



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЧАСТЬ 1

ГОРИЦКИЙ
АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
VK.COM/TEACHINMSU.



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАТОЧКИНУ СОФИЮ ДМИТРИЕВНУ

Содержание:

Лекция 1 6

1.1 Введение	6
--------------------	---

1.2 Уравнения с частными производными первого порядка	6
---	---

Лекция 2 11

2.1 Квазилинейное УрЧП первого порядка с одной пространственной переменной	11
--	----

2.2 Примеры задач Коши. Уравнение Хопфа	11
---	----

2.3 Утверждение (о постоянстве решения задачи Коши вдоль интегральных кривых(прямых) некоторого ДУ	13
--	----

2.4 Теорема о сведении решения задачи Коши к неявному функциональному уравнению.....	14
--	----

2.5 Теорема о разрешимости неявного функционального уравнения в полосе.....	15
---	----

2.6 Теорема о связи неявного уравнения на полосе с задачей Коши	16
---	----

Лекция 3 17

3.1 Доказательство теоремы о связи неявного уравнения на полосе с задачей Коши	17
--	----

3.2 Примеры применения доказанных теорем. Формирование особенностей.....	17
--	----

3.3 Обобщенные решения $ut + (fu)x = 0$	20
---	----

3.4 Утверждение о вхождении гладкой функции и в класс классических, и в класс обобщенных функций.....	21
---	----

Лекция 4 22

4.1 Введение	22
--------------------	----

4.2 Кусочно-гладкие решения с одной линией разрыва.....	22
---	----

4.3 Разрывные решения уравнения (1)	24
---	----

**4.4 Пример неединственности обобщенного решения задачи Коши в смысле
интегрального тождества 25**

Лекция 5 28

5.1 Условия допустимости разрыва 28

5.2 Метод исчезающей вязкости 29

5.3 Теоремы об энергетических оценках 32

Лекция 6 34

6.1 Доказательства теорем об энергетических оценках 34

**6.2 Приведение линейного УрЧП второго порядка к каноническому виду в точке
..... 36**

Лекция 7 38

**7.1 Классификация в точке (классификация уравнений с постоянными
коэффициентами) 38**

7.2 Классификация в глобальном смысле 39

7.3 Характеристики 39

Лекция 8 42

8.1 Тензор 42

8.2 Приведение к каноническому виду в области 43

8.3 Теорема Ковалевской 44

8.4 Контрпример к теореме Ковалевской 46

Лекция 9 48

9.1 Задача Коши для уравнения струны 48

9.2 Характеристики уравнения струны 49

9.3 Физическая точка зрения на уравнение струны 51

Лекция 10 56

10.1 Введение	56
10.2 Полуограниченная струна.....	57
10.3 Задача Коши для закреплённого конца	59

Лекция 11 61

11.1 Условия согласования.....	61
11.2 Метод чётного (нечётного) продолжения	62
11.3 Ограниченнная струна	64
11.4 Метод Фурье.....	66

Лекция 12 67

12.1 Повторение прошлой лекции. Ряды Фурье. Равенство Парсеваля.	67
12.2 Метод Фурье.....	68
12.3 Задача Штурма-Лиувилля	70

Лекция 13 72

13.1 Задача Штурма-Лиувилля. Её оператор. Собственные вектора. Собственные значения.	72
13.2 Функция Грина.....	74

Лекция 14 76

14.1 Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.	76
---	----

Лекция 1

Уравнения с частными производными первого порядка

1.1 Введение

Дифференциальные уравнения (далее ДУ) часто делятся на две части: обыкновенные ДУ (ОДУ) и ДУ с частными производными (далее УрЧП¹).

ОДУ:

- неизвестная функция: $y(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$;
- общий вид: $\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$ (порядок - k);
- есть понятие общего решения (все возможные решения данного уравнения);
- задача Коши (уравнение + н.у.).

УрЧП:

- неизвестная функция: $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- общий вид: $\Phi(x, u, \nabla u, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots) = 0$;
- есть понятие общего решения (все возможные решения данного уравнения);
- задача Коши (уравнение + н.у.).

1.2 Уравнения с частными производными первого порядка

Общий вид: $F(x, u, p) = 0$ ², $p = \nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$.

1.2.1 Линейное однородное УрЧП первого порядка

Общий вид:

$$v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (1)$$

Общее решение:

Для нахождения решения запишем характеристическую систему:

$$\dot{x} = v(x) \quad (2)$$

¹ УрЧП в данном контексте рассматривается как тождественные уравнения мат.физики

² $|F_p| \neq 0$

Её можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = v_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Данная система ОДУ не линейна. Её решения¹ представимы в виде: $x = x(t)$.

Утв.1: Функция многих переменных u является решением линейного УрЧП (1) тогда и только тогда, когда функция u - первый интеграл² уравнения характеристик (2).

Доказательство: Возьмём какое-то решение системы (2) $x(t)$, следовательно:

$$u(x(t)) \equiv Const$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости тождества, возьмём производную:

$$\frac{du(x(t))}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

Видим, что данное выражение совпадает с (1), следовательно, оно тождественно равно нулю. Утверждение доказано.

Задача Коши для линейного однородного УрЧП первого порядка

Обозначим (1) в виде $L_{\vec{v}}u = 0$.

$$\begin{cases} L_{\vec{v}}u = 0 \\ u|_{\gamma} = u_0(x) \end{cases}$$

¹Далее эти решения называются «характеристики».

²Первый интеграл - функция, которая постоянна на любых решениях.

³Данное выражение - это линейная комбинация, которая называется производной функции u в силу системы и обозначается как $\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial u}{\partial x_k} =: \frac{du}{dt}|_{\text{ВСС}} = \frac{du}{dt}|_{(2)}$. В другой терминологии называется производной функции по направлению векторного поля:

$\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial u}{\partial x_k} =: L_{\vec{v}}u$.

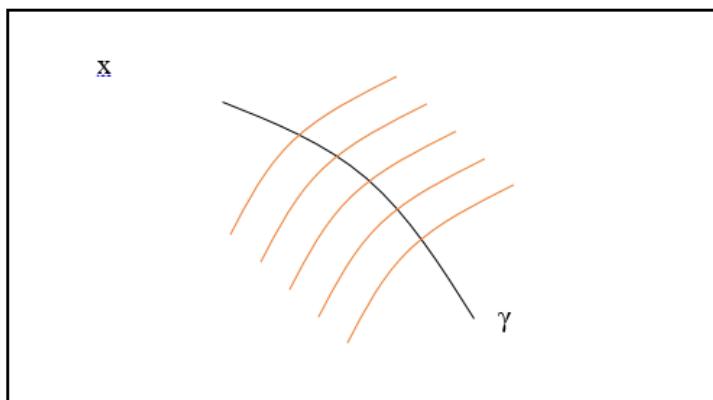


Рис.1.1 – Условный одномерный график задания начальных условий. Красным цветом обозначены характеристики. ($\dim \gamma = n-1$)

И зададим начальные условия: пусть есть какое-то многомерное пространство иксов, в котором выбирается γ -гиперповерхность; на гиперповерхности задаём функцию. Получаем второе уравнение в системе.

Теорема: В окрестности нехарактеристической точки существует и притом единственное решение задачи Коши.

Все доказательство проводится по рисунку 1.1. Комментарий к доказательству: есть поверхность γ , и есть характеристики. Предполагается, что теорема о существовании и единственности для системы (2) выполняется: $v \in C^1$, что означает: через любую точку γ проходит ровно одна характеристика.

Особенности теоремы:

1. Она локальна;
2. Окрестность нехарактеристической точки.

Определение: Точка $x_0 \in \gamma$ называется характеристической точкой, если векторное поле в этой точке $\vec{v}(x)$ касается γ .

1.2.2 Линейное неоднородное УрЧП

Вид уравнения: $\frac{du(x(t))}{dt} = L_{\vec{v}}u = f(x).$

Утверждение 1 для данного типа уравнений неверно. Характеристики как и у однородного случая. Вдоль характеристики функция u меняется со скоростью $f(x)$.

$\dot{x} = v(x)$ – характеристическая система.

$\dot{u} = f(x)$ – дополнение к системе.

1.2.3 Квазилинейное неоднородное УрЧП первого порядка

Общий вид:

$F(x, u, p)$ – линейно по p .

$$v_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u) \quad (3)$$

Характеристическая система находится по аналогии:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, u) \\ \dot{u} = f(x, u) \end{cases} \quad (4)$$

Решения этой системы (её характеристики) :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Утверждение 2: График решения уравнения (3) состоит из характеристик (т.е. траекторий уравнения (4)).

Доказательство: Пусть у нас есть решение уравнения (3) - какая-то функция $u(x)$, удовлетворяющая этому уравнению и у нее есть график (рис.1.2).

Возьмём какую-то точку на графике и рассмотрим нормаль \vec{v} к этой точке.

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, -1 \right)^T$$

Из уравнения (3) следует, что характеристическое векторное поле $(\vec{v}, f) \perp \vec{v}$. (При выполнении теоремы о существовании и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений). График функции u – решение нашего уравнения и характеристики касаются характеристического векторного поля. Теорема доказана.

¹ Если есть поверхность уровня $\Phi(x)=C$, то нормаль к этой поверхности ищется как $\nabla\Phi$. Для нашей же поверхности получается: $\Phi(x, u)=u(x)-u=0$.

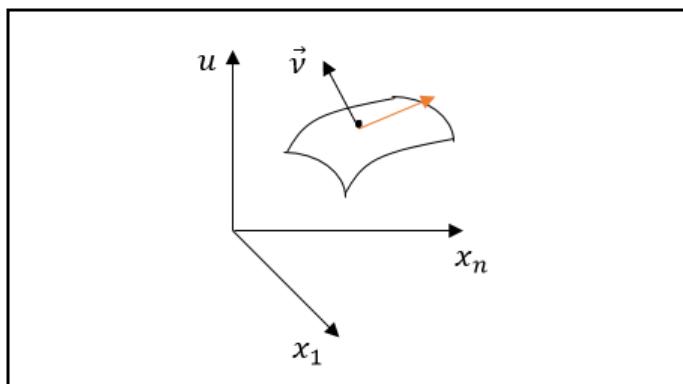


Рис. 1.2 – График функции $u = u(x)$. Красным цветом отмечен вектор характеристики.

1.2.4 Нелинейное УрЧП первого порядка

Общий вид: $F(x, u, p) = 0$.

Характеристики: $\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

Один график решения нелинейного уравнения состоит из характеристик. А именно график отображения:

$$x \rightarrow u(x)$$

$$x \rightarrow (u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x))$$

Пример:

$$x \rightarrow \sin x$$

$$x \rightarrow (\sin x, \cos x)$$

В данном случае $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u(x) = \sin x$.

График отображения: спираль с единичной окружностью.

Лекция 2

Классические решения

2.1 Квазилинейное УрЧП первого порядка с одной пространственной переменной

Общий вид уравнения:

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \quad (1)$$

где $u(t,x)$, t -время, x -координата, $x \in \mathbb{R}^1$. Другой способ записи (1): $u_t + (f(u))_x = 0$, где $f(u)$ -функция потока. Задача Коши для этого уравнения:

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

где $f \in C^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $u_0(x)$ ограничена.

Уравнение характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{x} &= f'(u) \\ \dot{u} &= 0 \end{aligned}$$

Комментарий: - дифференцирование производится по времени, но, так как у нас есть переменная времени в уравнениях, то предположим, что в данной системе : $\dot{\cdot} = \frac{d}{ds}$, s -новая переменная. Из первого уравнения системы следует, что t и s меняются с одинаковой скоростью. Учитывая начальные условия задачи Коши, получаем: $t = s$. Первое уравнение системы перестаёт нас интересовать.

Из уравнений характеристик следует, что характеристики – это прямые вида $x = f'(u) + const$ в пространстве $\mathbb{R}^3 \rightarrow (t, x, u)$.

2.2 Примеры задач Коши. Уравнение Хопфа

Пример 1. Линейное уравнение

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, a = const, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

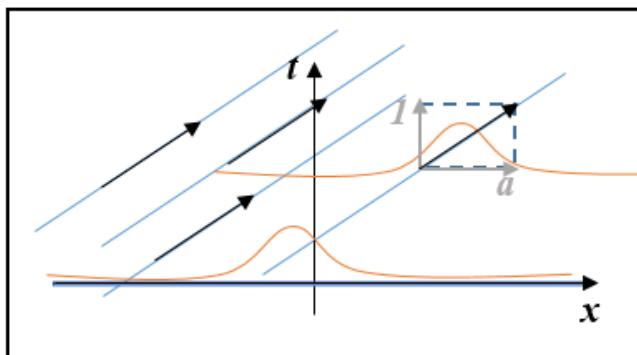


Рис.2.1 «Составление векторного поля». Здесь голубым цветом проведены характеристики, синим - $u_0(x)$ ($\gamma = \{t = 0\}$), оранжевым – заданная функция.

Составим характеристическое векторное поле $(a, 1)$ (рис.2.1). Характеристическое векторное поле одинаковое во всех точках. Движение, когда, проходя через каждую точку, имеем один и тот же вектор, называется движением по прямой. В данном случае по характеристикам: $x - at = C$. На характеристиках функция u постоянна. Предположим, что при $t=0$ задана какая-то финитная функция (рис.2.1). Получается, что функция должна двигаться вдоль характеристик. Решение задачи в явном виде:

$$u = u_0(x - at).$$

Решения такого вида - решения в виде бегущей волны.

Проверка решения:

$$u_t = -au'_0(x - at)$$

$$u_x = u'_0(x - at)$$

Домножая нижнее уравнение на a , складывая полученное уравнение с верхним, получаем ноль, что удовлетворяет условию. Проверка начальных условий: $u|_{t=0} = u_0(x)$

Что также удовлетворяет условию. Полученный ответ верен.

Комментарий «Бегущая волна»:

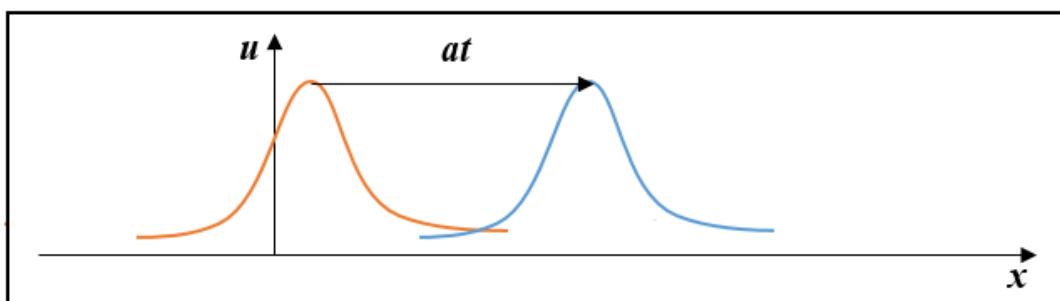


Рис.2.2 «Волна, бегущая направо со скоростью a » оранжевым цветом выделена функция $u_0(x)$, синим - $u_0(x - at)$.

Пример 2. Уравнение Хопфа

Уравнение Хопфа описывает одномерное поле скоростей из невзаимодействующих частиц. Рассматривается одномерная сплошная среда¹. Для описания процесса движения частиц в этой среде берется функция скорости $u(t, x)$ частицы, которая в момент времени t оказалась в точке x . Выведем уравнение, которому отвечает $u(t, x)$.

Фиксируем какую-то частицу, которая совершает какое-то движение по траектории $x = \varphi(t)$ со скоростью $v = \dot{\varphi}(t) = u(t, \varphi(t))$ и ускорением $0^2 = a = \ddot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}u(t, \varphi(t)) = u_t + u_x\dot{\varphi} = u_t + u_xv$. Получаем уравнение Хопфа³:

$$u_t + uu_x = 0.$$

Комментарий: Механика сплошной среды.

Многомерный случай:

$$\begin{aligned} &u_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ &u_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ &u_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

В данном случае траектория-это вектор. Получим ускорение:

$$\frac{d}{dt}u(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_k} \dot{x}_k$$

Что то же самое что: $u_t + (u, \nabla)u$.

2.3 Утверждение (о постоянстве решения задачи Коши вдоль интегральных кривых(прямых) некоторого ДУ)

Утверждение: Пусть $u(t, x)$ - решение уравнения (1). Тогда u постоянна вдоль интегральных кривых дифференциального уравнения $\dot{x} = f'(u(t, x))$.

Доказательство: Рассмотрим $u(t, x(t))$ на интегральной кривой :

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = u_t + u_x\dot{x} = u_t + f'(u)u_x = 0.$$

Равенство нулю объясняется тем, что u – решение уравнения (1).

Замечание: «интегральные кривые»-прямые.

¹ В каждой точке среды находятся частица, которая куда-то движется.

² Ускорение равно нулю в силу II закона Ньютона.

³ Уравнение Хопфа- уравнение вида (1), где $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

2.4 Теорема о сведении решения задачи Коши к неявному функциональному уравнению

Теорема: Пусть $u(t,x)$ -решение задачи Коши (1), (2). Тогда

$$u = u_0(x - f'(u)t) \quad (3)$$

Доказательство: Вдоль интегральных кривых $\dot{x} = f'(u)$ функция $u=const.$ \exists значение u в точке (t_0, x_0) . Предположим, есть решение задачи Коши и его можно посчитать в этой точке.

Построим прямую, соответствующую $\dot{x} = f'(u)$ (рис.2.3).

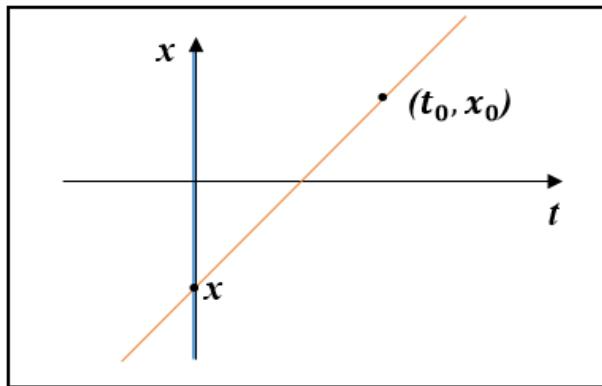


Рис.2.3 График к Теореме 1. Оранжевым цветом выделена интегральная кривая (где $u=const.$), синим- $u_0(x)$.

Предположим, есть решения задачи Коши и можно посчитать в этой точке. Надо построить прямую, соответствующую $\dot{x} = f'(u)$. Тангенс угла наклона в этих осях равен $f'(u(t_0, x_0))$ (рис.2.3). Уравнение этой прямой:

$$x - x_0 = f'(u(t_0, x_0))(t - t_0).$$

u постоянна на всей прямой, в том числе и в точке x пересечения прямой и $u_0(x)$, т.е. при $t=0$.

$$x = x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0$$

$$u(t_0, x_0) = u_0(x) = u_0(x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0)$$

Так как мы рассматривали произвольную точку, это справедливо для любой точки:

$$u(t, x) = u_0(x) = u_0(x - f'(u(t, x))t)$$

Теорема доказана.

2.5 Теорема о разрешимости неявного функционального уравнения в полосе

Теорема 2: Пусть $|u'_0(x)| \leq K$ при $x \in \mathbb{R}$, $|f''(u)| \leq L$ на множестве значений функции $u_0(x)$. Тогда уравнение (3) разрешено относительно u в полосе $0 < t < \frac{1}{KL}$.

Доказательство: Есть неявно заданная функция u и точка, лежащая на заданной поверхности, в которой производная Φ по u не равна нулю:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, u) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &\neq 0\end{aligned}$$

По теореме о неявной функции, в окрестности этой точки уравнение можно разрешить в неявном виде:

$$u = u(t, x)$$

$$\Phi := u - u_0(x - f'(u)t) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 1 + u'_0(x - f'(u)t) \times f''(u)t > 0$$

$$|u'_0(x - f'(u)t)| \geq K$$

$$|f''(u)t| \geq L$$

Теорема доказана.

Пример:

$$\begin{cases} f''(u) > 0 \\ u'_0 > 0 \end{cases}$$

Уравнение Хопфа: $f''(u)$, $u_t + uu_x = 0$. $u_0(x)$ - монотонно возрастающая функция.

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u|_{t=0} = \arctan x \end{cases}$$

\exists решение в полуплоскости $t > 0$.

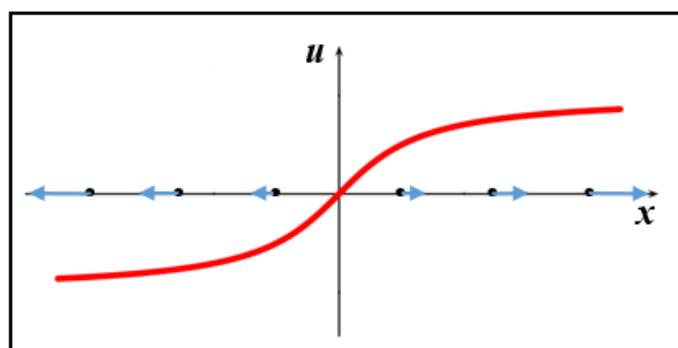


Рис.2.4 Поле скоростей.

2.6 Теорема о связи неявного уравнения на полосе с задачей Коши

Теорема 3. Пусть $u(t, x)$ определена в полосе $0 < t < \frac{1}{KL}$ и удовлетворяет (3). Тогда u – решение (1), (2).

Доказательство: $u = u_0(x - f'(u)t)$

$$u(t, x) = u_0(x - f'(u(t, x))t)$$

$$u_t = u'_0(x - f'(u(t, x))t) \times (-f'(u(t, x)) - tf''(u(t, x))u_t)$$

$$u_x = u'_0(x - f'(u(t, x))t) \times (1 - f''(u(t, x))u_x t)$$

После несложных математических преобразований получаем, что начальные условия задачи Коши выполнены.

Проверка (1): после подстановки полученных уравнений в выражение получаем, что выражение справедливо.

Теорема доказана.

Лекция 3

Обобщенные решения

3.1 Доказательство теоремы о связи неявного уравнения на полосе с задачей Коши

Теорема. Пусть $u(t, x)$ определена в полосе $0 < t < \frac{1}{KL}$ и удовлетворяет (3). Тогда u – решение (1), (2).

Доказательство: Продифференцируем равенство $u(t, x) - u_0(x - f'(u(t, x))t) = 0$ по t :

$$u_t + u'_0(x - f'(u(t, x))t) \times (f''(u(t, x))u_t t + f'(u(t, x))) = 0$$

$$u_x + u'_0(x - f'(u(t, x))t) \times (-1 + f''(u(t, x))u_x t) = 0$$

Второе соотношение домножим на $f'(u)$ и сложим с первым:

$$(u_t + f'(u)u_x) \times (1 + u'_0 f''(u)t) = 0$$

Второй множитель не обращается в ноль, т.к. $|u'_0| \leq K, |f''(u)| \leq L, |t| < \frac{1}{KL}, |u'_0 f''(u)t| \leq 1, (1 + u'_0 f''(u)t) > 0$.

Теорема доказана.

3.2 Примеры применения доказанных теорем. Формирование особенностей

Пример 1:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, t > 0; \\ u|_{t=0} = \pm \operatorname{arctg} x. \end{cases}$$

Случай 1:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u|_{t=0} = \operatorname{arctg} x \end{cases}$$

В данном случае $f''(u) = 1, u'_0 > 0$. Следовательно, $(1 + u'_0 f''(u)t) > 0$.

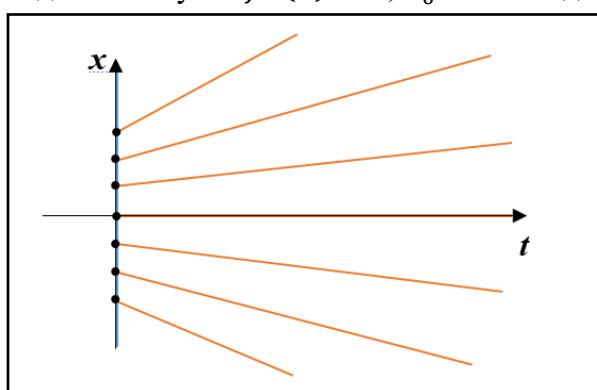


Рис.3.1 График решений. Синим цветом выделены начальные условия. Из каждой точки $\operatorname{arctg} x$ выпускаем прямую $\dot{u} = 0, \dot{x} = f'(u) = u$ (выделены оранжевым цветом).

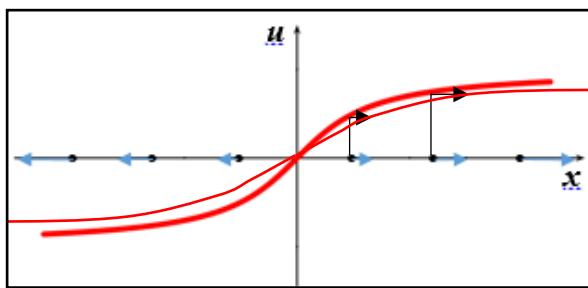


Рис.3.1 «Сечение графика функции $u(t,x)$ различными плоскостями $t=const$ ». График в этих осях будет растягиваться вдоль оси x .

Случай 2:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u|_{t=0} = -\operatorname{arctg} x \end{cases}$$

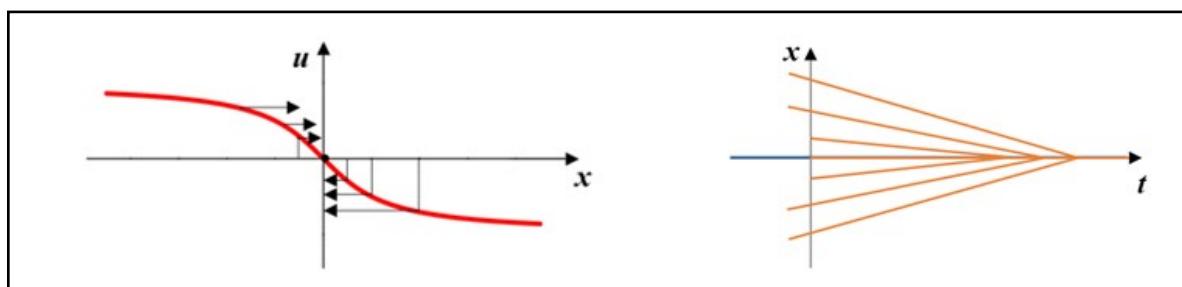


Рис.3.3

В данном случае $f''(u) = 1 = L$, $|u'_0| \leq 1 = K$. Следовательно, решение существует в полосе $0 < t < 1$. Т.е. до момента времени $t=1$ характеристики не пересекутся (на правом графике рис.3.3 момент времени 1 расположен до пересечения любых двух характеристик(оранжевых прямых)).

Пример 2:

Формирование особенностей.

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} -2, x \geq 3 \\ \psi_1(x), 1 < x < 3 \\ -x, -1 \leq x \leq 1 \\ \psi_2(x), -3 < x < -1 \\ 2, x \leq -3 \end{cases} \end{cases}$$

Где $u_0(x)$ -монотонно убывающая, $|\psi'_{1,2}(x)| < 1$, $u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Это решение при $t=0$ (рис.3.4). $u = \psi_{1,2}(x - ut)$.

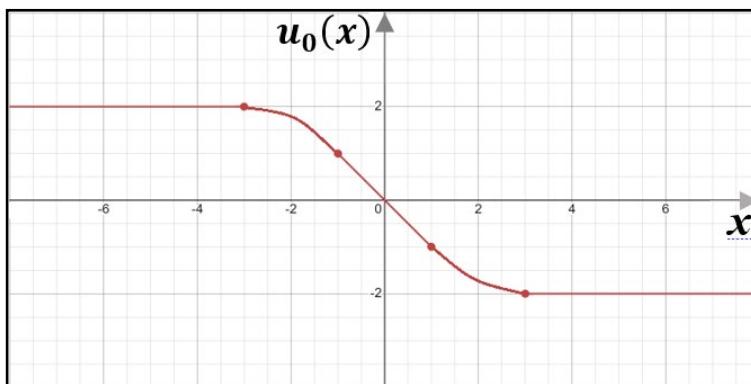


Рис.3.4 График функции $u_0(x)$.

Рассмотрим решение при $t=1$.(рис.3.5, рис.3.6)

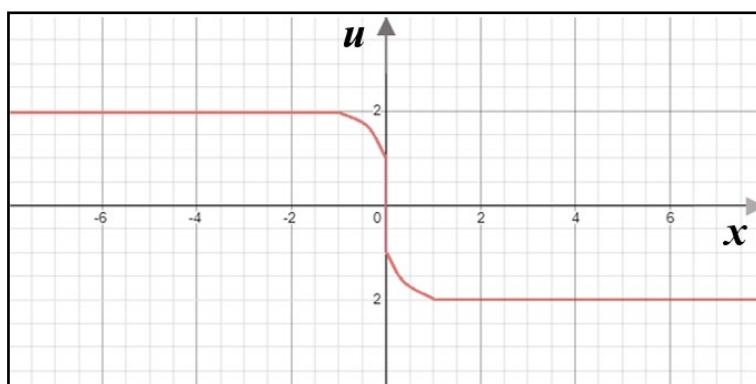


Рис.3.5 График функции $u(1,x)$.

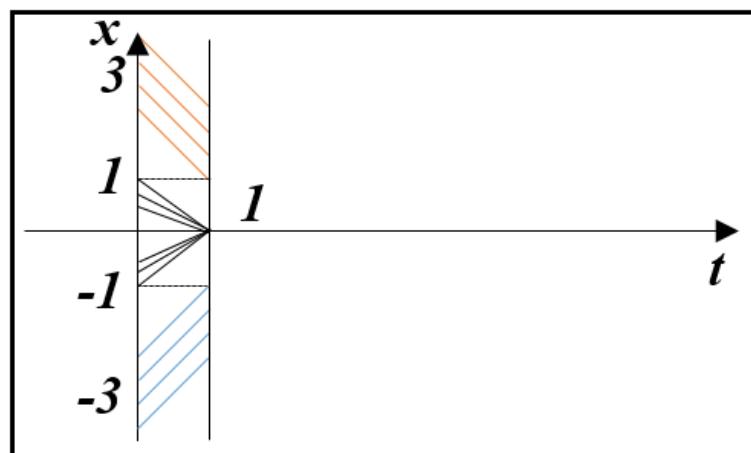


Рис.3.6 Синим цветом выделено семейство параллельных прямых $u=2$, оранжевым- семейство параллельных прямых $u=-2$.

Комментарий:

Вспомним, что $\dot{x} = u$ (характеристики). Чтобы понять, что происходит на промежутках $(-3,-1)$ и $(1,3)$, надо разрешить уравнение $u = \psi_{1,2}(x - ut)$.

Разберемся с характеристиками на $(-1, 1)$. Характеристика выходит $(0, y)$, $-1 \leq y \leq 1$. $u_0(y) = -y$, $f'(u_0(y)) = -y$, $x = -yt + y = y(1 - t)$ -набор прямых, которые при $t=1$ попадают в ноль (рис.3.6). Если $y \geq 3$: $u_0(y) = -2$, характеристика: $x = y - 2t$. $f'(u) = -2$. Разрешим уравнение $u = -(x - ut)$. $u = \frac{-x}{1-t}$. В момент времени $t=1$ в точке $x=0$ возник разрыв первого рода (рис.3.5). $\lim_{\substack{x \rightarrow \\ \mp 0}} u(1, x) = \pm 1$.

3.3 Обобщенные решения $u_t + (f(u))_x = 0$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} v \nu_k dS$$

где Ω - ограниченная область с кусочно-гладкой границей (рис.3.7), v -функция многих переменных: $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Почти в каждой точке существует внешний вектор нормали $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Também встречается обозначение: $\nu_k = \cos(\vec{v}, e_k)$.

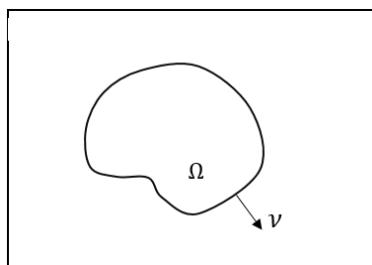


Рис.3.7 Ограниченнная область с кусочно-гладкой границей Ω

Формула интегрирования по частям. В формуле Остроградского-Гаусса делаем замену: $v = u\varphi$. $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \varphi dx = \int_{\partial\Omega} u \varphi \nu_k dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$$

Применим данное уравнение к уравнению:

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (1)$$

Утверждение 1: Если $u(t, x)$ -классическое решение (1) в области Ω^1 , то $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2$ выполнено $\int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = 0$.

¹ Ω - двумерная область

² $C_0^\infty(\Omega)$ -бесконечно дифференцируемые финитные функции, равные нулю в окрестности $\partial\Omega$. (не являются аналитическими)

Доказательство:

$$\int_{\Omega} \left(u_t + (f(u))_x \right) \varphi dt dx = 0$$
$$\int_{\Omega} \left(u_t + (f(u))_x \right) \varphi dt dx = - \int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx + \int_{\partial\Omega} \dots \varphi dS$$

Последние слагаемое равно нулю, так как φ на границе равна нулю. Утверждение доказано.

Определение: Интегрируемая функция двух переменных $u(t,x)$ называется обобщенным решением уравнения (1) в области Ω , если $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено $\int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx = 0$.

3.4 Утверждение о вхождении гладкой функции и в класс классических, и в класс обобщенных функций

Утверждение 2: Пусть $u \in C^1(\Omega)$. Тогда u -классическое решение уравнения (1) \Leftrightarrow u -обобщенное решение.

Доказательство: \Rightarrow (утв.1)

\Leftarrow : Исходим из того, что $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx = 0$.

$$\int_{\partial\Omega} \dots \varphi dS - \int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dt dx = 0$$

Так как функции в выражении гладкие:

$$\int_{\Omega} \left(u_t + (f(u))_x \right) \varphi dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Предположим, что $\exists (t_0, x_0) \in \Omega$ $(u_t + (f(u))_x)(t_0, x_0) > 0$. Следовательно, $\exists U$ $(u_t + (f(u))_x) > 0$ в U . Выберем такую φ : $\varphi = 0$ вне U , $\varphi \geq 0$ в U . $\varphi(t_0, x_0) > 0$. Получаем противоречие.

Утверждение доказано.

Лекция 4

Условие Ранкина-Гюгонио

4.1 Введение

Продолжаем изучать уравнение:

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (1)$$

Замечание: Допустим, $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Тогда верно: u -классическое решение в $\Omega_2 \Rightarrow u$ -классическое решение в Ω_1 . Это утверждение верно и для обобщенного решения. Если записать это более аккуратно: если есть соотношение $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $C_0^\infty(\Omega_1) \subset C_0^\infty(\Omega_2)$ (рис.4.1).

Берём функцию из $C_0^\infty(\Omega_1)$. \bar{G} -компактное множество, которое вместе со своим замыканием лежит в открытом множестве Ω_1 . Следовательно, вне этого множества функция равна 0 (т.к. компактное внутри открытого лежит всегда, отделяясь от границы). Доопределяем функцию нулем за границами области Ω_1 (рис.4.1).

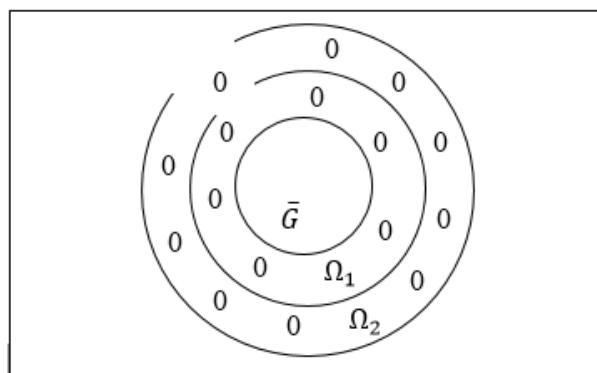


Рис.4.1 Иллюстрация к замечанию

Функция финитная внутри Ω_2 , бесконечно дифференцируемость остается.

4.2 Кусочно-гладкие решения с одной линией разрыва

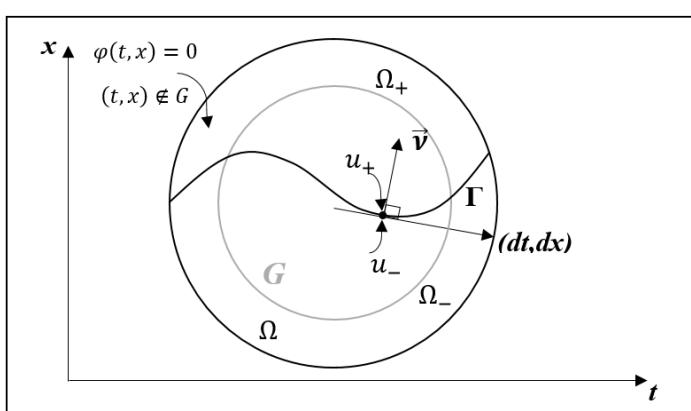


Рис.4.2

Комментарий к рисунку 4.2: Есть область Ω , которая делится гладкой линией Γ на две подобласти: Ω_- , Ω_+ .

$$\Omega = \Omega_- \cup \Gamma \cup \Omega_+$$

$$\Gamma = \{(t, x(t)) | x(t) \in C^1\}$$

$$(t_0, x_0) \in \Gamma: u_{\mp}(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0,x_0) \\ (t,x) \in \Omega_{\mp}}} u(t, x).$$

$\vec{v} = (v_t, v_x)$ -вектор нормали.

Теорема: Пусть $\Omega = \Omega_- \cup \Gamma \cup \Omega_+$, $u \in C^1(\overline{\Omega_-}) \cap C^1(\overline{\Omega_+})$. Тогда $u(t, x)$ -обобщенное решение уравнения (1) в области $\Omega \Leftrightarrow$ выполнены условия:

1) u -классическое решение в Ω_{\mp} ;

2) На линии разрыва $x = x(t)$ выполнено условие Ранкина-Гюгонио:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{[f(u)]}{[u]}$$

$\frac{dx}{dt}$ -скорость распространения ударной волны.

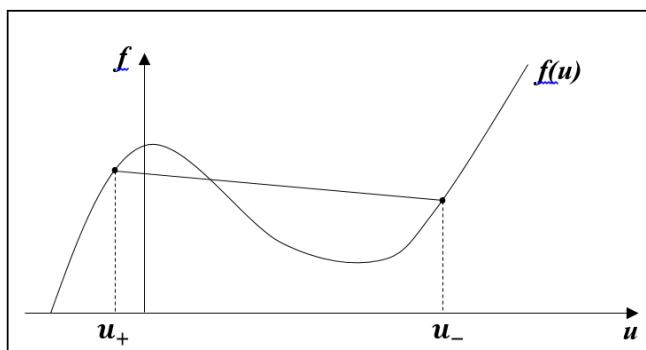


Рис.4.3 График функции $f(u)$. u , $f(u)$ -оси, параллельные t, x . Хорда, соединяющая точки $f(u_+)$ и $f(u_-)$ на графике параллельна касательной к точке, в которой пределы u_+ и u_- (рис. 4.2).

Определение: Ударная волна-разрывное решение.(рис.4.2-линия Γ)

Комментарий:

Альтернативная формулировка условия Ранкина-Гюгонио:

$$[u]v_t + [f(u)]v_x = 0,$$

что допускает ситуацию: $[u] = 0$.

Доказательство теоремы: \Rightarrow (если u -обобщенное решение, то u -классическое решение, и выполнено условие Ранкина-Гюгонио)

Пункт 1) теоремы следует из замечания (см. Лекция 4, Введение) и утверждения из пункта 3.4 лекции 3.

Докажем пункт 2):

$$0 = \int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = \int_{\Omega_- \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx + \int_{\Omega_+ \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = - \int_{\Omega_- \cap G} (u_t \varphi + f(u)_x \varphi) dt dx - \int_{\Omega_+ \cap G} (u_t + f(u)_x) \varphi dt dx + \int_{\partial G \cap \Omega_-} \overset{0}{...} dS + \int_{\partial G \cap \Omega_+} \overset{0}{...} dS + \int_{\Gamma \cap G} (u_- \varphi v_t + f(u_-) \varphi v_x) dS - \int_{\Gamma \cap G} (u_+ \varphi v_t + f(u_+) \varphi v_x) dS = - \int_{\Omega_-} (u_t + (f(u))_x) \varphi dt dx - \int_{\Omega_+} (u_t + (f(u))_x) \varphi dt dx - \int_{\Gamma} ([u] v_t + [f(u)] v_x) \varphi dS.$$

$u_t + (f(u))_x = 0$, т.к. u -классическое решение. Следовательно, $[u]v_t + [f(u)]v_x \equiv 0$, условие Ранклина-Гюгонио выполняется. (dS -интеграл по границе)

Комментарий: $\int_{\Gamma} h\varphi dS = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, где h -непрерывная функция. Следует ли из этого, что $h \equiv 0$? Пусть она в какой-то точке строго больше нуля. Следовательно, есть окрестность, в которой она больше нуля. Возьмём функцию $\varphi \geq 0$ в этой окрестности, а вне окрестности она-тождественный ноль. Получаем противоречие.

Доказательство в обратную сторону производится, исходя из $-\int_{\Omega_-} (u_t + (f(u))_x) \varphi dt dx - \int_{\Omega_+} (u_t + (f(u))_x) \varphi dt dx - \int_{\Gamma} ([u]v_t + [f(u)]v_x) \varphi dS = 0$, приходим к утверждению теоремы.

4.3 Разрывные решения уравнения (1)

Пример:

$u \equiv C$ -классическое решение уравнения (1) (рис.4.4, рис.4.5).

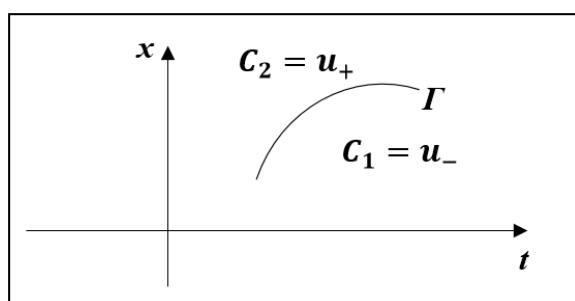


Рис.4.4. Решение уравнения (1) (не совсем верно)

Из условия Ранкина-Гюгонио скачок функции f , скачок функции u -константы, из чего следует, что $\frac{dx}{dt} = \text{const}$ (рис.4.5).

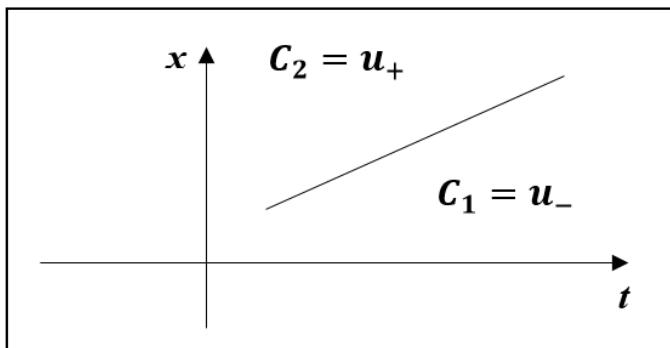


Рис.4.5 Решение уравнения (1).

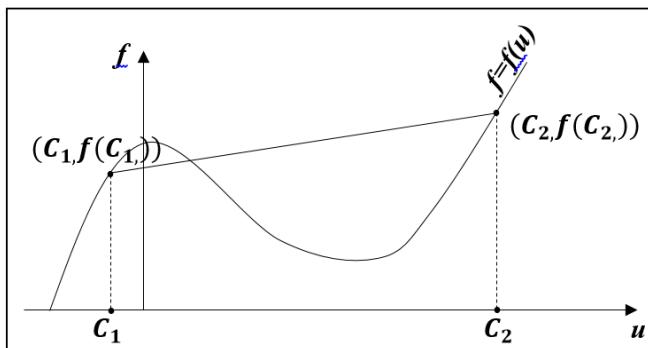


Рис.4.6 График функции потока. u , $f(u)$ -оси, параллельные t, x (рис.4.5). Тангенс угла наклона прямой $f(C_1)f(C_2)$ равен тангенсу угла наклона линии разрыва(рис.4.5)

Т.к. пределы с одной и другой стороны во всех точках равны, то $\frac{dx}{dt}$ одно и то же в разных точках.

4.4 Пример неединственности обобщенного решения задачи Коши в смысле интегрального тождества

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \quad f(u) = \frac{u^2}{2} \\ u|_{t=0} \equiv 0 \end{cases}$$

Классическое решение $u \equiv 0$.

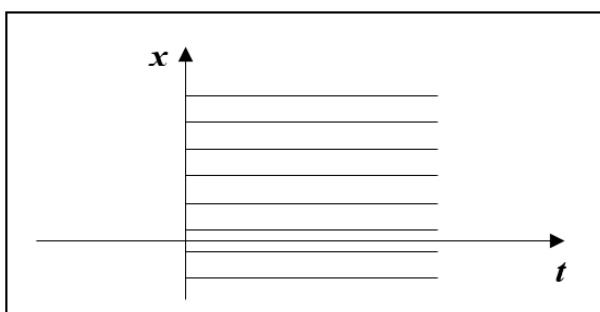


Рис.4.7 График характеристик

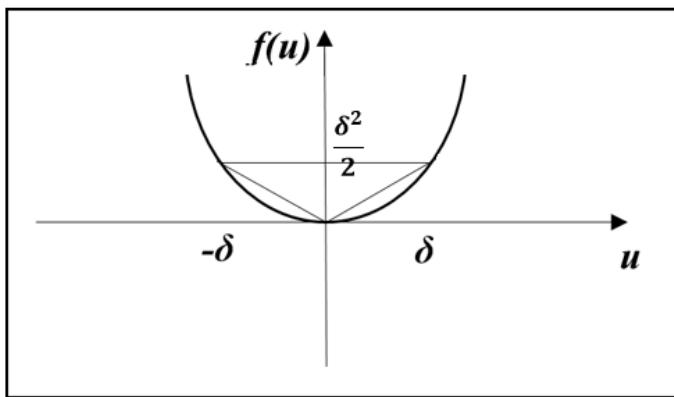


Рис.4.8 График функции $f(u)$

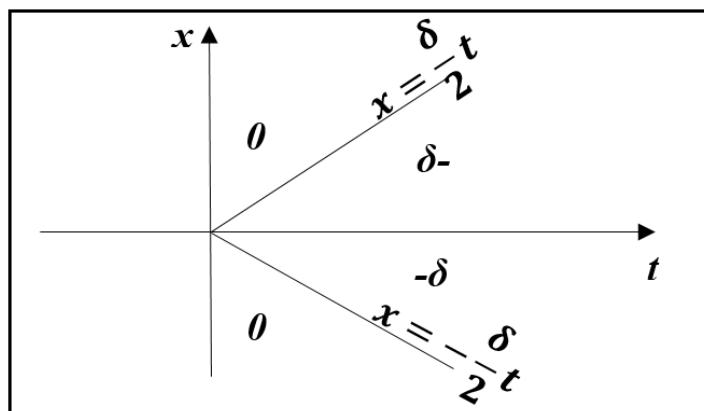


Рис.4.9 Решение задачи

Решение:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\delta}{2}t \\ -\delta, & -\frac{\delta}{2}t < x < 0 \\ \delta, & 0 < x < \frac{\delta}{2}t \\ 0, & x > \frac{\delta}{2}t \end{cases}$$

Проверка:

\forall const-классическое решение \forall уравнения вида (1) с $\forall f(u)$.

На линии разрыва проверяем условие Ранкина-Гюгонио:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta}{2} = \frac{\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{2}}{0 - \delta}$$

Но здесь есть противоречия, которые будут разобраны в следующих лекциях. Некие разрывы здесь неверны.(рис.4.10)

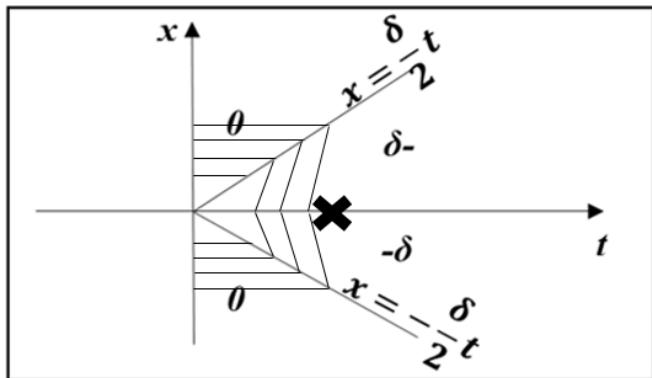


Рис.4.10 Характеристики. Неверные разрывы

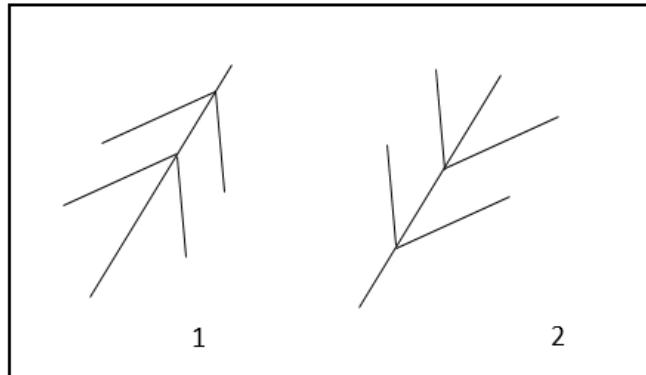


Рис.4.11 Виды разрывов. 1-разрешенный разрыв, 2-запрещенный разрыв

Лекция 5

Обобщённое энтропийное решение

5.1 Условия допустимости разрыва

Определение: Кусочно-гладкая функция $u(t,x)$ называется обобщенным энтропийным решением, если выполнены условия:

1) она является классическим решением в окрестности точек гладкости;

На линиях разрыва:

2) $\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+)-f(u_-)}{u_+-u_-};$

3) условие допустимости разрыва.

Рассмотрим уравнение Хопфа с начальными условиями (рис.5.1):

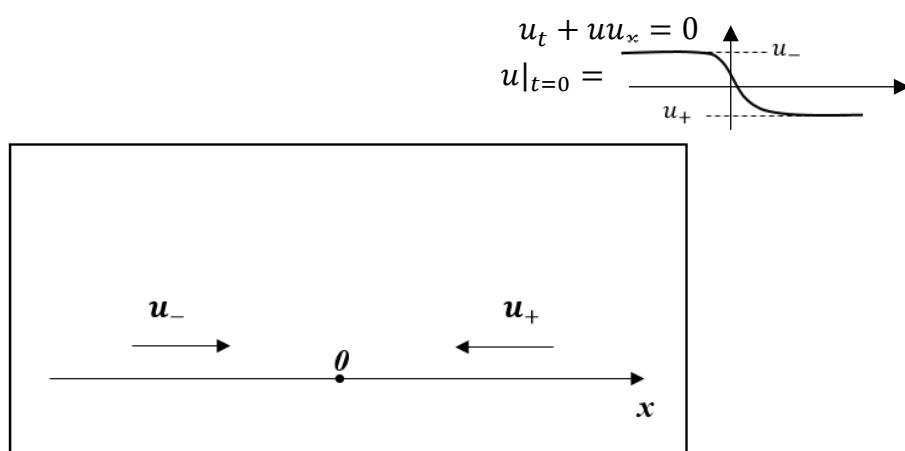


Рис.5.1 Движение двух точек в одномерной среде

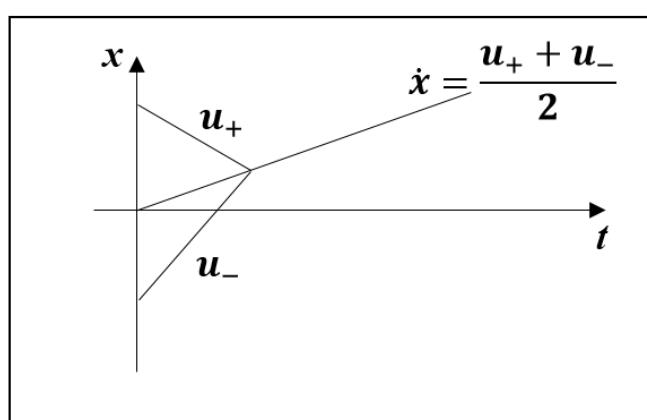


Рис.5.2 Столкновение двух частиц (закон сохранения импульса). Происходит выделение энергии

Закон сохранения энергии:

$$\frac{u_+^2}{2} + \frac{u_-^2}{2} - 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{u_+ + u_-}{2} \right)^2 = \left(\frac{u_+ - u_-}{2} \right)^2 > 0$$

Комментарий: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

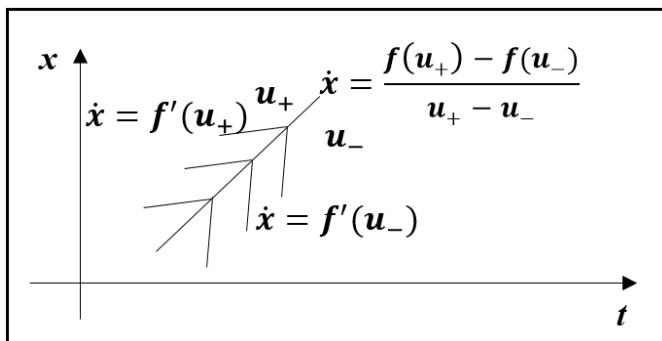


Рис.5.3 Разрешенный случай

$$f'(u_-) > \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} > f'(u_+)$$

Для уравнения Хопфа функция $f(u)$ выпукла вниз: $\curvearrowleft \Leftrightarrow f'(u) \nearrow, u_- > u_+$.

Если функция выпукла вверх: $\curvearrowright \Leftrightarrow f'(u) \searrow, u_- < \xi < u_+$.

Получаем формулировку допустимого разрыва:

Если функция выпукла вниз, то условие допустимости разрыва: $u_- > u_+$. Если она выпукла вверх, то условие допустимости разрыва: $u_- < u_+$.

5.2 Метод исчезающей вязкости

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}, \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow +0$$

εu_{xx} -диссипация, вязкость, трение.

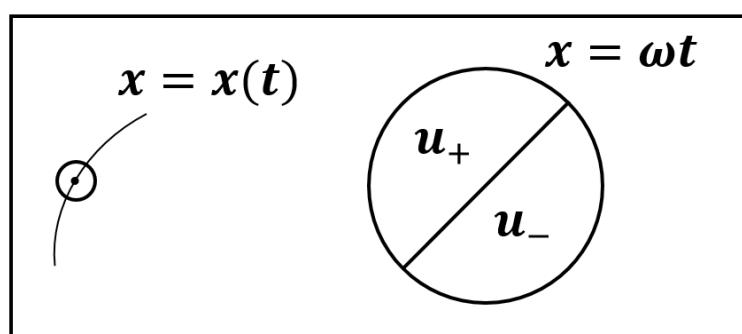


Рис.5.4 Слева: Линия разрыва $x=x(t)$. Справа: увеличенная окрестность с линией разрыва

Будем искать решение уравнения в виде (рис.5.4):

$$u = v \left(\frac{x - \omega t}{\varepsilon} \right) = v(\xi)$$

$$v \left(\frac{x - \omega t}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} \begin{cases} v(+\infty) = u_+, & x > \omega t \\ v(-\infty) = u_-, & x < \omega t \end{cases}$$

Подставляем функцию u в начальное уравнение:

$$-\frac{\omega}{\varepsilon} \times v' + f'(v) \times \frac{1}{\varepsilon} v' = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon^2} v''$$

Проинтегрируем уравнение:

$$-\omega v + f(v) + C = v'$$

Получаем уравнение (автономное уравнение на прямой) вида: $v' = F(v)$.

Комментарий: Обыкновенные дифференциальные уравнения на функции одного переменного $v(\xi)$. $v' = F(v)$, $v \in \mathbb{R}^1$.

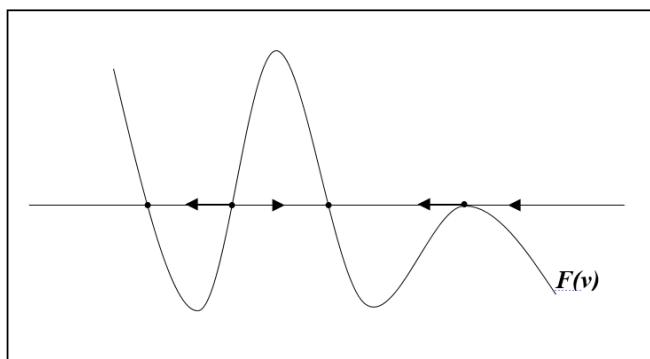


Рис.5.5 График функции $F(v)$

При $F(v_0) = 0$, $v \equiv v_0$ -решение.

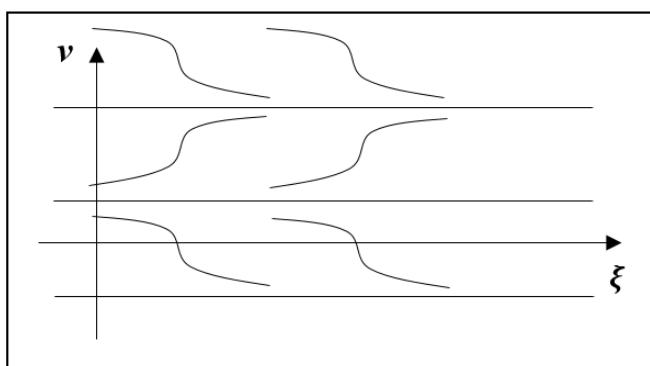


Рис.5.6 Интегральные кривые. Графики функций $v(\xi)$. Прямыми линиями выделены положения равновесия

Продолжаем работать с уравнением $v' = -\omega v + f(v) + C$. Когда у такого уравнения есть решения: $v(-\infty) = u_-$; $v(+\infty) = u_+$? Должно быть выполнено:

$$1) F(u_{\pm}) = 0, -\omega u_- + f(u_-) + C = 0, -\omega u_+ + f(u_+) + C = 0;$$

2) Если $u_- < u_+$, то $F(v) > 0$ на (u_-, u_+) . Если $u_- > u_+$, то $F(v) < 0$ на (u_+, u_-) .

Вычтем уравнение $-\omega u_+ + f(u_+) + C = 0$ из уравнения $-\omega u_- + f(u_-) + C = 0$, получаем $-\omega(u_- - u_+) + f(u_-) - f(u_+) = 0$. $\omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$ - условие Ранкина-Гюгонио.

Рассмотрим ситуацию $u_- < u_+$. $F(v) = -\omega v + f(v) + C = -\omega v + f(v) + \omega u_- - f(u_-) > 0$. Перепришем это условие в виде $f(v) > f(u_-) + \omega(v - u_-)$, $v \in (u_-, u_+)$.

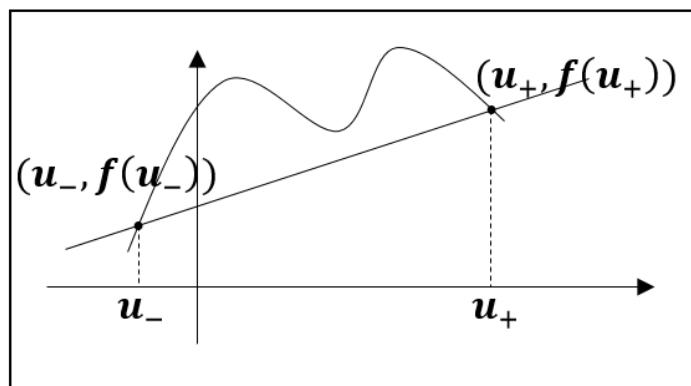


Рис.5.7 График функции $f(v)$

Переформулируем условие допустимости разрыва:

Разрыв в ситуации $u_- < u_+$ возможен, если график функции $f(u)$ лежит не ниже хорды, соединяющей точки $(u_-, f(u_-))$ и $(u_+, f(u_+))$. Что совпадает с условием для выпуклых вверх функций.

Ситуация $u_- > u_+$. $-\omega v + f(v) + C = -\omega v + f(v) + \omega u_- - f(u_-) < 0$. $f(v) < f(u_-) + \omega(v - u_-)$, $v \in (u_+, u_-)$. И условие допустимости: график функции $f(u)$ лежит не выше хорды, соединяющей точки на графике. Что совпадает с условием для выпуклых вниз функций и для каких-то невыпуклых (рис.5.8).

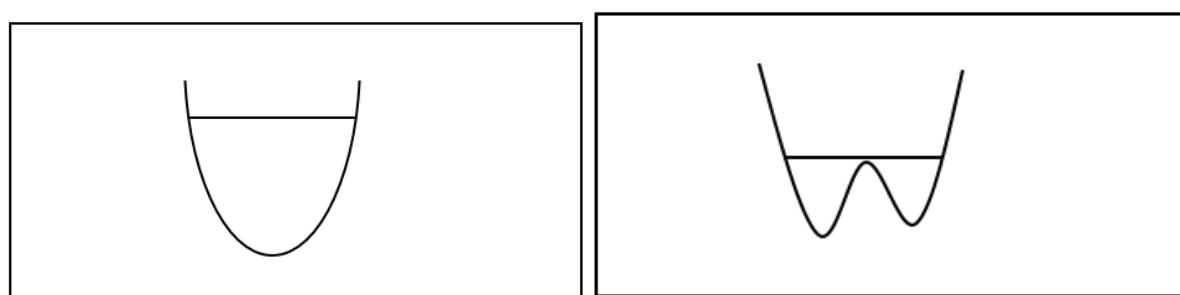


Рис.5.8 Примеры выпуклой вниз и невыпуклой функций, удовлетворяющих ситуации $u_- > u_+$

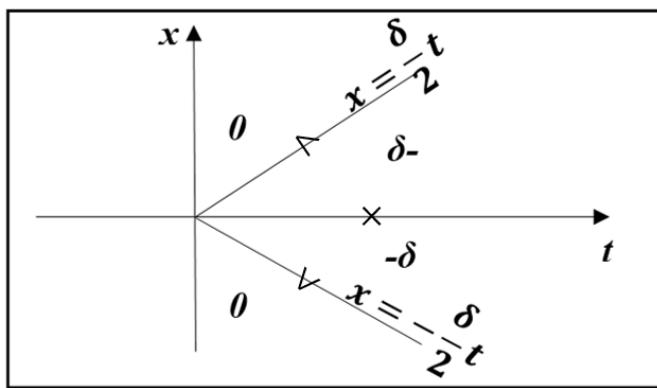


Рис.5.9 Неэнтропийное решение (для функции $\frac{u^2}{2}$). Два разрешенных и один запрещенный скачки

5.3 Теоремы об энергетических оценках

Рассматриваем задачу:

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (1)$$

Введем характеристики. $S(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx$ – площадь под графиком. $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) dx$ – кинетическая энергия. Будем рассматривать только те решения $u(t, x)$, которые быстро убывают на $\pm\infty$ вместе с производными и являются финитными по x ($u(t, x) = 0, |x| > A$).

Теорема 1: Если u – классическое решение (1), то $S(t) \equiv Const.$ (рис.5.10)

Теорема 2: Если u – обобщенное решение (1) с одной линией разрыва, то $S(t) \equiv Const.$ (условие Ранкина-Гюгонио) (рис.5.10)

Теорема 3: Если u – классическое решение (1), то $E(t) \equiv Const.$

Теорема 4: Если u – решение $u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}, u \not\equiv Const$, то $E(t) \downarrow (\varepsilon > 0)$

Теорема 5: Если u – обобщенное энтропийное решение (1) с одной линией разрыва, то $E(t) \downarrow$. (рис.5.11)

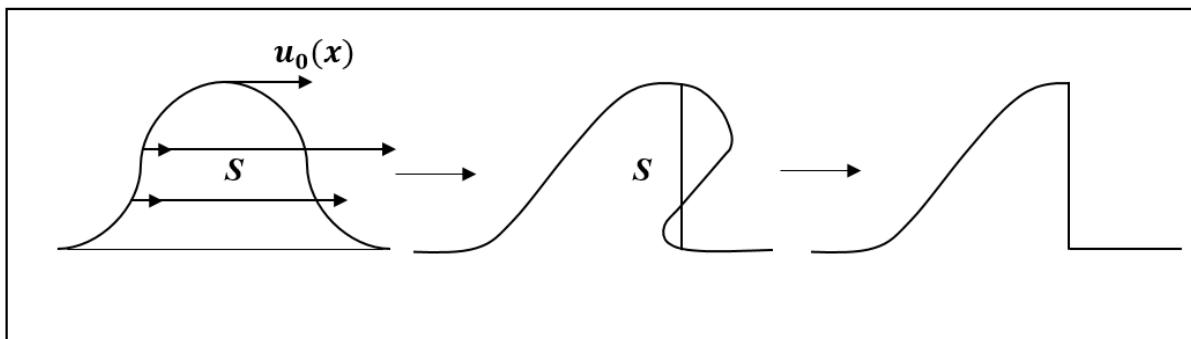


Рис.5.10 Рисунок, соответствующий Теореме 1 и Теореме 2.

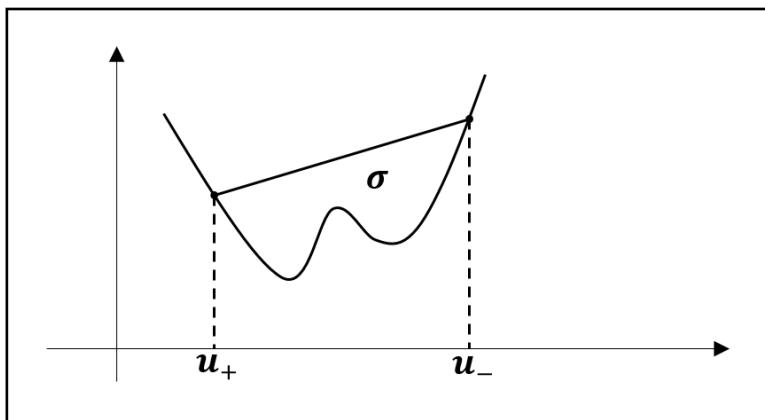


Рис.5.11 Рисунок, соответствующий Теореме 5. $\frac{dE}{dt} = -\sigma$

Доказательство теоремы 1:

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\mathbb{R}} u_t dx = - \int_{\mathbb{R}} (f(u))_x dx = -f(u)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = -f(0) + f(0) = 0.$$

Доказательство теоремы 2:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} u dx + \int_{x(t)}^{+\infty} u dx \right)$$

Лекция 6

Линейные УрЧП второго порядка

6.1 Доказательства теорем об энергетических оценках

Вспомним уравнение, с которым работали $u_t + (f(u))_x = 0$. Понятия площади под графиком и кинетической энергии соответственно: $S(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx$, $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) dx$. u хорошо убывает на $\pm\infty$ к 0, $u(t, \pm\infty) = 0$.

Доказательство теоремы 1:

$$\frac{d}{dt} S(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t dx = - \int_{\mathbb{R}} (f(u))_x dx = -f(u)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = -f(u(t, +\infty)) + f(u(t, -\infty)) = f(0) - f(0) = 0. \text{ Теорема доказана.}$$

Доказательство теоремы 3:

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_{\mathbb{R}} uu_t dx = - \int_{\mathbb{R}} u(f(u))_x dx = -uf(u)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{u(t, -\infty)=0}^{u(t, +\infty)=0} f(u) \frac{du}{u_x dx} = 0.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4:

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_{\mathbb{R}} u(f(u))_x dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} uu_{xx} dx = 0 + \varepsilon uu_x|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx = 0 + 0 - \varepsilon \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx < 0. \text{ Теорема доказана.}$$

В случае дисперсии: $u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xxx}$.

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx} dx = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x^2}{2} \right) dx = \frac{u_x^2}{2}|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0.$$

Доказательство теоремы 2:

Пусть у нас есть обобщенное решение с линией разрыва $x=x(t)$ (рис.6.1).

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} u dx + \int_{x(t)}^{+\infty} u dx \right) = u(t, x(t) - 0) \dot{x} - u(t, x(t) + 0) \dot{x} - \int_{-\infty}^{x(t)} (f(u))_x dx - \\ &\int_{x(t)}^{+\infty} (f(u))_x dx = -(u_+ - u_-) \dot{x} - f(u)|_{-\infty}^{x=x(t)-0} - f(u)|_{x=x(t)+0}^{+\infty} = -(u_+ - u_-) \dot{x} - \\ &f(u_-) + f(u_+) = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \text{ (условие Ранкина-Гюгонио).} \end{aligned}$$

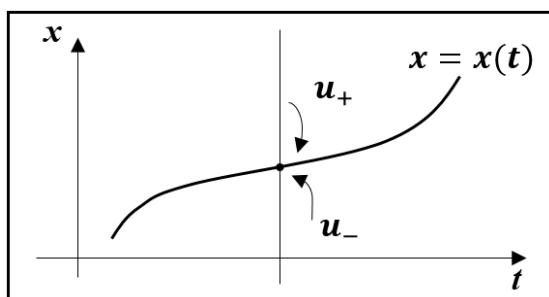


Рис.6.1

Доказательство теоремы 5:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} \frac{u^2}{2} dx + \int_{x(t)}^{+\infty} \frac{u^2}{2} dx \right) = \frac{u_-^2}{2} \dot{x} - \frac{u_+^2}{2} \dot{x} - \int_{-\infty}^{x(t)} u(f(u))_x dx - \int_{x(t)}^{+\infty} u(f(u))_x dx.$$

I. Рассмотрим первое и второе слагаемые в получившемся выражении:

$$\frac{u_-^2 - u_+^2}{2} \times \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{2} (u_+ + u_-)$$

II. Рассмотрим третье слагаемое:

$$- \int_{-\infty}^{x(t)} u(f(u))_x dx = -uf(u)|_{x=-\infty}^{x=x(t)-0} + \int_0^{u_-} f(u) du = -u_- f(u_-) + \int_0^{u_-} f(u) du$$

III. Рассмотрим последнее слагаемое:

$$- \int_{x(t)}^{+\infty} u(f(u))_x dx = -uf(u)|_{x=x(t)+0}^{x=+\infty} + \int_{u_+}^0 f(u) du = u_+ f(u_+) + \int_{u_+}^0 f(u) du$$

Соединяя получившиеся выражения

$$\begin{aligned} & \frac{f(u_-) - f(u_+)}{2} (u_+ + u_-) - u_- f(u_-) + u_+ f(u_+) + \int_{u_+}^{u_-} f(u) du \\ &= -\frac{f(u_-) + f(u_+)}{2} (u_- - u_+) \end{aligned}$$

Интерпретация результата (рис.6.1):

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma$$

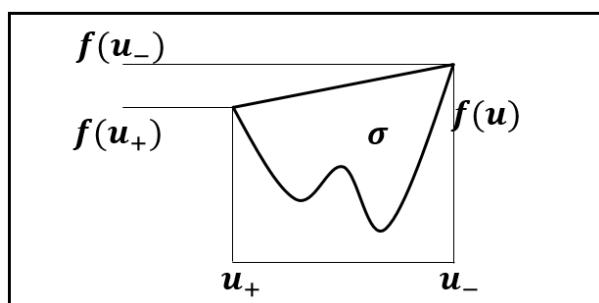


Рис.6.2 График функции $f(u)$. Случай $u_+ < u_-$

6.2 Приведение линейного УрЧП второго порядка к каноническому виду в точке

Объект, с которым будем работать: уравнение на функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с частными производными второго порядка по всем переменным. Вид уравнения:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = \begin{cases} 0 & \text{линейное однородное} \\ f(x) & \text{линейное неоднородное} \end{cases}$$

Здесь $u \in C^2$ (это означает, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$), $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ – главная часть, $\sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = {}_f^0(x)$ – младшие члены/.../ $\Phi(x, u, \nabla u)$.

Что означает «в точке»? Выбираем какую-то точку $x = x_0$, в этой точке замораживаем коэффициенты $(a_{ij}(x_0)) = (a_{ij}) = A$.

Будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами, что то же самое, что «в точке»:

$$\sum a_{ij} u_{x_i x_j} + \dots = 0$$

Ищем линейную замену: $y = Tx$. Получаем другое уравнение $\sum b_{ij} u_{y_i y_j}$.

Комментарий: Квадратичные формы. $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j = (A\xi, \xi) = (B\eta, \eta)$, $a_{ij} = a_{ji}$. Нас интересует замена векторов вида $\eta = C\xi$: $(B\eta, \eta) = (BC\xi, C\xi) = (C^T BC\xi, \xi)$. $A = C^T BC$. В данном случае C – матрица перехода от новых координат к старым.

Главная часть $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Утверждение: Коэффициенты главной части при линейной замене $y = Tx$ преобразуются ровно так же, как коэффициенты квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ при замене $\eta = C\xi$, где $T = (C^T)^{-1}$.

Следствие: $A = C^T BC$, $C = (T^T)^{-1}$. $A = T^{-1}B(T^T)^{-1}$.

$$B = TAT^T$$

Доказательство утверждения:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = (A\nabla_x, \nabla_x)u = (\sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j})u$$

$$u(x) \rightarrow \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n \\ y = Tx \Leftrightarrow y_2 &= t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n \\ &\dots \\ y_n &= t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n \end{aligned}$$

Комментарий: $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \cdots = t_{1k} \frac{\partial u}{\partial y_1} + t_{2k} \frac{\partial u}{\partial y_2} + \cdots + t_{nk} \frac{\partial u}{\partial y_n}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = t_{1k} \frac{\partial}{\partial y_1} + t_{2k} \frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + t_{nk} \frac{\partial}{\partial y_n}$$

В векторном виде:

$$\nabla_x = T^T \nabla_y$$

$$\nabla_y = (T^T)^{-1} \nabla_x$$

$$C = (T^T)^{-1}$$

Лекция 7

Классификация линейных УрЧП второго порядка

$$u(x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \dots = 0$$

Уравнения классифицируются по виду главной части.

7.1 Классификация в точке (классификация уравнений с постоянными коэффициентами)

Фиксируем точку $x = x_0$, все коэффициенты $a_{ij}(x_0) = a_{ij}$ замораживаем в этой точке, они становятся числами.

Комментарий: Если у нас есть уравнение с постоянными коэффициентами $\sum a_{ij}u_{x_i x_j}$, то по ней составляется квадратичная форма с такими же коэффициентами $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$. При линейных заменах вида $\eta = C\xi$ квадратичной формы и $y = Tx$ главной части коэффициенты a_{ij} преобразуются одинаково, если только матрицы C и T связаны соотношением $T = (C^T)^{-1}$. Это все получается из представления $(A\xi, \xi) = \sum a_{ij}\xi_i\xi_j$, $(A\nabla_x, \nabla_x)u = \sum a_{ij}u_{x_i x_j}$. Вспомним, по какому закону при такой замене будет преобразовываться вектор градиента: $\nabla_y = (T^T)^{-1}\nabla_x$. В квадратичных формах при данной замене приходим к главным осям, к величине $\sum \pm \eta_k^2$. В главной части замена приводит к $\sum \pm u_{y_k y_k}$.

Есть уравнение $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \dots = 0$, есть квадратичная форма $(A\xi, \xi) = +\eta_1^2 + \dots + \eta_{n_+}^2 - \eta_{n_++1}^2 - \dots - \eta_{n_++n_-}^2$. n_+ - количество плюс единиц, n_- - количество минус единиц, причем $n_+ + n_- \leq n$, $\text{rank } A = n_+ + n_-$. Перейдем к классификации:

1) $n_+ = n$ (или $n_- = 0$). Эллиптическое уравнение. $\text{rank } A = n$, $\det A \neq 0$.

Пример: $\Delta u = 0$ – уравнение Лапласа. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, соответствующая квадратичная форма $(A\xi, \xi) = |\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$.

2) $n_+ = n - 1, n_- = 1$ ($n_- = n - 1, n_+ = 1$). Гиперболическое уравнение. $\text{rank } A = n$, $\det A \neq 0$.

Пример: $u_{tt} = \Delta u$ – волновое уравнение. $u(t, x_1, \dots, x_n)$. В соответствии переменным (t, x_1, \dots, x_n) ставится $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Соответствующая квадратичная форма $\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2$.

3) $\text{rank } A = n - 1, n_+ = n - 1, n_- = 0$ (или $n_- = n - 1, n_+ = 0$). Параболическое уравнение.

Пример: $u_t = \Delta u$ - уравнение теплопроводности. $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + 0 \times \xi_0^2$.

Если $\text{rank } A = n, n_+ \geq 2, n_- \geq 2$, то такие уравнения называются ультрагиперболическими.

Если $\text{rank } A < n$, то такие уравнения называются параболическими в широком смысле.

7.2 Классификация в глобальном смысле

Утверждение: Пусть $a_{ij}(x)$ – непрерывны, тогда множество точек $x_0 \in \mathbb{R}^n$, где уравнение является эллиптическим (гиперболическим), открыто.

Доказательство: Пусть $\lambda_k(x)$ – собственное значение матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))$. Квадратичную форму к собственным значениям можно привести ортогональной заменой. Квадратичная форма придет к виду $\sum \lambda_k \eta_k^2$. Собственные значения – корни характеристического многочлена $\lambda^n + \dots = 0$. Они непрерывно зависят от коэффициентов многочлена, от $a_{ij}(x)$.

Уравнение с изменяющимся типом. Уравнение Трикоми.

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

Поймем, какого вида данное уравнение в точке (x_0, y_0) (рис.7.1). Замарживаем коэффициенты: $y_0 \xi_1^2 + \xi_2^2$. Если $y_0 > 0$: $(\sqrt{y_0} \xi_1)^2 + \xi_2^2$, уравнение эллиптическое. Если $y_0 < 0$: $-(\sqrt{-y_0} \xi_1)^2 + \xi_2^2$, уравнение гиперболическое. При $y_0 = 0$ уравнение параболическое.

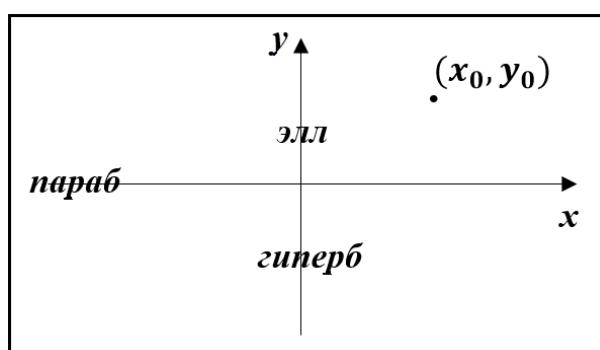


Рис.7.1 Виды уравнений на плоскости $(x; y)$

7.3 Характеристики

Нелинейная замена переменных вида $y = y(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Пересчитываем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x) \frac{\partial u}{\partial y_l}$. Продифференцируем данное выражение по x_j : $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial y_l} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_i}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_l}$, здесь первое слагаемое-младшие члены.

Утверждение: Главная часть уравнения в точке x_0 при нелинейной замене $y = y(x)$ преобразуется ровно так же, как при линейной замене $y = Tx$ с матрицей $T = J(x_0) = (\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x_0))$. (J – матрица Якоби)

Комментарий: Вспомним преобразования при линейных заменах.

$$(A\nabla_x, \nabla_x)u = \sum a_{ij}u_{x_i x_j} \xrightarrow{y=Tx} \sum b_{ij}u_i u_j$$

$$(A\xi, \xi) = \sum a_{ij}\xi_i \xi_j \xrightarrow{\eta=C\xi} \sum b_{ij}\eta_i \eta_j$$

$$A = C^T BC$$

$$B = (C^T)^{-1} AC^{-1}$$

$$T = (C^T)^{-1}$$

$$B = TAT^T$$

Следствие из утверждения: $B(y(x_0)) = J(x_0)A(x_0)J^T(x_0)$.

Определение: Гладкая поверхность $\Gamma = \{x | \Phi(x) = 0\}$ ($\Phi \in C^1, \nabla \Phi \neq 0$) называется характеристической поверхностью (или характеристикой), если $(A(x_0)\nabla \Phi(x_0), \nabla \Phi(x_0)) = 0 \forall x_0 \in \Gamma$.

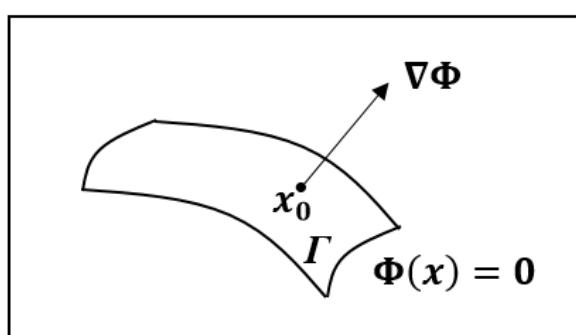


Рис.7.2 Рисунок гладкой поверхности $\Phi(x) = 0$

Определение в другом виде:

Вектор $\vec{v} \neq 0$ имеет в точке x_0 характеристическое направление, если $(A(x_0) \vec{v}, \vec{v}) = 0$.

Поверхность Γ – характеристика, если нормаль к Γ в любой точке $x_0 \in \Gamma$ имеет характеристическое направление.

Теорема: Понятие характеристики не зависит от координат.

Доказательство: $\Gamma = \{x | \Phi(x) = 0\}$, $(A(x_0)\nabla_x \Phi(x_0), \nabla_x \Phi(x_0)) = 0 \quad \forall x_0 \in \Gamma$. Делаем замену переменных $y = y(x)$. Получаем $B(y(x_0)) = J(x_0)A(x_0)J^T(x_0)$. $\nabla_x \Phi = J^T \nabla_y \Phi$.

$$(A\nabla_x \Phi, \nabla_x \Phi) = (AJ^T \nabla_y \Phi, J^T \nabla_y \Phi) = (JAJ^T \nabla_y \Phi, \nabla_y \Phi) = (B \nabla_y \Phi, \nabla_y \Phi) = 0$$

Теорема доказана.

Характеристики разных типов уравнений:

У эллиптического уравнения нет действительных характеристик.

Лекция 8

Теорема Ковалевской

8.1 Тензор

Тензор(в грубой формулировке) – набор чисел, который преобразуется по определённым законам.

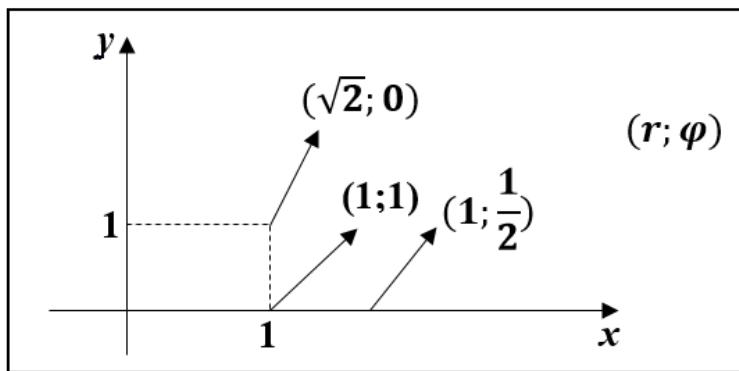


Рис.8.1 Описание векторов с помощью тензоров . Один и тот же вектор, приложенный в разных точках в полярных координатах

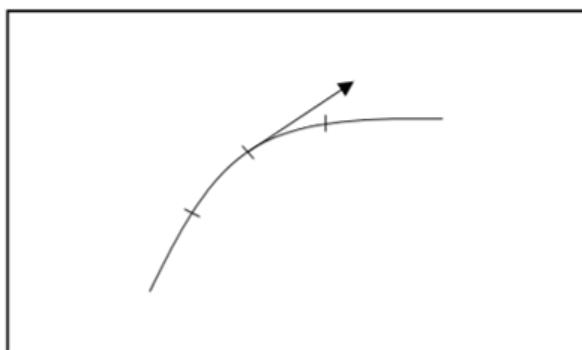


Рис.8.2 Движение по траектории

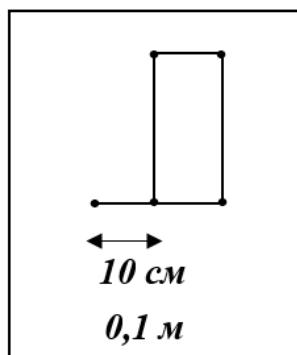


Рис.8.3 Градиент функции – скорость роста функции.(движение от точки к точке) Всё зависит от единиц измерения

Вектор – контравариантный тензор (1;0).

∇ - ковариантный тензор (0;1).

Симметрический тензор вида (0;2) – билинейная форма (рис.8.4).

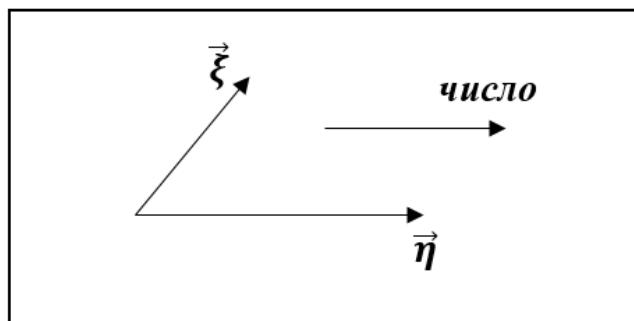


Рис.8.4 Билинейная форма: на вход даются два вектора, получаем число по каким-то законам

Коэффициенты главной части линейного УрЧП второго порядка - a_{ij} из $\sum a_{ij}u_{x_i x_j}$.
 $(A\nabla, \nabla)$ – контравариантный тензор вида (2;0).

Тензор (1;1) – линейный оператор. Из вектора получаем вектор ($\xi \rightarrow \eta$).

8.2 Приведение к каноническому виду в области

Приведение к каноническому виду в точке: $\sum a_{ij}(x_0)u_{x_i x_j} \xrightarrow{y=Tx} \sum \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$. Если здесь все зависит от x и замена нелинейна. Пример:

Уравнение эллиптическое с переменными коэффициентами $\sum a_{ij}(x)u_{x_i x_j}$ в области. Это утверждение означает, что какую бы мы не брали точку x_0 получается матрица коэффициентов $(a_{ij}(x_0))$ – симметрическая, положительно определенная матрица (все собственные значения положительные). Можно ли придумать нелинейную замену, зафиксировав каждую точку во всей области:

$$\begin{aligned} \sum a_{ij}(x)u_{x_i x_j} &\xrightarrow{y=y(x)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \dots = 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} &= \Delta_y u \end{aligned}$$

Мы знаем, что при нелинейной замене в каждой точке коэффициенты меняются так же, как при линейной замене с матрицей $T = J(x_0)$.

Главная часть – набор из $\frac{n(n+1)}{2}$ произвольных функций.

Замена переменных $y = y(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ – n произвольных скалярных функций от n переменных.

Умножение на произвольную функцию.

Всё получится, если степеней свободы по заменам координат, умножениям на функцию больше, чем можно получить самих уравнений:

$$n + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Что выполняется только при $n = 2$.

При $n \geq 3$: $n + 1 < \frac{n(n + 1)}{2}$.

8.3 Теорема Ковалевской

Речь пойдёт об общего вида уравнении второго порядка с переменными коэффициентами. Разрешим это уравнение относительно второй производной по последней переменной:

$$u_{x_n x_n} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (n,n)}}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u + f(x)$$

Начальные условия на гиперплоскости $x_n = 0$:

$$u|_{x_n=0} = u_0(x')$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} = u_1(x')$$

где $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Получаем задачу Коши:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} u_{x_n x_n} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (n,n)}}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u + f(x) \\ u|_{x_n=0} = u_0(x') \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} = u_1(x') \end{array} \right.$$

Теорема: Пусть $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$ – аналитические функции в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$; пусть $u_0(x')$, $u_1(x')$ – аналитические функции в окрестности $0' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (рис.8.5). Тогда

существует, и при том единственное, решение (*) в окрестности 0 в классе аналитических функций.

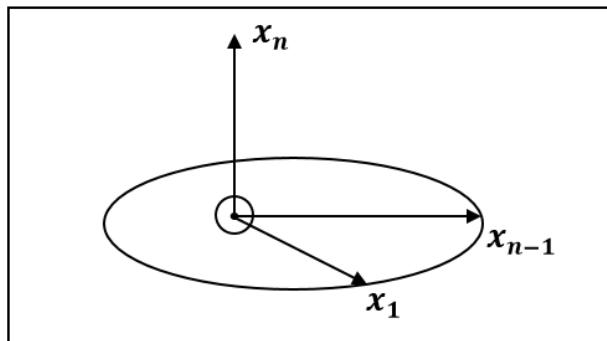


Рис.8.5

Замечание: Теорема верна:

1) $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)u_{x_i x_j} + \dots = 0, a_{nn}(0) \neq 0 \Leftrightarrow$ вектор $(0; \dots; 0; 1)$ (вектор нормали к плоскости $x_n = 0$) имеет нехарактеристическое направление.

2) $\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) + \dots = 0 \\ u|_S = u_0(x); \frac{\partial u}{\partial \vec{\xi}(x)}|_S = u_1(x), \end{cases}$ S – аналитическая гиперповерхность, $\vec{\xi}(x)$ –

аналитическое векторное поле, $\vec{\xi}(x_0)$ не касается S , нормаль в точке x_0 ($\nabla \Phi x_0$) имеет нехарактеристическое направление (рис.8.6).

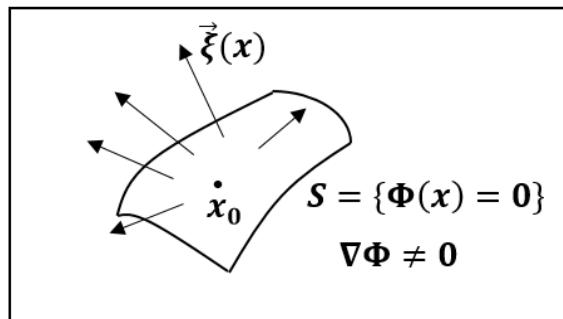


Рис.8.6 Задаём начальные условия на аналитической поверхности поверхности S

3) $u_{x_n x_n} = F(u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2}, \dots, u_{x_{n-1} x_{n-1}}, \nabla u, u, x), F$ – аналитическая по всем своим переменным.

4) $\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\alpha_n < m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|_u}}{\partial x^\alpha} +$ младшие члены, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \frac{\partial^{|\alpha|_u}}{\partial x^\alpha} = D^\alpha u =$
 $\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$

Доказательство единственности: Предполагаем, что есть аналитическое решение (его можно разложить в ряд) $u = \sum_\alpha C_\alpha x^\alpha = \sum C_{\alpha' \alpha_n} x^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}$ ряд Тейлора, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

- мультииндекс, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = \alpha^\circ$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$, $x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = x_n^{\alpha^\circ}$, $C_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(0)$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$.

Рассмотрим на примере обыкновенных дифференциальных уравнений наши действия:

$$y' = y^2 + x$$

В явном виде решение этого уравнения записать нельзя, но по теореме о существовании и единственности, решение с начальным условием $y(0) = 1$ существует и при том единствено. По теореме Коши, если правая часть – аналитическая функция, то и решение будет аналитическим.

$$\begin{aligned} y'(0) &= 1^2 + 0 = 1 \\ y''(0) &= 2 \times 1 \times 1 + 1 = 3 \\ &\quad (y'' = 2yy' + 1) \\ y'''(0) &= 2 \times 1 \times 3 + 2 \times 1^2 = 8 \\ &\quad (y''' = 2yy'' + 2y'^2) \end{aligned}$$

Попытаемся написать ряд Тейлора: $y(x) = 1 + x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + o(x^3)$ (формула Тейлора).

Продолжим рассматривать наш случай:

$$\begin{aligned} u|_{x_n=0} &= \sum C_{\alpha^\circ 0} x^{\alpha^\circ} = u_0(x^\circ) = \sum \frac{D^{\alpha^\circ} u_0(0^\circ)}{\alpha^\circ!} x^{\alpha^\circ} \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} &= \sum C_{\alpha^\circ 1} x^{\alpha^\circ} = u_1(x^\circ) \end{aligned}$$

Индукция: Умею считать все $D^\alpha u(0)$ с $\alpha_n \leq k - 1$. Задача: посчитать $D^\alpha u(0)$ с $\alpha_n = k$.

$$D^\alpha u(0) = \frac{\partial^{|\alpha^\circ|}}{\partial x^{\alpha^\circ}} \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(0)$$

Продифференцируем уравнение (применим оператор $\frac{\partial^{|\alpha^\circ|}}{\partial x^{\alpha^\circ}} \frac{\partial^{k-2}}{\partial x_n^{k-2}}$, $k \geq 2$) и подставим $x = 0$.

$D^\alpha u(0) = \dots D^\beta u(0)$ -известно, $\beta_n \leq k - 1$.

Единственность доказана.

8.4 Контрпример к теореме Ковалевской

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

Рассматриваем задачу в окрестности $(0;0)$. $u_t = u_{xx}$ – уравнение НЕ типа Ковалевской.



Разложим начальные условия в ряд:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, |x| < 1$$

Если у этой задачи есть аналитическое решение, то оно раскладывается в ряд:

$$u = \sum_{l,k} C_{lk} t^l x^k$$
$$u|_{t=0} = \sum C_{0k} x^k$$

$$C_{0k} = 1$$

При $x = 0$ $u(t, 0) = \sum C_{l0} t^l$ – радиус сходимости этого степенного ряда $R = 0$.

Посчитаем коэффициенты:

$$(l!) C_{l0} = \frac{\partial^l u}{\partial t^l}(0) = \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}}(0) = C_{02l} (2l)! = (2l)!$$

$$C_{l0} = \frac{(2l)!}{l!} > (l+1)^l$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{C_{l0}} = +\infty$$

Лекция 9

Уравнение струны

9.1 Задача Коши для уравнения струны

Уравнение на $u(t, x)$, t – время, x – одномерная координата.

$$(*) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, a > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

где $(t, x) \in (0; T) \times \mathbb{R} = \Pi_T$. (рис.9.1)

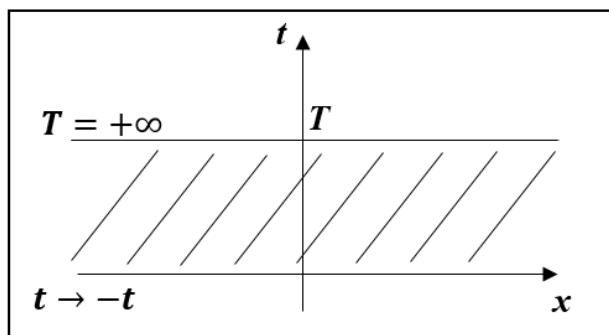


Рис.9.1 Полоса Π_T

Теорема: Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда существует, и при том единственное, решение $u(t, x) \in C^2(\bar{\Pi}_T)$, которое задаётся формулой Даламбера

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

и это решение непрерывно зависит от начальных условий.

Комментарий: Уточнение смысла фразы «непрерывно зависит от начальных условий».

Пусть есть пара начальных условий $(\varphi_1, \psi_1) \rightarrow u_1$ (получаем одно решение u_1), есть другие начальные условия $(\varphi_2, \psi_2) \rightarrow u_2$. Мы должны измерить расстояние между этими двумя функциями. В метрике равномерной сходимости:

$$\sup_{(t,x) \in \bar{\Pi}_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq C(T) \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1 - \varphi_2| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1 - \psi_2| \right), C(T) = \max(1, T)$$

$$\|u_1 - u_2\|_{C_B(\bar{\Pi}_T)} \leq C(T) (\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C_B(\mathbb{R})} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{C_B(\mathbb{R})})$$

Доказательство теоремы: Непрерывная зависимость то же самое, что оценка решений через нормы функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, так как наша задача линейна.

$u = u_1 - u_2$ – решение $(*)$ с начальными условиями $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \psi = \psi_1 - \psi_2$.

$$|u(t, x)| \leq 2 \times \frac{1}{2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| + \frac{1}{2a} \times 2at \times \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| + T \times \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|$$

Корректно поставленная задача: существование, единственность, непрерывная зависимостью.

Уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ можно переписать в виде $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$. Рассмотрим уравнение $v_t - av_x = 0$, его характеристики (рис.9.2): $\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -a \end{cases}$, общее решение: $v = g(x + at)$.

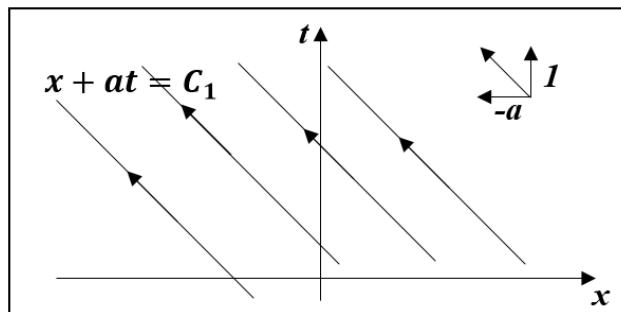


Рис.9.2 Характеристики уравнения $v_t - av_x = 0$

Если у нас есть уравнение $v_t + av_x = 0$. Общее решение для этого уравнения $v = f(x - at)$.

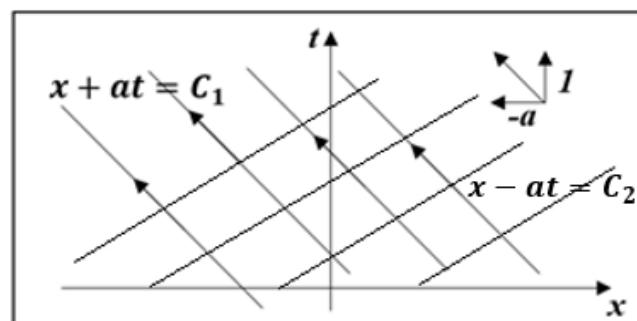


Рис.9.3 Характеристики уравнений $v_t - av_x = 0$ и $v_t + av_x = 0$

Общее решение уравнения струны:

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

Его характеристики включают характеристики этих двух уравнений.

9.2 Характеристики уравнения струны

$$\xi_t^2 - a^2 \xi_x^2 = 0$$

(ξ_t, ξ_x) – характеристическое направление (рис.9.4).

$$(\xi_t, \xi_x) = (\pm a, 1)$$

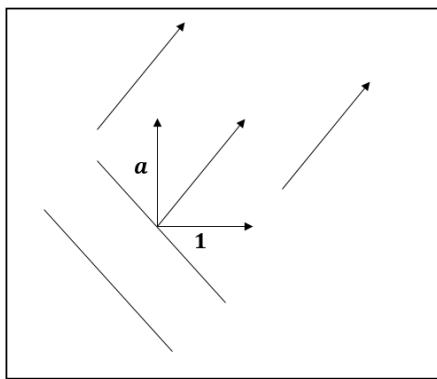


Рис.9.4 Характеристическое направление в плоскости ($0xt$) в случае, когда ось x направлена слева направо, а ось t снизу вверх

В данном случае характеристика – та поверхность, у которой нормаль в каждой точке имеет характеристическое направление.

Сделаем замену $\begin{cases} z=x-at \\ w=x+at \end{cases}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -a \frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}\end{aligned}$$

При умножении второго уравнения на $-a^2$ и последующим сложением его с последним, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= -4a^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \\ \frac{\partial}{\partial w} (u_z) &= 0 \\ u_z &= h(z)\end{aligned}$$

$$u = \int h(z) dz + C(w), C(w) = g(x + at), \int h(z) dz = f(x - at)$$

и подставляем в систему (*), получаем:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Из этих двух уравнений находятся f, g , после их подстановки в данную систему получается формула Даламбера.

Введем функцию $\Psi' = \psi$. Тогда формула Даламбера:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \psi(x - at) \\ + \frac{\varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \psi(x + at)$$

где $\Psi \in C^2$, $\frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \psi(x - at) = f(x - at)$, $\frac{\varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \psi(x + at) = g(x + at)$.

$$u_t = -a \frac{\varphi'(x - at)}{2} + \frac{1}{2} \psi'(x - at) + a \frac{\varphi'(x + at)}{2} + \frac{1}{2} \psi'(x + at)$$

При $t=0$:

$$u_t|_{t=0} = \Psi'(x) = \psi(x)$$

9.3 Физическая точка зрения на уравнение струны

1) Уравнение малых колебаний струны(рис.9.5)

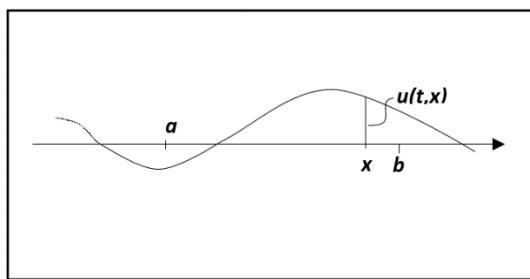


Рис.9.5 Положение струны в какой-то фиксированный момент времени

При малых колебаниях ($u, u_x, u_t, u_{xx} \dots$ – мало) длина струны не меняется (оставляем только малые первого порядка). Длина струны:

$$l = \int_b^a \sqrt{1 + u_x^2} dx = b - a$$

$$\sqrt{1 + u_x^2} = 1 + \frac{u_x^2}{2} + \dots$$

Так как не меняется длина струны, не меняется натяжение T .

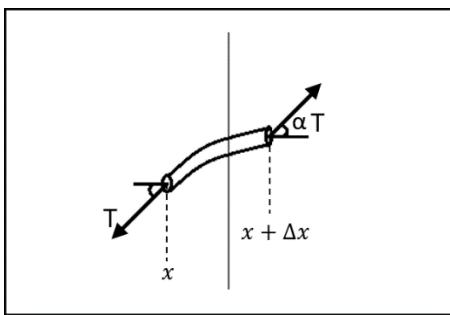


Рис.9.6 Струна и действующие на неё силы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= u_x \\ \sin \alpha &= \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} = u_x + \dots \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} = 1 + \dots \end{aligned}$$

$$ma = T_1 + T_2$$

Введём ρ – линейная плотность. Тогда $m = \rho \Delta x$.

$$\rho \Delta x u_{tt} = T \sin \alpha(t, x + \Delta x) - T \sin \alpha(t, x) = T u_x(t, x + \Delta x) - T u_x(t, x)$$

Поделим это выражение на Δx и устремим Δx к нулю.

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= T \frac{u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x)}{\Delta x} \\ u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \end{aligned}$$

2) Уравнение упругих продольных колебаний стержня (рис.9.7)

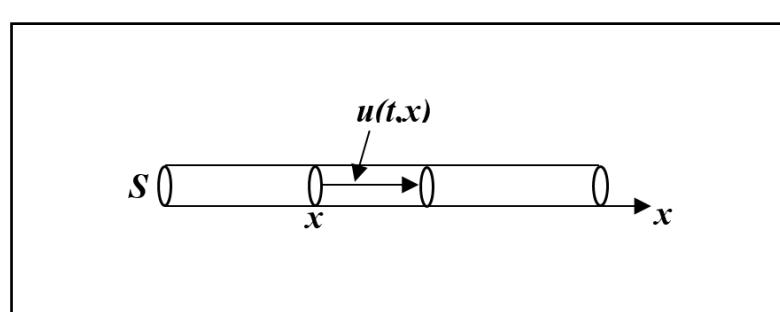


Рис.9.7 Упругие продольные колебания стержня

Закон Гука:

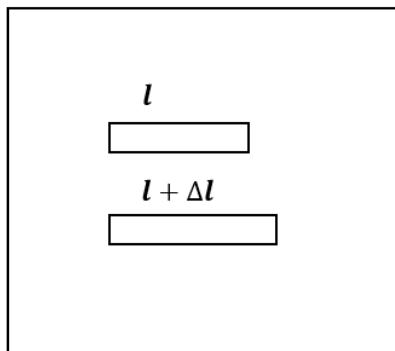


Рис.9.8 Равномерно растянутый стержень. Сверху: было. Снизу: стало после растяжения

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}$$

E – модуль Юнга

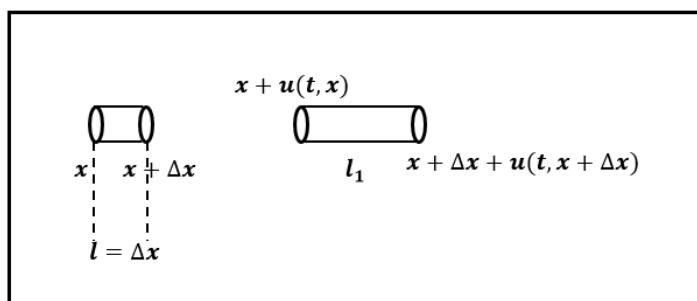


Рис.9.9 Стержень, растянувшийся со временем. Слева: было. Справа: стало после растяжения

$$\Delta l = l_1 - l$$

$$l_1 = \Delta x + u(t, x + \Delta x) - u(t, x)$$

$$\Delta l = u(t, x + \Delta x) - u(t, x)$$

$$F = ES \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = 0 \quad F = ES u_x$$

$u_x > 0$ – стержень растянут.

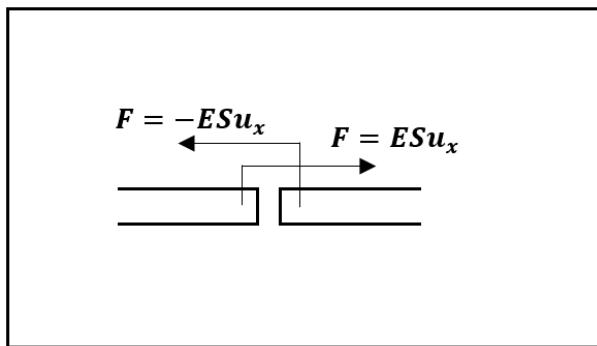


Рис.9.10 Сечение стержня

Закон Ньютона (рис.9.11):

$$ma = F_1 + F_2$$

$$\rho S \Delta x \times u_{tt} = ESu_x(t, x + \Delta x) - ESu_x(t, x)$$

Сокращаем на S , делим на Δx , $\Delta x \rightarrow 0$. Получаем:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

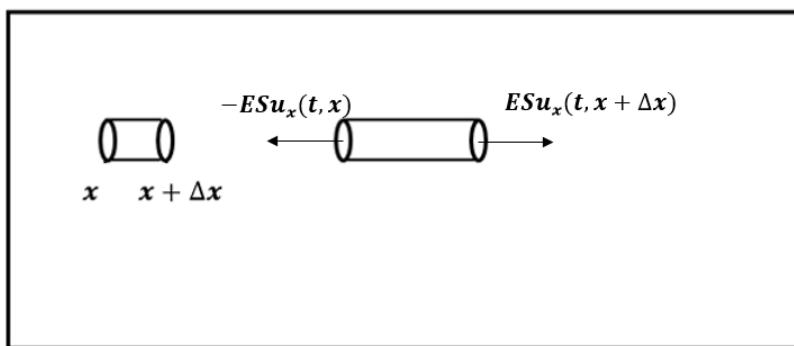


Рис.9.11 Силы, действующие на растянутый стержень

3) Уравнение малых одномерных адиабатических колебаний газа (рис.9.12)

$$pV^\gamma = C$$

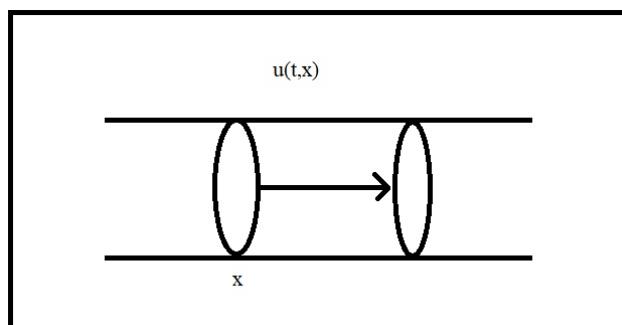


Рис.9.12 Столб воздуха и его изменение

$$p_0(S\Delta x)^\gamma = p(S(\Delta x + u(t, x + \Delta x) - u(t, x)))^\gamma$$

$$p = p_0(1 + u_x)^{-\gamma} \approx p_0(1 - \gamma u_x + \dots)$$

Закон Ньютона:

$$\rho_0 S \Delta x u_{xx} = \gamma p_0 (u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x))$$

$$a = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}}$$

Лекция 10

Уравнение струны

10.1 Введение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Общее решение этого уравнения: $u = f(x - at) + g(x + at)$. $f(x - at)$ – волна, двигающаяся направо со скоростью a , $g(x + at)$ – волна, двигающаяся налево со скоростью a .

Задача Коши:

$$(*) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Решение этой задачи задаётся формулой Даламбера:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

В прошлый раз было доказано: $\varphi \in C^2, \psi \in C^1 \Rightarrow \exists!$ классическое решение (*) и оно задаётся формулой Даламбера.

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \Psi(x - at) + \frac{\varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \Psi(x + at), \text{ где } \Psi' = \psi, \frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \Psi(x - at) = f(x), \frac{\varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \Psi(x + at) = g(x).$$

Утверждение: $\varphi \in C^k, \psi \in C^{k-1} (k \geq 2) \Rightarrow u \in C^k$.

Определение: Непрерывная функция $u(t, x)$ называется обобщенным решением (*) с $\varphi \in C(\mathbb{R})$ (с непрерывной φ) и $\psi \in L_{1loc}(\mathbb{R})$ (локально интегрируемая ψ), если u удовлетворяет формуле Даламбера.

Комментарий: Пример: $C[a; b] \subset L_1[a; b]$, но $C(\mathbb{R}) \not\subset L_1(\mathbb{R})$.

$L_{1loc} \Leftrightarrow$ функция интегрируема на любом отрезке этой прямой.

Утверждение: Обобщенные решения – поточечный предел классических решений.

Доказательство: 1) $\varphi_n(x) \in C^2(\mathbb{R})$; $\varphi_n(x) \xrightarrow[\in C[-A; A] \forall A]{} \varphi(x) \in C(\mathbb{R})$;

2) $\psi_n(x) \in C^1(\mathbb{R})$, так что $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ дают $u_n(x)$ – классическое решение, $\psi_n(x) \xrightarrow[\in L_1[-A; A] \forall A]{} \psi(x) \in L_{1loc}(\mathbb{R})$.

Если удастся построить такие последовательности, удастся ли получить решение, подчиняющееся формуле Даламбера при $n \rightarrow \infty$? Слагаемое $\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$ выдержит предел(поточечная сходимость есть), $\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$ при данных условиях тоже не вызывает противоречий. Это и означает, что обобщенные решения – поточечный предел классических решений.

По теореме: «Любую непрерывную функцию на отрезке можно в равномерной метрике приблизить к многочлену» получаем, что если отрезок фиксирован, то сколь угодно близко к любой непрерывной функции существует многочлен, значит, функция класса C^2 , которая достаточно близка ($C^2[-A; A]$ всюду плотна в $C[-A; A]$).

Непрерывные функции в $L_1[-A; A]$ всюду плотны, непрерывные функции можно равномерно приближать многочленами.

Также мы можем приближать так, чтобы наше условие выполнялось на любом отрезке:

$$\begin{aligned} [-1; 1] \quad \varepsilon = 1 \\ [-2; 2] \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \\ \dots \\ [-N; N] \quad \varepsilon = \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

ε – точность.

10.2 Полуограниченная струна

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \text{ – краевое условие} \end{array} \right.$$

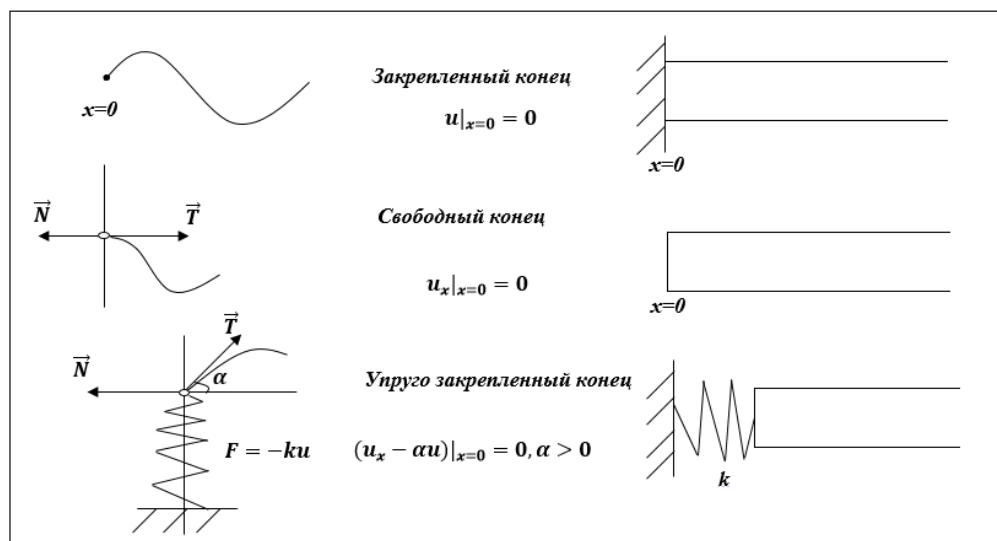


Рис.10.1 Слева – струна, справа – стержень

Упруго закреплённый конец:

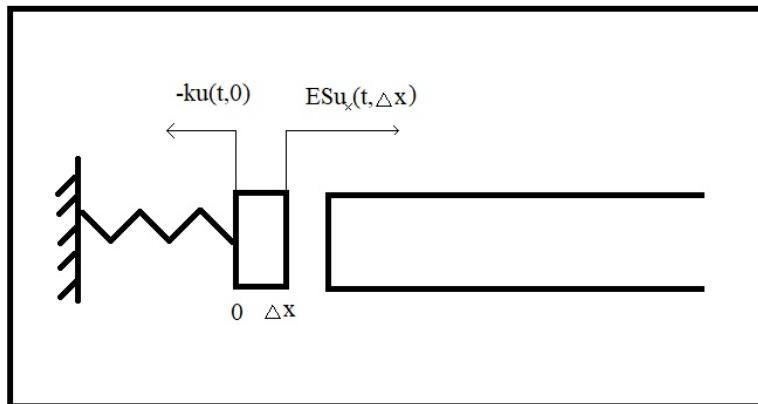


Рис.10.2 Упруго закреплённый стержень

Уравнение Ньютона для стержня:

$$S\Delta x \rho u_{tt}|_{x=0} = ESu_x(t, \Delta x) - ku(t, 0)$$

$$\Delta x \rightarrow 0: ESu_x(t, 0) - ku(t, 0) = 0, \alpha = \frac{k}{ES} > 0.$$

Для струны:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$$

$$m \rightarrow 0, N = T_0 \cos \alpha.$$

$$T_0 \sin \alpha - ku = 0$$

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = u_x|_{x=0}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{T_0}}$$

Перепишем условие для жёсткой пружины:

$$\left(\frac{1}{\alpha} u_x - u \right) |_{x=0} = 0$$

10.3 Задача Коши для закреплённого конца

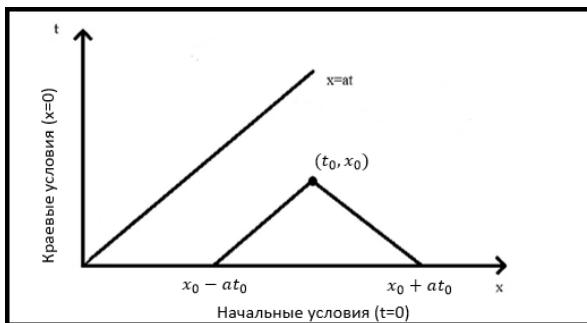


Рис.10.3 Получение решения Задачи Коши с помощью формулы Даламбера

Формула Даламбера даёт решения при $x > at$.

$$u|_{x=0} = f(-at) + g(at) = 0$$

$$f(-\xi) = -g(\xi), \xi = at > 0$$

Закрепленный конец \Rightarrow отраженная волна – нечётное продолжение падающей.

Свободный конец \Rightarrow отраженная волна – чётное продолжение падающей. ($u_x|_{x=0} = f'(-at) + g'(at) = 0, f'(-\xi) = -g'(\xi), f(-\xi) = -g(\xi) + C, C$ ищем из непрерывности, $f(-0) = f(+0)$)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = \mu(t) \end{cases}$$

Теорема: Пусть $\varphi \in C^2, \psi \in C^1, \mu \in C^2$ и условия согласования. Если выполнено только первое условие, то решение будет непрерывно ($u \in C$). Если выполнены первое и второе условия, то $u \in C^1$. Если выполнены все три условия, то $u \in C^2$ – классическое решение.

Условия согласования:

$$1) \varphi(0) = \mu(0) (= u(0; 0))$$

$$2) \psi(0) = \mu'(0) (= u_t(0; 0))$$

$$3) \mu''(0) = a^2 \varphi''(0) (u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ в точке } (0; 0))$$

$x < at$:

$$u|_{x=0} = f(-at) + g(at) = \mu(t)$$

$$\xi = at > 0: f(-\xi) = \mu\left(\frac{\xi}{a}\right) - g(\xi) = \mu\left(\frac{\xi}{a}\right) - \frac{\varphi(\xi)}{2} - \frac{1}{2a} \Psi(\xi).$$

$$\text{Должно быть: } f(+0) = f(-0) \cdot \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{1}{2a} \Psi(0) = \mu(0) - \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{1}{2a} \Psi(0).$$

$$-f'(-\xi) = \frac{1}{a} \mu' \left(\frac{\xi}{a} \right) - \frac{\varphi'(\xi)}{2} - \frac{1}{2a} \psi(\xi)$$

$$f''(-\xi) = \frac{1}{a^2} \mu'' \left(\frac{\xi}{a} \right) - \frac{\varphi''(\xi)}{2} - \frac{1}{2a} \psi'(\xi)$$

$$f'(-\xi) = -\frac{1}{a} \mu' \left(\frac{\xi}{a} \right) + \frac{\varphi'(\xi)}{2} + \frac{1}{2a} \psi(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2} - \frac{1}{2a} \psi(x)$$

$$f''(x) = \frac{\varphi''(x)}{2} - \frac{1}{2a} \psi'(x).$$

Лекция 11

Задача Коши для ограниченной струны

11.1 Условия согласования

$$(*) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = \mu(t) \end{cases}$$

Теорема 1: \exists классическое решение $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+})$ задачи $(*) \Leftrightarrow \varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+}), \psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}), \mu \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ и выполнены условия согласования:

- 1) $\varphi(0) = \mu(0) (= u(0; 0))$;
- 2) $\psi(0) = \mu'(0) (= u_t(0; 0))$;
- 3) $a^2 \varphi''(0) = \mu''(0)$ ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$ в $(0; 0)$).

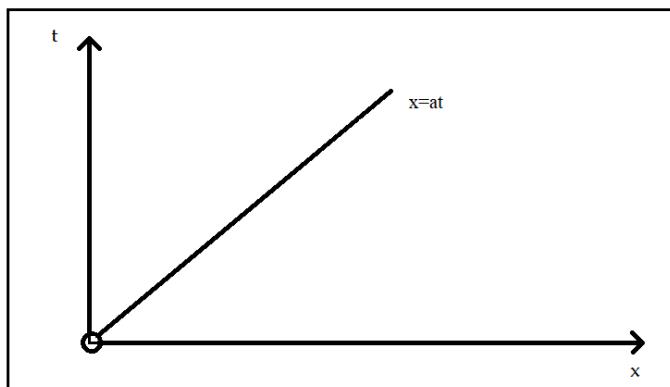


Рис.11.1 Рисунок к Теореме 1

$$(**) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = \nu(t) \end{cases}$$

Теорема 2: \exists классическое решение $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+})$ задачи $(**) \Leftrightarrow \varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+}), \psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}), \nu \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ и выполнены условия согласования:

- 1') не нужно;
- 2') $\varphi'(0) = \nu(0) (= u_x(0; 0))$
- 3') $\psi'(0) = \nu'(0) (= u_{tx}(0; 0))$

Комментарий:

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

$$\text{н. у. } (\varphi, \psi) \Rightarrow f(x), g(x), x \geq 0$$

$$(*) \Rightarrow f(-at) + g(at) = \mu(t)$$

$$f(-\xi), \xi < 0$$

$$(**) \Rightarrow f'(-at) + g'(at) = v(t)$$

$$f'(-\xi), \xi > 0$$

Для задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Будут следующие условия согласования:

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$$

Для задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Будут следующие условия согласования:

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$$

11.2 Метод чётного (нечётного) продолжения

Мы должны построить такие функции $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, которые являются продолжениями функций (φ, ψ) , так, чтобы полученные решения по формуле Даламбера:

$$u = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

было таким, что в нуле оно обращалось в ноль.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, x > 0, t > 0 \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) & x \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

$$u|_{x=0} = \frac{\tilde{\varphi}(-at) + \tilde{\varphi}(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

$\tilde{\varphi}(-\xi) = -\varphi(\xi)$ – нечётным образом продолжили функцию φ . $\tilde{\psi}(-\xi) = -\psi(\xi)$.

$\Rightarrow \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ – нечётное продолжение φ, ψ . (рис.11.2)

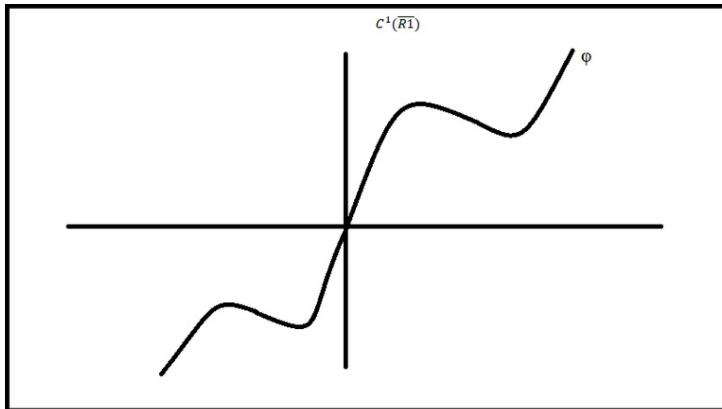


Рис.11.2 График функции φ с нечётным продолжением

Если мы таким же методом подойдём к задаче:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$(\varphi, \psi) \rightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, x > 0, t > 0 \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ – чётное продолжение φ, ψ .

Если $u = \frac{\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$, то:

$$u_x = \frac{\tilde{\varphi}'(x-at) + \tilde{\varphi}'(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} [\tilde{\psi}(x+at) - \tilde{\psi}(x-at)]$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{\tilde{\varphi}'(-at) + \tilde{\varphi}'(at)}{2} + \frac{1}{2a} [\tilde{\psi}(at) - \tilde{\psi}(-at)]$$

$\tilde{\psi}(-\xi) = \psi(\xi)$, $\xi < 0$. $\tilde{\varphi}'$ – нечётное продолжение φ' . $\tilde{\varphi}$ – чётное продолжение φ .
 $\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

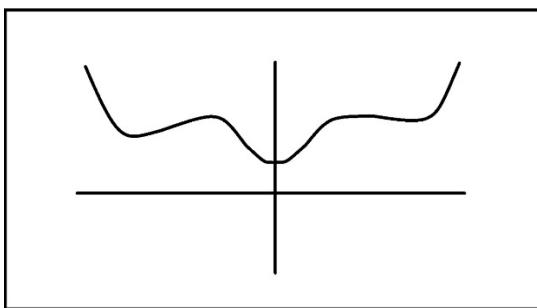


Рис.11.3 График функции с чётным продолжением

11.3 Ограниченнная струна

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in (0; \pi), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=\pi} = 0 \end{array} \right.$$

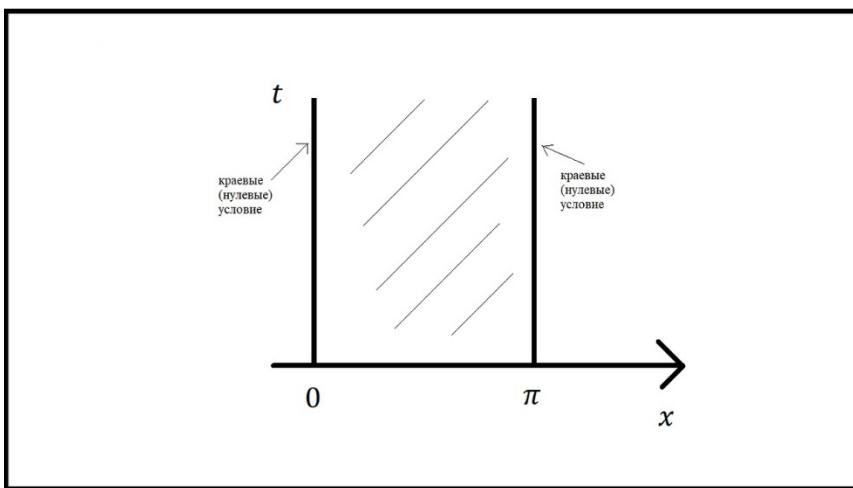


Рис.11.4 Рисунок к поставленной задаче

Теорема 3: Пусть $\varphi \in C^2[0; \pi]$; $\psi \in C^1[0; \pi]$ и выполнены условия согласования: $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$; $\varphi(\pi) = \varphi''(\pi) = \psi(\pi) = 0$. Тогда существует классическое решение $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0; \pi])$ и решение задаётся формулой:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos(kat) + \frac{\psi_k}{ka} \sin(kat) \right) \sin kx$$

где $\varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin kx dx$; $\psi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin kx dx$.

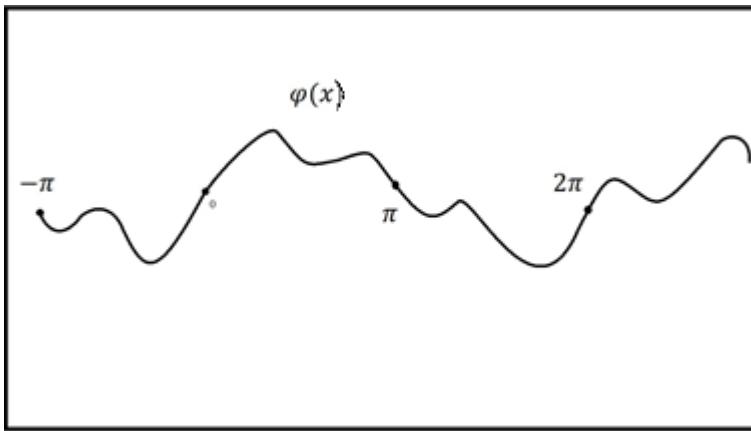


Рис.11.5 График функции с продолжением к Теореме 3

$\tilde{\varphi}(x)$ – нечётное, 2π -периодическое продолжение функции φ . $\tilde{\psi}(x)$ – нечётное, 2π -периодическое продолжение функции ψ . $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$. (рис.11.5)

Решение:

$$u(t, x) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

Разложим $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\varphi}$ в ряд Фурье (так как они нечётные, раскладыиваются только по синусам):

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin kx$$

$$\psi_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\psi}(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin kx dx$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin kx$$

$$\frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} = \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\sin(kx-kat) + \sin(kx+kat)}{2} = \sum_{k=1}^n \varphi_k \sin(kx) \cos(kat),$$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin(k\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{2ak} (\cos(kx - kat) - \cos(kx + kat)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{ak} \sin(kx) \sin(kat). (\sum |\psi_k| < +\infty).$$

11.4 Метод Фурье

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in (0; l), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum \varphi_k \sin \frac{\pi k x}{l} \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) = \sum \psi_k \sin \frac{\pi k x}{l} \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Растягиваем отрезок $[0; \pi] \rightarrow [0; l]$ путём замены $x_{\text{новое}} = \frac{l}{\pi} x_{\text{старое}}$. $\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$, $\psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$.

Теорема 4: Пусть $\varphi \in C^2[0; l]$ и кусочно $C^3[0; l]$, $\psi \in C^1[0; l]$ и кусочно $C^2[0; l]$. Тогда формула $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + \psi_k \frac{l}{\pi k a} \sin \frac{\pi k a t}{l}) \sin \frac{\pi k x}{l}$ задаёт классическое решение задачи, причём ряд можно два раза почленно дифференцировать.

В ряд Фурье хорошо раскладывается функция $\eta(x) = \sum \eta_k \sin \frac{\pi k x}{l}$, $\eta \in L_2(0; l)$, $\|\eta\|_{L_2(0;l)}^2 = \frac{2}{l} \sum \eta_k^2$.

Лекция 12

Обоснование метода Фурье

12.1 Повторение прошлой лекции. Ряды Фурье. Равенство Парсеваля.

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in (0; \pi), t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum \varphi_k \sin \frac{\pi k x}{l} \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) = \sum \psi_k \sin \frac{\pi k x}{l} \end{cases}$$

где $\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$, $\psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$.

Решение этой задачи:

$$(2) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + \psi_k \frac{l}{\pi k a} \sin \frac{\pi k a t}{l}) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

При выводе этой формулы мы встретились с преобразованием почлененного интегрирования ряда $\int_{x-at}^{x+at} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin k \xi d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \int_{x-at}^{x+at} \sin k \xi d\xi$, что можно делать, когда ряд сходится равномерно на $\xi \in [x - at; x + at]$. Мажорируем ряд, нужна сходимость ряда $\sum |\psi_k| < +\infty$.

Комментарий:

Ряды Фурье «хорошие» для пространства $L_2(0, l)$: $\eta(x) \in L_2(0, l)$. $\sin \frac{\pi k x}{l}$ в этом пространстве – полная ортогональная система. Следовательно, любую непрерывную функцию из L_2 можно разложить в ряд Фурье: $\eta(x) = \sum \eta_k \sin \frac{\pi k x}{l}$.

Равенство Парсеваля: $\|\eta\|_{L_2(0,l)}^2 = \int_0^l \eta^2(x) dx = \frac{2}{l} \sum \eta_k^2 < +\infty$.

Если рассмотреть первые степени в \mathbb{R}^N , из неравенства Коши-Буняковского: $\sum_{k=1}^N \frac{|\eta_k|}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^N \eta_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}}$. N можно устремить к бесконечности, оценки будут сохраняться: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < +\infty$.

Чем гладже функция $\eta(x)$, тем быстрее убывают коэффициенты ряда Фурье.

При решении задачи мы рассматривали $\tilde{\psi} \in C^1$.

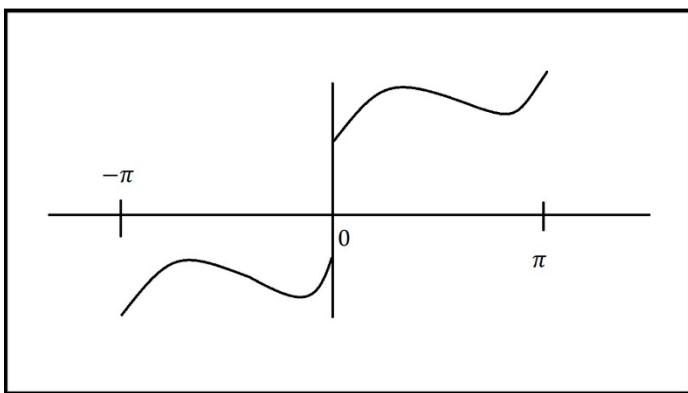


Рис.12.1 Продолжение функции нечетным образом для разложения её по полной ортогональной системе

12.2 Метод Фурье

Метод Фурье (метод разделения переменных) заключается в том, что сначала описываются все возможные решения $u = T(t)X(x)$ (забываем про начальные условия).

$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$; $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ ($\lambda = const$). Задача расщепляется на две:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, & X(0) = X(l) = 0 \\ T'' = \lambda a^2 T \end{cases}$$

Рассмотрим краевые условия: $u|_{x=0} = T(t)X(0) = 0$.

Возникает задача Штурма-Лиувилля: $X'' = \lambda X$, $X(0) = X(l) = 0$. Её решение: $X_k = \sin \frac{\pi kx}{l}$, $\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $T_k'' = -\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 T_k$.

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \frac{\pi kat}{l} + B_k \sin \frac{\pi kat}{l}) \sin \frac{\pi kx}{l}$$

Найдём коэффициенты A_k и B_k :

$$u|_{t=0} = \sum A_k \sin \frac{\pi kx}{l} = \varphi(x), \text{ следовательно } A_k = \varphi_k. u_t|_{t=0} = \sum \frac{\pi ka}{l} B_k \sin \frac{\pi kx}{l} = \psi(x),$$
$$\psi_k = \frac{\pi ka}{l} B_k.$$

Обоснование

Теорема: Пусть $\varphi \in C^2$, кусочно C^3 ; $\psi \in C^1$, кусочно C^2 ; $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = 0$; $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi''(l) = 0$. Тогда ряд (2) даёт классическое решение задачи (1), ряд можно два раза почленно дифференцировать, и полученный ряд сходится равномерно и абсолютно.

Комментарий к фразе «Чем глаже функция $\eta(x)$, тем быстрее убывают коэффициенты ряда Фурье»: Возьмём функцию $\eta \equiv 1$, разложим её в ряд по синусам ($l = \pi$) $\eta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx dx = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \frac{4}{\pi k}, & k = 2n + 1 \end{cases}$

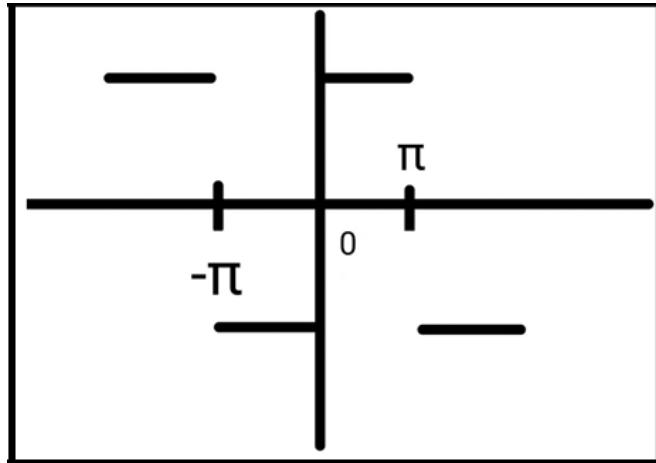


Рис.12.2 Продолжение функции η нечётно 2π -периодическим образом

$$u_{xx} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k k^2 \cos \frac{\pi k a t}{l} + \psi_k k \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi k a t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$u_{tt} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 -//-$$

Сходятся ряды $\sum |\varphi_k| \times k^2 < +\infty$, $\sum |\psi_k| \times k^2 < +\infty$?

Докажем эти утверждения: $\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$, интегрируем этот ряд 3 раза по частям, получаем $\varphi_k = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx = \left(\frac{l}{\pi k^3}\right)^3 \alpha_k$, α_k – коэффициенты разложения φ''' в ряд Фурье по $\cos \frac{\pi k x}{l}$. Проверим внеинтегральные члены при тройном интегрировании по частям: $\varphi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} |_0^l$; $\varphi'(x) \sin \frac{\pi k x}{l} |_0^l$; $\varphi''(x) \cos \frac{\pi k x}{l} |_0^l$. По условиям согласования: $\varphi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} |_0^l = \varphi''(x) \cos \frac{\pi k x}{l} |_0^l = 0$. $\varphi'(x) \sin \frac{\pi k x}{l} |_0^l = 0$ из-за синуса.

$$\sum |\varphi_k| \times k^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k|}{k^2} < +\infty$$

$\psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = (2 \text{ раза интегрируем по частям}) =$
 $= -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \frac{2}{l} \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \beta_k$, β_k – коэффициент разложения ψ'' в ряд по $\sin \frac{\pi k x}{l}$. Проверка внеинтегральных членов: $\psi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} |_0^l = 0$ (по условиям согласования); $\psi'(x) \sin \frac{\pi k x}{l} |_0^l = 0$ (из-за синусов).

$$\sum |\psi_k| \times k^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{k} < +\infty$$

Так как $\sum |\varphi_k| \times k^2 < +\infty$, $\sum |\psi_k| \times k^2 < +\infty$, следовательно $u_{xx} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k k^2 \cos \frac{\pi k a t}{l} + \psi_k k \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi k a t}{l}) \sin \frac{\pi k x}{l}$ и $u_{tt} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 -//-$ тоже сходятся абсолютно и равномерно.

Без дополнительных условий

$\psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$ (1 раз интегрируем по частям) =
 $= -\frac{l}{\pi k} \frac{2}{l} \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx = -\frac{l}{\pi k} \gamma_k$, где γ_k – коэффициент разложения функции ψ' по $\cos \frac{\pi k x}{l}$.

$$\sum |\psi_k| \sim \sum \frac{|\gamma_k|}{k}$$

Если коэффициенты ряда Фурье быстро убывают, то этот ряд можно дифференцировать.

Обобщение всего вышесказанного

12.3 Задача Штурма-Лиувилля

$u(t, x)$

$$Pu = Lu$$

P – дифференциальный оператор по t , L – дифференциальный оператор по x . Например:

$$P = \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial t}$$
$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - q(x)$$

L – второго порядка.

Для задачи $u_{tt} = a^2 u_{xx}$: $P = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ($p \equiv 1, q \equiv 0$).

Рассмотрим уравнение:

$$u_{ttt} + u_t = (p(x)u_x)_x - q(x)u$$

$$u = T(t)X(x)$$

$$(PT(t))X(x) = T(t)(LX(x))$$

$$\frac{PT(t)}{T(t)} = \frac{LX(x)}{X(x)} = \lambda$$



Задача по иксам: $LX = \lambda X$. $LX = \lambda X +$ краевые условия=задача Штурма Лиувилля.
Краевые условия: $X(0) = X(l) = 0$ (закреплённый конец).

λ – собственное значение, X – собственный вектор.

Лекция 13

Задача Штурма-Лиувилля

13.1 Задача Штурма-Лиувилля. Её оператор. Собственные вектора. Собственные значения.

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x)$$

$$Ly = (py')' - qy = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) - q(x)y(x)$$

$p \in C^1[0, l]$, $p(x) \geq p_0 > 0$; $q(x) \in C[0; l]$. Область определения оператора L $D(L) = \{y \in C^2[0; l] | (A), (B)\}$ – линейное пространство.

	(A)	(B)
1 (закреплённый конец)	$y(0) = 0$	$y(l) = 0$
2 (свободный конец)	$y'(0) = 0$	$y'(l) = 0$
3 (упруго закреплённый конец)	$y'(0) - \alpha y(0) = 0$	$y''(l) + \beta y(l) = 0$

Таблица 13.1 Условия на концах

Физически правильно $\alpha > 0, \beta > 0$.

Рассматриваем в некотором линейном пространстве некоторый линейный оператор. Ищем собственные вектора, собственные значения, что и есть задача Штурма-Лиувилля. Попытка найти функции $X(x) \neq 0, X \in D(L)$: $LX = \lambda X$. X – собственный вектор, λ – собственное значение.

Теорема 1: 1) λ – действительные, однократные;

2) собственные векторы ортогональны: $(X_k, X_l) = \int_0^l X_k(x)X_l(x)dx = 0, k \neq l$.

Замечание: Если задача физически правильная ($\alpha > 0, \beta > 0, q(x) \geq 0$), то $\lambda \leq 0$, причём $\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow q(x) \equiv 0 + A_2 + B_2$. Тогда разговор идёт о функции $X_0 \equiv 1$.

Изменим немного оператор:

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) + M, M = const$$

Собственные векторы остаются такими же, собственные значения возрастают. (спектр сдвигается)

Лемма: L – симметрический (самосопряжённый) оператор $((Lf, g) = (f, Lg), (f, g) = \int_0^l f(x)g(x)dx)$.

Доказательство:

$$(Lf, g) = \int_0^l (pf')' g dx - \int_0^l qf g dx = pf' g|_0^l - \int_0^l pf' g' dx - \int_0^l qf g dx$$

$$(f, Lg) = \int_0^l f(pg')' dx - \int_0^l fq g dx = pf g'|_0^l - \int_0^l pf' g' dx - \int_0^l fq g dx$$

Последние два слагаемых в обоих выражениях равны, остаётся доказать равенство $pf' g|_0^l$ и $pf g'|_0^l$. Внеинтегральные члены в точке $x = 0$ $p(0)[f'(0)g(0) - f(0)g'(0)] = 0$? Предположим, что выполнено условие A_1 (A_2), тогда оба это условие выполнено. Если выполняется условие A_3 , то $[\alpha f(0)g(0) - \alpha f(0)g(0)] = 0$. В точке $x = l$ доказательство повторяется дословно.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1: Если $LX_k = \lambda_k X_k$.

Берём какой-то собственный вектор и домножаем его на себя $\lambda_k(X_k, X_k) = (\lambda_k X_k, X_k) = (LX_k, X_k) = (X_k, LX_k) = (X_k, \lambda_k X_k) = \bar{\lambda}_k(X_k, X_k)$. Тогда $\lambda_k(X_k, X_k) = \bar{\lambda}_k(X_k, X_k)$, при этом $(X_k, X_k) = ||X_k||^2 \neq 0$. Следовательно, $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$. Доказали действительность.

Если есть два собственных значения, два собственных вектора.

$(LX_k, X_l) = (X_k, LX_l)$. $(LX_k, X_l) = \lambda_k(X_k, X_l)$. $(X_k, LX_l) = \bar{\lambda}_l(X_k, X_l) = \lambda_l(X_k, X_l)$ (так как все собственные значения действительные). Следовательно, $\lambda_k(X_k, X_l) = \lambda_l(X_k, X_l)$. Т.к. $\lambda_k \neq \lambda_l$, $(X_k, X_l) = 0$. Ортогональность доказана.

Доказательство замечания: $LX_k = \lambda_k X_k$.

$\lambda_k ||X_k||^2 = (LX_k, X_k) = p(l)X'_k(l)X_k(l) - p(0)X'_k(0)X_k(0) - \int_0^l p(x)(X'_k)^2 dx - \int_0^l q(x)(X_k)^2 dx$. $\int_0^l p(x)(X'_k)^2 dx \leq 0$, $-\int_0^l q(x)(X_k)^2 dx \leq 0$, краевые условия типа 1 и 2 дают ноль в первых двух слагаемых, условие 3 типа: $p(l)X'_k(l)X_k(l) = -p(l)\beta X_k^2(l) \leq 0$; $-p(0)X'_k(0)X_k(0) = -p(0)\alpha X_k^2(0) \leq 0$. Следовательно, $(LX_k, X_k) \leq 0$, $\lambda_k \leq 0$.

$\int_0^l p(x)(X'_k)^2 dx$. Так как $p(x) > 0$, $\int_0^l p(x)(X'_k)^2 dx = 0 \Rightarrow X_k \equiv C \equiv 1 \Rightarrow q(x) \equiv 0$. Единица удовлетворяет вторым краевым условиям.

Доказательство однократности собственных значений: Рассмотрим $Ly = \lambda y$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) - (q(x) + \lambda)y(x) = 0$$

Решения образуют двумерное линейное пространство.

Предположим, что λ – кратный корень. Это означает, что есть два линейно независимых собственных вектора $X^{(1)}(x), X^{(2)}(x)$ с этим λ .

Общее решение $y = C_1 X^{(1)}(x) + C_2(x) X^{(2)}(x)$.

13.2 Функция Грина

Теорема 2: Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля. Тогда \exists обратный оператор $G = L^{-1}: C[0; l] \rightarrow D(L)$ ($L: D(L) \rightarrow C[0; l]$).

$$(Gf)(x) = \int_0^l G(x, s) f(s) ds$$

где $G(x, s)$ – функция Грина задачи Штурма-Лиувилля. Операторы такого вида называются интегральными.

Определение: Функция двух переменных $G(x, s)$, определенная на квадрате $(x, s) \in [0; l] \times [0; l]$, называется функцией Грина задачи Штурма-Лиувилля, если выполнены следующие условия:

- 1) при фиксированном s $LG = 0$ при $x \neq s$ (рис.13.1);
- 2) непрерывна в точке $x = s$;
- 3) $G_x(s + 0, s) - G_x(s - 0, s) = \frac{1}{p(s)}$;
- 4) при фиксированном s $G(x, s)$ удовлетворяет условиям (A) и (B).

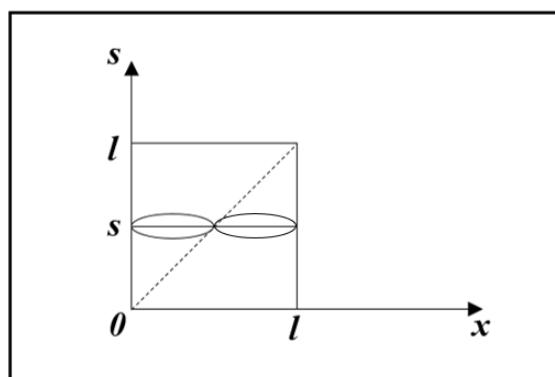


Рис.13.1 Квадрат, в котором определена наша функция. Овалами выделены области, где функция удовлетворяет уравнению $(x \neq s)$.

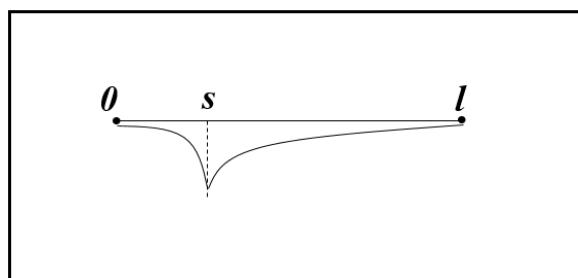


Рис.13.2 Функция Грина при фиксированном s

Построение функции Грина

Исходим из уравнения $Ly = 0$. Возьмём какое-то его решение $y_1(x) \not\equiv 0$, которое удовлетворяет уравнению и условию (A). Возьмём другую функцию $y_2(x) \not\equiv 0$, которая удовлетворяет уравнению и условию (B). $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы.

$$G(x, y) = \begin{cases} C_1(s)y_1(x), & 0 < x < s \\ C_2(s)y_2(x), & s < x < l \end{cases}$$

Данная функция вне зависимости $C_1(s)$ и $C_2(s)$ удовлетворяет условию 4). Также она удовлетворяет уравнению (1)). Разберёмся с условием 2):

$$C_1(s)y_1(s) = C_2(s)y_2(s)$$

$$\frac{C_1(s)}{y_2(s)} = \frac{C_2(s)}{y_1(s)} = C(s)$$

Получается:

$$G(x, y) = \begin{cases} C(s)y_2(s)y_1(s), & 0 < x < s \\ C(s)y_1(s)y_2(s), & s < x < l \end{cases}$$

Выполняется второе условие.

Лекция 14

14.1 Функция Грина задачи Штурма-Луивилля.

Определение: Оператор Штурма-Луивилля – это дифференциальный оператор, который имеет следующий вид:

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) q(x), p(x) \in C^1[0, l], p \geq p_0 > 0, q(x) \in C[0, l]$$

Если применить этот оператор к функции y : $Ly = (py')' - qy = py'' + p'y' - qy$.

Область определения этого оператора $D(L) = \{y \in C^2[0, l] \mid$ краевые условия равные (A) и (B) на концах отрезка 0 и l соответственно).

Также выполняются условия A, B независимо друг от друга:

$$\begin{array}{ll} A(\text{одно из трех}) & B(\text{одно из трех}) \\ y(0) = 0 & y(l) = 0 \\ y'(0) = 0 & y'(l) = 0 \\ y'(0) + \alpha y(0) = 0 & y'(l) + \beta y(l) = 0 \end{array}$$

Определение: Функция Грина – это функция двух переменных $G(x, s)$, где $x, s \in [0, l]$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) при фиксированном s $LG = 0$, при $x \neq s$ (т.е. не на диагонали) и удовлетворяет условиям A, B;
- 2) $G(s+0, s) - G(s-0, s) = 0$;
- 3) $G_x(s+0, s) - G_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$.

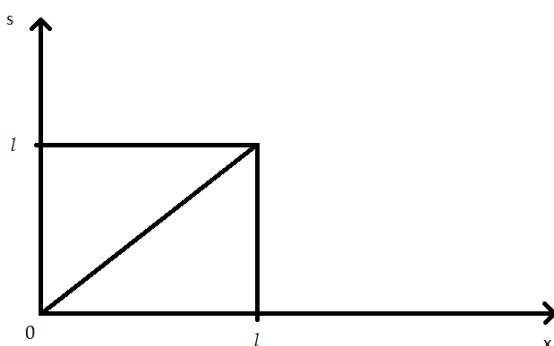


Рис. 14.1 Область определения функции Грина (квадрат).

Функция Грина строится по формуле:

$G(x, s) = \begin{cases} c(s)y_1(x)y_2(s), & 0 \leq x \leq s \\ c(s)y_1(s)y_2(x), & s \leq x \leq l \end{cases}$, $y_1(x) \neq 0$ – решение уравнения $Ly_1 = 0$ + краевое условие A , $y_2(x) \neq 0$ – решение уравнения $Ly_2 = 0$ + краевое условие B , причем $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, также $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма-Луивилля.

Очевидно, что построенная таким образом функция Грина удовлетворяет 1 и 2 условиям из её определения. Проверим условие 3: $c(s)y_1(s)y_2'(s) - c(s)y_1'(s)y_2(s) = \frac{1}{p(s)}$,

$$c(s) \underbrace{[y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)]}_{\text{определитель Вронского } W(s)} = \frac{1}{p(s)}, W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}, \text{ тогда } c(s) = \frac{1}{p(s)W(s)} = \frac{1}{p(0)W(0)}.$$

$py'' + p'y' - qy$, определитель Вронского $W' = -\frac{p}{p'}W$, решая это уравнение, получаем $(pW)' = 0$. Значит, $pW = \text{const}$.

В итоге функция Грина имеет следующий вид:

$G(x, s) = \frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} y_1(x)y_2(s), & 0 \leq x \leq s \\ y_1(s)y_2(x), & s \leq x \leq l \end{cases}$, $y_1(x) \neq 0$ – решение уравнения $Ly_1 = 0$ + краевое условие A , $y_2(x) \neq 0$ – решение уравнения $Ly_2 = 0$ + краевое условие B , причем $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, также $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма-Луивилля.

Рассмотрим следующий интегральный оператор G : $(GF)(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$.

Заметим, что у этого оператора симметрическое ядро $G(x, s) = G(s, x)$.

Пример построения функции Грина:

Возьмем оператор $L = \frac{d^2}{dx^2}$, гр. усл. $A_1 + B_1$ на $[0, 1]$ (т. е. $l = 0$). $y_1(x)$ – решение уравнения: $y'' = 0$, $y_1(0) = 0$, $y_1(x) = x$. $y_2(x)$ – решение уравнения: $y_2(1) = 0$, $y_2(x) = 1 - x$. $p(0) = 1$,

$$W = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Тогда $G(x, s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$

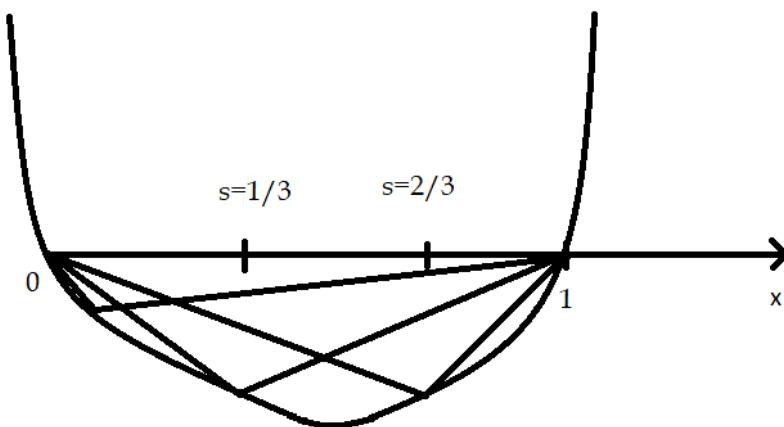


Рис. 14.2 График получившейся функции Грина (огибающая точек-парабола $s(s-1)$).

Теорема: Пусть $\lambda = 0$ не собственное значение оператора Штурма-Луивилля, тогда $G = L^{-1}$.

$$L: D(l) \rightarrow C[0, l], Ly \rightarrow f$$

$$G: C[0, l] \rightarrow D(L), Gf \rightarrow y, f \in C[0, l].$$

$$y(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds, \text{ тогда} \quad y'(x) = \left(\int_0^x G(x, s)f(s)ds + \int_x^1 G(x, s)f(s)ds \right)' = \\ \int_0^l G_x(x, s)f(s)ds + G(x, x-0)f(x) - G(x, x+0)f(x)$$

$$y'(x) = \int_0^l G_x(x, s)f(s)ds$$

$$y''(x) = \int_0^l G_{xx}(x, s)f(s)ds + G_x(x, x-0)f(x) - G_x(x, x+0)f(x) = \\ \int_0^l G_{xx}(x, s)f(s)ds - f(x)[G_x(x, x-0) - G_x(x, x+0)] = \int_0^l G_{xx}(x, s)f(s)ds - \frac{f(x)}{p(x)}$$

$$y''(x) = \int_0^l G_{xx}(x, s)f(s)ds - \frac{f(x)}{p(x)}$$

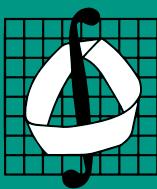
$$\text{Сделаем следующее: } Ly = -q(x) \int_0^l G(x, s)f(s)ds + p'(x) \int_0^l G_x(x, s)f(s)ds + \\ p(x) \left(\int_0^l G_{xx}(x, s)f(s)ds - \frac{f(x)}{p(x)} \right) = \int_0^l LG(x, s)f(s)ds + f(x) = f(x)$$

$$G: L_2(0; l) \rightarrow L_2(0; l) - \text{гильбертово пространство.}$$

Теорема Гильберта-Шмидта:

Если существует оператор G в гильбертовом пространстве и G является компактным самосопряженным, то у него \exists ортогональный базис из собственных векторов. $GX_k = \mu_k X_k$, X_k –собственный вектор, $\mu_k \rightarrow 0$, $\mu_k \in R$ – собственные значения.

$$LX_k = \frac{1}{\mu_k} X_k, \lambda_k \rightarrow \infty.$$



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ