таково, что ia лежит внутри контура $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2 + a^2} e^{-izy} dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} \frac{z e^{-ixy}}{z^2 + a^2}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2 + a^2} e^{-izy} dz = \int\limits_{-R}^{R} \ldots + \int\limits_{\gamma_R} \underset{R \to \infty}{\to} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots + ?. \tag{36}$$

Здесь мы пока не можем сказать, чем будет равен второй интеграл при предельном переходе.

Заметим, что

$$e^{-i(x+it)y} = \underbrace{e^{-ixy}}_{\|\cdot\|=1} e^{ty} \ \to \ 0, \quad y < 0, \quad t \to \infty.$$

Тогда второй интеграл в правой части (36) $\to 0$ при $y < 0$.

Напомним, что если функция имеет вид φ/ψ и $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ (простой нуль), то

$$\operatorname{res} z_0 = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Итак,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} e^{-ixy} dx = 2\pi i \frac{iae^{ay}}{2ia} = \pi i e^{ay}, \quad y < 0.$$

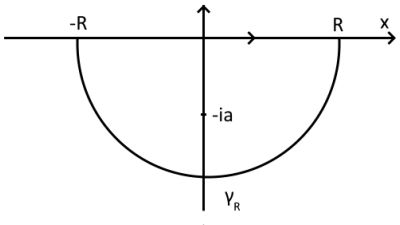

Рис. 9.2. Контур Γ_R, $y > 0$

При $y > 0$ возьмем следующий контур (рис. 9.2). Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} e^{-ixy} dx = 2\pi i \frac{-iae^{-ay}}{-2ia} = -\pi i e^{-ay}, \quad y > 0.$$

Итак,

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-y) \pi i e^{-a|y|} \in L_2.$$

Функция, убывающая экспоненциально

Вернемся к обсуждению преобразования Фурье в L_2. Напомним следующие факты.

1. $\hat{F} : \ L_1(\mathbb{R}) \ \to \ C_0(\mathbb{R})$ инъективен, но не сюръективен;
2. $\hat{F} : \ \mathcal{S} \ \to \ \mathcal{S}$ биективен и непрерывен, $\hat{F}\check{F} = I = \check{F}\hat{F}$;
3. $\hat{F} : \ \mathcal{S}' \ \to \ \delta'$ биективен, $*$-слабо непрерывен и $\hat{F}\check{F} = \check{F}\hat{F} = I$;
4. $\hat{F} = U : \ L_2(\mathbb{R}) \ \to \ L_2(\mathbb{R})$ унитарен, $\hat{F}\check{F} = \check{F}\hat{F} = I$.

Напомним, что была теорема: $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $xf \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$.
По индукции можно показать, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x^k f \in L_1(\mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$.

Определение 9.1. Функция f *убывает экспоненциально*, если $\exists\ a > 0$ такое, что

$$f e^{a|x|} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Убывающая экспоненциально функция f, очевидно, $\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Теорема 9.2. *Если f убывает экспоненциально, то есть $\exists\ a > 0$ такое, что $f e^{a|x|} \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(y)$ продолжается до аналитической в полосе функции $\hat{f}(z) \in \mathcal{A}(|Imz| < a)$.*

Доказательство. Пусть $|t| < a$, $\varepsilon := a - |t| > 0$. Распишем

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixz}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(y+it)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}e^{xt}dx.$$

Здесь

$$\left|f(x)e^{-ixy}e^{xt}\right| \leq |f(x)|e^{a|x|} \in L_1,$$

поэтому интеграл выше существует.

Формальная производная d/dz действует как

$$\frac{d}{dz}\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ixz}dx.$$

Здесь

$$\left|f(x)(-ix)e^{-ix(y+it)}\right| \leq |f(x)||x|e^{|xt|} = |f(x)||x|e^{|x|(a-t)} = \overbrace{\underbrace{|f(x)|e^{a|x|}}_{\in L_1(\mathbb{R})} \underbrace{|x|e^{-\varepsilon|x|}}_{\to 0,\ |x|\to\infty}}^{\in L_1(\mathbb{R})}$$

$\forall\ t$ таких, что $|t| < a$.

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе $\exists\ d\hat{f}/dz$ в $|\mathrm{Im} z| < a$, а значит, $\hat{f} \in \mathcal{A}\,(|\mathrm{Im} z| < a)$. □

Теорема о полноте системы функций

Теорема 9.3. *Система функций* $\left\{x^n e^{x^2/2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *является полной в* $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $\exists\ h \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$h \perp x^n e^{x^2/2}\ \forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Заметим, что $h(x)e^{-x^2/2}$ убывает экспоненциально. Распишем

$$h(x)e^{-x^2/2}e^{a|x|} = h(x)e^{-\frac{1}{2}\left(|x|^2 - 2a|x|\right)} = h(x)e^{-\frac{1}{2}(|x|-a)^2} \underbrace{e^{\frac{1}{2}a^2}}_{\text{const}} \in L_1(\mathbb{R})\ \forall\ a > 0.$$

Отсюда получаем, что $\widehat{h(x)e^{-x^2/2}}$ продолжается до аналитической функции в $\mathbb{C}$ (целая функция).

Определим

$$g(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-x^2/2}e^{-ixz}dx, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\frac{d^n g}{dz^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-x^2/2} (-ix)^n e^{-ixz} dx.$$

В точке $z = 0$ имеем

$$\frac{d^n g}{dz^n}\Big|_{z=0} = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-x^2/2} x^n dx}_{=(h, e^{-x^2/2} x^n) = 0} = 0.$$

Итак, $\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\frac{d^n g}{dz^n}\Big|_{z=0} = 0.$$

По теореме единственности, получаем $g = 0$.

В силу биективности пребразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ получаем, что

$$h(x) e^{-x^2/2} = 0,$$

но $e^{-x^2/2} > 0\ \forall\ x$. Следовательно, $h(x) = 0$ почти всюду, то есть $h(x) = 0$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Итак, показали, что система $\left\{x^n e^{-x^2/2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L_2(\mathbb{R})$. □

Функции Эрмита

Если применить ортогонализацию Грама – Шмидта к системе $\left\{x^n e^{-x^2/2}\right\}_{n=0}^{\infty}$, получим систему $\left\{\underbrace{p_n(x) e^{-x^2/2}}_{e_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ – *функции Эрмита*. Здесь

$$e_0 = e^{-x^2/2}$$

$$e_1 = x e^{-x^2/2}$$

$$e_2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2/2}$$

$$e_3 = \left(x^3 - \frac{3}{2} x\right) e^{-x^2/2}$$

и так далее. После ортогонализации свойство полноты остается.

Система $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется *многочленами Эрмита*.

Полнота и ортогональность дают базис в $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, функции Эрмита – ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$. С точностью до множителя

$$e_n = \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} e^{x^2/2}.$$

Система $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ очень хорошо себя ведет при применении преобразования Фурье. Уже было, что

$$\widehat{e^{-x^2/2}} = e^{-y^2/2} = 1e_0.$$

Выразим преобразование Фурье e_1:

$$\hat{F}e_1 = \hat{F}Me_0 = D\hat{F}e_0 = i\frac{d}{dy}e^{-y^2/2} = -ie_1.$$

Мы подходим к вопросу о спектре преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

Утверждение 9.1. *В $\mathcal{S}$ и в $L_2(\mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\left(\hat{F}^2 f\right)(x) = f(-x).$$

Доказательство. Вычислим

$$\left(\hat{F}^2 f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{i(-x)y}dy = f(-x),$$

так как интеграл можно рассматривать как обратное преобразование Фурье в $-x$. □

Следствие. В $\mathcal{S}$ и в $L_2(\mathbb{R})$

$$\hat{F}^4 = I.$$

Рассмотрим теперь многочлен

$$p(t) = t^4 - 1.$$

Тогда

$$p\left(\hat{F}\right) = \hat{F}^4 - I = 0.$$

Тогда по теореме об отображении спектра

$$\sigma\left(p\left(\hat{F}\right)\right) = p\left(\sigma\left(\hat{F}\right)\right) = 0.$$

Следовательно, $\sigma\left(\hat{F}\right)$ находится среди нулей многочлена $t^4 - 1$, то есть

$$\sigma\left(\hat{F}\right) \subset \{\pm 1, \pm i\}$$

Теорема 9.4. *Пусть $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ – система функций Эрмита. Тогда*

$$\hat{F}e_n = (-i)^n e_n.$$

Доказательство. 1. Пусть

$$h(x) = x^k e^{-x^2/2} = M^k e^{-x^2/2}.$$

Тогда

$$\hat{F}h = \hat{F}M^k e^{-x^2/2} = D^k \hat{F} e^{-x^2/2} = \left(i\frac{d}{dy}\right)^k e^{-y^2/2} = \left(i\frac{d}{dy}\right)^{k-1} \left(-iye^{-y^2/2}\right).$$

Предположение индукции имеет следующий вид:

$$\left(i\frac{d}{dy}\right)^{n-1} e^{-y^2/2} = q_{n-1}(y)e^{-y^2/2},$$

где q_{n-1} – многочлен степени $n-1$.

Перейдем к шагу индукции. Распишем

$$\left(i\frac{d}{dy}\right)^n = i\frac{d}{dy}\left(q_{n-1}(y)e^{-y^2/2}\right) = q_{n-2}(y)e^{-iy^2/2} + \left(\underbrace{q_{n-1}(y)(-iy)}_{\text{многочлен степени } n} e^{-y^2/2}\right).$$

Перейдем ко второй части доказательства. Покажем индукцией, что старший коэффицент у многочлена q_n – коэффицент при y^n – равен $(-i)^n$.

База индукции есть. Пусть теперь

$$q_{n-1}(y) = (-i)^{n-1}y^{n-1} + \text{меньшие степени}.$$

Перейдем к шагу индукции. Имеем

$$\left(i\frac{d}{dy}\right)e^{-y^2/2} = \left(i\frac{d}{dy}\right)\left((-i)^{n-1}y^{n-1} + \text{меньшие степени}\right)e^{-y^2/2} =$$

$$= \left(i(-i)^{n-1}(n-2)y^{n-2} + \text{меньшие степени}\right)e^{-y^2/2} =$$

$$= \left((-i)^n y^n + \text{меньшие степени}\right)e^{-y^2/2}.$$

2. Подытожим показанное выше. Выяснили, что под действием преобразования Фурье $x^k e^{-x^2/2}$ переходит в $\left((-i)^k y^k + \text{меньшие степени}\right)e^{-y^2/2}$.

3. Рассмотрим пространства

$$H_n := < e_1, e_2, \ldots, e_n >, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу пунктов 1 и 2 $\hat{F}H_n \subset H_n$,

$$e_n = p_n(x)e^{x^2/2},$$

где $p_n(x)$ – многочлен степени n. Аналогично, $\check{F}H_n \subset H_n$,

$$\check{F}M = -D\check{F} = -i\frac{d}{dy}\check{F}.$$

Заметим, что $e_{n+1} \perp H_n \ \forall\ g \in H_n$, то есть

$$(e_{n+1}, g) = 0.$$

С другой стороны, по формуле обращения

$$(e_{n+1}, g) = \left(\check{F}\hat{F}e_{n+1}, \check{F}\hat{F}g\right) = \left(\hat{F}e_{n+1}, \hat{F}g\right) = \left(\hat{F}e_{n+1}, \underbrace{\hat{g}}_{\in H_m}\right),$$

так как $\hat{F}$ – унитарный, а значит, $\check{F}$ – тоже унитарный. Заметим, что $e_{n+1} \subset H_{n+1}$ и $\hat{F}e_{n+1} \subset H_{n+1}$.

Итак, имеем $\hat{F}e_{n+1} \perp H_n$ и

$$\hat{F}e_{n+1} \subset H_{n+1} =< e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} > .$$

Следовательно, $\hat{F}e_{n+1} = Ce_{n+1}$.

Итак,

$$e_{n+1} = p_{n+1}e^{-x^2/2} \ \xrightarrow{\hat{F}}\ \left((-i)^{n+1}y^{n+1} + \text{младшие степени}\right)e^{-y^2/2},$$

а

$$e_{n+1} = \left(x^{n+1} + \text{младшие степени}\right)e^{-x^2/2}.$$

Отсюда $C = (-i)^{n+1}$.

□

Лекция 10. Свертка функций

Свертка основных функций

Сначала определим операцию свертки для основных функций, а затем перейдем к обобщенным функциям.

Определение 10.1. Пусть f, g – функции

$$f, g: \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{C}.$$

Их *сверткой* называется следующая операция:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Теорема 10.1. *Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $\exists\ f * g \in L_1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Заметим, что если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $f(u)g(v) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Более того,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)du = g(v) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)du \in L_1(\mathbb{R}).$$

Сделаем в интеграле выше замену переменных $u = t$, $v = x - t$ (измеримая замена). Тогда интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)du$$

переходит в интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \in L_1(\mathbb{R}).$$

Оценим вдобавок к теореме норму $\|f * g\|_{L_1}$. Получим

$$\|f * g|_{L_1} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|f(t)||g(x-t)|}_{\in L_1(\mathbb{R}^2)} dt \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|dx}_{\|g\|_{L_1}} \right) |f(t)|dt =$$

$$= \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

□

Теорема 10.2. *(Свойства свертки) Пусть $f, g, h \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда выполняются следующие свойства.*

1. *Свертка коммутативна:*
$$f * g = g * f;$$
2. *Свертка линейна:*
$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h;$$
3. *Свертка ассоциативна:*
$$(f * g) * h = f * (g * h);$$
4. *Пусть $g \in C^1(\mathbb{R})$ и $g' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ и*
$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g'(x-t)dt;$$
5. *$suppf * g \subset suppf + suppg$. Элемент $x \in suppf * g$, только если $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in suppf$, $x_2 \in suppg$;*
6. *$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$.*

Доказательство. 1. Распишем

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt =$$

$$= \int\limits_{\infty}^{-\infty} f(x-s)g(s)(-ds) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s)dx = (g * f)(x).$$

2. Запишем свертку f с линейной комбинацией $\alpha g + \beta h$:

$$f * (\alpha g + \beta h)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\alpha g(x-t) + \beta h(x-t)\right)dt =$$

$$= \alpha (f * g)(x) + \beta (f * h)(x).$$

3. Распишем

$$[(f * g) * h](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)h(x-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \right) h(x-t)dt.$$

Здесь $f \cdot g \cdot h \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Воспользуемся теоремой Фубини и поменяем порядок интегрирования. Получим

$$[(f * g) * h](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-s)h(x-t)dt \right) ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)h\left((x-s)-u\right)du \right) ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,(g*h)\,(x-s)ds = f*(g*h)\,.$$

4. Напомним формулу свертки:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Запишем формальную производную (пока не думаем об ограничениях и просто заносим производную внутрь интеграла):

$$\frac{d}{dx}\,(f * g)\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g'(x-t)dt.$$

Чтобы интегрировать по параметру в интеграле Лебега, должны выполняться следующие условия:

i. $\exists$ интеграл $\int f(t)g(x-t)dt$ и $\int f(t)g'(x-t)dt$;

ii. Если для формальной производной $\exists$ мажоранта $\in L_1(\mathbb{R})$, то дифференцировать под знаком интеграла можно (по следствию из теоремы Лебега о предельном переходе).

В нашем случае, так как $f, g, g' \in L_1$, интегралы из пункта i $\exists$. Так как $g' \in L_1$,

$$|f(t)g'(x-t)| \leq |f(t)|\,|g'(x-t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

по переменной t для $\forall\ x$.

5. Хотим показать, что

$$\mathrm{supp} f * g \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp} g.$$

Посмотрим еще раз на определение свертки:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Отсюда

$$x = t + (x - t).$$

Предположим, что $x = t_1 + t_2$ и либо $t_1 \notin \text{supp} f$, либо $t_2 \notin \text{supp} g$. Тогда

$$f(t_1)g(t_2) = 0,$$

а значит, и

$$\int f(t_1)g(t_2)dt = 0,$$

откуда $f * g(x) = 0$. Свойство 5 доказано.

6. Хотим показать, что

$$\underbrace{\widehat{f * g}}_{\in C_0(\mathbb{R}} = \sqrt{2\pi} \underbrace{\hat{f}\hat{g}}_{\in C_0(\mathbb{R})}.$$

Распишем

$$\left[\hat{F}\left(f * g\right)\right](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f * g\right)(x) e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \right) e^{-ixy} dx. \tag{37}$$

Здесь $f(t)g(x-t)e^{-ixy} \in L_1(\mathbb{R}^2)\ \forall\ y \in \mathbb{R}$. Далее можем записать

$$(37) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)e^{-ixy} dx \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i(t+s)y} ds \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-ity}e^{-isy} ds dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity}dt \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-isy}ds = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}.$$

□

Пример 10.1. Пусть

$$f = \chi_{[1,2]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad g = \chi_{[3,4]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [3,4] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь $\text{supp} f = [1,2]$, а $\text{supp} g = [3,4]$. По свойству 5 свертки, $\text{supp} f * g \subset [4,6]$.

Найдем свертку $f * g$:

$$\left(f * g\right)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_{[1,2]}(t)\chi_{[3,4]}(x-t)dt =$$

$$= \int_1^2 \chi_{[3,4]}(x-t)dt.$$

По определению,

$$\chi_{[3,4]}(x-t) = 1, \quad 3 \le x-t \le 4,$$

то есть при $x-4 \le t \le x-3$. Возможны две ситуации, в которых $f*g(x) \neq 0$:

I. $1 \le x-3 \le 2$, то есть $4 \le x \le 5$. Тогда

$$\int_1^{x-2} 1dt = x-4.$$

II. $1 \le x-4 \le 2$. Тогда $5 \le x \le 6$ и

$$\int_{x-4}^2 1dt - 6 - x.$$

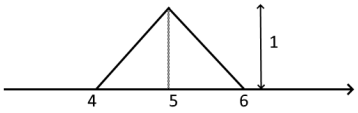

Рис. 10.1. Функция $f*g$

Итак, функция сверки $f*g$ имеет вид «пики» (рис. 10.1).

Скажем несколько слов о свертке с точки зрения свойства 2. Напомним, это было свойство линейности:

$$f*(\alpha g+\beta h) = \alpha f*g + \beta f*g.$$

Пусть f – фиксированная функция в выражении $f*g$.

Тогда свертку можно представить как

$$f*g = S_f g.$$

Здесь *оператор свертки* S_f – это действие, определяемоей функцией f, $g \in L_1(\mathbb{R})$ – произвольное.

Тогда свойство 2 свертки можно записать как

$$S_f(\alpha g+\beta h) = \alpha S_f g + \beta S_f h,$$

то есть S_f – линейный оператор в $L_1(\mathbb{R})$.

Так как

$$\|f*g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1},$$

то есть

$$\|S_f g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1},$$

то

$$\|S_f\| \leq \|f\|_{L_1},$$

а значит,

$$S_f : \ L_1(\mathbb{R}) \ \to \ L_1(\mathbb{R})$$

– ограниченный оператор.

Свертка обобщенной и основной функции

Свертку

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \tag{38}$$

можно интерпретировать как $< f(t), g(x-t) >$, то есть действие регулярной обобщенной функции f на основную функцию g, у которой сделана замена переменной.

Пусть $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}$. Будем определять свертку $f * g$.

Пусть $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$, то есть f интегрируема на любом отрезке, $g \in \mathcal{D}$. Тогда интеграл (38) определен, так как функция g в результате преобразований остается в $\mathcal{D}$.

Регулярные функции (в частности $\mathcal{D}$) плотны в $\mathcal{D}'$ в $*$-слабой топологии. Следовательно, свертку можно продолжить на все $\mathcal{D}'$.

Оператор свертки определим как

$$S_f g := f * g := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Это $*$-слабо непрерывный оператор, то есть, если

$$g_n \ \overset{\mathcal{D}}{\to} \ g,$$

а $f \in \mathcal{D}'$ регулярна, то

$$S_f g_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g_n(x-t)dt \ \to \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Теперь, пусть $f_n \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, $f_n \ \to \ f$ в $*$-слабой топологии, то есть

$$S_{f_n} g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(t)g(x-t)dt = < f_n(t), g(x-t) > \to < f(t), g(x-t) > .$$

Формула для продолжения свертки получена. Итак, доказали следующую теорему.

Теорема 10.3. *Для $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}$ определена свертка*

$$(f * g)(x) := < f(t), g(x-t) > .$$

Пример 10.2. Найдем, как выглядит S_δ, то есть оператор свёртки с δ-функцией. Свертка

$$(\delta * g)(x) =< \delta(t), g(x-t) >= g(x-t)\Big|_{t=0} = g(x),$$

то есть $S_\delta = I$,

$$S_\delta g = g \ \forall \ g \in \mathcal{D}.$$

Пример 10.3.

$$S_{\delta'} g = \delta' * g =< \delta'(t), g(x-t) >=$$

$$= - < \delta(t), (g(x-t))' >=< \delta(t), g'(x-t) >= g'(x),$$

то есть $S_{\delta'} = d/dx$.

Замечание 10.1. Аналогично можно определить свертку $f * g$, где $f \in \mathcal{S}'$, $g \in \mathcal{S}$ ($f \in \mathcal{E}'$, $g \in \mathcal{E}$).

Заметим, что свертка

$$(f * g)(x) :=< \underbrace{f(t)}_{\mathcal{D}'}, \underbrace{g(x-t)}_{\in \mathcal{D}} >$$

– число, зависящее от x. Иными словами, $(f * g)(x) = \varphi(x)$ – некоторая функция.

Для регулярных функций f свертка $f * g \in C^\infty$, так как $g \in \mathcal{D} \subset C^\infty$.

Свертка двух обобщенных функций

Поймем теперь, можно ли определить свёртку двух обобщенных функций.

Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}$. Попробуем рассмотреть $f_1 * f_2$. Мы хотим понять, как определить такую свертку и что это за объект.

Пусть f_1 и f_2 – регулярные обобщенные функции (например, $D \subset L_1(\mathbb{R})$. Тогда $f_1 * f_2$ – тоже регулярная обобщенная функция, так как если $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, то $f_1 * f_2 \in L_1(\mathbb{R})$.

Распишем

$$< f_1 * f_2, g >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(x) g(x) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_1(t) f_2(x-t)}_{\in L_1(\mathbb{R}^2)} dt \right) \underbrace{g(x)}_{\text{ограничена}} dx. \tag{39}$$

По теореме Фубини,

$$(39) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t) g(x) dx \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x) g(t+s) ds \right)}_{f_2(s), g(t+s)>} dt.$$

Про $g(t+s)$ мы знаем только, что она $\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Если продолжить действие $< f_2(s), g(t+s) >$ для всех $f_2 \in \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$, то supp $< f_2, g(t+s) >$ вообще говоря не финитен, но $< f_2(s), g(t+s) > \in C^\infty$, так как $g \in C^\infty$.

С учетом расписанного выше

$$< f_1 * f_2, g >=< f_1(t), \underbrace{< f_2(s), g(t-s) >}_{\varphi(t)} >,$$

причем для продолжения $f_1(t)$ на все $\mathcal{D}'$ нам нужно, чтобы $\varphi(t) \in \mathcal{D}$.

Обсудим, в каких случаях мы можем продолжить свертку.

1. Пусть $\mathrm{supp} f_1$ и $\mathrm{supp} f_2$ – финитны. Тогда supp $< f_i, g(t+s) >$ финитен и эта функция $\in \mathcal{D}$.

   Следовательно, определено действие

   $$< f_1(t), < f_2(s), g(t+s) >> .$$

2. Пусть носители f_1 и f_2 «смотрят» в одну сторону. Например,

   $$\mathrm{supp} f_i \subset [a, +\infty) \ i = 1, 2.$$

   Для удобства возьмем $a = 0$. Определим

   $$\mathcal{D}_+ = \{\varphi \in \mathcal{D} : \ \mathrm{supp}\varphi \text{ финитен и } \subseteq [0, +\infty)\},$$

   $$D'_+ := \{f \in \mathcal{D}' : \ \mathrm{supp} f \subset [0, +\infty)\}.$$

   Вернемся к интегралу (39). Если f_1 и f_2 регулярны и $\mathrm{supp} f_i \subset [0, +\infty)$. Тогда пересечение их носителей компактно, так как $f_2(-t)$ имеет носитель $(-\infty, a]$.

3. Можно определить $f_1 * f_2$ для $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'_+$. Тогда и $f_1 * f_2 \in \mathcal{D}'$.

   Действие $\forall\ g \in \mathcal{D}$ определим как

   $$< f_1 * f_2, g >=< f_1(t), < f_2(s), g(t+s) >>,$$

   – так получается свертка для регулярных функций.

Пример 10.4. 1. Найдем свертку $\delta * \delta$. Распишем

$$< \delta(t), < \delta(s), g(t+s) >>=< \delta(t), g(t) > .$$

Итак, $\delta * \delta = \delta$, $S_\delta \delta = \delta$.

2. Найдем свертку $\delta * \theta = \theta * \delta$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Распишем

$$< \delta * \theta, g >=< \theta(t), < \delta(s), g(t+s) >>=< \theta(t), g(t) >,$$

то есть $\delta * \theta = \theta$.

3. $\forall\ f \in \mathcal{D}'_+$

$$< \delta * f, g >=< f(t), < \delta(s), g(t+s) >>=< f(t), g(t) >,$$

то есть $\delta * f = f$.

Если рассматривать свёртку в $\mathcal{D}'$ не на функциях из $\mathcal{D}'_+$, то там свертка не ассоциативна.

Пример 10.5. Рассмотрим $1 * \delta' * \theta$. Здесь $1 \notin \mathcal{D}'_+$. Тогда

$$(1 * \delta') * \theta = 0 * \theta = 0,$$

но

$$(1 * (\delta' * \theta)) = 1 * \theta' = 1 * \delta = 1.$$

Теорема 10.4. *В $\mathcal{D}'_+$ свертка ассоциативна.*

Лекция 11. Функциональное исчисление операторов.

Свертка в L_2

Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Их свертка

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{g(x-t)}_{g_x} dt = (f, \overline{g_x})_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Итак, $f * g$ существует.

Утверждение 11.1. *Если $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, то $f * g \in C_0(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Свертка

$$f * g = (f, g_x)_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\hat{F} f, \hat{F}\overline{g_x}\right). \tag{40}$$

Распишем

$$\hat{F}\overline{g_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(x-t) e^{-iyt} dt.$$

Сделав замену $x - t = s$, получим

$$\hat{F}\overline{g_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(s) e^{-iy(x-s)} ds = \frac{e^{-ixy}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(s) e^{iys} ds.$$

Здесь

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(s) e^{iys} ds = \check{F}\overline{g} \in L_2.$$

Тогда, продолжая (40), получим

$$\left(\hat{F} f, \hat{F}\overline{g_x}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\left(\hat{F} f\right)}_{\in L_2} \underbrace{\left(\check{F}\overline{g}\right)(y)}_{\in L_2} e^{-iyx}}_{\in L_1(\mathbb{R}} dy$$

– преобразование Фурье функции $\left(\hat{F} f\right) \check{F}\overline{g} \in L_1(\mathbb{R})$. Это преобразование Фурье лежит в $C_0(\mathbb{R})$. □

Пусть теперь $f \in \mathcal{S}'$, $g \in L_2(\mathbb{R})$. Возникает вопрос: можно ли определить $f * g$? Как и в прошлый раз, будем пользоваться *оператором свертки* $S_f g := f * g$.

Известно, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ в $*$-слабой топологии. Если $f \in \mathcal{S}$, то $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим следующий класс в $\mathcal{S}'$:

$$\left\{ f \in \mathcal{S}' : \ \hat{f} \in L_\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

Выпишем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}) & \stackrel{S_f}{\to} & L_2(\mathbb{R}) \\ \downarrow \hat{F} & & \hat{F} \downarrow \\ L_2(\mathbb{R}) & \stackrel{B_f}{\to} & L_2(\mathbb{R}) \end{array} \tag{41}$$

Здесь

$$B_f g = \underbrace{\sqrt{2\pi}\hat{f}}_{\in L_\infty(\mathbb{R})} h$$

– ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, возникающий вследствие представления

$$\hat{F} S_f g = \widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{F}g.$$

Теорема 11.1. *Пусть $f \in \mathcal{S}'$ и $\hat{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда определен оператор свертки*

$$S_f : \ L_2(\mathbb{R}) \ \to \ L_2(\mathbb{R}),$$

который унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $\sqrt{2\pi}\hat{f}$.

Доказательство. Унитарная эквивалетность следует из коммутативной диаграммы (41):

$$\hat{F} S_f = B_f \hat{F},$$

где

$$B_f h = \sqrt{2\pi}\hat{f}.$$

□

Пример 11.1. Оператор Гильберта определяется как

$$(Af)(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Легко понять, что

$$Af = \frac{1}{\pi} P\frac{1}{x} * f,$$

где $P\frac{1}{x}$ – обобщенная функция:

$$< P\frac{1}{x}, \varphi >= \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{x-t} dt = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

В качестве упражнения остается показать, что $P\frac{1}{x} \in \mathcal{D}', \mathcal{S}'$ и что

$$\widehat{P\frac{1}{x}} = -i\pi y.$$

Итак, $A \sim B$, $\hat{F}A = B\hat{F}$. Тогда

$$Bh = -iyh(y).$$

Спектр $\sigma(B) = \pm i$ – собственные значения бесконечной кратности.

Спектральная теорема. Постановка вопроса

Мы приступаем к последней большой теме в нашем курсе. Следует обговорить, что под спектральной теоремой понимается целый набор разных теорем, которые описывают самосопряженный оператор.

Целью данного раздела будет следующее утверждение: *любой самосопряженный оператор подобен оператору умножения.*[10]

На самом деле многие представления о спектральной теореме были получены в других курсах.

Пример 11.2. Пусть H – евклидово пространство, $\dim H = n < \infty$, а A – симметричная матрица (матрица самосопряженного оператора, записанная в каком-то ОНБ).

Тогда $\exists\ \{e_k\}_{k=1}^n$ – ОНБ (вообще говоря другой) такой, что новая матрица того же самосопряженного оператора имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{42}$$

Подействовав оператором на вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, получим

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n).$$

Другим примером является теорема Гильберта – Шмидта.

Теорема 11.2. *(Гильберта – Шмидта) Пусть H – сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $A = A$, $A \in K(H)$, то есть компактный.*

Тогда $\exists\ \{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ОНБ в H такой, что $Ae_k = \lambda e_k$.

Напомним, что все гильбертовы пространства изоморфны:

$$H \simeq l_2.$$

Тогда справедлива следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{A} & H \\ \downarrow S & & S \downarrow \\ l_2 & \xrightarrow{A_\lambda} & l_2 \end{array}$$

Здесь

$$A_\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots),$$

и в силу компактности оператора

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in C_0.$$

[10] Далее, конечно, предстоит выяснить, оператору умножения на что и в каком пространстве.

Заметим, что A_λ можно интерпретировать как бесконечномерную диагональную матрицу по аналогии с (42).

Итак, мы привели два примера, когда самосопряженный оператор подобен оператору умножения.

Наша цель далее – понять, что мы можем сказать (по аналогии с примерами выше) для произвольного самосопряженного оператора.

Теорема об отображении спектра для многочленов

Прежде, чем перейти к обсуждению спектральной теоремы, вспомним некоторые факты из теории спектра.

Теорема 11.3. *(Отображение спектра для многочленов) Пусть X – банахово, $A \in B(X)$,*

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad a_n \neq 0.$$

Тогда

$$\sigma\left(p(A)\right) = p\left(\sigma(A)\right) = \left\{p(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\right\}.$$

Доказательство. Возьмем многочлен

$$p(t) - \lambda = a_n(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\dots(t - \lambda_n).$$

- Пусть $\lambda \in \sigma\left(p(A)\right)$,

  $$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k, \quad A^0 = I.$$

  Тогда

  $$p(A) - \lambda I = a_n \left(A - \lambda_1 I\right)\left(A - \lambda_2 I\right)\dots\left(A - \lambda_n I\right)$$

  – необратимый. Следовательно, $\exists\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такой, что $A - \lambda_i I$ необратим.[11] Тогда

  $$p(\lambda_i) - \lambda = 0,$$

  то есть $\lambda = p(\lambda_i)$, где $\lambda_i \in \sigma(A)$.

2. Пусть $\lambda = p(\lambda_i)$ и $\lambda_i \in \sigma(A)$ для какого-то i.

   Предположим, что $\lambda_i \in \sigma_p(A)$ (лежит в точечном спектре A). Запишем

   $$p(A) - \lambda I = a_n \left(\text{ все остальные множители }\right)\left(A - \lambda_i I\right).$$

   Найдется $x \neq 0$ такой, что

   $$\left(A - \lambda_i I\right) x = 0.$$

[11] Действительно, если все B_i обратимы, то $B_1 \dots B_n$ – тоже обратимый и

$$\left(B_1 B_2 \dots B_n\right)^{-1} = B_n^{-1} B_{n-1}^{-1} \dots B_2^{-1} B_1^{-1}.$$

Отсюда

$$(p(A) - \lambda I)\, x = 0.$$

Если же $\lambda_i \notin \sigma_p(A)$, но $\lambda_i \in \sigma(A)$, то

$$\operatorname{Im}(A - \lambda_i I) \neq X.$$

Запишем

$$p(A) - \lambda I = a_n(A - \lambda_i I)\,(\text{ все остальные множители }).$$

Отсюда

$$\operatorname{Im}(p(A) - \lambda I) \neq X,$$

$\lambda \in \sigma(p(A))$.

□

Функциональное исчисление

Перейдем к классу спектральных теорем, именуемых функциональным исчислением.

Пусть есть $A \in B(X)$, где X – банахово, и f – функция. **Постановка задачи**: придать смысл (или определить) $f(A)$.

I. Умеем определять многочлен от оператора. Пусть

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Тогда

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

В частности, многочлену $p(t) \equiv 1$ сопоставляется I, а $p(t) = t$ – оператор A.

II. Известно, что $\sigma(A) \subset \{z : \ |z| \leq \|A\|\}$.

Пусть $f \in \mathcal{A}(|z| < \|A\| + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то есть аналитическая. Тогда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

– ряд сходится равномерно на любом компакте $\subset \{|z| < \|A\| + \varepsilon\}$.

Обсудим, что представляется собой $f(A)$. Формальная запись – это $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.

Возникает вопрос о сходимости ряда (операторная сходимость).

Известно, что $r(A) \leq \|A\|$ и

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Зафиксируем ρ такое, что

$$\|A\| < \rho < \|A\| + \varepsilon.$$

Тогда $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n \geq N$

$$\|A^n\|^{1/n} \leq \rho.$$

Отсюда

$$\|A^n\| \leq \rho^n,$$

$$\frac{\|A^n\|}{\rho^n} \leq 1, \quad n \geq N.$$

Тогда

$$C := \sup_{n \geq 1} \frac{\|A^n\|}{\rho^n} < \infty,$$

откуда

$$\left\|A^k\right\| \leq C\rho^k \ \forall\ k > 1.$$

Тогда

$$\left\|\sum a_k A^k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left\|A^k\right\| \leq C \sum |a_k| \rho^k,$$

то есть ряд сходится по операторной норме.

В частности, если $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – целая функция, то $\forall\ A \in B(X)$ можно определить $f(A)$.

Например, для $f(z) = e^z$ определим

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

для $f(z) = \cos z$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}.$$

Теорема о непрерывном исчислении

Если хотим расширить класс функций, для которых хотим определить $f(A)$, надо сузить класс операторов.

Пусть H – гильбертово пространство, $A = A^*$, $A \in B(H)$. Тогда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, точнее, $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$. Еще точнее, $\sigma(A) \subset [m, M]$, где $m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$.

Пусть f – непрерывная функция на спектре.

Теорема 11.4. *(О непрерывном исчислении) Пусть $A = A^*$ в гильбертовом пространстве H, $A \in B(H)$. Тогда $\exists!$ гомоморфизм*

$$\varphi : \ C\left(\sigma(A)\right) \ \to \ B(H)$$

такой, что

1. $\varphi : \ \underbrace{1}_{f(t)\equiv 1} \ \mapsto \ I;$
2. $\varphi : \ \underbrace{t}_{f(t)=t} \ \mapsto \ A;$
3. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g);$
4. $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g);$
5. φ *– линейный непрерывный оператор из* $C\left(\sigma(A)\right)$ *в* $B(H)$*;*

   Если
   $$f_n \underset{C(\sigma(A))}{\rightrightarrows} f,$$
   то
   $$\varphi(f_n) \ {}^{\|\cdot\|_{B(H)}} \varphi(f)$$
   и
   $$\|\varphi(f)\|_{B(H)} = \max_{t\in\sigma(A)} |f(t)|;$$
6. $\forall \ B \in B(H)$ *и для которого* $AB = B(A)$ *следует, что*
   $$\varphi(f)B = B\varphi(f).$$
7. $(\varphi(f))^* = \varphi\left(\overline{f}\right).$

Тогда $\varphi(f) =: f(A)$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 однозначно определяют φ на многочленах:

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

Свойства 3 и 4 – свойства гомоморфизма.

Обсудим, как определить φ для любой $f \in C(\sigma(A))$. По теореме Вейерштрасса $\exists$ последовательность

$$p_n \underset{\sigma(A)}{\rightrightarrows} f.$$

По свойствам 1 и 2 умеем строить $p_n(A)$. Если многочлен p имеет вещественные коэффициенты, то

$$(p(A))^* = p(A).$$

Если коэффициенты не вещественные, то

$$(p(A))^* = \overline{p}(A),$$

то есть $p(A)$ не самосопряженный, но $p(A)$ – нормальный, то есть

$$(p(A))^* p(A) = p(A)p(A)^*.$$

Замечание 11.1. Если оператор B – нормальный оператор, то

$$r(B) = \|B\|.$$

Действительно, для произвольного ограниченного оператора, напомним, было равенство

$$\|B^*B\| = \|B\|^2.$$

Тогда

$$r^2(B) = \lim_{n\to\infty} \|B^n\|^{2/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\|B^n\|^2\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|(B^n)^* B^n\|^{1/n}.$$

В силу нормальности оператора,

$$\lim_{n\to\infty} \|(B^n)^* B^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|(B^*B)\|^{1/n} = r(B^*B) = \|B^*B\| = \|B\|^2.$$

Вернемся к доказательству теоремы. При $n, m \to \infty$

$$\|p_n(A) - p_m(A)\| = \left\| \underbrace{(p_n - p_m)(A)}_{\text{нормальный}} \right\| = r((p_n - p_m)(A)) = \max_{\lambda\in\sigma((p_n-p_m)(A))} |\lambda|.$$

Воспользуемся теоремой об отражении спектра. Получим, что

$$\max_{\lambda\in\sigma((p_n-p_m)(A))} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |p_n(\lambda) - p_m(\lambda)|.$$

Так как $p_n \ \ f$, то $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная в $C(\sigma(A))$. Тогда $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(A) =: \underbrace{f(A)}_{\varphi(f)}.$$

Заметим, что последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $p_n \ \underbrace{\sigma(A)}\rightrightarrows f$ – не единственная.

Если другая последовательность многочленов $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что $q_n \underset{\sigma(A)}{\rightrightarrows} f$, то $\{q_n(A)\}$ тоже фундаментальна.

Воспользуемся методом «гребенки». Последовательность

$$p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n, \ldots \ \rightrightarrows \ f$$

и последовательность

$$p_1(A), q_1(A), p_2(A), q_2(A), \ldots, p_n(A), q_n(A), \ldots$$

фундаментальна в $B(H)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(A) = \lim_{n\to\infty} q_n(A).$$

Построили $\varphi(f)$ $(f(A))$ как

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} p_n(A), \quad p_n \underset{\sigma(A)}{\rightrightarrows} f.$$

Так как

$$\|p_n(A)\| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |p_n(\sigma)|,$$

то предельным переходом $n \to \infty$ получим

$$\underbrace{\|\varphi(f)\|}_{\|\varphi(A)\|} = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |f(x)|.$$

Перейдем к свойству 6. Если $AB = BA$, то для любого многочлена

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

получаем

$$p(A)B = Bp(A).$$

Если $p_n \underset{\sigma(A)}{\rightrightarrows} f$, то

$$\begin{array}{ccc} p_n(A)B & = & Bp_n(A) \quad \forall\ n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(f)B & = & B\varphi(f) \end{array}$$

Свойство 7. Пусть $f \in C(\sigma(A))$. Построим

$$p_n \underset{\sigma(A)}{\rightrightarrows} f.$$

Тогда

$$p_n \rightrightarrows \overset{f}{\cdot}$$

Но

$$\begin{array}{ccc} (p_n(A))^* & = & \overline{p_n}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\varphi(f))^* & = & \varphi\left(\overline{f}\right). \end{array}$$

В частности, если f – вещественнозначный, то $f(A)$ – самосопряженный. □

Закончим лекцию иллюстрацией, с которой начали эту тему. Пусть оператор A задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

в $\mathbb{C}^n$. Если f – непрерывна на $[a,b]$ и $\forall\ i\ \lambda_i \in [a,b]$, то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Например, если $f(t) = \sqrt{t}$, $\forall\ i\ _i \geq 0$, то

$$\sqrt{(A)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Пусть H – гильбертово и сепарабельное и $\dim H = \infty$. Пусть $A = A^*$, $A \in K(H)$. Тогда $\exists\ \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ в H. Для $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k,$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Пусть $f \in C\left(\sigma(A)\right)$. Тогда $f(\lambda_k)$ определено $\forall\ k = 1, 2, \ldots$,

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)(x, e_k) e_k.$$

Лекция 12. Борелевское функциональное исчисление. Конструкция интеграла Римана — Стилтьеса

Борелевское функциональное исчисление для самосопряженного оператора A

Напомним, что на прошлой лекции построили непрерывное функциональное исчисление для самосопряженного оператора. Пусть H – гильбертово, $A = A^* \in B(H)$. Мы рассматривали $C(\sigma(A))$ или $C[a,b]$, где $\sigma(A) \subset [a,b]$. Для $f \in C(\sigma(A))$ строили объект

$$f(A) = \varphi(f),$$

где

$$\varphi : \ C(\sigma(A)) \ \to \ B(H).$$

Определение 12.1. Через $\mathcal{B}[a,b]$ обозначим *борелевские ограниченные функции на* $[a,b]$.

Пусть теперь $\sigma(A) \subset [a,b]$ и $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Возникает вопрос: как определить $f(A)$ (и можно ли)?

Теорема 12.1. *(Борелевское функциональное исчисление для самосопряженного оператора A)* $\exists!$ *гомоморфизм*

$$\varphi : \ \mathcal{B}[a,b] \ \to \ B(H),$$

обладающий следующими свойствами:

1. $\varphi(1) = I$, *то есть* φ *сопоставляет* $f(t) \equiv 1 \mapsto I$;
2. $\varphi(t) = A$, *то есть* φ *сопоставляет функции* $f(t) = t \mapsto A$;
3. *Выполнены следующие два свойства:*

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g),$$

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$$

   для $\forall \ f, g \in \mathcal{B}[a,b]$.

4. $\|\varphi(b)\|_{B(H)} \le \|f\|_{\mathcal{B}[a,b]} := \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Этот гомоморфизм также обладает следующими свойствами:

5. *Если* $f_n(t) \ \to \ f(t) \ \forall \ t \in [a,b]$, *где* $f_n, f \in \mathcal{B}[a,b]$ *и* $\exists \ C > 0$ *такое, что* $\forall \ n$, $\forall \ t \in [a,b]$, $|f_n(t)| \le C$, *то*

$$\varphi(f_n) \ s\to \varphi(f)$$

   (сильная операторная сходимость), то есть $\forall \ x \in B(H)$

$$\varphi(f_n)x \ \overset{\|\cdot\|}{\to} \ \varphi(f)x;$$

6. $\forall\ B \in \mathcal{B}(H)$ *такого, что* $AB = BA$, *выполнено* $\varphi(f)B = B\varphi(f)$;

7. $\varphi\left(\overline{f}\right) = (\varphi(f))^*$.

Тогда определим $f(A) := \varphi(f)$.

Доказательство. Заметим, что свойство 3 – свойство гомоморфизма (сохранение операций в $\mathcal{B}[a,b]$ и $B(H)$).

Свойство 1 и 2 позволяют однозначно определить φ на многочленах и далее на непрерывных функциях.

Пусть пока $f \in C[a,b]$, $x, y \in H$ – фиксированы. Рассмотрим отображение

$$C[a,b] \ \to\ \mathbb{C},$$

сопоставляющее $f \in C[a,b] \mapsto (f(A)x, y)_H$. Такое отображение мы умеем строить по непрерывному функциональному исчислению.

1. Такое отображение линейно. Линейной комбинации функций $\alpha f + \beta g \mapsto$

$$((\alpha f(A) + \beta g(A))\, x, y) = \alpha\,(f(A)x, y) + \beta(g(A)x, y).$$

2. Это отображение является ограниченным функционалом:

$$|(f(A)x, y)| \le \|f(A)x\|\,\|y\| \le \underbrace{\|f(A)\|}_{\max -t\in\sigma(A)|f(t)|}\|x\|\|y\| \le$$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|\|f\|_{C[a,b]},$$

где последнее $\le$ следует из непрерывного функционального исчисления.

Итак, $f \mapsto (f(A)x, y)$ – элемент пространства $(C[a,b])^* \simeq \mathrm{BV}_0[a,b]$. Тогда $\exists\ g \in \mathrm{BV}_0[a,b]$ такая, что

$$(f(A)x, y) = \int_a^b f(t)dg(t). \tag{43}$$

Здесь g зависит от x и y.

Замечание 12.1. g порождает комплекснозначную борелевскую меру

$$\mu_g\left([\alpha,\beta)\right) = g(\beta) - g(\alpha).$$

Норма такого функционала равна

$$\mathrm{Var}_a^b g = \|g\|_{\mathrm{BV}_0}.$$

Замечание 12.2.

$$\mathrm{Var}_a^b g \le \|x\|\|y\|$$

Можно ли продолжить теперь (43) на класс $f \in \mathcal{B}[a,b]$? Заметим, что

$$\int_a^b f(t)dg(t)$$

линеен по x и сопряженно линеен по y.

Тогда $\overline{\int_a^b f(t)dg(t)}$ линеен по y, при этом

$$\left|\int_a^b f(t)dg(t)\right| \le \int_a^b |f(t)||dg(t)| \le \underbrace{\sup_{[a,b]}|f(t)|}_{\|f\|_{\mathcal{B}[a,b]}} \underbrace{\int_a^b |dg(t)|}_{\mathrm{Var}_a^b g \le \|x\|\|y\|} \le \|f\|_{\mathcal{B}}\|x\|\|y\|.$$

Следовательно, это линейный непрерывный функционал в H.

По теореме Рисса, $\exists\, z \in H$ такое, что

$$\overline{\int_a^b f(t)dg(t)} = (y,z) = \overline{(z,y)}.$$

$$\int_a^b f(t)dg(t) = (z,y),$$

где z линейно зависит от x, то есть $\exists$ линейный оператор B такой, что $z = Bx$. Определим

$$B = \varphi(f), \quad f \in \mathcal{B}[a,b].$$

Итак, определили

$$\int_a^b f(t)dg(t) = (\varphi(f)x, y)\,,$$

$$\left|\int_a^b f(t)dg(t)\right| \le \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\|x\|\|y\|.$$

По неравенству Коши – Буняковского и мультипликативному неравенству,

$$(\varphi(f)x, y) \le \|\varphi(f)\|\,\|x\|\|y\|.$$

Из написанного выше получаем, что

$$\|\varphi(f)\| \le \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Перейдем к доказательству свойства 5. Пусть $f_n(t) \to f(t)\ \forall\, t \in [a,b]$ и

$$\sup_t |f_n(t)| \le C.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе

$$\begin{array}{ccc} \int\limits_a^b f_n(t)dg(t) & = & (\varphi(f_n)x,y) \\ \downarrow & & \\ \int\limits_a^b f(t)dg(t) & = & (\varphi(f)x,y) \end{array} \tag{44}$$

Тогда

$$(\varphi(f_n)x,y) \ \to \ (\varphi(f)x,y)$$

– слабая операторная сходимость в $B(H)$. Это пока еще не сильная операторная сходимость, которую нам нужно показать. Докажем сначала свойства 6 и 7.

Свойство 6. Пусть $BA = AB$. Тогда, как уже показывали ранее,

$$Bp(A) = p(A)B \text{ для многочленов } p.$$

Далее,

$$Bf(A) = f(A)B \text{ для непрерывной функции } f.$$

Воспользовавшись (44), можно сделать предельный переход.

Свойство 7. Для многочленов

$$(p(A))^* = \overline{p}(A),$$

так как

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) = \sum \overline{a_k} A^k = \overline{p}(A).$$

Отсюда $\overline{f}(A) = (f(A))^*$ для непрерывных функций, отсюда и для $f \in \mathcal{B}[a,b]$.

Вернемся к свойству 5. Если $f_n(t) \to f(t)$, то $\overline{f_n}(t) \to f(t)$. Тогда

$$|f_n(t) - f(t)|^2 = (f_n(t) - f(t))\left(\overline{f_n}(t) - \overline{f}(t)\right) \ \to \ 0.$$

Отсюда

$$|f_n - f|^2(A) \ \rightharpoonup \ 0,$$
$$\left(|f_n - f|^2(A)x, x\right) \ \to \ 0.$$

С другой стороны,

$$\left(|f_n - f|^2(A)x, x\right) = (((f_n - f)(A))^*(f_n - f)(A)x, x) =$$

$$= \|(f_n - f)(A)x\|^2 \ \to \ 0,$$

то есть $f_n(A) - f(A) \ \xrightarrow{s} \ 0$, откуда $f_n(A) \xrightarrow{s} f(A)$. □

Проекторнозначная мера

Пусть теперь дан отрезок $[a, b]$, внутри которого заключен спектр $\sigma(A)$, $A = A^* \in B(H)$. Внутри отрезка $[a, b]$ можно выделить полуинтервал $[\alpha, \beta) \supset \sigma(A)$.

Пусть, кроме того, дана характеристическая функция

$$\chi_{[\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Хотим определить $\chi_{[\alpha,\beta)}(A)$.[12] Известно, что $\chi^2 = \chi$ для любого множества. Кроме того, χ – вещественная функция, откуда

$$\big(\chi_{[\alpha,\beta)}(A)\big)^* = \chi_{[\alpha,\beta)}(A).$$

Из этих двух свойств следует, что $\chi_{[\alpha,\beta)}(A)$ будет ортогональным проектором.

Обозначим через $\mathcal{B}$ – σ-алгебру борелевских множеств.

Определение 12.2. Определим отображение

$$E : \mathcal{B} \to B(H),$$

сопоставляющее $\Omega \in \mathcal{B} \mapsto E_\Omega \in B(H)$ и обладающее следующими свойствами. Для $\Omega_i \in \mathcal{B}$ выполнено

1. $E_{\Omega_1\Omega_2} = E_{\Omega_1} + E_{\Omega_2}$;
2. $E_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = E_{\Omega_1} E_{\Omega_2}$;
3. Если $\Omega_n \to \Omega$, то есть
$$\chi_{\Omega_n}(t) \to \chi_\Omega(t) \ \forall\, t$$
(поточечная сходимость характеристических функций), то
$$E_{\Omega_n} \xrightarrow{s} E_\Omega$$
(сильная операторная сходимость);
4. $(E_\Omega)^* = E_\Omega$.

Тогда такой оператор E называется *проекторнозначной мерой.*

Введенный выше оператор E называется проекторнозначной мерой, так как свойство 1 определения 12.2 – это аддитивность, свойство 2 означает, что E – проектор. Свойства 4 и 2 вместе определяют ортогональный проектор.

Вернемся к обсуждению вопроса об определении $\chi_{[\alpha,\beta)}(A)$.

Утверждение 12.1. *Для $A = A^* \in B(H)$ такая проекторнозначная мера $\exists$.*

Доказательство. Пусть $\Omega \in \mathcal{B}$. По борелевского функциональному исчислению определим

$$E_\Omega := \chi_\Omega(A).$$

Свойство 3 также следует из теоремы о борелевском функциональном исчислении. □

[12] С помощью борелевского функционального исчисления такой оператор можно определить.

Интеграл Римана — Стилтьеса и Лебега — Стилтьеса

Введем обозначение

$$E_\lambda := E_{(-\infty,\lambda)}, \quad E_{[\alpha,\beta)} := E_\beta - E_\alpha.$$

Обсудим конструкцию *интеграла Римана – Стилтьеса.*

Пусть $f \in C[a,b]$, $\sigma(A) \subset [a,b]$. Возьмем $T = \{t_k\}_{k=0}^n$ – разбиение отрезка $[a,b]$ и $\Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ – выделенные точки $\xi \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Определим

$$S(f,T,\Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) E_{[t_{k-1},t_k)}, \quad \Delta t = \max_k (t_k - t_{k-1}). \tag{45}$$

При $\Delta t \to 0$ $\exists \lim\limits_{\Delta t \to 0} S(f,T,\Xi)$ независимо от расположения t_k и выбора ξ_k.

Конструкция же интеграла Лебега – Стилтьеса имеет следующий вид. Пусть n $\mathbb{N}$, $f \in \mathcal{B}[a,b)$. Определим

$$S_n(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{z} E_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \le t < \frac{k}{2^n}\right\}}. \tag{46}$$

Замечание 12.3. Суммы (45) и (46) можно понимать следующим образом. Если домножить $E_{[\alpha,\beta)}$ в таких суммах на x и взять скалярное произведение с x, мы получим обычные положительные меры:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \left(E_{[t_{k-1},t_k)} x, x\right), \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{z} \left(E_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \le t < \frac{k}{2^n}\right\}} x, x\right),$$

так как

$$(E_\Omega x, x) = \left(E_\Omega^2 x, x\right) = (E_\Omega x, E_\Omega x) = \|E_\Omega x\|^2 \ge 0.$$

Теорема 12.2. *Пусть $f \in B[a,b]$, $\sigma(A) \subset [a,b]$, $A = A^*$. Тогда*

$$f(A) = \int\limits_{[a,b]} f(\lambda) dE_\lambda.$$

Доказательство. 1. Пусть $f(t) =_\Omega (t)$, $\Omega \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\chi_\Omega(A) = \int\limits_\Omega dE_\lambda$$

– выполнено по определению E_λ.

2. Если f – простая, то есть

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Omega_i},$$

и Ω_i дизъюнктны, то

$$f(A) = \sum c_i \chi_{\Omega_i}(A) = \sum c_i \int\limits_{\Omega_o} dE_\lambda = \int f dE_\lambda.$$

3. $\forall\ f \in \mathcal{B}[a,b]\ \exists$ последовательность простых f_n такая, что

$$f_n \ \to\ f(t)\ \forall\ t \in [a,b].$$

Так как $f \in \mathcal{B}[\Omega]$, то $\exists\ C > 0$ такое, что $|f_n| \le C$.

Тогда

$$\begin{array}{lcc} f_n(A) & = & \int\limits_{[a,b]} f_n(\lambda) dE_\lambda \\ d \downarrow S & & \text{т. Лебега о предельном переходе} \\ f(A) & = & \int f(\lambda) dE \end{array}$$

В частности,

$$I = \int\limits_{[a,b]} dE_\lambda, \quad A = \int\limits_{[a,b]} \lambda dE_\lambda.$$

□

Рассмотрим примеры E_λ для конкретных операторов.

Пример 12.1. Пусть $H = \mathbb{C}^n$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \ \lambda_i \in \mathbb{R},$$

– матрица оператора в каком-то ОНБ $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, $A = A^*$.

1. Пусть все λ_i различны. Элемент x можно записать как

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i = \sum P_i x = Ix.$$

Тогда

$$Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i = \in_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda,$$

где $(x, e_i)e_i$ – проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_i: $P_i x = (x, e_i)e_i$. Здесь

$$E_\lambda = \sum \lambda_i < \lambda P_i.$$

2. Пусть среди λ_i есть кратные собственные значения:

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ n_1 & n_2 & \dots & n_m \end{array}$$

Здесь $m \le n$, n_m – кратности собственных значений. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_j} (x, e_j^i) e_j^i,$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} (x, e_j^i) e_j^i,$$

где каждая группа e_i – это $e_1^i, e_2^j, \ldots, e_{n_i}^i$. Здесь проекторы будут иметь вид

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_i} (\cdot, e_j^i) e_j^i.$$

Пример 12.2. Пусть дано пространство $L_2[a,b]$, $\varphi \in C[a,b]$ – вещественная,

$$A_\varphi f = \varphi(x) f(x).$$

Считаем, что φ строго возрастает. Известно, что

$$\sigma(A_\varphi) = [\varphi(a), \varphi(b)]\,.$$

Обсудим, как выглядит E_λ, $\lambda \in [\varphi(a), \varphi(b)]$. Здесь

$$E_{[\varphi(a),\lambda)} = \chi_{[\varphi(a),\lambda)}(A).$$

Напомним, что

$$\chi_\Omega(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Omega \ \to \ I \\ 0, & t \notin \Omega \ \to \ 0 \end{cases}$$

Если $f \in L_2[a,b]$, то для $\lambda \in [\varphi(a), \varphi(b)]$

$$E_\lambda f(t) = \chi_{[a,\varphi^{-1}(\lambda))}(t) f(t).$$

Лекция 13. Спектральная теорема.

Спектральная теорема (в трех формулировках)

Продолжим обсуждать спектральную теорему. Были формулировки спектральной теоремы для самосопряженного оператора в следующих терминах.

1. Функциональное исчисление: определяли $f(A)$, где
   a. $f \in C(\sigma(A))$;
   b. $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ (доказывали для $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\sigma(A) \subset [a,b]$).

   В частности, это позволяло нам определить $\chi_\Omega(A)$, где Ω – борелевское множество, и семейство проекторнозначных мер $E_\lambda(A)$. Введение этих понятий позволяло перейти к следующему представлению.

2. Интегральное представление:
$$A = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda,$$
$$f(A) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_\lambda.$$

3. Подобия оператора умножения.

Циклический вектор

Определение 13.1. Пусть X – банахово, $A \in B(X)$. Вектор $x_0 \in X$ называется *циклическим* (для оператора A), если замыкание линейной оболочки
$$\overline{< x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^nx_0, \dots >} = X.$$

Замечание 13.1. Условие из определения 13.1 для гильбертова пространства H имеет вид
$$\left\{x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^nx_0, \dots\right\}^\perp = \{0\}.$$

Если у оператора A есть циклический вектор x_0, то говорят, что A – *оператор с простым спектром*. Такое определение связано со следующей задачей.

Задача 13.1. *Пусть $H = \mathbb{C}^n$, $A = A^*$. Напомним, что тогда $\exists\ \{e_k\}_{k=1}^n$ – ОНБ в H такой, что оператор A можно задать матрицей*
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Показать, что $\exists$ циклический вектор $\iff$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Теорема (о подобии оператору умножения на независимую переменную)

Теорема 13.1. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^*$, $A \in B(H)$ с циклическим вектором. Пусть $\sigma(A) \subset [a,b]$.*

Тогда $\exists$ μ – борелевская мера на $[a,b]$ и

$$U: \ H \ \to \ L_2([a,b],\mu)$$

– унитарный изоморфизм такой, что

$$UA = MU,$$

где $Mf(t) = tf(t)$ в $L_2([a,b],\mu)$. Иными словами, $A \sim M$.

Замечание 13.2. Коммутативная диаграмма утверждения теоремы 13.1 имеет вид

$$\begin{array}{ccc} H & \stackrel{A}{\to} & H \\ \downarrow U & & U \downarrow \\ L_2([a,b],\mu) & \stackrel{M}{\to} & L_2([a,b],\mu) \end{array}$$

Доказательство. (Теорема 13.1) Пусть $x_0 \in H$ – циклический вектор оператора A, E_λ – проекторнозначная мера, построенная по оператору A.

Определим меру μ как

$$\mu([\alpha,\beta]) = \left(E_{[\alpha,\beta]}x_0, x_0\right) = \left(E^2_{[\alpha,\beta]}x_0, x_0\right) = \left\|E_{[\alpha,\beta]}x_0\right\|^2.$$

Линейная оболочка $< x_0, \dots, A^n x_0, \dots >$ плотна в H. Сопоставим

$$\begin{array}{ccccc} < x_0, & Ax_0 & \dots & A^n x_0 & \dots > \\ U\downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ 1 & t & \dots & t^n & \dots \end{array}$$

Таким образом, образом линейной облочки $< x_0, \dots, A^n x_0, \dots >$ является многочлен в $(L_2[a,b],\mu)$. Оболочка $< 1, t, \dots, t^n, \dots >$ плотна в $(L_2[a,b],\mu)$.

Проверим сохранение норм.

$$\left(A^n x_0, A^k x_0\right)_H = \left(A^{n+k}x_0, x_0\right)_H =$$

$$= \int\limits_{[a,b]} \lambda^{n+k} \left(dt_\lambda x_0, x_0\right) = \int\limits_{[a,b]} \lambda^{n+k} d\mu_\lambda.$$

$$\left(UA^n x_0, UA^k x_0\right)_{L_2([a,b],\mu)} = \int\limits_{[a,b]} t^{n+k} d\mu_t.$$

Итак,

$$\left(A^n x_0, A^k x_0\right)_H = \left(UA^n x_0, UA^k x_0\right)_{L_2([a,b],\mu)}.$$

По непрерывности продолжим U с плотного множества на все H. Получим оператор на все $L_2([a,b],\mu)$.

Итак, U – унитарный оператор из H в $L_2([a,b],\mu)$. □

Пусть L_2 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_i, , \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, соответствующие некоторому $\{e_i\}_{i=1}^n$ – ОНБ, e_i – собственные вектора. Пространство можно воспринимать как $l_2(\lambda, \mu)$, где мера μ будет определена следующим образом.

Пусть $\varepsilon > 0$ такого, что $(\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon)$ не пересекаются с λ_j, $j \neq i$. Определим меру μ как

$$\mu\left(\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon\right) = \left(E_{[\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]} x_0, x_0\right).$$

Вектор $x_0 = (1, \ldots, 1)$ – циклический,

$$((x_0, e_i)e_i, x_0) = \left\{(x_0, e_i)\right\|^2.$$

Теорема (случай, когда нет циклического вектора)

Теорема 13.2. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^*$, $A \in B(H)$, $\sigma(A) \subset [a, b]$, у оператора A нет циклического вектора.*

Тогда $\exists$ представление

$$H = \oplus_{k=1}^N H_k, \quad N \leq \infty,$$

где H_k – замкнутые, инвариантные для A подпространства, в каждом из которых у оператора $A\Big|_{H_k}$ есть циклический вектор. Кроме того, $\exists$ борелевская мера μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, и унитарный изоморфизм

$$U: \ \oplus_{k=1}^N H_k \ \to \ \oplus_{k=1}^N L_2\left([a, b], \mu_k\right)$$

такие, что $A\Big|_{H_k}$ подобен оператору M_k, где $M_k f(t) = tf(t)$ в $L_2\left([a, b], \mu_k\right)$,

$$U\left(A\Big|_{H_k}\right) = M_k U\Big|_{H_k}.$$

Иными словами, $A \sim \oplus_{k=1}^N M_k$.

Доказательство. Определим семейство S – подпространство в H вида

$$S = \left\{E: \ E = \oplus_{i=1}^m H_i\right\},$$

где H_i – замкнутые, инвариантные относительно A, попарно ортогональные подпространства, в каждом из которых есть циклический вектор.

При этом, если

$$E = \oplus_{i=1}^m H_i \in S,$$

$$E' = \oplus_{i=1}^{m'} H_i' \in S,$$

где $H_i \perp H_j$, $i \neq j$, $H_i' \perp H_j'$, $i \neq j$, и $H_i \perp H_j'$ или $H_i = H_j'$.

Если H – непустое гильбертово пространство, то $S \neq \{\emptyset\}$. S – частично упорядочено по включению $E \leq E'$, если $E \subseteq E'$.

Если есть цепь

$$E_1 \leq E_2 \leq \ldots \leq E_n \leq \ldots,$$

то она ограничена сверху объединением $\cup_{k=1}^{N} E_k$, $N \leq \infty$.

По лемме Цорна в S $\exists$ максимальный элемент. Он имеет вид $\oplus_{k=1}^{N} H_k$, $N \leq \infty$.

Утверждается, что $H = \oplus_{k=1}^{N} H_k$. Если это не так, то $\exists\ x_0 \in \left(\oplus_{k=1}^{N} H_k\right)^{\perp}$, $x_0 \neq 0$. Тогда пространство

$$\oplus_{k=1}^{N} H_k \oplus$$

$^{<x_0, Ax_0, \ldots, A^n x_0, \ldots>}$ заведомо меньше максимального элемента $\oplus_{k=1}^{N} H_k$. Получаем противоречие.

По теореме 13.1, $\exists\ \mu_k$ – борелевские меры на $[a, b]$. Строим их следующим образом. У нас есть E_λ – семейство проекторов, построенных по оператору A.

В H_k $\exists$ циклический вектор x_k. Тогда

$$\mu_k\left([\alpha, \beta]\right) = \left(E_{[\alpha,\beta]} x_k, x_k\right)_H.$$

По теореме 13.1,

$$U_k : \ H_k \ \to \ L_2\left([a, b], \mu_k\right)$$

– унитарный изоморфизм. Определим

$$U = \oplus_{k=1}^{N} U_k.$$

Проверим, что U – унитарный изоморфизм. Определим

$$P_k : \ H \ \to \ H_k$$

– проекторы на H_k, произвольный элемент $x \in H$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{N} P_k x.$$

Тогда

$$\|Ux\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|U P_k x\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \|U_k P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2 = \|x\|^2.$$

□

Теорема

Следующая теорема является следствием теоремы 13.2.

Теорема 13.3. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^*$, $A \in B(H)$, без циклического вектора.*

Тогда $\exists\ \mu$ – борелевская мера на $\mathbb{R}$, вещественная функция $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ и унитарный изоморфизм

$$U : \ H \ \to \ L_2(\mathbb{R}, \mu)$$

такие, что

$$UA = A_\varphi U,$$

где

$$A_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t)$$

в $L_2(\mathbb{R}, \mu)$.

Иными словами, $A \sim A_\varphi$ *(умножения на функцию):*

$$\begin{array}{ccc} H & \stackrel{A}{\to} & H \\ \downarrow U & & U \downarrow \\ L_2(\mathbb{R},\mu) & \stackrel{A_\varphi}{\to} & L_2(\mathbb{R},\mu) \end{array}$$

Доказательство. По теореме 13.2, $\exists$ представление

$$H = \oplus_{k=1}^N H_k, \quad N \le \infty,$$

замкнутое, инвариантное относительно A и у $A\Big|_{H_n}$ в H_n есть циклический вектор.

$\exists$ последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^N$ такая, что

$$\oplus_{k=1}^N L_2([a,b],\mu_k) \stackrel{\oplus M_k}{} \oplus_{k=1}^N L_2([a,b],\mu_k).$$

Определим проекторы

$$P_k : \ H \ \to \ H_k.$$

Для $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^N P_k x = \sum_{k=1}^N x_k, \quad x_k \in H_k.$$

Для определенности в качестве $[a,b]$ возьмем $[-\|A\|, \|A\|] =: \Delta_0$.

Определим отрезки $\Delta_k := \Delta_0 + 3k\|A\|$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Перенесем μ_k на δ_k. Перенесенную меру обозачим ν_k.

Итак, имеем $L_2(\Delta_k, \nu_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и, кроме того,

$$U_k : \ H_k \ \to \ L_2(\Delta_k, \nu_k).$$

$A\Big|_{H_k}$ подобен оператору умножения на $t - 3k\|A\|$ в $L_2(\Delta_k, \nu_k)$.

Определим

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - 3k\|A\|, & t \in \Delta_k \\ \text{какие-то значения из } \sigma(A) \text{ вне } \Delta_k \end{cases}$$

Определим меру μ на $\mathbb{R}$ как

$$\mu = \sum_{k=1}^N 2^{-k} \nu_k.$$

Здесь

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^N 2^{-k} \nu_k(\Delta_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \underbrace{\mu_k(\Delta_k)}_{\|y_k\|^2} = \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \|y_k\|^2,$$

где y_k – циклические векторы в H_k,

$$\mu_k([\alpha, \beta]) = \left(E_{[\alpha,\beta]} e y_k, y_k\right) = \left\|E_{[\alpha,\beta]} y_k\right\| \leq \|y_k\|^2.$$

Если $[\alpha, \beta] = \Delta_k$, то $E_{\alpha,\beta]} = I$.

Нормируем циклические вектора:

$$\|y_k\| = 1, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Тогда

$$\mu(\mathbb{R}) = 1.$$

Итак, функция и мера построены. Построим теперь унитарный изоморфизм. Определим

$$U : \ H \ \to \ L_2(\mathbb{R}, \mu),$$

$$Ux = \sum_{k=1}^{N} 2^{k/2} U_k P_k x.$$

Вычислим

$$\|Ux\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=1}^{N} 2^k \|U_k P_k x\|^2_{L_2(\Delta_k,\mu)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} 2^k 2^{-k} \|U_k P_k x\|^2_{L_2(\Delta_k,\mu)} = \sum_{k=1}^{N} \|U_k P_k x\|^2_{L_2(\Delta_k,\nu_k)} = \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2_{H_k} = \|x\|^2.$$

Распишем, кроме того,

$$UAx = \sum_{k=1}^{N} U_k \left(A\Big|_{H_k} x\right) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{U_k(AP_k)}_{A_\varphi U_k} x =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_\varphi (U_k P_k x) = A_\varphi U x.$$

Итак, получили, что $A \sim A_\varphi$. □

Рассмотрим теперь несколько разных операторов умножения на функцию.

1. $L_2[0, 1]$,
$$(A_1 f)(x) = x f(x). \tag{47}$$
Здесь $\sigma(A_1) = [0, 1]$.

2. $L_2[0, 1]$,
$$(A_2 f)(x) = x^2 f(x). \tag{48}$$
Здесь $\sigma(A_2) = [0, 1]$.

3. $L_2[-1,1]$,
$$(A_3 f)(x) = x^2 f(x). \tag{49}$$
Здесь
$$\sigma(A_3) = [0,1].$$

4. $L_2[0,1]$,
$$(A_4 f)(x) = \varphi(x) f(x), \tag{50}$$
где $\varphi(x)$ – функция Кантора. Здесь
$$\sigma(A_4) = [0,1].$$

Возникает вопрос: какие из операторов A_i, $i = 1,2,3,4$, подобны (унитарно эквивалентны).

Приведем без доказательство следствие из теоремы 13.3.

Следствие. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^*$, $A \in B(H)$.

Тогда $\exists$ замкнутые множества $\{\sigma_k\}_{k=1}^N$, $N \le \infty$ и $\exists$ борелевские меры μ_k на σ_k, такие, что
$$\sigma(A) = \sigma_1 \supseteq \sigma_2 \supseteq \sigma_3 \supseteq \dots$$
и такие, что оператор A унитарно эквивалентен прямой сумме $\oplus_{k=1}^N M_k$, где $M_k f(t) = tf(t)$ в $L_2(\sigma_k, \mu_k)$.

Коммутативная диаграмма здесь имеет вид
$$\begin{array}{ccc} H & \overset{A}{\to} & H \\ \downarrow U & & U \downarrow \\ \oplus L_2(\sigma_k,\mu_k) & \overset{\oplus_{k=1}^N M_k}{\to} & L_2(\sigma_k,\mu_k) \end{array}$$

Теорема (унитарные инварианты самосопряженного оператора)

Если $\lambda \in \sigma_p(A)$, то кратность собственного значения – это $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I))$. Хотим понять, что такое кратность, если $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Пусть, как и ранее, $A = A^*$, $A \in B(H)$.

Определение 13.2. *Функция кратности* $n_A(t)$ определяется как
$$n_A(t) = j, \quad t \in \sigma_j \setminus \sigma_{j+1}.$$

Определение 13.3. Меры μ_1 и μ_2 *эквивалентны* (обозначение: $\mu_1 \sim \mu_2$), если «запас» множеств меры 0 одинаков по каждой из мер. Иными словами,
$$\mu(\Omega) = 0 \iff \mu_2(\Omega) = 0.$$

Здесь σ-алгебры измеримых множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ одинаковы для μ_1 и μ_2.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Теорема 13.4. *(Унитарные инварианты самосопряженного оператора) Пусть A_1 в H_1, A_2 в H_2 – самосопряженные операторы. Эти операторы унитарно эквивалентны, если*

1. $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$;
2. A_1 *и* A_2 *одновременно имеют или не имеют циклические векторы. Тогда*

$$\mu_1 = \left(E^1_\lambda x^1_0, x^1_0\right) \sim \left(E^2_\lambda x^2_0, x^2_0\right).$$

3. $n_{A_1} = n_{A_2}$.

Вернемся к операторам A_1 (47), A_2 (48), A_3 (49) и A_4 (50). Подобными будут только $A_1 \sim A_2$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ