МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ГРИГОРЬЕВ
МАКСИМ АНАТОЛЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
БУЛГАКОВА АЛЕКСАНДРА ДМИТРИЕВИЧА

Содержание

1. Лекция 1. Понятие события, пространство Минковского, системы отсчета. Преобразования Лоренца. Группы Лоренца и Пуанкаре. 5
Пространство и Время . . . 5
Движение . . . 5
Специальная теория относительности . . . 8

2. Лекция 2. Релятивистские механические системы. 11
Эффекты Специальной Теории Относительности . . . 12

3. Лекция 3. Собственное время. Лагранжев формализм.. 17
Собственное время . . . 17
Лагранжев формализм . . . 19

4. Лекция 4. Симметрии и законы сохранения. Теорема Нетер. 21
Законы сохранения . . . 22
Теорема Нётер . . . 23
Релятивисткая механика . . . 24

5. Лекция 5. Движение частицы в электромагнитном поле. 26
Тензор напряженности э/м поля . . . 26
Движение частицы в э/м поле . . . 27

6. Лекция 6. Электромагнитное поле. 29
Плотность заряда и тока . . . 29
Взаимодействие в лагранжевом формализме . . . 31

7. Лекция 7. Действие Максвелла, описывающее электромагнитное поле в присутствии заданного распределения плотности заряда и тока. Дипольный момент. 33
Пары уравнений Максвелла . . . 33
Частные случаи электромагнитного поля . . . 34

8. Лекция 8. Стационарное магнитное поле. Электромагнитные волны. 40
Стационарное магнитное поле . . . 40
Электромагнитные волны . . . 43

9. Лекция 9. Электромагнитные волны. 46
Плоская монохроматическая волна . . . 46
Энергия и импульс э/м волны . . . 49

10. Лекция 10. Энергия и импульс электромагнитного поля. 51
Тензор энергии импульса . . . 51
Э/М поле зарядов и токов . . . 53

11. Лекция 11. Дипольное излучение. 55
Запаздывающие потенциалы, потенциал Ленара-Вихерта . . . 55
Дипольное излучение . . . 56
Сечения и расслоения . . . 58

12. Лекция 12. Симметрии. 60
Полные производные . . . 60
Дифференциальные уравнения . . . 60
Инфинитезимальные симметрии . . . 62

13. Лекция 13. Вариационные симметрии. Теорема Нётер. 64
Лагранжев формализм . . . 64
Теорема Нётер . . . 65

14. Лекция 14. Гравитационное поле 68
Гравитация Ньютона . . . 68
Гравитация в СТО . . . 69
Частица в гравитационном поле . . . 70
Гравитационные волны . . . 71

1. Лекция 1. Понятие события, пространство Минковского, системы отсчета. Преобразования Лоренца. Группы Лоренца и Пуанкаре.

Пространство и Время

Пространство S, в котором мы живём является аффинным, трёхмерным ($dim(S) = 3$) и евклидовым (если его не искривляют никакие массивные тела). Пусть с нашим пространством S ассоциировано линейное пространство векторов L: $S \times S \to L$ (вектор соединяет две точки пространства). Для вектора в пространстве L есть билинейная положительно-определённая симметричная форма: $g: \ L \times L \to \mathbb{R}$. Если выбрать базис e_i, e_j, то возникнет матрица этой билинейной формы: $g(e_i, e_j) = g_{ij}$, где:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Итого, в нашем пространстве:

- нет выделенной точки
- нет выделенного направления
- между любыми двумя точками можно провести вектор, и эти вектора образуют линейное пространство
- у вектора есть длина, которая всегда неотрицательна

Такая картина работает в приближении малых (по сравнению со скоростью света) скоростей и слабых гравитационных полей.

В классической физике время $T \cong \mathbb{R}^1$ **абсолютно** и одинаково во всех точках пространства. Время и пространство не взаимодействуют друг с другом. Время $T \cong \mathbb{R}_1$ вводится как одномерное аффинное вещественное пространство. Можно ввести метрику (так как мы можем измерять промежутки времени), поэтому это пространство также евклидово.

Движение

В классической физике вводится понятие **материальной точки**. У неё нет никакой внутренней структуры и она не может вращаться, но обладает массой. На-

пример, Землю можно считать материальной точкой, рассматривая её вращение вокруг Солнца.

Математически, движение материальной точки описывается параметризованной кривой γ: $x^i(t)$. По сути γ это отображение $\mathbb{R}^1 \to S$. Кривую γ мы называем траекторией материальной точки (рис. 1.1).

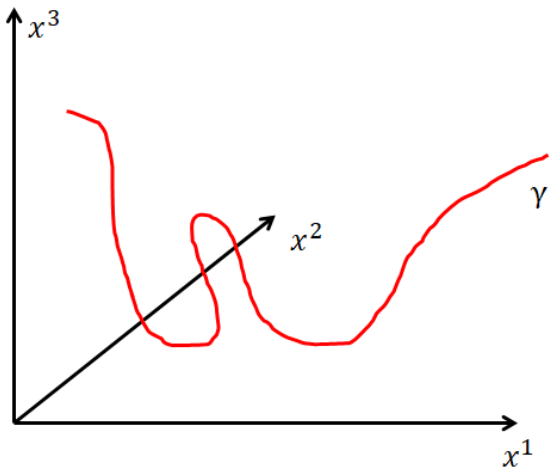

Рис. 1.1. Траектория

Оказывается, что удобно объединить пространство и время: $M = S \times T$. Получаем **пространство-время** (Мир) M. Опишем движение в пространстве-времени. Рассмотрим только одну пространственную координату $x^1 = x$ и время T. Движение будет описываться однозначной функцией своего аргумента $x(t)$ (потому что материальная точка не может одновременно находиться в двух местах) также эта функция гладкая - частица не может перемещаться с бесконечной скоростью (рис. 1.2).

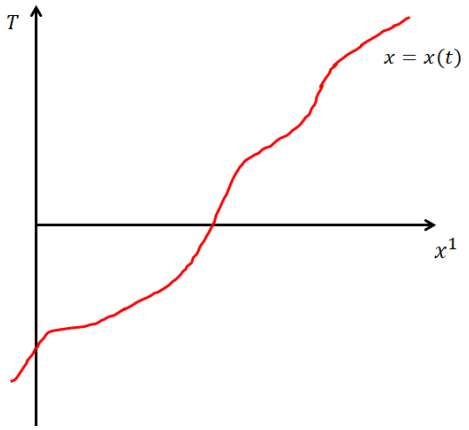

Рис. 1.2. Траектория в пространстве-времени

Траектория в пространстве-времени называется **мировой линией**.

Система отсчёта - система координат на пространстве-времени M. У нас есть t и $x^i,\ i = 1, 2, 3$. Есть замены переменных, при которых координаты будут зависеть от времени. Например, пусть у нас есть два тела. С одним из них (которое покоится) мы свяжем систему отсчёта K . Другое тело как-то двигается со скоростью $\vec{v}$, и с ним ты также свяжем систему отсчёта K'. Время абсолютно ($t' = t$). Теперь попробуем выразить одни координаты через другие. Пусть имеется какая-то точка в пространстве-времени (**событие**).

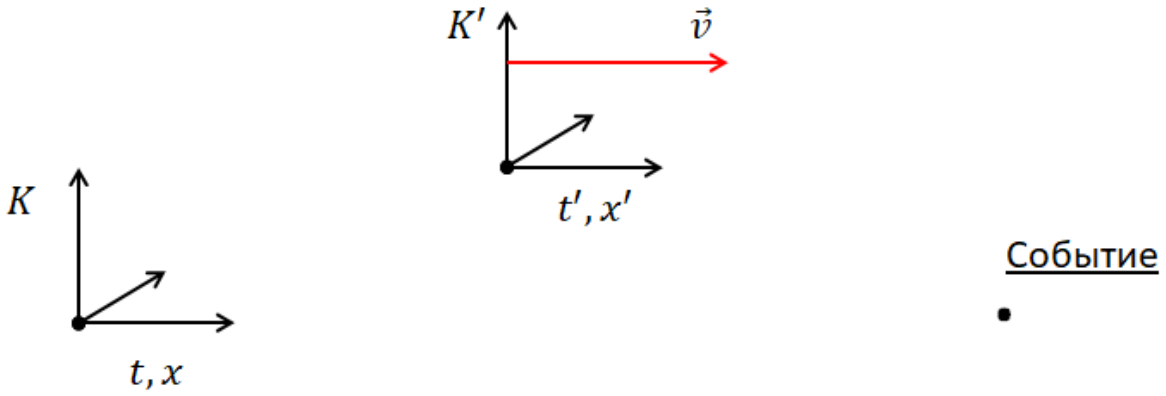

Рис. 1.3. Переход из одной системы отсчёта в другую

Координаты события в системе K' есть t', x', выразим координаты этого события в системе K. Считаем что система отсчёта K' двигается вдоль координаты x^1, тогда:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ t' = t \end{cases} \tag{1.2}$$

Считаем, что в начальный момент времени ($t = 0$) системы K и K' совпадали. Такая замена координат описывает переход из одной системы отсчёта в другую, которая движется относительно первой. Формула (1.2) называется **преобразованием Галилея** или бустом.

Задача: Записать преобразования, порождающие группу Галилея.

Пусть у нас есть отображение φ на множестве $M \equiv \mathbb{R}^n$: $M \to M$. Оно действует на каждую точку множества M и отправляет её на другую точку множества M. Это **активная** точка зрения - преобразование действует на множество.

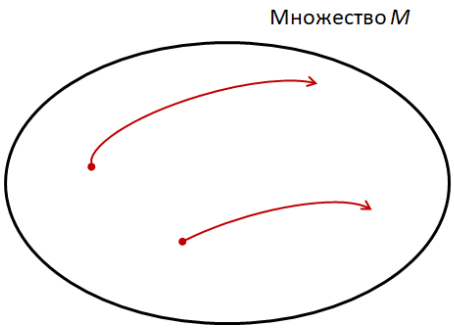

Рис. 1.4. Активное преобразование

А есть и другой взгляд на это: замена координат - точки множества сами никуда не двигаются, а меняется система координат. Были координаты x', стали x^μ: $x^\mu = X(x')$. Это **пассивное** преобразование.

Инерциальная система отсчёта (ИСО) - это такая система отсчёта, в которой свободная материальная точка (на которую не действуют силы, или ими можно пренебречь) движется равномерно и прямолинейно:

$$x^i(t) = x_0^i + v^i t \tag{1.3}$$

Таким образом:

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial t} = v^i = \vec{v} = const \tag{1.4}$$

Из формулы (1.2) получается **формула сложения скоростей**:

$$x'^i = w^i t \Rightarrow x^i = (v^i + w^i)t \tag{1.5}$$

Принцип относительности Галилея: физика во всех ИСО одинаковая. Пусть есть две ИСО, одна из них движется относительно другой. Мы, находясь, например, в движущейся ИСО, никакими экспериментами не сможем понять в какой из двух систем (движущейся или неподвижной) мы находимся.

Из формулы сложения скоростей (1.5) получается, что скорость никак не ограничена сверху. Но при скоростях близких к скорости света это опровергается и формула (1.5) перестаёт работать.

Специальная теория относительности

Пусть у нас есть 4-х мерное пространство-время: $M^4 = S \times T$ - аффинное псевдоевклидово пространство сигнатуры (3,1). Это означает, что билинейная форма на ассоциированном линейном пространстве $\eta : L \times L \to R$ устроена следующим

образом:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

+1 отвечает времени, -1 - координатам. M^4 - пространство Минковского.

Постулат: Существует максимальная скорость передачи сигнала. Дальнодействия нет - два объекта на расстоянии мгновенно, в один и тот же момент времени узнать друг о друге не могут. Взаимодействие между объектами происходит с конечной скоростью - скоростью света c.

Пусть в начальный момент времени в начале координат произошла вспышка света. Мировая линия света - световой конус. Скорость любой частицы не может превышать скорость света.

Скорость света одинакова во всех системах отсчёта (исходя из принципа Галилея), то есть график на (рис. 1.5) должен сохраняться при переходе в другие системы отсчёта.

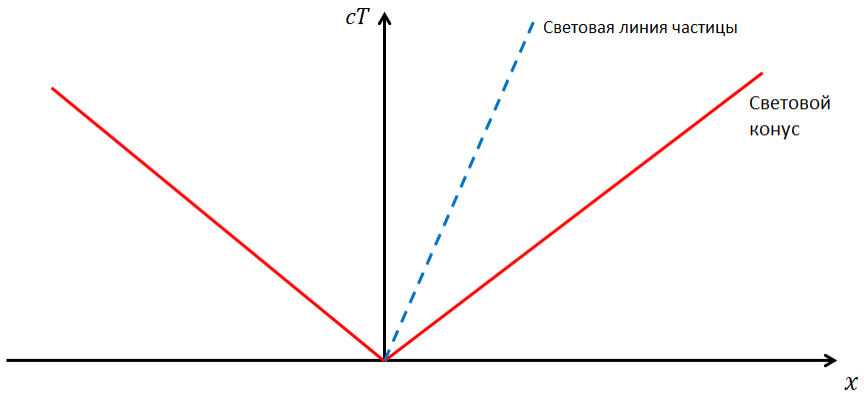

Рис. 1.5. Световой конус

Пусть есть два события: событие 1 - свет испущен из точки 1 (x_1) в момент времени t_1, событие 2 - свет задетектирован в точке 2 (x_2) в момент времени t_2. Тогда справедливо:

$$(x_2 - x_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{1.7}$$

В другой ИСО:

$$(x_2' - x_1')^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 \tag{1.8}$$

Величина $l^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x_2} - \vec{x_1})^2$ называется **интервалом между событиями** и есть ни что иное, как расстояние между двумя событиями, вычисленное в метрике Минковского (1.6). Интервал, связанный с распространением света называется **светоподобным** и равен 0.

Интервал - инвариантная величина, он одинаков в любой ИСО. Условие инвариантности интервала приводят нас к новым преобразованиям при переходи из одной ИСО в другую.

Введём единообразное обозначение для координат в 4-х мерном пространстве:

$$x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3) \tag{1.9}$$

Метрика:

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{1.10}$$

тогда интервал:

$$l^2 = (\Delta x^\mu)\eta_{\mu\nu}(\Delta x^\nu) \tag{1.11}$$

где $\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

2. Лекция 2. Релятивистские механические системы.

Преобразования Лоренца описывают переход из одной ИСО в другую. Отметим следующие вещи: при сдвиге (трансляции) координат и времени интервал не меняется (так как в определении интервала стоит разность координат и времени). Удобно ввести однородные преобразования Лоренца, которые сохраняют начало координат. Это будут линейные преобразования:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \tag{2.1}$$

При этом выполняется:

$$\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Положим, что $det(\Lambda) = +1$ (собственные преобразования) и то, что сохраняется направление времени (ортохронные преобразования) - получили преобразования **группы Лоренца** $SO^+(1,3),\ dim = 6$.

Разберёмся теперь с тем, какие это преобразования. Группа Лоренца - это группа вращений, порождаемая вращениями в плоскостях. Вращения в пространстве описывается 3 параметрами, вращение в плоскости пространство-время (бусты Лоренца) также описываются 3 параметрами $\Rightarrow$ всего 6 параметров. Пример преобразований:

$$\begin{cases} x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \\ x^1 = ax'^1 + bt' \\ t = ct' + dx' \end{cases} \tag{2.3}$$

<u>Задача:</u> Показать, что

$$\begin{cases} x = ch(\psi)x' + sh(\psi)t' \\ t = ch(\psi)t' + sh(\psi)x' \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим следующую мировую линию в СО K': $x' = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} x = sh(\psi)t' \\ t = ch(\psi)t' \end{cases} \Rightarrow x = th(\psi)t \Rightarrow v = th(\psi) \ \ (\text{в СО } K) \tag{2.5}$$

где v - скорость вдоль оси x^1, с которой движущаяся СО K' двигается относительно СО K.

Теперь выражаем гиперболические функции ψ через скорость v используя (2.5) и получаем:

$$\begin{cases} x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \\ x^1 = \frac{x'^1 + vt'}{\sqrt{1-v^2}} \\ t = \frac{t' + vx'^1}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \tag{2.6}$$

Формулы (2.6) называются **преобразованиями Лоренца**.

Задача: Переписать (2.6) в системе единиц, где $c \neq 1$.

Задача: Взять предел $\lim c \to \infty$ и убедиться, что получаются преобразования Галилея (1.2)

Помимо бустов Лоренца (2.6) в группу Лоренца также входят повороты в пространственных плоскостях, которые не затрагивают время:

$$\begin{cases} t = t' \\ x' = \Lambda^i_j x^j \end{cases} \tag{2.7}$$

где $i, j = 1, 2, 3$ - пространственные индексы.

Эффекты Специальной Теории Относительности

- **Формула сложения скоростей**

  Будем считать, что СО K' двигается со скоростью $\vec{v}$, K стоит на месте. В системе K' двигается тело вдоль оси $x \equiv x^1$ со скоростью $\vec{w}$.

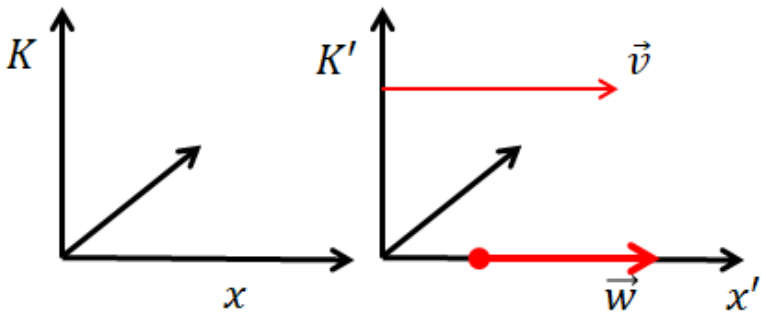

Рис. 2.1. Закон сложения скоростей

$$\begin{cases} x' = wt' \\ y' = z' = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Мы хотим понять, как выглядит мировая линия этого тела относительно неподвижной СО K. Получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{wt'+vt'}{\sqrt{1-v^2}} \\ t = \frac{t'+v(wt')}{\sqrt{1-v^2}} = t' \cdot \left(\frac{1+vw}{\sqrt{1-v^2}}\right) \end{cases} \Rightarrow x = t \cdot \frac{v+w}{1+vw} \tag{2.9}$$

Таким образом, закон сложения скоростей в релятивистском случае:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v+w}{1+vw} \tag{2.10}$$

- **Релятивисткое сокращение длины**

Пусть в подвижной СО K' лежит неподвижно вдоль оси x' жёсткий стержень. Левый его конец в точке $x'_L = 0$, правый в точке $x'_R = l$.

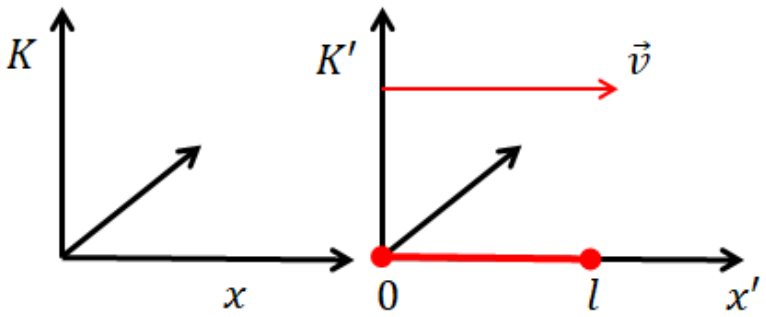

Рис. 2.2. Эффект сокращения длины

Мы хотим померить его длину в неподвижной системе отсчёта K. Для левого конца:

$$\begin{cases} x_L = \frac{x'_L+vt'_L}{\sqrt{1-v^2}} \\ t_L = \frac{t'_L+vx'_L}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \Rightarrow x_L = vt_L \tag{2.11}$$

Для правого конца:

$$\begin{cases} x_R = \frac{l+vt'_R}{\sqrt{1-v^2}} \\ t_R = \frac{t'_R+vl}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \Rightarrow x_R = \frac{l+v(t_R\sqrt{1-v^2}-vl)}{\sqrt{1-v^2}} \tag{2.12}$$

Бля того чтобы измерить длину стержня в неподвижной СО нужно вычислить разность его координат в этой СО в **один и тот же момент времени** $\Rightarrow$ $t_L = t_R = t$. Тогда длина стержня в неподвижной СО:

$$l_0 = x_R(t) - x_L(t) = l \cdot \sqrt{1 - v^2} \tag{2.13}$$

То есть у пролетающего стержня мы будем измерять длину короче чем у неподвижного.

- **Релятивистское сокращение времени**

Сравним ход часов в движущейся и неподвижной СО. Для этого в каждой точке пространства поместим часы и наблюдателя, при этом все часы синхронизированы между собой. Когда часы в движущейся СО пролетают мимо какого-либо неподвижного наблюдателя тот сравнивает показания своих часов и пролетающих часов. Изначально, когда движущаяся СО пролетала мимо неподвижной, показания движущихся и неподвижных часов были одинаковы.

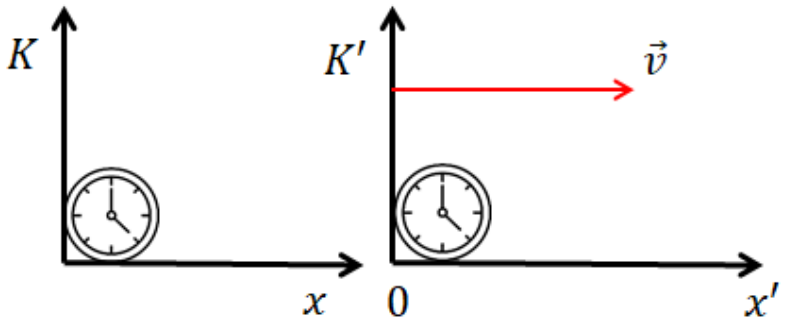

Рис. 2.3. Эффект сокращения времени

Мировая линия пролетающих часов в неподвижной СО:

$$\begin{cases} x = vt \\ t = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \Rightarrow t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2} \tag{2.14}$$

То есть часы, которые движутся, отстают от покоящихся. В подтверждение этому эффекту проводился опыт с ускоренными до больших скоростей частицами и было обнаружено, что у этих ускоренных частиц увеличивался период полураспада по сравнению с состоянием покоя.

Парадокс близнецов: пусть есть два брата близнеца, один остаётся на Земле, второй садится в ракету и летает в космосе с очень большой скоростью. Когда они вновь встретятся, кто из них окажется моложе? С одной стороны, тот кто летал в ракете должен оказаться моложе исходя из полученной

формулы (2.14), но ведь можно перейти в СО брата в ракете, тогда он будет покоиться, а его брат близнец вместе с Землёй будет летать с очень большой скоростью и уже он должен оказаться моложе. На самом деле нельзя сравнивать их системы отсчёта, потому что брат в ракете должен ускоряться чтобы развить большую скорость, а потом замедляться, чтобы вернуться на Землю к брату. Его система отсчета не является инерциальной и рассуждение выше не применимо.

Рассмотрим световой конус (рис. 2.4).

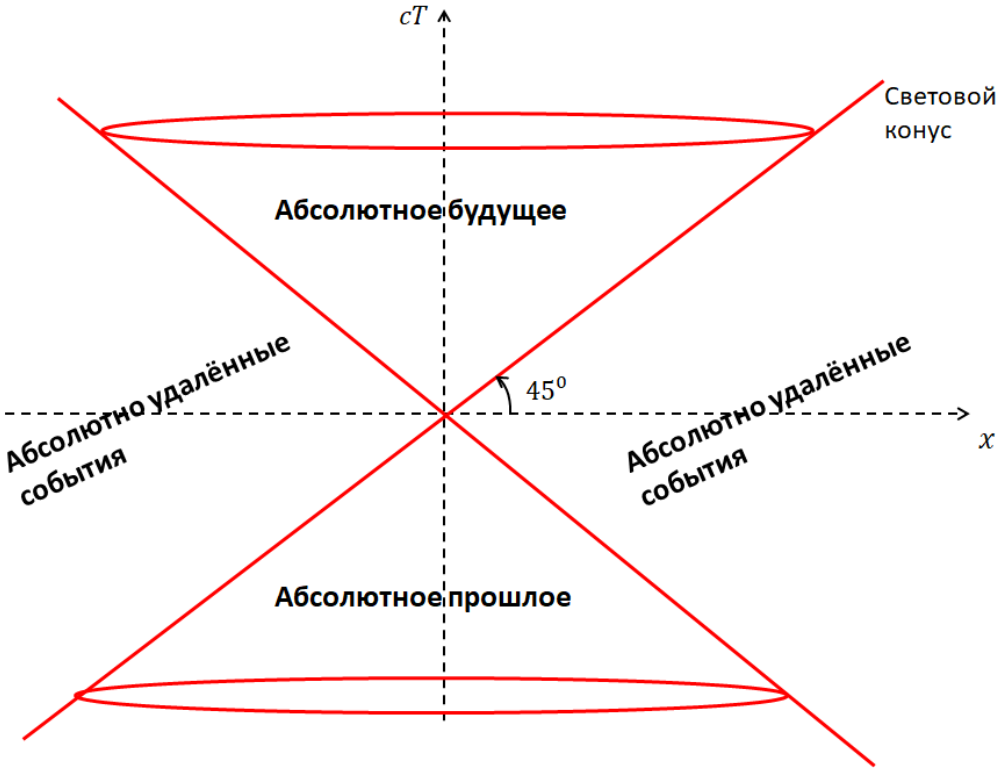

Рис. 2.4. Световой конус с областями

Выделим области:

1) **Абсолютно удалённые события** - никакой сигнал из этой зоны не может попасть в начало координат, и мы из начала координат не можем повлиять на эти события, так как двигаться быстрее скорости света невозможно. Событие из этой области и событие, например, в начале координат разделены **пространственно-подобным** интервалом.

2) **Абсолютное будущее** - события в начале координат и в абсолютном будущем связаны причинно-следственной связью в любой системе отсчёта. Интервал между такими событиями будет больше нуля. Такой интервал называют **времени-подобным**.

3) **Абсолютное прошлое** - события оттуда могут влиять на нас, находящихся в начале координат. То что находится в абсолютном прошлом мы можем знать.

Задача: Показать, что если события e и e' разделены пространственно-подобным интервалом, то найдётся система отсчёта K', в которой эти события происходят одновременно.

Интервал: $l^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2$

- $l^2 > 0$ - времени-подобный интервал
- $l^2 < 0$ - пространственно-подобный интервал
- $l^2 = 0$ - светоподобный интервал

3. Лекция 3. Собственное время. Лагранжев формализм..

В линейном пространстве L вводят 4-вектора. Пусть x_1, x_2 - события в пространстве Минковского, тогда $(x_2 - x_1) \in L$ - 4 вектора. Интервал будет вычисляться следующим образом: $l^2 = (x_2 - x_1)^\mu \eta_{\mu\nu} (x_2 - x_1)^\nu$ и я вляется лоренц-инвариантом. Четырёх вектор:

$$\begin{cases} x^\mu = (t, \vec{x}) \\ \vec{x} = x^i, \ i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{3.1}$$

Квадрат вектора: $(\vec{x})^2 = x^i x^i$

Собственное время

Движение частицы описывается мировой линией ((рис. 3.1)). Точка на мировой линии соответствует событию, состоящему в том, что частица оказалась в точке x в момент времени t. В данной ИСО можно параметризовать мировую линию как $x^i = x^i(t)$. Если на то же самое движение посмотреть из другой ИСО (сделать преобразование Лоренца), то x, t станут другими $\Rightarrow$ и параметризация мировой линии станет другой.

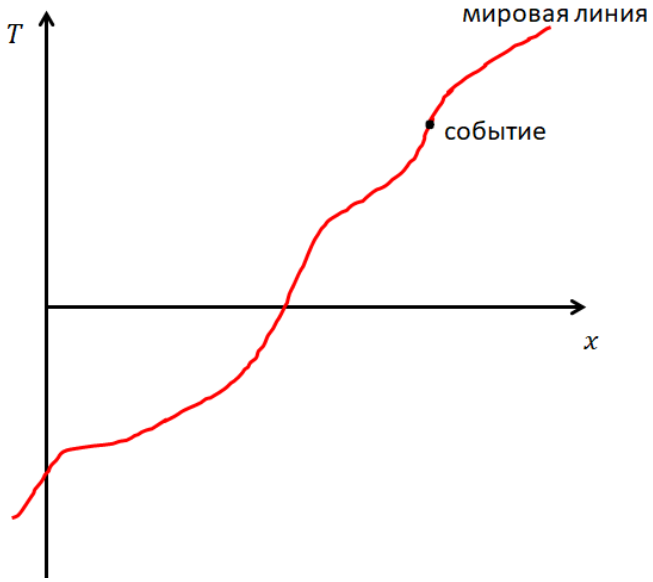

Рис. 3.1. Мировая линия и событие на ней

Однако есть и инвариантный способ параметризовать мировую линию. Введём **собственной время** частицы:

$$S = const + \int\limits_0^{t_0} dt \sqrt{1 - (\dot{\vec{x}})^2} \tag{3.2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Это есть время измеренное по часам в системе отсчёта, связанной с движущимся телом. Введённая таким образом величина будет одинаковой в любой ИСО $\Rightarrow$ у мировой линии будет выделенная параметризация с помощью собственного времени.

Пусть есть какая-то параметризация мировой линии $x^\mu(\tau)$. Тогда можно записать S следующим образом:

$$S = const + \int\limits_0^{\tau_0} d\tau \sqrt{\dot{x^\mu}\dot{x^\nu}\eta_{\mu\nu}} \tag{3.3}$$

Можно определить величину, под названием **4-скорость** u^μ. Это скорость, вычисленная в терминах собственного времени:

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu(S)}{\partial S} \tag{3.4}$$

Нулевая компонента 4-скорости показывает, как меняется время в нашей системе отсчёта с точки зрения собственного времени этой частицы.

Скалярный квадрат 4-вектора равен единице:

$$u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = 1 \tag{3.5}$$

Аналогично можно ввести **4-ускорение**:

$$w^\mu = \frac{\partial^2 x^\mu(S)}{\partial S^2} \tag{3.6}$$

Очевидно, что:

$$u^\mu w_\nu = 0 \tag{3.7}$$

Задача: Определить релятивистски равноускоренное движение. Это означает, что 4-ускорение частицы в собственной системе отсчёта равно константе, а нужно описать движение этой частицы в неподвижной системе отсчёта.

Задача: Пусть теперь, в отличии от ситуации на (рис. 2.2), стержень в движущейся системе отсчёта K' расположен вертикально ((рис. 3.2)). Требуется найти его длину в покоящейся системе отсчёта K.

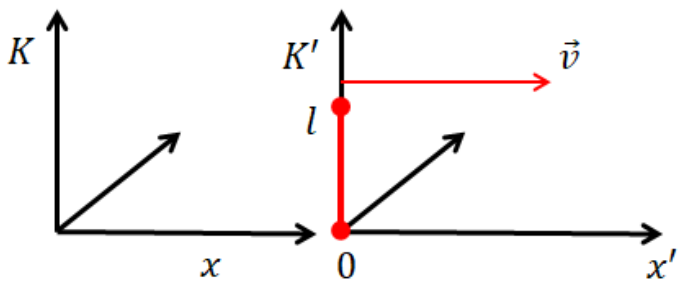

Рис. 3.2. Рисунок к задаче

Лагранжев формализм

Пусть есть механическая система. Можно ввести q^i - координаты в конфигурационном пространстве F. Пространство $T = \mathbb{R}_1$ это время, с координатой t. Тогда траектория системы описывается функциями $q^i(t)$ или отображением $T \to F$.

Введём тотальное пространство $E = F \times T$. Тогда траектория системы это сечения $\sigma \cdot T \to E$, $\pi \cdot \sigma = id_T$, где $\pi : E \to T$.

Расслоение струй (сечений) есть пространство:

$$J^k(E) = (p, [\sigma]_p) \tag{3.8}$$

где $p \in T$ - момент времени, $[\sigma]_p$ - класс эквивалентности сечений.

$\sigma \sim \sigma'$ - сигма эквивалентна сигма штрих, если:

$$\left.\frac{\partial^l \sigma^i}{\partial t^l}\right|_p = \left.\frac{\partial^l \sigma'^i}{\partial t^l}\right|_p, \quad \text{для } l \leq k \tag{3.9}$$

то есть все производные компонент сечения вплоть до k-й в точке p совпадают.

Отсюда $J^0(E) = E$, $J^1(E) = TF \times T$, где TF - касательное расслоение. Координаты на $J^k(E)$ есть $t, q^i, v^{1\,i}, v^{2\,i}, v^{3\,i}, \ldots, v^{k\,i}$, где $q = \sigma, v^{l\,i} = \frac{\partial^l \sigma^i}{\partial t^l}$. Обозначим $v^{1\,i} \equiv v^i$.

Существует проекция $J^{k+1}(E) \to J^k(E)$. Можно ввести J^∞ устремив $k \to \infty$.

Локальные функции зависят от конечного набора координат. Справедливо:

$$J^\infty \to \ldots \to J^{k+1}(E) \to J^k(E) \to \ldots \to T \tag{3.10}$$

Продолжение сечений: если σ - сечение $\sigma : T \to E$, то сигма продолженное строится как $\sigma_{pr} : T \to J^\infty(E)$. Если $\sigma^i(t) = \sigma^*(q^i)$, то $\sigma^i_{pr}(v^{l\,i}) = (\frac{\partial}{\partial t})^l \sigma^i(t)$.

На введённом языке **обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)** есть функции $E_\alpha(T, q, v^1, v^2, \ldots) \in C^\infty(J^\infty(E))$ зависящие от конечного числа производных. Сечение $\sigma : T \to E$ есть решение ОДУ если $\sigma^*_{pr}(E_\alpha) = 0$.

Полная производная:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial x^t} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^{2\,i} \frac{\partial}{\partial v^i} + v^{3\,i} \frac{\partial}{\partial v^{2\,i}} + \ldots \tag{3.11}$$

Если какая-нибудь функция $f \in C^\infty(J(E))$, то $\frac{\partial}{\partial t} \sigma^*_{pr}(f) = \sigma^*_{pr}(D_t f)$.

Определим **производную Эйлера-Лагранжа**. Пусть $f \in C^\infty(J^\infty(E))$ - локальная функция, тогда производная Эйлера-Лагранжа определяется как:

$$\frac{\delta^{EL} f}{\delta q^i} = \frac{\partial f}{\partial q^i} - D_t(\frac{\partial f}{\partial v^i}) + D_t^2(\frac{\partial f}{\partial v^{2\,i}}) - \ldots \tag{3.12}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$E_i = \frac{\delta^{EL} L}{\delta q^i} \tag{3.13}$$

где L - **функция Эйлера-Лагранжа**.

Сечение $\sigma : T \to E$ есть решение уравнений Эйлера-Лагранжа если $\sigma^*_{pr}(E_i) = 0$.

Функция Лагранжа даёт систему уравнений, количество которых равно размерности конфигурационного пространства.

Задача: Доказать, что $\frac{\delta^{EL}}{\delta q^i}(D_t f) = 0$.

Рассмотрим частный случай $f = f(q, t)$.

$$\frac{\delta^{EL}}{\delta q^i}(v^i \frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial t}) = v^j \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - D_t(\frac{\partial f}{\partial q^i}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^i} = 0 \tag{3.14}$$

Свойство: Пусть есть 2 лагранжиана L_1 и L_2, такие что $L_2 - L_1 = D_t K$, то $E_i^1 = E_i^2$ - уравнения, получающиеся из них будут одинаковыми.

Введём понятие **действия** S. Действие является функционалом сечения $S = S[\sigma]$:

$$S[\sigma] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma_{pt}^*(L) dt \tag{3.15}$$

Задача: Вывести уравнения Эйлера-Лагранжа из принципа наименьшего действия.

4. Лекция 4. Симметрии и законы сохранения. Теорема Нетер.

Задано расслоение над временем $E \to T$, координаты $t, q^i, v^i, v^{2\,i}, \ldots$ на расслоении струй $J^\infty(E)$.

Определение:

Эволюционное вертикальное векторное поле на $J^\infty(E)$ - дифференциальный оператор 1-го порядка W, который удовлетворяет:

- $Wt = 0$ - касательность к слоям
- $[W, D_t] = (WD_t - D_tW = 0)f = 0, \quad \forall f$, где f - локальная функция - условие коммутрирования с полной производной

Введём $w^i = Wq^i$ - **характеристика**. Тогда $Wv^i = WD_tq^i = D_tw^i$.

Пусть есть E_α - система ОДУ, тогда W - симметрия если:

$$WE_\alpha = \sum_i A_\alpha^{\beta\,i}(D_t)^i E_\beta \tag{4.1}$$

То есть когда мы действуем оператором W на наши уравнения, то на выходе опять получаем комбинацию тех же уравнений и их полных производных.

Также если $\sigma^*(E_\alpha) = 0$, то и $\sigma^*(D_t^i E_\alpha)$.

Функции $\sigma^*(q^i) = \sigma^i(t)$ - задают решения. Рассмотрим деформацию этого решения: $\sigma^*(q^i + \varepsilon w^i) = \sigma^i(t) + \varepsilon\sigma^*(w^i)$.

Пусть есть какое-то решение: $\sigma^*(E_\alpha) = 0$. Мы хотим построить семейство решений, зависящих от параметра ε такие что:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\sigma_\varepsilon^*(E_\alpha)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{4.2}$$

Положим:

$$\sigma_\varepsilon^*(q^i) = \sigma^*(q^i) + \varepsilon\sigma^*(w^i) \tag{4.3}$$

После взятия производной, беря только первый порядок по ε и используя (4.1):

$$\sigma^*(\frac{\partial E_\alpha}{\partial q^i})\sigma^*(w^i) + \sigma^*(\frac{\partial E_\alpha}{\partial v^i} \cdot \sigma^*(D_tw^i) + \ldots = \sigma^*(WE_\alpha) = 0 \tag{4.4}$$

Таким образом W определяет инфинитоземальную симметрию. Нас будет интересовать класс симметрий. Если E_i - уравнения Эйлера-Лагранжа (ЭЛ), то есть

$$E_i = \frac{\delta^{EL}L}{\delta q^i} \tag{4.5}$$

Среди симметрий этих уравнений есть выделенные:

Определение:

W - **вариационная симметрия**, если W - вертикальное эволюционное поле, которое сохраняет класс эквивалентности функции Лагранжа:

$$WL = D_t K \tag{4.6}$$

Задача: Доказать, что всякая вариационная симметрия L это симметрия уравнений Эйлера-Лагранжа.

Пример, демонстрирующий, что обратное неверно: пусть $L = \frac{1}{2}v^i v_i$ - свободная частица, тогда уравнение движения:

$$\ddot{q(t)} = v^{2\,i} = 0 \tag{4.7}$$

Есть симметрия:

$$\begin{cases} Wq^i = 2q^i \\ Wv^i = 2v^i \\ Wv^{2\,i} = 2v^{2\,i} \\ \dots \end{cases} \tag{4.8}$$

Но данная симметрия не является вариационной:

$$W\left(\frac{1}{2}v^i v_i\right) = 2v_i v^i \neq D_t(\dots) \tag{4.9}$$

Законы сохранения

Определение:

Закон сохранения J:

$$D_t J = \sum_k A^{i(k)} (D_t)^{(k)} E_i \tag{4.10}$$

где J - локальная функция.

То есть J - сохраняющаяся величина, если её полная производная пропорциональна самому уравнению и его полным производным.

Пусть σ - решение $\Rightarrow$ $\sigma^*(E_i) = 0$. Рассмотрим величину $\sigma^*(J)$.

$$\frac{d}{dt}\sigma^*(J) = \sigma^*(D_t J) = 0 \tag{4.11}$$

то есть величина J, вычисленная на конкретном решении, не зависит от времени.

Теперь рассмотрим симметрию:

$$WL = D_t K \tag{4.12}$$

Пусть лагранжиан зависит только от скоростей, а от ускорения уже не зависит. Тогда:

$$w^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + (D_t w^i) \frac{\partial L}{\partial v^i} = D_t K \tag{4.13}$$

Преобразуем следующим образом:

$$w^i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - D_t \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = D_t \left(K - w^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = D_t J \tag{4.14}$$

Следовательно $J = K - w^i \frac{\partial L}{\partial v^i}$ - закон сохранения.

Пример: Пусть $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ - функция Лагранжа явно не зависит от времени. Найдём симметрию. Положим $Wq^i = v^i \Rightarrow W = D_t - \frac{\partial}{\partial t}$. Действуем на функцию Лагранжа:

$$WL = D_t L - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} = D_t L \tag{4.15}$$

То есть в данном примере $K \equiv L$. Сохраняющаяся величина тогда является **энергией**:

$$-J = \mathcal{E} = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L \tag{4.16}$$

Аналогично можно ввести **импульс**: Пусть $Wq^i = c^i$, где $c^i = const$ - сдвиг координат на фиксированный вектор. Отсюда следует, что $Wv^i = 0$.

Тогда:

$$WL = c^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{4.17}$$

Отсюда:

$$P_c = c^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{4.18}$$

Тогда сохраняющиеся величины:

$$P_i = \frac{\partial P_c}{\partial c^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{4.19}$$

это **импульс**.

Теорема Нётер

Для функции Лагранжа L имеется $1:1$ соответствие между классами эквивалентности вариационных симметрий и классами эквивалентности законов сохранения.

Действительно, если

$$WL = D_t K \Rightarrow J = K - w^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \Rightarrow D_t J \approx 0 \tag{4.20}$$

Тогда J- закон сохранения.

И в обратную сторону, если есть закон сохранения J, то

$$D_t J = A^i E_i + A_1^i D_t E_i + \ldots = A^i E_i + D_t(A_1^i E_i) - (D_t A_1^i) E_i + \ldots \tag{4.21}$$

Поэтому мы можем переопределить J на $J' = J - A_1^i E_i - \ldots$, A^i на $A'^i = A^i - (D_t A_1^i) - \ldots$. Тогда:

$$D_t J' = A'^i E_i \tag{4.22}$$

Справедливо : $\sigma^*(J) = \sigma^*(J')$ - то есть законы сохранения J и J' совпадают на решениях $\Rightarrow$ они эквивалентны.

Релятивисткая механика

Релятивисткая механика должна быть инвариантна относительно преобразований Лоренца $\Rightarrow$ действие должно быть инвариантно относительно преобразований Лоренца. Действие $S[x] = \int L(x, \dot{x}) dt$ является функционалом мировой линии $x(t)$ ((рис. 4.1)).

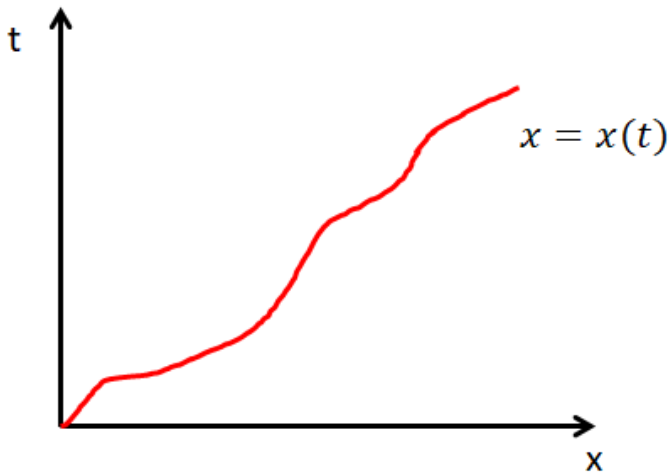

Рис. 4.1. Мировая линия

Положим $S[x] = \alpha \int dt \sqrt{1 - (\dot{\vec{x}})^2} = \alpha \int d\tau (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu})$ при $\tau = x^0 = t$, где $x^\mu = (t, \vec{x})$.

Наша функция Лагранжа: $L = \alpha\sqrt{1 - \vec{v}^2} = \alpha(1 - \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \ldots) = \alpha = \frac{\alpha \vec{v}^2}{2} + \ldots$. Можно взять $\alpha = -m$ и получить:

$$L = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} \tag{4.23}$$

Задача: Убедиться, что такой лагранжиан соответствует равномерному прямолинейному движению (найти уравнения ЭЛ и решить их).

Найдём чему равна энергия при таком виде лагранжиана:

$$\mathcal{E} = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.24}$$

Задача: Восстановить скорость света c в формуле (у нас $c \equiv 1$) с помощью разложения при $v \ll 1$.

Получим, что при $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = mc^2$ - формула Эйнштейна для энергии покоя.
Найдём импульс:

$$p_i = \frac{L}{v^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.25}$$

Компоненты импульса и энергия образуют 4-вектор энергии-импульса (4-импульс):

$$P^\mu = (\mathcal{E}, \vec{p}) \tag{4.26}$$

Задача: Проверить, что $P^\mu \eta_{\mu\nu} P^\nu = m^2$.
Задача: Доказать, что 4-импульс является 4-вектором.

5. Лекция 5. Движение частицы в электромагнитном поле.

Тензор напряженности э/м поля

Действие для свободной частицы:

$$S[x(t)] = -m \int dt \sqrt{1 - (\dot{\vec{x}})^2} \tag{5.1}$$

Уравнения движения для свободной частицы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = 0 \tag{5.2}$$

Теперь рассмотрим заряженную частицу во внешнем (фоновом) электромагнитном поле. Мы хотим, чтобы действие было инвариантно относительно преобразований Лоренца и не содержало производных выше первого порядка.

Запишем действие для свободной частицы:

$$S_0[x^\mu(\tau)] = -m \int d\tau (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu})^{\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

Положив $\tau = t \equiv x^0$ можно получить действие (5.1).

Задача: Убедиться, что можно положить $\tau = x^0$ уже в уравнениях движения.

Найдём дополнительное слагаемое, описывающее взаимодействие частицы с магнитным полем. Электромагнитное поле описывается 4-потенциалом $A_\mu(x)$. Запишем действие с учётом э/м поля - мы ищем скаляр, инвариантный относительно лоренц преобразований, а также линейный по A_μ. Слагаемое вида $e_1 A_\mu x^\mu$ не инвариантно относительно сдвигов - его быть не может. Получается тогда:

$$S[x^\mu(\tau), A_\mu] = S_0 - \int d\tau (e A_\mu \dot{x^\mu}) \tag{5.4}$$

где e - заряд частицы.

$$\frac{\delta^{EL} S}{\delta x^\mu} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{m\dot{x_\mu}}{\sqrt{(\dot{x^\mu})^2}}\right) - e\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\dot{x^\nu} + e\frac{d}{dt}A_\mu = \frac{d}{dt}\left(-\frac{m\dot{x_\mu}}{\sqrt{(\dot{x^\mu})^2}}\right) - e(F_{\mu\nu}\dot{x^\nu}) \tag{5.5}$$

где $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ - **тензор напряженности э/м поля** (тензор Фарадея).

Положим $\tau = x^0 = t$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x^i}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = -eF_{i0} - eF_{ij}\dot{x^j} \tag{5.6}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Введём:

$$\begin{cases} E^i = F^{i0} = -F_{i0} \text{ - электрическое поле} \\ F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} H^k, \ H^k \text{ - магнитное поле} \end{cases} \tag{5.7}$$

где ε^{ijk} - полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon^{123} = 1$.

Задача: Доказать, что ε^{ijk} - инвариант группы $SO(3)$.

Ранее мы вводили импульс (4.25). Теперь можем написать:

$$\frac{d}{dt} p^i = eE^i + \varepsilon^{ijk} H^k v^j = eE^i + [\vec{v}, \vec{H}]^i \text{ - сила Лоренца} \tag{5.8}$$

Запишем тензор Фарадея в явном виде:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^i & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Задача: Найти преобразования Лоренца для $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Убедиться, что электрическое и магнитные поля по-отдельности не являются лоренц инвариантными объектами.

Движение частицы в э/м поле

Запишем действие:

$$S[\vec{x}(t)] = -m \int dt \sqrt{1 - v^2} - e \int dt \varphi + e \int dt (\vec{A}, \vec{v}) \tag{5.10}$$

Потому что 4-потенциал э/м поля есть:

$$A_\mu = (\varphi, -A^i) \tag{5.11}$$

где φ - скалярный потенциал электрического поля, $\vec{A}$ - вектор потенциал магнитного поля. Тогда:

$$\begin{cases} E^i = -F_{i0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial t} \\ H^k = -\frac{1}{2} \varepsilon^{kij} F^{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{kij} \partial_i A^j = (rot \vec{A})^k \end{cases} \tag{5.12}$$

В векторных обозначениях:

$$\begin{cases} \vec{H} = rot \vec{A} \\ \vec{E} = -grad \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \tag{5.13}$$

Калибровочная инвариантность: Если вместо 4-потенциала A_μ рассмотреть $A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$, то тензор Фарадея $F_{\mu\nu}$ не поменяется. Преобразование $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$ называется **калибровочным преобразованием**.

Рассмотрим движение частицы в электромагнитном поле:

- **Постоянное однородное электрическое поле**: $\vec{E} = E\vec{e}_3$.

  Закон движения:
$$\begin{cases} \frac{dp^3}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\right) = eE \\ \frac{dp^1}{dt} = 0 \\ \frac{dp^2}{dt} = 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

  Пусть $p^{1,2} = 0$.

- **Постоянное однородное магнитное поле**: $H^3 = H, H^{1,2} = 0$.
$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = e[\vec{v}, \vec{H}] \Rightarrow \frac{d}{dt}p^3 = 0, \frac{d}{dt}p^1 = ev^2H, \frac{d}{dt}p^2 = -ev^1H \tag{5.15}$$

  Поэтому:
$$\vec{p} = \mathcal{E}v \tag{5.16}$$

  Модуль скорости не будет меняться, частица будет закручиваться в магнитном поле. Решение:
$$\begin{cases} v^1 = V\sin(\omega t + \varphi) \\ v^2 = V\cos(\omega t + \varphi) \\ v^3 = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

  где ω - угловая частота вращения частицы в плоскости $(1, 2)$, φ - начальная фаза.

Задача: Найти V, ω.

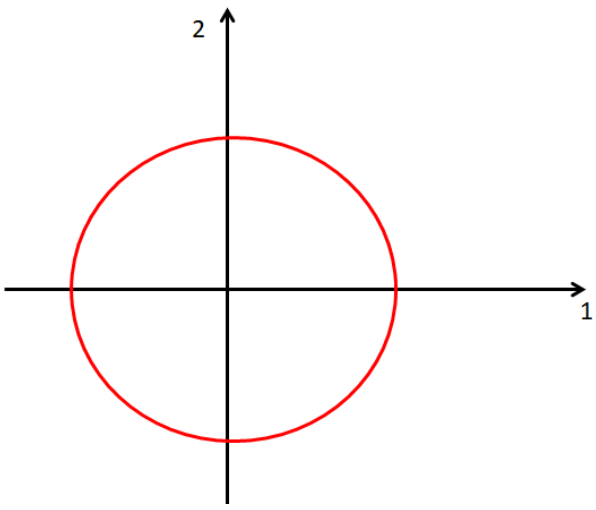

Рис. 5.1. Траектория частицы

6. Лекция 6. Электромагнитное поле.

Плотность заряда и тока

Из действия для электромагнитного поля:

$$S[\vec{x}(t)] = -m \int dt(\sqrt{1-v^2} - \frac{e}{m}\varphi + \frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{v}) \tag{6.1}$$

Следует выражение для силы Лоренца.

Рассмотрим, как заряженная частица создаёт э/м поле. Перейдём к непрерывному распределению заряда - для этого нам понадобится понятие **4-тока**. Пусть мировая линия частицы задаётся:

$$\vec{x} = \vec{X}(t) \tag{6.2}$$

Плотность заряда:

$$\rho(\vec{x}, t) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X})e \tag{6.3}$$

где дельта-функция $\delta(x-a)$:

$$\int dx\delta(x-a)f(x) = f(a) \tag{6.4}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}) = \delta(x^1 - X^1)\cdot\delta(x^2 - X^2)\cdot\delta(x^3 - X^3) \tag{6.5}$$

Вектор плотности тока:

$$\vec{J} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X})\dot{\vec{X}}e \tag{6.6}$$

В фиксированный момент времени эта величина равна нулю везде, где частицы нет, и произведению скорости частицы на её заряд в точке, где частица есть.

Если точечных зарядов несколько, суммарная плотность заряда:

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}_\alpha)e \tag{6.7}$$

Эта функция уже не равна нулю в нескольких точках - где есть заряды.

Рассмотрим квадратную площадку: $x = 1, y \in [0,1], z \in [0,1]$. Найдём поток вектора плотности тока $\int\limits_S (\vec{J}\cdot d\vec{n})$ через такую поверхность за промежуток времени от t_1 до t_2:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dz(J_x) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\delta(x - X(t))\dot{X}(t) = e \tag{6.8}$$

Считаем, что траектория частицы прошла через площадку ((рис. 6.1)).

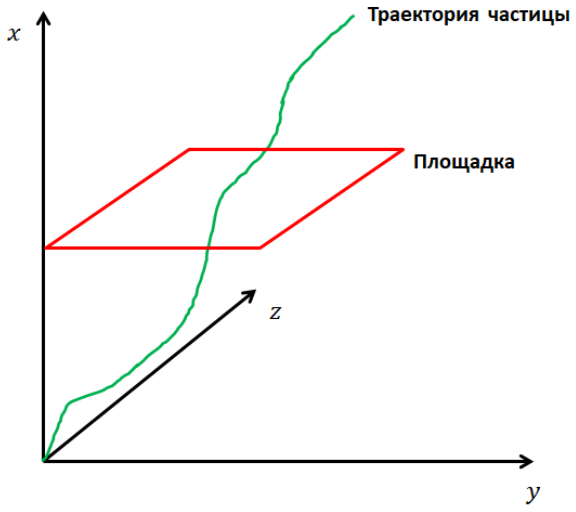

Рис. 6.1. Траектория частицы проходит через площадку

Теперь рассмотрим шар U и его границу - сферу $S = \partial U$. Частицы могут влететь и вылететь из него, влететь и остаться в нем, вылететь из него.

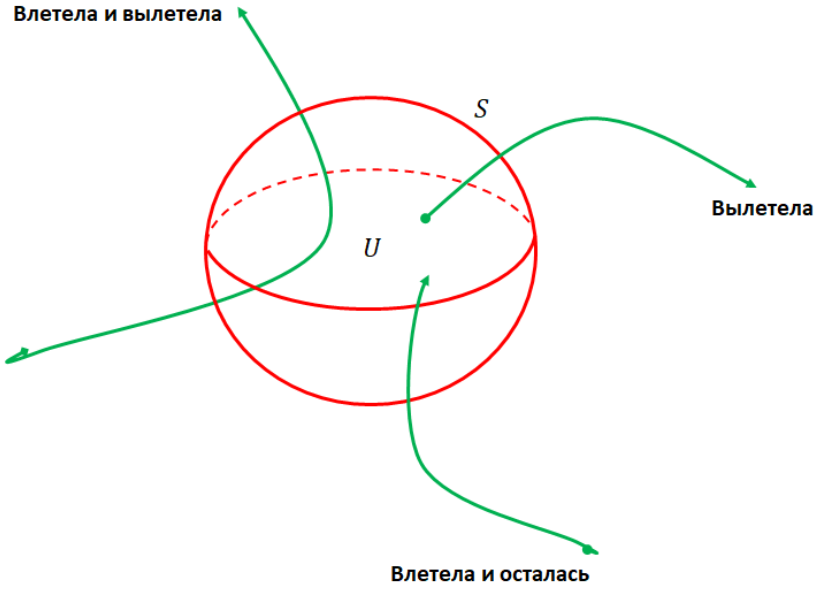

Рис. 6.2. Шар с границей

И найдём поток через его поверхность:

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_S (\vec{J} \cdot d\vec{n}) = \underbrace{\int\limits_U \rho dV \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=\text{число частиц}} \tag{6.9}$$

Выражение (6.9) есть **закон сохранения заряда**.

Если теперь устремить моменты времени t_1 и t_2 друг к другу, получим:

$$-\int \vec{J} \cdot d\vec{n} = \frac{d}{dt} \int\limits_U \rho dV \tag{6.10}$$

Причём это выполняется для любой области U. Используя теорему Остроградского-Гаусса получим дифференциальную форму:

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{6.11}$$

Выражение (6.11) называется **уравнением непрерывности**.

Взаимодействие в лагранжевом формализме

Запишем слагаемое в действии, описывающее взаимодействие зарядов с полем:

$$S_{int} = \int d^4x(-\rho\varphi + \vec{A} \cdot \vec{J}) = -\int d^4x(A_\mu J^\mu) \tag{6.12}$$

где $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ - **4-ток**. В терминах 4-тока уравнение непрерывности принимает вид:

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{6.13}$$

Задача: Дать четырёхмерное доказательство уравнения непрерывности.

Подставим в (6.12) выражения для заряда и тока одной частицы:

$$S_{int} = \int d^3x dt(-e\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t))\varphi(\vec{x}) + e\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t))\dot{\vec{X}} \cdot \vec{A}) =$$
$$= \int dt(-e\varphi(\vec{X}(t), t) + e\dot{\vec{X}} \cdot \vec{A}(\vec{X}, t) = \int dt(-e\varphi + e\vec{A} \cdot \vec{v})$$

Таким образом, мы показали, что слагаемое взаимодействия (6.12) при подстановке выражений для заряда и тока одной частицы приводит к исходному действию (6.1).

Пусть у нас есть система, которая описывается действием $S_1[q_1]$ - функционалом от траекторий $q_1(t)$ (обобщённых координат). Также есть вторая система $S_2[q_2]$ с обобщёнными координатами $q_2(t)$. В явном виде:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{m_1 \dot{q_1}^2}{2} \\ S_2 = \frac{m_2 \dot{q_2}^2}{2} \end{cases} \tag{6.14}$$

Эти две системы пока что не взаимодействуют друг с другом. Если мы хотим описать их взаимодействие, то сделаем это следующим образом:

$$S_{int}[q_1, q_2] = \alpha \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|} \tag{6.15}$$

взаимодействие есть ньютоновское притяжение.

Полная система тогда будет описываться таким действием:

$$S[q_1, q_2] = S_1 + S_2 + S_{int} \tag{6.16}$$

То есть находясь в рамках лагранжева формализма мы можем просто складывать действия для получения суммарного, итогового действия. Мы хотим в качестве S_1 взять заряды и токи (которые заданы, действие от них это число - не меняет уравнений, не будем его писать), в качестве S_2 - э/м поле, а S_{int} мы уже знаем (6.12). Теперь нужно записать действие для э/м поля. Это действие должно описывать свободное э/м поле - без присутствия зарядов.

Оно должно:

- быть лоренц-инвариантным
- зависеть от A_μ только через $F_{\mu\nu}$, для калибровочной инвариантности
- действие должно содержать производные второго порядка $\Rightarrow \sim F_{\mu\nu}^2$

Полное действие (**действие Максвелла**) будет выглядеть следующим образом:

$$S_{tot} = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \int d^4x A_\mu J^\mu \tag{6.17}$$

Таким образом, э/м поле - это бесконечномерная механическая система с обобщенными координатами $A^\mu(\vec{x})$, где μ - дискретный индекс, $\vec{x}$ - непрерывный индекс.

Получим уравнения движения из (6.17):

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}\right) = 0 \tag{6.18}$$

где $L = L(A^\mu, \partial_\mu A^\nu)$ - плотность функции Лагранжа.

Задача: Проверить, что из (6.18) следуют уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu & \text{- первая пара} \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 & \text{- вторая пара} \end{cases} \tag{6.19}$$

Задача: Написать трёхмерную форму уравнений Максвелла.

7. Лекция 7. Действие Максвелла, описывающее электромагнитное поле в присутствии заданного распределения плотности заряда и тока. Дипольный момент.

Пары уравнений Максвелла

Вторую пару уравнений Максвелла из (6.19) можно переписать как:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \tag{7.1}$$

где $\varepsilon_{0123} = +1$.

Пусть $\sigma = 0$:

$$\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = 0 \Rightarrow \partial_i H_i = 0 \Rightarrow div\vec{H} = 0 \tag{7.2}$$

так как $H^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$ Пусть $\sigma = k$:

$$\varepsilon^{0ijk}\partial_0 F^{ij} + 2\varepsilon^{i0jk}\partial_i F^{0j} = \varepsilon^{ijk}\partial_0 F^{ij} + 2\varepsilon^{ijk}\partial_i E^j = 2\partial_0 H^k + 2\varepsilon^{kij}\partial_i E^j = 0 \tag{7.3}$$

Или в терминах векторных операторов:

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + rot\vec{E} = 0 \tag{7.4}$$

Так как $F^{0j} = E_j$.

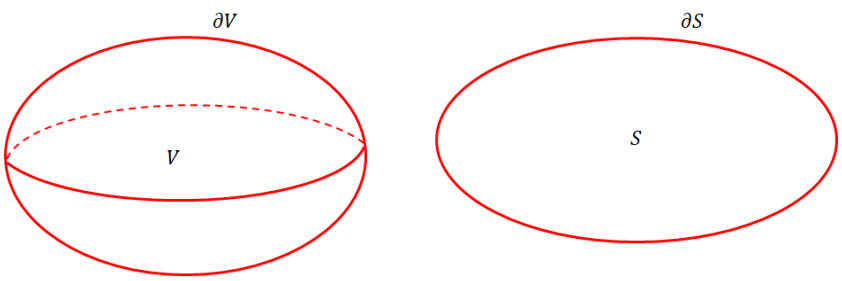

Рис. 7.1. Области интегрирования

Рассмотрим область пространства V с границей ∂V ((рис. 7.1), слева). Тогда можем записать:

$$\int\limits_{\partial V} \vec{H} d\vec{n} = 0 \tag{7.5}$$

Поток магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь рассмотрим двумерную область S ограниченную контуром ∂S ((рис. 7.1), справа). Применим теорему Стокса и получим интегральную форму:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{H}d\vec{n} = -\int\limits_{\partial S}\vec{E}d\vec{l} \tag{7.6}$$

Физический смысл (7.6) - электромагнитная индукция. Если магнитный поток через поверхность меняется со временем, то в контуре, ограничивающем эту поверхность, возникает разность потенциалов $\Rightarrow$ в контуре пойдёт ток.

Теперь рассмотрим первую пару уравнений Максвелла. Возьмём $\nu = 0$:

$$\partial_i F^{i0} = 4\pi\rho \Rightarrow div\vec{E} = 4\pi\rho \tag{7.7}$$

Получили теорему Гаусса в дифференциальной форме. Пусть теперь $\nu = k$:

$$\partial_0 F^{0k} + \partial_i F^{ij} = -\frac{\partial E^k}{\partial t} - \varepsilon^{ikl}\partial_i H^l = 4\pi J^k \tag{7.8}$$

Или:

$$-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + rot\vec{H} = 4\pi\vec{J} \Rightarrow rot\vec{H} = 4\pi(\vec{J} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{ток смещения}}) \tag{7.9}$$

То есть магнитное поле создаётся не только током $\vec{J}$ но также и изменяющимся во времени электрическим полем.

Уравнения (7.9) и (7.7) интегральном виде:

$$\int\limits_{\partial S}\vec{H}d\vec{l} = 4\pi\int\limits_S \vec{J}_{total}d\vec{n} \tag{7.10}$$

где $\vec{J}_{total} = \vec{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

$$\int\limits_{\partial V}\vec{E}d\vec{n} = \int\limits_V 4\pi\rho dV \tag{7.11}$$

Теорема Гаусса в интегральной форме.

Полученные уравнения справедливы для вакуума. В среде вид уравнений сложнее.

Частные случаи электромагнитного поля

- **Стационарное электрическое поле**

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \vec{H} = 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

В этом случае получается:

$$\begin{cases} div\vec{E} = 4\pi\rho \\ rot\vec{E} = 0 \\ \vec{J} = 0 \end{cases} \tag{7.13}$$

Тогда:

$$\vec{E} = -grad\ \varphi \text{ или } E^i = -\partial_i\varphi \tag{7.14}$$

где φ - скалярный потенциал.

Подставляя в дивергенцию получаем:

$$\partial_i E^i = -\partial_i\partial_i\varphi = -\Delta\varphi = 4\pi\rho \tag{7.15}$$

Отсюда уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{7.16}$$

Это уравнение линейное и неоднородное. Это означает, что действует принцип суперпозиции. То есть нам достаточно решить это уравнение для какой-нибудь специальной конфигурации плотности заряда ρ, например, для поля точечного заряда $\rho = e\delta^{(3)}(\vec{x})$. Считаем, что $\varphi(\infty) = 0$. Найдём φ в этом случае. Будем руководствоваться физическими соображениями.

- Поместим точечный заряд в начало координат ((рис. 7.2)). Электрическое поле от него будет распространяться радиально.

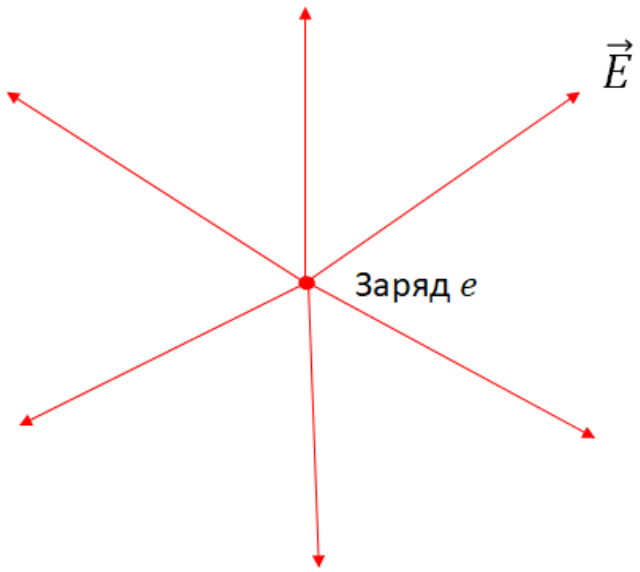

Рис. 7.2. Поле точечного заряда

Модуль напряженности, в силу симметрии задачи, зависит только от расстояния от заряда до точки наблюдения $|\vec{E}| = E(R)$. Функцию $E(R)$ найдём из теоремы Гаусса:

$$4\pi R^2 \cdot E(R) = 4\pi e \Rightarrow E(R) = \frac{e}{R^2} \tag{7.17}$$

В векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{e\vec{x}}{|x|^3} \tag{7.18}$$

Получили закон Кулона. Теперь из $E(R)$ можем получить потенциал:

$$\varphi = \frac{e}{|x|} \tag{7.19}$$

Итого, $\varphi = \frac{e}{|x|}$ решает задачу $\Delta\varphi = -4\pi e\delta^{(3)}(\vec{x})$.

Теперь мы знаем как устроен потенциал набора точечных зарядов:

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{e_\alpha}{|\vec{x}_\alpha - \vec{x}|} \tag{7.20}$$

где $\vec{x}_\alpha$ - радиус-вектор частицы под номером α. Потенциал от непрерывного распределения зарядов устроен следующим образом:

$$\varphi(\vec{x}) = \int d^3\vec{y} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{7.21}$$

Функция (7.21) удовлетворяет уравнению Пуассона (7.16).

- Пусть есть бесконечная равномерно заряженная по поверхности плоскость $z = 0$ ((рис. 7.3)). Поверхностная плотность заряда σ. Из соображений симметрии, поле направленно перпендикулярно плоскости и зависит только от координаты z: $|\vec{E}| = E(z)$.

  Выделим поверхность, которую используем для применения теоремы Гаусса - цилиндр, с основаниями площади S, параллельными плоскости. Применим теорему Гаусса:

  $$2E(z) \cdot S = 4\pi S\sigma \Rightarrow E(z) = 2\pi\sigma \tag{7.22}$$

  Таким образом, величина поля не зависит от z.

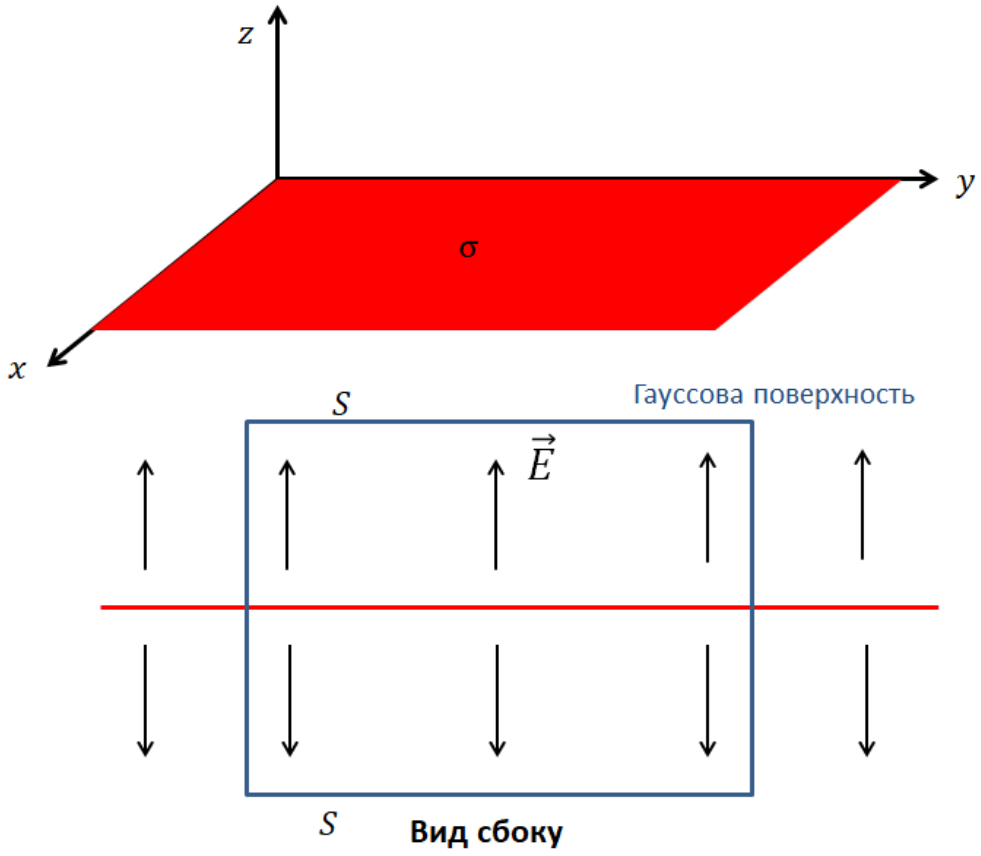

Рис. 7.3. Заряженная плоскость

Задача: Найти электрическое поле от:

1) Бесконечный равномерно заряженный по длине стержень
2) Равномерно заряженная по поверхности сфера
3) Равномерно заряженный по объёму шар

- Пусть имеется бесконечная металлическая плоскость, а над ней на высоте находится точечный заряд e ((рис. 7.4)). Нужно найти электрическое поле заряда. Важно помнить, что металл это проводник, следовательно в металлической плоскости могут свободно перемещаться заряды. Заряды на поверхности проводника перераспределятся таким образом, что электрическое поле будет входить в проводник перпендикулярно его поверхности. Потенциал проводника равен константе, которую можно положить равной нулю ($\varphi\Big|_{z=0} = const = 0$), а потенциал на в бесконечно удаленной точке равен нулю.

  Решение данной задачи будет приведено в следующей лекции.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

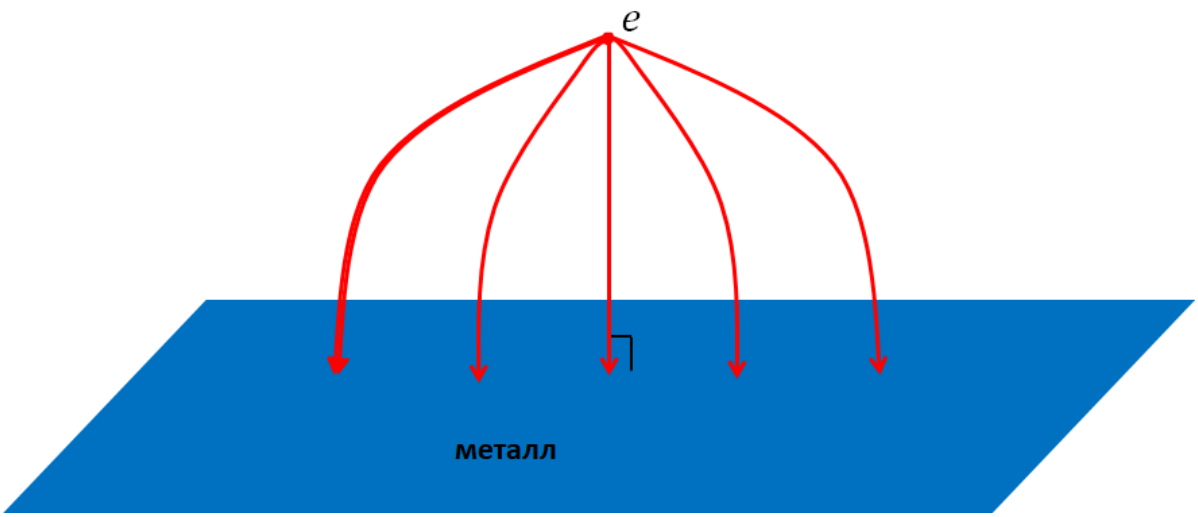

Рис. 7.4. Заряд и металлическая плоскость

- Пусть имеется система точечных зарядов находящихся в какой-то области. Нас интересует, как ведет себя поле в удалённой точке. Считаем, что линейные размеры области, где находится т=система точечных зарядов малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

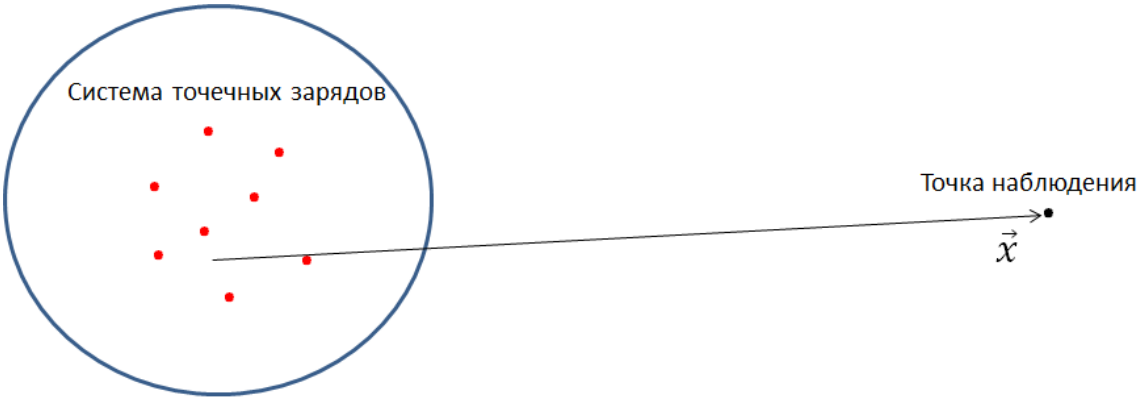

Рис. 7.5. Система точечных зарядов

Потенциал в точке наблюдения:

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{e_\alpha}{|\vec{x}_\alpha - \vec{x}|} \tag{7.23}$$

Теперь используем тот факт, что $|\vec{x}_\alpha| \ll |\vec{x}|$ и разложим (7.23) в ряд:

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{e_\alpha}{|\vec{x}|} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{e_\alpha}{|\vec{x}|^3}(\vec{x} \cdot \vec{x}_\alpha) + O(x^2) \tag{7.24}$$

Итого:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} + \frac{|\vec{x}|}{|\vec{x}|^3}\vec{D} + O(x^2) \tag{7.25}$$

где $Q = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} e_\alpha$ - суммарный заряд системы, $\vec{D} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \vec{x}_\alpha$ - дипольный момент системы.

Задача: Проверить, что если $Q = 0$, то $\vec{D}$ не зависит от выбора начала координат.

Задача: Пусть

$$\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{D}}{|\vec{x}|^3} \tag{7.26}$$

проверить, что

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{D})\vec{n} - \vec{D}}{|\vec{x}|^3} \tag{7.27}$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ - единичный вектор, направленный вдоль $\vec{x}$.

Таким образом, найдено поле диполя, которое спадает как $\sim \frac{1}{|\vec{x}|^3}$. Разложение (7.24) можно изучать дальше и выписывать мультипольные члены.

8. Лекция 8. Стационарное магнитное поле. Электромагнитные волны.

Стационарное магнитное поле

- Пусть $\rho = 0,\ div\vec{J} = 0,\ \vec{E} = 0,\ \frac{\partial H}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0.$

  С учётом этого, уравнения Максвелла преобразуются следующим образом:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \Rightarrow \partial_j(\partial^j A^i - \partial^i A^j) = 4\pi J^i \tag{8.1}$$

  Итого:

$$-\Delta A^i - \partial^i(\partial_j A^j) = 4\pi J^i \tag{8.2}$$

  Используем условие калибровочной инвариантности: $A^i \to A^i + \partial^i\varepsilon$. Путём выбора ε можем добиться $\partial_l A^l = 0$. То есть мы хотим:

$$\partial_l(A^l + \partial^l\varepsilon) = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \partial_l A^l \tag{8.3}$$

  При выполнении этого условия уравнение (8.2) превращается в:

$$\Delta A^i = -4\pi J^i \tag{8.4}$$

  Решение этого уравнения:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \int d^3x \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{8.5}$$

  Нас будут интересовать ситуации без приложенного внешнего поля - тогда наше поле на бесконечности должно обращаться в ноль. Теперь найдём магнитное поле:

$$\vec{H} = rot_R\vec{A} \tag{8.6}$$

  В компонентах:

$$H^i = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial A^k}{\partial R^j} = \varepsilon^{ijk}\int d^3x \vec{J}^k(x)\cdot(-1)\frac{1}{|\vec{R} - \vec{x}|^3}(R^j - x^j) =$$
$$= \int d^3x \frac{\varepsilon^{ijk}J^j(R^k - x^k)}{|\vec{R} - \vec{x}|^3} = \int d^3x \frac{[\vec{J}, (\vec{R} - \vec{x})]}{|\vec{R} - \vec{x}|^3}$$

  Получили **закон Био-Савара-Лапласа** в интегральной форме.

- Пусть есть бесконечный проводник с током I, и мы хотим найти магнитное поте такого тока. Из соображений симметрии $\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial \varphi}$. Окружим источник тока цилиндром и найдём поток магнитного поля через него ((рис. 8.1)):

$$S \cdot H_r = 0 \tag{8.7}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Потому что $div\vec{H} = 0$. Таким образом, у нас есть компонента, касательная к цилиндру в каждой точке H_τ. Тогда, используя теорему о циркуляции:

$$H_\tau 2\pi R = 4\pi I \Rightarrow H_\tau = \frac{2I}{R} \tag{8.8}$$

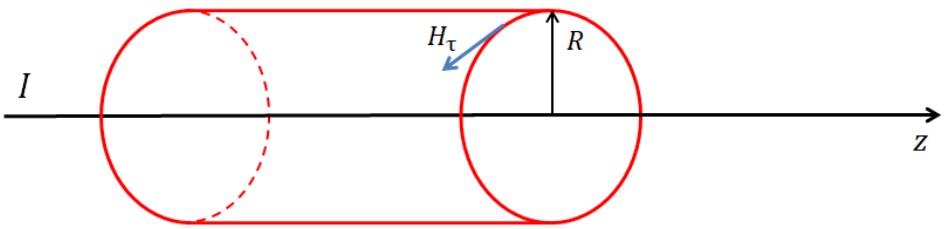

Рис. 8.1. Магнитное поле бесконечного тока

- Пусть есть бесконечный соленоид (катушка с током), ориентированный вдоль оси z, ток циркулирует по виткам в плоскости x, y. Введём σ - линейная плотность тока. Рассмотрим прямоугольную поверхность, одна грань которой находится внутри соленоида, вторая снаружи. Длина поверхности - L ((рис. 8.2)).

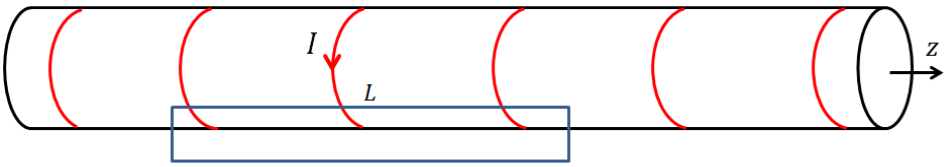

Рис. 8.2. Магнитное поле внутри соленоида тока

Задача: Найти $\vec{H}$ внутри соленоида.

- Пусть есть круговой ток I. Нужно посчитать магнитное поле на большом расстоянии R от него ((рис. 8.3)). Нам дано распределение $\vec{J}(\vec{x})$, $div\vec{J} = 0$.

  Вектор-потенциал магнитного поля в точке $\vec{R}$:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \int d^3x \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{8.9}$$

Сделаем разложение по малому параметру $\frac{x}{R}$:

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{x}|} = \frac{1}{|\vec{R}|} + \frac{(\vec{R}, \vec{x})}{|\vec{R} - \vec{x}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{R}|^3}\right) \tag{8.10}$$

Рис. 8.3. Магнитное поле кругового тока на большом расстоянии

Тогда:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{|\vec{R}|}\int d^3x\vec{J}(\vec{x}) + \int d^3x\frac{(\vec{R},\vec{x})\cdot\vec{J}}{|R|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{R}|^3}\right) \tag{8.11}$$

Посчитаем k-ю компоненту первого слагаемого:

$$\int d^3xJ^k(x) = \int d^3xJ^l\partial_l(x^k) = \int d^3x\left(\underbrace{\partial_l(J^lx^k)}_{\text{по т. Гаусса}} - \underbrace{x^k\partial_lJ^l}_{=0 \text{ по ур. непрер-ти}}\right) = 0 \tag{8.12}$$

так как по теореме Гаусса можно взять большую поверхность, а J - компактно. Теперь разберёмся со вторым слагаемым:

$$(\vec{R},\vec{x})\cdot\vec{J} = J^iR^lx^l = (J^m\partial_mx^i)R^lx^l = \partial_m(\ldots)^m - (\partial_mJ^m)x^iR^lx^l - J^lx^iR^l \tag{8.13}$$

Итого:

$$(\vec{R},\vec{x})\vec{J} = \frac{1}{2}(J^iR^lx^l + J^lR^lx^i) + \partial_m(\ldots)^m \tag{8.14}$$

Произведение двух ε-символов:

$$\varepsilon^{jki}\varepsilon^{jmn} = (\delta^{km}\delta^{in} - \delta^{kn}\delta^{im}) \tag{8.15}$$

Задача: Проверить формулу (8.15).

Рассмотрим следующий объект:

$$[[\vec{x},\vec{J}],\vec{R}]^i = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jmn}x^mJ^nR^k = x^kJ^iR^k - x^iJ^kR^k \tag{8.16}$$

получили выражение как в (8.14)

Таким образом:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{2}\int d^3x\frac{[[\vec{x},\vec{J}],\vec{R}]}{|\vec{R}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{R}|^3}\right) \tag{8.17}$$

Введём **магнитный момент**:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3x[\vec{x}, \vec{J}] \tag{8.18}$$

Тогда:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{[\vec{m}, \vec{R}]}{|\vec{R}|^3} \tag{8.19}$$

Итого, мы нашли потенциал $\vec{A}(\vec{R})$. Теперь можно найти само магнитное поле:

$$\vec{H} = rot(\vec{A}) \tag{8.20}$$

В компонентах:

$$H^i = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial R^j}\frac{[\vec{m}, \vec{R}]}{|\vec{R}|^3} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kml}\frac{\partial}{\partial R^j}\frac{m^m R^l}{R^3} =$$
$$= (\delta^{jm}\delta^{il} - \delta^{jl}\delta^{im})\left(\frac{m^m\delta^{jl}}{R^3} - 3\frac{m^m R^l}{R^5}R^j\right)$$

<u>Задача:</u> Доказать, что

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{n})\vec{n} - \vec{m}}{|\vec{R}|^3} \tag{8.21}$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$

Получаем выражение очень похожее на формулу электрического диполя (7.27). Такое свойство называют **электромагнитной дуальностью**.

Электромагнитные волны

- Запишем уравнения Максвелла в пустоте, без зарядов и токов:

$$\begin{cases} div\vec{E} = 0 \\ rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\vec{H} = 0 \\ rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{8.22}$$

Заметим, что преобразования $\vec{E} \to \vec{H}, \vec{H} \to -\vec{E}$ являются симметриями уравнений. Уравнения (8.22) говорят о том, что изменяющееся во времени электрическое поле может являться источником магнитного поля и наоборот.

Запишем уравнения Максвелла в четырёхмерных обозначениях:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \tag{8.23}$$

где $\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ - оператор Даламбера.

Выбираем калибровку потенциала: $\partial_\mu A^\mu = 0,\ A^0 = 0$. Потому что можно всегда подобрать такую функцию ε, что $A^0 + \partial^0\varepsilon = 0$ и такую функцию λ, что $\partial_i(A^i + \partial^i\lambda) = 0$.

Распишем:

$$\partial_i F^{0i} = \underbrace{\partial_i \partial^i A^0}_{=0} - \partial^0(\partial_i A^i) = 0 \tag{8.24}$$

Отсюда следует, что пространственная дивергенция A^μ не зависит от времени, тогда и λ не будет зависеть от времени.

Итого, получаем волновое уравнение:

$$\Box A^i = 0 \tag{8.25}$$

- **Плоская волна**

Пусть A^i зависит только от координаты $z \equiv x^3$: $A^i = A^i(z,t)$. Отсюда:

$$\partial_i A^i = 0 \Rightarrow \partial_3 A^3 = 0 \tag{8.26}$$

Волновое уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^i = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} A^3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^3 \tag{8.27}$$

Тогда одно из решений: $A^3 = \alpha \cdot t + \beta$, где $\alpha, \beta = const$. Единственная ненулевая компонента тензора напряженности: $F^{30} = \alpha$. Это постоянное электрическое поле вдоль оси z. Нам такое решение не интересно. Поэтому рассмотрим 1 и 2 компоненты вектора A^i:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\alpha = 0 \tag{8.28}$$

где $\alpha = 1, 2$.

"Простое решение": пусть $A^2 = 0$, тогда:

$$A^1 = f_L(t - x) + f_R(t + x) \tag{8.29}$$

Это решение описывает суперпозицию двух волн: одна бежит налево, другая направо.

Электрическое и магнитное поле в такой плоско-поляризованной волне:

$$\begin{cases} E^1 = F^{10} = -\frac{\partial}{\partial t} A^1 = -f_L' \\ E^2 = 0 \\ H^1 = 0 \\ H^2 = \varepsilon^{231} \frac{\partial A^1}{\partial z} = -f_L' \end{cases} \tag{8.30}$$

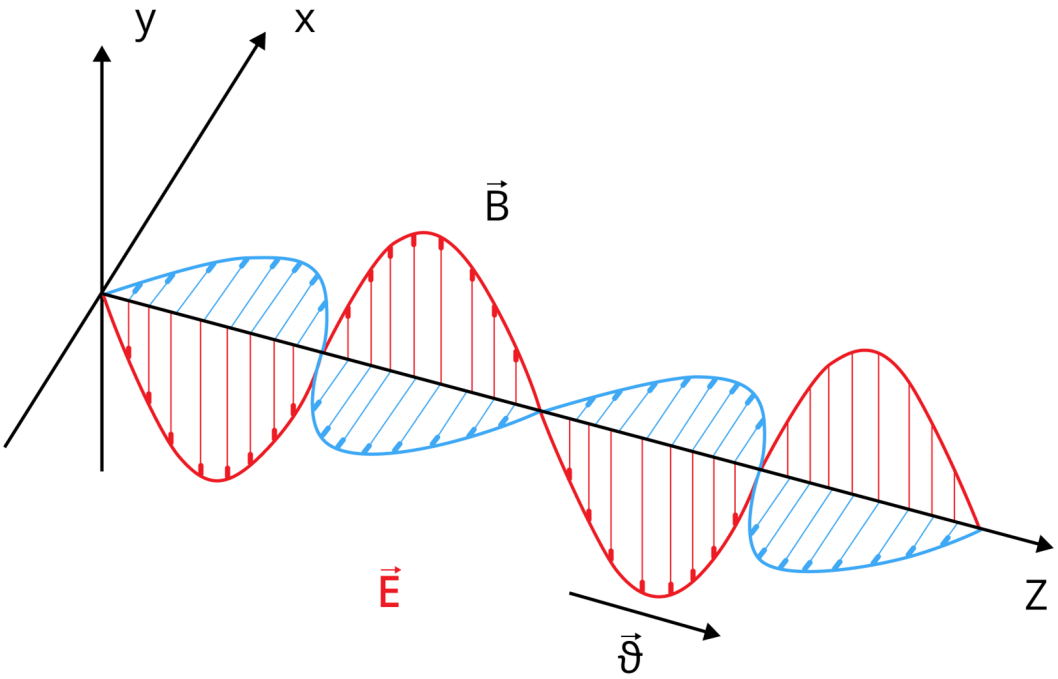

Рис. 8.4. Электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси z

9. Лекция 9. Электромагнитные волны.

На прошлой лекции было получено для волны бегущей по оси z:

$$A^1(z,t) = a_L(t-z) + a_R(t+z) \tag{9.1}$$

Положим $a_R = 0, a_L(t-z) = a(t-z)$. Тогда компоненты электрического поля:

$$\begin{cases} E^1 = F^{10} = \underbrace{\partial^1 A^0}_{=0} - \partial^0 A^1 = -a'(t-z) \\ E^2 = E^3 = 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

Компоненты магнитного поля:

$$\begin{cases} H^1 = H^3 = 0 \\ H^2 = \varepsilon^{2ij}\partial_i A^j = \varepsilon^{231}\partial_3 A^1 = -a'(t-z) \end{cases} \tag{9.3}$$

Плоская монохроматическая волна

Если зафиксировать точку пространства, то закон изменения поля в такой волне будет:

$$E = a \cdot \cos(\omega t + \alpha) \tag{9.4}$$

где a, α - амплитуда и начальная фаза волны.

Пусть:

$$\begin{cases} E^1 = a^1 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \\ E^2 = a^2 \cdot \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \tag{9.5}$$

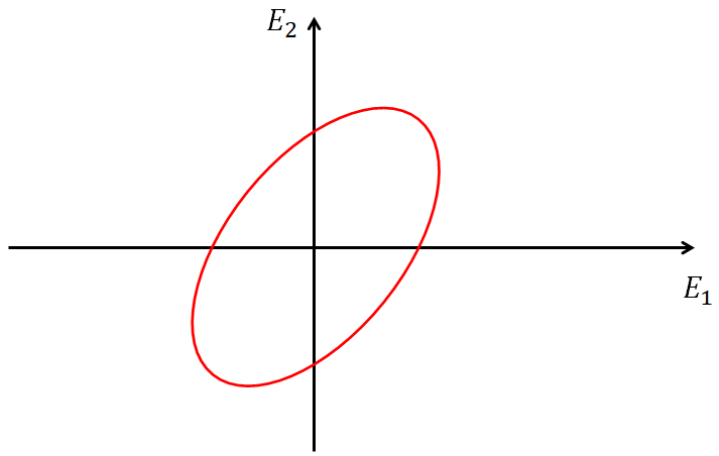

Рис. 9.1. Эллиптическая поляризация э/м волны

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача:
Доказать, что поворотом плоскости xy можно добиться $\alpha = \beta$.

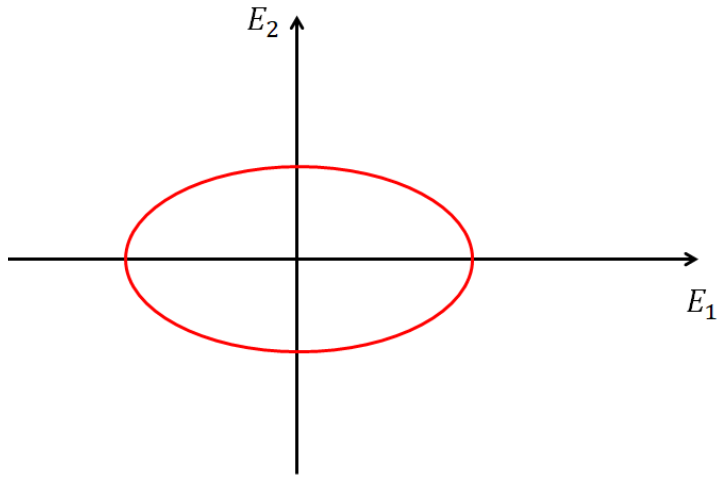

Рис. 9.2. Эллиптическая поляризация э/м волны после поворота плоскости xy

- Ситуация показанная на (рис. 9.1) называется **эллиптической** поляризацией - при распространении волны конец вектора $\vec{E}$ описывает эллипс. Такая поляризация получается суперпозицией двух плоско-поляризованных волн.
- При $a^1 = 0$ или $a^2 = 0$ эллипс вырождается в прямую - мы имеем дело с **плоско-поляризованной** волной и вектор $\vec{E}$ колеблется вдоль прямой.
- Если $a^1 = a^2$ - имеем дело с **круговой** поляризацией.

Таким образом, поляризация это дополнительная информация о том, как устроена электромагнитная волна. Также волны классифицируют следующим образом:

1) Если смещения частиц при колебаниях происходят **вдоль** направления распространения волны, то такую волну называют **продольной**.
2) Если смещения частиц при колебаниях (или колебания векторов электрического/магнитного поля) происходят **поперёк** направления распространения волны, то такую волну называют **поперечной**. Электромагнитные волны являются поперечными.

У монохроматической волны можно ввести **длину волны** λ. Рассмотрим такую волну, распространяющуюся вдоль оси z - расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одинаковой фазе (например между соседними горбами) называют длиной волны (рис. 9.3).

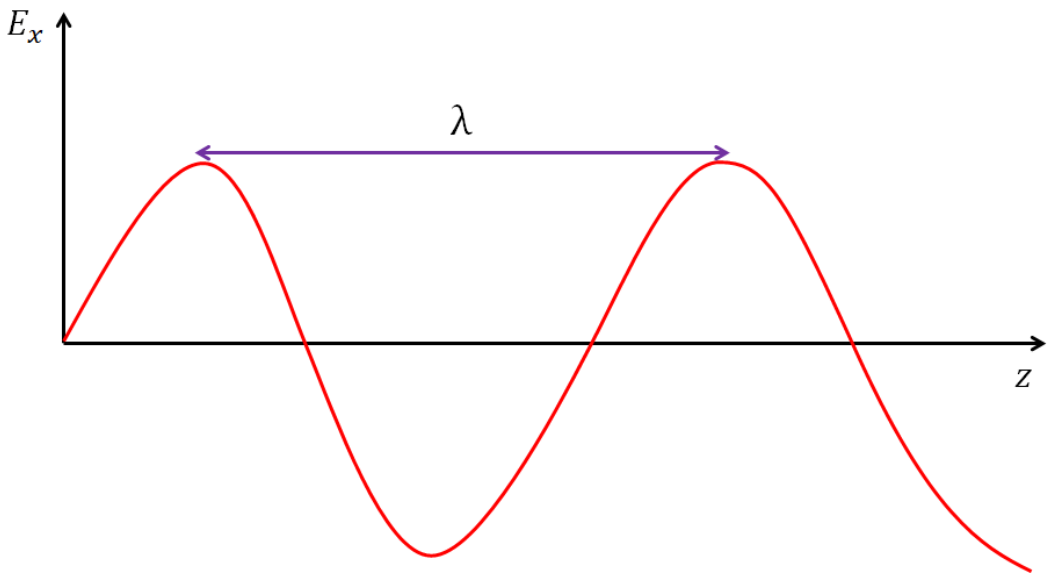

Рис. 9.3. Длина волны

Справедливо выражение:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{9.6}$$

То есть можно также сказать, что длина волны, это расстояние, которое пройдёт волна за время равное периоду колебаний.

Волновой вектор $\vec{k}$: $|\vec{k}| = \omega$, направление совпадает с направлением распространения волны.

Уравнение волны можно записать как:

$$E^1 = a^1 \cdot \cos(\omega(t - z) + \alpha) = a^1 \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \alpha) \tag{9.7}$$

Можно ввести **волновой 4-вектор**:

$$k = (w, \vec{k}) \tag{9.8}$$

Тогда:

$$E^1 = a^1 \cdot \cos(\eta_{\mu\nu} x^\mu k^\nu + \alpha) \tag{9.9}$$

Задача (эффект Доплера):

Пусть мы наблюдаем волну с волновым вектором $\vec{k} = \omega(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Волна испускается движущимся со скоростью $\vec{v}$ объектом. Пусть ω_0 - частота волны в движущейся системе отсчёта K'. Мы находимся в системе отсчёта K (рис. 9.4). Требуется найти ω - частоту волны, регистрируемой в неподвижной системе отсчёта.

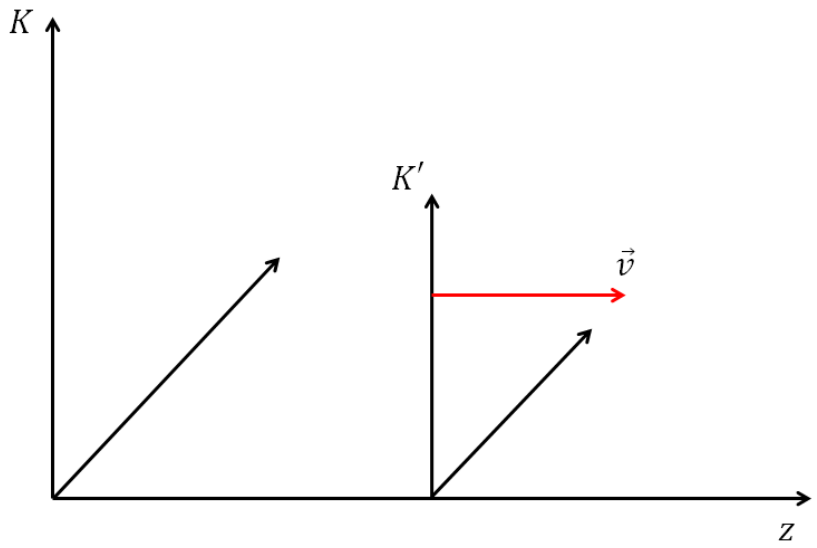

Рис. 9.4. К задаче на эффект Доплера

Также существует релятивистский эффект Доплера, связанный с изменением темпа хода часов в движущейся системе отсчёта, отсюда и изменение в частоте.

Энергия и импульс э/м волны

Введём **тензор энергии-импульса** для э/м поля:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \tag{9.10}$$

Свойства:

- $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ - он симметричен
- Тензор энергии-импульса сохраняется на уравнениях движения, то есть:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial_\rho F^{\rho\sigma})(\ldots)^{\nu}_{\sigma} = 0 \text{ или } \partial_\mu T^{\mu\nu} \approx 0 \tag{9.11}$$

  Так как $\partial_\rho F^{\rho\sigma} = 0$ это уравнения Максвелла.

  Действительно:

$$\partial_\mu(F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\sigma}) \approx F^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} \approx -F^{\mu\rho}(\partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\partial_\nu(F^{\mu\rho F_{\mu\rho}}) \tag{9.12}$$

- Выполняется

$$T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0 \tag{9.13}$$

  Это следствие конформной инвариантности уравнений Максвелла.

Положим индекс $\nu = 0$. Тогда (9.11) превратится в:

$$\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} \approx 0 \tag{9.14}$$

Получили что-то похожее на уравнение непрерывности (6.11). Тогда введём T^{00}-**плотность энергии**, T^{i0}-**плотность потока энергии** или **вектор Пойнтинга**.

Закон сохранения энергии (выполняется для конфигурации поля, удовлетворяющей уравнению Максвелла и достаточно быстро спадающей на бесконечности):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x T^{00} = 0 \tag{9.15}$$

В явном виде:

$$T^{00} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{0i}F^0_i - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(-E^iE^i + \frac{1}{2}(E^2 - H^2)\right) =$$
$$= \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$$

Задача: Показать, что

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]^i \tag{9.16}$$

Задача:

Плоская волна бежит вдоль оси z и врезается в черную пластину (рис. 9.5). Найти энергию (на единицу площади), которую в единицу времени волна передаёт пластинке.

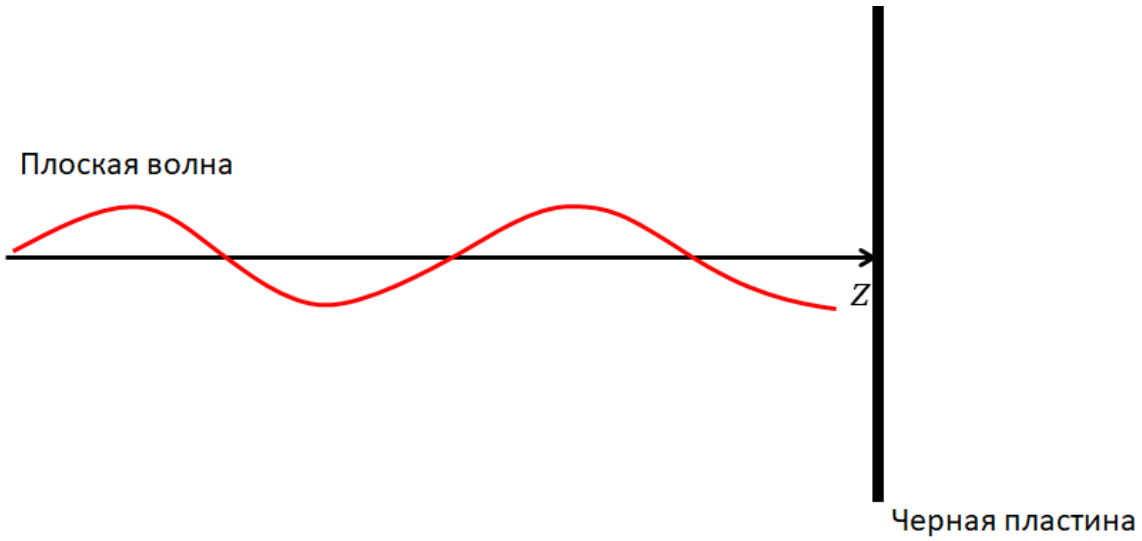

Рис. 9.5. Рисунок к задаче

10. Лекция 10. Энергия и импульс электромагнитного поля.

Тензор энергии импульса

Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}(F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\ \rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \tag{10.1}$$

для которого выполняется: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (на решении уравнений Максвелла).

Пусть есть плоская электромагнитная волна: $E^1 = f(t-z), H^2 = f(t-z)$, она бежит вдоль оси z. Тогда:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = \frac{1}{4\pi}f^2 = w \tag{10.2}$$

Плотность потока энергии (вектор Пойнтинга):

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] \Rightarrow S^3 = \frac{1}{4\pi}\varepsilon^{312}E^1H^2 = \frac{f^2}{4\pi},\ S^1 = S^2 = 0 \tag{10.3}$$

Задача: Найти энергию, передаваемую такой плоской волной чёрной пластинке.

Теперь рассмотрим другие компоненты тензора энергии импульса $T^{\mu\nu}$. Возьмём индекс $\nu = i = 1, 2, 3$. Тогда из закона сохранения:

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} = 0 \tag{10.4}$$

где T^{0i} - **плотность импульса**, T^{ji} - **тензор плотности потока импульса** (тензор напряжений Максвелла).

Для теории поля можно считать, что обобщенные координаты это значения 4-потенциала A^μ в различных точках $\vec{x}$ - бесконечномерная система. Тогда действие:

$$L = \int d^3x F^2 \tag{10.5}$$

Импульс:

$$P^i = \int d^3x T^{0i} \tag{10.6}$$

Посчитаем величину T^{ij}:

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{i0}F^j_0 + F^{il}F^j_l - \frac{1}{4}\eta^{ij}(2\vec{E}^2 - 2\vec{H}^2)\right) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(E^iE^j - \varepsilon^{ilm}\varepsilon^{jln}(H^mH^n) - \frac{\delta^{ij}}{2}(\vec{E}^2 - \vec{H}^2)\right) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(E^iE^j - \delta^{ij}(\vec{H}^2) + H^iH^j - \frac{\delta^{ij}}{2}(\vec{E}^2 - \vec{H}^2)\right) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(E^iE^j + H^iH^j - \frac{\delta^{ij}}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\right)$$

У нас плоская волна: $E^1 = f(t-z),\ H^2 = f(t-z)$. Теперь, $T^{ij} \neq= 0$, если $i \neq j$: $T^{11} = 0,\ T^{22} = 0,\ T^{33} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = w$.

Итого, T^{ij} - плотность потока i-й компоненты импульса в j-м направлении.

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]^i = \frac{1}{4\pi}f^2\delta^i_3 \tag{10.7}$$

Такая э/м волна несёт z-компоненту импульса в направлении z.

Решим задачу про чёрную пластинку - полностью поглощает волну ((рис. 9.5)). Посчитаем, какой импульс передаёт волна пластине. Окружим пластину воображаемым цилиндром и посчитаем поток импульса волны через него.

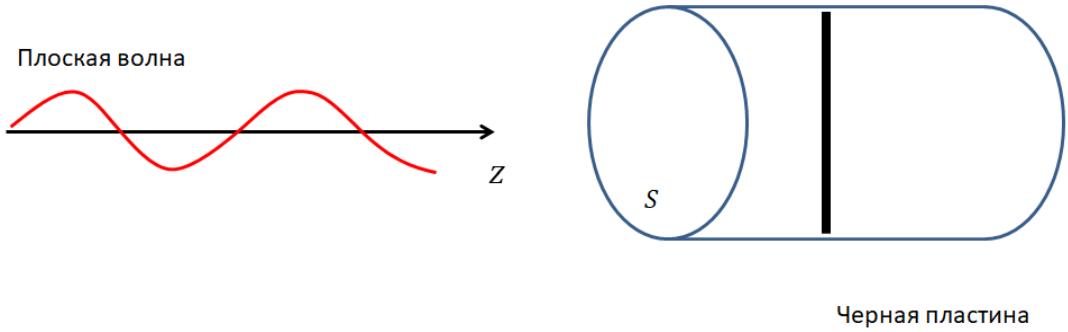

Рис. 10.1. Рисунок к задаче

Через боковые стенки поток равен нулю. Через переднее основание: $T^{33} \cdot S$. Через заднее основание ничего не протекает - волна поглотилась пластиной. Тогда $T^{33} \cdot S$ - импульс, переданный пластине в единицу времени. Тогда давление на пластину:

$$p = \frac{T^{33} \cdot S}{S} = T^{33} \tag{10.8}$$

Задача: Найти давление э/м волны на пластинку с коэффициентом отражения α.

Э/М поле зарядов и токов

В статике: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$, потенциал: $A^\mu(\vec{R}) = \int d^3x \frac{j^\mu(\vec{x})}{|\vec{R}-\vec{x}|}$. Общий случай: ρ и $\vec{j}$ будут зависеть от времени, плюс знаем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{10.9}$$

Мы хотим решить уравнения Максвелла в обощем случае:

$$\partial_\mu(F^{\mu\nu}) = 4\pi\rho^\nu \tag{10.10}$$

Наложим дополнительное условие (калибровка Лоренца):

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{10.11}$$

Убедимся, что так можно сделать:

$$\partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu\varepsilon) = 0 \Rightarrow \Box\varepsilon = (\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\varepsilon = \partial_\mu A^\mu \tag{10.12}$$

Получили неоднородное уравнение Даламбера:

$$\Box\varepsilon = \Psi \tag{10.13}$$

Частное решение такого уравнения:

$$\varepsilon_{part}(t, \vec{x}) = \int d^3x \frac{\Psi(\vec{x}, t - |\vec{R} - \vec{x}|)}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{10.14}$$

где $\vec{R}$ - точка наблюдения. Можем взять $\Psi = \partial_\mu A^\mu$ и найти ε и тем самым добиться $\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu\varepsilon) = 0$. Вернёмся к уравнениям Максвелла:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 4\pi j^\nu \Rightarrow \Box A^\mu = -4\pi j^\mu \tag{10.15}$$

Положим $\mu = 0$:

$$\Box\varphi = 4\pi\rho \tag{10.16}$$

Пусть заряд сконцентрирован в одной точке пространства: $\rho = e(t)\delta^{(3)}(\vec{x})$. Задача обладает сферической симметрией $\Rightarrow \varphi = \varphi(R, t) = \frac{\chi(t)}{R}$. Найдём:

$$\Delta\left(\frac{\chi}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\chi}{R}\right)\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\left(\frac{\partial\chi}{\partial R}\frac{1}{R} - \frac{\chi}{R^2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\chi}{\partial R} - \chi\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial R} + R\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{\partial\chi}{\partial R}\right)$$

Тогда:

$$(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\frac{\chi}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = 0 \tag{10.17}$$

Общее решение для $R > 0$:

$$\chi = \chi(t - R) \tag{10.18}$$

Это возбуждение, разбегающееся со скоростью света из начала координат во все стороны. Итого:

$$\varphi = \frac{\chi(t - R)}{R} \tag{10.19}$$

Если заряд не меняется со временем, то $\chi = e$, поэтому естественно выбрать:

$$\varphi = \frac{e(t - R)}{R} \tag{10.20}$$

то есть это потенциал Кулона, где заряд определяется в запаздывающий момент времени. Тогда:

$$\varphi(\vec{R}, t) = \int d^3x \frac{\rho(\vec{x}, t - |\vec{R} - \vec{x}|)}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{10.21}$$

Для других компонент потенциала всё аналогично:

$$A^\mu(\vec{R}, t) = \int d^3x \frac{j^\mu(\vec{x}, t - |\vec{R} - \vec{x}|)}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{10.22}$$

это **запаздывающие потенциалы**. Общее решение есть сумма частного решения и общего решения однородного уравнения.

Если заряд двигается $\vec{x} = \vec{y}(t)$, то плотность его заряда и тока:

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}(t)) e \dot{\vec{y}}(t) \end{cases} \tag{10.23}$$

11. Лекция 11. Дипольное излучение.

Запаздывающие потенциалы, потенциал Ленара-Вихерта

Если заданы $\rho, \vec{J}$, то решение уравнений Максвелла $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$ может быть записано как:

$$A^\mu(t, \vec{R}) = \int d^3x \frac{J^\mu(t - |\vec{R} - \vec{x}|, \vec{x})}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{11.1}$$

где $t - |\vec{R} - \vec{x}|$ - запаздывание электромагнитного поля на пути из точки $\vec{x}$ в точку $\vec{R}$.

Потенциал Ленара-Вихерта описывает магнитное поле, создаваемое произвольно движущейся заряженной частицей. Пусть траектория частицы $y(t)$, а мы хотим измерить поле в точке $\vec{R}$ в момент времени t. В момент времени t_r частица находится в точке $y(t_r)$, причём события $(t, \vec{R})$ и $(t_r, \vec{y}(t_r))$ разделены светоподобным интервалом: $(t - t_r) = |\vec{R} - \vec{y}(t_r)|$. Иными словами, $(t_r, \vec{y}(t_r))$ - событие излучения э/м волны, $(t_r, \vec{y}(t_r))$ - событие приёма.

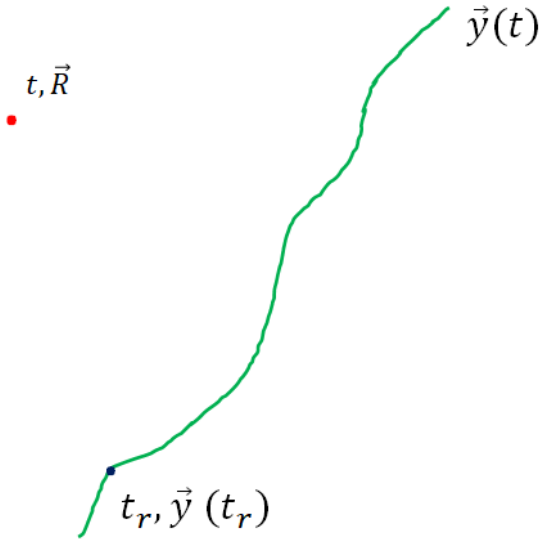

Рис. 11.1. Источник и приёмник э/м волн

В лоренц-инвариантном виде (4-векторной форме) потенциал Ленара-Вихерта будет выглядеть как:

$$A^\mu(R) = e \cdot \frac{u^\mu}{u_\nu(R^\nu - y^\nu)} \tag{11.2}$$

где u^μ - 4-скорость, $R^\nu = (t, \vec{R})$ - точка, в которой проводятся измерения, $y^\nu = (t_r, \vec{y}(t_r))$ - точка излучения.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если мы находимся в СО, в которой в момент времени t_r частица покоится (специальная система отсчёта), то $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Тогда формулу (11.2) можно переписать:

$$A^0(R) = \frac{e}{t - t_r} = \frac{e}{\vec{R} - \vec{y}(t_r)||} \tag{11.3}$$

Получили потенциал Кулона.

В произвольной системе отсчёта: $u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$, $R^\mu = (t, \vec{R})$. Тогда:

$$\begin{cases} A^0 = \varphi = e\frac{1}{(t-t_r)-\vec{v}\cdot(\vec{R}-\vec{y}(t_r))} = \frac{e}{|\vec{R}-\vec{y}|-\vec{v}\cdot(\vec{R}-\vec{y}(t_r))} \\ \vec{A} = \frac{e\vec{v}}{|\vec{R}-\vec{y}|-\vec{v}\cdot(\vec{R}-\vec{y}(t_r))} \end{cases} \tag{11.4}$$

Дипольное излучение

Пусть есть область пространства V (линейные размеры порядка L), в которой двигаются заряды, причём $supp(\rho, \vec{J}) \in V$. Мы изучаем поле в некоторой точке $\vec{R}$. Наше приближение: $|\vec{R}| \gg L$. Найдём э/м потенциал в этом приближении.

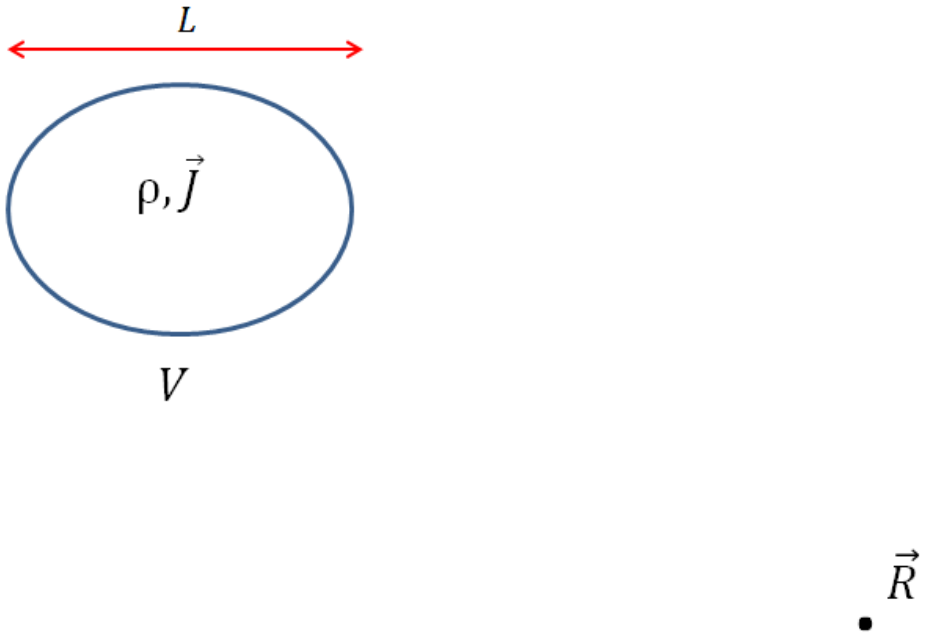

Рис. 11.2. Дипольное приближение

$$\vec{A}(t, \vec{R}) = \int\limits_V d^3x \frac{\vec{J}(t - |\vec{R} - \vec{x}|, \vec{x})}{|\vec{R} - \vec{x}|} \tag{11.5}$$

Используем приближенную формулу:

$$|\vec{R} - \vec{x}| = |\vec{R}| - \vec{x} \cdot \vec{n} \tag{11.6}$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ - единичный вектор вдоль $\vec{R}$.

Тогда:

$$\vec{A}(t,\vec{R}) \approx \frac{1}{|\vec{R}|}\int\limits_V d^3x\vec{J}(t-|\vec{R}|+\vec{x}\cdot\vec{n},\vec{x}) \tag{11.7}$$

Система зарядов в области V создаёт поле. Его можно разделить на две компоненты: статическое поле и излучение. На большом расстоянии от зарядов ведущим членом будет именно излучение ($\sim \frac{1}{|\vec{R}|}$), статическое поле затухнет.

Пусть есть плоская волна, распространяющаяся вдоль $\vec{n}$. Тогда поля в ней:

$$\begin{cases} \vec{H} = [\dot{\vec{A}},\vec{n}] \\ \vec{E} = [[\vec{A},\vec{n}],\vec{n}] \end{cases} \tag{11.8}$$

Теперь пренебрежём слагаемым $\vec{x}\cdot\vec{n}$ в выражении для $\vec{A}$. Рассмотрим выражение для $\vec{J}$ и предположим, что движение зарядов в области V периодическое, то есть можно записать

$$\vec{J} = \sin\Big(\omega(t-|\vec{R}|+\vec{x}\cdot\vec{n})\Big) \tag{11.9}$$

Первый член в разложении по $(\vec{x}\cdot\vec{n})$ имеет вид:

$$\omega\dot{\vec{J}}(t-|\vec{R}|)\vec{x}\cdot\vec{n} \tag{11.10}$$

Потребуем, чтобы $\omega(\vec{x}\cdot\vec{n}) \ll 1$. Таким образом мы можем пренебречь (11.10).

$$\omega(\vec{x}\cdot\vec{n}) \approx \frac{2\pi}{T}\cdot L \ll 1 \Rightarrow L \ll cT = \lambda \tag{11.11}$$

То есть, если линейный размер системы L мал по сравнению с длинной волны излучения λ, мы можем пренебречь членом (11.10).

Итого, у нас 2 условия:

- Мы находимся достаточно далеко от системы зарядов и токов: $|\vec{R}| \gg L$;
- Линейный размер системы много меньше длины излучаемой волны: $L \ll \lambda$.

Итого, можем переписать:

$$\vec{A}(t,\vec{R}) \approx \frac{1}{|\vec{R}|}\int\limits_V d^3x\vec{J}(t-|\vec{R}|,\vec{x}) \tag{11.12}$$

Распределение токов связано с движением зарядов:

$$\vec{J} = \sum_\alpha e_\alpha\cdot\dot{\vec{r}}_\alpha\delta(\vec{x}-\vec{r}(t)) \tag{11.13}$$

Подставим (11.13) в (11.12):

$$\vec{A}(t,\vec{R}) \approx \frac{1}{|\vec{R}|}\sum_\alpha e_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha(t-|\vec{R}|) = \frac{1}{|\vec{R}|}\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha e_\alpha\vec{r}_\alpha(t-|\vec{R}|)\right) = \frac{1}{|\vec{R}|}\dot{\vec{d}} \tag{11.14}$$

где $\vec{d}$ - дипольный момент.

Можем переписать (11.8) и получить вклад дипольного излучения:

$$\begin{cases} \vec{H} = \frac{1}{|\vec{R}|}[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}] \\ \vec{E} = \frac{1}{|\vec{R}|}[[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}], \vec{n}] \end{cases} \tag{11.15}$$

Задача: Найти угловое распределение плотности потока энергии излучения.

Обратим внимание, что в выражении (11.15) присутствует вторая производная по времени от дипольного момента. Это отражает тот факт, что излучать будут только заряды, двигающиеся ускоренно. Заряды, которые двигаются равномерно, прямолинейно излучать не будут.

Сечения и расслоения

Пусть у нас есть поля

$$\varphi^i(x), x = (\underbrace{x^0}_{=t}, x^1, \ldots, x^{d-1}). \tag{11.16}$$

У нас задано расслоение над пространством-временем $\pi : E \to X$, введём локальные (адаптированные) координаты: x^μ, u^i. У расслоения есть сечение $\sigma : X \to E$, причём $\pi \circ \sigma = Id_x$, Pull back: $\sigma^*(x^\mu) = x^\mu$, $\sigma^*(u^i) = \varphi^i(x)$.

Локально сечение задаётся набором функций $\varphi^i(x)$ (наши поля). Геометрически, кофигурация поля - это сечение некоего расслоения.

В теории поля, $\varphi^i(x)$ удовлетворяют уравнениям движения. Это дифференциальные уравнения.

Определение: Введём струи, как расслоение над X: $J^k(E) \to X$, Элементы этого пространства $P \in X, [\sigma]^k_p$.

Два сечения эквивалентны

$$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \frac{\partial^l \sigma^*(u^i)}{\partial x^{\mu_1} x^{\mu_2} \ldots x^{\mu_l}} = \frac{\partial^l \sigma'^*(u^i)}{\partial x^{\mu_1} x^{\mu_2} \ldots x^{\mu_l}} \tag{11.17}$$

для $l \leq k$. Два сечения совпадают, если все их производные вплоть до k-й совпадают.

Координаты на $J^k(E)$: $x^\mu, u^i_{\mu_1}, \ldots, u^i_{\mu_l}$, $l \leq k$.

Свойства:

- Определены проекции $J^k(E) \to J^{k-1}(E) \to \ldots \to J^0(E) \to X$.

  Задача: Показать, что $J^0(E) = E$.

- Если σ - сечение E, то определены продолженные сечения $\sigma_{pr} : X \to J^k(E)$, $\sigma_{pr}(p) = [\sigma]^k_p$.

Можно определить бесконечные струи $J^\infty(E)$.

Определение: Локальная функция $f = C^\infty_{loc}(J^\infty(E))$, если $f = \pi_k^* f_k$, где $f_k \in C^\infty_{loc}(J^\infty(E))$. Локальные функции - функции на бесконечных джетах.

Определение: Уравнения в частных производных (PDE): это некие функции E_α, которые накладывают связи на поля и координаты (u^i, x^μ). Причём E_α - локальные на $J^\infty(E)$.

Определение: Решение системы уравнений E_α: $\sigma : X \to E : (\sigma_{pr})^* E_\alpha = 0$

Задача: Найти E_α для уравнений Максвелла.

12. Лекция 12. Симметрии.

Полные производные

Мы имеем дело с локальной теорией поля - это означает, что лагранжиан и действие зависят от производных полей взятых **в одной и той же точке пространства**.

Мы вводили расслоение на пространством-временем $E \to X$, X - пространство-время. Обозначаем x^μ - локальные координаты на X, u^i - координаты на слоях, $(\pi^*(x^\mu), u^i)$ - локальные координаты на E. Расслоение - класс эквивалентности сечений: $J^k(E) = x, [\sigma]^k_x$.

Мы будем работать с бесконечными джетами $J^\infty(E) = proj\ limit\ J^k(E)$ при $k \to \infty$. Введём **полные производные**:

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + u^i_\mu \frac{\partial}{\partial u^i} + u^i_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^i_\nu} + \dots \tag{12.1}$$

где $x^\mu, u^i, u^i_\mu, u^i_{\mu\nu}, \dots$ - координаты на $J^\infty(E)$.

$$\begin{cases} \sigma^*_{pr}(u^i_\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma^*_{pr}(u^i) \\ \sigma^*_{pr}(u^i_{\mu\nu}) = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \sigma^*_{pr}(u^i) \end{cases} \tag{12.2}$$

Свойство: Пусть f - локальная функция, σ - сечение. Тогда мы можем найти:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma^*_{pr}(f) = \sigma^*_{pr}(D_\mu f) \tag{12.3}$$

Задача: Доказать, что $[D_\mu, D_\nu] = 0$.

У нас есть вертикальное $V_p\varepsilon \in T_p\varepsilon$ и горизонтальное $H_p\varepsilon \in T_p\varepsilon$ подпространства: $T_p\varepsilon = V_p\varepsilon + H_p\varepsilon$.

Определение: Задание $H_p\varepsilon\ \forall p \in \varepsilon$ называют связностью Эресмана.

Определение: $P_p\varepsilon =< D_\mu \Big|_p >$ - распределение Картана.

Задача*: Показать, что D_μ - касательно к σ^*_{pr}.

Дифференциальные уравнения

Пусть $E_\alpha \in C^\infty_{loc}(J^\infty(E))$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, E_α - PDE (partial differential equations - дифуры в частных производных) если $\pi(E_\alpha = 0) = X$.

Определение: Решение E_α это $\sigma : X \to E :\ \sigma^*_{pr}(E_\alpha) = 0$.

Пусть у нас есть координата u, тогда $\sigma^*(u) = \varphi(x)$. Уравнение: $E = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33}$. Знаем, что

$$\sigma^*_{pr}(u_{\mu\nu}) = \sigma^*_{pr}(D_\mu D_\nu u) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sigma^*(u) = \partial_\mu \partial \nu \varphi(x) \tag{12.4}$$

$$\sigma^*_{pr}(E) = \partial_\mu \partial^\nu \varphi(x) = 0 \tag{12.5}$$

Определение: **Продолженное уравнение** - это дифференциальное уравнение к которому добавлены $D_\mu E_\alpha, D_\mu D_\nu E_\alpha, \ldots$ - **дифференциальные следствия**.

Пусть σ - решение, значит $\sigma^*(E_\alpha) = 0$. Посчитаем:

$$\sigma^*(D_\mu E_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\sigma^*(E_\alpha) = 0 \tag{12.6}$$

То есть если σ решает исходное дифференциальное уравнение, то σ также решает его дифференциальные следствия.

Утверждение: У исходного и продолженного дифференциальных уравнений решения совпадают.

Геометрически, можно рассмотреть подрасслоение $\varepsilon \in J^\infty(E)$ заданное условиями $E_\alpha = 0, D_\mu E_\alpha = 0, \ldots$. У нас задано $\pi_\varepsilon : \varepsilon \to X$.

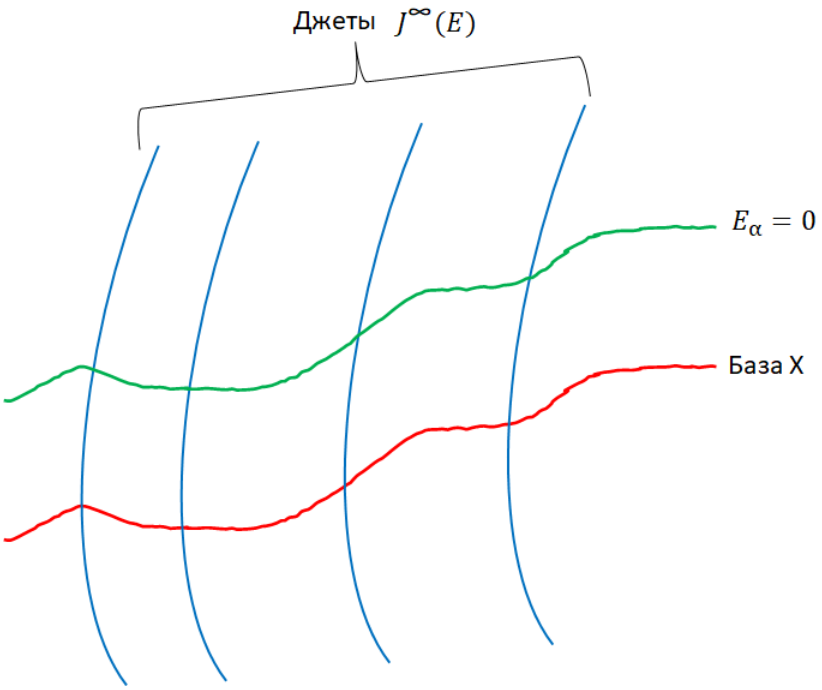

Рис. 12.1. Расслоения

Инфинитезимальные симметрии

Определение: **Эволюционное векторное поле** на $J^\infty(E)$ - это поле V, коммутирующее с полными производными: $[V, D_\mu] = 0$.

Будем рассматривать **вертикальные поля** (касательные к слоям): $Vx_\mu = 0$.

Свойства:

- $Vu^i = V^i(x, u, \ldots)$
- $Vu^i_\mu = V(D_\mu u^i) = D_\mu V u^i = D_\mu V^i$
- V^i - **характеристики симметрии** эволюционного поля.

Определение: V - симметрия, если V - эволюционное и вертикальное поле и V касательно к $\varepsilon \in J^\infty(E)$.

$$VE_\alpha = W_\alpha^{\beta\,(\mu)}(u, x) D_{(\mu)} E_\beta \tag{12.7}$$

где $(\mu) = \mu, \mu\nu, \mu\nu\rho, \ldots$.

Пример: Уравнение Даламбера:

$$\Box\varphi(x) = 0 \Rightarrow E = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33} \tag{12.8}$$

Симметрия:

$$\begin{cases} Vu = Cu, \\ Vu_\mu = V(D_\mu u) = D_\mu(Vu) = D_\mu(Cu) = Cu_\mu \\ \ldots \end{cases} \tag{12.9}$$

где $C = const$. Проверим, что это симметрия:

$$VE = CE \tag{12.10}$$

то есть все $W = 1$.

Пусть V - преобразование Лоренца, x^μ - координаты в пространстве Минковского, $\varphi(x)$ - наша функция, её преобразование: $\delta\varphi(x) = \alpha^{[\mu\nu]}(x_\mu\partial_\nu - \partial_\nu x_\mu)\varphi(x)$ - повороты, $\alpha^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\alpha^{\mu\nu} - \alpha^{\nu\mu})$-антисимметричная матрица поворотов. Симметрия:

$$Vu = \alpha^{\mu\nu}(x_\mu D_\nu - x_\nu D_\mu) = \alpha^{\mu\nu}(x_\mu u_\nu - x_\nu u_\mu) \tag{12.11}$$

Преобразования координат:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu(\tau)x^\nu \Rightarrow \delta x'^\mu = \frac{d}{d\tau}\left(\Lambda^\mu_\nu(\tau)x^\nu\right)\Big|_{\tau=0} \tag{12.12}$$

$$\Lambda^*(\varphi) = \varphi(\Lambda^\mu_\nu(\tau)x^\nu) \tag{12.13}$$

$$\frac{d}{d\tau}(\Lambda^*(\tau)\varphi)\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Lambda^\mu_\nu(\tau)x^\nu}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} \tag{12.14}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\tau) = \delta^{\mu}_{\nu} + \tau\alpha^{\mu}_{\nu} \tag{12.15}$$

Подействуем симметрией на уравнения:

$$VE = V(u_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}) = \eta^{\mu\nu}D_{\mu}D_{\nu}(Vu) = \eta^{\mu\nu}D_{\mu}D_{\nu}(\alpha^{\rho\sigma}x_{\rho}D_{\sigma}u) = \alpha^{\rho\sigma}x_{\rho}D_{\sigma}E \tag{12.16}$$

$$Vu = \alpha^{\rho\sigma}x_{\rho}u_{\sigma} \tag{12.17}$$

Задача: Убедиться, что $[\eta^{\mu\nu}D_{\mu}D_{\nu}, \alpha^{[\rho\sigma]x_{\rho}D_{\sigma}}] = 0$, зная, что $[D_{\mu}, x_{\nu}] = \eta_{\mu\nu}$.

Задача: Пусть $E = u_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} + \lambda u^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Доказать, что $V : Vu = \alpha^{[\mu\nu]}x_{\mu}u_{\nu}$ - симметрия E.

13. Лекция 13. Вариационные симметрии. Теорема Нётер.

Лагранжев формализм

Зафиксируем систему координат: x^μ - координаты на X, $V = dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$ - форма объёма. Введём **лагранжиан** L как локальную функцию на джетах $J^\infty(E)$. А **действие** - функционал на сечении

$$S[\sigma] = \int\limits_X \sigma^*_{pr}(L)V \tag{13.1}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа можно записать следующим образом:

$$\frac{\delta^{EL}L}{\delta u^i} = \frac{\partial L}{\partial u^i} - D_\mu(\frac{\partial L}{\partial u^i_\mu}) + D_\mu D_\nu(\frac{\partial L}{\partial u^i_{\mu\nu}}) - \ldots \tag{13.2}$$

Таким образом $E_i = \frac{\delta^{EL}L}{\delta u^i}$ - i-е уравнение Эйлера-Лагранжа.

Задача: Показать, что условие экстремальности $S[\sigma]$ это $\sigma^*_{pr}(E_i) = 0$.

Свойство: $\frac{\delta^{EL}}{\delta u^i}(D_\mu K^\mu) = 0$, $\forall$ локальных функций K^μ. Из этого следует, что лагранжиан L эквивалентен лагранжиану $L + D_\mu K^\mu$.

Введём в**ариационную симметрию**. Пусть V - вертикальное, эволюционное поле такое, что:

$$VL = D_\mu K^\mu \tag{13.3}$$

Свойство: Вариационная симметрия лагранжиана L является симметрией уравнений Лагранжа E_i. Обратное неверно (привести пример невариационной симметрии уравнений).

Определение: **Закон сохранения** (сохраняющийся ток) - пусть заданы J^μ такие что 4-дивергенция J^μ пропорциональны уравнениям Лагранжа или их дифференциальным следствиям:

$$D_\mu J^\mu = W^{\alpha(\mu)} D_{(\mu)} E_\alpha \tag{13.4}$$

Отсюда следует, что если σ - решение, то $\partial_\mu(\sigma^*_{pr}(J^\mu)) = 0$. Или:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_U (\sigma^*_{pr}(J^0)) + \int\limits_{\partial U} \sigma^*_{pr}(\vec{J})d\vec{n} = 0 \tag{13.5}$$

Получаем закон сохранения 4-тока.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема Нётер

Если V - вариационная симметрия, то с ней связан закон сохранения.

Доказательство:

$$VL = D_\mu K^\mu = V^i \frac{\partial L}{\partial u^i} + D_\mu(V^i)\frac{\partial L}{\partial u^i_\mu} + (D_\mu D_\nu V^i)\frac{\partial L}{\partial u^i_{\mu\nu}} \tag{13.6}$$

$$VL = V^i \frac{\partial L}{\partial u^i} + D_\mu(V^i \frac{\partial L}{\partial u^i_\mu}) - V^i(D_\mu \frac{\partial L}{\partial u^i_\mu}) + \ldots = V^i E_i + D_\mu(\ldots)^\mu = D_\mu K^\mu \tag{13.7}$$

Следовательно,

$$V^i E_i = D_\mu \underbrace{\left(K^\mu - (V^i \frac{\partial L}{\partial u^i_\mu}) + \ldots\right)}_{=J^\mu} \tag{13.8}$$

где J^μ - сохраняющийся 4-ток.

Задача: Показать, что если $V^i = W^{ij(\mu)} D_{(\mu)} E_j$, то $J^\mu = D_\nu K^{[\nu\mu]} + u^{\mu(\nu)} D_\nu(E_i)$

Пусть $J^\mu = D_\nu K^{[\nu\mu]} \Rightarrow D_\mu J^\mu = 0$. Проинтегрируем его нулевую компоненту:

$$\int\limits_U J^0 dV = \int\limits_U \partial_i J^i dV = \int\limits_{\partial U} \vec{K}^{01} d\vec{n} \tag{13.9}$$

В законе сохранения энергии-импульса соответствующий сохраняющийся 4-ток - тензор энергии-импульса. Пусть $\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$, преобразование сдвига $Vu = \varepsilon^\mu u_\mu$, $\varepsilon^\mu \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{cases} Vx^\mu = 0 \\ Vu^i_\nu = \varepsilon^\mu u^i_{\mu\nu} \end{cases} \tag{13.10}$$

Подействуем на лагранжиан:

$$VL = D_\mu(L\varepsilon^\mu) \tag{13.11}$$

Соответствующий 4-ток:

$$J^\mu = K^\mu - V^i \frac{\partial L}{\partial u^i_\mu} = -\varepsilon^\nu T^\mu_\nu \tag{13.12}$$

Тензор энергии-импульса:

$$T^\mu_\nu = -\left(u^i_\nu \frac{\partial L}{\partial u^i_\mu} - \delta^\mu_\nu L\right) \tag{13.13}$$

Можем перейти к:

$$T^{\mu\,\prime}_\nu = T^\mu_\nu + D_\rho K^{\rho\mu}_\nu \tag{13.14}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример: **Свободное скалярное поле**. Его функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(u_\mu u^\mu - m^2 u^2) \tag{13.15}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа (уравнение Клейна-Гордона):

$$E = \eta^{\mu\nu} u_{\mu\nu} + m^2 u \tag{13.16}$$

Тензор энергии-импульса в этом случае:

$$T^\mu_\nu = u_\nu u_\mu - \delta^\mu_\nu L \Rightarrow T^{\mu\nu} = (u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} L) \tag{13.17}$$

Вычислим плотность энергии:

$$T^{00} = u^0 u^0 - \frac{1}{2}(u^0 u^0 - u^i u^i - m^2 u^2) = \frac{1}{2}(u^0 u^0 + u^i u^i + m^2 u^2) \tag{13.18}$$

Задача: Дано действие $S[\varphi] = \int d^4x(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)$. Можем ввести импульс $\pi \sim \partial_0\varphi$ записать гамильтониан H. Нужно убедиться, что $H = T^{00}$.

Пример: **Свободное электромагнитное поле**:

$$L = -\frac{1}{16\pi}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})^2 \tag{13.19}$$

Тензор энергии-импульса:

$$T^\mu_\nu = -\frac{1}{4\pi}(A_{\rho\nu}F^{\mu\rho} + \delta^\mu_\nu \frac{1}{4}F^2) \tag{13.20}$$

Можем представить:

$$A_{\nu\rho}F^{\mu\rho} = D_\rho(A_\nu F^{\mu\rho}) - A_\nu \underbrace{D_\rho F^{\mu\rho}}_{\text{ур. Максв.}} \tag{13.21}$$

Тогда:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}(F^\nu_\rho F^{\mu\rho} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}F^2) \tag{13.22}$$

Пример: **Комплексное скалярное поле**. Его функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(u^\mu u^*_\mu - m^2 u u^*) \tag{13.23}$$

Симметрия данного лагранжиана - вращение в комплексной плоскости: $u \to c^{i\alpha}u$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} Vu = iu \\ Vu^* = -iu \\ VL = 0 \end{cases} \tag{13.24}$$

Сохраняющийся ток:

$$J^\mu = -(iuu^{\mu\,*} - iu^*u^\mu) = i(u^*u^\mu - u^{\mu\,*}u) \tag{13.25}$$

$$\sigma^*(J^\mu) = i(\varphi^*\partial^\mu\varphi) \tag{13.26}$$

Поэтому:

$$D_\mu J^\mu \approx 0 \tag{13.27}$$

Действие для системы, состоящей из двух подсистем:

$$S_{tot} = S_1 + S_2 + S_{int} \tag{13.28}$$

В качестве S_1 можно взять максвеловское действие, в качестве S_2 - действие скалярного комплексного поля, а $S_{int} \sim A^\mu J_\mu$.

Действие **скалярной электродинамики** (не существует в природе):

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{16\pi}F^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu + iA_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi\varphi^* \right) \tag{13.29}$$

Задача: Переписать L и J^μ в терминах вещественных компонент.

14. Лекция 14. Гравитационное поле

Гравитация Ньютона

Мы находимся в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеется потенциал гравитационного поля $\varphi(\vec{x}) \sim -\frac{M}{|\vec{x}|}$. Уравнение движения тела в таком потенциале:

$$m\ddot{\vec{x}} = -m \cdot grad(\varphi) \tag{14.1}$$

В отличие от электростатики можем поделить на m:

$$\ddot{\vec{x}} = -grad(\varphi) \tag{14.2}$$

Частицы различной массы в гравитационном поле двигаются одинаково - **эквивалентность инертной и гравитационной массы**.

Выделим область пространства, в которой $grad(\varphi) \approx const$. Понаблюдаем за движением частиц в этой области. Так как они будут двигаться одинаково можно прийти к выводу, что мы находимся в однородном гравитационном поле. Но с другой стороны, такая же ситуация могла бы быть если бы вся эта область двигалась с ускорением $grad(\varphi)$ в обратном направлении .

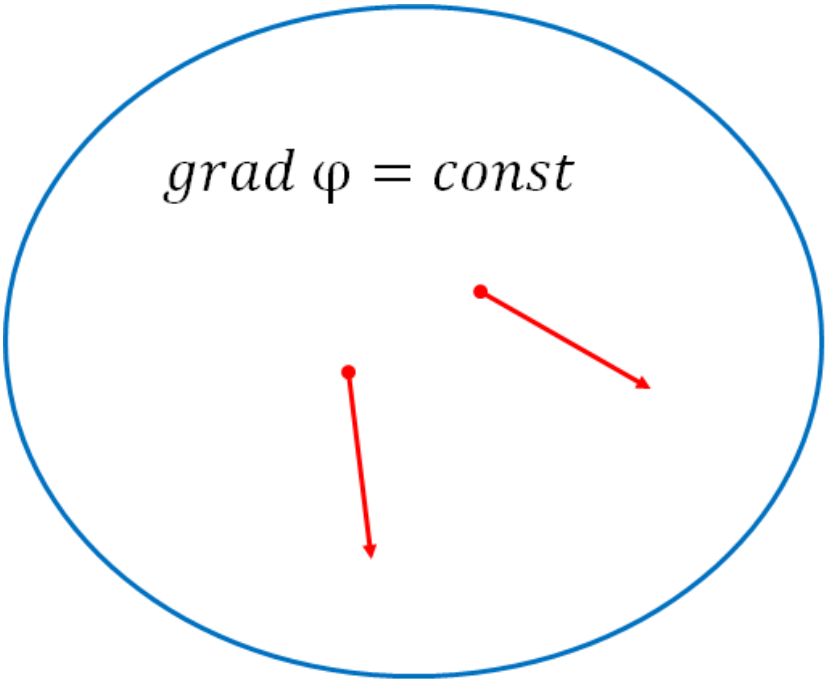

Рис. 14.1. Область

Из этого мысленного эксперимента вытекает следующий **принцип**: локально однородное гравитационное поле эквивалентно неинерциальной системе отсчёта.

Гравитация в СТО

Данный принцип справедлив и для релятивизма. В СТО инерциальная система отсчёта есть афинно-линейные координаты x^μ с метрикой $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. Преобразования Лоренца позволяют перейти в другую инерциальную СО. Но если перейти в **неинерциальную** СО $\eta_{\mu\nu}$ изменит свой вид. Движение частицы описывается действием:

$$S[x] = -m \int d\tau (\eta_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu})^{\frac{1}{2}} \tag{14.3}$$

Движение частицы в четырёхмерном пространстве описывается мировой линией (рис. 14.2). Интеграл в выражении (14.3) есть длина мировой линии в метрике Мнковского.

Рис. 14.2. Мировая линия

Но эту длину можно найти в любой другой координатной системе, например, в неинерциальной СО. Только вместо $\eta_{\mu\nu}$ будет $g_{\mu\nu}$, которая не будет являться константой: $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$. Руководствуясь полученным ранее принципом, приходим к выводу, что гравитационное поле описывается метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$S[x] = -m \int d\tau (g_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu})^{\frac{1}{2}} \tag{14.4}$$

Частица в гравитационном поле

Найдём уравнения движения частицы в гравитационном поле варьируя действие (14.3):

$$\int d\tau \delta x^\rho (\partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu} - 2D_t(g_{\rho\nu}\dot{x^\nu})) \frac{1}{2\sqrt{1-v^2}} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x^\mu} \dot{x^\nu} -$$
$$-2\dot{x^\mu}(\partial_\mu g_{\rho\nu})\dot{x^\nu} - 2g_{\rho\nu}\ddot{x^\nu} = \dot{x^\mu}\dot{x^\nu}(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu}) -$$
$$-2g_{\rho\nu}\ddot{x^\nu} = 0$$

Введём **символы Кристофеля**:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\ nu}) \tag{14.5}$$

Таким образом получаем **уравнение геодезических**:

$$\ddot{x^\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} = 0 \tag{14.6}$$

Массивная частица в гравитационном поле будет двигаться по геодезическим линиям.

Пусть есть кривая метрика g и есть точка $p \in X$. Можно выбрать такую систему координат x^μ в окрестности точки p, что $g_{\mu\nu}\Big|_p = \eta_{\mu\nu}$ и $\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Big|_p = 0$. Метрику g можно разложить в окрестности точки p:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} x^\rho x^\sigma R_{\mu\rho\nu\sigma} \tag{14.7}$$

где $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ - тензор Римана (описывает кривизну пространства).

Можно записать калибровочно-инвариантное **действие Эйнштейна-Гильберта**:

$$S[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{g} R \tag{14.8}$$

где $g = -det(g_{\mu\nu})$, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ - скалярная кривизна, G - гравитационная постоянная, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\ \ \ \rho}$ - тензор Ричи (след тензора Римана).

Симметрия:

$$V g_{\mu\nu} = L_\xi g_{\mu\nu} \tag{14.9}$$

где $\xi = \xi^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ - параметр преобразования.

Калибровочное преобразование:

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu} + g_{\rho\nu}\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \tag{14.10}$$

Задача: Показать, что действие (14.8) инвариантно относительно замен координат.

Задача: Показать, что $L_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$.

Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа для действия (14.8):

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{g}R_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}) \sim \sqrt{g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) + \underbrace{(\sqrt{g}g\frac{\delta R}{\delta g})}_{=\partial_\mu J^\mu} = 0 \tag{14.11}$$

где $\partial_\mu J^\mu$ - полная производная.

Тогда **уравнения Эйнштейна** в вакууме:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{14.12}$$

Свернём это уравнение с $g_{\mu\nu}$ и получим:

$$R - \frac{1}{2}\cdot 4R = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \tag{14.13}$$

Отсюда следует вывод, что в вакууме, при отсутствии материи метрики, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна, это ричи-плоские метрики (кривизна равна нулю).

Если рассматривать полное действие с учётом материи получим:

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{g}R + S_m(g) \tag{14.14}$$

где $S_m(g)$ - действие материи. Тогда получим похожие уравнения Эйлера-Лагранжа, но справа будет стоять не ноль, а вариация S_m по метрике g (с точностью до коэффициента), которую называют тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{14.15}$$

Теперь добавим электромагнитное поле к имеющемуся гравитационному и запишем **действие Эйнштейна-Максвелла**:

$$S[g, A] = -\frac{1}{16\pi}\int (\frac{1}{G}\sqrt{q}R + \sqrt{g}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma})d^4x \tag{14.16}$$

Заметим, что действие получилось **нелинейное**, что делает теорию гравитации сложнее чем электромагнетизма.

Гравитационные волны

Сделаем следующее приближение: пусть гравитационное поле слабое, поэтому отбросим квадратичные слагаемые в действии. Пусть метрика:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{14.17}$$

где $h_{\mu\nu}$ - небольшое возмущение. Рассмотрим уравнения движения в первом порядке по $h_{\mu\nu}$ - тогда они станут линейными. Таким образом мы линеаризуем нашу теорию поля в окрестности некоторого решения.

Уравнение Эйнштейна в вакууме:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{14.18}$$

После линеаризации символы Кристофеля и тензор Ричи станут пропорциональны ∂h. Вариация:

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu \tag{14.19}$$

Наложим калибровку аналогично тому, как мы делали в электродинамике (аналог калибровки Лоренца):

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h = 0 \tag{14.20}$$

где $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

Тогда:

$$\partial^\mu(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2}\partial_\nu(2\partial^\mu \xi_\mu) = \Box \xi_\nu \tag{14.21}$$

Если уравнение неоднородное:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h = B_\nu \tag{14.22}$$

То достаточно решить:

$$\Box \xi_\nu = B_\nu \tag{14.23}$$

Из линеаризации уравнений Эйнштейна следует $\Box h_{\mu\nu} = 0$ - уравнение Даламбера, у которого существуют волновые решения - гравитационные волны.

Пусть существует такая система отсчёта, в которой метрика пространства не зависит от времени, тогда получим:

$$\Box h_{\mu\nu} = \Delta h_{\mu\nu} = 0 \tag{14.24}$$

По аналогии с уравнениями Максвелла для электродинамики делаем вывод, что гравитационное поле также падает как $\frac{1}{R}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ