



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЧАСТЬ 1. СЕМИНАРЫ

ГОРИЦКИЙ  
АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

—  
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
АСПИРАНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ**

---

## Содержание

<b>Семинар 1</b>	<b>5</b>
Введение . . . . .	5
Уравнения с частными производными первого порядка . . . . .	6
Линейные однородные уравнения . . . . .	6
Линейные неоднородные уравнения . . . . .	8
Квазилинейные уравнения . . . . .	8
<b>Семинар 2</b>	<b>10</b>
Уравнения с частными производными первого порядка . . . . .	10
Квазилинейные уравнения . . . . .	12
<b>Семинар 3</b>	<b>19</b>
Квазилинейные уравнения . . . . .	19
Возникновение сильного разрыва . . . . .	24
<b>Семинар 4</b>	<b>27</b>
Квазилинейные уравнения . . . . .	27
Обобщенные решения . . . . .	27
Кусочно-гладкие обобщенные решения . . . . .	30
<b>Семинар 5</b>	<b>35</b>
Квазилинейные уравнения . . . . .	35
Кусочно-гладкие обобщенные решения . . . . .	35
Допустимые разрывы . . . . .	39
Задача Римана о распаде разрыва . . . . .	42
<b>Семинар 6</b>	<b>45</b>
Квазилинейные уравнения . . . . .	45
Задача Римана о распаде разрыва . . . . .	45
<b>Семинар 7</b>	<b>61</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	61
Приведение к каноническому виду уравнений в области из $\mathbb{R}^2$ . . . . .	61
<b>Семинар 8</b>	<b>67</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	67
Приведение к каноническому виду уравнений в области из $\mathbb{R}^2$ . . . . .	67
Задача Коши . . . . .	69
Начальные условия на характеристике . . . . .	71
<b>Семинар 9</b>	<b>73</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	73
Приведение к каноническому виду . . . . .	73
Уравнение струны . . . . .	75

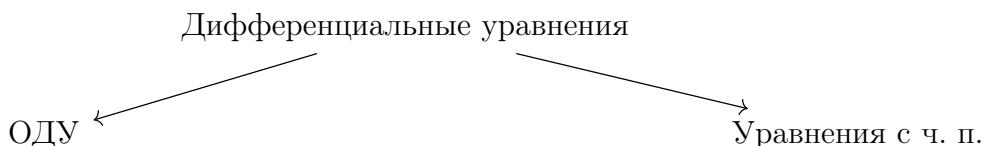
<b>Семинар 10</b>	<b>78</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	78
Приведение к каноническому виду . . . . .	78
Уравнение струны . . . . .	79
Полуограниченная струна . . . . .	84
<b>Семинар 11</b>	<b>90</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	90
Полуограниченная струна . . . . .	90
<b>Семинар 12</b>	<b>99</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	99
Неоднородное уравнение струны . . . . .	99
Уравнение колебаний стержня . . . . .	101
<b>Семинар 13</b>	<b>106</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	106
Метод Фурье . . . . .	106
<b>Семинар 14</b>	<b>114</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	114
Метод Фурье . . . . .	114
Метод Фурье для неоднородных уравнений . . . . .	120
<b>Семинар 15</b>	<b>124</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	124
Метод Фурье для неоднородных уравнений . . . . .	124
<b>Семинар 16</b>	<b>132</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	132
Метод Фурье для неоднородных уравнений . . . . .	132
Уравнение теплопроводности . . . . .	135
<b>Семинар 17</b>	<b>139</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	139
Уравнение теплопроводности . . . . .	139
<b>Семинар 18</b>	<b>146</b>
Линейные уравнения второго порядка . . . . .	146
Уравнение Лапласа . . . . .	146

# Семинар 1

## Введение

Уравнения математической физики = Уравнения с частными производными.  
Учебники:

- 1) Владимиров. Сборник задач по уравнениям математической физики.
  - 2) Комеч А.И. Практическое решение уравнений с частными производными.
  - 3) Горицкий, Кружков, Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка.



- Обыкновенные дифференциальные уравнения:  
Искали функцию  $y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \dots y^{(k)}(x)) = 0,$$

$k$  - порядок уравнения,  $y(x)$  - решение. Задача Коши: уравнение + начальное условие.

- Уравнения с частными производными:  
Ищем  $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

$$\Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots) = 0.$$

В нашем курсе считаем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Большая часть курса: линейные уравнения с частными производными второго порядка.

Не все уравнения интегрируются, например

$$y' = y^2 + x$$

по теореме существования и единственности у данной задачи существует единственное решение, например, с начальным условием  $y(0) = 1$ .

Будем изучать в основном уравнения второго порядка, так как основные физические вопросы выражаются через уравнения второго порядка.

Выпишем 3 основные уравнения, которые будут изучаться в курсе.  $u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t$  - время.

1) Уравнение теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

2) Волновое уранение

$$u_{tt} = \Delta u$$

3) Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

## Уравнения с частными производными первого порядка

### Линейные однородные уравнения

Задача 1.

$$(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 -$$

это линейное однородное уравнение, значит, множество решений образует линейное пространство.

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{-y} = \frac{d(x + y)}{(x + y)}$$

Найдем первые интегралы

$$yd(x + y) + (x + y)dy = 0$$

$$ydu + udy = 0$$

$$d(uy) = 0$$

$$I_1 = (x + y)y = C$$

значит

$$z = f((x + y)y),$$

где  $f$  - произвольная функция

Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка на функцию  $u(x)$ :

$$v_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + v_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + v_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (1.1)$$

Это линейный дифференциальный оператор.



Уравнение характеристик:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = v_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

то есть

$$\dot{x} = v(x) \quad (1.3)$$

Обозначим

$$\frac{du}{dx} \Big|_{(1.2)} = L_{\vec{v}} u -$$

производная  $u$  в силу системы (1.2) или производная по направлению векторного поля.  $x(t)$  - характеристики.

Нас интересует то, как ведет себя функция на характеристике  $u(x(t))$ .

$$\begin{aligned} L_{\vec{v}} u &= \frac{d}{dt} u(x(t)) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \dot{x}_n = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} v_n = (\vec{v}, \nabla u). \end{aligned}$$

Первый интеграл - функция, которая постоянна на каждой характеристике.

$$\frac{d}{dt}(u(x(t))) = 0$$

$$u = C$$

$u$  - первый интеграл.

В задаче 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Выделим  $dt$  и получаем

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{-y} \\ y(t) &= C_1 e^{-t} \\ x(t) &= \text{ч.п.} + C_2 e^t \end{aligned}$$

Так первый интеграл найти не очень просто.

## Линейные неоднородные уравнения

$$v_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + v_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + v_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x) \quad (1.4)$$

**Задача 2.**

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^z$$

общее решение неоднородного = частное решение + общее решение однородного

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t)) &= f(x) \\ \dot{x} &= v(x) \\ \dot{u} &= f(x) \end{aligned}$$

В нашей задаче:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{y^z}$$

Ищем  $I_1(x, y)$ ,  $I_2(x, y, z)$  и получаем

$$\Phi(I_1, I_2) = 0.$$

Дорешать самостоятельно.

## Квазилинейные уравнения

Эти уравнения линейны по  $\nabla u$

$$v_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + v_2(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + v_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u) \quad (1.5)$$

Система характеристик квазилинейного уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, u) \\ \dot{u} = f(x, u) \end{cases} \quad (1.6)$$

Характеристики:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

**Задача 3.**

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0$$

Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через линию  $y = x^2$ ,  $z = 2x$ .

Поверхность - график решения.

Переформулируем начальные условия:

$$z \Big|_{y=x^2} = 2x$$

получаем, что у нас задача Коши.

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dx}{z^2 - x^2} = \frac{dz}{x}$$

Ищем  $I_1$  и  $I_2$

$$\Phi(I_1, I_2) = 0.$$

Из такого вида искать решение задачи Коши тяжело, надо найти первые интегралы и после, как они связаны с начальным условием.

Доделать самостоятельно.

## Семинар 2

### Уравнения с частными производными первого порядка

Рассматривали такие типы уравнений:

#### 1) Линейные уравнения

- однородные

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) u_{x_k} = 0$$

характеристики

$$\dot{x} = v(t)$$

$x(t)$  - траектории

$u$  - решение  $\Leftrightarrow u$  - первый интеграл

- неоднородные

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) u_{x_k} = f(x)$$

$$\dot{x} = v(x)$$

$$\dot{u} = f(x)$$

#### 2) Квазилинейные уравнения

$$\sum_{k=1}^n v_k(x, u) u_{x_k} = 0$$

Система характеристик

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, u) \\ \dot{u} = f(x, u) \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

График функции - связь между решением и характеристиками, график решения состоит из характеристик.

**Теорема 1** (существования и единственности для 1) и 2)). В окрестности не характеристической точки существуют единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \text{уравнение} \\ \text{начальное условие } u \Big|_{\gamma} = u_0(x) \end{cases}$$

$\dim \gamma = n - 1$  в пространстве  $x$  - об.

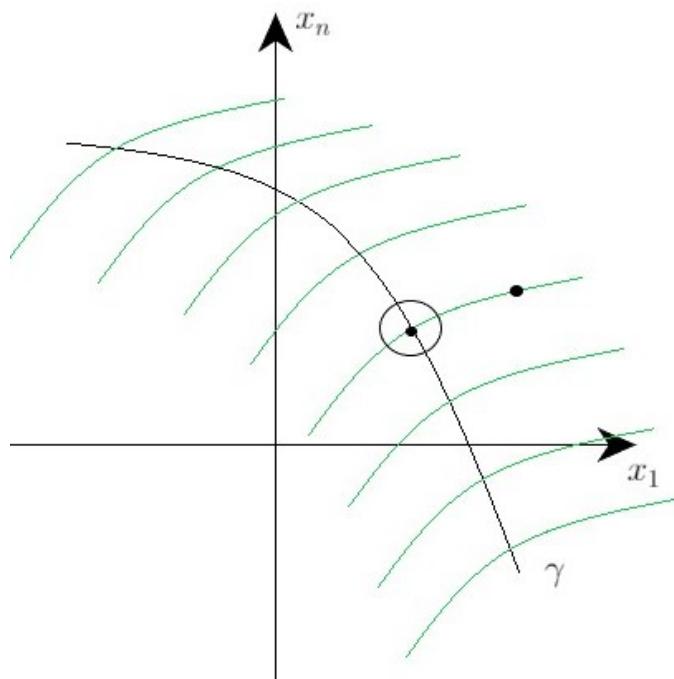


Рис. 1.

Например, построим характеристики (Рис. 1.) Характеристики нарисованы зеленым цветом.

Для однородного: на каждой характеристике наша функция постоянна и мы знаем ее значения на  $\gamma$ , для нахождения решения надо понять какая характеристика через неё проходит.

Для неоднородного: двигаясь по характеристике, зная чему равна функция  $f$  на данной характеристике, интегрируем функцию по кусочку.

Характеристическая точка - это точка  $x_0 \in \gamma : \vec{v}(x_0)$  касается  $\gamma$  (Рис. 2.)

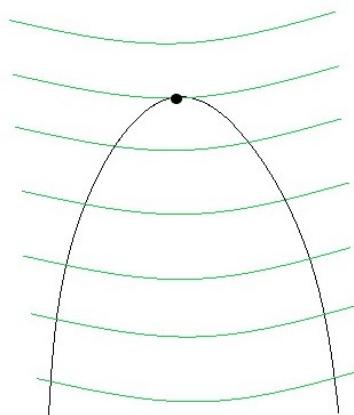


Рис. 2.

Теорема 1 локальна.

Теперь построим характеристики для квазилинейного уравнения.

$\Gamma = u_0(x) = u \Big|_{\gamma}$ , характеристики изображены зеленым цветом (Рис. 3.)

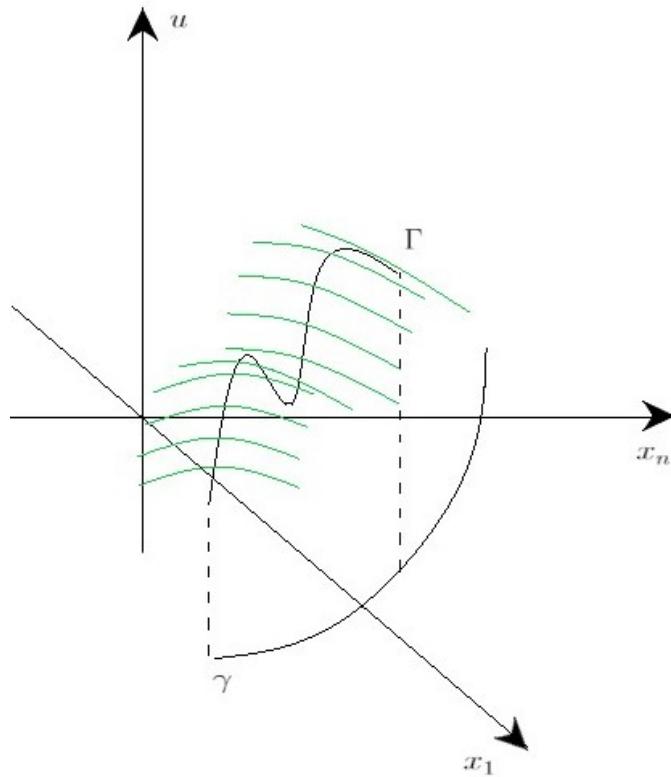


Рис. 3.

Характеристическая точка  $(x_0, u_0) \in \Gamma$ , если  $\vec{v}(x_0, u_0)$  касается  $\Gamma$ .

## Квазилинейные уравнения

Будем искать функцию  $u(t, x)$  и рассматривать уравнения

$$u_t + f'(u)u_x = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

**Пример 1** (уравнение Хопфа). Уравнение, описывающее одномерное поле скоростей из не взаимодействующих частиц.  $u(t, x)$  - скорость частицы, которая оказалась в точке  $x$  в момент времени  $t$ .

Траектория фиксированной частицы:

$$x = \phi(t)$$

Скорость:

$$\dot{\phi}(t) = u(t, \phi(t))$$

Ускорение:

$$\ddot{\phi}(t) = u_t + u_x \cdot \dot{\phi} = u_t + uu_x = 0,$$

так как частицы не взаимодействующие.

$$f'(u) = u, \quad f(u) = \frac{u}{2}$$

Уравнение характеристик:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = f'(u) \\ \dot{u} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$\gamma = \{t = 0\}$ ,  $\Gamma = u_0(x)$ ,  $y$  - параметр (Рис. 4.)

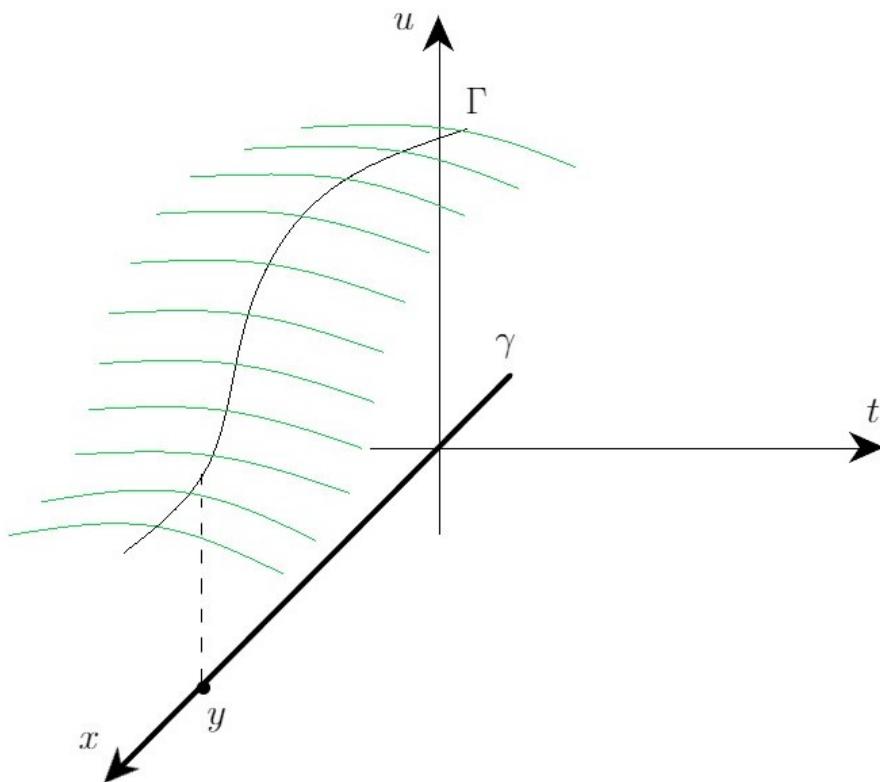


Рис. 4.

Точка - это производная по новой переменной  $s$ . Характеристики:

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \\ u(s) \end{pmatrix}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} t(0) = 0 \\ x(0) = y \\ u(0) = u_0(y) \end{cases} \quad (2.4)$$

Каждая траектория на Рис. 4. это решение системы (2.3) с начальными условиями (2.4).

$f'(u)$  должна быть дифференцируема, значит  $f \in C^2$ .  $t(s) = s$ , то есть  $t = s$ , значит можно убрать по одному условию из систем (2.3) и (2.4)

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u) \\ \dot{u} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} x(0) = y \\ u(0) = u_0(y) \end{cases} \quad (2.6)$$

Траектория - это множество точек  $(t, x(t), u(t))$ .

$$u = C_1$$

$$\dot{x} = f'(u) = f'(C_1)$$

$$\begin{cases} x = f'(u) \cdot t + C_2 \\ u = C_1 \end{cases}$$

То есть получаем набор параллельных прямых (Рис. 5.)

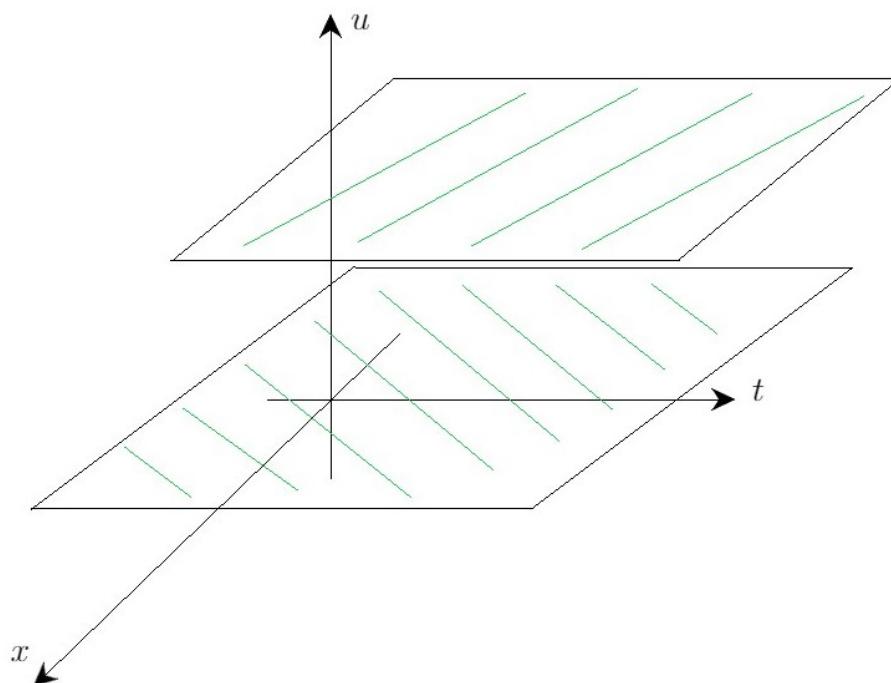


Рис. 5.

Значит, двигаемся не по кривым, а по прямым.

$$\gamma = \{t = 0\}$$

$$\vec{v} = (1, f'(u))$$

следовательно, касания нет.

**Задача 4.** Построить примерный вид распределения скоростей  $u(t, x)$  в различные моменты времени  $t > 0$  для уравнения Хопфа

$$u_t + uu_x = 0$$

- 1)  $u_0(x) = \operatorname{arctg} x$
- 2)  $u_0(x) = -\operatorname{arctg} x$
- 3)  $u_0(x) = \sin x$
- 4)  $u_0(x) = -\sin x$
- 5)  $u_0(x) = x^3$
- 6)  $u_0(x) = -x^3$

Решим несколько пунктов, остальные самостоятельно.

1)

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = u_0(x) = \operatorname{arctg} x \end{cases}$$

Будем рисовать в двумерном пространстве.

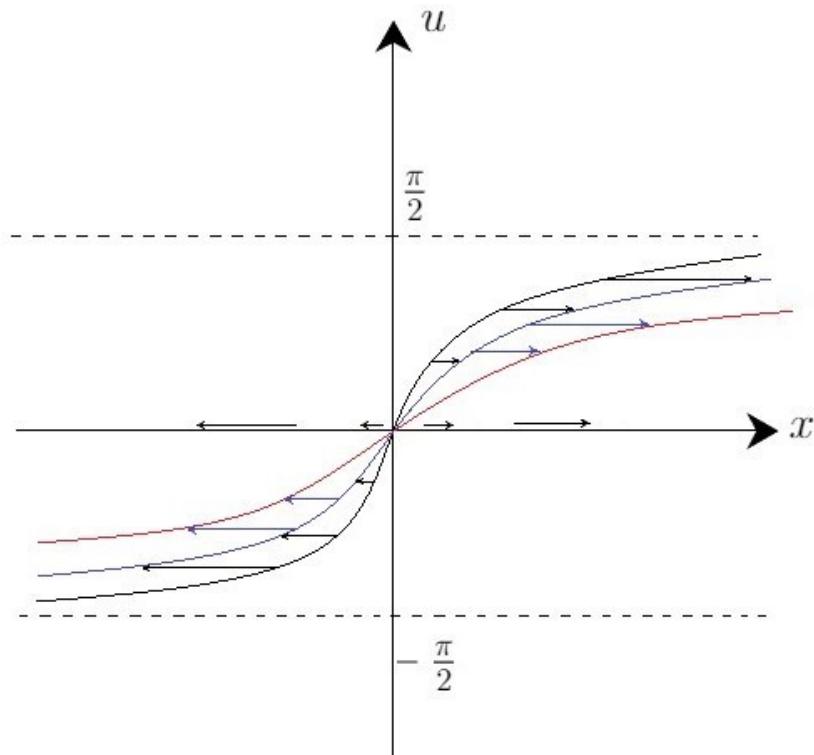


Рис. 6.

На Рис. 6. изображено сечение в тот или иной момент времени. Чем дальше от 0, тем больше скорость, каждая точка графика начинает двигаться со скоростью  $f'(u) = u$ .

На Рис. 7. изображены проекции

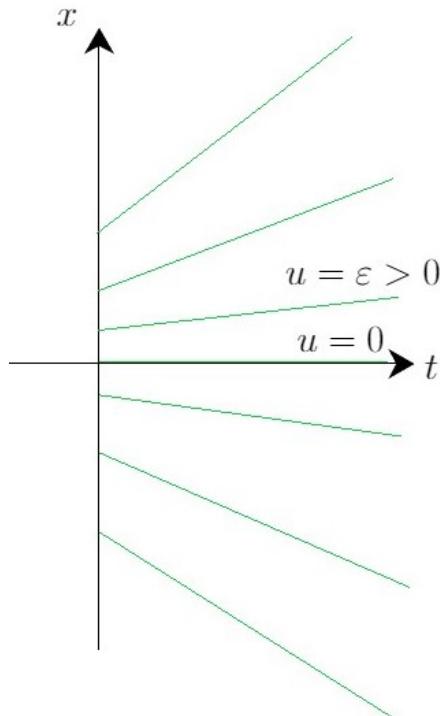


Рис. 7.

2)

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = u_0(x) = -\operatorname{arctg} x \end{cases}$$

По Рис. 8. можем увидеть, что с какого - то момента график решения перестает быть графиком функции.

На Рис. 9. изображено сечение.

При небольших  $t$  всё хорошо, потом частицы начинают догонять друг друга и сталкиваться и это уже нельзя называть полем невзаимодействующих частиц.

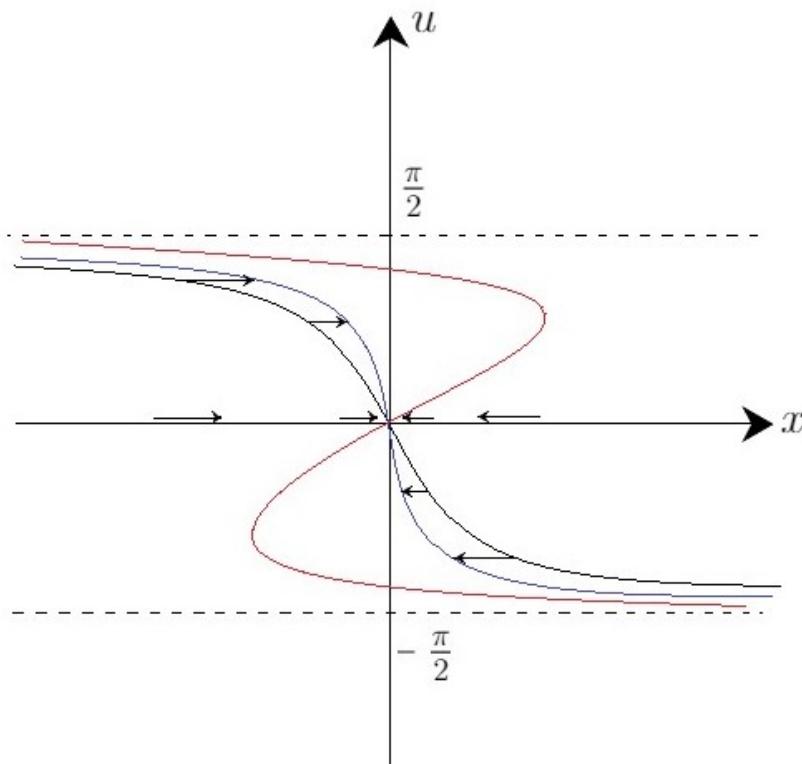


Рис. 8.

Сформулируем теорему насчёт того, до какого момента существует классическое решение.

**Теорема 2.**

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

$f \in C^2$ ,  $u \in C^1$  и они ограничены. Пусть  $|u'_0(x)| \leq K$ ,  $|f''(u)| \leq L$  на множестве значений функции  $u$ . Тогда существует классическое решение задачи Коши при  $0 < t < KL$ .

Но это теорема только достаточное условие, поэтому не факт, что для конкретной задачи не существует классического решения при  $t \geq KL$ .

Для уравнения Хопфа для арктангенса:

$$|u'_0(x)| \leq 1 = K$$

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{u^2}{2} \\ f'(u) &= u \\ f''(u) &= 1 \end{aligned}$$

значит решение существует в полосе  $0 < t < 1$ .

Хотим научиться строить решения там, где характеристики пересекаются.

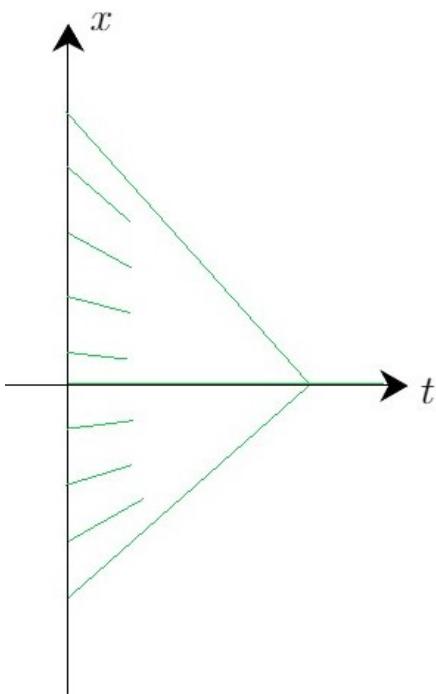


Рис. 9.

## Семинар 3

### Квазилинейные уравнения

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \quad 0 < t < ?$$

Искали классическое решение методами ОДУ.

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u) \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

Надо: в трехмерном пространстве из каждой точки правого графика на Рис. 10.

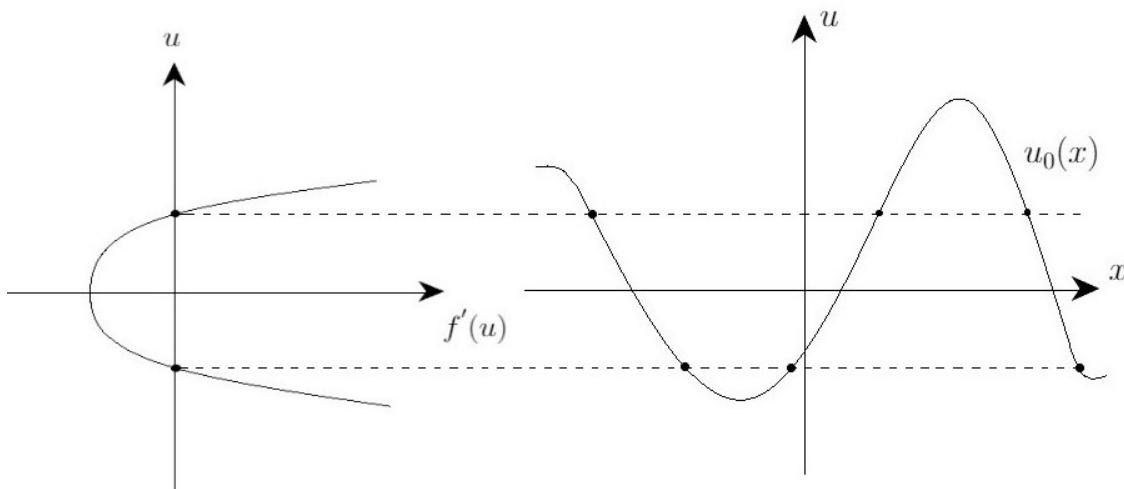


Рис. 10.

выпустить характеристику. А мы обычно строим сечения этой функции в разные моменты времени. Существуют точки, где  $f'(u) = 0$  (левый график Рис. 10.), это означает, что характеристики, выходящие из этих точек, пойдут под нулевым углом, то есть эти точки неподвижны, а остальные будут двигаться.

Получим, что при изменении времени сечение будет меняться как на Рис. 11. (красный график вообще говоря графиком функции не является).

$$u = u_0(x - f(u) \cdot t)$$

$$u = ?$$

$$0 < t < KL$$

$$|u'_0| \leq K$$

$$|f''(u)| \leq L \text{ на множестве значений } u_0$$

Основная проблема: характеристики, которые с некоторого момента времени начинают пересекаться, как показано на Рис. 12. (сечение на плоскость  $(t, x)$ ).

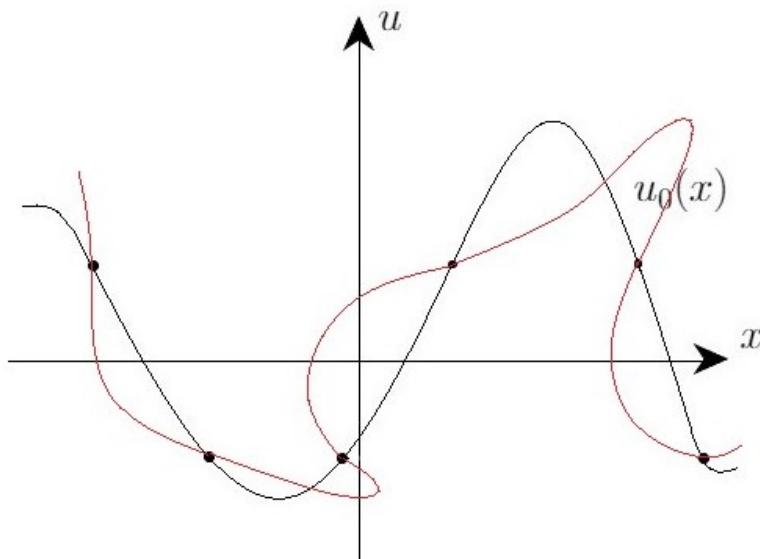


Рис. 11.

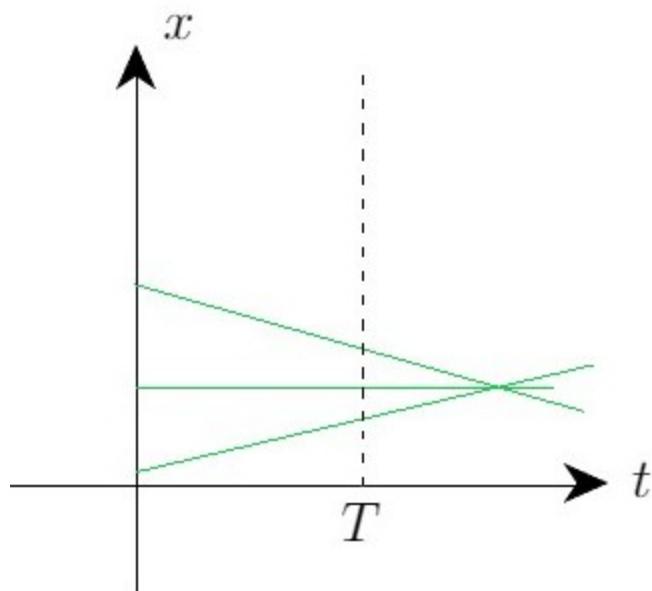


Рис. 12.

**Задача 5.** Построить сечение графика решения задачи Коши при  $t > 0$ , если

$$f(u) = \cos u$$

$$u_0(x) = \sin x$$

Для какого максимального  $T$  существует гладкое решение?

$$f'(u) = -\sin u$$

$$\begin{cases} u_t - \sin u \cdot u_x = 0 \\ u|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

График  $f'(u)$  изображен на Рис. 13. То есть на графике решения неподвижными

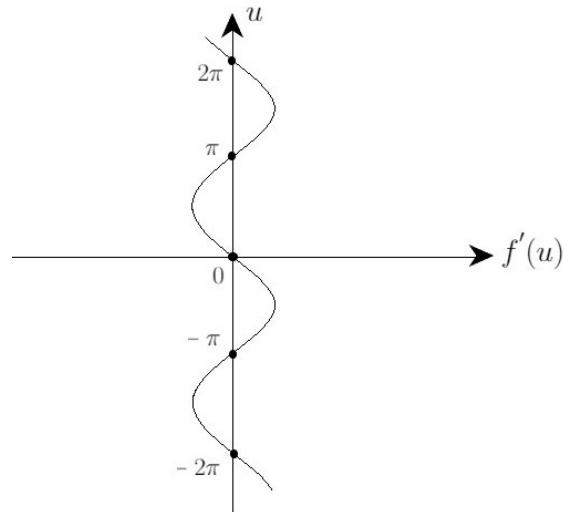


Рис. 13.

точками останутся только нули синуса. На Рис. 14. изображены сечения решения в различные моменты времени. На Рис. 14. красным изображено пограничное состо-

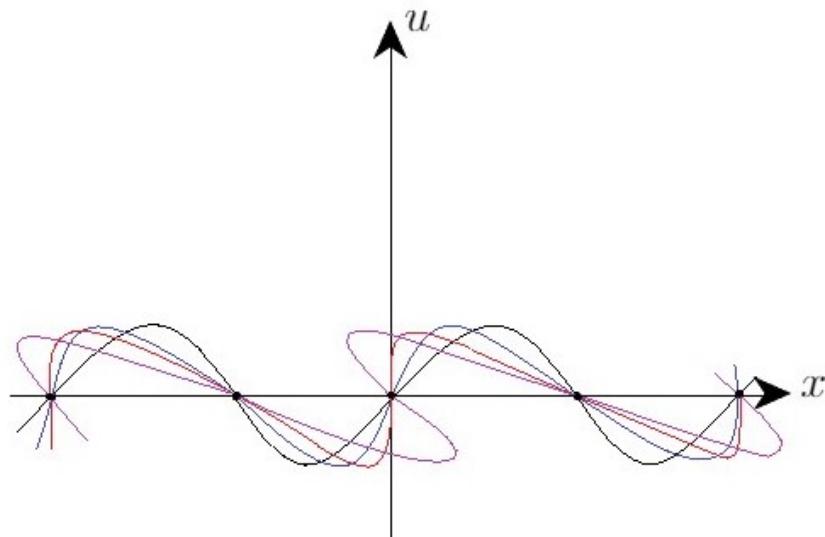


Рис. 14.

яние, в котором пропадает классическое решение, докажем, что это  $u(1, x)$ .

$$u = \sin(x + (\sin u) \cdot t)$$

$u(1, x) \notin C^1$  так как  $\#u_x(1, 0)$

$$|u'_0| \leq K$$

$$|f''(u)| \leq L \text{ на множестве значений } u_0$$

$$K = 1, L = 1,$$

значит при  $0 < t < 1$  существует классическое решение, но это только достаточное условие.

Теперь на время перейдём к задаче с незаданными  $f(u)$  и  $u_0$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u) \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

Характеристики в плоскости  $(t, x)$  изображены на Рис. 15. Наклон прямых меняется

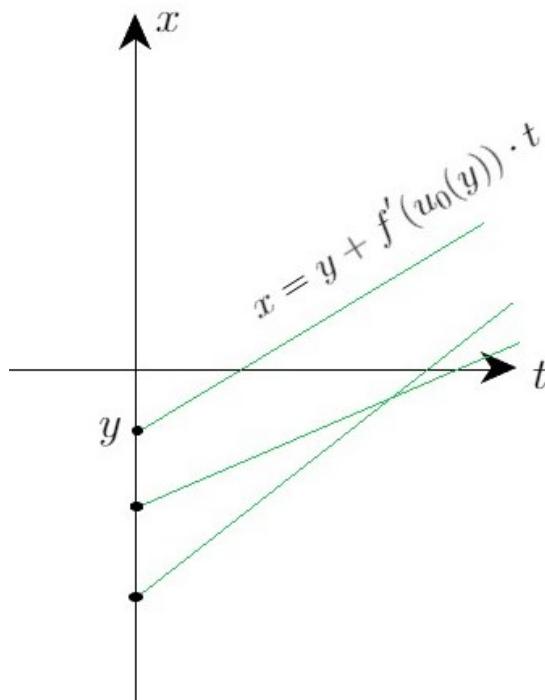


Рис. 15.

гладким образом и какой-то полосе прямые не будут пересекаться, нам нужно точно найти этот момент.

Рассмотрим

$$x(t, y) = y + f'(u_0(y)) \cdot t$$

Прямые не пересекаются пока  $x(t, y)$  монотонно возрастает по  $y$ . То есть

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 1 + t \cdot \frac{d}{dy}(f'(u_0(y))) = 1 + t \cdot f''(u_0(y))u'_0(y) > 0 \quad \forall y$$

Для задачи с  $\operatorname{arctg}$ :

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{u^2}{2}, \quad f'(u) = u \\ u_0(y) &= \operatorname{arctg} y \\ f'(u_0(y)) &= \operatorname{arctg} y \\ 1 + t \cdot \frac{1}{1 + y^2} &> 0 \quad \forall y, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Теперь аккуратно:

$$I = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{d}{dy} (f'(u_0(y))) \right) \quad (3.1)$$

$$I \geqslant 0 \Rightarrow 0 < t < +\infty \quad (3.2)$$

$$I < 0 \Rightarrow 0 < t < T = -\frac{1}{I} \text{ - точная оценка.} \quad (3.3)$$

Теперь вернемся к исходной задаче

$$\begin{aligned} f'(u_0(y)) &= -\sin(\sin y) \\ \frac{d}{dy} f'(u_0(y)) &= -\cos(\sin y) \cos y \\ I &= \inf_{y \in \mathbb{R}} (-\cos(\sin y) \cos y) = -1 \text{ при } y = 0 + 2\pi k \end{aligned}$$

Значит классическое решение существует в полосе  $0 < t < 1$ . Сечение на плоскость  $(t, x)$  изображено на Рис. 16., у нас возникает слабый разрыв.

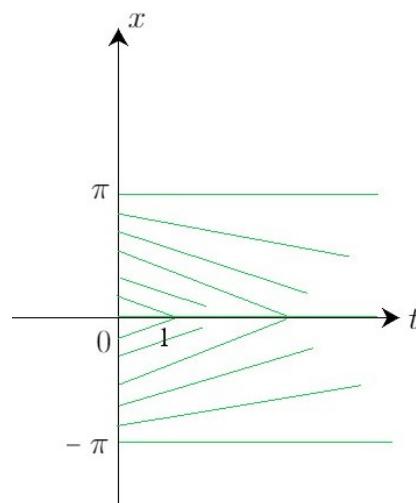


Рис. 16.

### Возникновение сильного разрыва

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = -x \end{cases}$$

Вообще говоря, не очень хорошо, так как  $-x$  не ограниченная функция.

$$f''(u) = 1 = L$$

$$|u'_0(x)| = 1 = K$$

$$T = 1$$

$$u = u_0(x - f'(u) \cdot t)$$

$$u = -(x - ut)$$

$$u = -\frac{x}{1-t}$$

На Рис. 17. изображены сечения в различные моменты времени, красным обозначен срыв или по-английски blow up, но это не то что нам нужно.

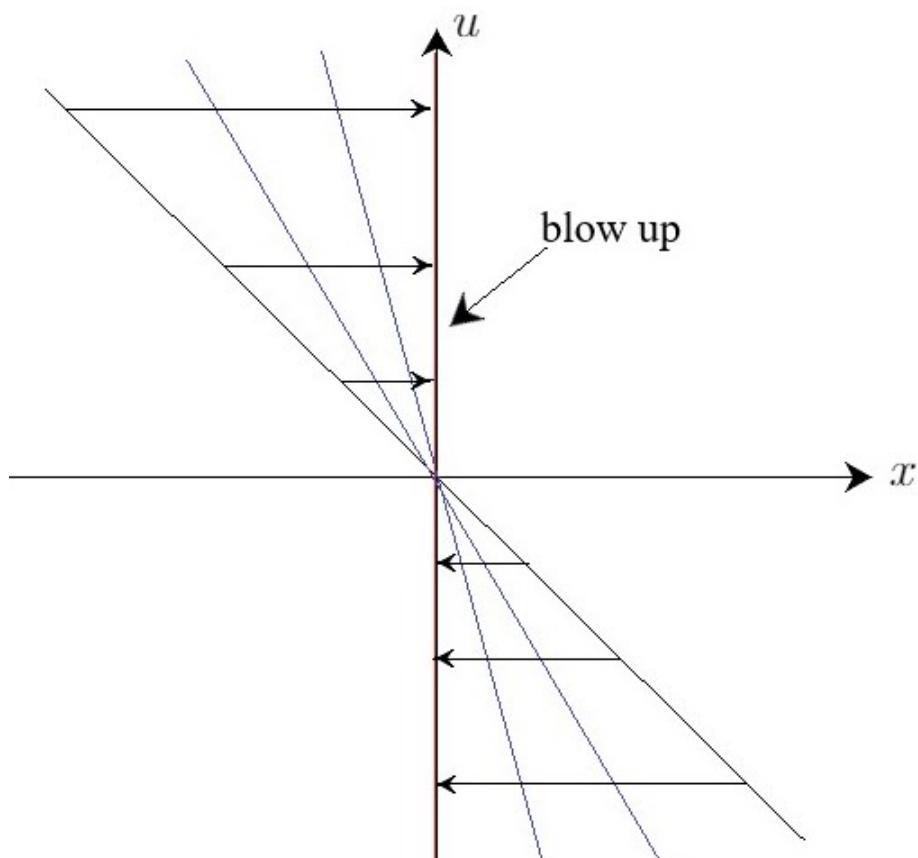


Рис. 17.

Теперь рассмотрим другую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ \psi_1(x) & -3 < x < -1 \\ -x & -1 \leq x \leq 1 \\ \psi_2(x) & 1 < x < 3 \\ -2 & x \geq 3 \end{cases} \\ -1 < \psi_{1,2} < 0 \end{array} \right.$$

На Рис. 18. изображены сечения

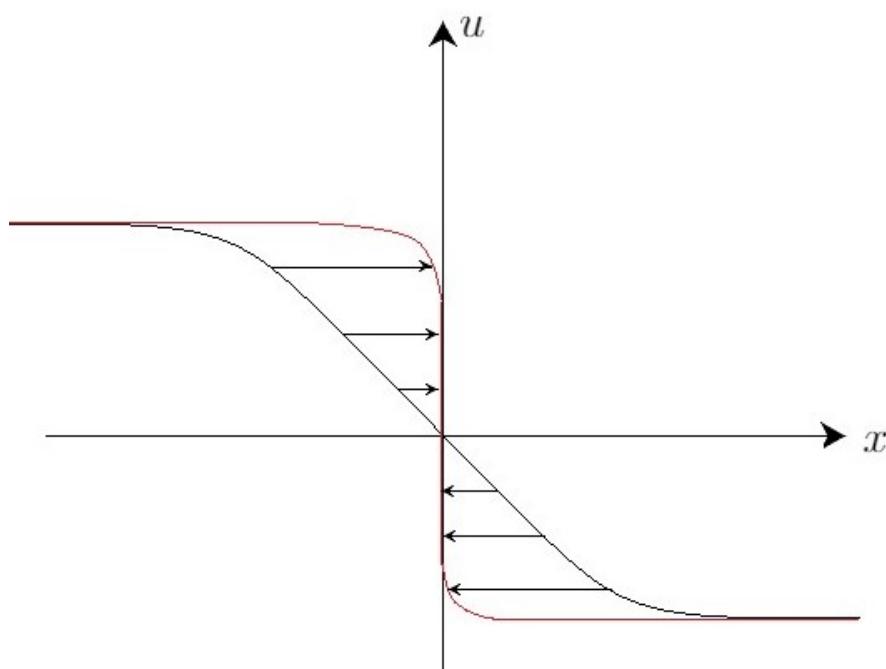


Рис. 18.

$$|u'_0(x)| \leq 1$$

$$f''(u) = 1$$

$$T = 1$$

Красным на Рис. 18. изображен график  $u(1, x)$ .

$$u(1, -0) = 1$$

$$u(1, +0) = -1$$

следовательно получаем разрыв первого рода - сильный разрыв.

На Рис. 19. примерное изображение на плоскости  $(x, t)$ , в точке 1 сильный разрыв.

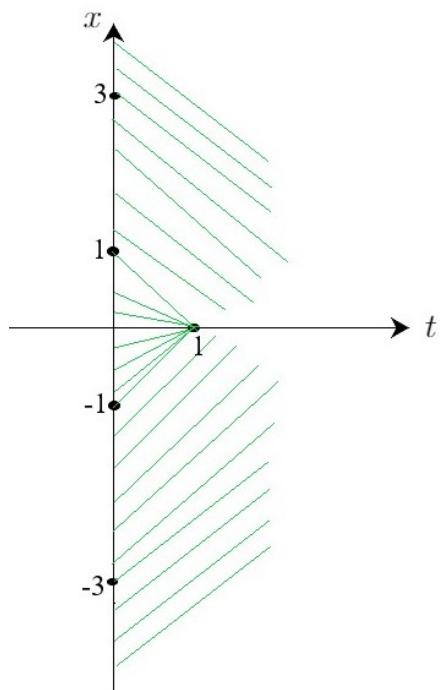


Рис. 19.

## Семинар 4

### Квазилинейные уравнения

#### Обобщенные решения

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Если имеется сильный разрыв, надеясь на то, что он исчезнет как-то маловероятно, но хочется продолжать решения.

Рассмотрим

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (4.1)$$

**Определение 1.**  $u(t, x)$  называется *обобщенным решением уравнения (4.1) в области*, если выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (4.2)$$

$\Omega$  - открытое связное множество (область).

$C_0^{\infty}(\Omega)$  - бесконечно дифференцируемые финитные функции, то есть они сходят на 0.

$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$  значит  $\phi \equiv 0$  вне какого-то шара радиуса  $R$ .

$C_0^{\infty} \Rightarrow \exists$  компакт  $K \subset \Omega : \phi = 0$  при  $(t, x) \in \Omega \setminus K$ .

Попробуем построить пример функции из  $C_0^{\infty}(0, 1)$ , тривиальным примером является  $\phi \equiv 0$ . Функция будет выглядеть приблизительно как на Рис. 20.

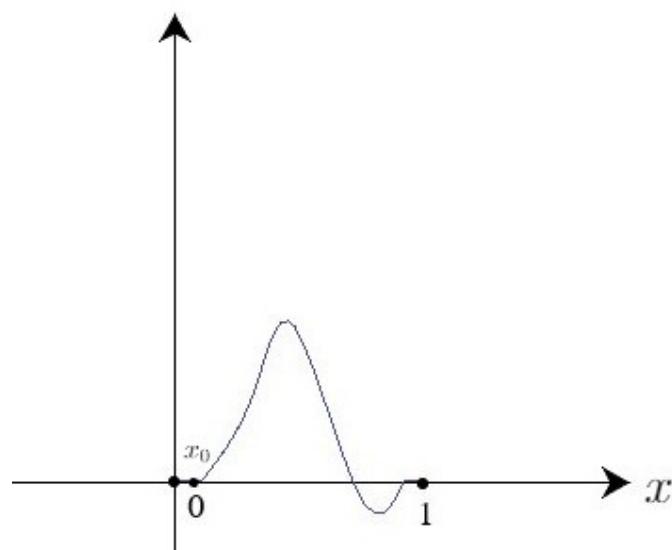


Рис. 20.

Построить такую функцию не так просто, так как она должна входить в 0 со всеми своими производными. Формула Тейлора существует любого порядка, а ряд Тейлора нет, так как он нулевой  $x_0$ .

Пытаемся найти разницу между бесконечно дифференцируемыми и вещественно аналитическими функциями.

$e^{-\frac{1}{x}}$  входит в 0 со всеми своими производными, так как

$$e^{-\infty} = 0$$

$$\phi = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0$$

$$\phi^{(l)} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +0} 0$$

сделаем замену  $\frac{1}{x} = y, \quad y = +\infty$  и получаем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} P_k(y) = 0,$$

так как  $e^{-y}$  убывает к 0 быстрее, чем  $P_k(y)$  возрастает к бесконечности. То есть можем строить примеры на основе  $e^{-\frac{1}{x}}$ .

Откуда взялось определение обобщенного решения?

Возьмем  $u$  - классическое решение из  $C^1(\Omega)$ , значит

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

домножим 0 на функцию и проинтегрируем

$$\int_{\Omega} (u_t + (f(u))_x) \phi(t, x) dt dx = 0$$

проинтегрируем по частям, возникнет интеграл по  $\partial\Omega$ , но он равен 0 из-за  $\phi$ , то есть получим

$$\int_{\Omega} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx = 0$$

**Утверждение 1.**  $u \in C^1(\Omega)$ . Тогда  $u$  - классическое решение (4.1)  $\Leftrightarrow u$  - обобщенное решение (4.1)

Для какого класса функций обобщенное решение?  $u(t, x) \in L_{\infty}(\Omega)$ ,  $u(t, x)$  - ограниченная, измеримая по Лебегу (может быть разрывной).

Пусть  $u$  - кусочно - гладкая. Когда она является обобщенным решением?

Рассмотрим область  $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+ \cup \Gamma$  (Рис. 21.).

**Теорема 3.** Пусть  $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+ \cup \Gamma$ ,  $u \in C^1(\overline{\Omega_-}) \cap C^1(\overline{\Omega_+})$  ( $u_+$  и  $u_-$  могут быть не равны). Тогда  $u$  является обобщенным решением  $\Leftrightarrow$

1)  $u$  - классическое решение в  $\Omega_-$  и в  $\Omega_+$

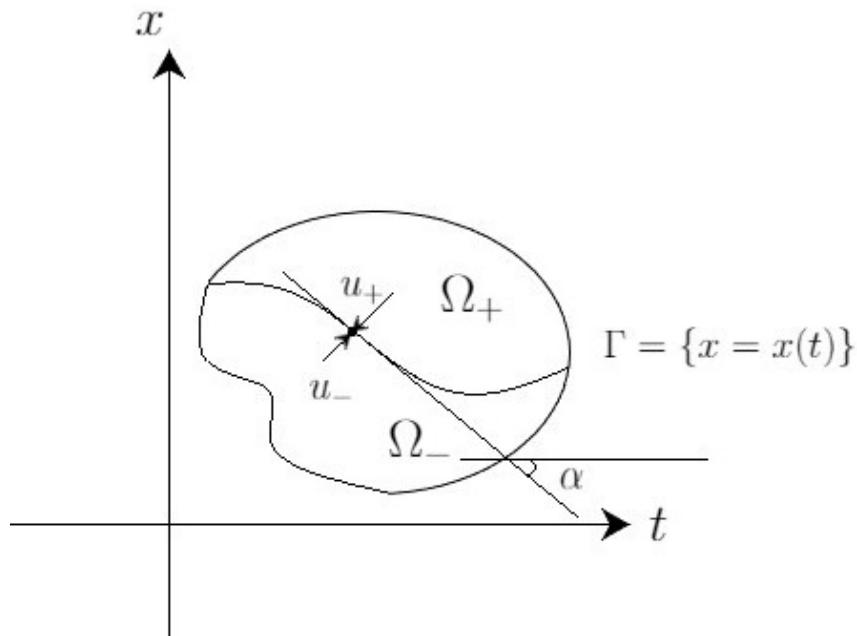


Рис. 21.

2) на  $\Gamma$  выполняется условие Ранкина - Гюгонио

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{[f(u)]}{[u]}. \quad (4.3)$$

$\Omega_- \subset \Omega$ ,  $u$  - решение в  $\Omega$ , значит  $u$  - решение в  $\Omega_-$ , так как  $C_0^\infty(\Omega) \supset C_0^\infty(\Omega_-)$ .  
Функции из  $C_0^\infty(\Omega_-)$  на  $\Omega$  доопределяются нулем.

Разрывные решения называются ударная волна (точнее линия разрыва).  $\frac{dx}{dt}$  - линия разрыва.

$[u]$  изображено на Рис. 22.

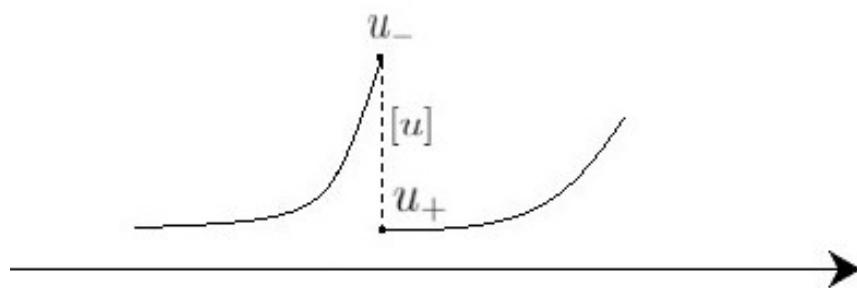


Рис. 22.

Условие Ранкина - Гюгонио говорит о связи решения при подходе к ударной волне со скоростью распределения ударной волны, причем она идет через функцию потока.

Геометрический смысл:

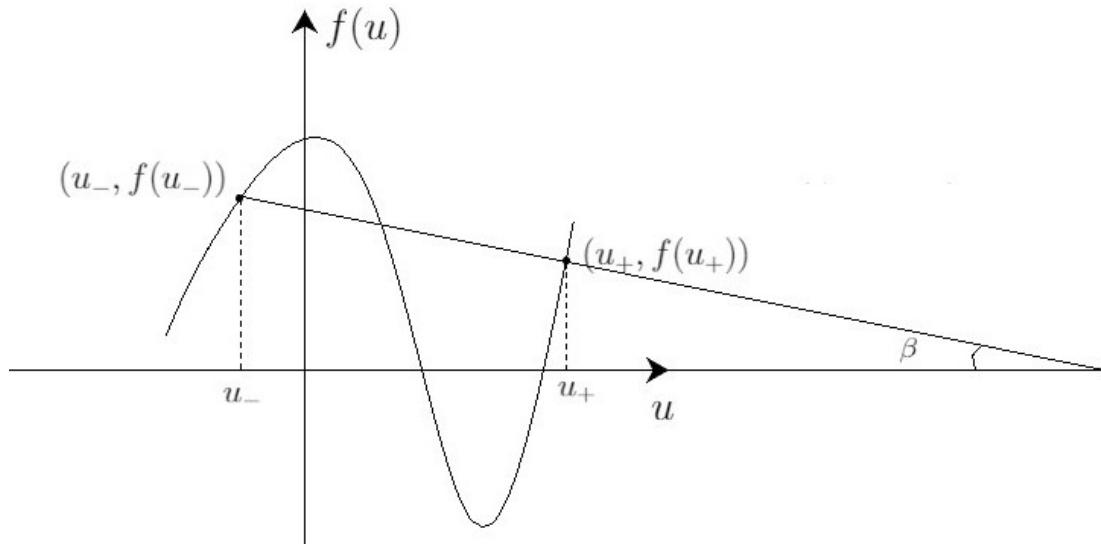


Рис. 23.

Из Рис. 21.

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tg} \alpha$$

Из Рис. 23.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

То есть угол наклона хорды с углом наклона касательной.

### Кусочно-гладкие обобщенные решения

**Задача 6.** Является ли функция  $u(t, x)$  обобщенным решением в смысле интегрального тождества, если

$$f(u) = \frac{u^2}{2}$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x < t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

$u \equiv C$  - классическое решение уравнения  $u_t + (f(u))_x = 0 \quad \forall f$ . Рассматриваем уравнение

$$u_t + u \cdot u_x = 0$$

$u(t, x)$  изображено на Рис. 24.

То, что происходит на  $x = t$  не важно, так как это множество меры 0.

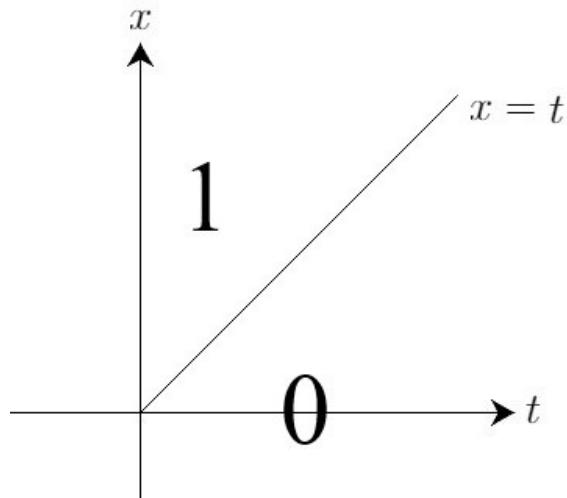


Рис. 24.

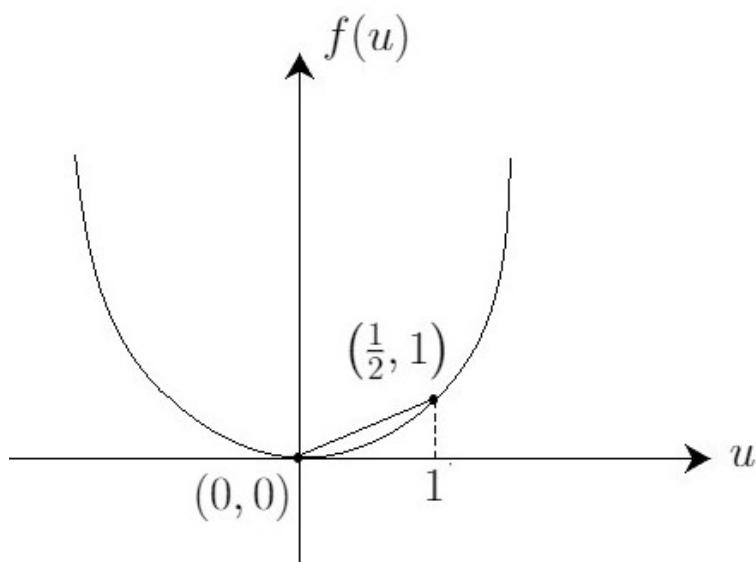


Рис. 25.

График функции  $f(u)$  изображен на Рис. 25., на нем отмечены точки  $u_+ = 1$  и  $u_- = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2} \neq 1,$$

значит заданная  $u(t, x)$  не является обобщенным решением.

Если вместо  $t$  взять  $\frac{t}{2}$ , то получим обобщенное решение. Если поменять  $u_+$  и  $u_-$

местами, то условие Ранкина-Гюгонио выдерживает. То есть

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > \frac{t}{2} \\ 1 & x < \frac{t}{2} \end{cases},$$

изображенное на Рис. 26., будет обобщенным решением нашего уравнения.

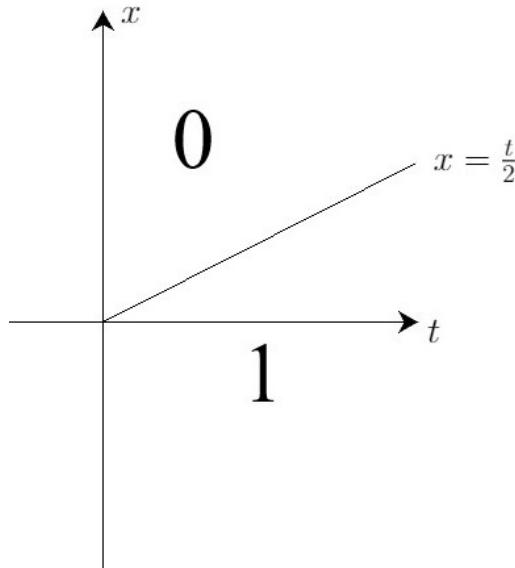


Рис. 26.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$u \equiv 0$  - классическое решение. Построим обобщенное кусочно - гладкое решение задачи (Рис. 27.) График  $f(u)$  изображен на Рис. 28. Обозначим это обобщенное решение  $u_\delta(t, x)$ ,  $\delta > 0$

$$u_\delta(t, x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{\delta}{2}t \\ -\delta & -\frac{\delta}{2}t < x < 0 \\ \delta & 0 < x < \frac{\delta}{2}t \\ 0 & x > \frac{\delta}{2}t \end{cases}$$

Проверим, что это обобщенное решение: константа является классическим решением

(1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\delta}{2} \\ u_- &= 0, \quad u_+ = -\delta \\ \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} &= \frac{\frac{\delta^2}{2} - 0}{-\delta - 0} = -\frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

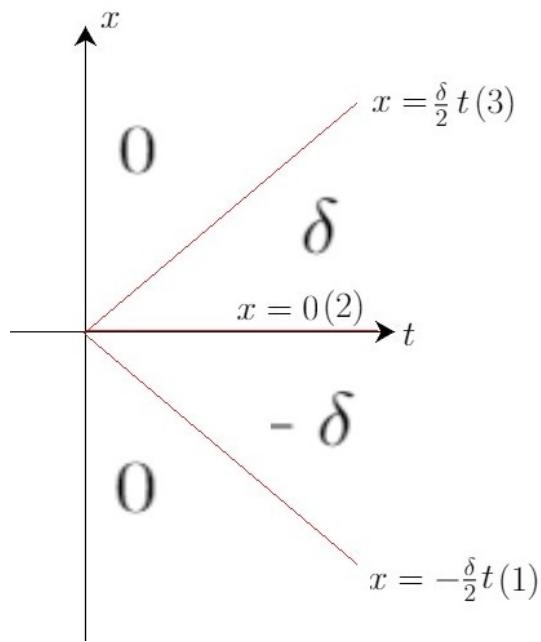


Рис. 27.

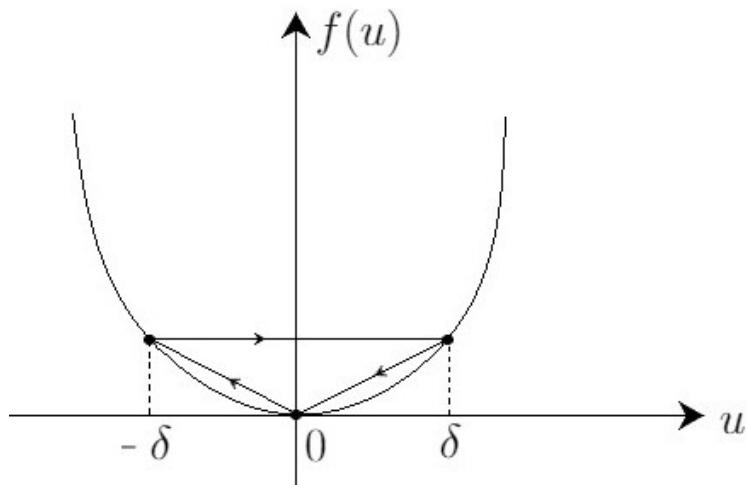


Рис. 28.

(3)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\delta}{2} \\ u_- &= \delta, \quad u_+ = 0 \\ \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} &= \frac{0 - \frac{\delta^2}{2}}{0 - \delta} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$u_- = -\delta, u_+ = \delta$$

$$\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{\frac{\delta^2}{2} - \frac{-\delta^2}{2}}{\delta - (-\delta)} = 0$$

Можно строить и по-другому (Рис. 29.) А если  $f(u) = e^u$ , то можем как изображено

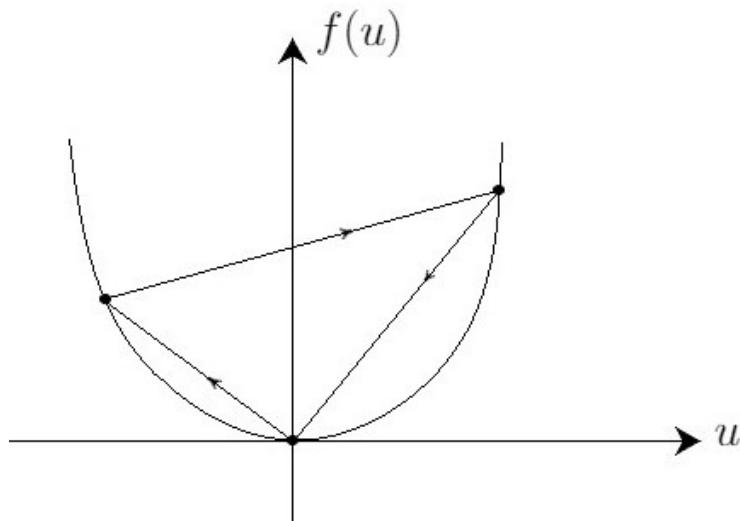


Рис. 29.

на Рис. 30.

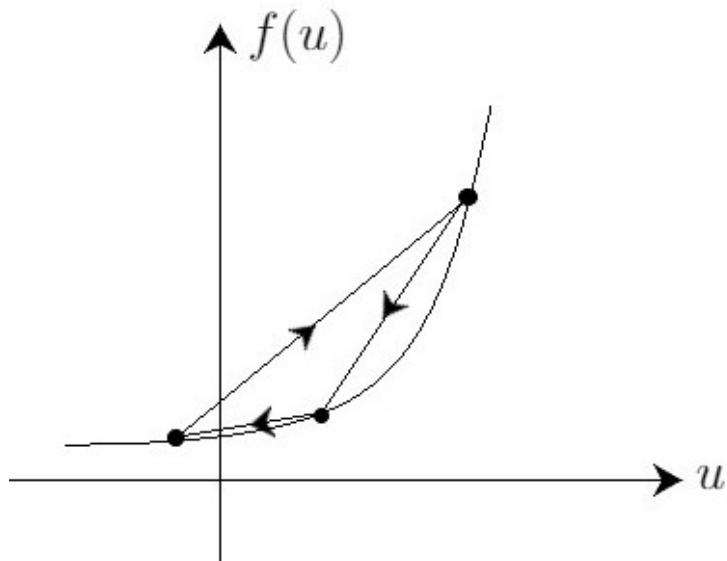


Рис. 30.

С двумя разрывами нельзя. Хотим узнать, какие разрывы надо запретить, этим и будем заниматься далее.

## Семинар 5

### Квазилинейные уравнения

#### Кусочно-гладкие обобщенные решения

**Задача 7.** Можно ли простираить решение с большим количеством линий разрыва?

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Попробуем постетроить для двух разрывов, это должно выглядеть примерно как на Рис. 31. График  $f(u)$  изображен на Рис. 32. Так как условие Ранкина - Гюгонио

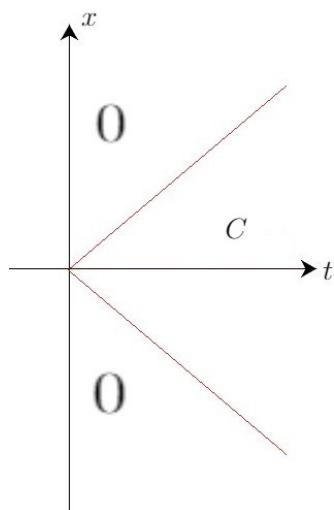


Рис. 31.

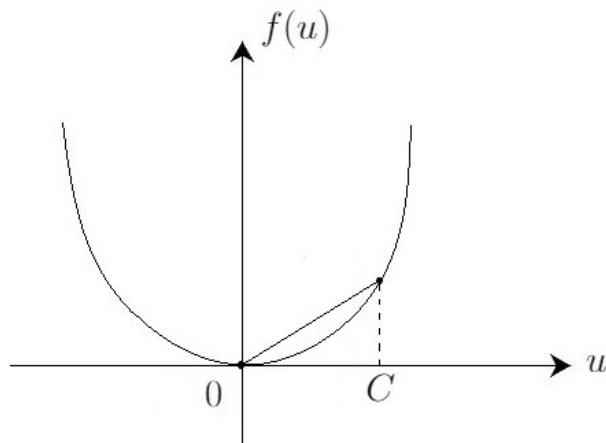


Рис. 32.

выдерживает смену местами  $u_+$  и  $u_-$ , то оба соединения должны быть по одной линии, а так не может быть. Поэтому решение с двумя разрывами невозможно.

Будем строить с пятью, сначала попробуем как на Рис. 33., но так мы не можем, так как если изобразить начало построения на Рис. 34. Получаем, что 0 и -1 соеди-

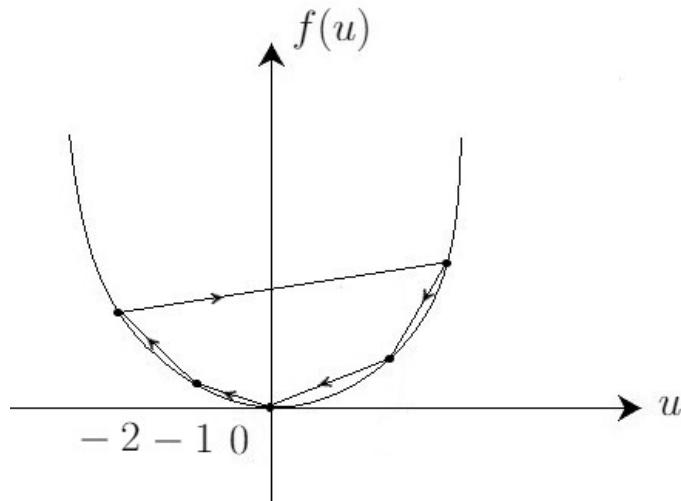


Рис. 33.

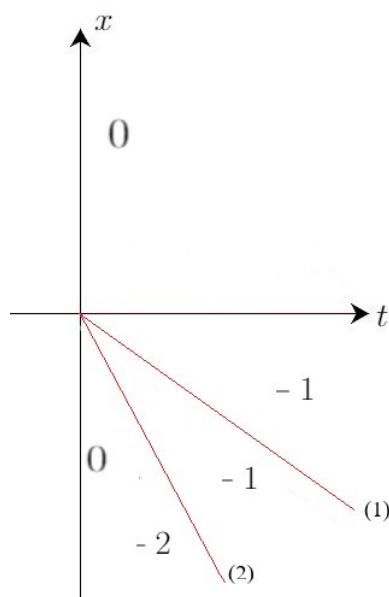


Рис. 34.

няются по линии (1), а -1 и -2 соединяются по линии (2), но такого быть не может, поэтому будем строить по - другому.

Строим с пятью разрывами, график  $f(u)$  изображен на Рис. 35. График обобщенного кусочно - гладкого решения задачи на Рис. 36.

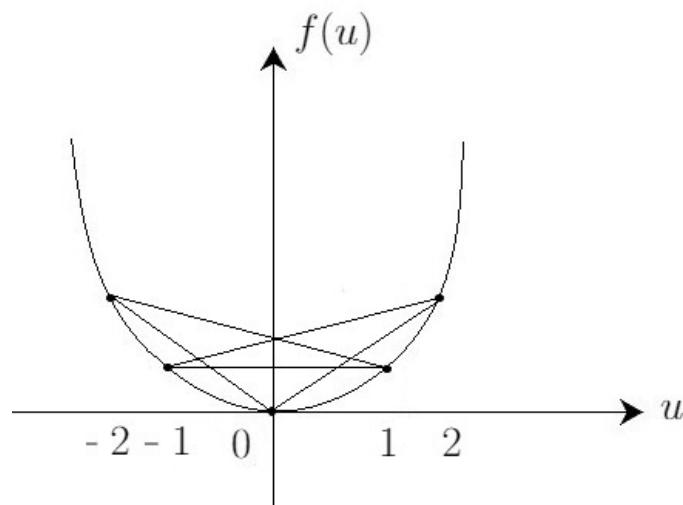


Рис. 35.

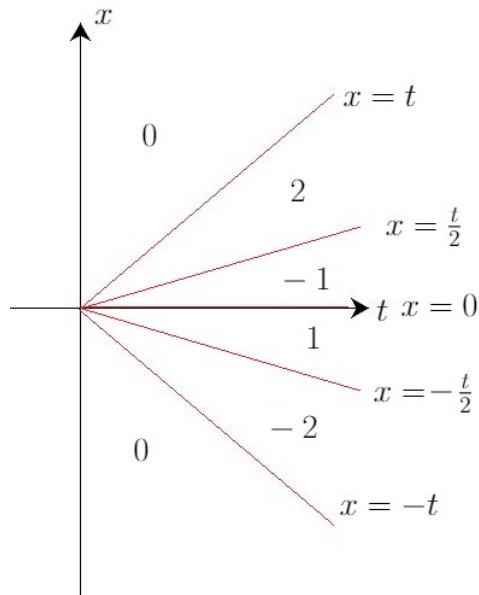


Рис. 36.

Перепишем условие Ранкина-Гюгонио для уравнения Хопфа

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}$$

Можем построить и для 7 разрывов (Рис. 37.) Докажем, что для уравнения Хопфа не может быть четного количества линий разрыва. из Рис. 38. видим, что

$$\frac{C_1 + C_2}{2} < \frac{C_2 + C_3}{2}$$

$$C_1 < C_3$$

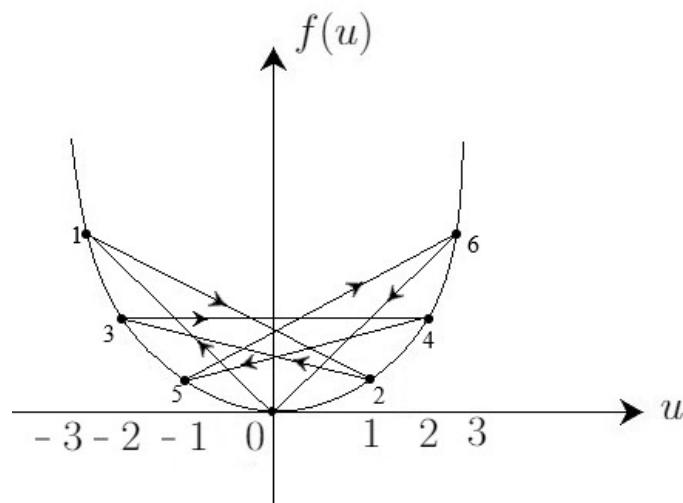


Рис. 37.

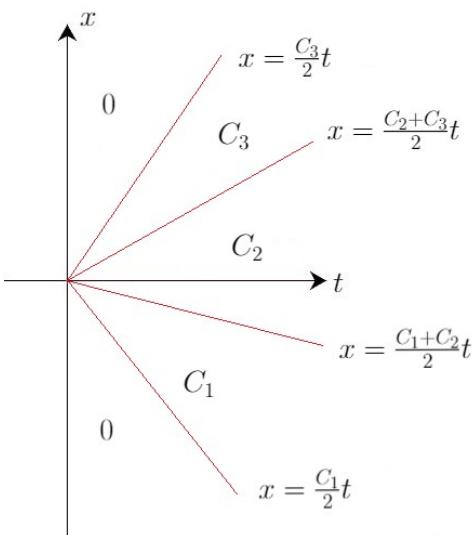


Рис. 38.

По аналогии для большего количества разрывов получаем

$$C_2 < C_4 \text{ и т.д.}$$

То есть

$$0 < C_2 < 0 \text{ для любого четного количества разрывов.}$$

Когда строим для 7 разрывов (Рис. 39.) видим монотонное возрастание через одну константу, то есть

$$0 < 1 < 2 < 3$$

$$-3 < -2 < -1 < 0$$

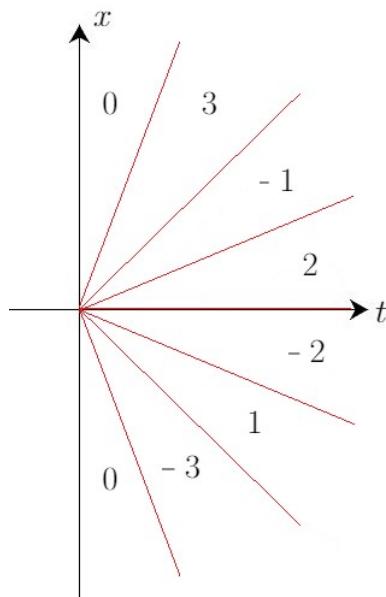


Рис. 39.

### Допустимые разрывы

На самом деле, мы получали неверные решения задач Коши, теперь будем обсуждать, что с этим делать. Будем рассматривать решение, изображенное на Рис. 40. Разрешив все разрывы, мы нарушаем единственность. В физике ударные волны

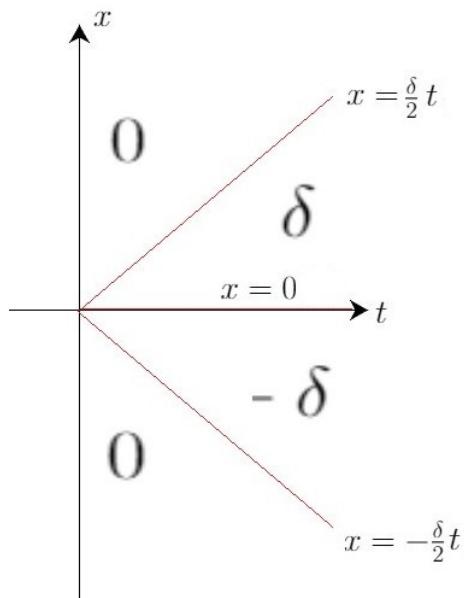


Рис. 40.

наблюдаются не все.

Построим характеристики (Рис. 41.) Разрывы (1) и (3) разрешены, а (2) запрещен, то есть, когда характеристики сходятся можно, а когда расходятся нельзя.

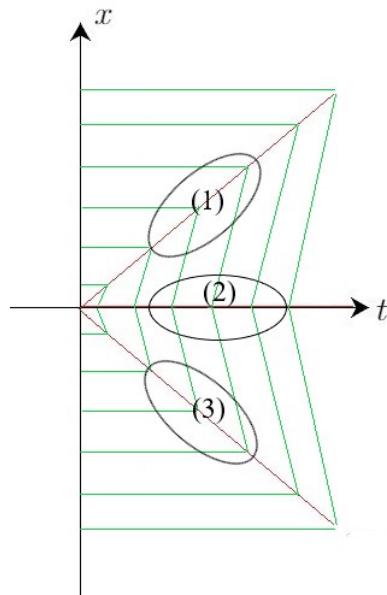


Рис. 41.

Рассмотрим это для уравнения Хопфа с точки зрения физики: у нас есть две частицы, одна из которых движется со скоростью  $u_+$ , а другая со скоростью  $u_-$ , они сталкиваются и движутся со скоростью  $\frac{u_+ + u_-}{2}$ . Посчитаем кинетическую энергию

1) До столкновения

$$\frac{1}{2}u_+^2 + \frac{1}{2}u_-^2 = \left(\frac{u_+ + u_-}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_+ - u_-}{2}\right)^2$$

2) После столкновения

$$2 \cdot \frac{1}{2} \frac{(u_+ + u_-)^2}{4} = \frac{(u_+ + u_-)^2}{4}$$

То есть частицы столкнутся и выделится энергия, равная  $\frac{u_+ - u_-}{2}$ .

А в случае, который мы запретили, одна большая частица разлетается на 2 и сумма энергий больше изначальной, но энергия не может браться из ниоткуда.

Теперь попробуем через математику (плохо говорить про невзаимодействующие частицы, когда они оказываются в одной точке). Надо написать вязкость:

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}$$

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = \varepsilon u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Правильными решениями называют те, которые получаются из вязких устремляя  $\varepsilon$  к 0.

Сформулируем условие допустимости разрыва (условие возрастания энтропии в газовой динамике):

$$f'(u_+) < \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} < f'(u_-) \quad (5.1)$$

Упростим это условие для выпуклых функций состояния

- 1) Выпуклая вниз ( $\frac{u^2}{2}, e^u$ )

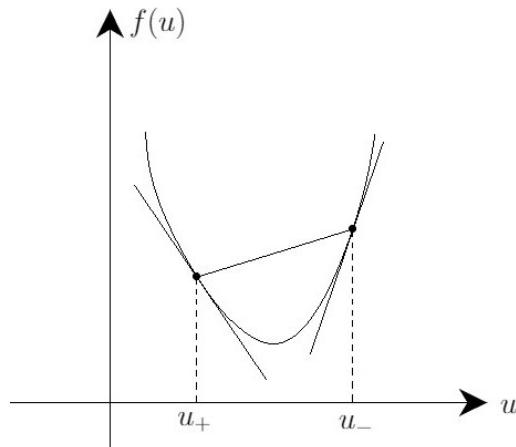


Рис. 42.

$$f'' > 0, \text{ условие выполняется } \Leftrightarrow u_- > u_+$$

- 2) Выпуклая вверх ( $\ln|u|$ )

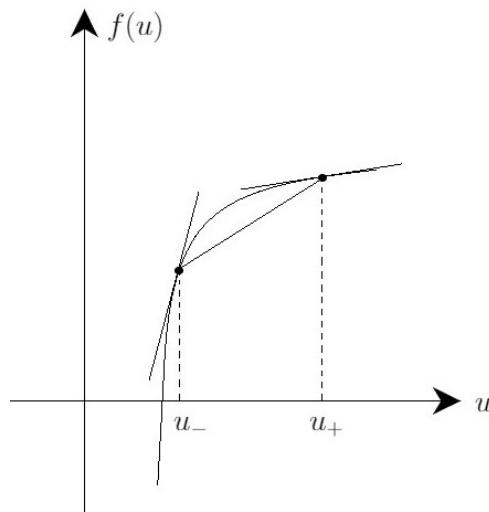


Рис. 43.

$$f'' < 0, \text{ условие выполняется } \Leftrightarrow u_- < u_+$$

Получаем, что обобщенное энтропийное решение  $\Leftrightarrow$

- 1) это классическое решение в каждой из подобластей
- 2) условие Ранкина-Гюгонио
- 3) условие допустимости разрыва

$$f'' > 0 \quad u_- > u_+ \quad (5.2)$$

$$f'' < 0 \quad u_- < u_+ \quad (5.3)$$

### Задача Римана о распаде разрыва

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} C_1, & x < 0 \\ C_2, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.4)$$

Рассмотрим эту задачу для уравнения Хопфа,  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ .

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_+, & x > 0 \end{cases} \quad t > 0 \end{cases}$$

Случай 1.  $u_- > u_+$  Получаем простую ударную волну (Рис. 45.).

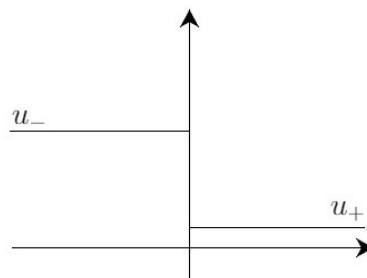


Рис. 44.

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & x < \frac{u_- + u_+}{2} \\ u_+ & x > \frac{u_- + u_+}{2} \end{cases}$$

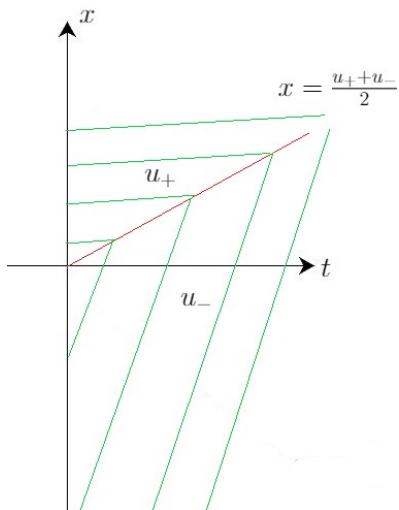


Рис. 45.

Случай 2.  $u_- < u_+$ . Получаем волну разрежения и мы пока не знаем, что будет там, где

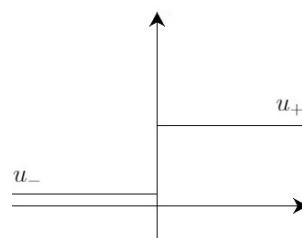


Рис. 46.

нет характеристик (Рис. 47.). Будем пользоваться автомодельными решения-

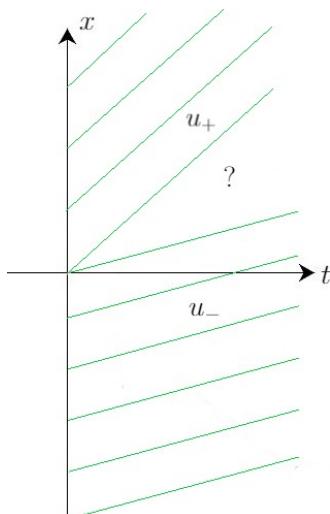


Рис. 47.

ми, это решения, которые зависят только от  $\frac{x}{t}$ . Так как задача инвариантна относительно растяжений  $x \rightarrow kx, t \rightarrow kt$   $k > 0$ , задача Римана не изменится.

Найдем  $v\left(\frac{x}{t}\right)$

$$v'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) + v\left(\frac{x}{t}\right) \cdot v'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} = 0$$

домножим на  $t$  и сделаем замену  $\xi = \frac{x}{t}$  и получаем

$$v' \cdot (v - \xi) = 0$$

значит

$$v' = 0 \Rightarrow v = C \text{ или } v = \frac{x}{t}$$

Получаем, что вместо знака вопроса будет  $\frac{x}{t}$  (Рис. 48) значит

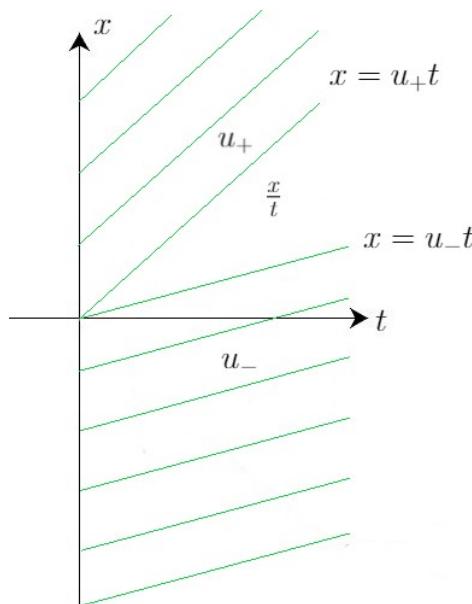


Рис. 48.

$$u(t, x) = \begin{cases} u_-, & x < u_- t \\ \frac{x}{t}, & u_- t < x < u_+ t \\ u_+, & x > u_+ t \end{cases}$$

## Семинар 6

### Квазилинейные уравнения

#### Задача Римана о распаде разрыва

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_+, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

I. Задачи с уравнением Хопфа.

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.1)$$

Решение изображено на Рис. 49.

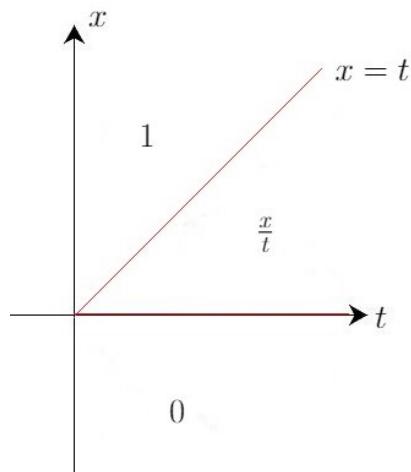


Рис. 49.

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x > t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \theta(-x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.2)$$

Решение изображено на Рис. 50.

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x > \frac{t}{2} \\ 1, & x < \frac{t}{2} \end{cases}$$

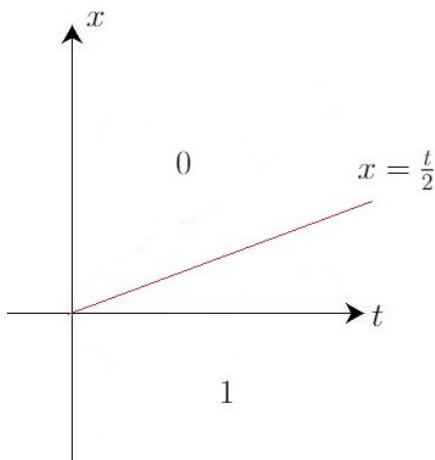


Рис. 50.

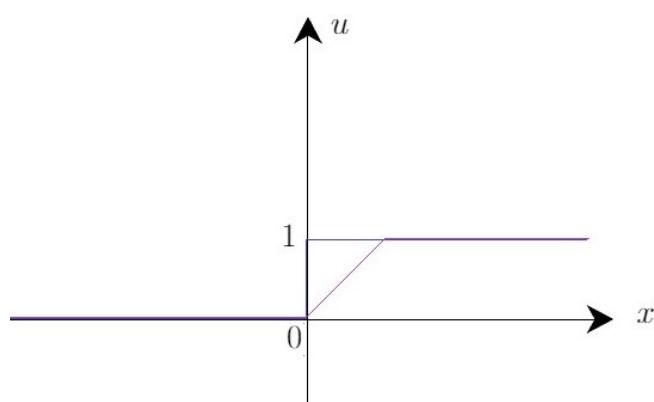


Рис. 51.

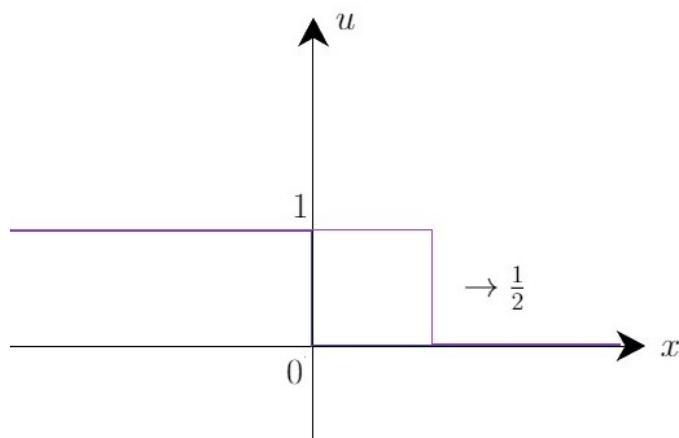


Рис. 52.

Движение решения в осях  $(x, u)$  задачи (6.1) изображено на Рис. 51., а задачи (6.2) на Рис. 52.

Для уравнения Хопфа автомодельные решения это  $C$  и  $\frac{x}{t}$

На Рис. 53. изображена ситуация, в которой образуется сильный разрыв, для уравнения Хопфа так можно при  $C_2 < C_1$

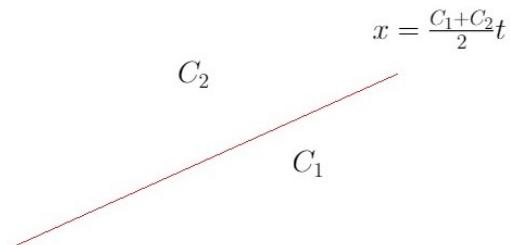


Рис. 53.

На Рис. 54. изображена ситуация, в которой образуется линия слабый разрыв. Посмотрим при каких  $k$  и  $C$  выполняется условие Ранкина-Гюгонио

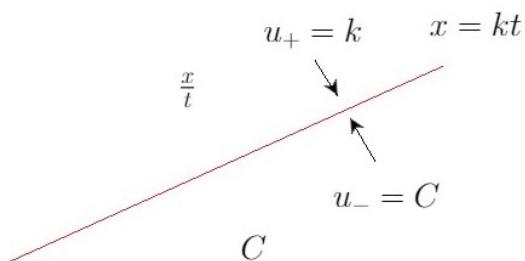


Рис. 54.

$$\frac{dx}{dt} = k = \frac{k + C}{2} \Leftrightarrow k = C$$

значит соединение только по непрерывности.

Рассмотрим разные ситуации и посмотрим какие из них возможны

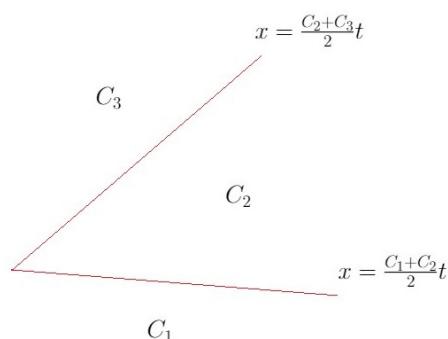


Рис. 55.

В ситуации, изображенной на Рис. 55., по условию допустимости разрыва должно быть  $C_3 < C_2 < C_1$ , но

$$\frac{C_2 + C_3}{2} > \frac{C_1 + C_2}{2} \Rightarrow C_3 > C_1$$

получаем, что так нельзя.

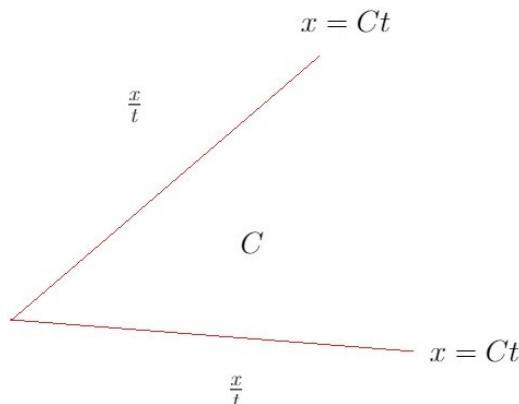


Рис. 56.

В ситуации, изображенной на Рис. 56.,  $\frac{x}{t}$  и  $C$  должны соединяться по линии  $x = Ct$ , но так нельзя.

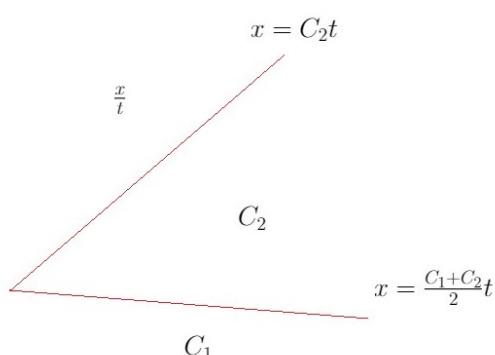


Рис. 57.

В ситуации, изображенной на Рис. 57., по условию допустимости разрыва должно быть  $C_2 < C_1$ , но

$$C_2 > \frac{C_1 + C_2}{2} \Rightarrow C_2 > C_1$$

получаем, что так нельзя.

В ситуации, изображенной на Рис. 58., по условию допустимости разрыва должно быть  $C_2 < C_1$ , но

$$C_1 < \frac{C_1 + C_2}{2} \Rightarrow C_1 < C_2$$

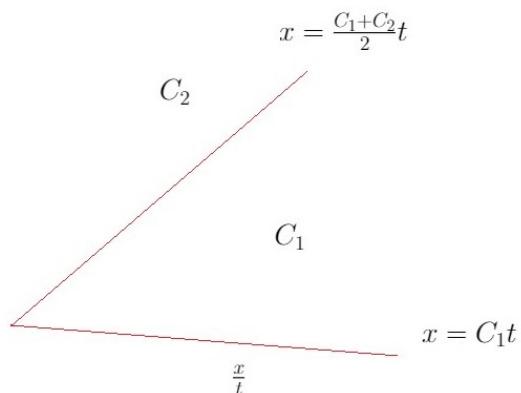


Рис. 58.

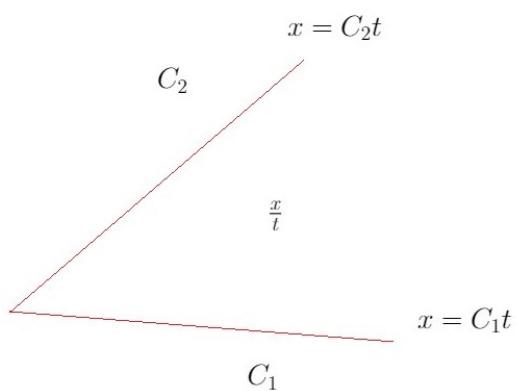


Рис. 59.

получаем, что так нельзя.

В ситуации, изображенной на Рис. 59., при  $C_1 < C_2$  так можно.

II. Случай выпуклой функции  $f$ .

$$\begin{cases} u_t + u^2 \cdot u_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} u_t + u^2 \cdot u_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.4)$$

$f(u) = \frac{u^3}{3}$  (Рис. 60.). Эта функция не выпукла ни вниз, ни вверх но нас интересует ее выпуклость только на отрезках  $[u_-, u_+]$  или  $[u_+, u_-]$ .

На отрезке  $[0, 2]$  она выпукла вниз, значит условие допустимости разрыва:  $u_- > u_+$ . Значит решением задачи (6.4) будет изображенное на Рис. 61.

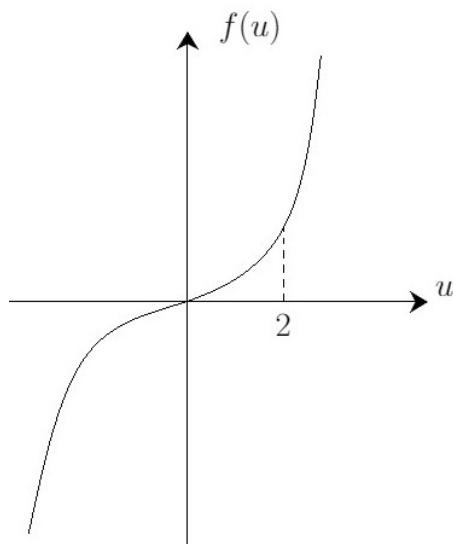


Рис. 60.

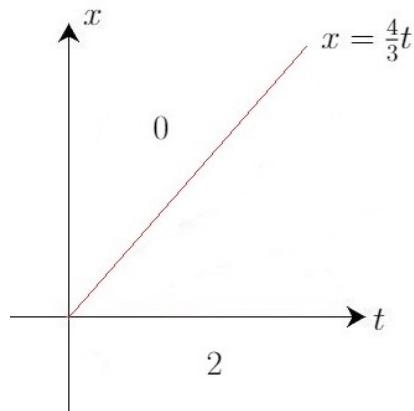


Рис. 61.

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & x < \frac{4}{3}t \\ 0, & x > \frac{4}{3}t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{0^3}{3} - \frac{8}{3}}{0 - 2} = \frac{4}{3}$$

Найдем автомодельные решения.

$$u = v\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$v' \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) + v^2 \cdot v' \cdot \frac{1}{t} = 0$$

домножаем на  $t$  и получаем

$$v' \left(v^2 - \frac{x}{t}\right) = 0$$

$$v = C$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{x}{t}}$$

так как функция выпуклая вниз, то нам подходит  $v = \sqrt{\frac{x}{t}}$ . Получаем решение, изображенное на Рис. 62.  $x = 4t$  параллельна касательной в точке 2,  $x = 0$

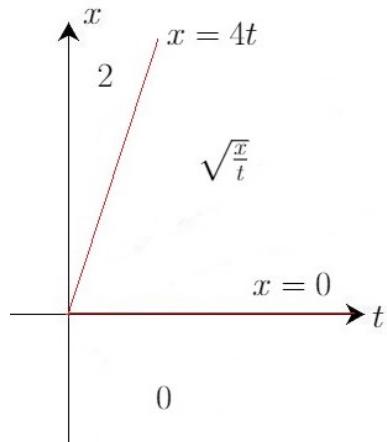


Рис. 62.

параллельна касательной в точке 0.

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{t}}, & 0 < x < 4t \\ 2, & x > 4t \end{cases}$$

Решение в осях  $(x, u)$  в какой-то момент времени  $t > 0$  на Рис. 63.

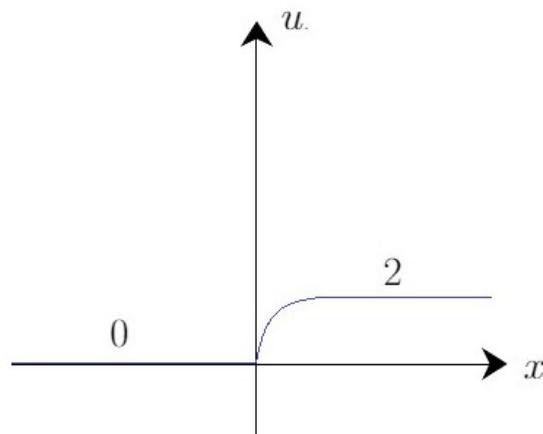


Рис. 63.

Найдем автомодельные решения в общем виде.

$$u_t + f'(u)u_x = 0$$

$$\begin{aligned} u &= v \left( \frac{x}{t} \right) \\ v' \cdot \left( -\frac{x}{t^2} \right) + f'(v) \cdot v' \cdot \frac{1}{t} &= 0 \\ v' \left( f'(v) - \frac{x}{t} \right) &= 0 \\ v &= C \\ f'(v) &= \frac{x}{t} \\ v &= (f')^{-1} \left( \frac{x}{t} \right) \end{aligned}$$

Если  $f$  - выпуклая, то  $f'$  -монотонная, значит уравнение имеет единственное решение.

- Хопф.  $f(u) = \frac{u^2}{2}, f'(u) = u$   
 $v = \frac{x}{t}$

-  $f = \frac{u^3}{3}, f'(u) = u^2$   
 $v^2 = \frac{x}{t}$   
 $v = \sqrt{\frac{x}{t}}$

### Задача 8.

$$\begin{cases} u_t + (\ln u)_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \begin{cases} e, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} u_t + (\ln u)_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \begin{cases} e, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.6)$$

$f(u) = \ln u$  - выпуклая вниз, условие допустимости разрыва:  $u_- < u_+$ .

Автомодельное решение:

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{x}{t} \\ \frac{1}{u} &= \frac{x}{t} \\ u &= \frac{t}{x} \end{aligned}$$

подставим и проверим

$$\frac{1}{x} + \left( -\frac{x}{t^2} \right) \cdot \frac{x}{t} = 0$$

График  $f(u)$  на Рис. 64.

Решение задачи (6.6) на Рис. 65.



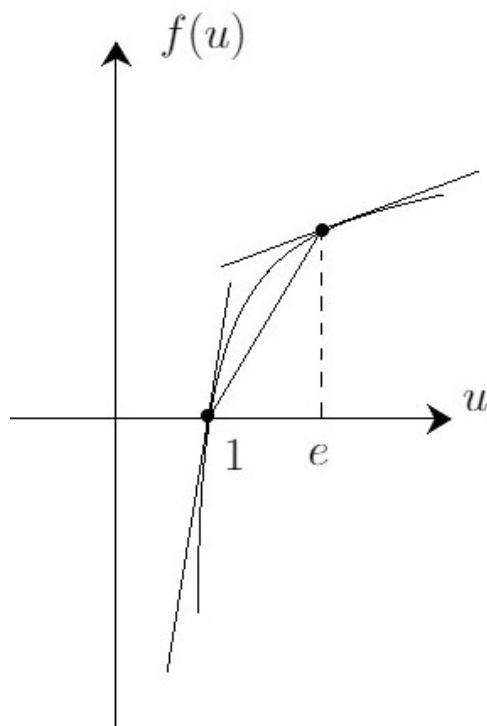


Рис. 64.

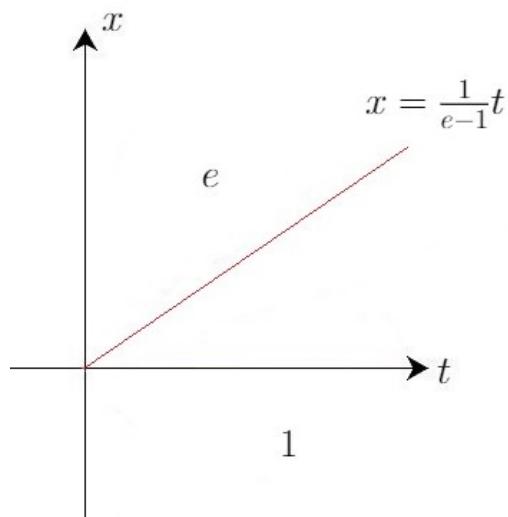


Рис. 65.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

$$u(t, x) = \begin{cases} e, & x > \frac{1}{e-1}t \\ 1, & x < \frac{1}{e-1}t \end{cases}$$

Решение задачи (6.5) на Рис. 66.

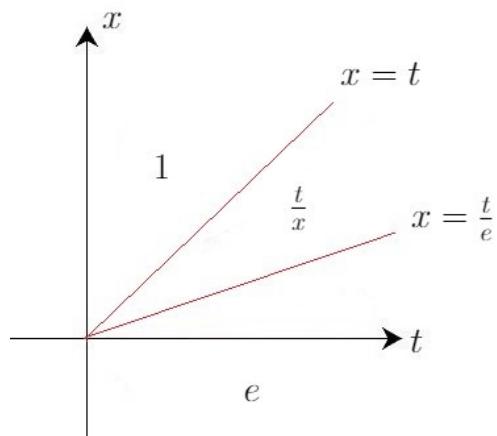


Рис. 66.

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x > t \\ \frac{t}{x}, & \frac{t}{e} < x < t \\ e, & x < \frac{t}{e} \end{cases}$$

III. Случай невыпуклой функции  $f$ .

Условия допустимости разрыва формулируются с точки зрения расположения  $f(u)$  и хорды.

На Рис. 67. хорда лежит не ниже графика, значит  $u_- > u_+$ .

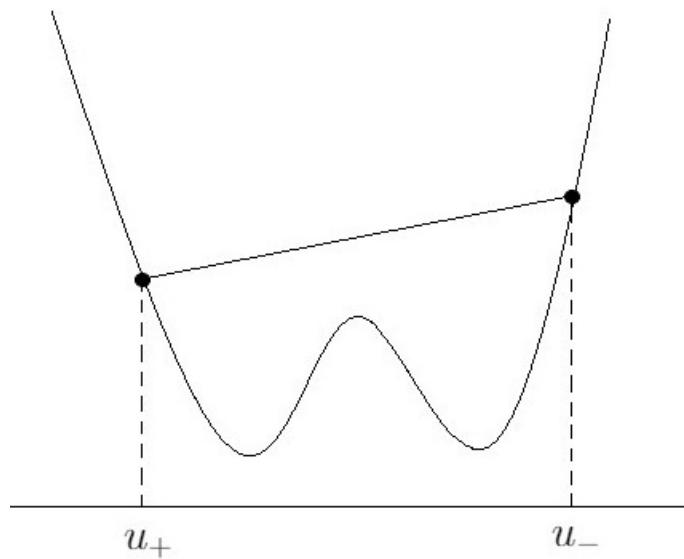


Рис. 67.

На Рис. 68. хорда лежит не выше графика, значит  $u_- < u_+$ .

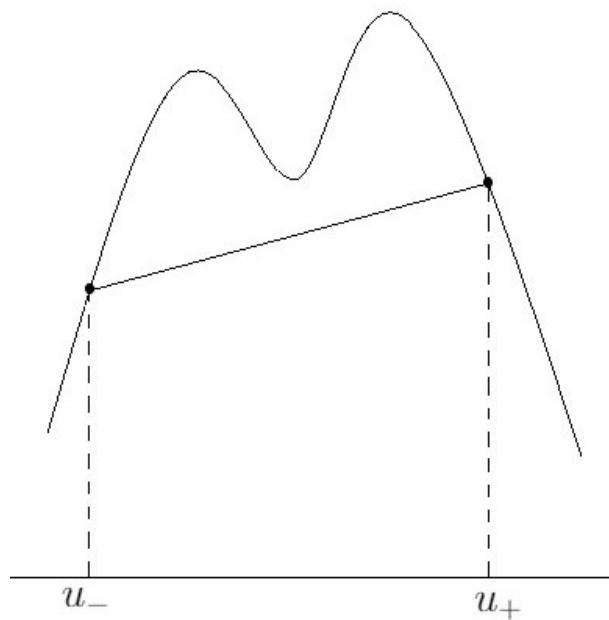


Рис. 68.

**Задача 9.**

$$\begin{cases} u_t + (u^3)_x = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.7)$$

Сначала нужно построить выпуклую вверх оболочку графика функции  $f(u)$ , для произвольной на Рис. 69., выпуклая вверх оболочка это  $\inf$  фиолетовых графиков, а выпуклая вниз оболочка это  $\sup$  голубых графиков.

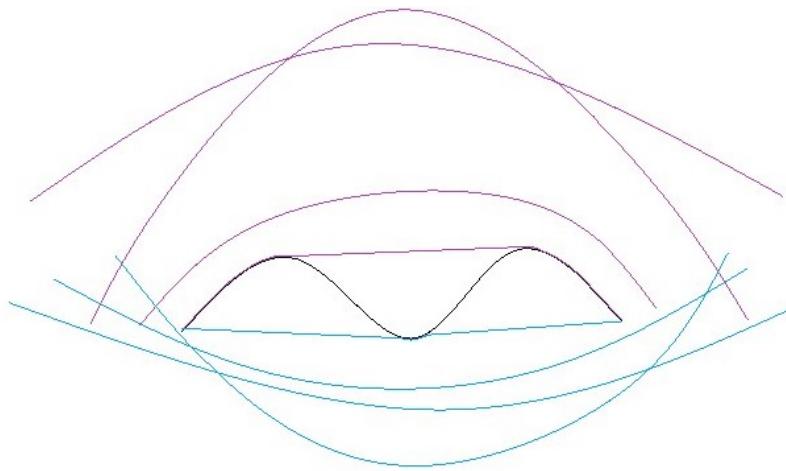


Рис. 69.

В задаче (6.7)  $u_+ > u_-$ , значит будем строить выпуклую вниз оболочку (Рис. 70.).

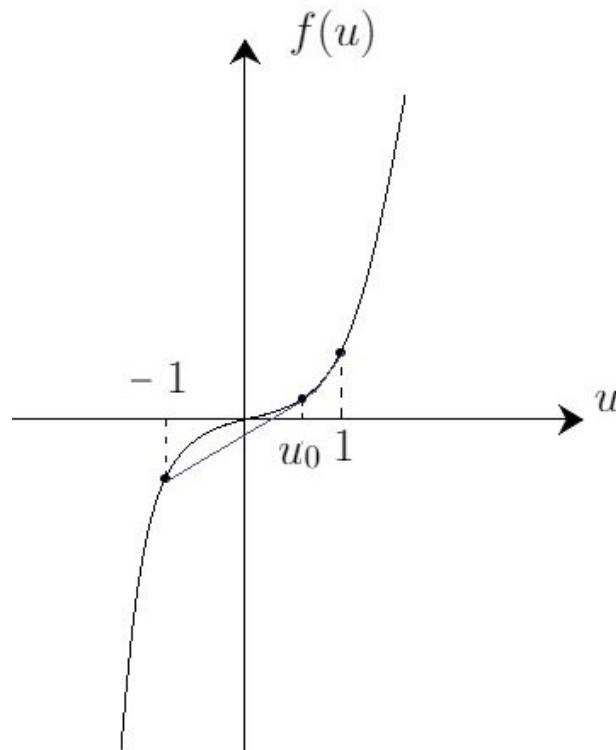


Рис. 70.

Необходимо найти  $u_0$ .

$$\frac{f(u_0) - f(-1)}{u_0 - (-1)} = \operatorname{tg} \text{угла наклона касательной}$$

$$\frac{u_0^3 + 1}{u_0 + 1} = 3u_0^2$$

$$u_0^2 - u_0 + 1 = 3u_0^2$$

$$2u_0^2 + u_0 - 1 = 0$$

$$u_0 = -1 \text{ или } u_0 = \frac{1}{2}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

$$3u_0^2 = \frac{3}{4}$$

Автомодельное решение:

$$f'(u) = \frac{x}{t}$$

$$3u^2 = \frac{x}{t}$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{x}{3t}}$$

так как  $u \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$u = \sqrt{\frac{x}{3t}}$$

Получаем решение на Рис. 71.

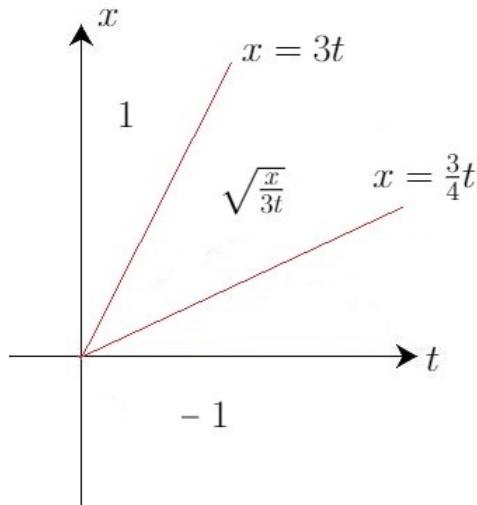


Рис. 71.

$x = 3t$  - слабый разрыв,  $x = \frac{3}{4}t$  - ударная волна, так как предел сверху равен  $\frac{1}{2}$ , а снизу  $-1$ , условие Ранкина-Гюгонио:

$$\frac{3}{4} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1^3}{2^3} - (-1)^3}{\frac{1}{2} - (-1)} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$$

$\frac{1}{2} > -1$ , хорда ниже графика,  $u_+ > u_-$ , значит разрыв допустим.

$$u(t, x) = \begin{cases} -1, & x < \frac{3}{4}t \\ \sqrt{\frac{x}{3t}}, & \frac{3}{4}t < x < 3t \\ 1, & x > 3t \end{cases}$$

Теперь наоборот

$$\begin{cases} u_t + (u^3)_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.8)$$

Теперь строим выпуклую вверх оболочку (Рис. 72.) Решение не будет сильно отличаться (Рис. 73.)

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{3}{4}t \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}}, & \frac{3}{4}t < x < 3t \\ -1, & x > 3t \end{cases}$$

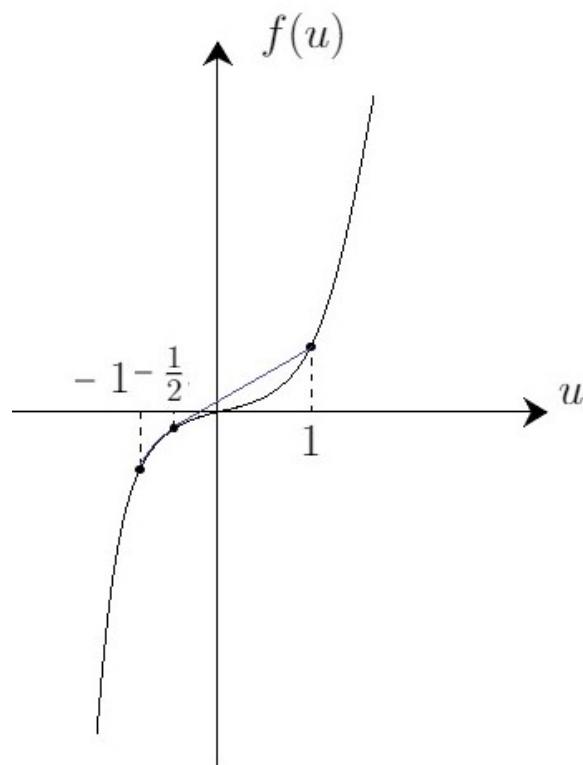


Рис. 72.

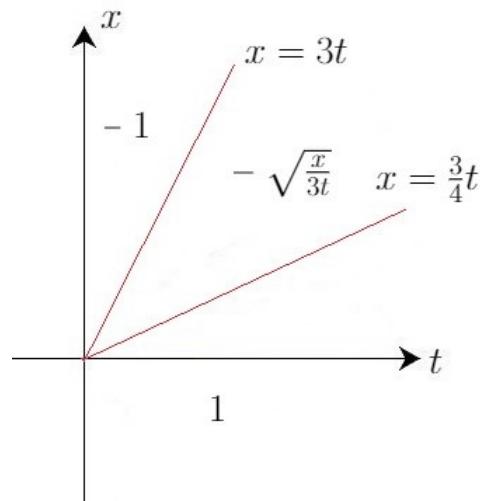


Рис. 73.

Пусть теперь  $f(u) = \sin u$

$$\begin{cases} u_t + (\sin u)_x = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 3\pi, x < 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.9)$$

Строим выпуклую вверх оболочку функции  $\sin u$  (Рис. 74.)

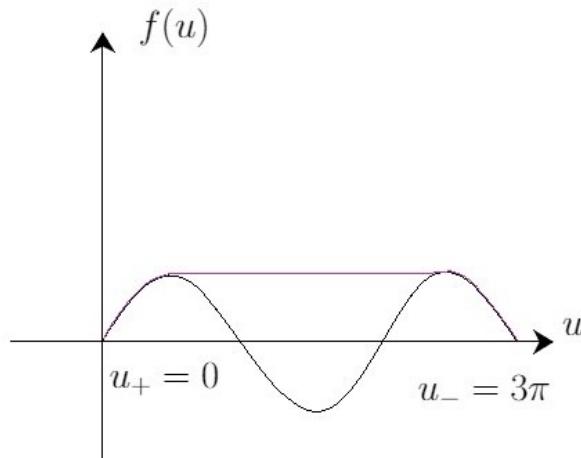


Рис. 74.

$$f'(u) = \frac{x}{t}$$

$$\cos u = \frac{x}{t}$$

$$u = \pm \arccos \frac{x}{t} + 2\pi k$$

Решение изображено на Рис. 75.  $x = t$  и  $x = -t$  слабые разрывы, а  $x = 0$

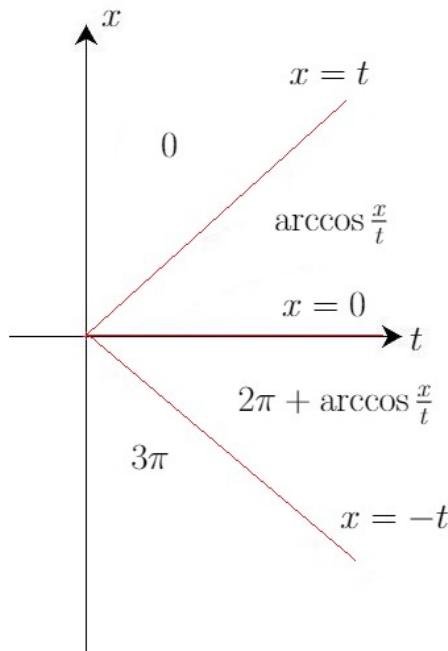


Рис. 75.

- сильный разрыв,  $\frac{5\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$  - значения снизу и сверху при подходе к прямой

$x = 0$ , так как график лежит под хордой, то разрыв допустим.

$$u(t, x) = \begin{cases} 3\pi, & x < -t \\ 2\pi + \arccos \frac{x}{t}, & -t < x < 0 \\ \arccos \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 0, & x > t \end{cases}$$

## Семинар 7

### Линейные уравнения второго порядка

$u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad (7.1)$$

Если в правой части 0, то уравнение называется однородным, а если  $f(x)$ , то неоднородным. Сумма вторых производных называется главной частью, а остальное младшими членами, иногда будем заменять младшие члены многоточием.

**Определение 2.** Точка  $x_0 \in \Gamma$ ,  $\dim \Gamma = n - 1$  называется *характеристической точкой*, если вектор нормали  $\vec{\nu}$  в точке  $x_0$  к  $\Gamma$  удовлетворяет свойству

$$\sum a_{ij}(x_0) \nu_i \nu_j = 0, \quad (7.2)$$

если  $\Gamma = \{x \mid \Phi(x) = 0\}$ , то  $\nu = \nabla \Phi$ .

**Определение 3.** Гиперповерхность  $\Gamma$  называется *характеристикой*, если все  $x_0 \in \Gamma$  характеристические.

По  $\sum a_{ij}(x)u_{x_i x_j}$  строится квадратичная форма, связанная с главной частью  $\sum a_{ij}(x)\xi_i \xi_j = (A\xi, \xi)$ .

$\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  - нормаль к  $\Gamma$  в точке  $x_0$ . Если  $(A\nu, \nu) = 0$ , то  $x_0$  характеристическая точка.

**Утверждение 2.** Характеристика - это геометрическое понятие, то есть оно не зависит от замены координат.

### Приведение к каноническому виду уравнений в области из $\mathbb{R}^2$

Функция  $u(x, y)$

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \dots = 0 \quad (7.3)$$

$$|a| + |b| + |c| \neq 0$$

Матрица квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма

$$A(\vec{\xi}) = a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$$

Характеристики - кривые. Если  $\Gamma$  задается уравнением  $y = y(x)$ , касательным вектором к уравнению будет  $(dx, dy)$ , нормалью будет  $\nu = (dy, -dx)$ .

Уравнение характеристик

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0$$



$a(x, y) \neq 0$ , разделим уравнение на  $(dx)^2$  и получаем

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0$$

$c \neq 0$ ,  $a = 0$ , тогда  $x = x(y)$ , значит

$$a - 2bx' + c(x')^2 = 0$$

$a = c = 0$ ,  $b \neq 0$ , тогда

$u_{xy} = \text{мл.чл.}$  - это один из канонических видов.

Рассматриваем общую ситуацию  $a \neq 0$

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac$$

I.  $\frac{D}{4} = b^2 - ac > 0$  - гиперболический случай.

Получаем два семейства характеристик

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

Произвольные характеристики изображены на Рис. 76. Два семейства ха-

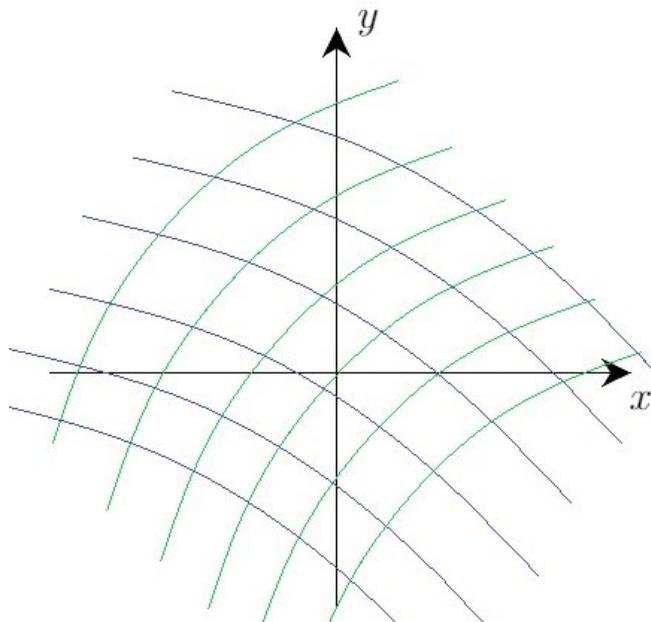


Рис. 76.

теристик трансверсальные, так как  $\sqrt{\frac{D}{4}} \neq 0$ . Зададим характеристики неявно

$$\phi(x, y) = C_1, \psi(x, y) = C_2$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} z = \phi(x, y) \\ w = \psi(x, y) \end{cases}$$

Эта замена невырожденная, так как  $J = (\nabla\phi, \nabla\psi)$  - невырожденная матрица, так как  $\nabla\phi$  и  $\nabla\psi$  линейно независимые.

Получаем

$$\tilde{a}u_{zz} + 2\tilde{b}u_{zw} + \tilde{c}u_{ww} = 0$$

характеристики

$$z = C_1, \quad w = C_2 \quad (\text{Рис. 77.})$$

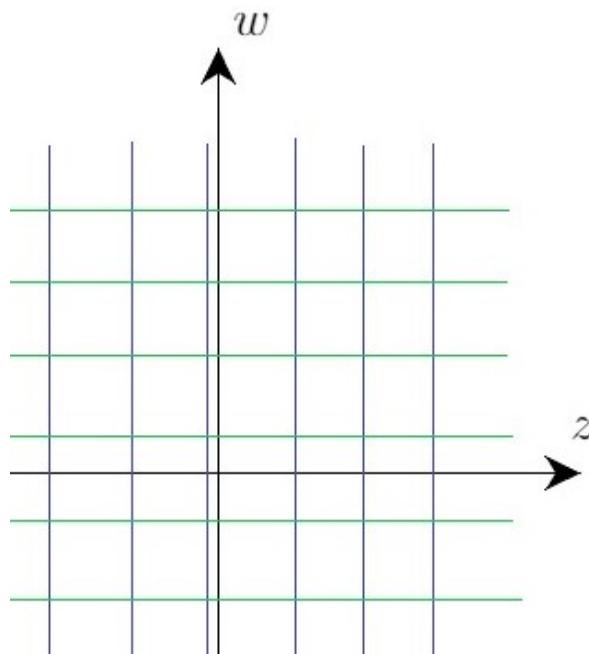


Рис. 77.

$$(A\xi, \xi) = \tilde{a}\xi_1^2 + 2\tilde{b}\xi_1\xi_2 + \tilde{c}\xi_2^2$$

Нормали к характеристикам - это векторы  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ , подставляя первый, получаем  $\tilde{a} = 0$ , подставляя второй, получаем  $\tilde{c} = 0$ ,  $\tilde{B} \neq 0$  из-за обратимости замены.

Получили канонический гиперболического уравнения

$$u_{zw} = \text{мл. чл.} \quad (7.4)$$

II.  $\frac{D}{4} < 0$  - эллиптический вид.

Действительных характеристик нет, есть два семейства комплексно - сопряженных характеристик

$$\phi(x, y) \pm \psi(x, y) = C$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} z = \phi(x, y) \\ w = \psi(x, y) \end{cases}$$

получаем

$$\tilde{a}u_{zz} + 2\tilde{b}u_{zw} + \tilde{c}u_{ww} + \dots = 0$$

Характеристика  $z + iw = C$ , нормаль  $\vec{\nu} = (1, i)$ , подставим в форму

$$\tilde{a}1^2 + 2\tilde{b}1 \cdot i + \tilde{c}i^2 = \tilde{a} - \tilde{c} + 2\tilde{b}i = 0$$

получаем

$$\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0, \quad \tilde{b} = 0$$

Значит канонический вид эллиптического уравнения выглядит так

$$u_{zz} + u_{ww} = \text{мл. чл.} \quad (7.5)$$

III.  $\frac{D}{4} = 0$  - параболический вид

$$y' = -\frac{b}{a}$$

Одно семейство действительных характеристик

$$\phi(x, y) = C$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} z = \phi(x, y) \\ w = \psi(x, y) \end{cases}$$

где  $\psi$  - произвольная функция такая, чтобы замена была невырожденная (обычно берут  $x$  или  $y$ ). Получаем

$$\tilde{a}u_{zz} + 2\tilde{b}u_{zw} + \tilde{c}u_{ww} = 0$$

После замены  $z = C$  - характеристики,  $(1, 0)$  - нормаль, подставляем в формулу и получаем  $\tilde{a} = 0$ .  $\frac{\tilde{D}}{4} = 0$  из геометрии параболическое уравнение переходит в параболическое из-за характеристик, значит

$$\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = 0,$$

значит  $\tilde{b} = 0, \tilde{c} \neq 0$ .

Получаем канонический вид параболического уравнения

$$u_{ww} = \text{мл. чл.} \quad (7.6)$$

**Задача 10.** Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$u_{xx} - 2 \sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$$

Уравнение характеристик

$$(dy)^2 + 2 \sin x \cdot dx \cdot dy - \cos^2 x \cdot (dx)^2 = 0$$

$$(y')^2 + 2 \sin x \cdot y' - \cos^2 x = 0$$

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$$

значит у нас гиперболическое уравнение.

$$y' = -\sin x \pm 1$$

Характеристики (Рис. 78.):

$$y = \cos x \pm x + C$$

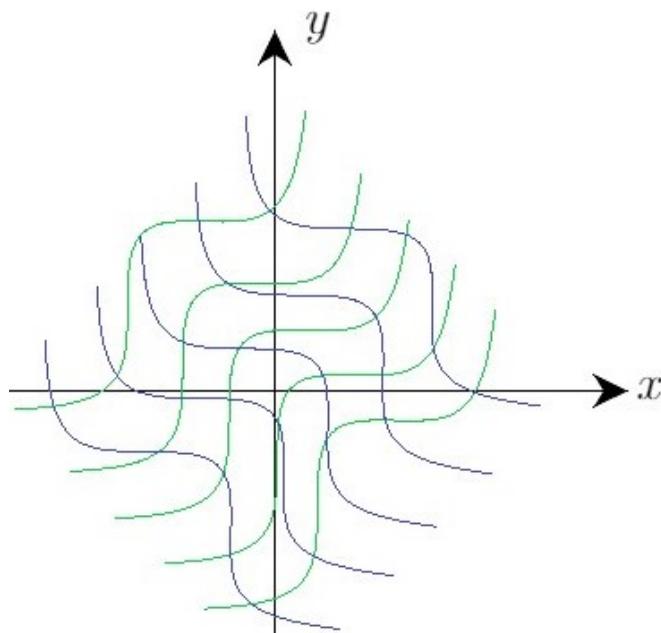


Рис. 78.

$$y - \cos x - x = C_1, \quad y - \cos x + x = C_2$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} z = y - \cos x - x \\ w = y - \cos x + x \end{cases}$$

$$\frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} -1 + \sin x & 1 \\ 1 + \sin x & 1 \end{pmatrix}$$

$$|J| = -2 \neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$u_x = (-1 + \sin x)u_z + (1 + \sin x)u_w$$

$$u_y = u_z + u_w$$

$$u_{xx} = \cos x \cdot u_z + (-1 + \sin x)((-1 + \sin x)u_{zz} + (1 + \sin x)u_{zw}) + \cos x \cdot u_w + \\ + (1 + \sin x)((-1 + \sin x)u_{zw} + (1 + \sin x)u_{ww})$$

$$u_{yy} = u_{zz} + u_{zw} + u_{zw} + u_{ww} = u_{zz} + 2u_{zw} + u_{ww}$$

$$u_{xy} = (-1 + \sin x)(u_{zz} + u_{zw}) + (1 + \sin x)(u_{zw} + u_{ww})$$

Посчитаем коэффициенты при производных

$$u_{zz} : (-1 + \sin x)^2 - 2 \sin x \cdot (-1 + \sin x) - \cos^2 x = \\ = 1 - 2 \sin x + \sin^2 x + 2 \sin x - 2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$u_{ww} : (1 + \sin x)^2 - 2 \sin x \cdot (1 + \sin x) - \cos^2 x = \\ = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x - 2 \sin x - 2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$u_{zw} : 2(\sin^2 x - 1) - 2 \sin x \cdot 2 \sin x - 2 \cos^2 x = -4$$

$$u_z : \cos x - \cos x = 0$$

$$u_w : \cos x - \cos x = 0$$

значит

$$-4u_{zw} = 0$$

Каноническим видом будет

$$u_{zw} = 0 \text{ при замене } \begin{cases} z = y - \cos x - x \\ w = y - \cos x + x \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_w) = 0$$

фиксируем  $z$  и получаем

$$u_w = C(w)$$

$$u = \int C(w)dw + C_1(z)$$

$$u = f(z) + g(w), f, g \in C^2$$

$$u(x, y) = f(y - \cos x - x) + g(y - \cos x + x)$$

Решали в выпуклой области, если область не выпуклая, то такие рассуждения не работают.

## Семинар 8

### Линейные уравнения второго порядка

Приведение к каноническому виду уравнений в области из  $\mathbb{R}^2$

Несколько задач кратко:

1)

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$$

Уравнение характеристик

$$(y')^2 - 4y' + 5 = 0$$

$$y' = 2 \pm i$$

$$y = 2x \pm ix + C$$

$$y - 2x \pm ix = C$$

знаки можно поменять, так как в правой части константа.

$$\phi + i\psi = C$$

Замена:

$$\begin{cases} z = 2x - y \\ w = x \end{cases}$$

Получаем

$$u_{zz} + u_{ww} + u_w = 0$$

2)

$$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x + u_y) = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Уравнение характеристик:

$$x(y')^2 - y = 0$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{y} \pm \sqrt{x} = C$$

Замена:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ w = \sqrt{x} - \sqrt{y} \end{cases}$$

получаем

$$u_{zw} = 0$$

решением этого уравнения будет

$$u = f(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + g(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

3)

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$$

Уравнение характеристик:

$$x^2(dy)^2 + 2xy \cdot dxdy + y^2(dx)^2 = 0$$

$$(xdy + ydx)^2 = 0$$

$$d(xy) = 0$$

$$xy = C$$

Замена:

$$\begin{cases} z = xy \\ w = x \\ \frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ |J| = -x \end{cases}$$

то есть делаем замену в окрестности точек, где  $x \neq 0$ . Обратная замена:

$$\begin{cases} y = \frac{z}{w} \\ x = w \end{cases}$$

$$u_x = yu_z + u_w$$

$$u_y = xu_z$$

$$u_{xx} = y(yu_{zz} + u_{zw}) + yu_{zw} + u_{ww}$$

$$u_{xy} = u_z + yu_{zz} + xu_{zw}$$

$$u_{yy} = x^2u_{zz}$$

Посчитаем коэффициенты при производных

$$u_{zz} : x^2y^2 - 2xy \cdot xy + y^2x^2 = 0$$

$$u_{zw} : x^2 \cdot 2y - 2xy \cdot x = 0$$

$$u_{ww} : x^2$$

$$u_z : -2xy + xy + xy = 0$$

$$u_w : x$$

Получаем

$$x^2u_{ww} + xu_w = 0$$

$$w^2u_{ww} + wu_w = 0$$

$$x \neq 0$$

$$u_{ww} + \frac{u_w}{w} = 0$$



Перепишем сначала в виде ОДУ и решим его

$$x^2y'' + xy' = 0$$

это уравнение Эйлера.

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$y = C_1 + C_2 \ln |x|$$

то есть получаем решение

$$u = C_1(z) + C_2(z) \ln |w|$$

$$u = f_1(xy) + g_1(xy) \ln |x|$$

Теперь будем решать в окрестности точек, где  $x = 0$ , тогда делаем замену

$$\begin{cases} z = xy \\ w = y \end{cases}$$

Так как уравнение симметрично относительно замены  $x$  на  $y$ , то получаем

$$u_{ww} + \frac{u_w}{w} = 0$$

$$u = f_2(xy) + g_2(xy) \ln |y|$$

Так какой же из ответов верный? На самом деле можно придумать такие  $f$  и  $g$ , чтобы одно свести к другому.

$$u = f_1(xy) + g_1(xy) \ln |x| + g_1(xy) \ln |y| - g_1(xy) \ln |y|$$

тогда

$$g_2(xy) = -g_1(xy)$$

$$f_2(xy) = f_1(xy) + g_1(xy) \ln |xy|$$

В окрестности точки  $(0,0)$  решать не будем, так как в этой точке уравнение вырождается.

### Задача Коши

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u \Big|_{y=0} = 3x^2 \\ u_y \Big|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Уравнение характеристик:

$$(dy)^2 - 2dxdy - 3(dx)^2 = 0$$



$$\begin{aligned}(y')^2 - 2y' - 3 &= 0 \\ y' = -1 &\Rightarrow y = -x + C_1 \\ y' = 3 &\Rightarrow y = 3x + C_2\end{aligned}$$

Замена:

$$\begin{cases} z = y + x \\ w = y - 3x \end{cases}$$

Можем не расписывать производные, так как замена переменных линейная и младших производных из старших не появятся, значит, так как уравнение гиперболическое получаем

$$u_{zw} = 0$$

Тогда общее решение

$$u = f(z) + g(w) = f(y + x) + g(y - 3x)$$

$$u_y = f'(y + x) + g'(y - 3x)$$

$$\begin{cases} u \Big|_{y=0} = f(x) + g(-3x) = 3x^2 \\ u_y \Big|_{y=0} f'(x) + g'(-3x) = 0 \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение

$$\begin{cases} f'(x) - 3g'(-3x) = 6x \\ f'(x) + g'(-3x) = 0 \end{cases}$$

$$4g'(-3x) = -6x$$

$$g'(-3x) = -\frac{3}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + C_1$$

$$g'(\xi) = \frac{\xi}{2}$$

$$g(\xi) = \frac{\xi^2}{4} + C_2$$

$$f(x) + g(-3x) = \frac{3}{4}x^2 + C_1 + \frac{9}{4}x^2 + C_2 = 3x^2 + C_1 + C_2$$

значит

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$u = f(x + y) + g(y - 3x) = \frac{3}{4}(y + x)^2 + \frac{1}{4}(y - 3x)^2 + (C_1 + C_2) = 3x^2 + y^2$$



На самом деле можно не дифференцировать первое уравнение, а проинтегрируем второе и получим

$$f(x) - \frac{1}{3}g(-3x) = C$$

и далее всё выражается.

Какие у нас ограничения на начальные условия? Производная должна быть не в касательном направлении, так как тогда из одного условия следует другое. Также начальные условия не должны касаться характеристик.

Посмотрим какие уравнения мы можем решать:

$$u_{zw} + u_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_w + u) = 0$$

$$u_w + u = C_1(w)$$

$$u = \text{ч.п} + \text{o.п.}$$

Общее:

$$C_2(z)e^{-w}$$

Частное:

$$f(w)$$

значит

$$u = f(w) + g(z)e^{-w}$$

Такое мы уже решали:

$$w^2u_{ww} + wu_w = 0$$

Не можем написать общее решение:

$$\Delta u = 0$$

$$u_{zz} + u_{ww} = 0$$

### Начальные условия на характеристике

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u \Big|_{y=-x} = \phi(x) \\ u_y \Big|_{y=-x} = \psi(x) \end{cases}$$

Замена:

$$\begin{cases} z = y + x \\ w = y - 3x \\ u_{zw} = 0 \end{cases}$$

$$u = f(y + x) + g(y - 3x)$$

Существует ли решение? Единственное ли оно?

$$u_y = f'(y+x) + g'(y-3x)$$

$$\begin{cases} u \Big|_{y=-x} = f(0) + g(-4x) = \phi(x) \\ u_y \Big|_{y=-x} = f'(0) + g'(-4x) = \psi(x) \end{cases}$$
$$\phi' = -4g'(-4x) = -4(\psi(x) - f'(0))$$

То есть для существования решения необходимо условие

$$\phi' = -4\psi + C$$

Решение не единственно так как функция  $f$  однозначно не определяется.

Найдем  $\phi$  и  $\psi$ , при которых задача имеет решение.

$$u(x, y) = 3x^2 + y^2$$

это решение уравнения (самое простейшее это  $\equiv 0$  или любая линейная).

$$\begin{aligned} u \Big|_{y=-x} &= 4x^2 = \phi(x) \\ u_y \Big|_{y=-x} &= -2x = \psi(x) \\ \phi &= 4x^2, \psi = -2x \\ \phi' &= 8x = -4\psi + C \\ C = 4f'(0) &\Rightarrow f'(0) = 0 \end{aligned}$$

Возьмем функцию

$$u = 3x^2 + y^2 + a(y+x)^2$$

При  $a = 1$

$$u = 4x^2 + 2xy + 2y^2$$

$$u_y = 2x + 4y$$

Это решение и оно не единственное.

Задача не имеет решений, если возьмем, например,

$$\psi \equiv 1, \phi = x^2.$$



## Семинар 9

### Линейные уравнения второго порядка

#### Приведение к каноническому виду

Для двух переменных:  $(x, y) \rightarrow (z, w)$

1) гиперболическое

$$u_{zz} - u_{ww} = \text{мл. чл.}, \quad (u_{zw} = \text{мл. чл.})$$

2) эллиптическое

$$u_{zz} + u_{ww} = \text{мл. чл.}$$

3) параболическое

$$u_{ww} = \text{мл. чл.}$$

Теперь  $u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \text{мл.чл.} = 0, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad u \in C^2$$

Мы не можем придумать замену  $y = y(x)$ , чтобы привести к каноническому виду, так как у нас  $\frac{n(n+1)}{2}$  функций  $a_{ij}(x)$ , в замене

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \\ \dots \\ y_n = y_n(x) \end{cases}$$

$n$  функций и ещё используем домножение на функцию. То есть у нас  $\frac{n(n+1)}{2}$  и  $n+1$  степень свободы.

$$\frac{n(n+1)}{2} > n+1, \quad n \geq 3$$

При  $n = 2$  получаем  $3 = 3$ , поэтому у нас есть замена.

Будем приводить к каноническому виду в точке  $x = x_0$ , тогда  $a_{ij}(x_0)$  - числа.

$$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \text{мл. чл.} = 0$$

Можем приводить квадратичную форму к главным осям методом Лагранжа

$$(A\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j = \sum \pm \eta_k^2$$

Когда приводим, то возникает матрица замены

$$\eta = C\xi$$

. Если в нашем уравнении сделать замену  $y = Tx$ , где  $T = (C^{-1})^T$ , то главная часть уравнения преобразуется также как и квадратичная форма. Тогда получим  $\sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$   
- это и будет каноническим видом.

Получили классификацию:

- 1) Нет 0, (n-1) +1 и одна -1 - гиперболическое
- 2) Все +1 или -1 - эллиптическое
- 3) Один 0, а все остальные одного знака - параболическое

Классификация не полная, но для нас это не важно.

Мы классифицировали в точке, но что происходит в остальных? Если уравнение эллиптическое, то из непрерывности функций  $a_{ij}(x)$  возникает область эллиптичности. Для гиперболического также возникает область гиперболичности. По дороге от одного к другому где-то возникает параболическое. Но мы не можем придумать замену, чтобы привести к каноническому виду в окрестности.

**Задача 11.** Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$$

Квадратичная форма

$$\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 + 6\xi_3^2 = (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 + \xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 = \\ = (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 + (2\xi_3)^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$$

$$\eta = C\xi$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T = (C^{-1})^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Замена:

$$\begin{cases} p = x \\ q = -x + y \\ r = x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \end{cases}$$

Таблицы коэффициентов при замене:

	$u_p$	$u_q$	$u_r$
$u_x$	1	-1	1
$u_y$	0	1	$-\frac{1}{2}$
$u_z$	0	0	$\frac{1}{2}$

	$u_{pp}$	$u_{qq}$	$u_{rr}$	$u_{pq}$	$u_{pr}$	$u_{qr}$	Коэффициент
$u_{xx}$	1	1	1	-2	2	-2	1
$u_{yy}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	0	-1	2
$u_{zz}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	6
$u_{xy}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$u_{xz}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
Сумма	1	1	1	0	0	0	

Таблица составляется из следующих соображений, которые мы можем использовать, так как замена линейная.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial r}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Получаем

$$u_{pp} + u_{qq} + u_{rr} = 0$$

при замене

$$\begin{cases} p = x \\ q = -x + y \\ r = x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \end{cases}$$

На самом деле замена не единственная. При ортогональных преобразованиях канонический вид не поменяется.

### Уравнение струны

Функция  $u(t, x)$ , изучаем колебания струны, задающиеся уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{9.1}$$

Это уравнение описывает колебания:



1) струны,  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$

2) продольные колебания стержня,  $a^2 = \frac{E}{\rho}$

3) малые одномерные адиабатические колебания газа,  $pv^\gamma = C$ ,  $a^2 = \frac{P_0\gamma}{\rho_0}$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}, t > 0$$

Общее решение:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Характеристики:

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$$

$$d(x - at) \cdot d(x + at) = 0$$

$$x \pm at = C$$

Характеристики изображены на Рис. 79. Это у нас гиперболический случай.

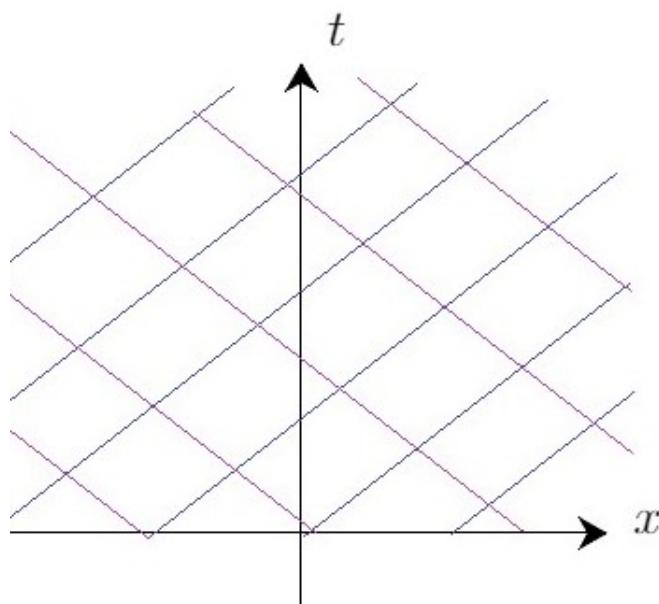


Рис. 79.

Замена:

$$\begin{cases} z = x + at \\ w = x - at \end{cases}$$

$$u_{zw} + \text{мл.чл.} = 0$$

младших членов не будет, так как замена линейная

$$u_{zw} = 0$$

$$u = g(z) + f(w) = f(x - at) + g(x + at)$$

Опишем поведение функций  $f$  и  $g$ .  $f(x - at)$  - это бегущая волна, которая движется направо со скоростью  $a$  (Рис. 80.). Для  $g$  аналогично, но функция движется налево.

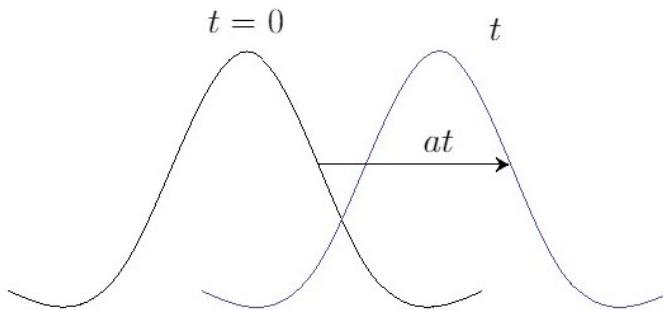


Рис. 80.

$$\begin{cases} u \Big|_{t=0} = f(x) + g(x) = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Проинтегрируем второе выражение

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2}$$

Получаем формулу Даламбера

$$u = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (9.2)$$

## Семинар 10

### Линейные уравнения второго порядка

#### Приведение к каноническому виду

Задача 12.

$$u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y + u_z = 0$$

Квадратичная форма:

$$2(\xi_1\xi_2 - \xi_1\xi_3) = (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 - (\xi_1 - \xi_3)^2 + \xi_2^2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$C^{-1}$  не существует, значит намена неверная.

Например, можно попробовать так:

$$\xi_1\xi_2 = \eta_1^2 - \eta_2^2$$

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \eta_1$$

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = \eta_2$$

$$\xi_3 = \eta_3$$

$$\xi_1\xi_2 - \xi_1\xi_3 = \xi_1(\xi_2 - \xi_3) = \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - \xi_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3}{2}\right)^2$$

Это параболическое уравнение

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2 - \xi_3}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3}{2}$$

$$\eta_3 = \xi_3$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Главная часть будет

$$u_{pp} - u_{qq}$$

## Уравнение струны

**Задача 13.** Нарисовать положения струны в различные моменты времени.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_x \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Функция  $\phi$  изображена на Рис. 81. (Всюду далее положения струны изображаются красным) Формула Даламбера:

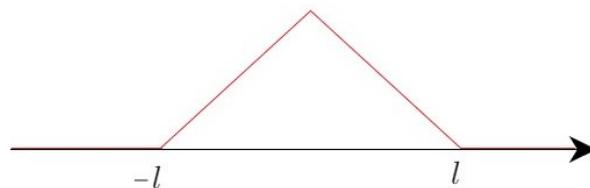


Рис. 81.

$$u = \frac{\phi(x - at)}{2} + \frac{\phi(x + at)}{2}$$

На самом деле, при  $t = 0$  из формулы Даламбера имеем для одинаковых треугольника, которые в сумме дают  $\phi(x)$ , а потом начинают двигаться в разные стороны со скоростью  $a$ .

$t = 0$  изображено на Рис. 82.

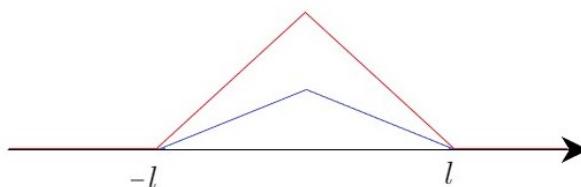


Рис. 82.

$0 < t < \frac{l}{2a}$  изображено на Рис. 83.

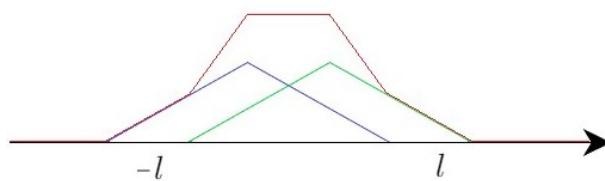


Рис. 83.

$t = \frac{l}{2a}$  изображено на Рис. 84.

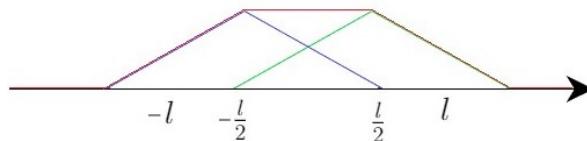


Рис. 84.

$\frac{l}{2a} < t < \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 85.

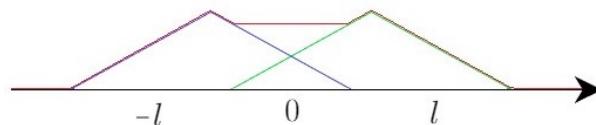


Рис. 85.

$t = \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 86.

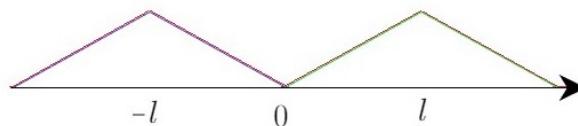


Рис. 86.

$t > \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 87.

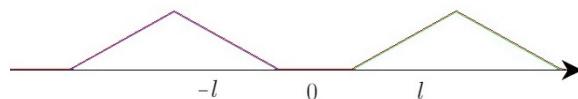


Рис. 87.

**Задача 14.** Нарисовать положения струны в различные моменты времени

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = 0 \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$\psi(x)$  изображена на Рис. 88.

Формула Даламбера:

$$u = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

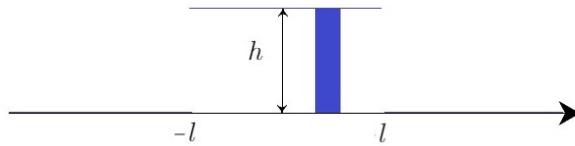


Рис. 88.

Из Рис. 88. видим, что так как решение - это интеграл, то мы будем искать площади прямоугольников, на рисунке они синие, если прямоугольник целиком по верхней планкой, то  $u = \frac{1}{2a}h \cdot 2at = ht$ .

$t = 0$  изображено на Рис. 89.



Рис. 89.

$0 < t < \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 90.

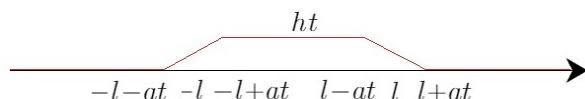


Рис. 90.

$t = \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 91.

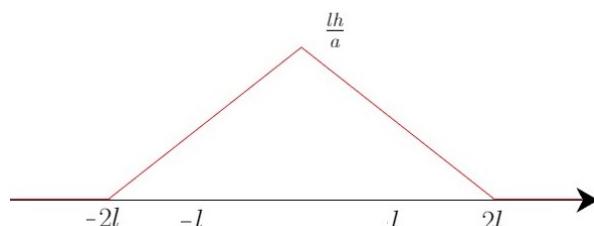


Рис. 91.

$t > \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 92.

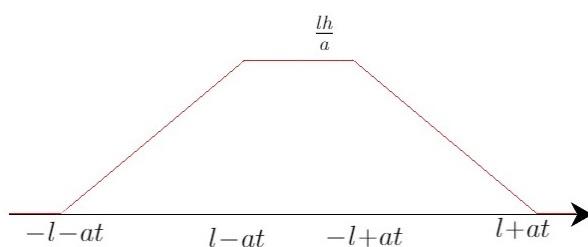


Рис. 92.

На самом деле можно решать по-другому

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

$$\Psi' = \frac{1}{2a} \psi$$

$$u = \Psi(x + at) - \Psi(x - at)$$

$\Psi$  изображена на Рис. 93.

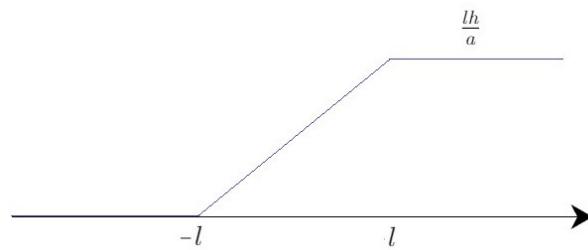


Рис. 93.

$-\Psi$  изображена на Рис. 94.

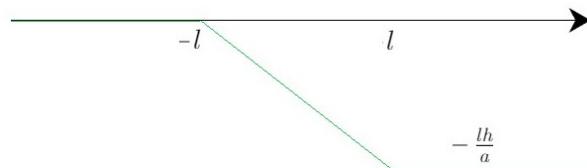


Рис. 94.

$t = 0$  изображено на Рис. 95.

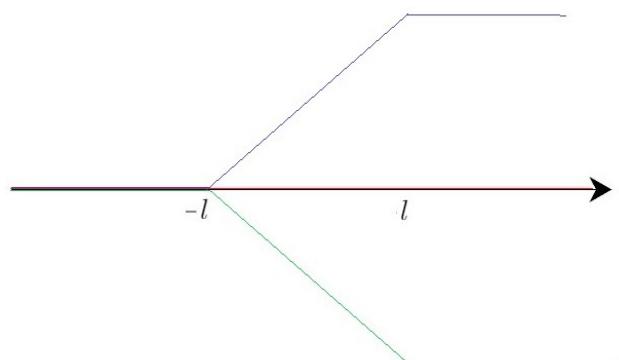


Рис. 95.

$0 < t < \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 96.

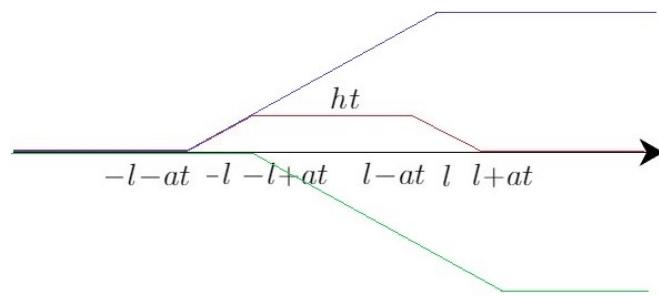


Рис. 96.

$t = \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 97.

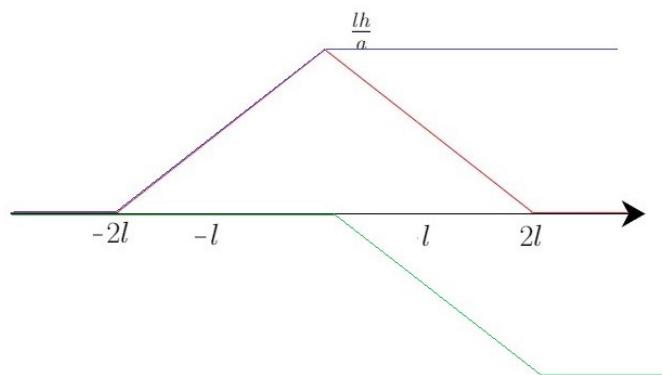


Рис. 97.

$t > \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 98.

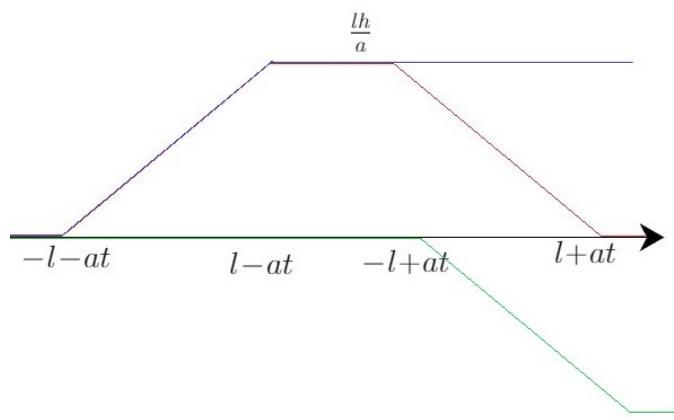


Рис. 98.

## Полуограниченная струна

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ \text{краевое условие} \end{cases} \quad x > 0 \quad (10.1)$$

Какие бывают краевые условия в зависимости от того, что мы описываем.

- 1) Закрепленный конец струны (Рис. 99.) Краевое условие:

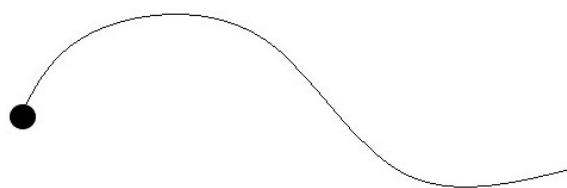


Рис. 99.

$$u \Big|_{x=0} = 0 \quad (10.2)$$

- 2) Свободный конец струны (Рис. 100)

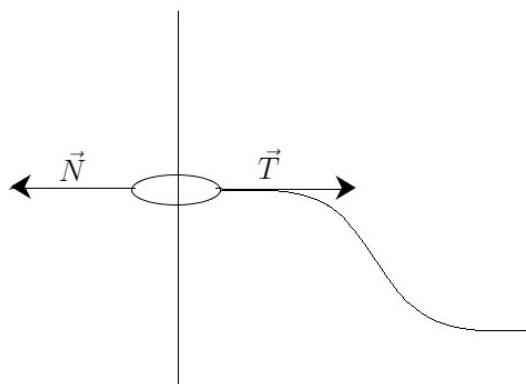


Рис. 100.

$$0 = m\vec{a} = \vec{T} + \vec{N}$$

Поэтому струна выглядит как на Рис. 100., так как  $\vec{T}$  должна быть направлена по касательной. Краевое условие:

$$u_x \Big|_{x=0} = 0 \quad (10.3)$$

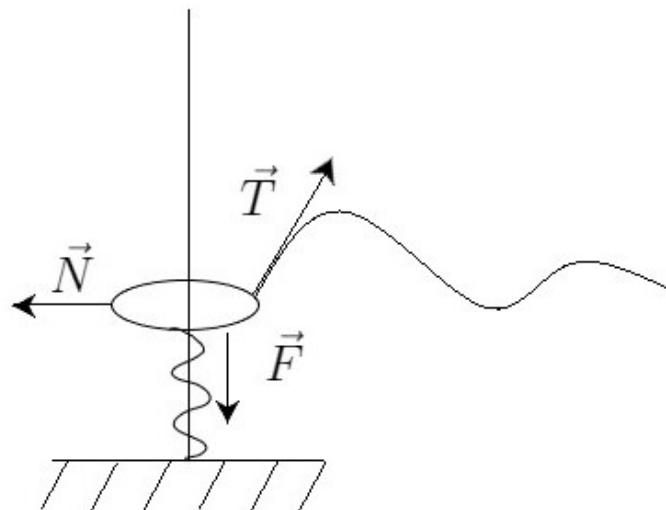


Рис. 101.

3) Упруго закрепленный конец струны (Рис. 101)

Краевое условие:

$$(u_x - \alpha u) \Big|_{x=0} = 0$$

$\alpha$  связана с коэффициентом жесткости  $k$ .

На самом деле, мы можем получить из третьего первое и второе.

$\alpha \rightarrow +0$  - свободный конец.

$k \rightarrow -\infty$  - закрепленный конец (очень жесткая пружина).

Также и для стержня

1) Закрепленный конец (Рис. 102.)

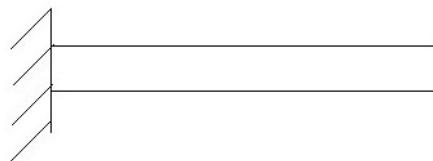


Рис. 102.

2) Свободный конец (Рис. 103.)

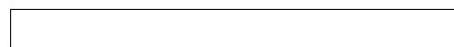


Рис. 103.

3) Упруго закрепленный конец (Рис. 104.)

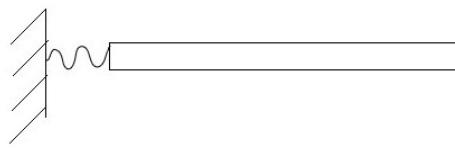


Рис. 104.

**Задача 15.** Нарисовать положения струны в различные моменты времени.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_x \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}, \quad x > 0, t > 0$$

Функция  $\phi$  изображена на Рис. 105. Пока синий треугольник не дойдет до 0, все

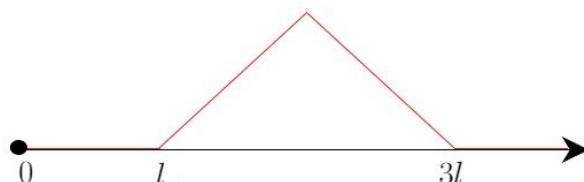


Рис. 105.

происходит аналогично задаче 13.

$t = 0$  изображено на Рис. 106.

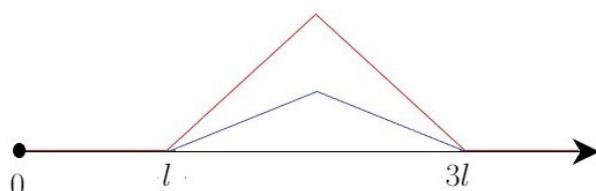


Рис. 106.

$0 < t < \frac{l}{2a}$  изображено на Рис. 107.

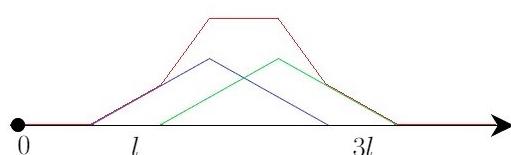


Рис. 107.

$t = \frac{l}{2a}$  изображено на Рис. 108.

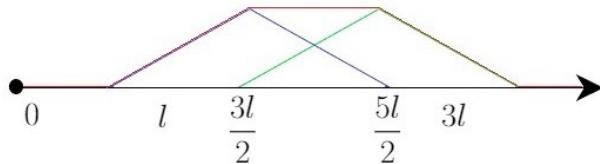


Рис. 108.

$\frac{l}{2a} < t < \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 109.

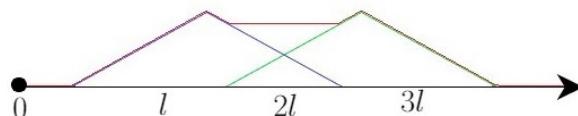


Рис. 109.

$t = \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 110.

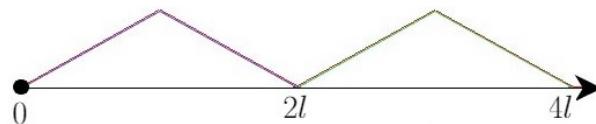


Рис. 110.

Когда синий треугольник доходит до 0, появляется отраженная волна, когда конец закреплен отраженная волна - это нечетное отражение падающей.(Отраженная волна изображается фиолетовым)  $\frac{l}{a} < \frac{3l}{2a}$  изображено на Рис. 111.

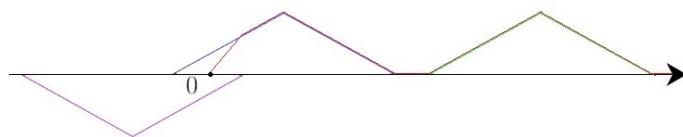


Рис. 111.

$t = \frac{3l}{2a}$  изображено на Рис. 112.

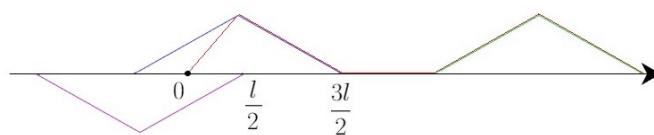


Рис. 112.

$\frac{3l}{2a} < t < \frac{2l}{a}$  изображено на Рис. 113.



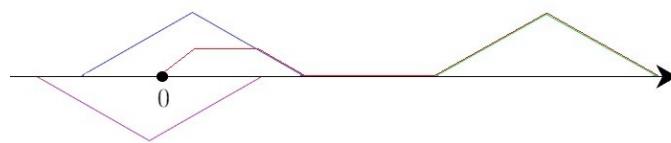


Рис. 113.

$t = \frac{2l}{a}$  изображено на Рис. 114.



Рис. 114.

$\frac{2l}{2} < t < \frac{5l}{2a}$  изображено на Рис. 115.

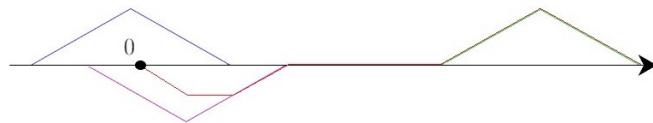


Рис. 115.

$t = \frac{5l}{2a}$  изображено на Рис. 116.

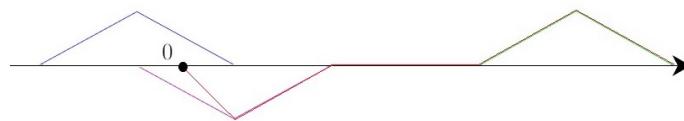


Рис. 116.

$t = \frac{3l}{a}$  изображено на Рис. 117.

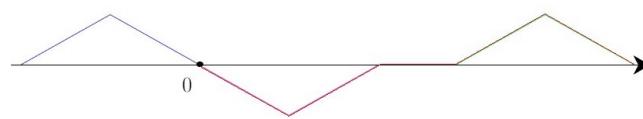


Рис. 117.

$t > \frac{3l}{a}$  изображено на Рис. 118.

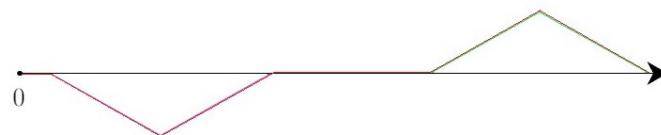


Рис. 118.

Для свободного конца отраженная волна - это четное отражение падающей. (Рис. 119., Рис. 120.)

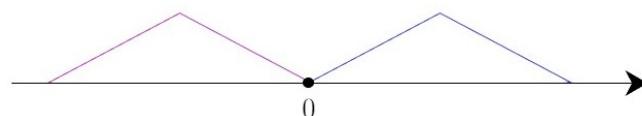


Рис. 119.

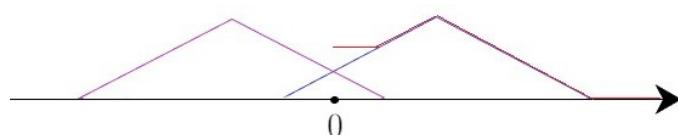


Рис. 120.

## Семинар 11

### Линейные уравнения второго порядка

#### Полуограниченная струна

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ \text{краевое условие} \end{cases} \quad x > 0, t > 0$$

**Задача 16.**

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad x > 0, t > 0$$

Функция  $\phi$  изображена на Рис. 121.

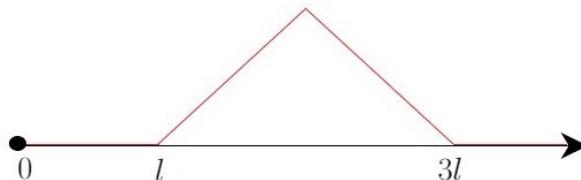


Рис. 121.

Пока синий треугольник не дойдет до 0, все происходит аналогично задаче 15, треугольник, который бежит вправо пока рисовать не будем.

$t = 0$  изображено на Рис. 122.

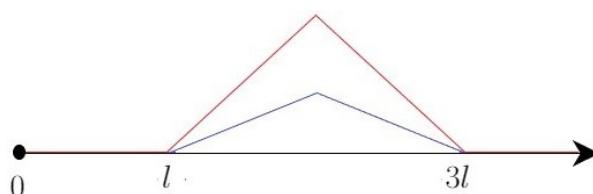


Рис. 122.

Сразу будем рассматривать с момента  $t = \frac{l}{a}$ .  
 $t = \frac{l}{a}$  изображено на Рис. 123.

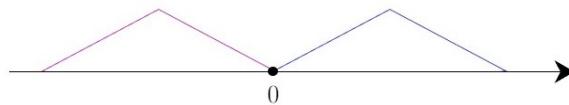


Рис. 123.

$\frac{l}{a} < t < \frac{3l}{2a}$  изображено на Рис. 124.

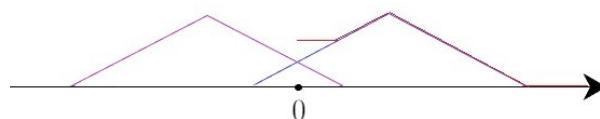


Рис. 124.

$t = \frac{3l}{2a}$  изображено на Рис. 125.

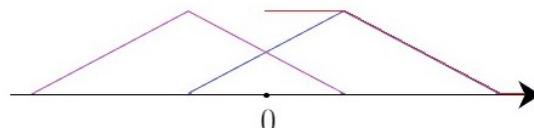


Рис. 125.

$\frac{3l}{2a} < t < \frac{2l}{a}$  изображено на Рис. 126.

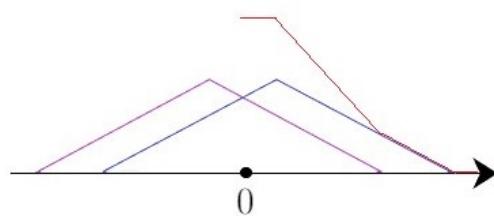


Рис. 126.

$t = \frac{2l}{a}$  изображено на Рис. 127.

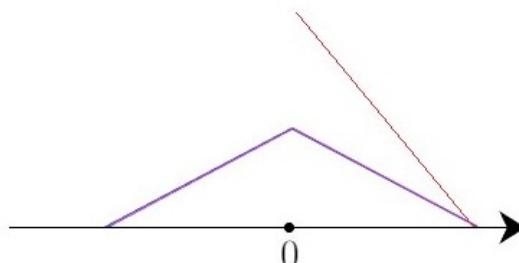


Рис. 127.

$\frac{2l}{a} < t < \frac{5l}{2a}$  изображено на Рис. 128.

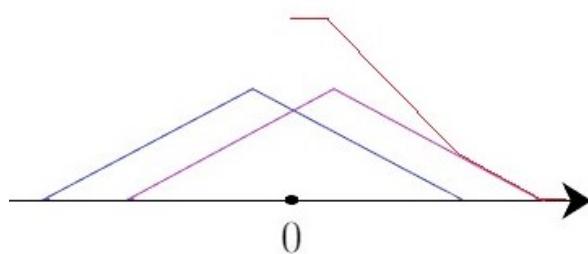


Рис. 128.

Из Рис. 128. видим, что рисунок будет повторяться, но треугольники поменяются местами, то есть  $t = \frac{5l}{2a}$  аналогично Рис. 125.,  $\frac{5l}{2a} < t < \frac{3l}{a}$  аналогично Рис. 124.  $t > \frac{3l}{a}$  изображено на Рис. 129.

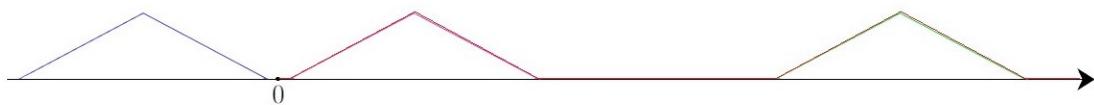


Рис. 129.

На самом деле по картинкам видим, что не везде производная в 0 равна 0. Производная в 0 почти везде равна 0, кроме трех моментов.

$$u(t, x) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

Классическим решением будет  $u \in C^2$ , для этого необходимо, чтобы  $\phi \in C^2$ ,  $\psi \in C^1$ , но если посмотреть на функции, которые мы рассматривали, видим, что  $\phi \in C^0$  и она кусочно - гладкая,  $\psi$  даже не  $C^0$ . Поэтому те решения, которые мы получали не класса  $C^2$ , это уже не классические решения.

То есть мы получили какое-то обобщенное решение. Будем говорить, что обобщенное решение это то, которое задается формулой Даламбера. Тогда  $u \in C \Leftarrow \phi \in C^0(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in L_{1,lk}(\mathbb{R})$ .

По-другому: приблизим  $\phi$  и  $\psi$

$$\begin{aligned}\phi_n &\rightarrow \phi \text{ поточечно, } \phi_n \in C^2 \\ \psi_n &\rightarrow \psi \text{ в } L_{1,lk}(\mathbb{R}), \psi_n \in C^1\end{aligned}$$

Получаем  $u_n \in C^2$  - классическое решение с начальными условиями  $\phi_n$  и  $\psi_n$ . Формула Даламбера выдерживает этот предельный переход.

$$u_n \in C^2 \rightarrow u \in C^0$$

То есть обобщенное решение - это такое, которое можно получить как предел классических. Таким образом наши треугольники - это пределы чего-то сглаженного, тогда мы можем сглаживать треугольники и там, где производная в 0 должна была быть 0, но не была, станет 0.

**Задача 17.** При  $t \leq 0$  по полуограниченной струне бежит волна  $u = \sin(x + at)$ . Найти отраженную волну

а)  $x = 0$  - закрепленный конец.

$$u \Big|_{x=0} = 0$$

б)  $x = 0$  - свободный конец.

$$u_x \Big|_{x=0} = 0$$

в)  $x = 0$  - упруго закрепленный конец.

$$(u_x - \alpha u) \Big|_{x=0} = 0$$

физически правильное условие  $\alpha \geq 0$ .

а)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \sin x \\ u_t \Big|_{t=0} = a \cos x & x > 0, t > 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Общее решение:

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \sin x \\ -af'(x) + ag'(x) = a \cos x & x > 0 \end{cases}$$

$$-f(x) + g(x) = \sin x + C$$

$$2f(x) = -C$$

$$f(x) = -\frac{C}{2}$$

$$g(x) = \sin x + \frac{C}{2}$$

$$u = -\frac{C}{2} + \sin(x + at) + \frac{C}{2} = \sin(x + at)$$

Тут есть противоречие, так мы нашли решение только при положительном аргументе  $f$ , то есть при  $x > at$ .

Теперь при  $0 < x < at$ . Считаем, что  $C = 0$

$$u = f(x - at) + \sin(x + at)$$

$$u \Big|_{x=0} = f(-at) + \sin at = 0$$

$$\xi = -at$$

$$u = \sin(x - at) + \sin(x + at)$$

Ответ:

$$u = \sin(x + at) \text{ при } x > at$$

$$u = \sin(x - at) + \sin(x + at) \text{ при } 0 < x < at$$

$\sin(x - at)$  - отраженная волна.

Получаем Рис. 130.

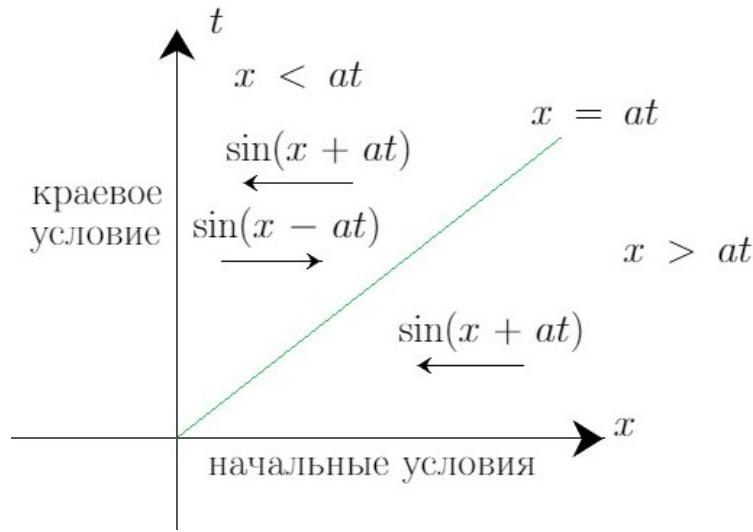


Рис. 130.

На Рис. 131. отраженная волна изображена фиолетовым.

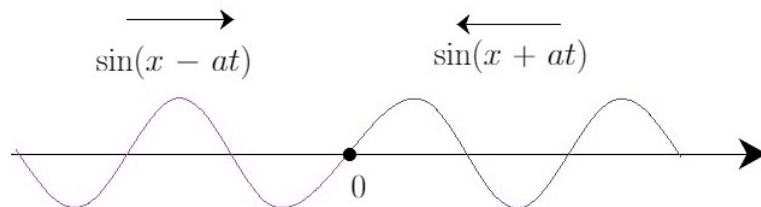


Рис. 131.

В общей ситуации для закрепленного конца получаем:

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

$$u \Big|_{x=0} = f(-at) + g(at)$$

$$\xi = -at$$

$$f(\xi) = -g(-\xi)$$

6)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \sin x \\ u_t \Big|_{t=0} = a \cos x & x > 0, t > 0 \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Для  $x > at$  аналогично предыдущему случаю получаем

$$f = 0 \quad g(x) = \sin x, \quad x > 0$$

$$u = \sin(x + at), \quad x > at$$

Теперь  $0 < t < at$

$$u = f(x - at) + \sin(x + at)$$

$$u_x \Big|_{x=0} - f'(-at) + \cos(at) = 0$$

$$\xi = -at$$

$$f'(\xi) = -\cos \xi$$

$$f(\xi) = -\sin \xi + C_1, \quad \xi < 0$$

$$u = -\sin(x - at) + \sin(x + at) + C_1$$

Ответ:

$$u = \sin(x + at), \quad x > at$$

$$u = -\sin(x - at) + \sin(x + at) + C_1, \quad 0 < x < at$$

Найдем константу  $C_1$

$$x = at$$

$$\sin 2at = 0 + \sin 2at + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Получаем Рис. 132.

На Рис. 133. отраженная волна изображена фиолетовым.

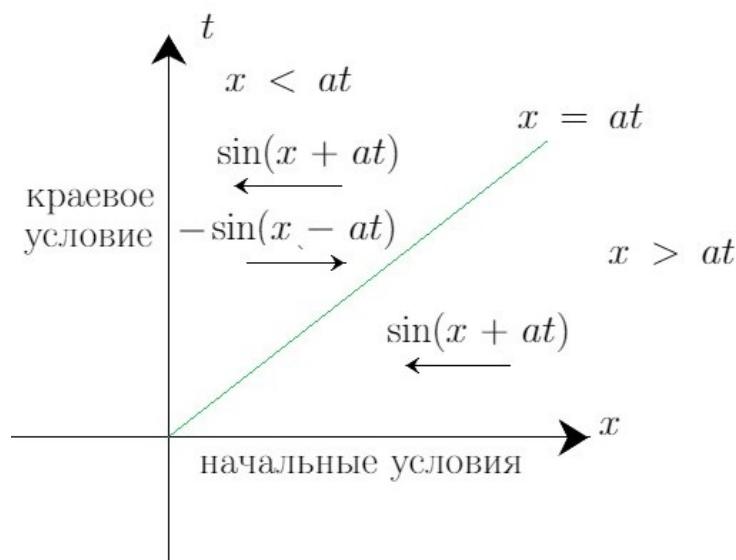


Рис. 132.

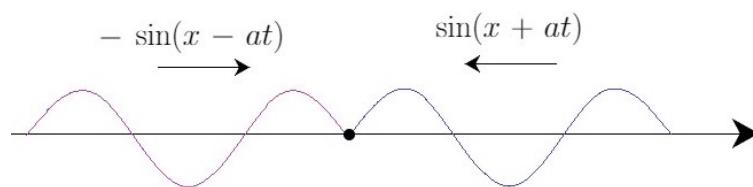


Рис. 133.

в)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = \sin x \\ u_t \Big|_{t=0} = a \cos x & x > 0, t > 0 \\ (u_x - \alpha u) \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Общее решение при  $x > at$  аналогично двум предыдущим пунктам.

Теперь  $0 < x < at$

$$\begin{aligned} u_x \Big|_{x=0} &= f'(-at) + \cos at \\ (u_x - \alpha u) \Big|_{x=0} &= f^{-at} + \cos at - \alpha f(-at) - \alpha \sin at = 0 \\ \xi &= -at \\ f'(\xi) - \alpha f(\xi) &= -\cos \xi - \alpha \sin \xi \end{aligned}$$

Характеристический многочлен:

$$\lambda - \alpha = 0$$

Решение однородного

$$f_0 = C_1 e^{\alpha \xi}$$

Частное решение:

$$f(\xi) = a \sin \xi + b \cos \xi$$

$$a \cos \xi - b \sin \xi - \alpha a \sin \xi - \alpha b \cos \xi = -\cos \xi - \alpha \sin \xi$$

$$\begin{cases} a - \alpha b = -1 \\ b + \alpha a = \alpha \end{cases}$$

$$(\alpha^2 + 1)a = -1 + \alpha^2$$

$$a = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}$$

$$b = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$$

$$f(\xi) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \sin \xi + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cos \xi + C_1 e^{\alpha \xi}$$

Из непрерывности  $f$   $f(0) = 0$

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$$

Ответ:

$$u(t, x) = \begin{cases} \sin(x + at), & x > at \\ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \sin(x - at) + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cos(x - at) - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha(x - at)} + \sin(x + at), & 0 < x < at \end{cases}$$

$$\alpha \rightarrow 0$$

$$u = -\sin(x - at) + \sin(x + at)$$

получаем случай свободного конца.

$$\alpha \rightarrow +\infty$$

$$u = \sin(x - at) + \sin(x + at)$$

получаем случай закрепленного конца.

При  $\alpha > 0$

$$e^{\alpha(x - at)} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty, 0 < x < at$$



То есть экспонента на бесконечности уходит

$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \sin(x - at) + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cos(x - at) = A \sin(x - at - \phi)$$

$$A^2 = \left( \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right)^2 + \left( \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \right)^2 = 1$$
$$A = 1$$

Получаем Рис. 134. Экспонента влияет на решение только около  $x = at$ , с

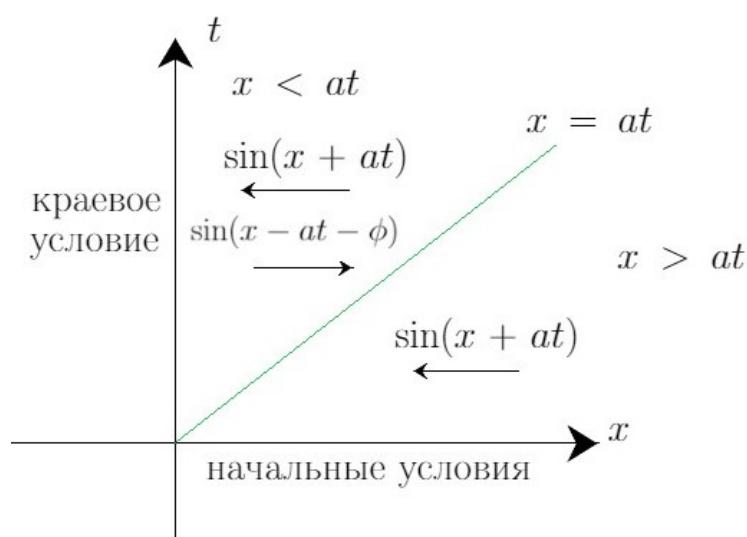


Рис. 134.

ростом  $t$  она уходит в 0.

## Семинар 12

### Линейные уравнения второго порядка

Должна была бы быть контрольная работа по темам:

- 1) Уравнения первого порядка. Задача Римана о распаде разрыва.
- 2) Приведение к каноническому виду ( $n = 2$  - в области,  $n \geq 3$  - уравнение с постоянными коэффициентами). Задача Коши.
- 3) Метод Даламбера (картинки  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ , аналитические решения).

Со следующего семинара будем заниматься методом Фурье.

### Неоднородное уравнение струны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad (12.1)$$

Можем сначала найти частное решение  $w(t, x)$  и искать решения в виде  $u = w + v$ , поменяв начальные условия.

Например

•

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2$$

$$w = \frac{4}{3}t^4$$

•

$$u_{tt} = u_{xx} + 2$$

$$w = t^2, \quad w = x^2$$

•

$$u_{tt} = 9u_{xx} + e^t$$

$$w = e^t$$

Выведем третий член в формуле Даламбера для неоднородного уравнения. В формуле Даламбера

$$f \equiv 0, \quad \psi \equiv 0.$$

$$\frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2}$$

$f \equiv 0, \phi \equiv 0.$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

$\phi \equiv 0, \psi \equiv 0.$

???

Это и будет тем самым частным решением  $w$ .

Воспользуемся методом Дюамеля. Рассмотрим  $U(t, \tau, x)$ :

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} \\ U \Big|_{t=\tau} = 0 \\ U_t \Big|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases}$$

$$u(t, x) = \int_0^t U(t, \tau, x) d\tau$$

$$U(t, \tau, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi$$

Получаем, формулу Даламбера для неоднородного уравнения:

$$u(t, x) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau \quad (12.2)$$

Посмотрим насколько решение в фиксированной точке зависит от начальных условий (Рис. 135.) Нам достаточно знать  $\phi$  в точках  $x_0 - at_0$  и  $x_0 + at_0$ ,  $\psi$  на отрез-

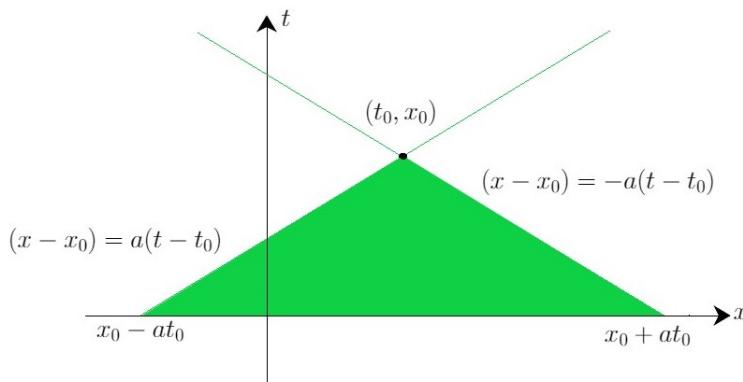


Рис. 135.

ке  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ ,  $f$  в треугольнике, который на Рис. 135. изображен зеленым цветом.

Проверим является ли найденая нами функция решением задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u \Big|_{t=0} = 0 \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$u \Big|_{t=0} = \int_0^0 U(t, \tau, x) d\tau = 0$$

$$u_t = U(t, t, x) + \int_0^t U_t(t, \tau, x) d\tau = \int_0^t U_t(t, \tau, x) d\tau$$

$$u_t \Big|_{t=0} = 0$$

$$u_{tt} = U_t(t, t, x) + \int_0^t U_{tt}(t, \tau, x) d\tau$$

$$a^2 u_{xx} = a^2 \int_0^t U_{xx}(t, \tau, x) d\tau$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + U_t(t, t, x)$$

$$U_t \Big|_{t=\tau} = U_t(\tau, \tau, x) = f(\tau, x) = U_t(t, t, x) = f(x, t)$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

### Уравнение колебаний стержня

У нас есть два стержня (Рис. 136.)

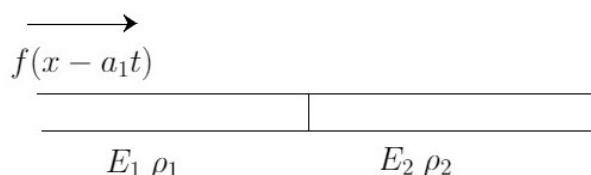


Рис. 136.

Будем решать следующую задачу: При  $t \leq 0$  по левому стержню бежит  $f(x - a_1 t)$ . Найти преломленную и отраженную волны. При каком условии нет отражения?

Сначала нам нужно вывести уравнение упругих продольных колебаний стержня. Зафиксируем точку  $x$   $u(t, x)$  - это то, где окажется точка  $x$  через время  $t$  (Рис. 137.)

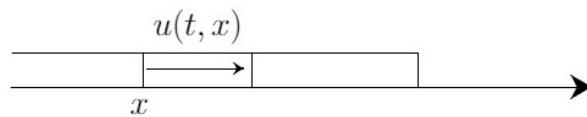


Рис. 137.

Закон Гука:

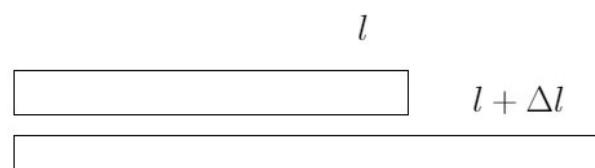


Рис. 138.

$$\begin{aligned} F &\sim \Delta l \\ F &\sim \frac{\Delta l}{l} \\ F &\sim S \frac{\Delta l}{l} \\ F &= ES \frac{\Delta l}{l}, \end{aligned}$$

где  $E$  - модуль Юнга.

Выведем зависимость  $F$  от  $u$ , воспользуемся Рис. 139.

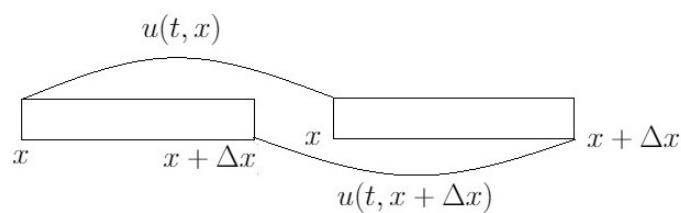


Рис. 139.

$$l = \Delta x$$

$$\Delta l = l_1 - l$$

$$l_1 = x + \Delta x + u(t, x + \Delta x) - (x + u(t, x)) = \Delta x + u(t, x + \Delta x) - u(t, x)$$

$$\Delta l = u(t, x + \Delta x) - u(t, x)$$

$$F = ES \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} ESu_x$$

Если мы берем сечение, то там возникают две силы, равные по модулю и противоположные по знаку (третий закон Ньютона). Если  $u_x > 0$ , то стержень растянут, силы действуют как на Рис. 140.

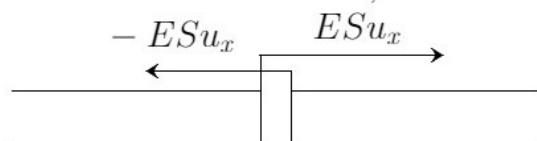


Рис. 140.

Если  $u_x < 0$ , то стержень сжат (Рис. 141.)

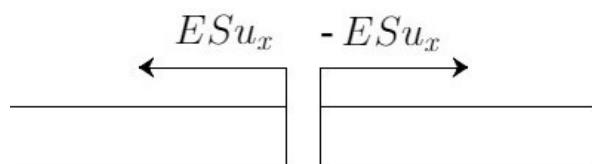


Рис. 141.

Второй закон Ньютона, на Рис. 142. среднее сечение это то, которое в состоянии покоя было от  $x$  до  $x + \Delta x$



Рис. 142.

$$ma = F_1 + F_2$$

$$F_1 = ESu_x(t, x + \Delta x)$$

$$F_2 = -ESu_x(t, x)$$

$$\rho S \Delta x u_{tt} = ESu_x(t, x + \Delta x) - ESu_x(t, x)$$

$$u_{tt} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{E}{\rho} u_{xx}$$

Получаем

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \tag{12.3}$$

Теперь поставим нашу задачу математически, пусть  $x = 0$  - это точка, где стержни стыкуются.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a_1^2 u_{xx}, \quad x < 0 & v_{tt} &= a_2^2 v_{xx}, \quad x > 0 \\ a_1^2 &= \frac{E_1}{\rho_1} & a_2^2 &= \frac{E_2}{\rho_2} \\ u \Big|_{t=0} &= f(x) & v \Big|_{t=0} &= 0 \\ u_t \Big|_{t=0} &= -af'(x) & v_t \Big|_{t=0} &= 0 \\ u \Big|_{x=0} &= v \Big|_{x=0} & (\text{не рвется}) \end{aligned}$$

$$E_1 u_x \Big|_{x=0} = E_2 v_x \Big|_{x=0} \quad \text{силы равны}$$

Условие, что силы равны, появляется из того, что если мы между стержнями вставим шайбочку, то на неё будут действовать две силы (Рис. 143.)

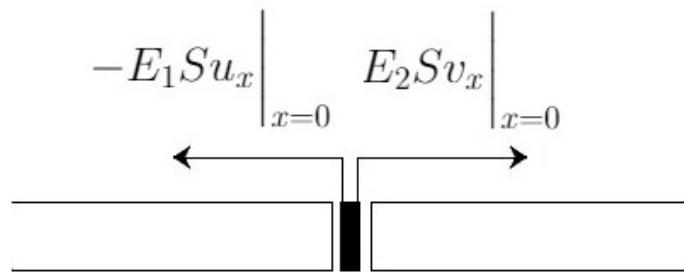


Рис. 143.

По второму закону Ньютона

$$ma = -E_1 Su_x \Big|_{x=0} + E_2 Su_x \Big|_{x=0}$$

устремляем массу к 0 и получаем

$$E_1 Su_x \Big|_{x=0} = E_2 Su_x \Big|_{x=0}$$

Теперь будем искать  $u$  и  $v$ .

$$u = f_1(x - a_1 t) + g_1(x + a_1 t)$$

из начальных условий при  $x < -a_1 t$

$$u = f(x - a_1 t)$$

$$g_1(x) = 0, \quad x < 0$$

$$v = f_2(x - a_2 t) + g_2(x + a_2 t)$$

из начальных условий при  $x > a_2 t$

$$f_2 = g_2 = 0$$

При  $-a_1 t < x < 0$

$$u = f(x - a_1 t) + g_1(x + a_1 t)$$

При  $0 < x < a_2 t$

$$v = f_2(x - a_2 t)$$

Ищем  $g_1$  и  $f_2$  из условий

$$\begin{cases} u \Big|_{x=0} = v \Big|_{x=0} \\ E_1 u_x \Big|_{x=0} = E_2 v_x \Big|_{x=0} \end{cases}$$

Доделать самостоятельно.

То, что получается изображено на Рис. 144.

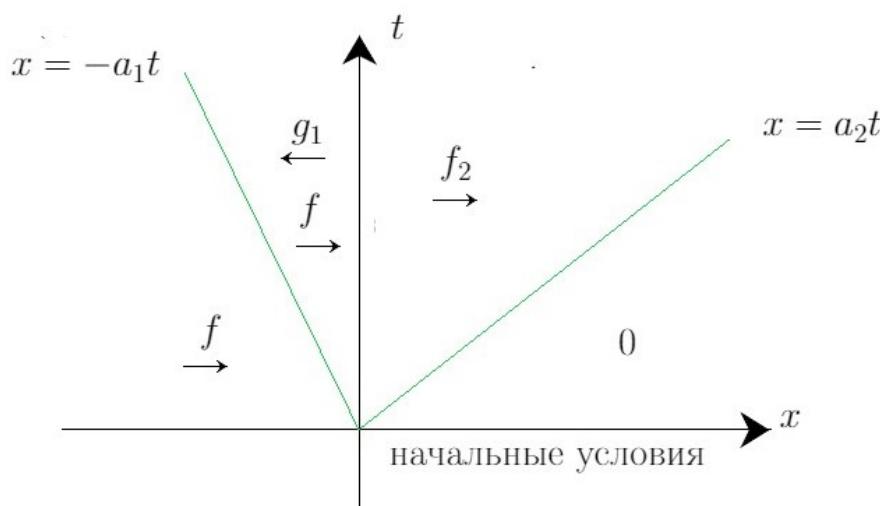


Рис. 144.

Отражения не будет  $\Leftrightarrow E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2$ .

## Семинар 13

### Линейные уравнения второго порядка

#### Метод Фурье

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (13.1)$$

или частный случай

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = x(l-x) \text{ или } \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (13.2)$$

Можем решать методом Даламбера, характеристики тоже будут отражаться, в нижнем треугольнике будет выполняться формула Даламбера, а дальше по очереди ищутся решения, волны будут как-то отражаться. (Рис. 145.)

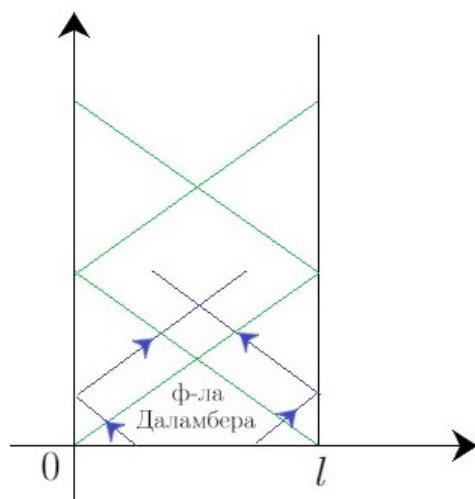


Рис. 145.

Метод Фурье состоит из двух частей

I. Забываем про начальные условия. Будем искать решения в виде

$$u(t, x) = T(t)X(x) \quad (13.3)$$

Описываем все такие решения.

II. Вернемся к исходной задаче и будем искать решения в виде

$$u = \sum T_k(t)X_k(x) \quad (13.4)$$

Ищем решения

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ T'' = \lambda a^2 T \end{cases}$$

$$u \Big|_{x=0} = T(t)X(0) = 0$$

$$T(t) \equiv 0 \text{ или } X(0) = 0$$

Ситуация  $T(t) \equiv 0$  нам не интересна.

$$u \Big|_{x=l} = T(t)X(l) = 0$$

$$T(t) \equiv 0 \text{ или } X(l) = 0$$

Ситуация  $T(t) \equiv 0$  нам не интересна. Получаем

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, X(0) = X(l) = 0 \\ T'' = \lambda a^2 T \end{cases} \quad (13.5)$$

Первое уравнение с краевыми условиями это задача Штурма-Лиувилля. Поговорим о ней подробнее.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x)$$

$$Ly = (py')' - qy$$

$$p \in C^1([0, l]), q \in C^0([0, l]), p \geq p_0 > 0$$

$$y \in D(y) = \{y \in C^2([0, l]) \mid \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0\}$$

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0, |\gamma| + |\delta| \neq 0$$



Ищем  $\lambda_k$  - собственные значения и  $X_k$  - собственные вектора.

$$LX_k(x) = \lambda_k X_k(x)$$

В нашем случае

$$L = \frac{d^2}{dx^2}, p \equiv 1, q \equiv 0, \alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0$$

Когда будет не закрепленный конец, а свободный

$$\left. u_x \right|_{x=0} = 0 = T(t)X'(0)$$
$$X'(0) = 0$$

Когда упруго закрепленный

$$\left. (u_x - u) \right|_{x=0} = T(t)(X'(0) - X(0)) = 0$$
$$X'(0) - X(0) = 0$$

Поэтому пишем условия в общем виде.

**Теорема 4.** При описанных условиях выполняются следующие свойства

- 1) собственных значений счетное число, они все действительные, их можно расположить в порядке убывания, эта последовательность будет стремиться к  $-\infty$  и они однократные

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots \rightarrow -\infty$$

если задача физически правильная то  $\lambda_1 \leq 0$  (физически правильные условия: знак  $-$  в краевом условии при упруго закрепленном конце в  $0$ , и знак  $+$  в краевом условии при упруго закрепленном конце в  $l$ ,  $q(x) \geq 0$ )

- 2)  $X_k(x)$  - полная ортогональная система в  $L_2([0, l])$ .

$L_2([0, l])$  - это функции, интегрируемые по Лебегу в квадрате,  $f \in L_2([0, l])$ , если

$$\|f\|_{L_2([0,l])} = \int_0^{+\infty} |f|^2 dx < +\infty$$

$L_2$  - гильбертово, то есть в нем есть скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^{+\infty} f \bar{g} dx$$

$$\|f\|^2 = (f, f)$$



Ортогональная система - это

$$X_k \perp X_l \text{ или } (X_k, X_l) = 0$$

Полная система - линейные комбинации  $X_k(x)$  всюду полны в  $L_2$ ,  $X_k$  - ортогональный базис в  $L_2([0, l])$ . То есть любой элемент в  $L_2([0, l])$  можно разложить в ряд по этой системе.

Немного про то, как доказывается эта теорема:  $L$  - самосопряженный, то есть

$$(Lf, g) = (f, Lg) \quad \forall f, g$$

значит  $\lambda_k$  - действительные,  $X_k \perp X_l$ .  $L^{-1}$  - компактный. Без краевых условий  $L$  не самосопряженный.

Будем решать нашу задачу Штурма-Лиувилля

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0$$

1)  $\lambda = -\nu^2 < 0, \nu > 0$ .

$$X = A \sin(\nu x) + B \cos(\nu x)$$

$$X(0) = 0 = B$$

$X = \sin(\nu x)$  (так как константа не важна, ищем с точностью до константы)

$$\sin(\nu l) = 0$$

$$\nu l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$X_k = \sin \frac{\pi k}{l} x \quad \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$$

Первые несколько  $X_k$  изображены на Рис. 146.

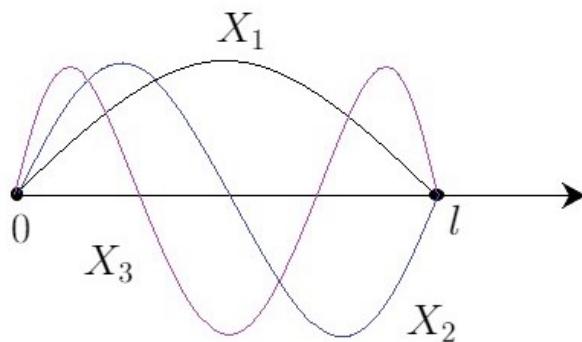


Рис. 146.

2)  $\lambda = 0$ .

$$X'' = 0$$

$$X = Ax + B$$

$$X \equiv 0$$

Не подходит.

3)  $\lambda = \nu^2 > 0, \nu > 0.$

$$X = A \operatorname{sh}(\nu x) + B \operatorname{ch}(\nu x)$$

$$X(0) = B = 0$$

$$X = \operatorname{sh}(\nu x)$$

$$\nu l = 0$$

Не подходит.

Графики sh и ch изображены на Рис. 147., ch вообще не обращается в 0.

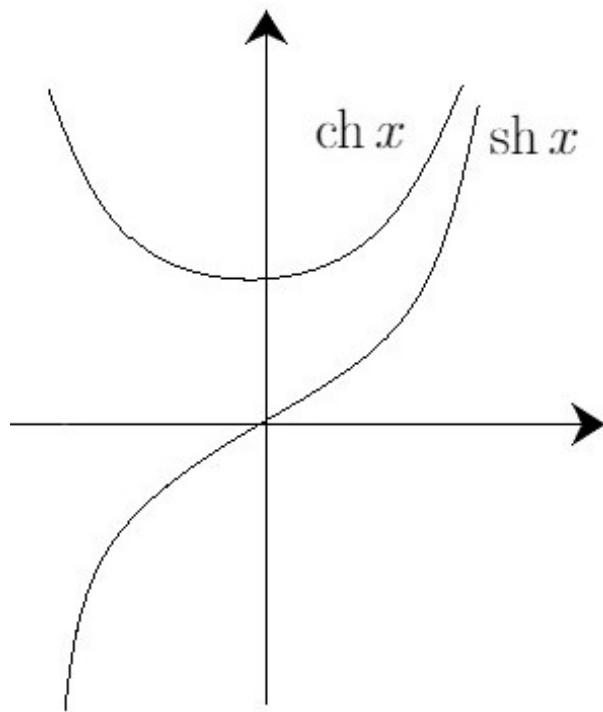


Рис. 147.

Перепишем задачу

$$\begin{cases} X_k'' = \lambda_k X_k, X_k(0) = X_k(l) = 0 \\ T_k'' = \lambda_k a^2 T_k \end{cases}$$

$$T_k'' = - \left( \frac{\pi k a}{l} \right)^2 T_k$$

$$T_k = A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l}$$

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$u \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \phi(x)$$

значит  $A_k$  - коэффициент разложения в ряд Фурье по  $\sin \frac{\pi kx}{l}$  функции  $\phi(x)$ .

$$u_t \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} = \psi(x)$$

значит  $B_k \cdot \frac{\pi k a}{l}$  - коэффициент разложения в ряд Фурье по  $\sin \frac{\pi k x}{l}$  функции  $\psi(x)$ .

$X_k(x)$  - гармоники, каждая гармоника совершает гармонические колебания. Каждое слагаемое в нашей сумме называется стоячая волна.

$k = 1$  на Рис. 148. Временная частота этого колебания  $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$ .

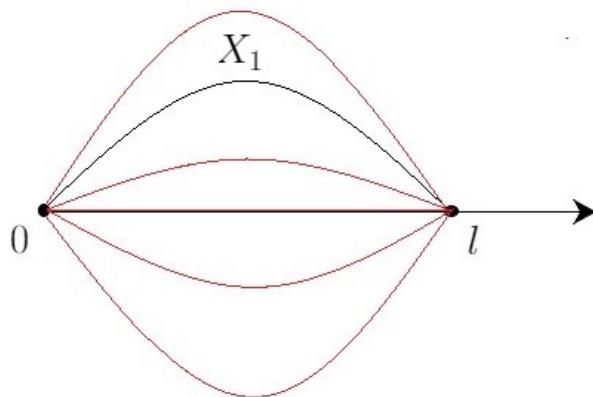


Рис. 148.

$k = 3$  на Рис. 149.

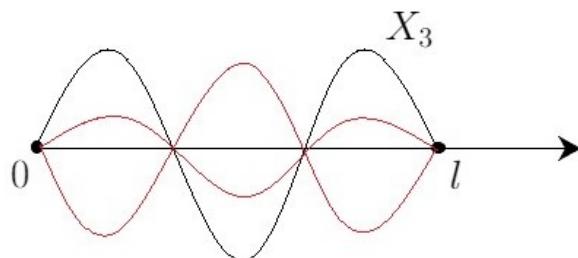


Рис. 149.

Частота каждого  $\omega_k = k\omega_1$ . Решение периодично по  $t$ ,  $\omega_1$  - основная частота, период:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l}{a}$$

$$T_k = \frac{T_1}{k}$$

То есть функция периодична с периодом  $T_1$ .

Посмотрим на формулу с точки зрения метода Даламбера.

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

Из формулы выше и оснальных формул умножения синусов и косинусов возникают аргументы  $x - at$  и  $x + at$ .

Теперь подставим начальные условия.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$B_k = 0$$

$$\sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{\pi kx}{l}$$

$$A_1 = 1, \quad A_k = 0, \quad k \neq 1$$

Ответ:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = x(l - x) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$B_k = 0$$

Чтобы найти коэффициенты  $A_m$ , умножим скалярно на  $\sin \frac{\pi mx}{l}$

$$\left( \sin \frac{\pi kx}{l}, \sin \frac{\pi mx}{l} \right) = 0, \quad m \neq k$$

$$\begin{aligned} A_m \int_0^l \sin^2 \frac{\pi mx}{l} dx &= \frac{l}{2} A_m = \int_0^l x(l - x) \sin \frac{\pi mx}{l} dx = -\frac{l}{\pi m} \int_0^l x(l - x) d \cos \frac{\pi mx}{l} = \\ &= -\frac{l}{\pi m} \left( x(l - x) \cos \frac{\pi mx}{l} \Big|_0^l - \int_0^l \cos \frac{\pi mx}{l} \cdot (l - 2x) dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{l}{\pi m} \right)^2 \int_0^l (l - 2x) d \sin \frac{\pi mx}{l} = \left( (l - 2x) \sin \frac{\pi mx}{l} \right)_0^l + \\ &+ 2 \int_0^l \sin \frac{\pi mx}{l} dx = 2 \left( \frac{l}{\pi m} \right)^2 \int_0^l \sin \frac{\pi mx}{l} dx = -2 \left( \frac{l}{\pi m} \right)^3 \cos \frac{\pi mx}{l} \Big|_0^l = \\ &= \frac{2l^3}{(\pi m)^3} (1 - \cos \pi m) = \frac{2l^3}{(\pi m)^3} (1 - (-1)^m) = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ 2, & m = 2k - 1 \end{cases} \\ A_{2k} &= 0 \\ A_{2k-1} &= \frac{8l^2}{\pi^3 (2k-1)^3} \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8l^2}{\pi^3 (2k-1)^3} \cos \frac{\pi(2k-1)at}{l} \sin \frac{\pi(2k-1)x}{l}$$

Мы изучаем как колеблется струна

$$\omega_k = \frac{\pi k a}{l} = k \omega_1$$

$X_1$  - основная гармоника

$$A_1 = \frac{8l^2}{\pi^3}$$

$$A_3 = \frac{8l^2}{27\pi^3} \text{ в 27 раз меньше}$$

$$A_5 = \frac{8l^2}{125\pi^3} \text{ в 125 раз меньше}$$

По этому слышится в основном первая частота.

## Семинар 14

### Линейные уравнения второго порядка

#### Метод Фурье

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (14.1)$$

- a) Вывести формулу.
- б) При каких  $\phi$  и  $\psi$  решение будет периодическим по  $t$ .
- в) Довести до ответа при  $\phi = 0$ ,  $\psi = \sin^2 \frac{\pi x}{l}$

а)

$$\begin{aligned} u &= T(t)X(x) \\ T''X &= a^2 TX'' \\ \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \\ u_x \Big|_{x=0} &= T(t)X'(0) = 0 \\ X'(0) &= 0 \\ u_x \Big|_{x=l} &= T(t)X'(l) = 0 \\ X'(l) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \quad X'(0) = X'(l) = 0 \\ T'' = \lambda a^2 T \end{cases}$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля

1)  $\lambda = -\nu^2$

$$X = A \sin(\nu x) + B \cos(\nu x)$$

$$X' = \nu A \cos(\nu x) - \nu B \sin(\nu x)$$

$$X'(0) = \nu B = 0$$

$$A = 0$$



$$\begin{aligned} X &= \cos(\nu x) \\ X' &= -\nu \sin(\nu x) \\ X'(l) &= 0 = -\nu \sin(\nu l) \\ \sin(\nu l) &= 0 \\ \nu_k &= \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N} \\ X_k &= \cos \frac{\pi k x}{l}, \quad \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \end{aligned}$$

Первые несколько  $X_k$  изображены на Рис. 150.

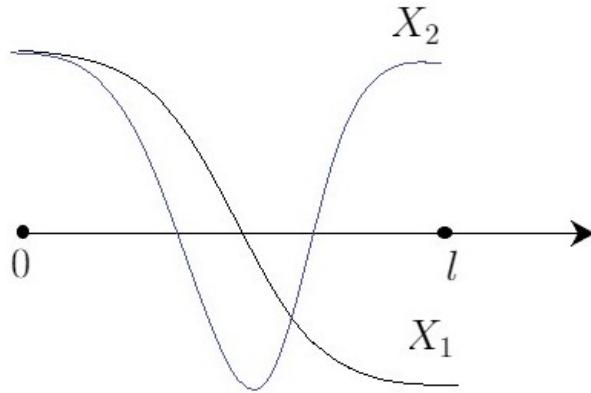


Рис. 150.

2)  $\lambda = 0$ .

$$\begin{aligned} X'' &= 0 \\ X &= Ax + B \\ X' &= A \\ X'(0) &= X'(l) = A = 0 \\ X_0 &\equiv 1 \end{aligned}$$

3)  $\lambda = \nu^2$ ,  $\nu > 0$ .

$$\begin{aligned} X &= A \operatorname{sh}(\nu x) + B \operatorname{ch}(\nu x) \\ X' &= \nu A \operatorname{ch}(\nu x) + \nu B \operatorname{sh}(\nu x) \\ X'(0) &= \nu A = 0 \\ A &= 0 \\ X &= B \operatorname{ch}(\nu x) \\ X' &= \nu B \operatorname{sh}(\nu x) \\ \nu B \operatorname{sh}(\nu l) &= 0 \end{aligned}$$

нам это не подходит.

$$\|X_k\|_{L_2([0,l])} = \frac{l}{2}$$

$$T_k'' = - \left( \frac{\pi k a}{l} \right)^2 T_k$$

$$T_k = A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l}$$

$$T_0'' = 0$$

$$T_0 = A_0 + B_0 t$$

$$u = \sum T_k X_k = (A_0 + B_0 t) \cdot 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right) \cos \frac{\pi k x}{l}$$

$$u \Big|_{t=0} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos \frac{\pi k x}{l} = \phi(x)$$

то есть  $A_k$  - коэффициенты разложения функции  $\phi(x)$  в ряд Фурье по  $\cos \frac{\pi k x}{l}$ .

$$u_t \Big|_{t=0} = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} \cos \frac{\pi k x}{l} = \psi(x)$$

то есть  $B_k \cdot \frac{\pi k a}{l}$  - коэффициенты разложения функции  $\psi(x)$  в ряд Фурье по  $\cos \frac{\pi k x}{l}$

$$\omega_k = k \omega_1$$

$$T_1 = \frac{2l}{a}$$

но частоты и период это только для слагаемых, начиная с первого.

б) Решение периодично по  $t \Leftrightarrow B_0 = 0$

$$B_0 \cdot l = \int_0^l \psi(x) dx$$

$$B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx = 0$$

то есть полный начальный импульс равен 0. Например, если у нас есть стержень длины  $l$ , и он равномерно движется направо, тогда решение будет не периодическое, так как есть начальный импульс, а вокруг центра масс будут периодические колебания.

в) Напишем формулы для выражения  $A_k$  (для нашей задачи).

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \phi(x) dx$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \\ u_t \Big|_{t=0} = \sin^2 \frac{\pi x}{l} \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$\phi(x) = 0 \Rightarrow A_k = 0$$

$$\psi(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{l}$$

$$B_0 = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2\pi a} = -\frac{l}{4\pi a}$$

$$B_k = 0, \quad k \neq 0, 2$$

Ответ:

$$u(t, x) = \frac{t}{2} - \frac{l}{4\pi a} \sin \frac{2\pi at}{l} \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Теперь рассмотрим задачу с одним закрепленным, а другим упруго закрепленным концом

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ (u_x + \alpha u) \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (14.2)$$

$$T(t)X'(l) + \alpha T(t)X(l) = 0$$

$$X'(l) + \alpha X(l) = 0$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) + \alpha X(l) = 0 \\ T'' = \lambda a^2 T \end{cases}$$



1)  $\lambda = -\nu^2$ ,  $\nu > 0$ .

$$X = A \sin(\nu x) + B \cos(\nu x)$$

$$B = 0$$

$$X = \sin(\nu x)$$

$$\nu \cos(\nu l) + \alpha \sin(\nu l) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\nu l) = -\frac{\nu}{\alpha}$$

Аналитически мы не можем решить это уравнение, решим его графически (Рис. 151.), для физически правильных условий изображены синие линии, для физически неправильных фиолетовые, причем для  $\alpha < 0$  есть две ситуации при маленьких по модулю  $\alpha$  на одно решение больше.

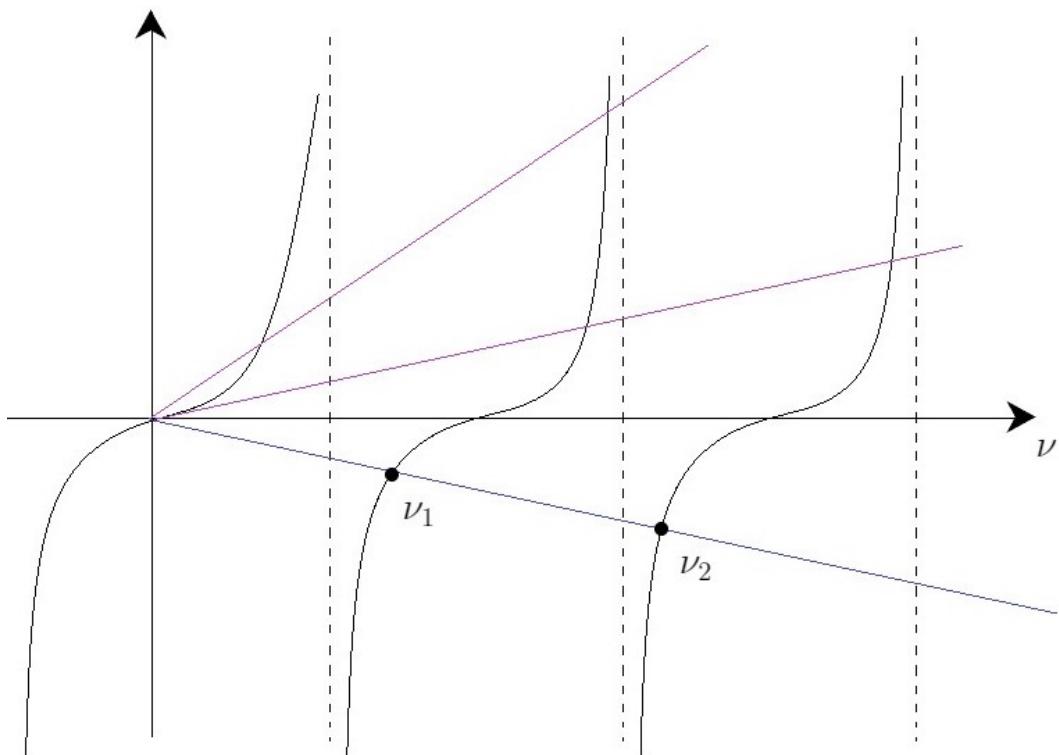


Рис. 151.

Для физически правильных  $\nu_k$  берем из рисунка и получаем

$$X_k = \sin \nu_k x$$

$$u(t, x) = \sum T_k(t) X_k(x)$$

$$T_k(t) = A_k \cos(\nu_k at) + B_k \sin(\nu_k at)$$

Каждое слагаемое будет колебаться, но периоды не соизмеримы.

2)  $\lambda = 0$ .

$$X = x$$

$$1 + \alpha l = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{l} < 0$$

$$X_0 = x$$

3)  $\lambda = \nu^2$ ,  $\nu > 0$

$$X = \operatorname{sh}(\nu x)$$

$$\nu \operatorname{ch}(\nu l) + \alpha \operatorname{sh}(\nu l) = 0$$

$$\operatorname{th} \nu l = -\frac{\nu}{\alpha}$$

Аналитически мы опять не можем решить уравнение, решим его графически (Рис. 152.), для физически правильных условий изображены синие линии, для физически неправильных фиолетовые, причем для  $\alpha < 0$  опять есть две ситуации.

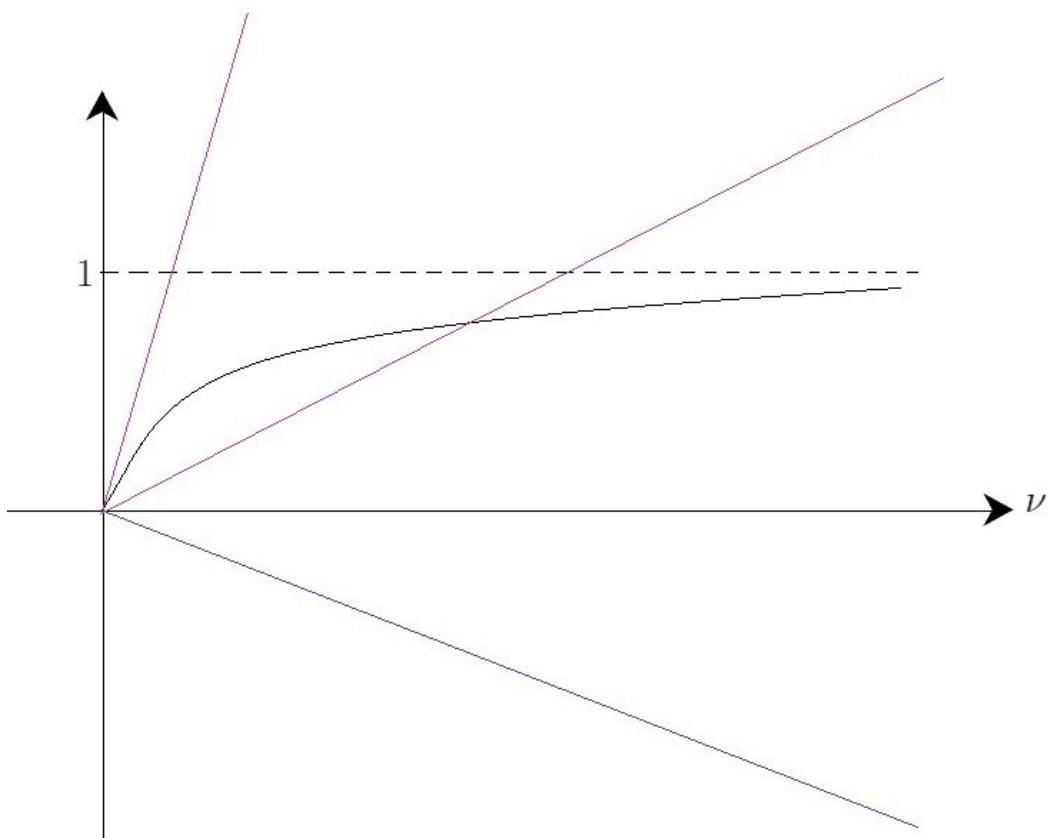


Рис. 152.

## Метод Фурье для неоднородных уравнений

Будем рассматривать такие задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u \Big|_{x=0} = \alpha(t) \\ u \Big|_{x=l} = \beta(t) \end{cases} \quad (14.4)$$

Для задачи (14.3) решения ищем в том же виде, что и для однородного уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля и получаем

$$\begin{aligned} X_k(x) &= \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k \in \mathbb{N} \\ u(t, x) &= \sum T_k(t) X_k(x) = \sum T_k \sin \frac{\pi k x}{l} \\ \sum_{k=1}^{+\infty} T_k'' \sin \frac{\pi k x}{l} &= a^2 \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) \cdot \left( -\left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 \right) \sin \frac{\pi k x}{l} + \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l} \\ f(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l} \\ f_k(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \end{aligned}$$

Получаем линейное неоднородное уравнение

$$T_k'' = - \left( \frac{\pi k a}{l} \right)^2 T_k + f_k(t)$$

$$T_k(t) = \text{ч.р.} + A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l}$$

$$u \Big|_{t=0} = \sum T_k(0) \sin \frac{\pi k x}{l} = \phi(x)$$

$$T_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$$

$$u_t \Big|_{t=0} = \sum T'_k(0) \sin \frac{\pi k x}{l} = \psi(x)$$

$$T'_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$$

Теперь перейдем к решению задачи с неоднородными краевыми условиями

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u \Big|_{x=0} = \alpha(t) \\ u \Big|_{x=l} = \beta(t) \end{cases}$$

Основной идеей решение является сведение данной задачи к задаче (14.3). То есть нам необходимо подобрать функцию  $w(t, x)$  такую, что

$$w \Big|_{x=0} = \alpha(t)$$

$$w \Big|_{x=l} = \beta(t)$$

Например можно взять функцию

$$w(t, x) = \alpha(t) \cdot \frac{l-x}{l} + \beta(t) \cdot \frac{x}{l}$$

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

$$v_{tt} + w_{tt} = a^2(v_{xx} + w_{xx})$$

Можем переписать задачу

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + (a^2 w_{xx} - w_{tt}) = a^2 v_{xx} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ v \Big|_{t=0} = \phi(x) - w \Big|_{t=0} = \tilde{\phi}(x) \\ v_t \Big|_{t=0} = \psi(x) - w_t \Big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \\ v \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=0} - w \Big|_{x=0} = 0 \\ v \Big|_{x=l} = u \Big|_{x=l} - w \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

**Задача 18.** Пусть у нас есть стержень длины  $l$ , вбитый в стену и на его противоположный конец действует сила  $F = A \sin \omega t$  (Рис. 153.) Найти решение.

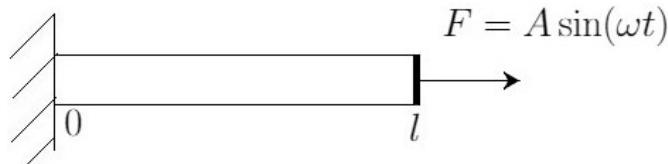


Рис. 153.

Математическая постановка задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = \alpha \sin(\omega t) \end{cases}$$

Уравнение однородное, так как сила действует только на конец стержня.

$$\alpha = \pm \frac{A}{ES}$$

так как

$$A \sin(\omega t) = \pm E S u_x \Big|_{x=l}$$

Сначала избавимся от неоднородных краевых условий

$$w(t, x) = \alpha x \sin(\omega t)$$

$$w \Big|_{x=0} = 0$$

$$\begin{cases} w_x \Big|_{x=l} = \alpha \sin(\omega t) \\ u = \alpha x \sin(\omega t) + v(t, x) \\ v_{tt} = a^2 v_{xx} + \alpha \omega^2 x \sin(\omega t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ v \Big|_{t=0} = ? \\ v_t \Big|_{t=0} = ? \\ v \Big|_{x=0} = 0 \\ v_x \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Задача разделилась на несколько

I. Получить и решить задачу Штурма-Лиувилля.

II. Найдем  $w(t, x)$ :

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} \\ w \Big|_{x=0} = 0 \\ w_x \Big|_{x=l} = \alpha \sin \omega t \end{cases}$$

Это будет функция

$$w(t, x) = \frac{\alpha}{\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin(\omega t)$$

Но мы можем ей пользоваться только когда

$$\cos \frac{\omega l}{a} \neq 0$$

$$\frac{\omega l}{a} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\omega = \frac{a}{l} \left( \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$$

То есть когда  $\omega \neq \omega_k$  - собственные частоты колебаний.  $w$  - вынужденные колебания, то есть так можно делать, когда нет резонанса.

Необходимо решить при помощи

$$w(t, x) = \frac{\alpha}{\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin(\omega t)$$

III. Решить при помощи

$$w(t, x) = \alpha x \sin(\omega t).$$

## Семинар 15

### Линейные уравнения второго порядка

#### Метод Фурье для неоднородных уравнений

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = \alpha \sin(\omega t) \end{cases}$$

Найдем  $w(t, x)$ :

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} \\ w \Big|_{x=0} = 0 \\ w_x \Big|_{x=l} = \alpha \sin \omega t \end{cases}$$

Это будет функция

$$w(t, x) = \frac{\alpha}{\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin(\omega t)$$

Но мы можем ей пользоваться только когда

$$\cos \frac{\omega l}{a} \neq 0$$

$$\frac{\omega l}{a} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega = \frac{a}{l} \left( \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

То есть когда

$$\omega \neq \omega_k = \frac{\pi a}{l} \left( k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- условие отсутствия резонанса. Ищем решение в виде

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

Перепишем задачу для  $v(t, x)$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ v \Big|_{t=0} = 0 \\ v_t \Big|_{t=0} = -\frac{\alpha a}{\cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \\ v \Big|_{x=0} = 0 \\ v_x \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$v(t, x) = T(t)X(x)$$

$$T'' X = a^2 T X''$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \quad X(0) = X'(l) = 0 \\ T'' = \lambda a^2 T \end{cases}$$

Разберем все случаи в задаче Штурма-Лиувилля

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$LX_k = \lambda_k X_k, \quad x \in (0, l)$$

- $X(0) = X(l) = 0$

$$X_k = \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$$

$X_k$  изображены на Рис. 154.

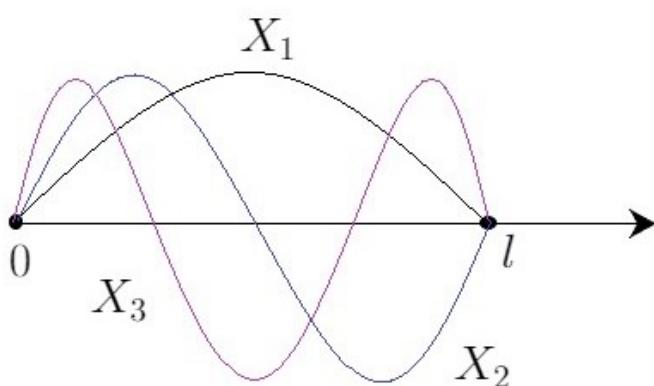


Рис. 154.

- $X'(0) = X'(l) = 0$

$$X_k = \cos \frac{\pi kx}{l}, \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$$

$$X_0 = 1, \lambda_0 = 0$$

$X_k$  изображены на Рис. 155.

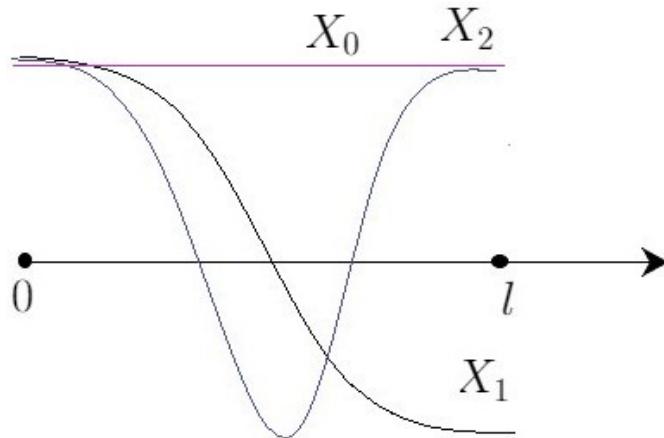


Рис. 155.

- $X(0) = X'(l) = 0$

$$X_k = \sin \frac{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{l}, \lambda_k = -\left(\frac{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2, k = 0, 1, 2\dots$$

$X_k$  изображены на Рис. 156.

Если решать аккуратно

$$1) \lambda = -\nu^2 < 0, \nu > 0.$$

$$X = A \sin(\nu x) + B \cos(\nu x)$$

$$X(0) = 0 = B$$

$$X = \sin(\nu x)$$

$$X'(l) \cos(\nu l) = 0$$

$$\nu l = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0, 1, 2\dots$$

$$X_k = \sin \frac{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{l}, \lambda_k = -\left(\frac{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2$$

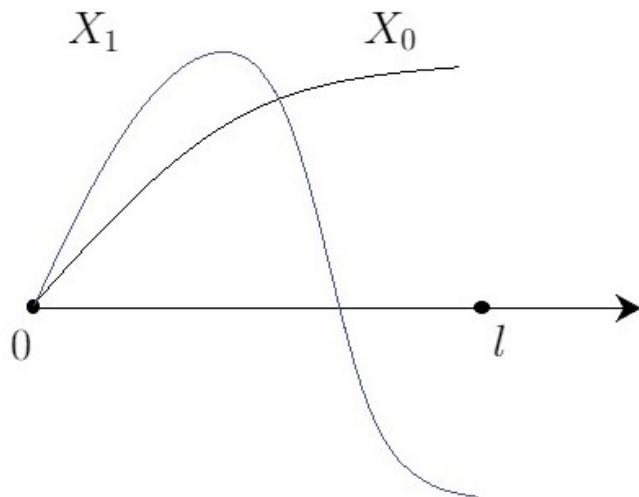


Рис. 156.

2)  $\lambda = 0$ .

$$X'' = 0$$

$$X = Ax + B$$

$$X(0) = B = 0$$

$$X'(l) = A = 0$$

$$X \equiv 0$$

Не подходит.

3)  $\lambda = \nu^2 > 0, \nu > 0$ .

$$X = A \operatorname{sh}(\nu x) + B \operatorname{ch}(\nu x)$$

$$X(0) = B = 0$$

$$X = \operatorname{sh}(\nu x)$$

$$X'(l) = \nu \operatorname{ch}(\nu l) = 0$$

нет решений.

Положительных собственных значений нет. Чем плохи положительные собственные значения? Если у нас есть положительные собственные значения, то из задачи  $T'' = \lambda a^2 T$  мы получим экспоненциально растущие решения, что не физично.

- $(u_x + \alpha u) \Big|_{x=l}$  - возникает трансцендентное уравнение.

- $X'(0) = X(l) = 0$

$$X_k = \cos \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l}, \quad \lambda_k = - \left( \frac{\pi (k + \frac{1}{2})}{l} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2\dots$$

$X_k$  изображены на Рис. 157.

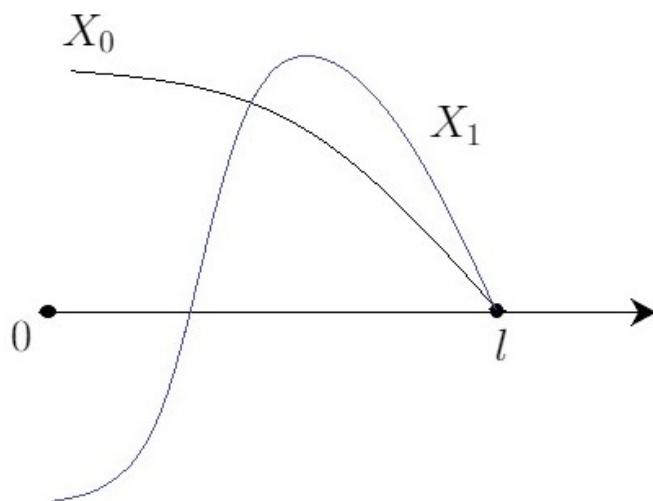


Рис. 157.

Почему  $X_k$  полная ортогональная система? Когда мы раскладываем в классические ряды Фурье, у нас полная ортогональная система - это  $1, \sin kx, \cos kx$ . Почему тогда наши функции образуют полную ортогональную систему? В классические ряды Фурье мы раскладываем на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а если положить  $l = \pi$ , то мы работаем с отрезком  $[0, \pi]$ . Если у нас есть функция на отрезке  $[0, \pi]$  и мы ее нечетным образом продолжаем на  $[-\pi, 0]$ , то наша функция разложится в ряд Фурье только по  $\sin$ . С  $\cos$  аналогично, только функцию надо продолжать четно. Если  $l = \frac{\pi}{2}$ , то почему функции  $\sin(2k+1)x$  образуют полную ортогональную систему. Берем функцию на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , продолжим ее четным образом относительно прямой  $x = \frac{\pi}{2}$ , так возникнут  $\sin 2kx$ , далее аналогично предыдущему.

Вернемся к нашей задаче.

$$X_k = \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l}, \quad \lambda_k = - \left( \frac{\pi (k + \frac{1}{2})}{l} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2\dots$$

$$T_k'' = - \left( \frac{\pi a (k + \frac{1}{2})}{l} \right)^2 = -\omega_k^2 T_k$$

$$T_k = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)$$

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l}$$

$$\omega_0 : \omega_1 : \omega_2 = 1 : 3 : 5$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi a}{2l}} = \frac{4l}{a}$$

$$T_k = \frac{T_0}{2k+1}$$

$$\omega_k = (2k+1)\omega_0$$

На Рис. 158. изображено какое расстояние преодолевает волна прежде чем вернуться в исходную точку.

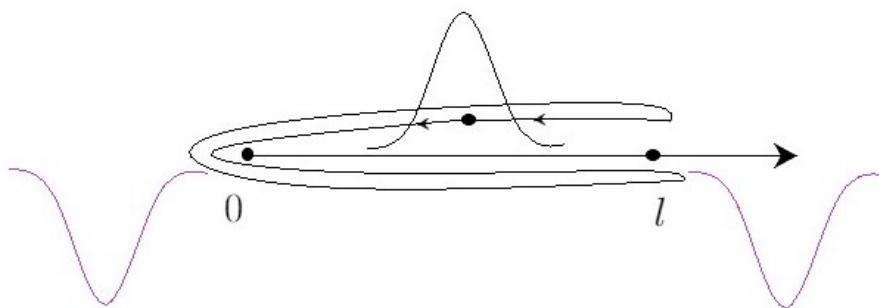


Рис. 158.

Из рисунка видно, что преодолено расстояние  $4l$  со скоростью  $a$ .

$$v \Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l} = 0$$

$$A_k = 0$$

$$v_t \Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \omega_k \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l} = -\frac{\alpha a}{\cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a}$$

$$\omega_k B_k \int_0^l \sin^2 \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l} dx = \frac{\omega_k l}{2} B_k = -\frac{\alpha a}{\cos \frac{\omega l}{a}} \int_0^l \sin \frac{\omega x}{a} \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l} dx$$

$$u(t, x) = \frac{\alpha a}{\omega \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \cdot \sin(\omega t) + \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \sin(\omega_k t) \cdot \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l}$$

Первое слагаемое - это вынужденные колебания с частотой  $\omega$ , второе слагаемое - это собственные колебания с частотами  $\omega_k$ .

Теперь перейдем к последнему случаю.

$$\omega_k = \frac{\pi a}{l} \left( k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть  $\exists K : \omega = \omega_K$ . Тогда берем

$$w(t, x) = \alpha x \sin(\omega t)$$

$$u(t, x) = \alpha x \sin(\omega t) + v(t, x)$$

Перепишем задачу

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + \alpha \omega^2 x \sin(\omega t), & x \in (0, l), t > 0 \\ v \Big|_{t=0} = 0 \\ v_t \Big|_{t=0} = -\alpha \omega x \\ v \Big|_{x=0} = 0 \\ v_x \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(t) \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l}$$

Разложим в ряд Фурье функцию  $x$

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l}$$

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{\pi (k + \frac{1}{2}) x}{l} dx$$

$$T_k'' = -\omega_k^2 T_k + \alpha \omega^2 \alpha_k \sin(\omega t)$$

$$T_k(0) = 0$$

$$T_k'(0) = -\alpha \omega \alpha_k$$

$$T_k(0) = \text{ч.р.} + \text{общее}$$

$$\text{общее} = A_k \cos(\omega t) + B_k \sin(\omega t)$$

Ищем частное решение, пусть сначала  $k \neq K$

$$\text{ч.р.} = \frac{\alpha \alpha_k \omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

$$A_k = 0$$

$$T_k'(0) = -\alpha \alpha_k \omega = \frac{\alpha \alpha_k \omega^3}{\omega_k^2 - \omega^2} + \omega_k B_k$$

$$\omega_k \rightarrow \omega, \omega_k^2 - \omega^2 \rightarrow 0$$

Теперь  $k = K$

$$T_k'' = -\omega T_k + \alpha \omega^2 \alpha_k \sin(\omega t)$$

$$T_k(0) = 0$$



$$T'_k(0) = -\alpha \omega \alpha_k$$
$$\text{общее} = A_k \cos(\omega t) + B_k \sin(\omega t)$$

Частное решение ищется в виде

$$\text{ч.р.} = t(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$$
$$\text{ч.р.} = -\frac{\alpha \alpha_k \omega}{2} t \cdot \cos(\omega t)$$
$$A_k = 0$$

Из-за  $t$  в частном решении, амплитуда линейно растет по времени, так проявляется резонанс.

## Семинар 16

### Линейные уравнения второго порядка

#### Метод Фурье для неоднородных уравнений

Рассмотрим задачу, если в нашем уравнении появляются новые слагаемые типа  $u_t$  или  $u$ . Например

$$u_{tt} + u_t = a^2 u_{xx} + u \quad (16.1)$$

Если уравнение однородное

$$P_t u = L_x u$$

$$L_x = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$P_t = \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} + ..$$

$$u = T(t)X(x)$$

$$P_t(T)X = TL_x(X)$$

$$\frac{P_t(T)}{T} = \frac{L_x(X)}{X} = \lambda$$

Задача Штурма -Лиувилля получается такая же, если, например в задаче (16.1) перенести  $u$  влево. И нам без разницы, как выглядит оператор  $P_t$ . Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + u_t - u = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0$$

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi kx}{l}$$

$$u = \sum T_k(t) \sin \frac{\pi kx}{l}$$

$$T_k'' + T_k' - T_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 T_k + f_k(t)$$

Если рассматриваем

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} - u + f(x, t)$$

$$u = T(t)X(x)$$

$$\frac{T'' - T'}{T} = \frac{X'' - X}{X} = \lambda$$

В этой ситуации

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 1$$

В этой задаче нас интересуют собственные функции и собственные значения, собственные векторы не поменяются, а собственные значения сдвинутся на 1.

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + u_x + f(x, t)$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$$

это не попадает под общее определение оператора задачи Штурма-Лиувилля. В этом случае  $L$  не будет самосопряженным, надо избавляться от  $u_x$ .

**Задача 19.**

$$\begin{cases} u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x} \sin 3x, & x \in (0, \pi) \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=\pi} = \pi t \\ u \Big|_{t=0} = 0 \\ u_t \Big|_{t=0} = x \end{cases}$$

Ищем функцию  $r(t, x)$

$$\begin{aligned} r \Big|_{x=0} &= 0 \\ r \Big|_{x=\pi} &= \pi t \\ r(t, x) &= xt \\ u &= xt + v(t, x) \end{aligned}$$

Перепишем задачу

$$\begin{cases} v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x - e^{-x} \sin 3x, & x \in (0, \pi) \\ v \Big|_{x=0} = 0 \\ v \Big|_{x=\pi} = 0 \\ v \Big|_{t=0} = 0 \\ v_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Сделаем замену

$$w(t, x) = ve^x$$

$$w_{xx} = v_{xx}e^x + 2v_x + ve^x = e^x(v_{xx} + 2v_x + v)$$

перепишем задачу еще раз

$$\begin{cases} w_{tt} - 7w_t = w_{xx} - w - \sin 3x, x \in (0, \pi) \\ w \Big|_{x=0} = 0 \\ w \Big|_{x=\pi} = 0 \\ w \Big|_{t=0} = 0 \\ w_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

То есть если у нас есть  $u_{xx} + au_x$ , то сделаем замену

$$w = e^{\frac{a}{2}x} u$$

и получаем

$$w_{xx} = e^{\frac{a}{2}x} \left( u_{xx} + au_x + \frac{a^2}{4}u \right)$$

$$u_{xx} + au_x \rightarrow w_{xx} - \frac{a^2}{4}w$$

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

$$X_k = \sin kx$$

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) \sin kx$$

$$T_k(0) = T'_k(0) = 0$$

$$T''_k - 7T'_k = -k^2 T_k - T_k + f_k(t)$$

$$f_k = 0, \quad k \neq 3$$

$$f_k = -1 \quad k = 3$$

$$k \neq 3, \quad T_k \equiv 0$$

$$k = 3, \quad T''_3 - 7T'_3 = -10T_3 - 1$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$$

$$\text{ч.р.} = -\frac{1}{10}$$

$$T_3 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{5t} - \frac{1}{10}$$

$$T_3(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{10}$$

$$T'_3(0) = 2C_1 + 5C_2 = 0$$



$$C_1 + C_2 = \frac{1}{10}$$

$$C_1 = -\frac{5}{2}C_2$$

$$-\frac{3}{2}C_2 = \frac{1}{10}$$

$$C_2 = -\frac{1}{15}$$

$$C_1 = \frac{1}{6}$$

Ответ:

$$u(t, x) = xt + e^{-x} \left( -\frac{1}{10} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{5t} \right) \sin 3x$$

### Уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (16.2)$$

Если у нас есть нагретый стержень, у которого боковая поверхность теплоизолирована,  $u(t, x)$  - температура, то она будет удовлетворять уравнению (16.2). Между разными единицами температуры линейные зависимости, а это уравнение их выдерживает, поэтому не важно какой мы пользуемся.

Выведем это уравнение. Сколько теплоты нужно, чтобы тело массы  $m$  нагреть на  $\Delta T$  градусов,  $c$  - удельная теплоемкость:

$$\Delta Q = cm\Delta T.$$

Закон Фурье: если нас интересует количество теплоты, прошедшее через поверхность  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  в направлении нормали к этой поверхности

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \Delta S \Delta t$$

$k$  - коэффициент теплоты.

У нас (Рис. 159.)

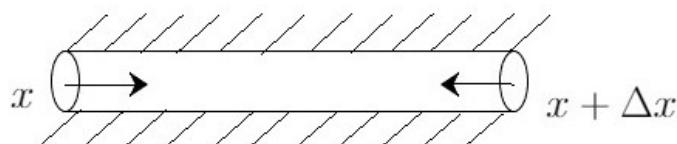


Рис. 159.

$$\Delta Q = C\rho S \Delta x (u(t + \Delta t, x) - u(t, x) + o(1))$$

Количество тепла, которое поступает через концы:

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} S \Delta t$$

$$\Delta Q = k \frac{\partial u(t, x + \Delta x)}{\partial x} S \Delta t$$

$$kS(u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x) + o_t(1))\Delta t = c\rho S(u(t + \Delta t, x) - u(t, x) + o_x(1))\Delta x$$

Разделим на  $\Delta x \Delta t$  и  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$

$$c\rho u_t = k u_{xx}$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

Задача:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

Поговорим про краевые условия. У нас было для струны:

1) Закрепленный конец

$$u \Big|_{x=0} = 0$$

2) Свободный конец

$$u_x \Big|_{x=0} = 0$$

3) Упруго закрепленный конец

$$(u_x - \alpha u) \Big|_{x=0} = 0$$

Для уравнения теплопроводности:

1) Конец поддерживается при нулевой температуре

$$u \Big|_{x=0} = 0$$

2) Теплоизолированный конец

$$u_x \Big|_{x=0} = 0$$

3) Поток тепла пропорционален температуре

$$(u_x - \alpha u) \Big|_{x=0} = 0$$

**Задача 20.** Берем два нагретых стержня один нагрет до постоянной температуры  $u_1$ , другой до  $u_2$ , соединяем их и теплоизолируем. Что будет? (Рис. 160.)

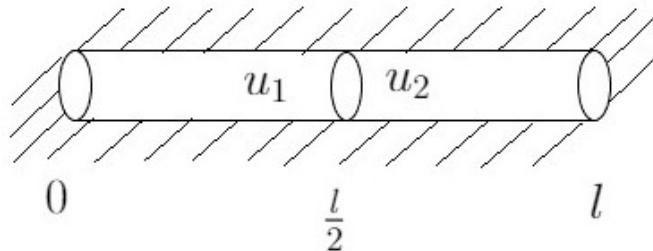


Рис. 160.

Можем предположить, что

$$u(t, x) \rightarrow \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad t \rightarrow +\infty$$

Поставим задачу математически

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) = \begin{cases} u_1, & 0 < x < \frac{l}{2} \\ u_2, & \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \end{cases}$$

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, & X'(0) = X'(l) = 0 \\ T' = a^2 \lambda T \end{cases}$$

$$X_k = \cos \frac{\pi k x}{l}, \quad \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$$

$$X_0 \equiv 1, \quad \lambda_0 = 0$$

$$T'_k = -\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k$$

$$T_k = C_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}$$

$$T'_0 = 0$$

$$T_0 = C_0$$

$$u(t, x) = \sum T_k(t) X_k(x)$$

$$u(t, x) = C_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k x}{l} \rightarrow C_0, \quad t \rightarrow +\infty$$

$$u \Big|_{t=0} = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos \frac{\pi k x}{l} = \phi(x)$$

$C_k$  - коэффициент разложения в ряд Фурье.

$$C_0 l = \int_0^l \phi(x) dx$$

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \phi(x) dx$$

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx$$

## Семинар 17

### Линейные уравнения второго порядка

#### Уравнение теплопроводности

Мы научились решать с помощью метода Фурье следующие задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) \end{cases} \quad (17.2)$$

В обеих задачах

$$(17.1) \quad \begin{aligned} X'' &= \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0 \\ X_k &= \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \\ u(t, x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l} \\ u \Big|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \phi(x) \\ A_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \\ u_t \Big|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} = \psi(x) \\ B_k &= \frac{2}{\pi k a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \end{aligned}$$

(17.2)

$$\begin{aligned} T' &= a^2 \lambda T \\ u(t, x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l} \\ u \Big|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \phi(x) \\ C_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \end{aligned}$$

Будем сравнивать получившиеся ряды. Как гладкость решений зависит от гладкости начальных условий, то есть нам надо знать как ведут себя коэффициенты рядов Фурье в зависимости от гладкости функций. Сначала сформулируем не строгое утверждение, которое вообще говоря неверно

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin \frac{\pi k x}{l} \\ f \in C^p &\Leftrightarrow f_k \sim \frac{1}{k^p}, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

То есть чем гладже функция, тем быстрее убывают коэффициенты. Теперь сформулируем верное утверждение

$$\begin{aligned} f \in C^p &\Rightarrow f_k = o\left(\frac{1}{k^p}\right), \quad k \rightarrow \infty \\ f_k &= o\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right), \quad k \rightarrow \infty \Rightarrow f \in C^p \end{aligned}$$

Можем усилить

$$\begin{aligned} f \in C^p \text{ кусочно } &\Rightarrow f_k = o\left(\frac{1}{k^p}\right) \\ f_k &= O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) \Rightarrow f \in C^p \end{aligned}$$

То есть исходное утверждение почти верное.

$$f \in L_2(0, l) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^2 < +\infty$$

$$f^{(p)}(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k (-1)^{m-1} \left(\frac{\pi k}{l}\right)^p \cos \frac{\pi k x}{l}, & p = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2... \\ \sum_{k=1}^{+\infty} f_k (-1)^m \left(\frac{\pi k}{l}\right)^p \sin \frac{\pi k x}{l}, & p = 2m, \quad m = 0, 1, 2... \end{cases}$$



Коэффициенты стали  $\sim f_k k^p$ . У нас в задачах на уравнение струны обычно  $\phi \in C^2$ ,  $\psi \in C^1$ . При  $t > 0$  насколько гладкие  $\phi$  и  $\psi$  настолько гладкие и решения.

Если в задаче (17.2) взять  $\phi \in C^0$  при  $t > 0$

$$C_k e^{-k^2} = o\left(\frac{1}{k^p}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall p$$

то есть  $u \in C^\infty$ .

Если берем уравнение теплопроводности при  $t < 0$ , то получим

$$C_k e^{zk}$$

А с уравнением струны ничего не случится. То есть тепловые процессы в обратную сторону не пустишь.

Продолжим решать задачу 20.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \phi(x) = \begin{cases} u_1, & 0 < x < \frac{l}{2} \\ u_2, & \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \end{cases}$$

$$u(t, x) = C_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k x}{l} \rightarrow C_0, \quad t \rightarrow \infty$$

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \phi(x) dx = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$u \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos \frac{\pi k x}{l}$$

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{l} \left( u_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{\pi k x}{l} dx + u_2 \int_{\frac{l}{2}}^l \cos \frac{\pi k x}{l} dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left( u_1 \sin \frac{\pi k x}{l} \Big|_0^{\frac{l}{2}} + u_2 \sin \frac{\pi k x}{l} \Big|_{\frac{l}{2}}^l \right) = \frac{2}{\pi k} (u_1 - u_2) \sin \frac{\pi k}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m \frac{2}{\pi k} (u_1 - u_2), & k = 2m + 1 \end{cases}$$

$$u(t, x) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{-\left(\frac{\pi(2m+1)a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{l} \in C^\infty(t > 0)$$



Сумма стремится к 0 со скоростью

$$e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}$$

то есть

$$T \sim \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2$$

Если взять  $t = 3T$ , то получим

$$e^{-3}, m = 0$$

$$e^{-27}, m = 1$$

$$e^{-75}, m = 2$$

То есть обсуждать только константу и слагаемое при  $m = 0$ .

График функции

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi x}{l}$$

при различных  $t$  изображен на Рис. 161.

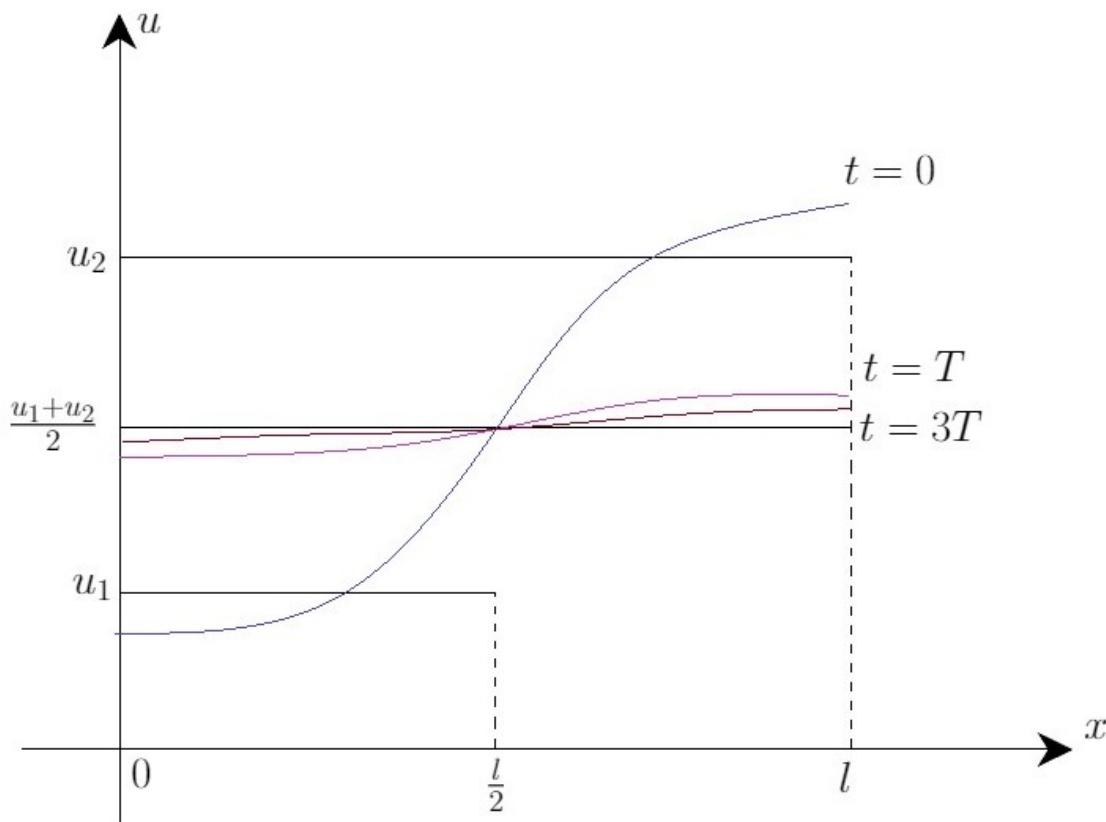


Рис. 161.

**Задача 21.**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < 1 \\ u \Big|_{x=0} = 2 \\ u \Big|_{x=1} = 4 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Возьмем

$$w = 2 + 2x$$

$$u = 2 + 2x + v$$

$$w_t = a^2 w_{xx}$$

Перепишем задачу для  $v$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < 1 \\ v \Big|_{x=0} = 0 \\ v \Big|_{x=1} = 4 \\ v \Big|_{t=0} = -2 - 2x \end{cases}$$

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-(\pi k a)^2 t} \sin \pi k x$$

$$C_k = -2 \int_0^1 (2 + 2x) \sin \pi k x dx$$

$$u(t, x) = 2x + 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-(\pi k a)^2 t} \sin \pi k x \rightarrow 2x + 2, \quad t \rightarrow \infty$$

Другое решение:

$$u(t, x) \rightarrow w(x), \quad t \rightarrow \infty$$

Найдем такое  $w$

$$0 = a^2 w''$$

$$w'' = 0$$

$w$  - линейная функция.

$$w(0) = 2, \quad w(1) = 4$$

$$w = 2x + 2$$

**Задача 22.**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + q, & 0 < x < l \\ u \Big|_{x=0} = 0 \\ u \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

То есть эта задача про стержень, на концах которого поддерживается нулевая температура и по нему бежит ток.

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$T'_k(t) = - \left( \frac{\pi k a}{l} \right)^2 T_k + q \alpha_k$$

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{\pi k} \cos \frac{\pi k x}{l} \Big|_0^l = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \frac{4}{\pi k}, & k = 2m + 1 \end{cases}$$

$$T'_k = - \left( \frac{\pi k a}{l} \right)^2 T_k + q \alpha_k$$

$$T_k(0) = 0$$

$$T_k = q \alpha_k \left( \frac{l}{\pi k a} \right)^2 \left( 1 - e^{-\left( \frac{\pi k a}{l} \right)^2 t} \right)$$

$$u(t, x) \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} q \alpha_k \left( \frac{l}{\pi k a} \right)^2 \sin \frac{\pi k x}{l}$$

Можно и по-другому

$$u(t, x) = w(x)$$

$$0 = a^2 w'' + q$$

$$w(0) = w(l) = 0$$

$$w = \frac{q}{2a^2} x(l - x)$$

$$u = w(x) + v(t, x)$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l \\ v \Big|_{x=0} = 0 \\ v \Big|_{x=l} = 0 \\ v \Big|_{t=0} = -w(x) \end{cases}$$
$$v(t, x) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Тогда

$$u(t, x) \rightarrow w(x)$$

Надо только доказать, что

$$\sum_{k=1}^l q\alpha_k \left(\frac{l}{\pi ka}\right)^2 \sin \frac{\pi kx}{l} = \frac{q}{2a^2} x(l-x)$$

## Семинар 18

### Линейные уравнения второго порядка

#### Уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (18.1)$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta u = f(x) \quad (18.2)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Откуда может возникнуть уравнение Лапласа

- волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

это многомерное уравнение струны.

- уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(t, x) \rightarrow w(x), t \rightarrow \infty$$

В этих уравнениях мы ищем стационарное решение.

Сформулируем задачу Дирихле. Пусть  $\Omega$  - область

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u \Big|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (18.3)$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), f \in C^0(\partial\Omega)$ .

Будем рассматривать задачи, где  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . В нашем случае это будут круг, кольцо и прямоугольник.

**Задача 23** (кольцо).

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u \Big|_{r=1} = f_1(\phi) = 0 \\ u \Big|_{r=2} = f_2(\phi) = \cos^2 \phi \\ u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \end{cases}$$

Домножим на  $\frac{r^2}{R\Phi}$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\phi} = \lambda$$

$$\begin{cases} \Phi'' = -\lambda\Phi, \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \\ r^2 R'' + rR - \lambda R = 0 \end{cases}$$

$$\Phi'' = -\lambda\Phi, \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

1)  $-\lambda > 0$ . Получатся экспоненты, нам они не подходят.

2)  $\lambda = 0$ . Получим линейные функции.

$$\Phi_0 = 1$$

3)  $-\lambda < 0$

$$\Phi_k = \sin k\phi; \cos k\phi$$

$\lambda_k = k^2$  - кратные собственные значения.

$$r^2 R''_k + rR'_k - k^2 R_k = 0$$

Это уравнение Эйлера, ищем решение в виде  $r^\lambda$

$$\lambda(\lambda - 1)r^\lambda + \lambda r^\lambda - k^2 r^\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - k^2 = 0$$

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda = \pm k$$

$$R_k = A_k r^k + B_k r^{-k}$$

$$k = 0$$

$$r^2 R''_0 + rR'_0 = 0$$

$$R_0 = A_0 \cdot 1 + B_0 \ln r$$

$$\begin{aligned} u(r, \phi) = \sum R_k \Phi_k &= (A_0 + B_0 \ln r) \cdot 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} ((A_k r^k + B_k r^{-k}) \cos k\phi + \\ &+ (C_k r^k + D_k r^{-k}) \sin k\phi) \end{aligned}$$

Следующая запись ряда неверна:

$$\sum (C_k r^k + D_k r^{-k})(A_k \cos k\phi + B_k \sin k\phi)$$

$$u \Big|_{r=1} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} ((A_k + B_k) \cos k\phi + (C_k + D_k) \sin k\phi) = f_1(\phi) = 0$$

$$A_0 = 0$$

$$A_k + B_k = 0$$



$$C_k + D_k = 0$$

$$u \Big|_{r=2} = B_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} ((A_k 2^k + B_k 2^{-k}) \cos k\phi + (C_k 2^k + D_k 2^{-k}) \sin k\phi) = f_2(\phi) =$$

$$= \cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

$$B_0 \ln 2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A_k + B_k = 0 \\ A_2 \cdot 4 + B_2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ A_k 2^k + B_k r^{-k} = 0, \quad k \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k + D_k = 0 \\ C_k r^k + D_k r^{-k} = 0 \end{cases}$$

$$C_k = D_k = 0$$

$$A_k = B_k = 0, \quad k \neq 0, 2$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 0 \\ 4A_2 + \frac{1}{4}B_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A_2 = -B_2$$

$$-\frac{15}{4}B_2 = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = -\frac{2}{15}$$

$$A_2 = \frac{2}{15}$$

$$B_0 = \frac{1}{2 \ln 2}$$

$$u(r, \phi) = \frac{\ln r}{2 \ln 2} + \frac{2}{15} (r^2 - r^{-2}) \cos 2\phi$$

**Задача 24** (круг).

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1 \\ u \Big|_{r=1} = f(\phi) \end{cases}$$

$$u = R(r)\Phi(\phi)$$

Аналогично задаче про кольцо получаем

$$\begin{aligned} u(r, \phi) = \sum R_k \Phi_k &= (A_0 + B_0 \ln r) \cdot 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} ((A_k r^k + B_k r^{-k}) \cos k\phi + \\ &+ (C_k r^k + D_k r^{-k}) \sin k\phi) \end{aligned}$$

$$u \Big|_{r=1} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} ((A_k + B_k) \cos k\phi + (C_k + D_k) \sin k\phi) = f(\phi)$$

Тут оказывается, что нам не хватает одного условия, но у нас функция должна быть определена в 0, но в 0 не определены  $r^{-k}$  и  $\ln r$ , поэтому

$$B_0 = B_k = D_k = 0$$

После этого надо разложить  $f(\phi)$  в ряд Фурье и найти коэффициенты.

**Задача 25.**

$$\begin{cases} \Delta u = xy, \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u \Big|_{x^2+y^2=1} = 0 \end{cases}$$

Найдем частное решение, можно взять

$$w = \frac{x^3y}{6}$$

или

$$w = \frac{xy^3}{6}$$

или

$$w = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3y}{6} + \frac{xy^3}{6} \right) = \frac{xy(x^2 + y^2)}{12} = \frac{r^4 \sin 2\phi}{24}$$

$$u = w + v$$

Перепишем задачу для  $v$

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r < 1 \\ v \Big|_{r=1} = -w \Big|_{r=1} = -\frac{\sin 2\phi}{24} \end{cases}$$

$$v = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k r^k \cos k\phi + C_k r^k \sin k\phi)$$

$$v \Big|_{r=1} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos k\phi + C_k \sin k\phi) = -\frac{\sin 2\phi}{24}$$

$$A_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_2 = -\frac{1}{24}$$

$$C_k = 0, \quad k \neq 2$$

$$v = -\frac{1}{24} r^2 \sin 2\phi$$

$$u = \frac{r^4 \sin 2\phi}{24} - \frac{r^2 \sin 2\phi}{24} = \frac{r^2 \sin 2\phi}{24} (r^2 - 1) = \frac{xy}{12} (x^2 + y^2 - 1)$$



**Задача 26** (прямоугольник).

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in (0, a) \times (0, b) \\ u|_{\partial\Pi} = f \end{cases}$$

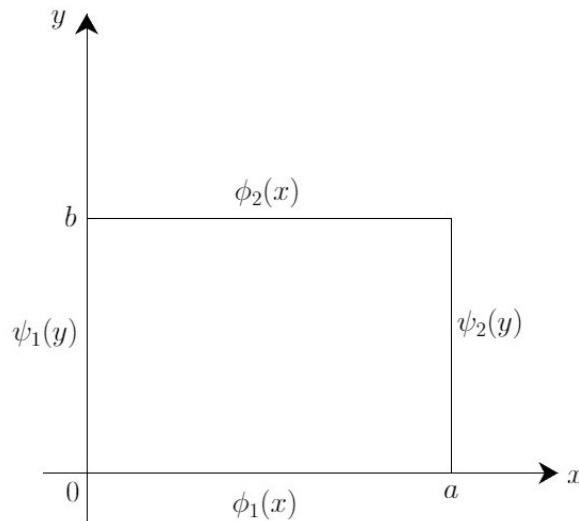


Рис. 162.

Мы можем разбить нашу задачу на две Рис. 163. и Рис. 164. и искать решение в

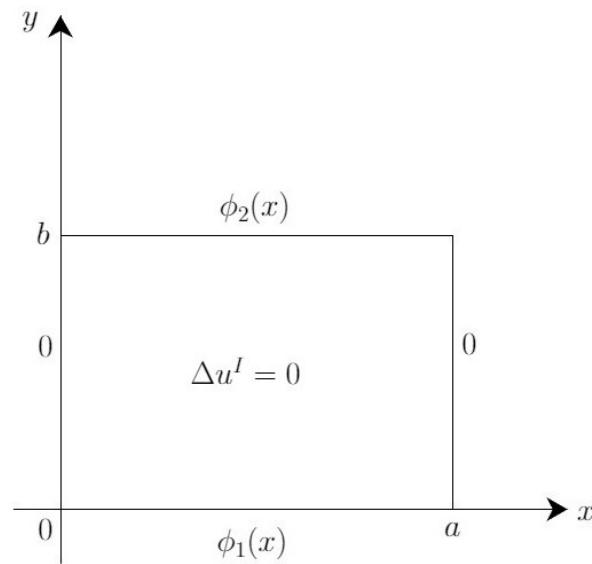


Рис. 163.

виде

$$u = u^I + u^{II}$$

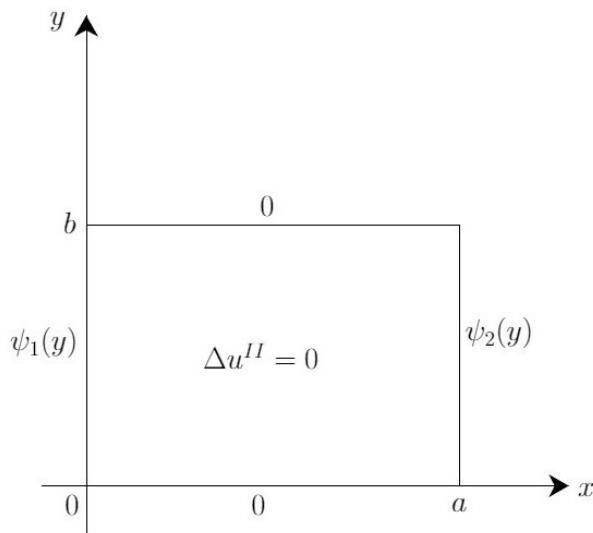


Рис. 164.

Решим задачу I, а для задачи II

$$x \leftrightarrow y, \phi \leftrightarrow \psi, a \leftrightarrow b$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ в } \Pi \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = \phi_1(x) \\ u|_{y=b} = \phi_2(x) \end{cases}$$

$$u = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, X(0) = X(a) = 0 \\ Y'' = -\lambda Y \end{cases}$$

Берем те условия, где нули, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля.

$$X_k = \sin \frac{\pi k x}{a}$$

$$\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2$$

$$\begin{aligned} Y_k'' &= \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 Y_k \\ Y_k &= A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k y}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k y}{a} \\ u = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k Y_k &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k y}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k y}{a} \right) \sin \frac{\pi k x}{a} \\ u \Big|_{y=0} &= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{a} = \phi_1(x) \\ u \Big|_{y=b} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k b}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k b}{a} \right) \sin \frac{\pi k x}{a} = \phi_2(x) \end{aligned}$$



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ