МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

РАДКЕВИЧ
ЕВГЕНИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Введение

Пример Юнга

Пример 1.1. (Юнга) Рассмотрим равносторонний треугольник ABC. Обозначим через γ_0 кривую ABC. Через середины сторон проведем кривую γ_1, затем γ_2 и так далее (рис. 1.1).

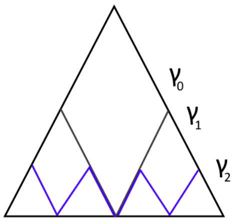

Рис. 1.1. Пример Юнга

С одной стороны, сумма длин участков γ_i равна длине $AB+BC$. С другой, γ_i *поточечно* сходится к AC. Получается, что сумма длин двух сторон равностороннего треугольника равна третьей стороне.

Где в рассуждениях была допущена ошибка? Вспомним, что формула длины имеет вид

$$l\left(f(x)\right) = \int\limits_l \sqrt{(f')^2+1}dx.$$

Поэтому понятие близости двух объектов связано с определенными в каком-то виде производными, то есть скоростями. Если в ситуации с треугольником разрешить, чтобы производные были меры, предельной функцией действительно будет сторона AC. Однако в каждой точке она будет иметь две скорости: -1 и 1 с вероятностями $1/2$.

Этот пример показывает, что в задачах математической физики важно понятие сходимости. Кроме того, для решения задач важно понимать, что стоит за теми или иными формулами. Отметим еще, что предельные функции зачастую будут являться новыми функциями.

Задача о распределении скоростей. Уравнение Гамильтона – Якоби

Частицы на прямой не сталкиваются, нет силового поля. Тогда ускорение

$$\frac{d^2}{d^2t}x(t) = 0,$$

$v(x,t)$ – распределение скоростей, d/dx – производная вдоль траектории частицы $x = x_(t, x_0)$, $(d/dt)x = v(x,t)$. Распределение скоростей $v(x,t)$ не является произвольным и подчинено *уравнению Хоффа*

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим соответствующую задачу Коши

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Пусть

a) $u_0 = \tanh(x)$;

b) $u_0 = -\tanh(x)$.

Вдоль траектории скорость постоянна. Следовательно, можно взять значение скорости в начальной точке, то есть

$$u(x,t) = \mathrm{const} = u_0(x_0).$$

Отсюда

$$x = x_0 + u_0(x_0)t. \tag{2}$$

Применим к x теорему о неявной функции относительно x_0. Получим[1]

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + u_0' t > 0.$$

Тогда можно считать

$$x_0 = x_0(x,t).$$

Тогда

$$u(x,t) = u_0(x_0) = u_0(x_0(x,t)).$$

Подставим теперь в уравнение (2) конкретные значения u_0.

a) Уравнение для координаты

$$x = x_0 + \tanh(x_0)t,$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + \frac{t}{\coth^2(x)} > 0.$$

b) Теперь

$$x = x_0 - \tanh(x_0)t,$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 - \frac{t}{\coth^2(x)}.$$

В точке[2] $t = 1$, $x_0 = 0$ значение выражения выше < 0. Можно показать, что в этой точке пересекаются все характеристики уравнения.

Отсюда следует, что гладкое решение существет на интервале $[0, 1)$.

[1] В некоторой окрестности, где полученное уравнение $\neq 0$, можно считать его > 0.
[2] Можно «заглянуть» и за эту точку, но решение этого вопроса нетривиально.

Можно пользоваться следующим приемом. Обозначим

$$u = v_x,$$

то есть сгладим решение. Подставим такую замену в уравнение Хоффа (1):

$$\partial_t \partial_x v + \partial_x v \partial_x^2 v = 0.$$

Проинтегрируем получившееся уравнение по x. Получим

$$\partial_t v + \frac{1}{2}(\partial_x v)^2 = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Из физических соображений следует, что const $= 0$. Уравнение (3) с const $= 0$ называется уравнением *Гамильтона – Якоби*.

Можно перейти в фазовое пространство (v, p), где $p = dv/dx$. Подробно останавливаться на этом переходе мы не будем.

Перейдем к задаче Коши для уравнения Гамильтона – Якоби (3). Получим

$$\begin{cases} \partial_t v + \frac{1}{2}(\partial_x v)^2 = 0 \\ v_x|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Типичная структура траекторий такой системы показана на рис. 1.2.

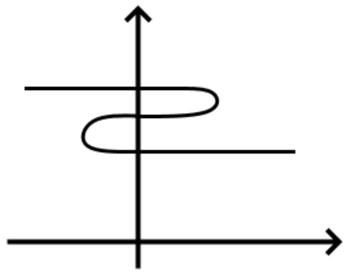

Рис. 1.2. Типичная структура траекторий

Роль математики в натурфилософии

С точки зрения лектора, математика – это создание языка, с помощью которого мы фиксируем эксперимент и моделируем его[3].

У каждого языка формируются свои проблемы. Так, в математике возникла теория групп[4], которая долгое время не находила применения в физике[5].

Для каждой задачи важно выбрать подходящий язык для ее описания.

Рассматриваемые примеры неслучайны с точки зрения математической теории. Изучение уравнений математической физики привело к тому, что появилась **классификация постановок задач**, согласно которой выбранные уравнения и системы являются типичными представителями наиболее важных уравнений.

[3] Вместо повторного проведения.

[4] Одной из задач, поспособствовавшей ее возникновению, было нахождение симметрии решений дифференциальных уравнений.

[5] До тех пор, пока не нашла применение в квантовой механике.

Примеры уравнений

Далее будут рассмотрены лишь немногочисленные конкретные примеры уравнений и систем.

Пример 1.2. Одними из уравнений, которые мы рассмотрим, будут *гиперболические уравнения*

$$\partial_t u + \partial_x u = 0$$

и

$$\partial_t u - \partial_x u = 0,$$

а также *уравнение теплопроводности и диффузии*

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u,$$

где частные производные

$$\partial_x u = \frac{\partial}{\partial x} u, \quad \partial_x^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u.$$

Оказывается, что для уравнений, отличающихся друг от друга на первый взгляд совсем несущественно, естественными будут совсем разные постановки задач. Например, *уравнение Лапласа*

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \tag{4}$$

и *волновое уравнение*

$$\partial_x^2 - \partial_y^2 u = 0 \tag{5}$$

описывают процессы с принципиально отличными свойствами. Все решения (4) вещественно-аналитичны, то есть более, чем гладкие. Во множестве решений (5) есть разрывное решение.

Пример 1.3. Следующий пример – *уравнения Коши – Римана*

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ \partial_x v - \partial_y u = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Аналитическая функция

$$w(z) = u(z) + iv(z)$$

от $z = x + iy$ удовлетворяет этой системе.

Пример 1.4. Система

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{\varrho_0} \partial_x p u = 0 \\ \partial_t p + \varrho_0 c_0^2 \partial_x u = 0 \end{cases} \tag{7}$$

описывает распространение плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде. Здесь u – скорость возмущений среды, p – давление в этой среде, ϱ_0 – плотность покоящейся среды, а c_0 – постоянная, характеризующая ее сжимаемость.

Системы (6) и (7) имеют существенно качественно отличающиеся решения.

Потенциал Ньютона. Уравнение Лапласа

Уравнением Лапласа называется уравнение

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0. \tag{8}$$

С частными решениями, с которыми сталкиваются в ходе проведения эксперимента, бывает трудно работать. Поэтому замечательна сама идея перехода от исследования частного потенциала к более общему объекту как уравнение, решением которого является исследуемый потенциал.

Кеплер, обрабатывая наблюдения Тихо Браге над движением планет, установил следующий три закона:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится солнце.

2. Радиус-вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени.

3. Квадраты времен обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

В дальнейшем Ньютон нашел для этих (достаточно сложных) законов более простое выражение, называемое *законом всемирного тяготения.*

Утверждение 1.1. *Между любыми двумя телами действует сила притяжения, прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.*

С квадратом работать не очень удобно в смысле вычислений. Поэтому вместо силы, притягивающей единичную массу к другому телу, можно рассмотреть *потенциал этой силы*

$$u = \gamma \frac{M}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}. \tag{9}$$

Здесь γ – некоторая постоянная, x_0, y_0, z_0 – координаты притягивающего тела, M – его масса.

Чтобы вычислить компоненты F_x, F_y, F_z силы тяготения, действующей на тело единичной массы, расположенное в точке с координатами x, y, z, надо положить

$$F_x = \partial_x u, \quad F_y = \partial_y u, \quad F_z = \partial_z u. \tag{10}$$

Поле потенциала u полностью определяет векторное поле F_x, F_y, F_z. В случае, если притягивающих тел несколько (тело массы M_i располагается в точке (x_i, y_i, z_i)), то силу можно вычислять аналогично по формулам (11), если взять в качестве потенциала функцию

$$u = \gamma \sum_i \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}.$$

Лаплас предложил пользоваться при изучении тяготения не самой функцией u (9), а тем дифференциальным уравнением, которому эта функция удовлетворяет,

$$\Delta u = 0,$$

решения которого называются *гармоническими функциями.*

Как будет показано позднее, теория гармонических функций обладает замечательными свойствами. Например, в области определения гармонические функции вещественно-аналитичны.

Уравнение

$$\Delta u = 0$$

получается следующим образом. Рассмотрим сначала только одно слагаемое в формуле для потенциала:

$$u_i = \gamma \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}.$$

Вычислим его производные. Для упрощения записи обозначим расстояние между точками (x, y, z) и (x_i, y_i, z_i) через

$$r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}.$$

Заметим, что

$$\partial_x r = \frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} = \frac{x-x_i}{r},$$

и, аналогично,

$$\partial_y r = \frac{y-y_i}{r}, \quad \partial_z r = \frac{z-z_i}{r}.$$

Таким образом, производные

$$\partial_x u_i = -\gamma M_i \frac{x-x_i}{r^3}, \quad \partial_y u_i = -\gamma M_i \frac{y-y_i}{r^3}, \quad \partial_z u_i = -\gamma M_i \frac{z-z_i}{r^3}.$$

Тогда вторые производные имеют вид

$$\partial_x^2 u_i = \gamma M_i \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-x_i)^2}{r^5} \right),$$

$$\partial_y^2 u_i = \gamma M_i \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(y-y_i)^2}{r^5} \right),$$

$$\partial_z^2 u_i = \gamma M_i \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(z-z_i)^2}{r^5} \right).$$

Складывая эти частные производные, получим, что

$$\partial_x^2 u_i + \partial_y^2 u_i + \partial_z^2 u_i = 0.$$

Аддитивность $u = \sum_i u_i$ дает уравнение Лапласа

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0.$$

Итак, можно считать, что дифференциальное уравнение Лапласа моделирует взаимодействие между соседними элементами поля u.

Замечание 1.1. Заметим, что в точках $x = x_i$, $y = y_i$, $z = z_i$ по приведенным выше формулам вычислить производные мы не можем. То есть уравнение Лапласа действует всюду вне точек, в которых сосредоточены сами притягивающие силы.

В дальнейшем нам придется иметь дело не с потенциалом точечных масс, а с полем тяготения, вызванным массой, *распределенной* по некоторому объему.

Остановимся на таком объемно распределении масс с плотностью $\varrho = \varrho(a, b, c)$ в точке $x = a$, $y = b$, $z = c$. Пусть $\varrho(a, b, c) = 0$ для всех точек, лежащих вне некоторого шара, то есть при

$$a^2 + b^2 + c^2 > R^2.$$

Разобъем этот шар на элементарные объемы со сторонами Δa, Δb, Δc, в каждом из котороых сосредоточена масса

$$(a, b, c)\Delta a\Delta b\Delta c.$$

Формально переходя к пределу при неограниченном измельчении шара, получим представление потенциала в виде интеграла

$$u = \int\int\int_{a^2+b^2+c^2<R^2} \frac{\varrho(a, b, c)\, da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

который носит называние *объемного* или *ньютоновского потенциала.* Постоянную γ, начиная с этой формулы, мы опускаем.

Нетрудно (хоть и громоздко) показывается, что если $\varrho(a, b, c)$ имеет непрерывные первые производные, то потенциал u удовлетворяет так называемому *уравнению Пуассона*

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = -4\pi\varrho(x, y, z). \tag{11}$$

Вне притягивающих масс, там, где $\varrho(x, y, z) = 0$, уравнение (11) совпадает с уравнением Лапласа (8).

На следующей лекции познакомимся ближе с теорией гармонических функций, то есть решений уравнения Лапласа (8). Начнем с теоремы о максимуме и минимуме (принцип максимума) и леммы О.А. Олейник о знаке нормальной производной решения в точке максимума на границе.

Лекция 2. Теорема о максимуме и минимуме. Обобщенные функции

Принцип максимума

Обсудим теорему о максимуме и минимуме, она же принцип максимума.

Теорема 2.1. *(Принцип максимума) Гармоническая функция $u(x, y, z)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ и имеющая внутри этой области первые и вторые производные, не может внутри этой области принимать значение большие, чем максимум ее значений на границе области Γ, и меньшие, чем минимум ее значений на Γ.*

Доказательство. Обозначим через m максимум значений $u(x, y, z)$ на Γ. Предположим, что для максимального значения u в $\overline{G}$ имеем

$$u(x_0, y_0, z_0) = M > m,$$

где точка (x_0, y_0, z_0) предполагается лежащей внутри G.

Составим вспомогательную функцию (*барьер*)

$$v = u(x, y, z) + \frac{M-m}{2d^2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right),$$

где d – диаметр области G. Из неравенства

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le d^2$$

следует, что на Γ

$$v \le m + \frac{M-m}{2d^2}d^2 = \frac{1}{2}(M+m) < M.$$

В то же время

$$v(x_0, y_0, z_0) = M.$$

Отсюда следует, что максимум $v(x, y, z)$ внутри G не меньше, чем M. Следовательно, н больше, чем максимум v на Γ. Отсюда следует, что максимум $v(x, y, z)$ достигается внтури G. Как известно, в точке максимума

$$\partial_x v = \partial_y v = \partial_z v = 0,$$

$$\partial_x^2 \le 0, \quad \partial_y v \le 0, \quad \partial_z^2 v \le 0.$$

Следовательно,

$$\Delta v \le 0.$$

Однако

$$\Delta v = \partial_x^2 + \partial_y v \le 0 + \partial_z^2 v =$$

$$\Delta u + \frac{M-m}{2d^2}\Delta\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right] = 6\frac{M-m}{2d^2} > 0.$$

Полученное противоречие показывает абсурдность предположения, что $m > M$. Таким образом, внутри G

$$u(x, y, z) \leq \max_{\Gamma} u.$$

Неравенство внутри G

$$u(x, y, z) \geq \min_{\Gamma} u$$

дказывается так же, но с заменой u на $-u$. □

Замечание 2.1. Доказательство теоремы 2.1 не зависит от размерности.

Следствие. Ньютоновский потенциал – единственное решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\varrho(x, y, z),$$

стремящееся к 0 на бесконечности.

Доказательство. Действительно, если u_1 и u_2 – два решения уравнения Пуассона, стремящихся к 0 на бесконечности, то разность $v = u_1 - u_2$ – гармоническая функция v в шаре радиуса R с центром в некоторой точке. Применив принцип максимума (теорема 2.1) к v в этом шаре, получим, что максимум v находится на границе шара. Устремляя R к бесконечности, получим, что максимум v стремится к 0 на бесконечности. Отсюда следует единственность решения. □

Пробные функции

Для дальнейшего исследования уравнения Лапласа нам нужно расширить наш язык, введя понятия обобщенных функций и обобщенной производной[6].

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Пусть $u \in C(\Omega)$. *Носителем функции* $u(x)$ называется множество $\mathrm{supp} u$ – замыкание в Ω множества $\{x \in \Omega \,|\, u(x) \neq 0\}$.

Введем также некоторые обозначения для функциональных пространств.

Обозначение. Пусть $C_0^k(\Omega)$ – множество функций $u(x) \in C^k(\Omega)$ таких, что $\mathrm{supp} u$ – компакт. Пусть также

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(\Omega).$$

$C_0^\infty(\Omega)$ – множество функций $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ таких, что $\mathrm{supp} u$ – компакт.

Если продолжить функцию $u(x) \in C_0^k(\Omega)$ на $\mathbb{R}^n$, положим $u(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то мы получим функцию из $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, пространство $C_0^k(\Omega)$ можно рассматривать как подпространство $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, расширяющееся вместе с Ω.

Лемма 2.1. *(Корректность определения C_0^∞) Существует функция $\phi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\phi_0(x) \geq 0$ и $\phi_0(0) > 0$.*

[6] В самом начальном их изложении

Доказательство. Положим

$$f(t) = \begin{cases} \exp\{1 - 1/t\}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\phi_0(x) - f(1 - |x|^2).$$

Тогда $\phi_0(x)$ – искомая. □

Определение 2.1. Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ обычно называют *пространством пробных функций* $D(\Omega)$ на Ω, а функции из этого пространства – пробными.

Определим сходимость в пространстве пробных функций следующим образом.

Определение 2.2. Будем говорить, что $\phi_j \to \phi$ в $D(\Omega)$, $j \to \infty$, если $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ $\forall\ j$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, существует $K \subset \Omega$ такой, что $\mathrm{supp}\phi_j \subseteq K$ $\forall\ j$ и

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\phi_j - \phi)| \to 0, \quad j \to +\infty.$$

Теорема 2.2. *Если $f(x), g(x) \in C(\Omega)$ и для любой функции $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int\limits_\Omega g(x)\phi(x)dx, \tag{12}$$

то $f(x) = g(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда $\forall\ \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega h(x)\phi(x)dx = 0.$$

Пусть $h(x^0) \neq 0$, $x^0 \in \Omega$. Без ограничения общности можно считать, что $h(x^0) > 0$. Тогда найдется окрестность U точки x^0 такая, что $h(x) > 0$ для $x \in U$. Так как $h \in C(\Omega)$, выберем окрестность U так, что $h(x) > \frac{1}{2}h(x^0)$ $\forall\ x \in U$. Тогда для ω такой, что $\mathrm{supp}\omega \subset U$,

$$\int h\omega dx > 0.$$

Получаем противоречие. □

Регуляризация

Пусть теперь $u(x), v(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одна из функций $u(x)$, $v(x)$ имеет компактный носитель.

Определение 2.3. *Сверткой функций $u(x)$ и $v(x)$* называется функция

$$(u * v)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что функция $u * v$ непрерывна. Кроме того, выбирая $x - y$ в качестве новой переменной, получим

$$(u * v)(x) = (v * u)(x). \tag{14}$$

Лемма 2.2. *Равенство (13) эквивалентно равенству*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u * v)(x)\phi(x)dx =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y} u(x)v(x)\phi(x+y)dxdy \tag{15}$$

для $\forall\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. С помощью замены переменной нетрудно видеть, что из (13) следует (16). ☐

Следствие. Равенство (14) следует из коммутативности сложения в $\mathbb{R}^n$.

Следствие. Из ассоциативности сложения следует, что

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

Если, помимо наложенного выше требования на компактность носителя, верно $u(x) \in C^1$, $v(x) \in C^0$, то, дифференцируя равенство (13) по параметру, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u * v) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u\right) * v.$$

Отсюда и из (14) следует, что если $u \in C^j$, $v \in C^k$, то $u * v \in C^{j+k}$ и

$$\partial_x^{\alpha+\beta}(u * v) = (\partial_x^\alpha u) * (\partial_x^\beta v), \quad |alpha| \leq j, \quad |\beta| \leq k. \tag{16}$$

Можно доказать, что $u * v \in C^0$, если $u \in C_0^0$, $v \in L_{1.loc}$.

Оказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3. *Если*[7] $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, *то* $u * v \in C^j(\mathbb{R}^n)$ *при* $v \in L_{1.loc}$ *и* $u * v \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n)$ *при* $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.4. *(О регуляризации*[8]*) Пусть* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1.$$

Если $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, *то функция* $u_\phi = u * \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *При этом при* $supp\phi \to \{0\}$ *для* $\forall\ \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| \leq j$ *верно*

$$\sup |\partial_x^\alpha u - \partial_x^\alpha u_\phi| \to 0. \tag{17}$$

Если $v \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *то* $v_\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и* $v_\phi \to v$ *в* L_p *при* $1 \leq p < \infty$.

[7] Напомним, что здесь $C^j(\mathbb{R}^n)$ – непрерывные вместе с производными до порядка j в $\mathbb{R}^n$ функции, $C_0(\mathbb{R}^n)$ – финитные функции, $L_{1.loc}$ – множество локальных в L_1 функций, то есть интегрируемых по модулю на любом компакте.

[8] То есть о свертке с финитной бесконечно дифференцируемой функцией.

Доказательство. В силу (16) и рассмотренной ранее теоремы достаточно доказать (17) при $\alpha = 0$.

Покажем, как устремить носитель функции к $\{0\}$. Пусть $\omega \geq 0$, $\omega \in C_0^\infty(B_0^1)$, $\int \omega dx = 1$. Определим

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

При $\varepsilon \to 0$ носитель ω_ε «схлопывается» к $\{0\}$,

$$\int \omega_\varepsilon dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \in \omega(x/\varepsilon)dx = \int \omega(y)dy = 1,$$

если сделать замену $y = x/\varepsilon$.

Пусть suppϕ лежит в шаре $|y| < \delta$. Тогда

$$|u(x) - u_\phi(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(x-y))\,\phi(y)dy\right| \leq \sup_{|y|\leq\delta}|u(x) - u(x-y)|.$$

Правая часть стремится к нулю вместе с δ равномерно по x, так как функция $u(x)$ равномерно непрерывна как непрерывная на компактном множестве. Отсюда следует (17).

Второе утверждение следует из того, что $\|v_\phi\|_{L_p} \leq \|v\|_{L_p}$ и C_0^0 плотно в L_p. □

Следствие. Если $f, g \in L_{1.loc}(\Omega)$ и для всех пробных функций $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено (12), то $f(x) = g(x)$ почти всюду.

Теорема 2.5. *(Построение срезающей функции) Для любого открытого множества $\Omega \in \mathbb{R}^n$ и для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдется функция $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \phi \leq 1$ и $\phi = 1$ в некоторой окрестности K.*

Доказательство. Так как K – компакт, Ω – открытое множеств, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, x \in K$, $\forall\, y \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ верно неравенство

$$|x - y| \geq 4\varepsilon.$$

Пусть $v(x)$ – характеристическая функция множества

$$K_{2\varepsilon} = \{y \,|\, \exists\, x \in K: \ |x-y| < 2\varepsilon\}.$$

По лемме 2.2 найдется неотрицательная функция $\chi \in C_0^\infty(B)$, где B – единичный шар, такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x)dx = 1.$$

□

Замечание 2.2. Заметим, что

$$|\partial^\alpha\phi| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha\chi_\varepsilon|dx = \varepsilon^{-|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\xi|dx,$$

то есть
$$|\partial^\alpha \phi| \le C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|},$$
где C_α – константа, зависящая только от α и n и не зависящая от выбора множества Ω и компакта K.

Теорема 2.6. *(Разбиение в сумму) Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ – открытые множества в $\mathbb{R}^n$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\cup_{j=1}^k \Omega_j)$.*

Тогда найдутся функции $\phi_(x) \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, \ldots, k$, такие, что
$$\phi = \sum_{j=1}^k \phi_j.$$
При этом если $\phi \ge 0$, то можно выбрать все $\phi_j \ge 0$.

Замечание 2.3. Как мы увидим ниже, для теоремы 2.6 плохим случаем является случай, когда среди областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ найдутся хотя бы две, примыкающие по общему куску границ. Тогда компакт K можно выбрать так, что он принадлежит объединению этих областей плюс границы примыкания. Этот случай исключается условием, что компакт K принадлежит *сумме* открытых областей. Для $k = 2$ K принадлежит одной из областей[9].

Регулярные обобщенные функции

Пусть Ω – открыте подмножество $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционал на $C_0^\infty(\Omega)$ следующего вида:
$$< L, \phi >= L(\phi) = \sum_\alpha \int_\Omega f_\alpha(x) \partial_\phi^(x) dx, \tag{18}$$
где $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, функии $f_\alpha(x) \in C(\Omega)$ заданы, и число слагаемых в сумме конечно.

Определение 2.4. Обобщенная функция называется *регулярной*, если она представлена в виде (18).

Заметим, что если $L(\phi)$ удовлетворяет (18), то
$$|L(\phi)| \le \sum_\alpha \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \phi(x)| \int_\Omega |f_\alpha(x)| dx.$$

Любой функции $v \in C(\Omega)$ можно сопоставить распределение u по правилу
$$u(\phi) = \int_\Omega v(x)\phi(x) dx.$$
В дальнейшем мы будем отождествлять такие распределения с соответствующими непрерывными функциями.

[9] В таком случае K не может включать в себя часть границы пересечения Ω_1 и Ω_2, так как принадлежит открытой области, а значит, принадлежит либо Ω_1, либо Ω_2

Сингулярные обобщенные функции

Пример 2.1. Функция Дирака δ

$$< \delta, \phi >= \phi(0),$$

где $< \cdot, \cdot >$ – действие обобщенной функции на пробную.

Задача 2.1. *Доказать, что функция Дирака не регулярна, то есть, что ее нельзя представить в виде суммы интегралов вида (18).*

Выражения вида (18) возникают при записи уравнений с частными производными в форме интегральных дождеств. Для гладких функций $u, f \in C^\infty(\Omega)$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ для уравнения Пуассона

$$\int_\Omega (-\delta u + f)\phi dx = \int_\Omega (\nabla u \nabla \phi + f\phi) dx = 0, \tag{19}$$

если $u = 0$ на Γ.

Как будет показано позднее, интегральное тождество (19) дает определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона[10] в области Ω.

Обобщенная функция. Секвенциальная непрерывность

Определение 2.5. *Обобщенная функция (распределение) u* на Ω – это линейный функционал на $C_0^\infty(\Omega)$ такой, что для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдутся константы C, k такие, что

$$|u(\phi)| \le C \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{r \in \Omega} |\partial^\alpha(\phi)|, \quad \phi \in C_0^\infty(K). \tag{20}$$

Множество всех распределений на Ω будем обозначать $D'(\Omega)$. Если в (20) можно использовать одно и то же k для всех компактов K, то говорят, что *распределение u имеет порядок не выше k.*

Эквевалентным условию (20) является условие *секвенциальной непрерывности.*

Теорема 2.7. *(Секвенциальная непрерывность) Линейный функционал u является распределение на Ω тогда и только тогда, когда для любой последовательности ϕ_j, сходящейся к нулю в $D(\Omega)$, верно*

$$u(\phi_j) \to 0, \quad j \to +\infty.$$

Доказательство. Необходимость следует очевидным образом из определения сходимости в $D(\Omega)$ и условия (20).

---

[10]

$$\Delta u = f.$$

Докажем достаточность от противного. Пусть найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что (20) не выполнено ни при каких C и k. Возьмем $C = k = j$. Тогда найдется $\phi_j \in C_0^\infty(K)$ такая, что

$$|u(\phi_j)| > j \sum_{|\alpha|\le j} \sum_{\Omega} |\partial^\alpha \phi_j| > j \sum_{\Omega} |\partial^\alpha \phi_j|, \quad |\alpha| \le j.$$

Заметим, что это неравенство не нарушится при замене ϕ_j на $\alpha\phi_j$. Таким образом, можно считать, что $< u, \phi_j >= 1$.

Но тогда

$$|\partial^\alpha \phi_j| \le \frac{1}{j}, \quad j \ge |\alpha|,$$

откуда $\phi_j \to 0$ в $D(\Omega)$ при $j \to +\infty$. Но

$$< u, \phi_j >= 1 \not\to 0, \quad j \to +\infty.$$

Получили противоречие. □

Пример 2.2. Для любого $x^0 \in \Omega$ и для любого мультииндекса α формула

$$< \partial^\alpha \delta(x - x_0), \phi(x) >= \partial^\alpha \phi(x^0)$$

определяет распределение порядка ровно $|\alpha|$.

То, что порядок этого распределения не меньше $|\alpha|$, следует из того, что если взять $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $\psi(0) = 1$, и положить

$$\psi_\delta(x) = (x - x_0)\psi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right),$$

то $u(\phi_\delta) = \alpha!$ и

$$\sup |\partial^\beta \phi_\delta| \le C\delta^{|\alpha|+|\beta|} \to 0, \quad \delta \to 0, \quad |\beta| < |\alpha|.$$

Лекция 3. Операции над обобщенными функциями

Обобщенные функции. Повторение

Через $D(\Omega)$ мы обозначали пространство пробных функций. Напомним определение *сходимости в* $D(\Omega)$.

Определение 3.1. Пусть $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset D(\Omega)$, $\phi^*(x) \in D(\Omega)$. Тогда

$$\phi_k \xrightarrow{D} \phi^*, \quad k \to \infty,$$

если

1. $\exists$ K – компакт такой, что $K \subset \Omega$, $\mathrm{supp}\phi_k \subseteq K$ $\forall$ K и $\mathrm{supp}\phi^* \subseteq K$.
2. $\forall$ α – мультииндекса
$$\partial_x^\alpha \phi_k \rightrightarrows \partial_x^\alpha \phi^*, \quad k \to \infty.$$

Определение 3.2. Линейный функционал

$$u: \ D(\Omega) \to \mathbb{R}$$

называется *обобщенной функцией на* Ω, если $\forall$ K – компакта, $K \subseteq \Omega$, $\exists$ $C_K > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $\forall \phi(x) \in D(\Omega)$

$$|(u,\phi)| \le C_K \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |\partial_x^\alpha \phi| \tag{21}$$

при условии, что $\mathrm{supp}\phi \subseteq K$.

Теорема 3.1. *Пусть*

$$u: \ D(\Omega) \to \mathbb{R}$$

– линейный функционал. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. *u – обобщенная функция (то есть $u \in D'(\Omega)$);*
2. *$\forall$ последовательности $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(\Omega)$, сходящейся к ϕ^* в смысле $D(\Omega)$, верно*
$$(u,\phi_k) \to (u,\phi^*), \quad k \to \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Покажем сначала, что из пункта 1 $\Rightarrow$ пункт 2. Рассмотрим

$$\tilde{\phi}_k = \phi_k - \phi^* \xrightarrow{D} 0.$$

Запись

$$\partial_x^\alpha \phi_k \rightrightarrows \partial_x^\alpha \phi^* \text{ на } K$$

означает, что

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha \phi_k - \partial_x^\alpha \phi^*| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Можно считать, что $\phi^* = 0$. Тогда

$$\sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha \phi_k| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Теперь, по (21) из этого следует, что конечная сумма таких sup стремится к нулю, а значит, (22) верно.

Докажем теперь, что из пункта 2 $\Rightarrow$ пункт 1.

По условию, выполняется (22). Предположим, что в таком случае не выполняется оценка (21). Тогда $\exists$ компакт $K \subseteq \Omega$ такой, что $\forall C > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists$ $\phi_{C,m}(x) \in D(\Omega)$ такая, что

$$\mathrm{supp}\phi_{C,m} \subseteq K,$$
$$|(u, \phi_{C,m})| > C \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |\partial_x^\alpha \phi_{C,m}|.$$

Положим $C = m$ и рассмотрим последовательность функций[11]

$$\psi_m(x) = \frac{\phi_{m,m}(x)}{|(u, \varphi_{m,m})|}.$$

В силу линейности

$$|(u, \psi_m)| = 1 > m \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |\partial_x^\alpha \psi_m|$$

$\forall$ α – фиксированного мультииндекса. Если $m > |\alpha|$, то

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial_x^\alpha \psi_m| < \frac{1}{m}.$$

Таким образом, $\psi_m \overset{D}{\to} 0$, $m \to \infty$. $\square$

Определение 3.3. Если в оценке (21) m можно выбрать независимо от C, K, то обобщенная функция u называется *распределением порядка не выше* m.

Пример 3.1. Рассмотрим линейный функционал

$$\delta_0 : \ D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

такой, что

$$(\delta_0, \phi) = \phi(0).$$

Так как

$$|(\delta_0, \phi)| \le \sup_{x\in\mathrm{supp}\phi} |\phi(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|.$$

Получаем оценку вида (21), а значит, δ_0 – обобщенная функция.

Так как в правой части оценки всего 1 слагаемое (которое соответствует $m = 0$), δ_0 является[12] распределением порядка 0.

[11] Знаменатель не обращается в 0.

[12] Поскольку ниже нуля порядок распределения быть не может, можем говорить, что функция имеет порядок ровно 0.

Вспомним, наконец, операцию *сужения.*

Определение 3.4. Пусть $Y \subseteq \Omega\mathbb{R}^n$, $D(Y) \subset D(\Omega)$ и пусть $u \in D'(\Omega)$. Тогда *сужением* u на Y называется
$$u|_Y = v \in D'(Y)$$
такая, что $\forall\ \phi \in D(Y)$ верно
$$(u, \phi) = (v, \phi).$$

Определение 3.5. *Множеством нулей обобщенной функции* u называется
$$\mathcal{N}(u) = \bigcup_{\mathcal{U}:\, u|_{\mathcal{U}}=0} \mathcal{U},$$
где $\mathcal{U}$ – открытые множества.

Утверждение 3.1. *Если* $\mathcal{N}(u) = \Omega$, *то* $u = 0$.

Доказательство. Рассмотрим $\phi \in D(\Omega)$. Ее носитель $\mathrm{supp}\phi = K \subset \Omega$. Пусть $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$ – покрытие K такое, что $u|_{\mathcal{U}_j} = 0$. $\phi(x)$ представима в виде
$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x), \quad \mathrm{supp}\phi_j(x) \subseteq \mathcal{U}_j.$$
Тогда
$$(u, \phi_j) = \big(u|_{\mathcal{U}_j}, \phi_j\big) = (0, \phi_j) = 0.$$
$\square$

Определение 3.6.
$$\mathrm{supp}u = \Omega \setminus \mathcal{N}(u).$$

Определение 3.7. Обобщенная функция $u \in D'(\Omega)$ называется *регулярной (по Хермандеру)* на $Y \subseteq \Omega$, где Y – открытое, если $\exists\ f(x) \in C^\infty(Y)$ такая, что $\forall \varphi \in D(Y)$
$$(u, \phi) = \int_Y f(x)\phi(x)dx. \tag{23}$$

Операции над обобщенными функциями

Общая схема выглядит примерно так. Сначала смотрим, как операция действует на регулярные обобщенные функции. Расписываем, что при этом происходит с интегралом (23), а потом пытаемся выразить все через $u(x)$ так, чтобы не осталось $f(x)$. То, что получилось в итоге, и называется результатом соответствующей операции над обобщенными функциями.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.2. (Линейная замена независимых переменных) Пусть дана функция из $D'(\mathbb{R})$, то есть обобщенная функция на прямой $\mathbb{R}$. Обсудим, как сделать замену переменной $x \mapsto y = \lambda x + \nu$, $\lambda \neq 0$.

Если $u(x)$ – регулярная на $\mathbb{R}$, то $\exists\ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $u = f$, тогда[13]

$$(u(\lambda x + \nu), \phi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda x + \nu)\phi(x)dx.$$

Если $\lambda > 0$, при замене $y = \lambda x + \nu$ получаем

$$(u(\lambda x + \nu), \phi(x)) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y-\nu}{\lambda}\right)dy,$$

а если $\lambda < 0$, то

$$(u(\lambda x + \nu), \phi(x)) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\infty}^{-\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y-\nu}{\lambda}\right)dy.$$

Объединяя, получим

$$(u(\lambda x + \nu), \phi(x)) = \frac{1}{|\lambda|}\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\varphi\left(\frac{y-\nu}{\lambda}\right)dy = \frac{1}{|\lambda|}(u(y), \varphi\left(\frac{y-\nu}{\lambda}\right). \tag{24}$$

Пример 3.3. Так, например, с помощью полученной формулы (24) можем проверить четность $\delta_0(x)$:

$$(\delta_0(-x), \phi(x)) = \frac{1}{|-1|}(\delta_0(x), \phi(-x)) = \phi(0) = (\delta_0(x), \phi(x)).$$

Пример 3.4. (Дифференцирование обобщенных функций) Если u – регулярная обобщенная функция на $\mathbb{R}$, то $\exists\ f \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $u = f$,

$$(u'(x), \phi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx = f(x)\phi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx = -(u(x), \phi'(x))$$

в силу финитности функции $\phi(x)$.

Итак,

$$(u'(x), \phi(x)) \overset{\text{def}}{=} -(u(x), \phi'(x)). \tag{25}$$

Пример 3.5. Рассмотрим *функцию Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

[13] Здесь $\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in \partial\Omega$.

По формуле (25),

$$(\theta'(x), \phi(x)) = -(\theta(x), \phi'(x)) = -\int\limits_0^{+\infty} \phi'(x)dx =$$

$$\phi(0) - \phi(+\infty) = \phi(0) = (\delta_0, \phi).$$

Пример 3.6. (Домножение на $g \in C^\infty$) Если $u(x)$ – регулярная обобщенная функция на $\mathbb{R}$, то $\exists\ f \in C^\infty$ такая, что $u = f$

$$(g(x)u(x), \phi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\phi(x)dx = (u(x), g(x)\phi(x)).$$

Тогда, например,

$$(g(x)\delta_0(x), \phi(x)) = g(0)\phi(0) = (g(0)\delta_0(x), \phi(x)),$$

то есть

$$g(x)\delta_0(x) = g(0)\delta_0(x).$$

Теорема о дифференцировании кусочно-гладкой функции

Через $\frac{d}{dx}f(x)$ будем обозначать обычную производную $f(x)$, а через $\partial_x f(x)$ – обобщенную производную $f(x)$.

Теорема 3.2. *(О дифференцировании кусочно-гладкой функции) Пусть* $f(x) \in C^1((-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty))$, $\exists\ f(x_0 \pm 0)$. *Тогда*

$$\partial_x f = \frac{d}{dx}f + (f(x_0+0) - f(x_0-0))\,\delta_0(x - x_0).$$

Доказательство. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = (f(x_0+0) - f(x_0-0))\,\theta(x - x_0) + g(x), \tag{26}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $g(x)$ – некоторая непрерывная функция, так как

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = g(x_0 - 0),$$

$$f(x_0+0) = (f(x_0+0) - f(x_0-0)) + g(x_0+0),$$

откуда

$$g(x_0+0) = f(x_0-0).$$

Очевидно, что обобщенная производная $f(x)$ будет равна сумме обобщенных производных правой части (26). Разберемся, как устроена $\partial_x g$.

$$(\partial_x g, \phi) = -(g, \phi'(x)) = -\int\limits_{-\infty}^{x} {}_0 g(x)\phi'(x)dx - \int\limits_{x_0}^{\infty} g(x)\phi'(x)dx =$$

$$= -g\phi|_{-\infty}^{x_0-0} + \int\limits_{-\infty}^{x_0} \left(\frac{d}{dx}g\right)\varphi dx - g\varphi|_{x_0+0}^{\infty} + \int\limits_{x_0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}g\right)\phi dx =$$

$$= \left(\left(\frac{d}{dx}g\right), \phi\right) = \left(\left(\frac{d}{dx}f\right), \phi\right).$$

Теперь, как было показано ранее,

$$((f(x_0+0) - f(x_0-0))\,\theta(x-x_0), \phi) = (f(x_0+0) - f(x_0-0))\,\delta_0(x-x_0).$$

Утверждение теоремы доказано. □

Замечание 3.1. Аналгичным образом можно получить представление для обобщенных производных более высокого порядка. Отличие будет состоять в большем количестве слагаемых.

Пример 3.7. Пусть $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} = u_{xx}$$

в смысле $D'(\mathbb{R}^2)$ и $u(t,x) \in C^2$ вне кривой $x = x^*(t)$.

Представим $u(t,x)$ в виде

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)\theta(x - x^*(t)). \tag{27}$$

Можно считать, что $u_1(t,x) = 0$.

Вычислим обобщенную производную от второго слагаемоего в правой части (27). Получим

$$\partial_t\left(u_2\theta(x - x^*(t))\right) = (\partial_t u_2)\theta(x - x^*(t)) +$$
$$u_2\delta_0(x - x^*(t))(-x^*(t)).$$

Вторая обобщенная производая

$$\partial_t^2\left(u_2\theta(x - x^*(t))\right) = \partial_t^2 u_2\theta(x - x^*(t)) + 2\partial_t u_2\delta_0(x - x^*(t))(-x^*(t)) +$$
$$+ u_2\delta_0(x - x^*(t))(-x^*(t)) + u_2\delta_0'(x - x^*(t))(x^*(t))^2. \tag{28}$$

Аналогично, для обобщенной производной по x получаем

$$\partial_x^2\left(u_2\theta(x - x^*(t))\right) = \partial_x^2 u_2\theta(x - x^*(t)) + 2\partial_x u_2\delta_0(x - x^*(t)) + u_2\delta_0'(x - x^*(t)). \tag{29}$$

По условию (28) и (29) равны. Так как у каждого из них есть кусочно-гладкое слагаемое, слагаемое порядка 0 и слагаемое порядка 1, приравнивать друг к другу для получения коэффицентов надо только слагаемые соответствующего типа. Получим, что

$$u_2(x^*(t))^2 = u_2.$$

Отсюда $x^*(t) = \pm 1$, то есть $x = \pm t + \text{const}$.

Лекция 4. Фундаментальное решение уравнения Лапласа

Операция свертки

Определение 4.1. *Сверткой $u * \phi$ распределения $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и пробной функции $\phi \in C_0^\infty(R^n)$* называется функция

$$(u * \phi)(x) = u(\phi(x - \cdot)),$$

где правая часть обозначает результат применения u к функции $\phi(x-y)$ как функции от y.

Замечание 4.1. Если $u \in C(\mathbb{R}^n)$, то это определение, очевидно, совпадает с определением свертки для гладких функций.

Оказывается, что все свойства свертки сохраняют силу и для свертки распределения с пробной функцией. Более того, справедливы следующий теоремы (приводятся без доказательств).

Теорема 4.1. *Если $u \in D'(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а также*

1. $supp(u * \phi) \subset supp u + supp\phi = \{x + y \mid x \in supp u, \quad y \in supp\phi\}$.
2. $\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi)$.

Теорема 4.2. *Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то*

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi).$$

Теорема 4.3. *Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1.$$

Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, то $u_\phi = u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$u_\phi \xrightarrow{D'} u, \quad supp\phi \to \{0\}.$$

Задача 4.1. *Найти $x\delta_0(x)$.*

Решение. Для $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$< x\delta_0(x), \phi(x) >=< \delta_0(x), x\phi(x) >= 0.$$

Задача 4.2. *Найти $\frac{d}{dx}(|x|)$ в $D'(\mathbb{R})$.*

Доказательство.

$$< \frac{d}{dx}(|x|), \phi >= -\int |x|\phi' dx = \int_{-\infty}^{0} x\phi' dx - \int_{0}^{\infty} x\phi' dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \phi dx + \int_{0}^{\infty} \phi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi dx =< \operatorname{sgn}(x), \phi > .$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \operatorname{sgn}(x).$$

Можно было действовать по-другому.

$$\frac{d}{dx}(|x|) \overset{D'}{=} \operatorname{sgn}(x) + \delta_0 0 = \operatorname{sgn}(x).$$

$\square$

Задача 4.3. *Найти $\delta_0 * \phi$, где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство.

$$\delta_0 * \phi =< \delta_0(y), \phi(x-y) >= \phi(x-0) = \phi(x).$$

$\square$

Фундамнтальное решение уравнения Лапласа

Напомним следующие определения.

Определение 4.2. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – область. Уравнение

$$\Delta u(x) = 0 \tag{30}$$

называется *уравнением Лапласа.* Уравнение

$$\Delta u(x) = f(x) \tag{31}$$

называется *уравнением Пуассона.*

Функция $u(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (30) в Ω, называется *гармонической в области* Ω.

Определение 4.3. Обобщенная функция $E(x)$, удовлетворяющая равенству

$$\Delta E(x) = \delta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

в смысле распределений, называется *фундаментальным решением*[14] *уравнения Лапласа (30) в* $\mathbb{R}^n$.

[14] Если взять свертку $E(x)$ с правой частью (31) $f(x)$, то, действуя на нее оператором Лапласа, получим решение (31).

Начнем с того, что построим фундаментальные решения в случаях $n = 2$ и $n = 3$.

Лемма 4.1. *(Непрерывность оператора дифференцирования) Пусть* $\{u_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ *– последовательность распределений* $u_m(x) \in D'(\Omega)$*. Пусть также* $u_m \overset{D'}{\to} u$, $m \to \infty$*. Тогда для любого* $k = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_k} \overset{D'}{\to} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad m \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ – пробная функция. Тогда

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(\phi) = -u_m\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right).$$

Далее, так как $u_m \overset{D'}{\to} u$, $m \to \infty$, и $\partial\phi/\partial x_k \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то

$$\lim_{m\to\infty} u_m\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) = u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right).$$

Отсюда, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(\phi) = -u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right),$$

получаем требуемое. □

Пусть $n = 2$. Заметим, что последовательность обобщенных функций

$$f_\varrho = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varrho^2}, & |x| < \varrho \\ 0, & |x| > \varrho \end{cases}$$

– дельта-образная последовательность, так как

$$\int f_\varrho dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi\varrho^2}\int\limits_0^{\varrho}\int\limits_0^{2\pi} r dr d\varphi = \frac{1}{\pi\varrho^2} 2\pi \frac{\varrho^2}{2} = 1,$$

удовлетворяет условию

$$f_\varrho(x) \overset{D'}{\to} \delta_0(x), \quad \varrho \to 0+. \tag{32}$$

Построим последовательность обобщенных функций $E_\varrho(x)$ таких, что

$$\Delta E_\varrho = f_\varrho. \tag{33}$$

Тогда, согласно (32), в силу теоремы 2.4 о регуляризации получим, что искомое фундаментальное решение $E(x)$ является пределом последовательности $E_\varrho(x)$ в $D'(\mathbb{R}^2)$ при $\varrho \to 0+$.

Заметим, что в силу симметричности функций $f_\varrho(x)$ разумно искать $E_\varrho(x)$ в виде $E_\varrho(x) = E_\varrho(|x|)$.

Переписывая (33) в полярных координатах, получим

$$E_\varrho'' + \frac{1}{r}E_\varrho' = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varrho^2}, & 0 < r < \varrho \\ 0, & r > \varrho \end{cases} \tag{34}$$

Отсюда

$$(rE_\varrho') = \begin{cases} \frac{r}{\pi\varrho^2}, & 0 < r < \varrho \\ 0, & r > \varrho \end{cases}$$

Далее, дважды интегрируя по r, получаем

$$E_\varrho(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{4\pi\varrho^2} + C_1 \ln r + C_3, & 0 < r < \varrho \\ C_2 \ln r + C_4, & r > \varrho \end{cases}$$

Заметим, что в силу теоремы о дифференцировании кусочно-гладкой функции, функции $E_\varrho(r)$ и $E_\varrho'(r)$ должны быть непрерывны при $\varrho = r$. Кроме того, из (34) следует, что функция $E_\varrho(r)$ определена с точностью до аддитивной постоянной, а значит, можно считать, что $C_4 = 0$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi} + C_1 = C_2,$$

$$\frac{1}{4\pi} + C_1 \ln \varrho + C_3 = C_2 \ln \varrho.$$

Потребовав также, чтобы функция $E_\varrho(r)$ была определена при $r = 0$, получим $C_1 = 0$. Таким образом,

$$E_\varrho(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varrho^2} r^2 + \frac{1}{2\pi} \ln \varrho - \frac{1}{4\pi}, & r < \varrho \\ \frac{1}{2\pi} \ln r, & r > \varrho \end{cases}$$

Отсюда, устремляя $\varrho \to 0+0$, получаем, что при $n = 2$ фундаментальное решение имеет вид

$$E(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r.$$

Пусть теперь $n = 3$. Аналогично (32) имеем

$$f_\varrho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varrho^3}, & r < \varrho \\ 0, & r > \varrho \end{cases}$$

Отсюда аналогично (34) имеем

$$E_\varrho'' + \frac{2}{r}E_\varrho' = f_\varrho.$$

Далее,

$$(r^2 E_\varrho')' = \begin{cases} \frac{3r^2}{4\pi\varrho^3}, & r < \varrho \\ 0, & r > \varrho \end{cases}$$

$$E_\varrho' = \begin{cases} \frac{r}{4\pi\varrho^3} + \frac{C_1}{r^2}, & r < \varrho \\ \frac{C_2}{r^2}, & r > \varrho \end{cases}$$

В итоге

$$E_\varrho = \begin{cases} \frac{r^2}{8\pi\varrho^3} - \frac{C_1}{r} + C_3, & r < \varrho \\ -\frac{C_2}{r} + C_4, & r > \varrho \end{cases}$$

Далее, как и для случая $n = 2$, получаем

$$\frac{1}{4\pi\varrho^2} + \frac{C_1}{\varrho^2} = \frac{C_2}{\varrho^2},$$

$$\frac{1}{8\pi\varrho} - \frac{C_1}{\varrho} + C_3 = -\frac{C_2}{\varrho},$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{4\pi} + C_1 = \frac{1}{4\pi}.$$

Тогда

$$E_\varrho = \begin{cases} \frac{r^2}{8\pi\varrho^3} - \frac{C_1}{2} + {}_4, & r \in (0, \varrho) \\ -\frac{C_2}{2} + {}_3, & r > \varrho \end{cases}$$

Можем не принимать во внимание C_3 и C_4 (считая конкретно здесь их равными 0). По условию непрерывности,

$$\frac{1}{8\pi\varrho} - \frac{C_1}{\varrho} = -\frac{C_2}{\varrho} = -\frac{\left(\frac{1}{4\pi} + C_1\right)}{\varrho},$$

откуда $C_1 = 0$. В итоге получим, что

$$C_2 = \frac{1}{4\pi}, \quad C_3 = -\frac{3}{8\pi}.$$

В итоге,

$$E_\varrho = \begin{cases} \frac{r^2}{8\pi\varrho^3} - \frac{3}{8\pi\varrho}, & r < \varrho \\ -\frac{1}{4\pi r}, & r > \varrho \end{cases}$$

Отсюда при $\varrho \to 0 + 0$ имеем

$$E(r) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Теорема 4.4. *Пусть $E(x)$ – обобщенная функция, являющаяся фундаментальным решением в $\mathbb{R}^n$ для уравнения Лапласа, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Тогда функция $u(x) = (E * f)(x)$ является решением уравнения Пуассона (31) в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из свойств свертки обобщенной и гладкой функции имеем $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Кроме того,

$$\Delta u = \Delta(E * f) = \left((\Delta E) * f\right)(x) =$$

$$= (\delta_0 * f)(x) = \delta_0(f(x - \cdot)) = f(x).$$

□

Замечание 4.2. Вообще говоря, формула $u(x) = (E*f)(x)$ дает решение уравнения (31) и в случае, когда $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Задача 4.4. *Построить фундаментальное решение при $n = 4$.*

Задача 4.5. *Обосновать предельный переход при $\varrho \to 0+0$ при построении фундаментального решения (почему предел именно такой).*

Задача 4.6. *Единственно ли фундаментальное решение? Почему?*

Теорема о среднем для гармонических функций

Обозначим через $\alpha(n)$ объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что тогда $n\alpha(n)$ – площадь поверхности того же шара.

Теорема 4.5. *(О среднем для гармонических функций) Пусть $u(x) \in C^2(\Omega)$ – гармоническая функция. Тогда для любого шара $B(x,r) \subset \Omega$ имеет место равенство*

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} udS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(x,r)} u(y)dy. \tag{35}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$\phi(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)dS_y = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(x+rz)dS_z.$$

Тогда

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(0,1)} < \nabla u(x+rz), z > dS_z = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} < \nabla u(y), \frac{y-x}{r} > dS_y =$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} dS_y = \frac{r}{n} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(x,r)} \Delta u(y)dt = 0.$$

Отюда $\phi(r) = \text{const}$. В то же время

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0+0} \phi(t) = \lim_{t\to 0+0} \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,t)} u(y)dS_y = u(x), \tag{36}$$

так как

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,t)} [u(y)-u(x)] + u(x)dS_y =$$

$$= u(x) + \lim_{t\to 0+0} \frac{Ct^n}{n\alpha(n)x^{n-1}} \int dS_y \le \lim_{t\to 0+0} Ct = 0.$$

Здесь воспользовались тем, что $|u(y)-u(x)| \le C|x-y|$ в силу непрерывности u.

В последнем равенстве (36) использовано то, что $u \in C^2(\Omega)$, а также интегральная теорема о среднем и теорема Остроградского – Гаусса

$$\int\limits_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} dS_y = \int\limits_{B(x,r)} \Delta u(y) dy.$$

Чтобы доказать теорему о среднем для шара, перейдем к сферическим координатам. Получим

$$\int\limits_{B(x,r)} u(y)dy = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) dt = u(x) \int\limits_0^r n\alpha(n) t^{n-1} dt = \alpha(n) r^n \alpha(n).$$

□

Лекция 5. Функция Грина краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Теорема о среднем (продолжение)

Посмотрим теперь, насколько завышено условие гладкости $u(x) \in C^2(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Пусть $u(x) \in C^0(\Omega)$ – обобщенная гармоническая функция, то есть*

$$\Delta u = 0 \text{ в } D'(\Omega).$$

Тогда для любого шара $B(x,r) \subset \Omega$ имеет место равенство

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u dS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(x,r)} u(y)dy.$$

Доказательство. Пусть $u \in C^0(\Omega)$. Перейдем к сглаживанию $u_\varepsilon = u * \omega_\varepsilon$, где

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \int \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx,$$

$$\int \omega(x)dx = 1, \quad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Тогда теорема о среднем применима к u_ε в области $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \quad (x, \partial\Omega) \geq \varepsilon\}$. Отсюда

$$\Delta u_\varepsilon =< \Delta u(y), \omega_\varepsilon(x-y) >= 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Отсюда для любого шара $B(x,r) \subset \Omega_\varepsilon$ имеет место равенство

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u_\varepsilon dS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(x,r)} u_\varepsilon(y)dy.$$

В силу непрерывности u, переходя к пределу $\varepsilon \to 0$ в этом равенстве, получим требуемый результат для u. □

Теорема 5.2. *(Обратная теорема для среднем) Если функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет условию*

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} t dS$$

для каждого шара $B(x,r) \subset \Omega$, то $u(x)$ – гармоническая функция.

Доказательство. Если $\Delta u(x) \neq 0$ для некоторой точки $x \in \Omega$, то в силу непрерывности вторых производных функции u найдется шар $B(x,r) \subset \Omega$ такой, что $\Delta u \neq 0$ в $B(x,r)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\Delta u > 0$ в $B(x,r)$. Но тогда для $\phi(r)$ из теоремы (4.5) имеем

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \frac{\alpha(n)r^n}{\int\limits_{B(x,r)}} \Delta u(y)dy > 0.$$

Получили противоречие. □

Теперь посмотрим, насколько завышено условие гладкости $u(x) \in C^2(\Omega)$ в этом случае.

Теорема 5.3. *Если функция $u(x) \in C^0(\Omega)$ удовлетворяет условию*

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} udS$$

для каждого шара $B(x,r) \subset \Omega$, то $u(x)$ – обобщенная гармоническая функция.

Задача 5.1. *Доказать результат теоремы 5.3.*

Свойства гармонических функций

Будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество.

Теорема 5.4. *(Сильный принцип максимума) Пусть $u(x) \in \left(C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\right)$ – гармоническая функция в Ω. Тогда*

1. *(Принцип максимума)*

$$\max\{u(x) \mid x \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(x) \mid x \in \partial\Omega\}.$$

2. *(Сильный принцип максимума) Если Ω связно и существует точка $x^0 \in \Omega$ такая, что $u(x^0) = \max\{u(x) \mid x \in \overline{\Omega}\}$, то $u(x) = const$ в Ω.*

Доказательство. Заметим, что из пункта 2 следует пункт 1. Докажем утверждение пункт 2. Пусть $x^0 \in \Omega$ и

$$M = u(x^0) = \max\{u(x) \mid x \in \overline{\Omega}\}.$$

Тогда при $0 < r < (x^0, \partial\Omega)$ по теореме о среднем имеем

$$M = u(x^0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(x^0,r)} u(y)dy \leq M.$$

Так как равенство достигается только в том случае, когда $u(x) = M$ в $B(x^0, r)$, то получаем, что $u(y) = M \ \forall \ y \in B(x^0, r)$. Значит, множество $A_M = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ одноврменно открыто и замкнуто в Ω, откуда из связности Ω следует, что $A_M = \Omega$. $\square$

Теорема 5.5. *(Гладкость) Если $u \in C(\Omega)$ такова, что для каждого шара $B(x,r) \subset \Omega$ выполнено (35), то $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\}, & |x| < 1 \\ 0, \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

и константа C выбрана так, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1.$$

Положим

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon).$$

Тогда по теореме 2.4 о регуляризации функция $u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * u$ определена в $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid (x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ и $u_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Покажем, что функции $u(x)$ и $u_\varepsilon(x)$ совпадают в Ω_ε.

Пусть $x \in \Omega_\varepsilon$, тогда

$$u_\varepsilon = \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \varepsilon^{-n}\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy =$$

$$= \varepsilon^{-n}\int\limits_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)dS_y\right) =$$

$$= \varepsilon^{-n}u(x)\int\limits_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)n\alpha(n)r^{n-1}dr = u(x)\int\limits_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)dy = u(x).$$

Таким образом, для достаточно малого произвольного $\varepsilon > 0$ функции $u(x)$ и $u_\varepsilon(x)$ совпадают в Ω_ε. Отсюда $u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. $\square$

Неравенство Харнака. Теорема Лиувилля

Пусть $u(x)$ – гармоническая неотрицательная функция в шаре $B(0,R)$, $y \in B(0,R)$ – фиксированная точка. Тогда в силу теоремы о среднем по шару имеем

$$u(0) = \frac{1}{\alpha(n)R^n}\int\limits_{B(0,R)} u(x)dx \geq \frac{1}{\alpha(n)R^n}\int\limits_{B(y,R-|y|)} u(x)dx =$$

$$= \frac{(R-|y|)^n}{R^n}\frac{1}{\alpha(n)(R-|y|)^n}\int\limits_{B(y,R-|y|)} u(x)dx = \frac{(R-|y|)^n}{R^n}u(y).$$

Отсюда

$$u(0) \geq \frac{(R-|y|)^n}{R^n}u(y). \tag{37}$$

Заметим, что если $|y| < R/2$, то $0 \in B(y, R-|y|)$, и можно применить ту же конструкцию к шару $B(y, R-|y|)$. В результате получим

$$u(y) \geq \frac{(R-2|y|)^n}{(R-|y|)^n}u(0). \tag{38}$$

Объединяя неравенства (37) и (38), получим следующую теорему.

Теорема 5.6. *(Неравенство Харнака без точных констант) Пусть $u(x)$ – неотрицательная гармоническая функция в шаре $B(0,R)$, $y \in B(0,R/2)$. Тогда*

$$\frac{(R-2|y|)^n}{(R-|y|)^n}u(0) \le u(y) \le \frac{R^n}{(R-|y|)^n}u(0). \tag{39}$$

Для гармонических функций справедливо также следующее утверждение.

Теорема 5.7. *(Теорема Лиувилля) Пусть*

$$u: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

– гармоническая и ограниченная функция. Тогда $u(x) = const$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно устремить $R \to \infty$ в (39). □

Функция Грина

Оказывается, что константы в неравенстве (39) можно уточнить, но для этого придется использовать более тонкий инструмент, чем теорему о среднем – формулу Пуассона для шара. Прежде, чем перейти к ней, обсудим функцию Грина.

Определение 5.1. Функция

$$G: \ \Omega \times \Omega \to \mathbb{R},$$

гладка при $x \ne y$, называется *функцией Грина* для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если

$$\begin{cases} \Delta_x G(x,y) = \delta(x-y), \quad (x,y) \in \Omega\times\Omega \\ G(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0 \\ G(x,y) \to 0, \quad |x| \to \infty \end{cases}$$

Последнее условие требуется в случае, если область Ω неограниченна.

Заметим, что требование $G(x,y) \to 0$, $|x| \to \infty$ обеспечивает единственность функции Грина для неограниченных областей. Кроме того, нетрудно видеть, что функция Грина – фундаментальное решение, удовлетворяющее краевым условиям и имеющее требуемое асимптотическое поведение при $|x| \to \infty$. Из этого факта сразу вытекает следующая теорема.

Теорема 5.8. *Пусть Ω – ограниченная область, $f(x) \in C^2(\Omega)$. Решение задачи Дерхиле*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y)dy.$$

Замечание 5.1. В следующей лекции будут приведены примеры построения функции Грина. В случае областей с простой геометрией функцию Грина можно построить с помощью *метода отраженных зарядов.*

Построение функции Грина методом отраженных зарядов

Пример 5.1. Построим функцию Грина для верхней полуплоскости. Выберем в верхней полуплоскости $z > 0$ точку y и симметричную ей относительно $x0y$ точку y^*. Функция Грина

$$G(x, y) = E(x - y) - E(x - y^*).$$

В верхней полуплоскости

$$\Delta E(x - y^*) = \delta(x - y^*) = 0.$$

Тогда и $E(x - y) = 0$. Следовательно,

$$G(x, y)|_{z=0} = 0.$$

Таким образом, мы решили задачу для верхней полуплоскости

$$\Delta u = f, \quad z \geq 0u|_{z=0} = 0$$

Решение имеет вид

$$u = \int\limits_{z \geq 0} G(x, y) f(y) dy.$$

Пример 5.2. Построим функцию Грина для задачи в четверти пространства.

Заметим, что E – фундаментальное решение – существует. Выберем в четверти пространства $x > 0, y > 0, z > 0$ точку y. Положим y_1^* – симметричная y относительно $0z$, y_2^* – симметричная y_1^* относительно $x0y$ и y_3^* – симметричная y относительно $x0y$. Функция Грина

$$G = E(x - y) - E(x - y_1^*) - \left(E(x - y_3^*) - E(x - y_2^*)\right).$$

Справедливо

$$\Delta E(x - y) = \delta(x - y) = \delta_y(x),$$
$$\Delta E(x - y_1^*) = \delta(x - y_1^*).$$

Заметим, что

$$\Delta_x G = \delta_y(x)$$

в первой четверти, а

$$\Delta E(x - y_1^*) = \delta_{y^*}(x) = 0$$

в первой четверти. Отсюда

$$\Delta_x G = \delta_y(x).$$

Формула Пуассона для шара при $n = 3$

Вспомним формулу Остроградского для векторного поля $\mathbf{a}(x)$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей:

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{a})(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{a}(x) \cdot \nu(x)dS_x,$$

где $\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in \partial\Omega$, а $\mathbf{a}(x) \cdot \nu(x)$ – склалярное произведение. Подставив $\mathbf{a}(x) = u(x)\nabla v(x) - v(x)\nabla u(x)$, где $u(x), v(x) \in C^2(C|(\Omega))$, получаем отсюда

$$\int\limits_{\Omega} (u(x)\delta v(x) - v(x)\delta u(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dS_x. \tag{40}$$

Пусть $u(x)$ – решение краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega u|_{\partial\Omega} = \phi(x) \tag{41}$$

Пусть также $G(x, y)$ – функция Грина краевй задачи Дирихле для уравнения Пуассона (41) в Ω. Подставляя $u(x)$ и $v(x) = G(x, by)$ в (40), получаем явную форму для решения краевой задачи

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \phi(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, y)dS_x. \tag{42}$$

Вернемся к случаю размерности 3 и получим при помощи изложенной выше техники явную формулу для решения краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad x \in B(0, R)u|_{|x|=R} = \phi(x) \tag{43}$$

В следующей лекции будет показано, что функция Грина краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $B(0, R)$ имеет вид

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y| \cdot |x - y^*|} \right),$$

где y^* – точка, которая получается из y инверсией относительно сферы $\partial B(0, R)$.

При этом так как $\Omega = B(0, R)$, то

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_x} = \sum_j \frac{x_j}{R}\frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

Для любого фиксированного вектора $a \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x-a|} \right) = -\frac{x_j - a_j}{|x-a|^3}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\sum_j \left(\frac{x_j(x_j-y_j)}{R|x-y|^3} - \frac{x_j(x_j-y_j^*)}{|y|\cdot|x-y^*|^3}\right). \tag{44}$$

Заметим теперь, что если $|z|=1$, то

$$|w|^2\left|z-\frac{w}{|w|}\right|^2 = |w|^2\left(|z|^2 - 2\frac{z\cdot w}{|w|^2} + \frac{|w|^2}{|w|^4}\right) =$$

$$= |w|^2\left(1-2\frac{z\cdot w}{|w|^2}+\frac{1}{|w|^2}\right) = |w|^2 - 2z\cdot w + 1 = |w-z|^2.$$

Полагая в (44) $x = Rz$, $y = Rw$ и пользуясь этим равенством и тем, что

$$y^* = \frac{R^2 y}{|y|^2} = \frac{Rw}{|w|^2},$$

получаем

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\sum_j \left(\frac{R^2 z_j(z_j-\omega_j)}{R^4|z-w|^3} - \frac{R^2 z_j\left(z_j - \frac{\omega_j}{|w|^2}\right)}{R^4|w|\cdot\left|z-\frac{w}{|w|^2}\right|^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\sum_j \frac{z_j^2 - z_j\omega_j - z_j^2|w|^2 + z_j\omega_j}{|z-w|^3},$$

откуда в переменных x, y имеем

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y) = \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^3}.$$

Подставляя это равенство в формулу (42), получаем *формулу Пуассона решения краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре*:

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^3}\phi(x)dS_x.$$

Замечание 5.2. Аналогичным образом можно показать, что в случае произвольной размерности n решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x\in B(0,R)\subset\mathbb{R}^n \\ u|_{|x|=R} = \phi(x) \end{cases}$$

задается формулой Пуассона

$$u(y) = \frac{1}{n\alpha(n)R}\int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^n}\phi(x)dS_x.$$

Неравенство Харнака с точными константами

Уточним теперь константы в (39). Для этого необходимо прост оценить величину $1/|x-y|^n$ сверху и снизу величинами, не зависящими от x:

$$\frac{1}{(R+|y|)^n} < \frac{1}{|x-y|^n} < \frac{1}{(R-|y|)^n}.$$

Поэтому для неотрицательной гармонической функции в замкнутом заре $C|(B(0,R))$ верно

$$\frac{1}{n\alpha(n)R}\frac{R^2-|y|^2}{(R+|y|)^n}\int\limits_{\partial B(0,R)} u(x)dS_x \leq u(y) \leq \frac{1}{n\alpha(n)R}\frac{R^2-|y|^2}{(R-|y|)^n}\int\limits_{\partial B(0,R)} u(x)dS_x,$$

так как по теореме о среднем для гармонической функции верно

$$\int\limits_{\partial B(0,R)} u(x)dS_x = n\alpha(n)R^{n-1}u(0).$$

Лекция 6. Задача Неймана для уравнения Лапласа. Принцип Дирихле

Представление функций в виде суммы трех потенциалов

Пусть $\Omega subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Из формулы Остроградского

$$\int\limits_{\partial\Omega} < \overrightarrow{a}, \nu > dS_z = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{a}\, dx,$$

полагая $\overrightarrow{a} = u\nabla v - v\nabla u$, с помощью равенства

$$\operatorname{div}(u\nabla v) =< \nabla u, \nabla v > +u\nabla v$$

получаем *формулу Грина*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) dS_x = \int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx. \tag{45}$$

Пусть теперь $y \in \Omega$ – фиксированная точка, $v_*(x)$ – решение задачи

$$\Delta v_*(x) = \delta(x-y),$$

то есть $v_*(x) = E(x-y)$, где $E(x)$ – фундаментальное решение в $\mathbb{R}^n$. Подставляя формально $v_*(x)$ в формулу Грина (45), получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v_*(x)}{\partial\nu_x} - v_*(x)\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) dS_x = \int\limits_{\Omega} (u\Delta_x v_*(x) - v_*(x)\Delta u)dx.$$

Так как

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu} + \int\limits_{\Omega} v\Delta u,$$
$$v = E(x\cdot y),$$

то $u\Delta v = u(y)$.

Отсюда получаем

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v_*(x)}{\partial\nu_x} dS_x - \int\limits_{\partial\Omega} v_*(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} dS_x + \int\limits_{\Omega} v_*(x)\Delta u(x)dx.$$

Задача Неймана для уравнения Лапласа

Рассмотрим теперь задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases} \tag{46}$$

При этом предполагается, что $g(x) \in C(\partial\Omega)$. Заметим, что задача Неймана разрешима не для всех $g(x)(\partial\Omega)$. Действительно, если $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – решение задачи (46), то

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)dS_x = \int\limits_{\partial\Omega} g(x)dS_x,$$

то есть для разрешимости задачи (46) необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\int\limits_{\partial\Omega} g(x)dS_x = 0.$$

Пусть это условие выполнено. Оказывается, имеет место единственность решения задачи Неймана с точностью до аддитивной постоянной.

Теорема 6.1. *Если $u_1(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и $u_2(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – два решения задачи (46), то найдется константа $C \in \mathbb{R}$ такая, что $u_1(x) - u_2(x) = C$, и наоборот.*

Доказательство. Положим $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Тогда $v(x)$ – решение задачи Неймана (46) для случая $g(x) = 0$.

Положим $\overrightarrow{a} = v\nabla v$. Тогда из формулы Остроградского имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} v(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}dS_x = \int\limits_{\Omega} (|\nabla v(x)|^2 + v(x)\Delta v(x))dx,$$

и в силу того, что функция $v(x)$ – решение задачи (46) с $g(x) = 0$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = 0,$$

откуда $\nabla v(x) = 0$ для $\forall\, x \in \Omega$, то есть $v(x) = \text{const}$.

Доказательство в обратую сторону производится непосредственной подстановкой. □

Существование функции Грина для задачи Неймана

Выясним, существует ли функция Грина для задачи Неймана вида

$$G(x, y) = E(x - y) + \omega(x, y),$$

где $\omega(x, y)$ – гладкое решение задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0, \quad x, y \in \Omega \\ \partial_\nu \omega = -\partial_\nu E, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega, \end{cases}$$

∂_ν – нормальная производная.

Для этого покажем, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu} dS = 0.$$

Возьмем $x \in \Omega$ – особую точку рассматриваемой функции и окружим ее шариком $B(x, \varepsilon)$. Будем рассматривать область $\Omega \backslash B(x, \varepsilon)$. Внутри такой области $E = 1/|x-y|$ – гармоническая функция, $\Delta E = 0$. Тогда по теореме Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu} dS - \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \nu} = \int_{\Omega \backslash B(x,\varepsilon)} \Delta E = 0.$$

Отсюда следует, что потоки равны. Вычислим

$$\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \nu} = \int\limits_0^d r \frac{\partial E}{\partial r} \int\limits_{\partial S(x,r)} 1 ds = |\partial S(1,1)| \int\limits_0^\varepsilon r^2 \frac{\partial E}{\partial r} dr = -\frac{1}{4\pi} |S(1,1)| \int\limits_0^\varepsilon dr = \varepsilon,$$

так как $E = 1/(4\pi r)$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое утверждение.

Принцип Дирихле для гладких функций

Пусть $g(x) \in C(\partial\Omega)$, $f(x) \in C(\Omega)$. Обозначим

$$I[\omega] = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla \omega|^2 + \omega f \right) dx$$

– *функционал энергии*, где $\omega(x)$ принадлежит допустимому множеству

$$\mathcal{A} = \{\omega \in C^2(\overline{\Omega}) \mid \omega|_{\partial\Omega} = g(x)\}.$$

Теорема 6.2. *(Принцип Дирихле) Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение краевой задачи*

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \tag{47}$$

Тогда

$$I[u] = \{I(\omega) \mid \omega \in \mathcal{A}\}. \tag{48}$$

Обратно, если $u \in \mathcal{A}$ удовлетворяет (48), то $u(x)$ – решение (47).

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\omega \in \mathcal{A}$. Тогда для функции $u(x)$ – решения (48) имеем

$$0 = \int\limits_\Omega (\Delta u(x) - f(x)) (u(x) - \omega(x)) dx,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$0 = \int\limits_\Omega (< -\nabla u, \nabla(u-\omega) > (x) - f(x)(u(x) - \omega(x)) dx,$$

и далее

$$\int\limits_{\Omega} = \big(|\nabla u|^2 + u(x)f(x)\big)\, dx = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla\omega > (x) + f(x)\omega(x))\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla\omega|^2 + f(x)\omega(x)\right) dx.$$

При этом при переходе к неравенству были использованы соотношения

$$| < \nabla u, \nabla\omega > | \leq |\nabla u||\nabla\omega| \leq \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla\omega|^2}{2}.$$

Отсюда $I[u] \leq I[\omega]$ для всех $\omega \in \mathcal{A}$. Так как $u \in \mathcal{A}$, отсюда следует (48).

Шаг 2. Пусть теперь выполнено соотношение (48). Зафиксируем $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и положим

$$I(\tau) = I(u + \tau v], \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Так как для любого $\tau \in \mathbb{R}$ верно $u + \tau v \in \mathcal{A}$, то функция $I(\tau)$ достигает минимума при $\tau = 0$. Значит, $\frac{d}{d\tau}I(0) = 0$, если производная существует.

Однако

$$I(\tau) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u + \tau\nabla v|^2 + (i + \tau v)(x)f(x)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tau < \nabla u, \nabla v > + \frac{1}{2}\tau^2|\nabla v|^2 + (u + \tau v)f\right) dx.$$

Отсюда

$$0 = l'(0) = \int\limits_{\Omega} (< \nabla u, \nabla v > + fv)\, dx.$$

Выражение

$$\int\limits_{\Omega} (< \nabla u, \nabla v > + fv)\, dx = 0$$

называется *интегральным тождеством.*

Интегрируя по частям, для гладкой u получим

$$0 = \int\limits_{\Omega} (-\Delta u + f) v dx,$$

и это равенство справедливо для любой $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда получаем, что $\Delta u = f$ в Ω, а значит, $u(x)$ – решение (47). Теорема доказана. $\square$

Принцип Дирихле для функций из L_2

Запишем снова наш функционал

$$I(\omega) = \int \frac{1}{2}|\nabla\omega|^2 + f\omega. \tag{49}$$

Рассмотрим *класс соболевских функций* $H^1(\omega)$ – пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|\omega\|^2 = \int\limits_\Omega |\nabla\omega|^2 dx.$$

Утверждение 6.1. *(Неравенство Фридрихса) Если $g \in H^1$, то $g \in L_2$ и*

$$\int |g|^2 dx \leq C \int |\nabla g|^2 dx$$

в ограниченных областях.

Покажем, что функционал (49) имеет смысл на H^1.

Рассмотрим

$$\min_{\omega\in H^1} I(\omega) = \min_{\omega\in H^1} \in |\nabla\omega|^2 dx.$$

Пусть $\omega^* \in H^1$ – решение вариационной задачи, записанной выше. Тогда

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla\omega^*\nabla u - fu\right).$$

ω^* называется решением обобщенной задачи

$$\nabla\omega^* = f \text{ в } D', \quad \omega^*|_{\partial\Omega} = 0,$$

$\forall\ u \in D(\Omega)$.

Чтобы $I(\omega) \in H^1$, требуется, чтобы $f \in L_2$.

Таким образом, мы расширили понятие функции в L_2, но решение осталось корректным.

Лекция 7. Метод Фурье. Примеры

Уравнение гиперболического типа без источника в квадрате

В этой лекции мы опишем идею так называемого *метода Фурье*. Метод, к сожалению, не универсальный, применимый только к линейным уравнениям некоторого специального вида, позволяющий построить для этих уравнений достаточно богатый класс частных решений. Линейные комбинации этих частных решений применяются для того, чтобы аппроксимировать более или менее общее решение.

Начнем с уравнения Лапласа в круге радиуса R. В полярных координатах уравнение Лапласа записывается в виде

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial\varphi^2 u = 0.$$

Рассмотрим в квадрате $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le \pi$ волновое уравнение

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad t \in [0,\pi], \quad x \in [0,\pi] \\ u|_{x=0} - u_{x=\pi} = 0 \\ u_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

Заметим, что такая задача является корректной, то есть существует единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.

Будем искать частные решения в виде

$$u_J = T_J(t)X_J(x) \tag{50}$$

и таких частных решений достаточно много, то есть, например, для всех $f \in L_2[0,\pi]$

$$f = \sum_J C_J X_J,$$

для всех $g(t,x)$

$$g(t,x) = \sum_J K_J(t)X_J(x).$$

Подставляя (50) в волновое уравнение, получим

$$-\lambda_J = \frac{T_J''}{T_J} = \frac{X_J''}{X_J},$$

откуда, с одной стороны, получаем задачу Штурма – Лиувилля

$$X_J'' + \lambda_J = 0,$$

причем

$$X_J(0) = X_J(\pi) = 0.$$

Заметим, что, если $\lambda_J = 0$, то

$$X_J'' = 0 \;\Rightarrow\; X_J = aX_J + b,$$

откуда с учетом граничных условий $X_J \equiv 0$.

Пусть теперь $\lambda_J < 0$. Тогда

$$X_J = a_1 e^{\sqrt{-\lambda_J}x} + a_2 e^{-\sqrt{-\lambda_J}x}.$$

Из начальных условий $a_2 = -a_1$. Тогда

$$X_J = a_2\left(e^{\sqrt{|\lambda_J|}x} - e^{-\sqrt{|\lambda_J|}x}\right).$$

Используем граничное условие $x = \pi$. Получим

$$e^{\sqrt{|\lambda_J|}\pi} = e^{-\sqrt{|\lambda_J|}\pi} \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda_J = 0.$$

Снова получаем тривиальное решение. Значит, в нашей задаче $\lambda_J > 0$,

$$X_J = a_1 \sin\sqrt{\lambda_J}x.$$

Положим $a_1 = 1$, так как он не является существенным. Тогда граничное условие $x = \pi$ дает, что

$$\sin(\sqrt{\lambda_J}\pi) = 0,$$

откуда $\lambda_J = k^2$.

Перейдем теперь ко второму уравнени. Пусть $\lambda_J = J^2$, тогда

$$T_{''+J^2T_J=0 \quad T_J(0)=0.}$$

Тогда

$$u_t|_{t=0} = \sum_{J=1}^{\infty} T_J(0)\sin_{Jx} = \sin x,$$

и, получается,

$$T_J'(0) = \begin{cases} 1, & J = 1 \\ 0, & J \neq 1 \end{cases}$$

Решим, наконец,

$$\begin{cases} T_1'' + T_1 = 0 \\ T_1(0) = 0 \\ T_1'(0) = 1 \end{cases}$$

Значит, $T_1 = \sin t$.

Итак, решением исходного волнового уравнения является

$$u(x,t) = \sin t \sin x.$$

Уравнение Лапласа в квадрате

Рассмотрим теперь задачу немного похуже.
Пусть $x, t \in [0, \pi]$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{t=\pi} = \sin x \end{cases}$$

Условие Неймана не выполнено, так как

$$\int\limits_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = 2.$$

Будем искать частные решения в виде

$$u_J = T_J(t) X_J(x).$$

Аналогично предыдущему случаю,

$$\frac{T_J''(t)}{T_J(t)} = -\frac{X_J''(x)}{X_J(x)} = \lambda_J.$$

Отсюда, во-первых,

$$\begin{cases} X_J''(x) + \lambda_J X_J = 0, \\ X_J'(0) = X_J'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что $\lambda_J \geq 0$. При $\lambda_J = 0$

$$X_0'' = 0, \quad X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0.$$

Значит, $X_0 = ax + b$, например, $X_0 = 1$. При $\lambda_J > 0$

$$X_J = \cos Jx.$$

Значит, решение имеет вид

$$u = T_0(t) + \sum_{J=1}^{\infty} T_J(t) \cos(Jx).$$

Теперь,

$$\begin{cases} T_0'' = 0 \\ T_0'(0) = 0 \\ T_0'(\pi = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что задача неразрешима.

Неклассическое решение для уравнения Лапласа

Рассмотрим задачу в $(x, y) = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{x=0} = y \\ u|_{y=0} = 0 \\ u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{y=\pi} = \pi - x. \end{cases}$$

Представим

$$u = v + w,$$

где

$$w = y \cdot \cos \frac{1}{2}.$$

Относительно w задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta v = -\Delta w = \frac{y}{4} \cos \frac{x}{2} \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{y=0} = 0 \\ v|_{x=\pi} = 0 \\ v|_{y=\pi} = \pi \cos \frac{x}{2} \end{cases}$$

Будем искать решение в виде

$$v = \sum V(y) X(x).$$

Здесь будет верно, что $\lambda_J = J^2$,

$$X_J(x) = \sin Jx.$$

$$v = \sum_{J=1}^{\infty} Y_J(y) \sin Jx.$$

Воспользуемся тем, что

$$\cos \frac{x}{2} = \sum_{J}^{\infty} C_J \sin Jx.$$

$$\sum_{J=1}^{\infty} \left(Y_J'' - J^2 Y_J \right) \sin Jx = \frac{y}{4} \sum_{J=1}^{\infty} C_J \sin Jx.$$

Так как записанный ряд является рядом Фурье, верно, что

$$Y_J'' - J^2 Y_J = \frac{y}{4} C_J.$$

Из условий

$$Y_J(0) = 0, \quad Y_J(\pi) = \mu_J.$$

Запишем вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} y_J'' - J^2 y_J = \frac{y}{4} C_J \\ Y_J(0) = 0 \\ Y_J(\pi) = \mu_J. \end{cases}$$

Решение такой задачи имеет вид

$$Y_J = a_1 \left(e^{Jy} - e^{-Jy} \right),$$

откуда

$$Y_J = 2a_1 \operatorname{sh}(Jy).$$

Из условия $Y_J(0) = 0$

$$a_1 = \frac{\mu_J}{2 \operatorname{sh}(J\pi)}.$$

Итак, наконец можем записать решение исходной задачи:

$$u = y \cos \frac{x}{2} + \sum_{J=1}^{\infty} \frac{\mu_J}{2 \operatorname{sh}(J\pi)} \operatorname{sh}(Jy) \sin(Jx).$$

Лекция 8. Волновое уравнение

Сферические средние для задачи Коши волнового уравнения

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{51}$$

Ранее в курсе уже упоминались *сферические средние*

$$V(t,r) \equiv V(t,r;x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(t,y)dS_y = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(t,x+rz)dS_z.$$

Заметим, что

$$\lim_{r\to 0+0} V(t,r;x) = u(t,x).$$

Вычислим

$$V_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(0,1)} z\cdot\nabla u(r,x+rz)dS_z =$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \frac{y-x}{r}\cdot\nabla u(t,y)dS_y,$$

если сделать обратную замену $x = y - rz$. Наконец,

$$V_r = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{B(x,r)} \Delta u(t,y)dy.$$

Прежде, чем вычислить U_{rr}, запишем в другом виде

$$\int\limits_{B(x,r)} f(y)dy = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x,\varrho)} f(y)dS_y \right) d\varrho.$$

Производная по r такого выражения будет равна подынтегральному выражению при $\varrho = r$.

Вернемся к вычислению V_{rr}.

$$V_{rr} = \frac{1-n}{r}V_r + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \Delta u(t,y)dS_y.$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$U_{tt} = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t,y)dS_y.$$

Тогда

$$U_{tt} = U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r.$$

Вывод формулы Кирхгофа

Из (51) получается

$$V_{tt} = V_{rr} + \frac{n-1}{r} V_r V|_{t=0} = \frac{n\alpha(n)r^{n-1}}{\int} \underset{\partial B(x,r)}{} \phi(y) dS_y =$$

$$= \Phi(r) V_t|_{t=0} = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \psi(y) dS_y = \Psi(r) \tag{52}$$

Заметим, что $V(t,r)$ ограничено при $r \to 0+0$.

Рассмотрим случай, когда в (52) $n = 3$. Перейдем к

$$\tilde{V} = rV, \quad \tilde{\Phi} = r\Phi, \quad \tilde{\Psi} = r\Psi.$$

Тогда можно корректно сформулировать смешанную задачу

$$\begin{cases} \tilde{V}_{tt} = \tilde{V}_{rr}, \quad t > 0, \quad r > 0 \\ \tilde{V}|_{t=0} = \tilde{\Phi}(r) \\ \tilde{V}_t|_{t=0} = \tilde{\Psi}(r) \\ \tilde{V}|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

Хотим найти

$$u(t,x) = \lim_{r \to 0+0} V(t,r;x) = \lim_{r \to 0+0} \frac{\tilde{V}(t,r)}{r}.$$

Положим *нечетное продолжение*

$$\Phi^*(r) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(r), \quad r \geq 0 \\ -\tilde{\Phi}(-r), \quad r < 0 \end{cases}$$

Запишем *формулу Даламбера*

$$\tilde{V}(t,r) = \frac{\Phi^*(r-t) + \Phi^*(r+t)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{r-t}^{r+t} \Psi^*(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\tilde{\Phi}(t+r) - \tilde{\Phi}(t-r)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{t-r}^{t+r} \tilde{\Psi}(\tau) d\tau.$$

Отсюда

$$u(t,x) = \tilde{\Phi}'(t) + \tilde{\Psi}(t),$$

откуда получаем *формулу Кирхгофа*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{\partial B(x,t)} \phi(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{\partial B(x,t)} \psi(y) dS_y. \tag{53}$$

Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа

Хотелось бы теперь получить формулу в размерности $n = 2$. Рассмотрим задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}u|_{t=0} = \psi(x_1, x_2)u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \tag{54}$$

По аналогии с формулой Кирхгофа (53)

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{\partial B((x_1,x_2,0),t)} \phi(y_1, y_2)dS_y\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{\partial B((x_1,x_2,0),t)} \psi(y_1, y_2)dS_y$$

Распишем

$$\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{\partial B((x_1,x_2,0),t)} \psi(y_1, y_2)dS_y = \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{\substack{y_3\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2} \\ (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<t^2}} \psi(y_1, y_2)dS_y,$$

$$dS_y = \sqrt{1 + |\nabla y_3|^2}dy_1dy_2 = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2(x_1}}dy_1dy_2,$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial y_j} = \frac{-2(x_j - y_j)}{2\sqrt{t^2 - (x_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}$$

Тогда получим

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B(x,t)} \frac{\phi(y)dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{B(x,t)} \frac{\psi(y)dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}}$$

– *формулу Пуассона.*

Доказательство единственности классического решения

Утверждение 8.1. *Если решение классической задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{55}$$

существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что решение задачи существует.

Зафиксируем[15] $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 > 0$. Рассмотрим интеграл

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(x^0, t_0 - t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx$$

– *полную механическую энергию.* Найдем

$$\frac{d}{dt} e(t) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x^0, t_0 - t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS_x + \int\limits_{B(x^0, t_0 - t)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx. \qquad (56)$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{a} \cdot \nu dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{a} \, dx.$$

Если $\overrightarrow{a} = u_t \nabla u$, то

$$\operatorname{div} \overrightarrow{a} = \sum \partial_{x_j} (u_t \partial_{x_j} u) = \nabla u_t \cdot \nabla u + u_t \Delta u.$$

Тогда, поменяв местами интегралы в (56) и применив записанные выше соображения, получим

$$\frac{d}{dt} e(t) = \int\limits_{\partial B(x^0, t_0 - t)} u_t \nabla u \cdot \nu_x dS_x - \int\limits_{B(x^0, t_0 - t)} u_t \Delta u dx +$$

$$+ \int\limits_{B(x^0, t_0 - t)} u_t u_{tt} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x^0, t_0 - t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS_x.$$

Оценим функцию под интегралом по границе:

$$u_t \nabla u \cdot \nu_x - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \leq -\frac{(u_t - |\nabla u|)^2}{2},$$

так как

$$|u_t| \cdot |\nabla u \cdot \nu_x| \leq |u_t| |\nabla u|.$$

Заметим, что $e(t) \geq 0$, $\dot{e}(t) \leq 0$.

Вернемся к доказательству единственности решения (55). Пусть u^1, u^2 – два классических решения (55). Значит, $w = u^1 - u^2$ удовлетворяет задаче (55) с $\phi = \psi \equiv 0$.

Так как $e(0) = 0$, $e(t) = 0 \ \forall \ t \in [0, t_0)$. Отсюда

$$w_t = 0, \quad \nabla w = 0.$$

Значит, $w = \text{const}$, причем const равна значению в начальный момент времени, то есть 0. $\square$

[15]В обозначении x^0 используется верхний индекс, так как это векторная величина.

Аналог формулы Кихгофа в размерности $n = 2k + 1$

Лемма 8.1. *Пусть* $\phi(r) \in C^{k+1}(\mathbb{R})$. *Тогда*

1. $$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{d\phi}{dr}\right).$$

2. $$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\frac{d^j}{dr^j}\phi.$$

3. $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$.

Доказательство. Все утверждения леммы доказываются по индукции. □

Посмотрим на уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу

$$U_{tt} = U_{trr} + \frac{n-1}{r}U_r.$$

Пусть $n = 2k + 1 \geq 3$.

Положим

$$\tilde{U} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U\right), \quad \tilde{\Phi} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\Phi\right), \quad \tilde{\Psi} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\Psi\right).$$

Вычислим

$$\tilde{U}_{rr} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}U_r\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{r}\left(2kr^{2k-1}U + r^{2k}U_{rr}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\underbrace{\left(\frac{2k}{r}U_r + U_{rr}\right)}_{U_{tt}}\right).$$

Поэтому получаем, что

$$\begin{cases} \tilde{U_{tt}} = \tilde{U_{rr}}, \quad t > 0, r > 0 \\ \tilde{U}|_{t=0} = \tilde{\Phi} \\ \tilde{U_t}|_{t=0} = \tilde{\Psi}\tilde{U}|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

Здесь последнее условие следует из пункта 2 леммы 8.1.

Пользуясь теми же соображениями, что и раньше, получим, что

$$\tilde{U}(t,r) = \frac{\Phi^*(r-t) + \Phi^*(r+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{r-t}^{r+t}\Psi^*(\tau)d\tau.$$

Далее, с помощью пункта 2 леммы 8.1 получим, что

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0+0} U(t,r;x) = \lim_{r\to 0+0} \frac{1}{\beta_0^k r}\tilde{U}(t,r).$$

Воспользовавшись аналогичными более ранним рассуждениями, получим

$$u(t,x) = \frac{1}{\beta_0^k}\left(\tilde{\Phi}'(t) + \tilde{\Psi}(t)\right).$$

Далее, подставив $\tilde{\Phi}'$ и $\tilde{\Psi}$, получим, что и требовалось получить.

Лекция 9. Уравнение теплопроводности

Построение частного решения уравнения теплопроводности

Основной целью этого раздела является изучения уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \quad t > 0, x \in \Omega, \tag{57}$$

где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – область, и неоднородного уравнения

$$u_t - \Delta u = f(x,t), \quad t > 0, x \in \Omega,$$

где функция

$$f: \ [0, +\infty)\Omega \to \mathbb{R}$$

задана.

Начнем с того, что построим частное решение $u_A(t,x)$ уравнения (57) специальной структуры

$$u_A(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \tag{58}$$

где параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и функцию

$$v: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

надо определить. Подставляя (58) в (57), получим

$$-\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{\beta}{t^{\alpha+\beta+1}} < x, \nabla v > -\frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v = 0.$$

Положим $y = t^{-\beta} x$, $\beta = 1/2$. Тогда все степени t будут одинаковы, а значит, имеем

$$\alpha v + \frac{1}{2} < y, \nabla v > + \Delta v = 0.$$

В силу симметрии относительно вращений $v(y) = \omega(|y|)$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$\alpha \omega + \frac{r}{2}\omega' + \omega'' + \frac{n-1}{r}\omega' = 0,$$

где $1/2 < y, \nabla v >= r\omega'/2$, $\Delta v = \omega'' + \frac{n-1}{r}\omega'$. Выберем $\alpha = n/2$. Тогда

$$(r^{n-1}\omega')' + \frac{1}{2}(r^n \omega)' = 0.$$

Интегрируя, получим

$$r^{n-1}\omega' + \frac{1}{2} r^n \omega = a,$$

где $a \in \mathbb{R}$. Полагая

$$\lim_{r\to\infty} \omega = \lim_{r\to\infty} \omega' = 0,$$

получаем, что $\alpha = 0$. Отсюда $\omega' = -\frac{1}{2} r\omega$, а значит,

$$\omega(r) = b e^{-r^2/4}.$$

Отсюда, учитывая выбор α и β, получаем

$$u_A(t,x) = b\exp\{-|x|^2/4t\}.$$

Определим обобщенную функцию

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2}\exp\{-|x|^2/4t\}, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t < 0 \end{cases}$$

Выбор нормировочной константы $b = (4\pi t)^{-n/2}$ связан со следующим простым утверждением.

Лемма 9.1. *Для любого $t > 0$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)dx = 1.$$

Замечание 9.1. Заметим, что при $(t,x) \neq (0,0)$ функция $\Phi(t,x)$ является решением уравнения теплопроводности (57). Следовательно, для любого фиксированного $y \in \mathbb{R}^n$ при $x \neq y$ функция $\Phi(t, x-y)$ – также решение уравнения теплопроводности.

Существование решения параболического уравнения и его свойства

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n u|_{t=0} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{59}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 9.1. *Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Определим функцию $u(t,x)$ равенством*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)g(y)dy. \tag{60}$$

Тогда

1. $u \in C^\infty((0,+\infty)\mathbb{R}^n)$;
2. $u_t - \Delta u = 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;
3. $\lim\limits_{(t,x)\to(0+0,x^0)} u(t,x) = g(x^0)$, $\forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 9.2. Свертка (60) называется *ядром Пуассона.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Так как $t^{-n/2}e^{-|x|^2/(4t)}$ – бесконечно дифференцируемая функция при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, и интегралы от производных функции $u(t, x)$ равномерно сходятся на $[\delta, +\infty) \times V$ при $\forall\ \delta > 0$ и $V \subset \mathbb{R}^n$, то функция $u(t, x) \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Кроме того,

$$u_t - \Delta u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta_x \Phi)(t, x-y)g(y)dy = 0$$

в силу свойств функции $\Phi(t, x)$.

Перейдем к пункту 2. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, > 0. Выберем $\delta > 0$ так, что

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon,$$

если $|y - x^0| < \delta$, $y \in \mathbb{R}^n$. Если $|x - x^0| < \delta/2$, то согласно лемме 9.1 имеем

$$|u(t,x) - g(x^0)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)(g(y) - g(x^0))dy\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y)|g(y) - g(x^0)|dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y)|g(y) - g(x^0)|dy = I + J.$$

Далее,

$$I \leq \varepsilon \int\limits_{B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y)dy \leq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)dy = \varepsilon.$$

Кроме того, если $|x - x^0| \leq \delta/2$ и $|y - x^0| \geq \delta$, то

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|,$$

откуда

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

Отсюда

$$J \leq 2\|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y)dy \leq \frac{\text{const}}{t^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} dy \leq$$

$$\leq \frac{\text{const}}{t^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} \exp\left\{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}\right\} dy = \frac{\text{const}}{t^{n/2}} \int\limits_{\delta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{r^2}{16t}\right\} r^{n-1}dr \to 0$$

при $t \to 0 + 0$. Таким образом, если $|x - x^0| < \delta/2$ и $t > 0$ достаточно мало, то

$$|u(t,x) - g(x^0)| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Замечание 9.3. Если функция $g(x) \geq 0$, $g(x^0) \neq 0$ для некоторого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям теоремы 9.1, то функция $u(t,x)$, определяемая формулой (60), будет положительной во всех точках полупространства $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Это утверждение можно интерпретировать так, что уравнение теплопроводности инициирует бесконечную скорость распространения возмущений.

Однако в реальных моделях уравнение теплопроводности уточняют для рождения конечной скорости распространения. Рассмотрим два примера.

Пример 9.1. Модель Келджинелпа образования льда

$$\begin{cases} \partial_t(T + \alpha c) = \Delta T \\ \partial_t c = \Delta c + \beta c(1 - c^2) + \gamma T \end{cases}$$

Пример 9.2. Модель с памятью (Гуркина – Пипкина)

$$\partial_t u = \Delta u + \alpha \int\limits_0^t K(t-s)\Delta u(x,s)ds.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 9.3. Решить одномерную задачу Коши для

$$u|_{t=0} = e^{-|x|^2}, \quad \int e^{-|x|^2}dx = \sqrt{pi}.$$

Представим u в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-y^2} dy.$$

Заметим, что

$$(x-y)^2 + 4ty^2 = x^2 - 2\frac{x}{\sqrt{4t+1}}\sqrt{4t+1}y + (4t+1)y^2 =$$

$$= \left(\sqrt{4t+1}y - \frac{x}{\sqrt{4t+1}}\right)^2 + \frac{4t}{4t+1}x^2.$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{1}{4t+1}x^2} \int e^{-\frac{\left(\sqrt{4t+1}y - \frac{x}{\sqrt{4t+1}}\right)^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{1}{4t+1}x^2} \int e^{-\left(\frac{\sqrt{4t+1}}{\sqrt{4t}}y - \frac{x}{\sqrt{4t}\sqrt{4t+1}}\right)^2} dy.$$

Сделаем замену

$$z = \frac{\sqrt{4t+1}}{\sqrt{4t}}y - \frac{x}{\sqrt{4t}\sqrt{4t+1}}.$$

Тогда

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi(4t+1)}} e^{-\frac{1}{4t+1}x^2} \int e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{(4t+1)}} e^{-\frac{1}{4t+1}x^2}.$$

где $\int u(x,t)dx = \sqrt{\pi}$, $t \geq 0$, то есть имеем диффузию.

Неоднородная задача Коши

Рассмотрим теперь *неоднородную задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{61}$$

Заметим, что для любого фиксированного $s \in (0,t)$ функция

$$u(t,x,s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dy \tag{62}$$

является решением задачи

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \quad t > s, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=s} = f(s,x) \end{cases}$$

Принцип Дюамеля утверждает, что можно построить решение задачи (61) из решений задачи (62) интегрированием по s. Положим

$$u(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(x,y) dy ds. \tag{63}$$

Теорема 9.2. *(Принцип Дюамеля) Пусть $f(t,x) \in C_0^{1,2}([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Тогда функция $u(t,x)$, определенная формулой (63), обладает следующими свйствами:*

1. $u \in C^{1,2}((0,+\infty) \times \mathbb{R}^n)$;
2. $u_t - \Delta u = f(t,x)$;
3. $lim_{\substack{(t,x)\to(0,x^0) \\ t>0,\, x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) = 0$, $\forall\ x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 9.4. Для доказательства этой теоремы требуется преобразование Фурье обобщенных функций. Оно будет приведено в следующем семестре.

Принцип максимума

Определение 9.1. Пусть Q – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Часть границы $\gamma(Q) \subset \partial Q$ называется *верхней крышкой*, если она состоит из точек (x_0, t_0) границы ∂Q, для которых полушар

$$\{|(x,t) - (x_0,t_0)| < \delta, \quad t < t_0\} \subset Q$$

для некоторого $\delta > 0$.

Собственной границей назовем $\Gamma(Q) = \partial Q \setminus \gamma(Q)$.

Теорема 9.3. *(Принцип максимума) Пусть Q – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\gamma(Q)$ – верхняя крышка и $u(x,t)$ – субпараболическая (суперпараболическая) в $Q \cup \gamma(Q)$ функция такая, что*

$$\Delta u - \partial_t \geq 0 \ (\Delta u - \partial_t u \leq 0).$$

Тогда

$$\sup_Q u = \lim_{(x,t)\to\Gamma(Q),\,(x,t)\in Q} \sup u(x,t), \ \text{ если } \sup_Q u > 0$$

$$\left(\inf_Q u = \lim_{(x,t)\to\Gamma(Q),\,(x,t)\in Q} \inf u(x,t), \ \text{ если } \inf_Q u > 0\right)$$

где $\Gamma(Q) = \partial Q \setminus \gamma(Q)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай субпараболической функции

$$\Delta u - \partial_t u \geq 0$$

и $\sup\limits_Q u = M > 0$. Обозначим

$$m = \lim_{(x,t)\to\Gamma(Q),\,(x,t)\in Q} \sup u.$$

Допустим, что $M > m > 0$. Тогда существует $a > 0$ такое, что $M - a > \max(m, 0)$.

Пусть область Q находится между плоскостями $t = t'$, $t = t''$, $t' < t''$. Введем вспомогательную функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(t - t'),$$

где $= a/(t'' - t')$. Тогда

$$(\Delta - \partial_t)v \geq \varepsilon > 0. \tag{64}$$

Далее,

$$\sup_Q v \geq M - a > \max(m, 0),$$

$$\lim_{(x,t)\to\Gamma(Q),\,(x,t)\in Q} \sup v \leq m.$$

Поэтому функция v достигает верхней грани в некоторой точке $(x_0, t_0) \in Q \cup \gamma(Q)$.

Покажем, что

$$\Delta v - \partial_t v \leq 0,$$

что приведет к противоречию с (64) и таким образом покажет спрведливость теоремы. Имеем

$$\partial_t v(x_0, t_0) \geq 0,$$

$$\Delta v(x_0, t_0) \leq 0,$$

а значит,

$$\Delta v - \partial_t v \leq 0,$$

поскольку (x_0, t_0) – точка максимума. □

Следствие. Пусть u непрерывна в $\overline{Q}$. Тогда, если u суперпараболична, то

$$\min_{\overline{Q}} u = \min_{\Gamma(Q)}$$

при $\min\limits_{\overline{Q}} u \leq 0$, а если субпараболична, то

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\Gamma(Q)}$$

при $\max\limits_{\overline{Q}} \geq 0$.

Единственность решения первой краевой задачи

Определение 9.2. *Решением первой краевой задачи для уравнения теплопроводности* называется непрерывная в $\overline{Q}$ функция u такая, что

$$\Delta u - \partial_t u = f$$

и $u = \phi$ на $\Gamma(Q)$.

Из принципа максимума следует единственность решения первой краевой задачи и его непрерывная зависимость от граничной функции ϕ.

Теорема 9.4. *Пусть u_1, u_2 – решения задач*

$$\begin{cases} \Delta u_1 - \partial_t u_t = f \\ u_1|_{\Gamma(Q)} = \phi_1 \end{cases}$$

и

$$\Delta u_2 - \partial_t u_2 = f u_2|_{\Gamma(Q)} = \phi_2$$

соответственно. Тогда

$$|u_1 - u_2| \leq \max_{\Gamma(Q)} |\phi_1 - \phi_2|.$$

В частности, если $\phi_1 = \phi_1$, то $u_1 = u_2$.

Строгий принцип максимума

Определение 9.3. Назовем подобласть Q' области Q *подчиненной точке* (x_0, t_0), когда каждую ее точку можно соединить с (x_0, t_0) ломанной, однозначной проектирующейся на ось t, верхним концом которой является точка (x_0, t_0) и которая (исключая может быть (x_0, t_0)) целиком принадлежит Q.

Задача 9.1. *Доказать, что Q' является областью.*

Теорема 9.5. *(Строгий принцип максимума) Пусть Q – область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\gamma(Q)$ – ее верхняя крышка. Пусть $u(x, t)$ – субпараболическая (суперпараболическая) функция в $Q \cup \gamma(D)$.*

Тогда, если u достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в некоторой точке $(x_0, t_0) \in Q \cup \gamma(Q)$, то $u \equiv const$ в подобласти Q' области Q, подчиненной точке (x_0, t_0).

Доказательство. Начнем доказательство со следующей леммы.

Лемма 9.2. *Пусть в цилиндре $Ц_{x_0,R}^{t_1,t_2}$ плюс его верхняя крышка $Ц_{x_0,R^2}^{t}$ функция u – субпараблическая. Пусть в точке (x_0, t_2) функция u достигает положительного максимума, равного M.*

Тогда $u = M$ на оси цилиндра.

Доказательство. Допустим, что на оси цилиндра имеется точка (x_0, t'), в которой $u < M - a$, $a > 0$. Найдем столь малое r_0, что

$$r_0 < \min(R, 1),$$

и $u < M - a$ при $|x - x_0| < r_0$. Рассмотрим в цилиндре $Ц_{x_0,r_0}^{t',t_2}$ вспомогательную функцию

$$v(x,t) = M - ae^{-\beta(t-t')}\left[r_0^2 - |x - x_0|^2\right]^2.$$

Допустим, нам удалось бы подобрать положительное β так, чтобы выполнялось

$$\Delta v - \partial_t v \le 0.$$

Покажем, что это приводит к противоречию.

Действительно, на нижнем основании цилиндра $Ц_{x_0,r_0}^{t',t_2}$ функция v не меньше $M - a$, а на его боковой поверхности равна M. Значит, разность $v - u$ на нижнем основании этого цилиндра и боковой поверхности неотрицательна. Эта разность суперпараболична и в силу принципа максимума неотрицательна в этом цилиндре. Значит,

$$M = u(x_0, t_2) \le v(x_0, t_2) = M - ar_0^2 e^{-\beta(t_2 - t')} < M.$$

Приходим к противоречию.

Покажем теперь, что $\exists\ \beta > 0$ такое, что

$$\Delta v - \partial_t v \le 0.$$

Имеем

$$\partial_{x_i}\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]^2 = -\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right](x_i - x_i^0),$$

$$\partial_{x_j}\partial_{x_i}\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]^2 = \begin{cases} 8(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0), & i \ne j \\ 8(x_i - x_i^0)^2 - 4\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right], & i = j \end{cases}$$

$$\partial_t v = \beta a e^{-\beta(t-t')}\left[r_0^2 - |x - x_0|^2\right]^2.$$

Отсюда

$$\Delta\,[]^2 = 8\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 - 4n\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]$$

и

$$(\Delta - \partial_t)v = -ae^{-\beta(t-t')}\left\{\left(8|x - x^0|^2 - 4n\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]\right) + \beta\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]^2\right\}.$$

При $|x - x_0| = r_0$

$$F = \left(8|x - x^0|^2 - 4n\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]\right) + \beta\left[r_0^2 - (x - x_0)^2\right]^2 = 8r_0^2 > 0.$$

Отсюда следует существование достаточно малого $\delta > 0$ такого, что для любого $\beta > 0$ при $r_0^2 - (x - x_0)^2 < \delta$ справедливы неравенства

$$r_0^2 \geq (x - x_0)^2 \geq r_0^2 - \delta > 0,$$

а значит, $F > 0$. □

Лемма 9.3. *Рассмотрим цилиндр Ц, определяемый неравенствами*

$$t_1 < t \leq t_2, \quad |x - \beta(t - t_1)| < R, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Пусть в этом наклонном цилиндре определена субпараболическая функция u (вплоть до верхней крышки). Пусть в точке

$$(t_2, x_0 + \beta(t_2 - t_1))$$

функция u достигает положительного максимума $M > 0$. Тогда $u \equiv M$ во всех точках интервала

$$t_1 < t < t_2, \quad x = x_0 + \beta(t - t_1).$$

Доказательство. Сделаем замену переменных

$$t' = t, \quad x' = x - \beta(t - t_1).$$

Тогда оператор $\Delta_x - \partial_t$ перейдет в оператор

$$\Delta_{x'} - \partial_{t'} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \partial_{x'_j},$$

а цилиндр Ц перейдет в прямой цилиндр

$$t_1 \leq t' \leq t_2, \quad |x' - x_0| < R.$$

Функция u субпараболична относительно

$$\Delta_{x'} - \partial_{t'} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \partial_{x'_j},$$

поэтому по предыдущей лемме (с небольшими изменениями доказательства из-за новых членов $-\sum_{j=1}^{n} \beta_j \partial_{x'_j} u$) получаем, что $u = M$ на интервале $t_1 < t < t_2$, $x = x_0 + \beta(t - t_1)$, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы сразу получается из приведенной выше леммы. Действительно, пусть для определенности функция u – субпараблична и достигает максимума, равного $M > 0$ в точке $(x_0, t_0) \in Q \cup \gamma(Q)$. Пусть точку $(x', t') \in Q$ можно соединить с точкой (x_0, t_0) при помощи ломанной l, принадлежащей $Q \cup \gamma(Q)$, однозначно проектирующейся на ось t, верхним концом которой служит точка (x_0, t_0). Для каждого звена ломанной построим цилиндр (вообще говоря наклонный) с основаниями, ортогональными оси t, осью которого является данное звено, и такой, чтобы он принадлежал $Q \cup \gamma(Q)$.

Применяя к этим цилиндрам последовательно, начиная с верхнего, приведенную выше лемму 9.3, получим, что во всех точках ломанной (а следовательно, и в точке (x', t')) функция u принимает значение, равное M. □

Замечание 9.5. Так как знак выражения $(\Delta - \partial_t)u$ не меняется от прибавления к функции u константы, то в теореме строгого принципа максимума вмест слов «отрицательный минимум» («положительный максимум») можно говорить просто «минимум»). Тогда получаем следующую теорему.

Теорема 9.6. *Пусть дана ограниченная область $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $\gamma(Q)$ – ее верхняя крышка. Пусть u – субпараболическая (суперпараболическая) в $Q \cup \gamma(Q)$ функция.*

Тогда, если u достигает максимума (минимума) в некоторой точке (x_0, t_0), принадлежащей $Q \cup (Q)$, то $u \equiv const$ во всей подобласти, подчиненной точке (x_0, t_0).

Пример 9.4. Рассмотрим уравнение

$$\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$$

в области Q с верхней крышкой

$$\gamma(Q) = \{1 < x < 2, \quad y = 1\} \cup \{2 < x < 3, \quad y = 4\} \cup$$

$$\cup \{3 < x < 4, \quad y = 1\}.$$

Достижимая граница

$$\Gamma(Q) = \{x = 1, \quad 0 < y < 6\} \cup \{x = 2, \quad 4 < y < 6\} \cup$$

$$\cup \{x = 3, \quad 4 < y < 6\} \cup \{x = 4, \quad 0 < y < 6\} \cup \{1 < x < 4, \quad y = 0\}.$$

Разобъем эту область на три подобласти:

$$Q_1 = \{1 < x < 4, \quad 0 < y < 4\},$$

$$Q_2 = \{1 < x < 2, \quad 4 < y < 6\},$$

$$Q_3 = \{3 < x < 4, \quad 4 < y < 6\}.$$

Пусть $u = 0$ при

$$\{x = 1, \quad 0 < y < 6\} \cup \{x = 2, \quad 4 < y < 6\} \cup \{x = 4, \quad 0 < y < 4\}$$

и $u > 0$ при

$$\{x = 3, \quad 4 < y < 6\} \cup \{x = 4, \quad 4 < y < 6\}.$$

В приведенной теореме строгого принципа максимума участвуют точки верхней крышки. Покажем, что для точек достижимой границы это не верно. Рассмотрим хотя бы такой пример:

$$\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$$

в области $0 < x < l$, $0 < t < T$.

Решение $u = x^2 + 2t$. В точке (l, T) достижимой границы достигается максимум, хотя функция не константа Q, которая вся является подчиненной точке (l, T).

Лекция 10. Гиперболическая система по Фридрихсу

Принцип максимума в полосе

Определение 10.1. Пусть $T > 0$. Будем говорить, что функция

$$u: \ [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$u(t,x) \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ *принадлежит классу Тихонова* $T_{A,a}$, если существуют константы $A > 0$, $a > 0$ такие, что для любого $t \in [0,T]$ и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|u(t,x)| \leq A \exp\left\{a|x|^2\right\}. \tag{65}$$

Теорема 10.1. *(Принип максимума в полосе) Пусть* $g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *и функция* $u(t,x) \in T_{A,a}$ *– решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$$

Тогда

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} u(t,x) = \sup_{\mathbb{R}^n} g(x).$$

Доказательство. Пусть сначала $4aT < 1$. Тогда найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $4a(T+\varepsilon) < 1$. Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^n$, $\nu > 0$ и положим

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\nu}{(T + -t)^{n/2}} \exp\left\{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right\}.$$

Прямым вычислением можно показать, что $v_t - \Delta v = 0$. Зафиксируем $r > 0$ и положим $\Omega = B(y,r)$. Тогда $\Omega_T = (0,T] \times B(y,r)$, и функция $v(t,x)$ удовлетворяет принципу максимума в Ω_T. Значит,

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v(t,x) = \max_{\Gamma_T} v(t,x).$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$v(0,x) = u(0,x) - \frac{\nu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} \exp\left\{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right\} < u(0,x) = g(x).$$

Тем самым, на «дне стакана» Γ_T имеет место неравенство $v(t,x) \leq g(x)$. Покажем, что при достаточно большом $r > 0$ такое же неравенство имеет место и на «боковой стенке», то есть при $|x-y| = r$. Действительно, в этом случае в силу (65) имеем

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\nu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \exp\left\{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right\} \leq$$

$$\le A\exp\left\{a|x|^2\right\} - \frac{\nu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}\exp\left\{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right\} \le$$

$$\le A\exp\left\{a(|y|+r)^2\right\} - \frac{\nu}{(T+\varepsilon)^{n/2}}\exp\left\{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right\}.$$

В силу неравенства $4a(T+\varepsilon)<1$ имеем

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a+\gamma, \quad \gamma>0.$$

Отсюда на боковой стенке Γ_T получаем

$$v(t,x) \le A\exp\left\{a(|y|+r)^2) - \nu((a+\gamma))^{n/2}\exp\left\{(a+\gamma)r^2\right\}\right\}.$$

Так как правая часть при достаточно большом r становится сколь угодно сильно отрицательной, то

$$v(t,x) \le \sup_{R^n} g(x).$$

Таким образом,

$$\max_{\Gamma_T} v(t,x) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g(x),$$

откуда

$$v(t,x) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g(x), \quad \forall\ (t,x)\in\Omega_t,$$

и, в частности,

$$v(t,y) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g(x).$$

Отсюда в силу произвольности выбора $y\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,T]$, устремив $|mu \to 0+0$ получаем

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} u(t,x) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g(x).$$

Если же $4aT\ge 1$, то приведенное выше рассуждение для $t\in[0,1/8a]$, затем сделаем замену $\tau_1 = t-1/8a$. Тогда в новых переменных $u(\tau_1,x)$ удовлетворяет тому же уравнению, и к ней опять можно применить то же рассуждение, что и выше, но уже для $\tau_1\in[0,1/8a]$. Далее сделаем замену $\tau_2=\tau_1-1/8a$ и так далее.

Тем самым, за конечное число шагов мы исчерпаем весь промежуток $[0,T]$, и в каждой из полос будет иметь место требуемое неравенство. $\square$

Следствие. (Единственность решения задачи Коши) Пусть $g(x)\in C(\mathbb{R}^n)\cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(t,x)\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Пусть также $\alpha>0$, $\beta>0$ – константы. Тогда существует не более одного решения $u(t,x)\in T_{\alpha,\beta}$ задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t,x), \quad t\in(0,T], \quad x\in\mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

Задача 10.1. *Доказать следствие .*

Гладкость решений уравнения теплопроводности

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Обозначим через

$$C(t_0, x^0, r) = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x^0 - y| \le r, \quad t_0 - r^2 \le s \le t_0\}$$

круговой цилиндр высоты r^2 с радиусом основания r и центром верхнего основания в точке (t_0, x^0). Оказывается, имеет мест следующая теорема.

Теорема 10.2. *(Гладкость решений уравнения теплопроводности) Пусть $u(t,x) \in C^{1,2}(\Omega_T)$ – решение уравнения теплопроводности в Ω_T. Тогда $u(t,x) \in C^\infty(\Omega_T)$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $(t_0, x^0) \in \Omega_T$ и выберем r настолько малым, что цилиндр $C(t_0, x^0, r)$ содержится в Ω_T.

Обозначим для краткости

$$C = C(t_0, x^0, r), \quad C' = C(t_0, x^0, 3r/4), \quad C'' = C(t_0, x^0, r/2).$$

Выберем срезающую функцию $\xi(t,x) \in C^\infty\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right)$ так, что $\xi(t,x) = 1$ при $(t,x) \in C'$ и $\xi(t,x) = 0$ при $t \le t_0$, $(t,x) \notin C$.

Пусть $\varepsilon > 0$,

$$\Omega_{T,} = \left\{(t,x) \in \Omega_T \mid ((t,x), \partial\Omega) > \varepsilon\right\}.$$

Пусть также $\eta_\varepsilon(t,x)$ – стандартное усредняющее ядро,

$$u_\varepsilon = (u * \eta_\varepsilon)(t,x).$$

Определим также

$$v_= \xi(t,x) u_\varepsilon(t,x).$$

Заметим, что при достаточно малом r функция v_ε имеет следующие свойства:

$$v_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad v_\varepsilon(t,x) = u_\varepsilon(t,x), \quad (t,x) \in C',$$

$$v_\varepsilon(t,x) = 0, \quad t \le t_0, \quad (t,x) \notin C.$$

Положим

$$f_\varepsilon = \partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon$$

и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta\omega = f_\varepsilon, \quad t \in (0, t_0], \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \omega|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

По принципу Дюамеля, решением этой задачи является функция

$$\tilde{v_\varepsilon}(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f_\varepsilon(s,y)\, dy ds.$$

Однако функция $v_\varepsilon(t,x)$ тоже является решением той же задачи в силу того, как была определена f_ε. Отсюда, так как обе функции v_ε и $\tilde{v}_\varepsilon$ ограничено, по теореме единственности получаем, что

$$v_\varepsilon(t,x) = \tilde{v}_\varepsilon(t,x).$$

Отсюда

$$v_\varepsilon(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f_\varepsilon(s,y)dyds.$$

Так как $\xi(t,x) = 0$ при $t \le t_0$, $(t,x) \notin C$, то $f_\varepsilon(t,x) = 0$ там же. Более того, так как $v_\varepsilon|_{C'} = u_\varepsilon|_{C'}$, то для всех $(t,x) \in C' \cap \Omega_T$, имеем

$$f_\varepsilon(t,x) = \partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon - \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_= 0$$

в силу свойств свертки и того, что $u(t,x)$ – решение уравнения теплопроводности. Следовательно,

$$u_\varepsilon(t,x) = \iint\limits_C \Phi(t-s, x-y) f_\varepsilon(s,y)dyds,$$

и этот интеграл не является несобственным.

Расписывая подробно выражение для f_ε, получаем

$$u_\varepsilon(t,x) = \iint\limits_C \Phi(t-s, x-y)\left((\xi_s(s,y) - \Delta\xi(s,y))u_\varepsilon(s,y) - \right.$$

$$\left. -2 < \nabla\xi(s,y), \nabla u_\varepsilon(s,y) >\right) dyds.$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям (перебрасывая призводные с u_ε), имеем

$$u_\varepsilon(t,x) = \iint\limits_C \left(\Phi(t-s, x-y)\left(\xi_s(s,y) + \Delta\xi(s,y)\right) + \right.$$

$$\left. +2 < \nabla_y\Phi(t-s,x-y), \nabla\xi(s,y) >\right) u_\varepsilon(s,y)dyds.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0+0$ в выражении выше, получим

$$u(t,x) = \iint\limits_C K(t,x,s,y)u(s,y)dyds. \tag{66}$$

Так как $f_{|C'} \to 0$, то $K(t,x,s,y) = 0$ при $(s,y) \in C'$. Осталось заметить, что $K \in C^\infty(C \backslash C')$. Следовательно, в силу (66) получаем $u \in C^\infty(C'')$. Теорема доказана. $\square$

Гиперболическая система по Фридрихсу

Перейдем теперь к доказательству для симметрических гиперболических по Фридрихсу систем теорем существования и единственности достаточного гладкого решения задач Коши. Ограничимся линейными системами вида

$$A\partial_t u + B\partial_x u + C\partial_y u + Qu = f, \tag{67}$$

где $A(x,y,t)$, $B(x,y,t)$, $C(x,y,t)$, $Q(x,y,t)$, $f(x,y,t)$ и

$$A^* = A, \quad B^* = B, \quad C^* = C.$$

Матрица Q симметричной не предполагается, матрица A – невырожденная.

Для доказательства теоремы существования мы используем технику сеточных функций, которая широко применяется, например, для исследования уравнений математической физики на графах.

Начнем с вывода для этих систем

$$A\partial_t u + B\partial_x u + C\partial_y u + Qu = f$$

очень важного тождества, называемого *интегралом энергии*. Умножим скалярно (так как оперируем векторами) систему на $2u$

$$2(A\partial_t u, u) + 2(B\partial_x u, u) + 2(C\partial_y u, u) + 2(Qu, u) = 2(f, u).$$

Пользуясь симметрией, преобразуем слагаемые этого равенства. Имеем

$$2(A\partial_t u, u) = (A\partial_t u, u) + (\partial_t u, A^* u) = (A\partial_t u, u) + (\partial_t u, Au) =$$

$$= (\partial_t(Au), u) + (Au, \partial_t u) - ((\partial_t A)u, u) = \partial_t(Au, u) - ((\partial_t A)u, u).$$

Аналогично получим

$$2(B\partial_x u, u) = \partial_x(Bu, u) - ((\partial_x B)u, u),$$

$$2(C\partial_y u, u) = \partial_y(Cu, u) - ((\partial_y C)u, u).$$

Кроме того,

$$2(Qu, u) = ((Q + Q^*)u, u).$$

Рассмотрим какую-либо область G внутри области Ω определения системы.

Интегрируя наше тождество по G, получим

$$\int\limits_G (\partial_t(Au, u) + \partial_x(Bu, u) + \partial_y(Cu, u))\, dx =$$

$$= \int\limits_G ((Du, u) + 2(f, u))\, dxdydt.$$

После выполнения всех этих преобразований можно написать

$$(\partial_t(Au), u) + \partial_x(Bu, u) + \partial_y(Cu, u) = (Du, u) + 2(f, u),$$

где

$$D = \partial_t A + \partial_x B + \partial_y C - (Q + Q^*).$$

Проинтегрируем наже тождество по области G:

$$\int\limits_G = [(\partial_t(Au), u) + \partial_x(Bu, u) + \partial_y(Cu, u)]\, dxdydt =$$

$$= \int\limits_G [(Du, u) + 2(f, u)]\, dxdydt.$$

Применяя к равенству выше теорему Остроградского – Гаусса, слева перейдем к поверхностному интегралу

$$\int\limits_{\partial G} ([\tau A + \xi B + \eta C])\, ds = \int\limits_G ((Du, u) + 2(f, u))\, dxdydt.$$

где (τ, ξ, η) – единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂G.

Это интегральное тождество называется *интегралом энергии для симметрической системы.*

Примеры

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 10.1. (Уравнения трехмерной акустики)

$$\begin{cases} \frac{1}{\varrho_0 c_0^2}\partial_t p + \partial_x p + \partial_y p + \partial_z p = 0 \\ \varrho_0 \partial_t u + \partial_x p = 0 \\ \varrho_0 \partial_t + \partial x p = 0 \\ \varrho_0 \partial_t v + \partial_y p = 0 \\ \varrho_0 \partial_t \omega + \partial_z p = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varrho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

матрица Q и вектор f нулевые. Интеграл энергии в этом случае равен

$$\int\limits_{\partial G} \left(\frac{1}{2}\tau \left(\frac{p^2}{\varrho_0 c_0^2} + \varrho_0 u^2 + \varrho_0 v^2 \right) + \xi p u + \eta p v \right) ds = 0$$

и выражает закон сохранения энергии звуковых волн.

Замечание 10.1. Выведенный нами интеграл энергии позднее будет использован для доказательства теоремы единственности решения задачи Коши для гиперболической по Фридрихсу системы.

Пример 10.2. Вычислим интеграл энергии для волнового уравнения

$$\partial_t^2 p + c_0^2\left(\partial_x^2 p + \partial_y^2 p\right) = 0.$$

Для этого умножим его на $\partial_t p + m\partial_x p + \partial_y p$ и преобразуем его слагаемые

$$\partial_t p\partial_t^2 p =_t \left(\frac{1}{2}(_t p)^2\right), \quad \partial_x p\partial_t^2 p = \partial_t(\partial_x p\partial_t p) - \partial_x\left(\frac{1}{2}(\partial_t p)^2\right),$$

$$\partial_y p\partial_t^2 p = \partial_t(\partial_x p\partial_t p) - \partial_y\left(\frac{1}{2}(\partial_t p)^2\right), \quad \partial_x^2 p\partial_t p =_x (\partial_x p\partial_t p) - \partial_t\left(\frac{1}{2}(\partial_x^2)^2\right),$$

$$_x^2 p\partial_t p = \partial_y(\partial_y p\partial_t p) - \partial_t\left(\frac{1}{2}(\partial_y)^2\right), \quad \partial_x\partial_x^2 p = \partial_x\left(\frac{1}{2}(\partial_x)^2\right),$$

$$\partial_y p\partial_z^2 p =_x (\partial_y p\partial_x) - \partial_y\left(\frac{1}{2}(\partial_x p)^2\right), \quad \partial_y\partial_y^2 p = \partial_y\left(\frac{1}{2}(\partial_y)^2\right),$$

$$\partial_x p\partial_y^2 p = \partial_y(\partial_x p\partial_y) - \partial_x\left(\frac{1}{2}(\partial_y p)^2\right).$$

В результате на решении выполнено тождество

$$\partial_t\left[\frac{(\partial_t p)^2 + 2m\partial_t p\partial_x p + 2n\partial_t p\partial_y p + c_0^2\left((\partial_x p)^2 + (\partial_y p)^2\right)}{2}\right] -$$

$$-\partial_x\left[\frac{m(\partial_t p)^2 + 2c_0\partial_t p\partial_x p - mc_0^2(\partial_x p)^2 + 2nc_0^2\partial_x p\partial_y p + mc_0^2(\partial_y p)^2}{2}\right] -$$

$$-\partial_y\left[\frac{m(\partial_t p)^2 + 2c_0\partial_t p\partial_y p - nc_0^2(\partial_y p)^2 + 2mc_0^2\partial_x p\partial_y p + nc_0^2(\partial_y p)^2}{2}\right] = 0.$$

Квадратичная форма от производных

$$(\partial_t p)^2 + 2m\partial_t p\partial_x p + 2n\partial_t p\partial_y p + c_0^2\left((\partial_x p)^2 + (\partial_y p)^2\right),$$

стоящая в этом тождестве под знаком дифференцирования по t, положительно определена, если

$$n^2 + m^2 < c_0^2.$$

Это тождество носит называние *интеграла энергии для волнового уравнения*.

Теорема единственности задачи Коши

Ниже мы используем интеграл энергии для получения оценок решения задачи Коши для симметрических систем в области G полупространства $t > 0$, ограниченной сверху некоторой «шапочкой», о которой известно, что по ней поверхностный интеграл энергии неотрицателен. Годуновым предложен алгоритм построения такой «шапочки», опирающийся на построение решения задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби, гамильтониан которого строится по характеристическим корнями исследуемой системы (67).

Мы начинаем исследоваеть теоремы единственности и непрерывной зависимости решений задачи Коши от начальных данных для симметрических гиперболических систем. Условием неотрицательности поверхностного интеграла энергии

$$\int\limits_{\partial G} ([\tau A + \xi B + \eta C]u, u)\, ds \geq 0$$

мы займемся позднее (в отдельной лекции). Поэтому все выводы будут нести условных характер. Мы будем работать в предположении справедливости условия неотрицательности поверхностного интеграла энергии.

Изучая выше симметрическую гиперболическую систему

$$A\partial_t u + B_x u + C\partial_y u + Qu = f, \tag{68}$$

мы установили интегральное тождество для ее гладких решений

$$\int\limits_{\partial G} ([\tau A + \xi B + \eta C]u, u)\, ds = \int\limits_{G} ((Du, u) + 2(f, u))\, dxdydt.$$

Поверхность ∂G ограничивает область в пространстве (x, y, z), вектор (τ, ξ, η) – единичная внешняя нормаль к этой поверхности. Матрица

$$D = \partial_t A + \partial_x B + \partial_y C - (Q + Q^*).$$

Как мы отмечали выше, мы будем предполагать неотрицательность квадратичной формы $([\tau A + \xi B + \eta C]u, u)$ на поверхности «шапочки».

Теорема 10.3. *Проведем сечения $t = t_1$ и $t = t_2$ и рассмотрим область G_{t_1,t_2}, ограниченную этими сечениями и «шапочкой». Положим*

$$I(t) = \int\limits_{t=const} (Au, u) dxdy.$$

Для гладких решений системы (68) справедлива оценка

$$\sqrt{I(t)} \leq \sqrt{I(0)}e^{Mt/2} + \frac{N}{M}\left(e^{Mt/2} - 1\right).$$

Постоянная M здесь оценивает коэффиценты системы и их производные, постоянная N – правые части f.

Лекция 11. Уравнение Гамильтона – Якоби

Теорема единственности задачи Коши (продолжение)

Начнем лекцию с доказательства теоремы 10.3.

Теорема 10.3. *Проведем сечения $t = t_1$ и $t = t_2$ и рассмотрим область G_{t_1,t_2}, ограниченную этими сечениями и «шапочкой». Положим*

$$I(t) = \int\limits_{t=const} (Au, u)dxdy.$$

Для гладких решений системы (68) справедлива оценка

$$\sqrt{I(t)} \leq \sqrt{I(0)}e^{Mt/2} + \frac{N}{M}\left(e^{Mt/2} - 1\right).$$

Постоянная M здесь оценивает коэффиценты системы и их производные, постоянная N – правые части f.

Доказательство. Опуская в интеграле энергии неотрицательный интеграл по боковой поверхности, получим

$$\int\limits_{t=t_2} (Au, u)dxdy = \int\limits_{t=t_1} (Au, u)dxdy + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{t=\sigma} \left((Du, u) + 2(f, u)\right) dxdyd\sigma.$$

Здесь все интегралы по сечениям $t = \sigma$ беруется только по пересечению G с соответствующими плоскостями. Положим

$$I(t) = \int\limits_{t=\text{const}} (Au, u)dxdy.$$

Воспользуемся невырожденностью матрицы A для гиперболических по Фридрихсу систем. Справедливы неравенства

$$-M(Au, u) \leq (Du, u) \leq M(Au, u),$$

$$\int\limits_{t=\text{const}} |(Du, u)|dxdy \leq M \int\limits_{t=\text{const}} (Au, u)dxdy = MI(t),$$

$$\int\limits_{t=\text{const}} 2|(u, f)|dxdy \leq \int\limits_{t=\text{const}} \sqrt{(f, f)}\sqrt{(u, u)}dxdy \leq$$

$$\leq 2\sqrt{\int\limits_{t=\text{const}} (f, f)dxdy}\sqrt{a^2 \int\limits_{t=\text{const}} (Au, u)dxdy} \leq N\sqrt{\int\limits_{t=\text{const}} (Au, u)dxdy} = N\sqrt{I(t)}.$$

Отсюда получаем

$$I(t_2) \leq I(t_1) + M \int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} I(\sigma) d\sigma + N \int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{I(\sigma)} d\sigma.$$

Отметим, что

$$N = 2a \sqrt{\int\limits_{t=\mathrm{const}} (f, f) dx dy}.$$

В силу равномерной положительной определенности матрицы A имеем

$$(u, u) \leq a^2 (Au, u).$$

Взаключение докажем лемму, которую неоднократно используем в дальнейшем.

Лемма 11.1. *(Об интегральном неравенстве) Пусть при* $0 \leq t \leq T$ *функция* $I(t) \geq 0$ *непрерывна и дифференцируема. Если такая* $I(t)$ *для любых* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ *удовлетворяет неравенству*

$$I(t_2) \leq I(t_1) + M \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t) dt + N \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{I(t)} dt,$$

где $M > 0$, $N \geq 0$, *то*

$$\sqrt{I(t)} \leq \sqrt{I(0)} e^{Mt/2} + \frac{N}{M} \left(e^{Mt/2} - 1 \right). \tag{69}$$

Доказательство. По предположению леммы, для любых t_1, t_2 справедливо

$$\frac{I(t_2) - I(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\int_{t_1}^{t_2} \left(M I(t) + N \sqrt{I(t)} \right) dt}{t_2 - t_1} = M I(t_*) + N \sqrt{I(t_*)},$$

где t_* выбрано по теореме о среднем значении, $t_1 \leq t_* \leq t_2$. Стягивая $[t_1, t_2]$ к внутренней точке t интервала и пользуясь дифференцируемостью $I(t)$, получим

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq M I(t) + N \sqrt{I(t)}. \tag{70}$$

Если $I(\hat{t}) = 0$ в выбранной точке $\hat{t}$, то в ней неравенство

$$\sqrt{I(t)} \leq \sqrt{I(0)} e^{Mt/2} + \frac{N}{M} \left(e^{Mt/2} - 1 \right)$$

выполнено. Пусть теперь $I(\hat{t}) > 0$. Обозначим через t_1 либо наибольшее из тех значений t, для которых $I(t) = 0$ и $t_1 < \hat{t}$, либо точку t_0, если $I(t) > 0$ для всех $t < \hat{t}$.

На интервале $t_1 < \hat{t}$ функция $I(t)$ положительная и на конце этого интервала либо $t_1 > 0$ и $I(t_1) = 0$, либо $t_1 = 0$.

На интервале $t_1 < \hat{t}$ можно поделить обе части неравенства (70) на $2\sqrt{I(t)}$. Имеем

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} \leq \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} + \frac{N}{2},$$

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} - \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} \leq \frac{N}{2}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $e^{-Mt/2}$. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Mt/2}\sqrt{I(t)}\right) \leq \frac{N}{2}e^{-Mt/2}.$$

Проинтегрировав это неравенство от t_1 до $\hat{t}$, имеем

$$e^{-M\hat{t}/2}\sqrt{I(\hat{t})} - e^{-Mt_1/2}\sqrt{I(t_1)} \leq \frac{N}{M}\left(e^{-Mt_1/2} - e^{-M\hat{t}/2}\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt{I(\hat{t})} \leq e^{M(\hat{t}-t_1)/2}\sqrt{I(t_1)} + \frac{N}{M}\left(e^{-M(\hat{t}-t_1}/2 - 1\right).$$

Так как $\hat{t} - t_1 < \hat{t}$ и $I(t_1)$ либо равно $I(0)$, либо равно 0, то интегральное тождество (69) выполняется. □

Вернемся к доказательству теоремы 65. Применяя лемму 11.1 для гладких решений системы (68), получим

$$\sqrt{I(t)} \leq \sqrt{I(0)}e^{Mt/2} + N\frac{e^{Mt/2} - 1}{M}.$$

Напомним, что

$$N = 2a\sqrt{\int\limits_{t=\text{const}} (f, f)dxdy}.$$

В силу равномерной положительной определенности матрицы A имеем

$$(u, u) \leq a^2(Au, u).$$

□

Замечание 11.1. Отсюда следует теорема единственности (когда $N = I(0) = 0$).

Условие неотрицательности квадратичной формы пучка

Ранее при исследовании интеграла энергии мы столкнулись с необходимостью найти изучения поверхностей S, на которых неотрицательно определена квадратичная форма

$$\int\limits_S ([\tau A + \xi B + \eta C]u, u)\, ds \geq 0,$$

где (τ, ξ, η) – компоненты вектора нормали к поверхности S; A, B, C – симметрические матрицы, притом A положительно определена.

Фиксируем точку (t_0, x_0, y_0) пространства и рассмотрим для пучка матриц (A, B, C) множество $\mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$ всех векторов (τ, ξ, η), где квадратичная форма пучка

$$((\tau A + \xi B + \eta C)z, z)$$

неотрицательно определена. В силу положительной определенности A, очевидно, вектор $(1, 0, 0) \in \mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$. Теперь отметим, чт $\mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$ –конус, поскольку $\nu(\tau, \xi, \eta) \in \mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$ для любых $\nu \geq 0$, $(\tau, \xi, \eta \in \mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$.

Покажем, что этот конус, отвечающий положительно определенной форме, – выпуклый. Пусть

$$([\tau_1 A + \xi_1 B + \eta_1 C]u, u) \geq \kappa_1(u, u),$$
$$([\tau_2 A + \xi_2 B + \eta_2 C]u, u) \geq \kappa_2(u, u).$$

Любой вектор (τ, ξ, η), лежащий на отрезке, соединяющем концы векторов (τ_1, ξ_1, η_1), (τ_2, ξ_2, η_2), может быть представлен в форме

$$\tau = \alpha\tau_1 + (1 - \alpha)\tau_2,$$

$$\xi = \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2,$$
$$\eta = \alpha\eta_1 + (1 - \alpha)\eta_2$$

для $0 < \alpha < 1$. Отсюда ясно, что

$$([\tau A + \xi B + \eta C]u, u) \geq (\alpha\kappa_1 + (1 - \alpha)\kappa_2)(u, u) \geq$$

$$\geq \min(\kappa_1, \kappa_2)(u, u).$$

Это неравенство и означает положительную определенность. Таким образом, конус $\mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$ – выпуклый и не совпадает со всем пространством, поскольку вектор $(-1, 0, 0) \notin \mathcal{K}_{(t_0,x_0,y_0)}$. Рассмотрим вектора, лежащие на границе конуса положительно определенной квадратичной формы.

В силу непрерывности относительно (τ, ξ, η) такие вектора будут неотрицательно определены на границе конуса. С другой стороны, для вектора, лежащего на границе конуса, квадратичная форма не может быть положительно определенной, так как иначе мы бы имели

$$([\tau A + \xi B + \eta C]u, u) \geq \kappa > 0,$$

если $(u, u) = 1$. Но тогда это неравенство в силу непрерывности по (τ, ξ, η) было бы справедливо в окрестности вектора (τ_0, ξ_0, η_0), что противоречит тому, что он граничный вектор. Для квадратичной формы симметрической матрицы $\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C$ из ее неотрицательной определенности следует неотрицательность ее собственных значений. Поэтому, если она не положительно определена, существует собственное значение, равное 0. Отсюда для вектора (τ, ξ, η), лежащего на границе конуса положительно определенных форм,

$$\det \|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0.$$

Конус таких векторов называется *конусом характеристических нормалей*. Он делит пространство на несколько частей.

Рассмотрим ту часть, которая содержит $(1,0,0)$. Мы показали, что эта часть пространства совпадает с теми векторами (τ,ξ,η), для которых форма положительно определена и выпукла.

Чтобы найти границу конуса положительно определенных форм, надо для каждой фиксированной пары (ξ,η) найти наибольший корень $\tau^*(\xi,\eta)$ уравнения

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0.$$

Легко видеть, что выполнение неравенства

$$\tau\geq\tau^*(\xi,\eta)$$

является условием неотрицательности фрмы $\tau(Au,u)+\xi(Bu,u)+\eta(Cu,u)$.

Обычно вместо $\tau^*(\xi,\eta)$ рассматривают функцию

$$H(\xi,\eta)=-\tau^*(\xi,\eta),$$

а конус векторов, отвечающих неотрицательным формам, задается неравенством

$$\tau+H(\xi,\eta)\geq 0.$$

Заметим, что функция H – однородная функция первой степени однородности:

$$H(\alpha\xi,\alpha\eta)=\alpha H(\xi,\eta)$$

при $\alpha>0$. Если H – дифференцируемая функция, то по теореме Эйлера

$$H(\xi,\eta)=\xi\partial_\xi H(\xi,\eta)+\eta\partial_\eta H(\xi,\eta).$$

Проиллюстрируем теперь приведенную конструкцию построения H двумя примерами.

Первый случай соответствует системе с одной пространственной переменной. Тогда $H=H(\xi)$, но может быть, что $H(-\xi)\neq -H(\xi)$.

Рассмотрим гиперболическую систему в каноническом виде:

$$\partial_t u+K\partial_x u=f,\quad K=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & k_2 & \dots & 0\\ 0 & \dots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & k_n\end{pmatrix}.$$

Здесь $A=E$, $B=K$,

$$\det\|\xi E+\eta K\|=(\tau+k_1\eta)\dots(\tau+k_n\eta).$$

Уравнение

$$\det\|\xi E+\eta K\|=0$$

определяет конус характеристических номралей n прямых $\tau + k_j\eta = 0$, которые делят плоскость (ξ, tau) на некоторое количество углов.

Угол, содержащий вектор $\tau = 1$, $\xi = 1$, ограниченный лучами прямых $\tau + k_p\eta = 0$, отвечают наибольшему и наименьшему коэффицентам k_p. Функция H здесь определяется как

$$H(\xi) = \max_j(-\xi k_j).$$

Пример 11.1. В качестве второго примера рассмотрим двумерные уравнения теории упругости

$$\begin{cases} \varrho_0\partial_t u = \partial_x\sigma_{11} + \partial_y\sigma_{21} \\ \varrho_0\partial_t v = \partial_x\sigma_{21} + \partial_y\sigma_{22} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \partial_t\sigma_{11} = (K + 4\nu/3)\partial_x u + (K - 2\nu/3)\partial_y v \\ \partial_t\sigma_{22} = (K - 2\nu/3)\partial_x u + (K + 4\nu/3)\partial_y v \\ \partial_t\sigma_{12} = \nu(\partial_x v + \partial_y u), \end{cases}$$

где ϱ_0 – плотность среды, (u, v) – вектор скорости перемещения, σ_{ik} – компоненты вектора напряжений. Постоянные положительные коэффиценты K и ν называются соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига.* Выписанная выше система – симметризуемая.

Поделим последнее уравнение на ν, а вместо третьего и четвертого возьмем некоторые их линейные комбинации. После этих преобразований уравнения упругих волн запишутся в виде

$$\begin{cases} \varrho_0\partial_t u - \partial_x\sigma_{11} - \partial_y\sigma_{12} = 0 \\ \varrho_0\partial_t v - \partial_x\sigma_{12} - \partial_y\sigma_{22} = 0 \\ \partial_t\left(\frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)}\sigma_{11} - \frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)}\sigma_{22}\right) - \partial_x u = 0 \\ \partial_t\left(-\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+mu)}\sigma_{11} + \frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+\nu)}\sigma_{22}\right) - \partial_y v = 0 \\ \frac{1}{\nu}\partial_t\sigma_{12} = \partial_x v + \partial_y u. \end{cases}$$

Эта система симметрическая:

$$A\partial_t u + B\partial_x u + C\partial_y u = 0,$$

где

$$u_1 = u,\quad u_2 = v,\quad u_3 = \sigma_{11},\quad u_4 = \sigma_{22},\quad u_5 = \sigma_{12},$$

$$A = \begin{pmatrix} \varrho_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)} & -\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)} & \frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nu} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0$ для этой системы имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} \varrho_0\tau & 0 & -\xi & 0 & -\eta \\ 0 & \varrho_0\tau & 0 & -\eta & -\xi \\ -\xi & 0 & \frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)}\tau & -\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)}\tau & 0 \\ 0 & -\eta & -\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)}\tau & \frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)}\tau & 0 \\ -\eta & -\xi & 0 & 0 & \frac{1}{\nu}\tau \end{pmatrix}=0.$$

Заметим, что

$$\frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)}\tau+\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)}\tau=\frac{1}{2}\frac{\tau}{\nu}.$$

В обозначениях

$$\omega=\varrho_0\tau,\quad a=\frac{3K+4\nu}{4\nu(3K+mu)}\tau,\quad b=\frac{3K-2\nu}{4\nu(3K+\nu)}\tau$$

уравнение запишется в виде

$$\det\begin{pmatrix} \omega & 0 & -\xi & 0 & -\eta \\ 0 & \omega & 0 & -\eta & -\xi \\ -\xi & 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -\eta & -b & a & 0 \\ -\eta & -\xi & 0 & 0 & 2(a+b) \end{pmatrix}=0.$$

Окончательно

$$\left[a(\xi^2+\eta^2)-\omega(a^2-b^2)\right]\left[\xi^2+\eta^2-2\omega(a+b)\right]=0.$$

Вернемся теперь к первоначальным обозначениями

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=$$

$$\frac{\varrho_0^2}{4\nu^2(K+\nu/3)}\tau\left[\tau^2-\frac{K+4\nu/3}{\varrho_0}(\xi^2+\eta^2)\right]\left[\tau^2-\frac{\nu}{\varrho_0}(\xi^2+\eta^2)\right]=0.$$

Это уравнение определяет плоскость $\tau=0$ и два конуса

$$\tau^2=\frac{K+4\nu/3}{\varrho_0}(\xi^2+\eta^2),\quad \tau^2=\frac{\nu}{\varrho_0}(\xi^2+\eta^2).$$

Внутренней полой конуса, содержащего вектор $\tau=1$, $\xi=\eta=0$, будет верхняя пола конуса

$$\tau^2=\frac{K+4\nu/3}{\varrho_0}(\xi^2+\eta^2).$$

Это значит, что матрицы $\tau A+\xi B+\eta C$ неотрицательно определены, если

$$\tau-\sqrt{\frac{K+4\nu/3}{\varrho_0}}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\geq 0.$$

Функцию $H(\xi,\eta)$ надо определить равенством

$$H(\xi,\eta) = -\sqrt{\frac{K+4\nu/3}{\varrho_0}}\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

В заключение сделаем еще одно замечание. Если матрицы коэффицентов A, B, C – переменные, то есть зависят от точки (x,y,t), то и конус векторов (τ,ξ,η), связанных с неотрицательно определенными формами, будет в каждой точке свой.

Уравнение Гамильтона – Якоби

В этом пункте подведем итог в рассмотрении вопроса об области единственности для решений симметричной гиперболической системы. Пусть некоторая область Q ограничена снизу плоскостью $t=0$, а сверху – «шапочкой» $\varphi(t,x,y)$, $\nabla\varphi \neq 0$. Предполагаем, что $\varphi < 0$ внутри области и $\varphi > 0$ вне области. Эта область предполагается ограниченной.

Внешняя нормаль к «шапочке» $\varphi = 0$ направлена вдоль вектора градиента $\nabla\varphi$.

Если (τ,ξ,η) – единичный вектор внешней нормали, то

$$k\tau = \partial_t\phi, \quad k\xi = \partial_x\varphi, \quad k\eta = \partial_y\varphi,$$

где

$$k = \sqrt{(\partial_t\varphi)^2 + (\partial_x\varphi)^2 + (\partial_y\varphi)^2} > 0.$$

Если мы хотим, чтобы форма $((\tau A + \xi B + \eta C)u, u)$ была неотрицательной, необходимо, чтобы

$$\tau + H(\xi,\eta,x,y,t) \geq 0.$$

В силу однородности

$$k\tau + H(k\xi, k\eta, x, y, t) \geq 0, \quad k > 0.$$

Иными словами, уравнение поверхности

$$\varphi(x,y,t) = 0$$

должно задаваться функцией φ, удовлетворяющей неравенству

$$\partial_t\varphi + H(\partial_x\varphi, \partial_x\varphi, x, y, t) \geq 0. \tag{71}$$

Это неравенство называется *неравенством Гамильтона – Якоби.*

Среди всех поверхностей, удовлетворяющих неравенству (71), выделяется решение уравнения Гамильтона – Якоби

$$\partial_t\varphi + H(\partial_x\varphi, \partial_x\varphi, x, y, t) = 0.$$

Заметим, что если взять по поверхности $\varphi = \mathrm{const}$, связанной с этим уравнением, интеграл

$$\int\limits_{\varphi=\mathrm{const}} ((\tau A + \xi B + \eta C)u, u)\, ds$$

будет неотрицательным.

В свое время характеристиками мы определили поверхности, единичный вектор нормали (τ, ξ, η) которых удовлетворяет уравнению

$$\det \|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0.$$

Равенство $\tau + H = 0$ выделяет только часть решений этого уравнения. Равенство $\det \|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0$ определяет конус характеристических нормалей. Уравнение Гамильтона – Якоби выделяет из этого конуса только одну полу, охватывающую полуось τ.

Подробную процедуру решения уравнения Гамильтона – Якоби можно найти во многих источниках. Ниже будет приведен алгоритм решения этого уравнения (существование и гладкость которого, равно как и гладкость функции H, предполагаются).

Алгоритм решения уравнения Гамильтона – Якоби расммотрим подробнее в следующей лекции.

Лекция 12. Примеры выполнения условий теоремы единственности

Алгоритм решения уравнения Гамильтона – Якоби

Наконец, закончим исследование теоремы единственности решения задачи Коши для гиперболических по Фридрихсу систем.

Как мы отмечали ранее, если мы хотим, чтобы форма $((\tau A + \xi B + \eta C)u, u)$ была неотрицательной, нам надо, чтобы

$$\tau + H(\xi, \eta, x, y, t) \geq 0.$$

Наряду с уравнением Гамильтона – Якоби, рассмотренным ранее, рассмотрим равенства, получаемые из него дифференцированием по x и y:

$$\partial_t \varphi_x + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi_x + H_{\varphi_y} \partial_x \varphi_y + H_x = 0,$$

$$\partial_t \varphi_y + H_{\varphi_x} \partial_y \varphi_x + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi_y + H_y = 0.$$

В силу $\partial_y \varphi_x = \partial_x \varphi_y$ можно переписать

$$\partial_t \varphi_x + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi_x + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi_y + H_x = 0$$

$$\partial_t \varphi_y + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi_x + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi_y + H_y = 0.$$

Воспользовавшись (в силу однородности) тождеством

$$H(\partial_x \varphi, \partial_x \varphi, x, y, t) = H_{\varphi_x}(\partial_x \varphi, \partial_x \varphi, x, y, t) \partial_x \varphi + H_{\varphi_y}(\partial_y \varphi, \partial_x \varphi, x, y, t) \partial_y \varphi,$$

уравнение Гамильтона – Якоби можно переписать как

$$\partial_t \varphi + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi = 0.$$

Расширенную систему

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi = 0 \\ \partial_t \varphi_x + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi_x + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi_x + H_x = 0 \\ \partial_t \varphi_y + H_{\varphi_x} \partial_x \varphi_y + H_{\varphi_y} \partial_y \varphi_y + H_y = 0 \end{cases}$$

нетрудно проинтегрировать методом характеристик. Обозначим

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \varphi_x, \quad p_2 = \varphi_y$$

и перепишем систему еще раз:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + H_{p_1}(p_1, p_2, q_1, q_2, t) \partial_{q_1} \varphi + H_{p_2} \partial_{q_2} \varphi = 0 \\ \partial_t p_1 + H_{p_1} \partial_{q_1} p_1 + H_{p_2} \partial_{q_2} p_1 + H_{q_1} = 0 \\ \partial_t p_2 + H_{p_1} \partial_{q_1} p_2 + H_{p_2} \partial_{p_2} p_2 + H_{q_2} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим характеристики этой системы

$$\frac{dp_1}{dt} = H_{p_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = H_{p_2}.$$

Вдоль этих характеристик

$$\frac{dp_1}{dt} = \partial_t p_1 + H_{p_1}\partial_{q_1} p_1 + H_{p_2}\partial_{q_2} p_1 = -H_{q_1},$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \partial_t p_2 + H_{p_1}\partial_{q_1} p_2 + H_{p_2}\partial_{q_2} p_2 = -H_{q_2}.$$

Также вдоль характеристик

$$\frac{d\varphi}{dt} = \partial_t \varphi + H_{p_1}\partial_{q_1}\varphi + H_{p_2}\partial_{q_2}\varphi = 0.$$

Итак, если мы знаем, что в некоторой окрестности плоскости $t = 0$ существует решение $\varphi(x, y, t)$ уравнения Гамильтона – Якоби

$$\partial_t\varphi + H(\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, x, y, t) = 0,$$

принимающее при $t = 0$ начальное значение

$$\varphi(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_0(x, y),$$

то мы можем построить решение по следующему алгоритму.

Через каждую точку (x_0, y_0) этой области проведем характеристики с начальными данными

$$q_1|_{t=0} = x|_{t=0} = x_0,$$

$$q_2|_{t=0} = y|_{t=0} = y_0,$$

$$p_1|_{t=0} = \partial_x\varphi_0, \quad p_2|_{t=0} = \partial_y\varphi_0$$

и уравнениями (называемыми также *уравнениями бихарактеристики уравнения Гамильтона – Якоби*

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = H_{p_i},$$

которые называются *каноническими уравнениями Гамильтона*. Траектории этих уравнений заполняют некоторую окрестность плоскости $t = 0$ в нашей области. Вдоль каждой из этих траекторий $\varphi = \varphi_0(q_1^0, q_2^0)$ не зависит от t. Из уравнений

$$x = q_1(t, q_1^0, q_2^0), \quad y = q_2(t, q_1^0, q_2^0)$$

по заданным (x, y, t) в выделенной области можно выделить единственную траекторию с начальными значениями q_1^0, q_2^0, проходящую через точку (x, y, t), что однозначно определяет $\varphi(x, y, t)$.

Распространение звуковых волн в движущейся среде

Пример 12.1. Напишем уравнение Гамильтона – Якоби для симметрической системы, описывающей распространение звуковых волн в движущейся среде

$$\begin{cases} \varrho_0\partial_t u + \varrho_0 U_x u + \partial_x p = 0 \\ \varrho_0\partial_t v + \varrho_0 U\partial_x v + \partial_y p = 0 \\ \frac{1}{\varrho+0c_0^2}\partial_t p + \frac{U}{\varrho_0 c_0^2}\partial_x p + \partial_x u + \partial_y v = 0 \end{cases} \tag{72}$$

Здесь $u+U$, v – компоненты скорости, $u \ll U$, $v \ll U$, p – возмущение давления. Если положить $t' = t$, $x' = x - Ut$, $y' = y$ (то есть перейти к движущимся со скоростью U координатам), эта система перейдет в уже известную нам систему уравнений акустики

$$\begin{cases} \varrho_0\partial_{t'} u + \partial_{x'} p = 0 \\ \varrho_0\partial_{t'} v + \partial_{y'} p = 0 \\ \frac{1}{\varrho_0 c_0^2}\partial_{t'} p + \partial_{x'} u + \partial_{y'} v = 0 \end{cases}$$

Уравнение

$$\det \|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0$$

для уравнений звука (72) в движущейся среде имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \varrho_0(\tau + U\xi) & 0 & \xi \\ 0 & \varrho_0(\tau+U\xi) & \eta \\ \xi & \eta & \frac{1}{\varrho_0 c_0^2}(\tau + U\xi) \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем равенство

$$\frac{\varrho_0}{c_0^2}(\tau + U\xi)\left((\tau+U\xi)^2 - c_0^2(\xi+\eta)^2\right) = 0.$$

Конус характеристических нормалей для этой системы распадается на плоскость

$$\tau + U\xi = 0$$

и конус второго порядка

$$(\tau+U\xi)^2 - c_0^2(\xi+\eta)^2 = 0.$$

Таким образом, конус характеристических нормалей разбивает все пространство (τ, ξ, η) на четыре части:

I.
$$\tau + U\xi > c_0\sqrt{\xi^2+\eta^2};$$

II.
$$c_0\sqrt{\xi^2+\eta^2} > \tau + U\xi > 0;$$

III.
$$0 > \tau + U\xi > -c_0\sqrt{\xi^2+\eta^2};$$

IV.

$$-c_0\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Вектор $\tau = 1$, $\xi = \eta = 0$, очевидно, находится в области I. Именно в этой области лежат вектора, отвечающие положительно определенным энергетическим формам.

Если $|U| < c_0$, то для векторой этой области

$$\tau > c_0\sqrt{\xi^2+\eta^2} - U\xi \geq (c_0 - |U|)|\xi| \geq 0,$$

то есть вся область лежит в полупространстве $\tau > 0$.

Если же $|U| > c_0$, то область $\tau > c_0\sqrt{\xi^2+\eta^2} - U\xi$ уже пересекается с полупространством $\tau < 0$.

Уравнение Гамильтона – Якоби, отвечающее исследуемой системе:

$$\partial_t\varphi + U\partial_x\varphi - c_0\sqrt{(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_y\varphi)^2} = 0.$$

В покоящемся газе оно упрощается до

$$\partial_t\varphi - c_0\sqrt{(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_y\varphi)^2} = 0. \tag{73}$$

Построим сначала характеристики в этом простом случае.

Пусть неравенство $\varphi_0(x,y) < 0$ определяет на плоскости (x,y) ограниченную область. Кривая $\varphi_0(x,y) = 0$ – ее граница.

Постараемся построить функцию $\varphi = \varphi(x,y,t)$ такую, что

$$\varphi(x,y,0) = \varphi_0(x,y),$$

и чтобы она удовлетворяла уравнению Гамильтона – Якоби (73). Мы будем сейчас интересоваться лишь тем, как с течением времени меняется граница $\varphi(t,x,y) < 0$ области, то есть как движется линия $\varphi(t,x,y) = 0$ при изменении t. Возьмем какую-нибудь точку (x_0,y_0) на линии $\varphi_0(x,y) = 0$ и определим на ней

$$q_1^0 = x_0, \quad q_2^0 = y_0$$

$$p_1^0 = \partial_x\varphi_0(x_0,y_0), \quad p_2^0 = \partial_y\varphi_0(x_0,y_0).$$

Очевидно, вектор (p_1^0, p_2^0) направлен по внешней нормали к кривой $\varphi_0(x,y) = 0$. Выпишем уравнение бихарактеристик

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = H_{p_1} = -c_0\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -H_{q_1} = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = H_{p_2} = -c_0\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}},$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -H_{q_2} = 0.$$

Из этих уравнений видно, что вектор $(p_1, p_2) \equiv (p_1^0, p_2^0)$ постоянен вдоль бихарактеристики и, следовательно, будет постоянен и вектор скорости $(dx/dt, dy/dt)$ движения вдоль бихарактеристики. Этот вектор направлен по той же прямой, что и (p_1, p_2). Его модуль равен

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = c_0.$$

Вдоль бихарактеристики

$$\varphi(t, x, y) = \text{const} = 0.$$

Двигаясь вдоль бихарактеристики, мы будем смещаться внутрь области $\varphi_0(x, y) < 0$ по нормали к ее границе с постоянной скоростью c_0. По теореме единственности начальные данные, известные при $t = 0$, однозначно определяют решение для $t > 0$ в области $\varphi(t, x, y) < 0$.

Пример 12.2. Уравнение Гамильтона – Якоби имеет частные решения

$$\varphi(t, x, y) = c_0 t + \alpha x + \beta y + \gamma, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1;$$

$$\varphi_1(t, x, y) = c_0 t - x - 3, \quad \varphi_2(t, x, y) = c_0 t + x,$$
$$\varphi_3(t, x, y) = c_0 t + y, \quad \varphi_4(t, x, y) = c_0 t - y - 1.$$

Кусочно-гладкая функция

$$\varphi(t, x, y) = \min(\varphi(t, x, y), \quad \varphi_2(t, x, y), \quad \varphi_3(t, x, y), \quad \varphi_4(t, x, y) =$$
$$= \min(c_0 t - x - 3, \quad c_0 t + x, \quad c_0 t + y, \quad c_0 t - y - 1)$$

в каждой области гладкости есть решение уравнения Гамильтона – Якоби

$$\partial_t \varphi - c_0 \sqrt{(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2} = 0$$

Поэтому, если в этих областях гладкости направить единичный вектор (τ, ξ, η) по внешней нормали к границе области $\varphi < 0$, получим

$$\int\limits_{\varphi=0} ((\tau A + \xi B + \eta C)u, u)\, ds \geq 0.$$

Этот интеграл можно разбить по областям гладкости поверхности $\varphi = 0$.

Область $\varphi < 0$, $t > 0$ является областью единственности уравнений акустики. Рассмотрим ее внимательнее. Неравенство $\varphi(0, x, y) < 0$ выделяет на плоскости $t = 0$ прямоугольник

$$-3 < x < 0, \quad -1 < y < 0.$$

При увеличении t граница $\varphi = 0$ будет перемещаться внутрь исходного прямоугольника. Нормальная скорость этого перемещения равна c_0. С течение времени область $\varphi(t, x, y) < 0$ уменьшается. При $t = 1/(2c_0)$ горизонтальные границы схлопнутся, а начиная с этого времени область $\varphi(t, x, y) < 0$ перестает существовать.

Область единственности для системы уравнений звука

Пример 12.3. Приведем область единственности для системы уравнений звука в движущемся газе, если начальные данные заданы при

$$\varphi_0(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - R < 0.$$

Решение уравнения Гамильтона – Якоби

$$\partial_t\varphi + U\partial_x\varphi - c_0\sqrt{(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_y\varphi)^2} = 0$$

с начальным условием $\varphi_0(x,y)$ дается формулой

$$\varphi(t,x,y) = \sqrt{(x-Ut)^2+y^2} + c_0t - R.$$

Поверхность $\sqrt{(x-Ut)^2+y^2} - c_0t - R = 0$ ограничивает нужную нам область единственности. Она представляет собой одну полу конуса с вершиной в точке

$$t_0 = \frac{R}{c_0}, \quad x_0 = Ut_0 = \frac{UR}{c_0}, \quad y_0 = 0.$$

Расположение областей единственности в пространстве (t,x,y) для двух случаев: дозвукового ($|U| < c_0$) и сверхзвука ($|U| > c_0$) отличаются большей вытянутостью конуса сверхзвука.

В свое время, давая определение характеристической поверхности, мы ее определили как поверхность, вектор нормали (τ,ξ,η) к которой лежит на конуса характеристических нормалей

$$\det\|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0.$$

Пусть вектор (τ,ξ,η) пробегает такой конус. Сопоставим каждому такому вектору перпендикулярную к нему плоскость

$$\tau(t-t_0) + \xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) = 0.$$

Когда вектор (τ,ξ,η) пробегает характеристический конус, эти плоскости огибают некоторый другой конус.

Сеточные функции (начало)

В прошлых лекциях мы доказали теорему единственности решения задачи Коши для гиперболической по Фридрихсу системы. Теперь перейдем к теореме существования. Приближенные решения мы будем получать в виде сеточных функций, определенных на дискретной системе точек

$$x = ih, \quad y = jh, \quad t = k\tau, \quad i,j,k \in \mathbb{Z}.$$

Постоянные h, τ называются *шагами сетки.* При доказательстве теоремы существования нам придется использовать критерии компактности сеточных функций.

Замечание 12.1. Такой новый язык чрезвычайно полезен в дискретном анализе решаемых проблем (например, в анализе уравнений математической физики на графах).

Рассматривая фиксированную сетку, мы обозначим $u(x, y, t) = u(ih, jh, k\tau$ через u_{ijk} и сформулируем правило интерполяции, позволяющее функции, первоначально заданной только на сетке, сопоставить вполне определенную непрерывную функцию, заданную при всех (x, y, t). Эту непрерывную функцию, определенную по сеточной u_{ijk}, мы тоже будем обозначать $u(x, y, t)$. Значения $u(x, y, t)$ внутри параллелепипеда ячейки сетки $ih \le x \le (i+1)h$, $jh \le y \le (j+1)h$, $k\tau \le t \le (k+1)\tau$ определим формулой

$$
\begin{gathered}
u(x,y,t) = u_{i,j,k}\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(ki+1-\frac{t}{h}\right)+ \\
+u_{i,j,k+1}\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+ \\
+u_{i,j+1,k}\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(ki+1-\frac{t}{h}\right)+ \\
+u_{i,j+1,k+1}\left(i+1-\frac{x}{h}\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+ \\
+u_{i+1,j+1,k}\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(ki+1-\frac{t}{h}\right)+ \\
+u_{i+1,j+1,k+1}\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(\frac{y}{h}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+ \\
+u_{i+1,j,k+1}\left(\frac{x}{h}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right) = \sum_{i',j',k'} \alpha_{i',j',k'} u_{i',j',k'}, \quad \alpha_{i',j',k'} \ge 0.
\end{gathered}
$$

В последней сумме (i', j', k') пробегают значения, соответствующие вершинам параллелепипеда, а через $\alpha_{i',j',k'}(x, y, t)$ мы обозначили коэффиценты интерпляционной формулы, выписанной выше.

Поиск коэффицентов $\alpha_{i',j',k'}$ предоставляется в качестве упражнения. Также в качестве упражнения на дом предоставляются следующие задачи.

Задача 12.1. *Внутри параллелепипеда $u(x, y, t)$ линейна по x при фиксирванных y, t, линейна по y при фиксированных x, t, линейна по t при фиксированных x, y.*

Нетрудно убедиться, что в любой точке (x, y, t) параллелепипеда сумма всех коэффицентов $\alpha_{i',j',k'}$ равна 1. Действительно, если $u_{ijk} = 1$ во всех вершинах, то $u(x, y, t)$ как линейная функция по каждому аргументу равна 1 всюду внутри параллелепипеда. Тогда

$$
u(x,y,t) = 1 = \sum_{i',j',k'} \alpha_{i',j',k'} u_{i',j',k'} = \sum_{i',j',k'} \alpha_{i',j',k'}.
$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} 1dxdydt = \sum_{i',j',k'}\int\limits_{i'h}^{(i'+1)h}\int\limits_{j'h}^{(j'+1)h}\int\limits_{k'\tau}^{(k'+1)\tau} \alpha_{i',j',k'}dxdydt.$$

Приходим к выводу, что сумма интегралов в правой части равна $h^2\tau$.

Задача 12.2. *Любые два интеграла слагаемых в этой сумме равны между собой, что следует из свойств симметрии*

$$\alpha_{i',j',k'}(ih+\xi,y,t) = \alpha_{i',j',k'}((i+1)h-\xi,y,t),$$

$$\alpha_{i',j',k'}(x,jh+\eta,t) = \alpha_{i',j',k'}(x,(j+1)h-\eta,t),$$

$$\alpha_{i',j',k'}(x,y,k\tau+\delta) = \alpha_{i',j',k'}(x,y,(k+1)\tau-\delta).$$

Задача 12.3. *Поэтому для каждого из коэффицентов*

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \alpha_{i,j,k}(x,y,t) = \frac{h^2\tau}{8}$$

получаем это непосредственной выкладкой, так как функция линейна по каждой переменной, первообразная линейной квадратична, а значит, при интегрировании по каждой переменной появляется $1/2$.

Воспользуемся тем, что

$$\alpha_{i',j',k'}(x,y,t) \geq 0, \quad \sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'} = 1,$$

и применим неравенство Буняковского

$$u^2(x,y,t) = \left(\sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'}u_{i',j',k'}\right)^2 = \left(\sum_{i',j',k'}\sqrt{\alpha_{i',j',k'}}\sqrt{\alpha_{i',j',k'}}u_{i',j',k'}\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'}\sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'}u^2_{i',j',k'}.$$

Полученное неравенство

$$u^2(x,y,t) \leq \sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'}\sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'}u^2_{i',j',k'} = \sum_{i',j',k'}\alpha_{i',j',k'}u^2_{i',j',k'}.$$

Проинтегрируем это неравенство по всему параллелепипеду:

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\int\limits_{jh}^{(j+1)h}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} u^2(x,y,t)dxdydt \leq$$

$$\leq \sum_{i',j',k'} \int\limits_{i'h}^{(i'+1)h} \int\limits_{j'h}^{(j'+1)h} \int\limits_{k'\tau}^{(k'+1)\tau} \alpha_{i',j',k'} dxdydt u^2_{i',j',k'} = \frac{h^2\tau}{8} \sum_{i',j',k'} u^2_{i',j',k'}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h} \int\limits_{jh}^{(j+1)h} \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} u^2(x,y,t) dxdydt \leq\leq \frac{h^2\tau}{8} \sum_{\substack{\text{параллелепипеда} \\ \text{по всем 8 вершинам}}} u^2_{i',j',k'}.$$

Если некоторая ограниченная область G в пространстве (x, y, t) покрывается некоторым конечным числом ячеек сетки, то, суммируя доказанные неравенства по всем параллелепипедам, получаем неравенство

$$\int\limits_G u^2(x,y,t) dxdydt \leq h^2\tau \sum_{\text{по всем узлам}} u^2_{i',j',k'}. \qquad (74)$$

Продолжим разбор темы на следующей лекции.

Лекция 13. Сеточные функции. Критерий компактности

Сеточные функции (продолжение)

Итак, продолжим разговор про сеточные функции.

Неравенство (74) показывает, что если мы построим сеточную функцию и оценим для нее

$$h^2\tau \sum_{\text{по всем узлам}} u^2_{i',j',k'},$$

то, продолжив интерполяцией эту сеточную функцию на всю область G, покрытую сеткой, мы можем для этого продолжения автоматически использовать оценку

$$\int\limits_G u^2(x,y,t)dxdydt$$

той же самой константой, которой оценена сеточная сумм. Это сеточный аналог теорем вложения Соболева, которыми мы будем заниматься в следующем семестре. Суть их в том, что находятся условия на обобщенные производные распределения, при которых оно становится классической гладкой функцией.

Для сеточных функций, линейно интерполированных в непрерывные функции, мы найдем оценки на значения функции в узлах сетки, при которых мы можем выбрать подпоследовательность таких интерполяций, которые сходятся к классической гладкой функции.

Для доказательства теоремы существования нам понадобится перейти к расширенной системе сеточных функций

$$\{U_{ijk}\} = \left(\{u_{ijk}, \left\{\frac{\Delta u}{\Delta x_{ijk}}\right\}, \left\{\frac{\Delta u}{\Delta y_{ijk}}\right\}, \left\{\frac{\Delta u}{\Delta z_{ijk}}\right\}\right),$$

где через $\Delta u/\Delta t$ обозначили разностное соотношение

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t}\bigg|_{ih,jh,k\tau} = \frac{u(ih,jh,(k+1)\tau) - u(ih,jh,k\tau)}{\tau}.$$

По аналогии,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\bigg|_{ih,jh,k\tau} = \frac{u((i+1)h,jh,(k+1)\tau) - u(ih,jh,k\tau)}{h},$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\bigg|_{ih,jh,k\tau} = \frac{u(ih,(j+1)h,(k+1)\tau) - u(ih,jh,\tau)}{h}.$$

Также проведем линейную интерполяцию

$$U_h(x,y,t) = (u_h(x,y,t), v_h(x,y,t), \omega_h(x,y,t), g_h(x,y,t)),$$

где $u_h(x,y,t)$ – линейная интерполяция сеточной функции $\{u_{ijk}\}$, $v_h(x,y,t)$ – линейная интерполяция сеточной функции $\{(\Delta u/\Delta x)_{ijk}\}$, $\omega_h(x,y,t)$ – линейная интерполяция сеточной функции $\{(\Delta u/\Delta y)_{ijk}\}$ и $g_h(x,y,t)$ – линейная интерполяция сеточной функции $\{(\Delta u/\Delta)_{ijk}\}$. По аналогии с приведенным выше получим

$$\int\limits_G U^2(x,y,t)dxdydt \le h^2\tau \sum_{\text{по всем узлам}} U^2_{i',j',k'}.$$

Для вектор-функции $U_h(x,y,t)$ мы получим условия компактности, при которых подпоследовательность этих функций равномерно сходится при $h \to 0$ к непрерывной вектор-функции

$$\hat{U}(x,y,t) = \left(\hat{u}(x,y,t), \hat{v}(x,y,t), \hat{\omega}(x,y,t), \hat{g}(x,y,t)\right).$$

Чрезвычайно красивым фактом является то, что

$$\partial_x \hat{u}(x,y,t) = \hat{v}(x,y,t), \tag{75}$$

$$\partial_y \hat{u}(x,y,t) = \hat{\omega}(x,y,t), \tag{76}$$

$$\partial_t \hat{u}(x,y,t) = \hat{g}(x,y,t). \tag{77}$$

Это позволяет перейти к доказательству теоремы существования.

Теперь отметим, что (75), (76) и (77) получены при определенных оценках на сеточные функции $\{u_{ijk}\}$, $\{(\Delta u/\Delta x)_{ijk}\}$, $\{(\Delta u/\Delta y)_{ijk}\}$, $\{(\Delta u/\Delta t)_{ijk}\}$ и их разностных отношениях. Значения сеточных функций мы получаем по алгоритму задачи Коши для гиперболической по Фридрихсу системы (то есть конкретной физической задаче). Необходимые нам оценки сеточных функций будут получены в терминах конкретной задачи, как условия на ее коэффиценты системы Фридрихса и начальные данные задачи Коши.

Теперь вернемся к оценкам интерполированных функций на каждом фиксирванном сеточном слое $t = k\tau = \text{const}$.

На каждом фиксированном сеточном слое $t = k\tau = \text{const}$

$$u(x,y,k\tau) = \alpha_{i,j,k}u_{i,j,k} + \alpha_{i+1,j,k}u_{i+1,j,k} +$$

$$+\alpha_{i,j+1,k}u_{i,j+1,k} + \alpha_{i+1,j+1,k}u_{i+1,j+1,k}$$

а все остальные коэффиценты $\alpha_{i',j',k+1}(x,y,k\tau) = 0$.

По аналогии с приведенными выше оценками получим

$$\int\limits_{t=k\tau,G} u^2(x,y,k\tau)dxdy^2 \sum_{\substack{\text{по всем узлам}\\ \text{слоя } t=k\tau}} u^2(x,y,k\tau).$$

При $k\tau < t < (k+1)\tau$ и нашем способе линейной интерполяции

$$u(x,y,t) = \frac{(k+1)\tau - t}{\tau}u(x,y,k\tau) + \frac{t-k\tau}{\tau}u(x,y,(k+1)\tau)0,$$

$$u^2(x,y,t) \le \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} u^2(x,y,k\tau) + \frac{t-k\tau}{\tau} u^2(x,y,(k+1)\tau),$$

$$\int\limits_{t=k\tau,G} u^2(x,y,t)dxdy \le \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} \int\limits_{t=k\tau,G} u^2(x,y,k\tau)dxdy +$$

$$+t-k\tau\tau \int\limits_{t=(k+1)\tau,G} u^2(x,y,(k+1)\tau)dxdy \le$$

$$\le \max\left(\int\limits_{t=k\tau,G} u^2(x,y,t)dxdy, \quad \int\limits_{t=(k+1)\tau,G} u^2(x,y,t)dxdy\right).$$

Поэтому при любом t

$$\int\limits_{t=\text{const}} u^2(x,y,t)dxdy \le h^2 \max_{\text{по всем сеточным слоям}} \sum_{\text{по слою} t=k\tau} u^2(x,y,k\tau).$$

Оценки квадратичных интегралов от производных интерполированной функции

Теперь мы покажем, что оценки квадратичных интегралов от производных проинтерполированной $u(x,y,t)$ вытекают из оценок соответствующих сумм квадратов разностных отношений сеточной функции. Обозначим через $\Delta u/\Delta t$ разностное отношение

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \left.\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|_{ih,jh,k\tau} = \frac{u(x,y,(k+1)\tau) - u(ih,jh,k\tau)}{\tau}.$$

На интервале $k\tau < t < (k+1)\tau$ производная проинтерполированной функции $u(x,y,t)$ постоянна и вычисляется по формуле

$$\partial_t u(x,y,t) = \sum_{i'j'} \alpha_{i'j'k}(x,y,k\tau) \left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]_{i'h,j'h,k\tau}.$$

Поэтому на этом интервале времени

$$(\partial_t u(x,y,t))^2 \le \sum_{i'j'} \alpha_{i'j'k}(x,y,k\tau) \left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]^2_{i'h,j'h,k\tau},$$

$$\int\limits_{k\tau<t<(k+1)\tau} (\partial_t u(x,y,t))^2 dt \le h^2 \sum_{\text{по слою} t=k\tau} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2.$$

Теперь очевидно, что

$$\max_t \int\limits_{t=\text{const},G} (\partial_t u(x,y,t))^2 dxdy \le h^2 \max_{\text{по всем сеточным слоям}} \sum_{\text{по слою} t=k\tau} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2,$$

где максимум по t следует брать только по тем t, для котрых $\partial_t u$ существует, исключая тем самым из рассмотрения конечное число значений t. Обозначая вычисляемые по сеточным функциям разностные отношения

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\bigg|_{x=ih,y=jh,t=k\tau} = \frac{u((i+1)h, jh, k\tau) - u(ih, h, k\tau)}{h},$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\bigg|_{x=ih,y=jh,t=k\tau} = \frac{u(h, (j+1)h, k\tau) - u(ih, h, k\tau)}{h}.$$

Отметим еще следующие неравенства для $u(x, y, t)$, построенной при помощи описанной интерполяции:

$$\int\limits_{G(y=\text{const},t=\text{const})} (\partial_x u)^2(x, y, t)dx \le h \max_{\text{по сеточным рядам } y=jh,t=k\tau} \left(\sum_{x=ih} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\right), \qquad (78)$$

$$\int\limits_{G(x=\text{const},t=\text{const})} (\partial_y u)^2(x, y, t)dx \le h \max_{\text{по сеточным рядам } x=ih,t=k\tau} \left(\sum_{y=jh} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Интегралы в этих неравенствах берутся по отрезкам прямых, параллельным координатным осям. Докажем первое из них, то есть (78). Второе же обосновывается заменой x на y.

При $ih < x < (i+1)h$, $jh < y < (j+1)h$, $t = k\tau = \text{const}$

$$u(x, y, t) = \frac{(i+1)h - x}{h} u(ih, y, k\tau) + \frac{x - ih}{h} u((i+1)h, y, k\tau),$$

$$u(x, y, t) = \frac{(j+1)h - y}{h} u(x, jh, k\tau) + \frac{y - jh}{h} u(x, (j+1)h, k\tau),$$

$$\partial_y u(x, y, t) = \frac{(i+1)h - x}{h} \partial_y u(ih, y, k\tau) + \frac{x - ih}{h} \partial_y u((i+1)h, y, k\tau),$$

$$\partial_x u(x, y, t) = \frac{(j+1)h - y}{h} \partial_x u(x, jh, k\tau) + \frac{y - jh}{h} \partial_x u(x, (j+1)h, k\tau),$$

$$(\partial_y u(x, y, t))^2 \le \frac{(i+1)h - x}{h} (\partial_y u(ih, y, k\tau))^2 + \frac{x - ih}{h} (\partial_y u((i+1)h, y, k\tau))^2 =$$

$$= \frac{(i+1)h - x}{h} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\bigg|_{ih,jh,k\tau} + \frac{x - ih}{h} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\bigg|_{(i+1)h,jh,k\tau}.$$

$$(\partial_x u(x, y, t))^2 \le \frac{(j+1)h - y}{h} (\partial_x u(x, jh, k\tau))^2 + \frac{y - jh}{h} (\partial_x u(x, (j+1)h, k\tau))^2 =$$

$$= \frac{(j+1)h - y}{h} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{ih,jh,k\tau} + \frac{y - jh}{h} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{ih,(j+1)h,k\tau},$$

а также

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h} (\partial_x u(x,y,t))^2\,dx \le$$

$$\le \frac{(j+1)h-y}{h}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{i,j,k} h + \frac{y-jh}{h}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{i,j+1,k} h.$$

Суммируя эти неравенства по i, приходим к доказываемому утверждению (78):

$$\int\limits_{y=\mathrm{const},t=\mathrm{const}} (\partial_x u(x,y,t))^2 dx \le$$

$$\le \frac{(j+1)h-y}{h}\sum_i\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{i,j,k} h + \frac{y-jh}{h}\sum_i\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{i,j+1,k} h \le$$

$$\le \max_{j,k}\left(\sum_i\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{i,j,k} h\right).$$

В то же время

$$\int\limits_{jh}^{(j+1)h} (\partial_y u(x,y,t))^2 dy \le$$

$$\le \frac{(i+1)h-x}{h}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\bigg|_{i,j,k} h + \frac{x-ih}{h}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\bigg|_{(i+1),j,k} h.$$

Кроме того,

$$h^2 \max_{\text{по всем сеточным слоям}} \sum_{\text{по слою } t=\tau k} u^2(x,y,k\tau) \le \mathrm{const},$$

$$h^2 \max_{\text{по всем сеточным слоям}} \sum_{\text{по слою } t=\tau k} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 \le \mathrm{const},$$

$$\max_{i,k}\left(\sum_j\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\bigg|_{i,j,k} h\right) \le \mathrm{const},$$

$$\max_{j,k}\left(\sum_j\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2\bigg|_{i,j,k} h\right) \le \mathrm{const},$$

которые перепишем в виде

$$h^2\tau\sum_{x,y,t} u^2(x,y,t) \le \mathrm{const}, \quad h^2\max_t\sum_{x,y} u^2(x,y,t) \le \mathrm{const},$$

$$h^2 \max_t \sum_{x,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 \leq \text{const}, \quad \max_{t,x} \left(\sum_y \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 h\right) \leq \text{const},$$

$$\max_{t,y} \left(\sum_x \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 h\right) \leq \text{const}.$$

Также аналогичные неравенства:

$$\int\limits_G u^2(x,y,t)dxdydt \leq \text{const}, \quad \max_t \int\limits_{G_t} u^2(x,y,t)dxdydt \leq \text{const},$$

где $G_s = G \cap (t = s)$, и

$$\max_t \int\limits_{G_t} (\partial_t u)^2(x,y,t)dxdydt \leq \text{const},$$

$$\max_{t,x} \int\limits_{G_{t,x}} (\partial_y u)^2(x,y,t)dxdydt \leq \text{const},$$

$$\max_{t,y} \int\limits_{G_{t,y}} (\partial_x u)^2(x,y,t)dxdydt \leq \text{const},$$

где $G_{s,\hat{x}} = G \cap (t = s, x = \hat{x}z)$ и $G_{s,\hat{y}} = G\ cap(t = s, x = \hat{y})$, которым удовлетворяют функции, проинтерполированные на все G.

Константы в соответствующих неравенствах для сеточных и продолженных функций одинаковы.

Теорема Арцеля

Доказанное утверждение позволяет нам применить следующую теорему, доказательство которой будет приведено в следующей лекции.

Теорема 13.1. *Заданная в параллелепипеде $x_1 < x < x_2 = x_1 + X$, $y_1 < y < y_2 = y_1 + Y$, $t_1 < t < t_2 = t_1 + T$ функция $u(x,y,t)$ такая, что при всех t*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} u^2(x,y,t)dxdy \leq M^2 XY,$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} (\partial_t u)^2(x,y,t)dxdy \leq L^2 \frac{XY}{T^2},$$

при всех t, y

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\partial_x u)^2(x,y,t)dxdy \leq \frac{L^2}{X}$$

и при всех t, x

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} (\partial_y u)^2(x,y,t)dxdy \leq \frac{L^2}{Y},$$

удовлетворяет неравенствам

$$|u(x,y,t)| \leq M + 2L,$$

$$|u(\xi_2,\eta_2,\tau_2) - u(\xi_1,\eta_1,\tau_1)| \leq$$
$$\leq L\left[\sqrt{\frac{|\xi_2-\xi_1|}{X}} + \sqrt{\frac{|\eta_2-\eta_1|}{Y}} + \left(\frac{|\tau_2-\tau_1|}{T}\right)^{1/3} + \right].$$

Теорема 13.2. *(Теорема Арцеля) Всякое равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное в ограниченной области семейство функций* $\{u\}$ *компактно в смысле равномерной сходимости.*

Следствие. Семейство функций $u(x,y,t)$, удовлетворяющих условиям теоремы, компактно в смысле равномерной сходимости.

Условия компактности на языке значений в узлах

Цель исследования сеточных функций – компактность – достигнута. На компактности будет основано доказательство существования решения задачи Коши для гиперболической по Фридрихсу системы. Для сеточных функций от трех переменных (x,y,t) мы будем пользоваться критерием компактно в несколько иной форме – будем требовать выполнения неравенств

$$\max_t \sum_{x,y} u^2(x,y,t)h^2 \leq \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 (x,y,t)h^2 \leq \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x,y} \left(\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 (x,y,t) + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 (x,y,t)\right) h^2 \leq \text{const},$$

$$\max_t \sum_{x,y} \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\right)^2 (x,y,t) + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 (x,y,t)h^2 \leq \text{const},$$

левые части которых содержат суммы только по целым сеточным слоям $t = \text{const}$ и не сожержат сумм по отдельным сеточным рядам ($t = \text{const}$, $y = \text{const}$), ($t = \text{const}$, $x = \text{const}$), которые участвовали в критерии, обоснованном выше. Вместо этого мы включили суммы по слою от квадратов вторых разностей

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = \frac{u(x+h,y+h) - u(x+h,y) - u(x,y+h) + u(x,y)}{h^2}.$$

Покажем, что из сформулированных сейчас неравенств следует выполнение уже обоснованного критерия компактности. Область G мы считаем прямоугольным параллелепипедом с гранями, параллельными координатным плоскостям $x_1 < x < x_2 = x_1 + X$, $y_1 < y < y_1 + Y$, $t_1 < t < t_2 = t_1 + T$. Пусть

$$\sum_{x,y} \left(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y} \right)^2 h^2 \leq \frac{K^2}{XY},$$

$$\sum_{x,y} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 h^2 \leq L^2.$$

Обозначим через $S(y_0)$ сумму

$$S(y_0) = \sum_{x,y=y_0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 h$$

и оценим разность $S(y_0 + h) - S(y_0)$:

$$S(y_0+h) - S(y_0) = \sum_x \left(\frac{u(x+y, y_0+h) - u(x, y_0+h)}{h} \right)^2 h -$$

$$-\sum_x \left(\frac{u(x+y, y_0) - u(x, y_0 + hy_0)}{h} \right)^2 h =$$

$$= \sum_x \left\{ \left(\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{y=y_0} h^2 + \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{y=y_0+h} h^2 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{u(x+y, y_0+h) - u(x, y_0+h) - u(x+y, y_0) + u(x, y_0)}{h^2} \right\}.$$

Лекция 14. Теорема существования

Предварительные соображения

В этой лекции мы продолжим изучение решений разностных уравнений и установим для их решений более тонкие оценеки. Как следствие этих оценок будет получена компактность сеточных функций и с ее помощью будет получено доказательство теоремы существования. Компактность решений будет выведена из критерия компактности сеточных функций, полученного нами ранее. Чтобы его применить, нужно сначала получить оценки для сумм по сетке, слагаемыми в которых будут квадратичные формы от разностных отношений различных порядков.

Для этого перейдем к расширенной системе разностных уравнений, полученной путем «разностного дифференцирования» первоначальной системы

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t}+B\frac{\Delta u}{\Delta x}+C\frac{\Delta u}{\Delta y}+Qu=0.$$

Мы покажем, что эта система удовлетворяет условиям основной теоремы предыдущей лекции, что позволит получить оценки для страрших разностных отношений.

Начнем с построения расширенной системы этих разностных уравнений путем «разностного дифференцирования» применения операторов $\Delta/\Delta t$, $\Delta/\Delta x$, $\Delta/\Delta y$. Так приходим к уравнениями

$$A(x,y,t+\tau)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta t)}{\Delta t}+B(x,y,t+\tau)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta t)}{\Delta x}+C(x,y,t+\tau)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta t)}{\Delta y}+$$

$$+\left[\frac{\Delta A}{\Delta t}+Q\right]\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\Delta B}{\Delta t}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta C}{\Delta t}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\frac{\Delta Q}{\Delta t}=0,$$

$$A(x,y,t)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta x)}{\Delta t}+B(x,y,t)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta x)}{\Delta x}+C(x,y,t)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta x)}{\Delta y}+$$

$$+\frac{\Delta A}{\Delta x}\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]\right|_{x-h,y,t}+\frac{\Delta B}{\Delta x}\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\right|_{x-h,y,t}+\frac{\Delta C}{\Delta x}\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta y}\right]\right|_{x-h,y,t}+$$

$$+Q\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\right|_{x-h,y,t}\frac{\Delta Q}{\Delta x}\left.[u]\right|_{x-h,y,t}=0.$$

Здесь в младших членах послежнего равенства сеточные функции $\Delta u/\Delta x$, $\Delta u/\Delta y$, u берутся в смещенных точках $(x-h,y,t)$.

$$A(x,y,t)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta y)}{\Delta t}+B(x,y,t)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta y)}{\Delta x}+C(x,y,t)\frac{\Delta(\Delta u/\Delta y)}{\Delta y}+$$

$$+\frac{\Delta A}{\Delta y}\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right]\right|_{x,y-h,t}+\frac{\Delta B}{\Delta y}\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\right|_{x,y-h,t}+\frac{\Delta C}{\Delta y}\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta y}\right]\right|_{x,y-h,t}+$$

$$+Q\left.\left[\frac{\Delta u}{\Delta y}\right]\right|_{x,y-h,t}\frac{\Delta Q}{\Delta y}\left.[u]\right|_{x,y-h,t}=0.$$

В этом случае в младших членах последнего равенства сеточные функции $\Delta u/\Delta x$, $\Delta u/\Delta y$, u берутся в смещенных точках $(x, y-h, t)$.

При дальнейшем расширении разностной системы в нее можно включить уравнения для разностных отношений высшего порядка по x, y и t:

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = \frac{\Delta}{\Delta t}\Delta u \Delta t, \quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2},$$

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta t \Delta x} = \frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta^3 u}{\Delta t^3}, \dots$$

По мере того, как в разностную систему включаются уравнения для высших разностей, ее вид будет несколько усложняться за счет того, что в младшие члены начинает входдить все большее и большее число точек нижнего слоя сдвинутых относительно точек (x, y, t) на $\pm h, \quad \pm 2h, \dots$ вдоль осей x или y. Для наших целей достаточно расширять систему до разностных отношений третьего порядка включительно.

Положим

$$u^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \left(\frac{\Delta}{\Delta t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^{\alpha_3} u.$$

Расширенная система

$$\hat{\mathcal{A}}\frac{\Delta \hat{U}}{\Delta t} + \hat{\mathcal{B}}\frac{\Delta \hat{U}}{\Delta t} + \hat{\mathcal{C}}\frac{\Delta \hat{U}}{\Delta t} = \mathcal{F}.$$

Здесь Г(= U(x,y,t+h)) $--$, << >>u$^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(x, y, t+\tau)$, а клеточно-диагональные матрицы $\hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mathcal{B}}$, $\hat{\mathcal{C}}$ составлены следующим образом:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A(x,y,t) & & & 0 \\ 0 & A(x,y,t) & & \\ & & A(x,y,t) & \\ 0 & & & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B(x,y,t) & & & 0 \\ 0 & B(x,y,t) & & \\ & & B(x,y,t) & \\ 0 & & & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C(x,y,t) & & & 0 \\ 0 & C(x,y,t) & & \\ & & C(x,y,t) & \\ 0 & & & \dots \end{pmatrix}.$$

При вычислении $U|_{t=0}$ в начальном слое

$$u^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(x,y,t)|_{t=0} = \left(\frac{\Delta}{\Delta t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^{\alpha_3} \varphi(x,y).$$

Это дает возможность оценить начальное значение

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty \\ -\infty<y<\infty}} (\mathcal{A}U, U)|_{t=0}\, h^2$$

через

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} (A\varphi,\varphi)|_{t=0}\, h^2,$$

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} \left(A\frac{\Delta}{\Delta x}\varphi, \frac{\Delta}{\Delta x}\varphi\right)|_{t=0}\, h^2,$$

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} \left(A\frac{\Delta}{\Delta y}\varphi, \frac{\Delta}{\Delta y}\varphi\right)|_{t=0}\, h^2,$$

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} \left(A\frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\varphi, \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\varphi\right)|_{t=0}\, h^2$$

и так далее. Если у φ производные до третьего порядка непрерывны при $h \to \infty$, эти суммы стремятся к

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (A\varphi,\varphi)dxdy, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A\partial_x\varphi,\partial_x\varphi)dxdy,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (A\partial_y\varphi,\partial_y\varphi)dxdy, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A\partial_x^2\varphi,\partial_x^2\varphi)dxdy$$

и так далее, и, следовательно, эти суммы при достаточно малых h не превышают удвоенных значений этих интегралов.

Все младшие члены мы объединили в правой части. Очевидно, справедливо равенство

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} \left(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{F},\mathcal{F}\right) \le \mathrm{const} \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} (\mathcal{A}U,U),$$

которое позволяет нам применить для оценки U основную теореме об оценке разностных решений. Для $f = -Qu$ имеем

$$\mathcal{F} = -\left(Qu, \frac{\Delta(Qu)}{\Delta x}, \frac{\Delta(Qu)}{\Delta y}, \ldots,\right).$$

Основная теореме об оценке разностных решений

На прошлой лекции мы привели простейший алгоритм (разностную схему) построения сеточных функций, позволяющий приближенно решить задачу Коши для гиперболической по Фридрихсу системы.

Теорема 14.1. *(Основная теорема об оценке) Пусть финитно u_0, коэффиценты разностных уравнений*

$$A(x,y,t)\frac{\Delta u}{\Delta t} + B(x,y,t)\frac{\Delta u}{\Delta x} + C(x,y,t)\frac{\Delta u}{\Delta y} + Q(x,y,t)u = 0$$

$(A(x,y,t)$, $B(x,y,t)$, $C(x,y,t)$, $Q(x,y,t))$ являются достаточно галдкими функциями, матрицы $A(x,y,t)$, $B(x,y,t)$, $C(x,y,t)$ положительно определены. Тогда $\exists$ постоянная $M>0$ такая, что

$$\max_{0<const<T}\left\{\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}}(Au,u)h^2\right\}_{t=const}\le 2e^{MT}\left\{\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}}(Au,u)h^2\right\}_{t=const}. \tag{79}$$

Константу M можно вычислить по коэффицентам уравнения и их производным.

Для доказательства теоремы 14.1 нам потребуется несколько лемм.

Лемма 14.1. *Пусть A, D – симметрические матрицы, A – положительно определена, D – неотрицательно определена, параметр ϱ настолько мал, что $A(x,y)-\varrho D(x,y)$ положительно определена. Тогда если вектора ω, ω', ω'' связаны равенством*

$$A(x,y)\omega(x,y)=\left(A(x,y)-(x,y)\right)\omega'(x,y)+\varrho D(x,y)\omega'',$$

то справедливо неравенство

$$(A\omega,\omega)\le((A-\varrho D)\omega',\omega')+\varrho\left(D(x,y)\omega'',\omega''\right).$$

Замечание 14.1. В терминах теоремы 14.1 $D=B+C$, $\varrho=\tau/h$, $\omega'=u(x,y)$, $\omega=\hat{u}(x,y)$,

$$\omega''=(B+C)^{-1}\left[B(x,y)(x-h,y)+C(x,y)u(x,y-h)\right].$$

Отсюда в переменных $\hat{u}(x,y)$, $u(x,y)$

$$(A\hat{u}(x,y),\hat{u}(x,y))\le((A-\varrho(B+C))u(x,y),u(x,y))+$$

$$+\varrho\left(\left[B(x,y)u(x-h,y)+C(x,y)u(x,y-h)\right],(B+C)^{-1}\left[B(x,y)u(x-h,y)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C(x,y)y(x,y-h)\right]\right).$$

Лемма 14.2. *Если $\omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, $f=-Qu$ и*

$$A\hat{u}=A\omega+\tau f,$$

то для положительно определенной A имеем

$$(A\omega,\omega)\le\frac{1}{2}\left((A\omega_1,\omega_1)+(A\omega_2,\omega_2)\right),$$

$$(A\hat{u},\hat{u})\le\frac{1}{2}\left((A\omega_1,\omega_1)+(A\omega_2,\omega_2)\right)+\tau\left[(A\hat{u},\hat{u}+(A^{-1}f,f)\right].$$

Доказательство. Доказательство первого утверждения леммы следует из равенства

$$(A\omega,\omega)=\frac{1}{4}\left((A\omega_1,\omega_1)+(A\omega_2,\omega_2)+2(A\omega_1,\omega_2)\right).$$

Из неравенства Буняковского,

$$2(A\omega_1,\omega_2) \le 2\sqrt{(A\omega_1,\omega_1)}\sqrt{(A\omega_1,\omega_1)} \le$$

$$\le (A\omega_1,\omega_1) + (A\omega_2,\omega_2).$$

Второе утверждение обосновывается следующим образом:

$$(A\hat{u},\hat{u}) = \big(A\omega + \tau f, W + \tau A^{-1} f\big) = (A\omega,\omega) + 2\tau(\omega, f) +$$

$$+\tau^2(f, A^{-1}f) \le (A\omega,\omega) + 2\tau(A\omega, A^{-1}f) + 2\tau^2(f, A^{-1}f) =$$

$$= (A\omega,\omega) + 2\tau(A\omega + \tau d, A^{-1}f) = (A\omega,\omega) + 2\tau(A\hat{u}, A^{-1}f) \le (A\omega,\omega) +$$

$$+2\tau\sqrt{(A\hat{u},\hat{u})}\sqrt{(AA^{-1}f, A^{-1}f)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left((A\omega_1,\omega_1) + (A\omega_2,\omega_2)\right) + \tau\left((A\hat{u},\hat{u}) + (f, A^{-1}f)\right).$$

Лемма 14.2 доказана. □

Замечание 14.2. Отсюда

$$(1-\tau)(A\hat{u},\hat{u}) \le \frac{1}{2}\left((A\omega_1,\omega_1) + (A\omega_2,\omega_2)\right) + \tau(f, A^{-1}f)$$

Теперь вернемся к доказательству теоремы 14.1.

Доказательство. Разностное уравнение в сокращенном виде мы записали так:

$$A\hat{u} = A\omega + \tau f, \quad \omega = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right), \quad f = -Qu,$$

где

$$A(x,y)\omega_1(x,y) = \left(A(x,y) - \frac{2\tau}{h}B(x,y)\right)u(x,y) + \frac{2\tau}{h}B(x,y)u(x-h,y),$$

$$A(x,y)\omega_2(x,y) = \left(A(x,y) - \frac{2\tau}{h}C(x,y)\right)u(x,y) + \frac{2\tau}{h}C(x,y)u(x-h,y).$$

В силу леммы 14.2

$$(1-\tau)(A\hat{u},\hat{u}) \le \frac{1}{2}\left((A\omega_1,\omega_1) + (A\omega_2,\omega_2)\right) + \tau(f, A^{-1}f).$$

Теперь применим лемму 14.1:

$$(A\omega_1,\omega_1) \le \left(\left(A(x,y) - \frac{2\tau}{h}B(x,y)\right)u, u\right) + \frac{2\tau}{h}\left(B(x,y)u(x-h,y), u(x-h,y)\right),$$

$$(A\omega_1,\omega_1) \le \left(\left(A(x,y) - \frac{2\tau}{h}(x,y)\right)u, u\right) + \frac{2\tau}{h}\left((x,y)u(x,y-h), u(x,y-h)\right).$$

Суммируя, получим

$$(1-\tau)(A\hat{u},\hat{u}) \le \left(\left(A-\frac{\tau}{h}B-\frac{\tau}{h}C\right)u,u\right)+\tau(Qu,A^{-1}Qu)+$$

$$+\frac{\tau}{h}\left[(Bu(x-h,y),u(x-h,y))+(Cu(x,y-h),u(x,y-h))\right],$$

или

$$(A\hat{u},\hat{u}) \le \frac{1}{(1-\tau)}\left(\left(A-\frac{\tau}{h}B-\frac{\tau}{h}C\right)u,u\right)+\tau(Qu,A^{-1}Qu)+$$

$$+\frac{\tau}{(1-\tau)h}\left[(B(x-h,y)u(x-h,y),u(x-h,y))+\right.$$

$$\left.+\,(C(x,y-h)u(x,y-h),u(x,y-h))\right]+$$

$$+\frac{\tau}{(1-\tau)h}\left[((B(x,y)-B(x-h,y))\,u(x-h,y),u(x-h,y))+\right.$$

$$\left.+\,((C(x,y)-C(x,y-h))\,u(x,y-h),u(x,y-h))\right]$$

при $0<\tau<1$. Отсюда

$$(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) \le |\left((\hat{A}-A)\hat{u},\hat{u}\right)| + \frac{1}{(1-\tau)}\left(\left(A-\frac{\tau}{h}B-\frac{\tau}{h}C\right)+\right.$$

$$\left.+\,\tau(Qu,A^{-1}Qu)\right)+\frac{\tau}{(1-\tau)h}\left[(B(x-h,y)u(x-h,y),u(x-h,y))+\right.$$

$$\left.+\,(C(x,y-h)u(x,y-h),u(x,y-h))\right]+$$

$$+\frac{\tau}{(1-\tau)h}\left[((B(x,y)-B(x-h,y)u(x-h,y),u(x-h,y))+\right.$$

$$\left.+\,((C(x,y)-C(x,y-h)u(x,y-h),u(x,y-h))\right]. \tag{80}$$

Задача 14.1. *Докажите, что приведенное выше доказательство оценки (80) справедливо при условии положительной определенности матриц $A-\varrho_1 B$, $A-\varrho_2 B$, если*

$$\frac{\tau}{h} \le \left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^{-1}.$$

Доказанную выше оценку (80) можно сформулировать как теорему.

Доказательство. Если матрицы A, B, C имеют ограниченные производные, матрица Q ограничена и если отношение шагов τ/h не превышает некоторого значения, обеспечивающего положительную определенность матриц $A-2\frac{\tau}{h}B$ и $A-2\frac{\tau}{h}C$ во всех точках (x,y,t). На решении разностных уравнений

$$A(x,y,t)\frac{\Delta u}{\Delta t}+B(x,y,t)\frac{\Delta u}{\Delta x}+C(x,y,t)\frac{\Delta u}{\Delta y}=-Q(x,y)u(x,y)$$

выполнено неравенство

$$\frac{\Delta(Au,u)}{\Delta t}+\frac{\Delta(Bu,u)}{\Delta x}+\frac{\Delta(Cu,u)}{\Delta y}=$$

$$= \frac{(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) - (Au,u)}{\tau} + \frac{(Bu,u) - (B(x-h,y)u(x-h,y),u(x-h,y))}{h} +$$

$$+\frac{(Cu,u) - (C(x,y-h)u(x,y-h),u(x,y-h))}{h} \le$$

$$\le \frac{1}{\tau}\left\{2(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) + \left|((\hat{A}-A)\hat{u},\hat{u}\right| +\right.$$

$$+\left|(A\hat{u},\hat{u})\right| + \frac{\tau}{h}\left(((B(X,y) - B(x-h,y))\,u,u\right) +$$

$$+\left(B(x-h,y)u,u\right) - \left(B(x-h,y,t)u(x-h,y),u(x-h,y)\right) +$$

$$\left.(C(x,y,t)u,u) - (C(x,y-h,t)u(x,y-h),u(x,y-h))\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\tau}M\left[(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) + (Au,u) + |Q(x,y)u(x,y)| +\right.$$

$$\left.+\,(A(x-h,y)y(x-h,y),u(x-h,y)) + (A(x,y-h)u(x,y-h),u(x,y-h))\right].$$

Здесь мы воспользовались равномерной положительной определенностью матрицы A. $\square$

Доказанное неравенство является *разностным аналогом дифференциальной формой интеграла энергии*. Умножим обе части неравенства на τh^2 и просуммируем по всем точкам слоя

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} \tau h^2\left(\frac{\Delta(Au,u)}{\Delta t} + \frac{\Delta(Bu,u)}{\Delta x} + \frac{\Delta(Cu,u)}{\Delta y}\right) \le$$

$$\le \tau M \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) + \tau M \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2|(A^{-1}f,f)| + \tau M \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(Au,u).$$

Здесь

$$\tau \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\frac{\Delta(Bu,u)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\tau}{h} \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\left((Bu,u) - ((B(x-h,y,t)u(x-h,y,t),u(x-h,y,t))\right) = 0,$$

$$\tau \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\frac{\Delta(Cu,u)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\tau}{h} \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\left((Cu,u) - ((C(x,y-h,t)u(x,y-h,t),u(x,y-h,t))\right) = 0,$$

$$\tau \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\frac{\Delta(Au,u)}{\Delta t} = \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\left((\hat{A}\hat{u},\hat{u}) - (A(x,y,)u,u)\right) = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) \le \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\left(A(x,y,)u,u\right)+$$

$$+\tau M \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2\left(\hat{A}\hat{u},\hat{u}\right)+\tau \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2|(A^{-1}f,f)|+\tau M \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(Au,u),$$

или

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) \le \frac{(1+M\tau)}{(1-M\tau)} \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(A(x,y,)u,u)+$$

$$+\frac{\tau}{(1-M\tau)} \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2|(A^{-1}f,f)|.$$

Для $f=-Qu$

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2|(A^{-1}f,f)| = \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2|(A^{-1}Qu,Qu)| \le$$

$$\le M_1 \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(A(x,y,)u,u).$$

Окончательно имеем

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(\hat{A}\hat{u},\hat{u}) \le \left(\frac{(1+M\tau)}{(1-M\tau)}+\frac{\tau M_1}{(1-M\tau)}\right) \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} h^2(A(x,y,)u,u)$$

для $0<\tau<\frac{1}{M}$.

Мы выписываем здесь формально суммы бесконечного числа слагаемых, но это только формально, так как только конечное число из них отлично от нуля в силу того, что разностное решение не равно нулю лишь в конечном числе точек.

$$U(t) = \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} (Au,u)h^2,$$

$$U(t+h) = \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}} (\hat{A}\hat{u},\hat{u})h^2.$$

Приходим к неравенствам

$$U(t+h) \le \left(\frac{(1+M\tau)}{(1-M\tau)}+\frac{\tau M_1}{(1-M\tau)}\right)U(t). \tag{81}$$

Дальнейшие оценки сформулируем как упражнения.

Задача 14.2. *Для достаточно малого τ при $0<t<T$ из (81) следует*

$$U(t) \le \left(\frac{(1+M\tau)}{(1-M\tau)}+\frac{\tau M_1}{(1-M\tau)}\right)^{t/\tau} U(0).$$

Задача 14.3. *Для достаточно малого τ при $0 < t < T$*

$$\left(\frac{(1+M\tau)}{(1-M\tau)} + \frac{\tau M_1}{(1-M\tau)}\right)^{t/\tau} \le 2e^{MT}.$$

Окончательно получаем

$$U(t) \le 2e^{MT}U(0).$$

Отсюда следует основная оценка разностных решений. Существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\max_{0<\mathrm{const}<T}\left\{\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}(Au,u)h^2\right\}_{t=\mathrm{const}} \le 2e^{MT}\left\{\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}(Au,u)h^2\right\}_{t=\mathrm{const}}.$$

Константа M вычислена по коэффицентам уравнения и их производным. □

Применив основную теорему об оценке решений разностных уравнений, мы установим, что следующие суммы

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}(Au,u)h^2, \quad \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}\left(A\frac{\Delta}{\Delta x}u, \frac{\Delta}{\Delta x}u\right)h^2,$$

$$\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}\left(A\frac{\Delta}{\Delta y}u, \frac{\Delta}{\Delta y}u\right)h^2, \quad \sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}\left(A\frac{\Delta^2}{\Delta x^2}u, \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}u\right)h^2$$

и так далее будут равномерно ограничены на отрезке времени $0 \le t \le T$ при достаточно малых шагах h.

Обозначим

$$\mathcal{U}(t) = \left[\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}(\mathcal{A}U,U)h^2\right]\Bigg|_{t=\mathrm{const}}$$

$$\mathcal{F}(t) = \left[\sum_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}}(\mathcal{A}^{-1}f,f)h^2\right]\Bigg|_{t=\mathrm{const}} \le M_*\mathcal{U}(t) + \Phi$$

Неравенство, связывающее $\mathcal{U}(t+h)$ и $U(t)$ было установлено при доказательстве основной теоремы. Оно имеет вид

$$(1-\tau M)\mathcal{U}(t+h) \le (1+2\tau M)\mathcal{U}(t) + \tau\mathcal{F}(t).$$

Основная теорема утверждает, что при фиксированном интервале $0 < t < T$ времени

$$\max_{0\le t\le T}\mathcal{U}(t) \le M'\mathcal{U}(0) + M''.$$

Теорема существования

Полученные нами выводы легко приводят к теореме существвания, которая на самом деле уже почти доказана. Покажем сейчас, что предельная функция $\mathbf{u}$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям. Действительно, на всех сетках выполнены разностные уравнения

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t} + B\frac{\Delta u}{\Delta x} + C\frac{\Delta u}{\Delta y} + Qu = 0.$$

Если теперь заданные на сетке функции u, $\Delta u/\Delta t$, $\Delta u/\Delta x$, $\Delta u/\Delta y$ проинтерполировать на всю область, покрытую сеткой, так, как это сделано выше, и воспользоваться тем, что проинтерполированные функции равностепенно непрерывны и отличаются в двух каких-либо точках внутри одной ячейки на величину порядка $O(\sqrt{h})$, то легко заметить, что всюду имеет место соотношение

$$A\frac{\Delta u}{\Delta t} + B\frac{\Delta u}{\Delta x} + C\frac{\Delta u}{\Delta y} + Qu = O(\sqrt{h}).$$

Оценка $O(\sqrt{h})$ равномерна по всякой подобласти. В такой подобласти u, $\Delta u/\Delta t$, $\Delta u/\Delta x$, $\Delta u/\Delta y$ можно считать для рассматриваемой подпоследовательности сеточных функций равномерно сходящимися при $h \to 0$ ($\tau/h \leq c_0$, где c_0 – достаточно мало) соответственно к $\mathbf{u}$, $\partial_t\mathbf{u}$, $\partial_x\mathbf{u}$, $\partial_y\mathbf{u}$. Отсюда выполнение уравнения

$$A\partial_t\mathbf{u} + B\partial_x\mathbf{u} + C\partial_y\mathbf{u} + Q\mathbf{u} = 0$$

очевидно. Тем самым доказано, что предельная функция удовлетворяет уравнению всюду в полосе $0 < t < T$. Сформулируем доказанную теорему.

Теорема 14.2. *(Существования решения) Матрицы A, B, C – симметрические, A – положительно определена. Начальные данные $\varphi(x, y)$ предполагаются достаточно гладкими, равными нулю при $|y| \geq Y/2$. Тогда существует решение поставленной задачи. Это решение отлично от 0 лишь в ограниченной части полосы $0 < t < T$.*

Для построенного решения из нашего доказательства можно вывести оценки с постоянными, выражающимися через размеры области, коэффиценты уравнений, начальные данные и производные этих функций достаточно высокого порядка. Оценки решения имеют вид

$$\begin{gathered}
|u_i| \leq \mathrm{const}, \quad |\partial_t u_i| \leq \mathrm{const}, \\
|\partial_x u_i| \leq \mathrm{const}, \quad |\partial_y u_i| \leq \mathrm{const}, \quad i = 1, \dots, n, \\
|\partial_t u(x_2, y_2, t_2) - \partial_t u(x_1, y_1, t_1)| \leq \\
\leq \mathrm{const}\left((t_2 - t_1)^{1/3} + \sqrt{x_2 - x_1} + \sqrt{y_2 - y_1}\right), \\
|\partial_x u(x_2, y_2, t_2) - \partial_t u(x_1, y_1, t_1)| \leq \\
\leq \mathrm{const}\left((t_2 - t_1)^{1/3} + \sqrt{x_2 - x_1} + \sqrt{y_2 - y_1}\right), \\
|\partial_y u(x_2, y_2, t_2) - \partial_y u(x_1, y_1, t_1)| \leq \\
\leq \mathrm{const}\left((t_2 - t_1)^{1/3} + \sqrt{x_2 - x_1} + \sqrt{y_2 - y_1}\right).
\end{gathered}$$

Из этих оценок следуют свойства решения, которые мы использовали при доказательстве теоремы единственности.

Терема С.К. Годунова

Нам осталось доказать теорему С.К. Годунова. Начнем с лемм.

Лемма 14.3. *Пусть непрерывная $v(x)$ – функция, кусочно-непрерывно дифференцируемая на отрезке $x_1 \le x \le x_2$ длины $X = x_2 - x_1$, удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} v^2(x)dx \le K^2 X,$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\partial_x v)^2(x)dx \le L^2/X.$$

Тогда

$$|v(x)| \le K + L,$$
$$|v(x)| \le K + 2\sqrt{KL},$$
$$|v(\xi_2) - v(\xi_1)| \le L\sqrt{\frac{\xi_2 - \xi_1}{X}} \le L,$$

где $x_1 \le \xi + 1 \le \xi_2 \le x_2$.

Доказательство. Сначала проверим третье неравенство:

$$|v(\xi_2) - v(\xi_1)| \le \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\right| \le \sqrt{\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} v_x^2 dx}\sqrt{\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} 1dx} \le \sqrt{\frac{L^2}{X}}\sqrt{\xi_2 - \xi_1}. \tag{82}$$

Для доказательства первых двух неравенств разобьем отрезок $[x_1, x_2]$ на n частей и рассмотрим произвольную точку x_0, $x_1 \le x_0 \le x_2$. Она принадлежит одному из построенных отрезков $[x_1', x_2']$ длины X/n. Так как

$$\int\limits_{\xi_1'}^{\xi_2'} v^2 dx \le \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} v^2 dx \le K^2 X,$$

то на отрезке $[x_1', x_2']$ найдется точка x_3 такая, что

$$v^2(x_3)\frac{X}{n} \le K^2 X.$$

Отсюда

$$|v(x_3)| \le K\sqrt{n}.$$

Теперь, пользуясь (82), оценим $v(x_0)$. Имеем

$$|v(x_0)| \le |v(x_3)| + |v(x_0) - v(x_3)| \le K\sqrt{n} + L\sqrt{\frac{1}{n}}. \tag{83}$$

В этой оценке n – произвольное натуральное число. Так как

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1,$$

то можно выбрать n так, что

$$(L/K)^{1/2}\le\sqrt{n}\le(L/K)^{1/2}+1.$$

Тогда из этих неравенств и из (83) следует второе неравенство леммы.

В то же время при $n=1$ из (83) следует первое неравенство леммы. □

Лемма 14.4. *Пусть непрерывная $v(x,y)$ – функция, кусочно-непрерывно дифференцируемая в прямоугольнике $x_1\le x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$, $X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$, и удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}v^2(x,y)dxdy\le M^2XY,$$

$$\max_{x_1<y<x_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}(\partial_x v)^2(x)\le L^2/X,$$

$$\max_{y_1<y<y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}(\partial_y v)^2(x)\le L^2/Y.$$

Тогда для нее справедливы оценки

$$|v(x,y)|\le M+2L,$$

$$|v(\xi_2,\eta_2)-v(\xi_1,\eta_1)|\le L\left(\sqrt{\frac{\xi_2-\xi_1}{X}}+\sqrt{\frac{\eta_2-\eta_1}{Y}}\right). \tag{84}$$

Доказательство. Действительно, дважды применяя неравенство леммы 14.3, получим (84). Начиная доказательство второго утверждения леммы, заметим, что из оценки

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}v^2dxdy\le M^2XY$$

следует существование точки (x_0,y_0) такой, что

$$|u(x_0,y_0)|\le M.$$

Тогда в произвольной точке прямоугольника

$$|u(x,y)|\le|u(x_0,y_0)|+|u(x,y)-u(x_0,y_0)|\le M+2L.$$

Лемма доказана. □

Теорема 14.3. *(С.К. Годунов) Заданная в параллелепипеде* $x_1 < x < x_2 = x_1 + X$, $y_1 < y < y_2 = y_1 + Y$, $t_1 < t < t_2 = t_1 + T$ *функция* $u(x, y, t)$ *такая, что при всех* t

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} v^2(x,y,t)dxdy \le M^2XY \tag{85}$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} (\partial_t u)^2(x,y,t)dxdy \le L^2\frac{XY}{T^2},$$

при всех t, y

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\partial_x u)^2(x,y,t)dx \le \frac{L^2}{X}, \tag{86}$$

и при всех t, x

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} (\partial_y u)^2(x,y,t)dx \le \frac{L^2}{Y}, \tag{87}$$

удовлетворяет неравенствам

$$|u(x,y,t) \le M + 2L, \tag{88}$$

$$|u(\xi_2,\eta_2,\tau_2) - u(\xi_1,\eta_1,\tau_1)| \le$$
$$\le L\left[\sqrt{\frac{|\xi_2-\xi_1|}{X}} + \sqrt{\frac{|\eta_2-\eta_1|}{Y}} + \left(\frac{|\tau_2-\tau_1|}{T}\right)^{1/3}\right]. \tag{89}$$

Доказательство. Доказательство удобно начать с замечания, что из неравенства

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} u^2(x,y)dxdy \le M^2XY$$

можно вывести существование при каждом $t = t_0$ такой точки (x_0, y_0), что

$$|u(x_0,y_0)| \le M.$$

Применяя лемму 14.4, получим

$$|u(x,y,t_0) - u(x_0,y_0,t_0)| \le |u(x,y,t_0) - u(x,y_0,t_0)| +$$

$$+|u(x,y_0,t_0) - u(x_0,y_0,t_0)| \le L\left(\sqrt{\frac{y-y_0}{Y}} + \sqrt{\frac{x-x_0}{X}}\right) \le 2L.$$

Тем самым

$$|u(x,y,t_0)| \le M + 2L.$$

Вследствие произвольности t_0 утверждение (88) доказано.

Из леммы 14.4 следует оценка непрерывности по x, y

$$|u(\xi_2,\eta_2,t)-u(\xi_2,\eta_2,t)|\leq L\left(\sqrt{\frac{|\eta_2-\eta_1|}{Y}}+\sqrt{\frac{|\xi_2-\xi_1|}{X}}\right).$$

Нам осталось доказать, что

$$|u(x,y,\tau_2)-u(x,y,\tau_1)|\leq L\left(\frac{|\tau_2-\tau_1|}{T}\right)^{1/3}.$$

Выберем любой параллелепипед

$$x_1'<x<x_2',\quad y_1'<y<y_2',\quad \tau_1<t<\tau_2$$

такой, что $x_1'<x_0<x_2'$, $y_1'<y_0<y_2'$.

Далее,

$$\int\limits_{x_1'}^{x_2'}\int\limits_{y_1'}^{y_2'}|u(x,y,\tau_2)-u(x,y,\tau_1)|dxdy\leq\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{x_1'}^{x_2'}\int\limits_{y_1'}^{y_2'}|u_t|dxdydt\leq$$

$$\sqrt{\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{x_1'}^{x_2'}\int\limits_{y_1'}^{y_2'}|u_t|^2dxdydt}\sqrt{\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{x_1'}^{x_2'}\int\limits_{y_1'}^{y_2'}1dxdydt}\leq$$

$$\leq\sqrt{(\tau_2-\tau_1)\frac{L^2XY}{T^2}}\sqrt{(\tau_2-\tau_1)(x_2'-x_1')(y_2'-y_1')}=$$

$$=\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\left(x_2'-x_1'\right)\left(y_2'-y_1'\right)\sqrt{\frac{X}{x_2'-x_1'}}\sqrt{\frac{Y}{y_2'-y_1'}}.$$

Заметим, что слева написан интеграл по площади, поэтому справа мы выделили множитель $(x_2'-x_1')\,(y_2'-y_1')$. Отсюда следует существование x_3, y_3 ($x_1'<x_3<x_2'$, $y_1'<y_3<y_2'$) таких, что

$$|u(x_3,y_3,\tau_2)-u(x_3,y_3,\tau_1)|\leq L\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\sqrt{\frac{X}{x_2'-x_1'}}\sqrt{\frac{Y}{y_2'-y_1'}}.$$

Кроме того, по лемме 14.4

$$|u(x_0,y_0,\tau_2)-u(x_3,y_3,\tau_2)|\leq L\left(\sqrt{\frac{|y_2'-y_1'|}{Y}}+\sqrt{\frac{|x_2'-x_1'|}{X}}\right),$$

$$|u(x_3,y_3,\tau_2)-u(x_0,y_0,\tau_1)|\leq L\left(\sqrt{\frac{|y_2'-y_1'|}{Y}}+\sqrt{\frac{|x_2'-x_1'|}{X}}\right).$$

Следовательно,

$$|u(x_0,y_0,\tau_2)-u(x_0,y_0,\tau_1)|\leq|u(x_3,y_3,\tau_2)-u(x_3,y_3,\tau_1)|+$$

$$+|u(x_3,y_3,\tau_2)-u(x_0,y_0,\tau_2)|+|u(x_3,y_3,\tau_2)-u(x_0,y_0,\tau_1)|\le$$
$$L\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\sqrt{\frac{X}{x_2'-x_1'}}\sqrt{\frac{Y}{y_2'-y_1'}}+2\sqrt{\frac{|y_2'-y_1'|}{Y}}+2\sqrt{\frac{|x_2'-x_1'|}{X}}\right). \qquad (90)$$

Теперь тметим, что здесь базовый параметр $(\tau_2-\tau_1)/T$, поскольку мы оцениваем разность

$$|u(x,y,\tau_2)-u(x,y,\tau_1)|.$$

Чтобы уровнять относительно этого параметра два слагаемых слева в (90), выберем x_1', x_2', y_1', y_2' так, чтобы

$$\frac{|x_2'-x_1'|}{X}=\frac{|y_2'-y_1'|}{Y}=\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\right)^{2/3}.$$

Отсюда получаем интересующее нас неравенство

$$|u(x_0,y_0,\tau_2)-u(x_0,y_0,\tau_1)|\le 5L\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{T}\right)^{1/3}.$$

□

На этом мы заканчиваем курс лекций осеннего семестра.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ