Занятие 1. Точки и множества в пространстве, предел функции нескольких переменных и дифференцируемость функции нескольких переменных.

В данном видеоразборе мы познакомимся с первыми тремя темами курса математического анализа-II, а знакомиться с этими темами мы будем на примере задач из списка задач к общему зачёту, опубликованному на кафедре математики Физического факультета. Давайте приступать!

Оглавление

1. Точки и множества в пространстве. 2
№1 2
№2. 3
№3. 4
№4. 4
№7. 5
№8. 5

2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывные функции. 6
№11. 7
№15. 7

3. Дифференцируемые функции нескольких переменных. 8
№17. 9
№25. 10
№26. 11
№28. 12
№32. 12

4. Практика. 12
№5. 12
№6. 13
№9. 13
№10. 13
№12. 14
№13. 14
№14. 15
№16. 16
№18. 16
№19. 17
№20. 18
№21. 18
№22. 19
№23. 20
№24. 21
№27. 21

№29. 22
№30. 22
№31. 23
№32. 23
№34. 23

1. Точки и множества в пространстве.

В первую очередь давайте вспомним основные определения вида точек множества $\{M\}$ из m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ (если прописанные здесь слова Вас смущают, настоятельно рекомендуем прочесть лекционный материал, например, Гл.9 §1).

- Точка A называется внутренней точкой множества $\{M\}$, если существует ε-окрестность точки A, целиком принадлежащая множеству $\{M\}$.
- Точка A называется граничной точкой множества $\{M\}$, если в любой ε-окрестности точки A содержатся как точки множества $\{M\}$, так и точки, которые этому множеству не принадлежат (при этом граничная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$).
- Точка A называется предельной точкой множества $\{M\}$, если в любой ε-окрестности точки A содержатся точки из множества $\{M\}$, отличные от A (при этом предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$).
- Точка A называется изолированной точкой множества $\{M\}$, если она принадлежит $\{M\}$ и существует ε-окрестность точки A, в которой нет других точек из $\{M\}$, кроме A.

Эти же определения на языке «эпсилон-дельта» ($\rho(M, M_1)$ обозначает расстояние в евклидовом пространстве, подробнее в Гл.9 §1)

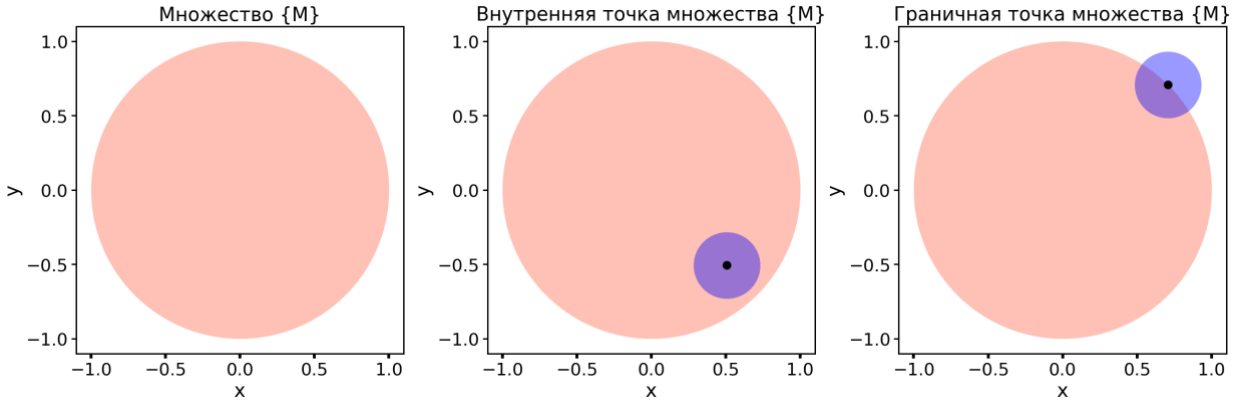
- Точка A называется внутренней точкой множества $\{M\}$, если $\exists\ \varepsilon > 0$ такая, что $\forall M$ из множества $\rho(M, A) < \varepsilon$, причём $M \in \{M\}$.
- Точка A называется граничной точкой множества $\{M\}$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists M_1 \in \{M\}$ такая что $\rho(M_1, A) < \varepsilon$; и для того же $\varepsilon\ \exists M_2 \notin \{M\}$ такая что $\rho(M_2, A) < \varepsilon$. (при этом граничная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$).
- Точка A называется предельной точкой множества $\{M\}$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists M_1 \in \{M\}$: $\rho(M_1, A) < \varepsilon$, причём $M_1 \neq A$. (при этом предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$).
- Точка A называется изолированной точкой множества $\{M\}$, если $A \in \{M\}$ и $\exists \varepsilon > 0$: $\forall M$ таких, что $\rho(M, A) < \varepsilon$ и $M \notin \{M\}$.

В качестве замечания также можем указать, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой, а граничная точка множества может быть его предельной точкой и может быть изолированной точкой. Давайте попробуем познакомиться с этими определениями на примере №1-3 из списка задач к общему зачету!

Найдите все граничные и все предельные точки множества точек на плоскости:

№1. $\{\mathbf{M}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 < \mathbf{1}\}$

Графически множество $\{M\}$ представлено на первой панели рисунка ниже. Очевидно, что любая точка данного множества является его внутренней (а следовательно, и предельной) точкой – схематически это изображено на второй панели. Обратите внимание – даже если мы рассмотрим точку A множества $\{M\}$, например, $(x_0, y_0) = (0.999, 0)$ – мы всегда сможем найти такую ε-окрестность точки A (например, с $\varepsilon = 0.0001$), которая будет целиком принадлежать нашему множеству.

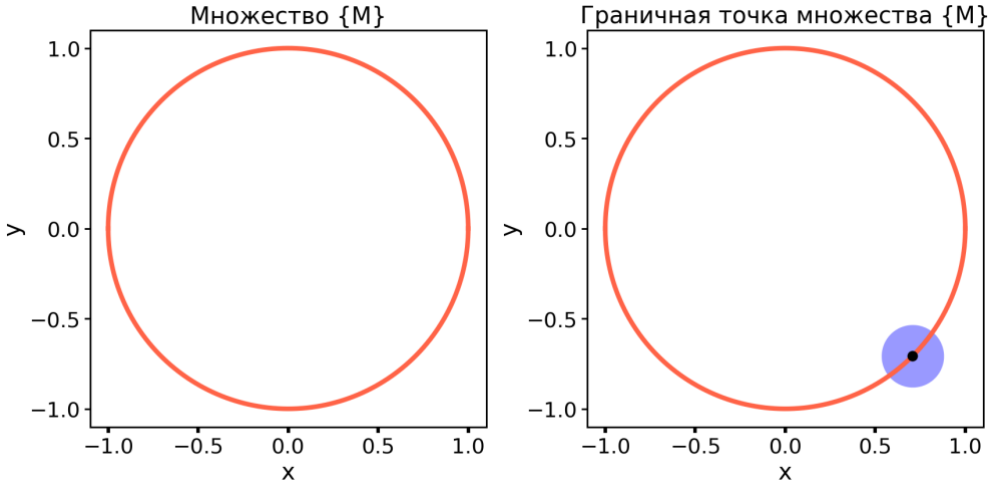


Также понятно, что любая точка из множества $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ является граничной точкой множества $\{M\}$ (см. третью панель). Более того, каждая из этих точек является предельной точкой – так как сколь угодно малую ε-окрестность граничной точки мы бы не проводили, в ней всегда будут точки из множества $\{M\}$. Это как раз тот случай, когда граничные (и предельные точки) не принадлежат исходному множеству.

Ответ: Граничные точки - $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$; предельные точки - $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

№2. $\{\mathbf{M}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{1}\}$

Графически множество $\{M\}$ представлено на первой панели рисунка ниже. В данном случае ни одна точка множества не является внутренней – в какой бы точке мы бы не проводили ε-окрестность произвольного радиуса, всегда в ней будут точки не из множества $\{M\}$ – а значит, все точки данного множества являются граничными (см. вторую панель). Более того, каждая точка этого множества является и предельной – по той же самой причине, что была описана выше.



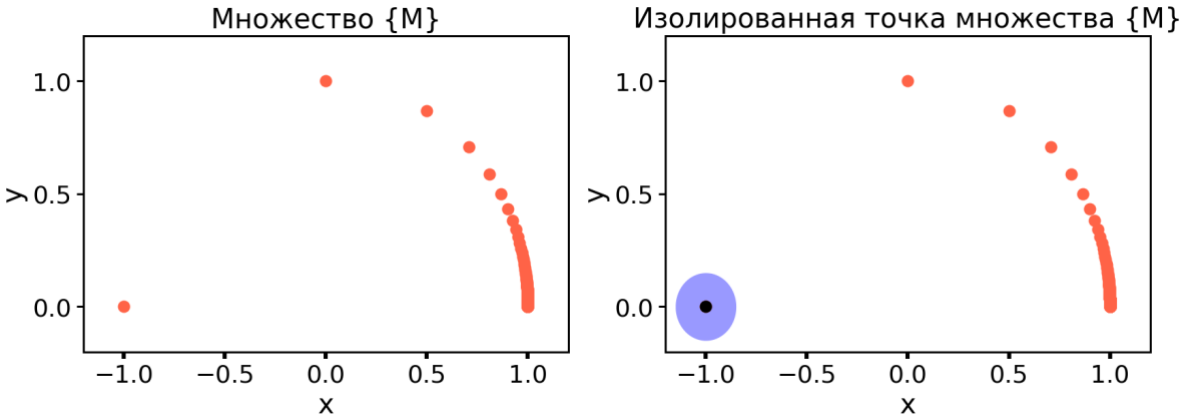
Это пример множества, когда все граничные (и предельные точки) принадлежат самому множеству.

Ответ: Граничные точки - $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$; предельные точки - $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$

№3. $\{\mathbf{M}\} = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}): \left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right), \mathbf{n} \in \mathbf{N}\right\}$

Начнём наносить на координатную плоскость точки из множества при $n = 1,2,3 \ldots$ и т.д. Результат изображен на первой панели рисунка ниже. Как мы видим, наше множество состоит из множества изолированных точек – рассмотрим, например, точку A при $n = 1$ $(x_1, y_1) = (\cos\pi, \sin\pi) = (-1,0)$. Как видно, существует такая ε-окрестность (например, $\varepsilon = 0.15$), которая изображена на второй панели, внутри которой нет никакой другой точки множества $\{M\}$. Хоть по мере увеличения номера n точки сгущаются – тем не менее, это всё также будет оставаться набором изолированных точек.

Более того, понятно, что любая из этих точек удовлетворяет определению граничной точки – в любой ε-окрестность уже рассмотренной точки A будет находиться сама точка A из множества $\{M\}$, а также точки не из множества $\{M\}$ – то есть любая точка множества является граничной. Предельных точек у множества нет, так точка A была бы предельной, если внутри ε-окрестности точки A была бы другая точка из множества $\{M\}$.

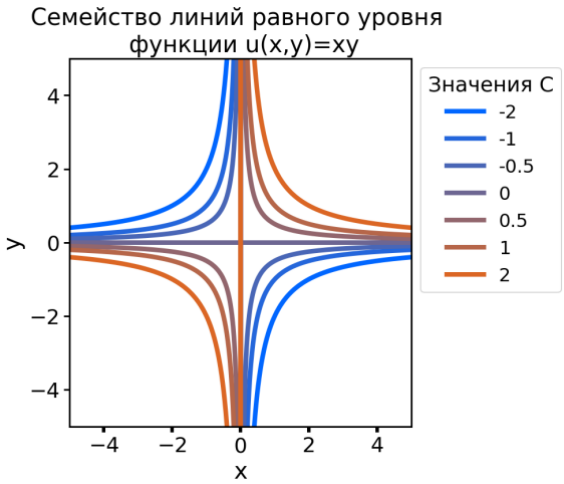


Ответ: Граничные точки - $\left\{(x,y): \left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right), n \in N\right\}$; предельных точек нет.

Давайте двигаться дальше – к №4-10 – познакомимся, как рисовать семейства линий равного уровня функции нескольких переменных! Для этого давайте сформулируем определение семейства линий равного уровня функции нескольких переменных $u(M)$ – это такое множество $\{M\}$ такое, что для любой точки A из этого множества $u(A) = C$ – одинаковому числу для всех точек из множества $\{M\}$. Давайте рассмотрим на примере:

№4. $\mathbf{u(x,y) = xy}$

Итак, выберем произвольное C. Тогда по определению получаем $u(x,y) = C = xy$ – последнее равенство задаёт при фиксированном значении C кривую в плоскости Oxy, которая изображена на рисунке ниже:



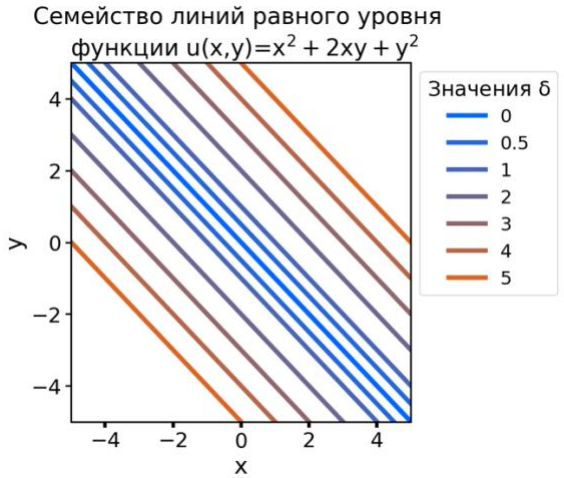
Конечно, это был простой пример – давайте двигаться дальше!

№7. $\mathbf{u(x,y) = x^2 + 2xy + y^2}$

Выберем произвольное <u>неотрицательное</u> $C = \delta^2$ – так как сама функция $u(x,y) \geq 0$ для любых значений аргументов. Тогда семейство кривых $\delta^2 = x^2 + 2xy + y^2$ – и есть семейство линий равного уровня. Решим это уравнение относительно y:

$$(x+y)^2 = \delta^2 \to y = \pm\delta - x$$

Изобразим при различных δ:



И ещё один пример для закрепления:

№8. $\mathbf{u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x}}$

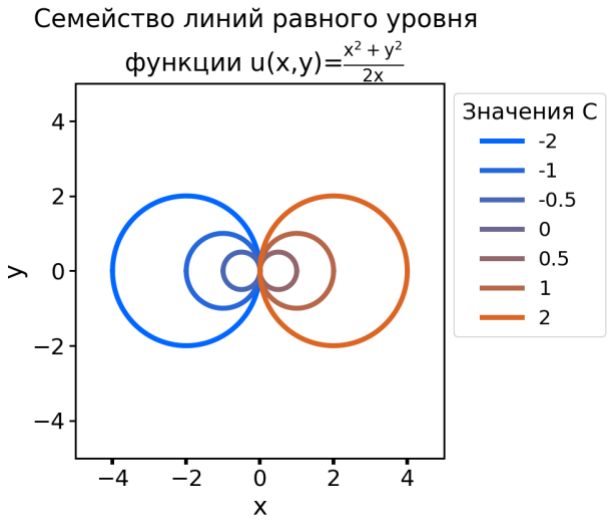
Выберем произвольное C. Тогда по определению получаем $u(x,y) = C = \frac{x^2+y^2}{2x}$. Решаем относительно y:

$$y^2 = 2xC - x^2 \to y = \pm\sqrt{2xC - x^2}$$

Проще для построения графиков можно поступить следующим образом: давайте в выражении $y^2 = 2xC - x^2$ перенесём всё в левую часть и выделим полный квадрат. Тогда:

$$y^2 - 2xC + x^2 = 0 \to y^2 + (x - C)^2 = C^2$$

То есть перед нами окружности радиуса $|C|$ и с центром в точке $(C, 0)$. Построим графики при различных C:



Оставшиеся номера – №5, №6, №9 и №10 будут кратко разобраны в самом конце конспекта. А мы движемся ко второй теме видеоразбора!

2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывные функции.

Для более полного усвоения теоретического материала советуем освежить в памяти лекционный материал, например, Гл. 9 §3. Однако определения предела функции в точке или непрерывности функции даются полностью аналогично, как это было сделано в курсе математического анализа в первом семестре для функции одной переменной. Напомним определение непрерывности функции в точке:

- Функция $u = f(M)$ называется <u>непрерывной</u> в точке A, если

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(A)$$

То же самое на языке «эпсилон-дельта»:

- Функция $u = f(M)$ называется <u>непрерывной</u> в точке A, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall M \in \{M\}$, удовлетворяющему условию $\rho(M, A) < \delta$ выполняется неравенство $|f(A) - f(M)| < \varepsilon$.

Такую непрерывность также называют непрерывностью по совокупности переменных. Также в случае функций нескольких переменных вводят понятие непрерывности по отдельным переменным. Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$. Тогда функция непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$$

То же самое на языке «эпсилон-дельта»: функция $u = f(x, y)$ называется <u>непрерывной</u> в точке $M_0\ (x_0, y_0)$ по переменной x, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$ удовлетворяющему условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| < \varepsilon$.
Аналогичное определение имеет место быть и для непрерывности по переменной y. Если же функция непрерывна в точке А, то она непрерывна в этой же точки и по отдельным переменным. Обратное неверно! Рассмотрим это на примерах!

Исследовать функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

№11. $\mathbf{u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \quad M_0(0, 0)}$

Рассмотрим вопрос непрерывности по переменной x:

$$\lim_{x\to 0} u(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq u(0,0) = 0$$

То есть данная функция не является непрерывной по переменной x в точке $M_0(0,0)$.
Аналогично по переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1 \neq u(0,0) = 0$$

То есть данная функция не является непрерывной по переменной y в точке $M_0(0,0)$. А значит, данная функция разрывна и по совокупности переменных – покажем это:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Рассмотрим стремление к нулю вдоль прямых $y = kx\ (k \neq 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

То есть ответ зависит от k – а значит в точке $M_0(0,0)$ предела нет.
<u>Замечание:</u> вообще говоря, это можно было бы и не показывать, сославшись на то обстоятельство, что раз функция разрывна по одной из переменных, она разрывна и в совокупности.

Ответ: Функция $u(x, y)$ разрывна как и по каждой из переменных, так и по совокупности в точке M_0.

№15. $\mathbf{u(x, y) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \quad M_0(0, 0)}$

Рассмотрим вопрос непрерывности по переменной x:

$$\lim_{x\to 0} u(x, 0) = \lim_{x\to 0} x \cdot 0 \cdot \ln(x^2 + 0^2) = 0 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(0, y) = \lim_{y\to 0} 0 \cdot y \cdot \ln(0^2 + y^2) = 0 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной y. В совокупности:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot y\cdot \ln(x^2+y^2)$$

Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2\cos\varphi\sin\varphi\ln r^2 = \sin 2\varphi \lim_{r\to 0} r^2\ln r$$

Чтобы вычислить предел $\lim\limits_{r\to 0} r^2\ln r$, воспользуемся правилом Лопиталя (убедитесь самостоятельно, что оно здесь применимо!):

$$\lim_{r\to 0} r^2\ln r = \lim_{r\to 0}\frac{\ln r}{1/r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{1/r}{-2/r^3} = \lim_{r\to 0} -\frac{r^3}{2r} = 0$$

То есть $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = u(0,0) = 0$ – а значит, данная функция непрерывна и по совокупности переменных.

Ответ: Функция $u(x,y)$ непрерывна как и по каждой из переменных, так и по совокупности в точке M_0.

Оставшиеся №12-14 будут кратко разобраны в конце конспекта. А мы движемся к третьей, последней на сегодня теме.

3. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

В №16-23 нам необходимо выполнить следующие задания - для функции $z = u(x,y)$ найти:

а) частные производные первого и второго порядков

б) первый и второй дифференциал

в) градиент

г) уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x,y)$ в точке $N_0\big(x_0, y_0, u(x_0,y_0)\big)$ и вектор нормали к этой плоскости

д) производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке $M_0(x_0,y_0)$

Давайте в первую очередь вспомним, по каким формулам нам вычислять все эти пункты из лекционного материала, например, Гл.9 §5-7.

Во-первых, частными производными функции $u(x,y)$ по переменным x и y в точке $M(x,y)$ называются следующие пределы соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}$$

Вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Дифференциал – это линейная часть приращения функции в точке. Посчитать первый и второй дифференциалы можно по формулам:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Заметим, что если слева стоит дифференциал (т.е. бесконечно малая величина), то и справа должны быть дифференциалы. Не забывайте ставить их!

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что второй дифференциал независимой переменной всегда равен 0, а $(dx)^2 = dx^2$ - просто форма записи.
Градиент – это вектор, показывающий направление максимального роста функции в точке. Вычисление градиентов широко применяется для нахождения экстремума сложных функций многих переменных, что, помимо прочего, находит применение в таких важных современных задачах машинного обучения, нейронных сетей и пр. Градиент можно вычислить по формуле:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x,y)$ в точке $N_0\big(x_0, y_0, u(x_0,y_0)\big)$ записывается как:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - \big(z - u(x_0,y_0)\big) = 0$$

А вектор нормали к плоскости, как мы помним из аналитической геометрии, записывается как:

$$\vec{n} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right\}$$

А производную по направлению вектора $\vec{L}$ можно вычислить как:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \big(\text{grad } u, \vec{l}\big)$$

где $\vec{l} = \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$ – единичный вектор. Обязательно отнормируйте направляющий вектор перед вычислением производной по направлению!

Давайте проведём эти вычисления для нескольких примеров!

№17. $\mathbf{u(x,y) = 8x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4, M_0 = (2,1), \vec{L} = (-1,-1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 16x - 4x^3;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 4y^3}$$

Частные производные второго порядка:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 - 12x^2;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 - 12y^2}$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$\boxed{\begin{gathered} du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (16x - 4x^3)dx + (4y - 4y^3)dy \\ d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 = (16 - 12x^2)dx^2 + (4 - 12y^2)dy^2 \end{gathered}}$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\boxed{\text{grad u} = (16x - 4x^3)\vec{e}_x + (4y - 4y^3)\vec{e}_y}$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,1) = 16 \cdot 2 - 4 \cdot 2^3 = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y}(2,1) = 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1^3 = 0$$

$$u(x_0, y_0) = u(2,1) = 8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 - 2^4 - 1^4 = 17$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(2,1)$:

$$\boxed{-(z - 17) = 0}$$

И вычисляем производную по направлению:

$$\text{grad u}\,(M_0) = (16 \cdot 2 - 4 \cdot 2^3)\vec{e}_x + (4 \cdot 1 - 4 \cdot 1^3)\vec{e}_y = 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна нулю:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad u}, \vec{l}) = \left(\text{grad u}, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y, -1 \cdot \vec{e}_x - 1 \cdot \vec{e}_y) = 0}$$

№16, №18-24 кратко будут разобраны в конце конспекта.

Рассмотрим формулы для дифференциалов первого и второго порядка сложной функции:

№25. $u = f(\xi, \theta), \xi = \sin t, \theta = \cos t$

Вычисление первого дифференциала производится по тем же самым формулам, кроме того, что в конце вместо $d\xi, d\theta$ необходимо подставить выражения через dt:

$$d\xi = \cos t\, dt; \quad d\theta = -\sin t\, dt$$

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi = \sin t \\ \theta = \cos t}} \cos t - \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi = \sin t \\ \theta = \cos t}} \sin t\right) dt}$$

Как себя проверить? Попробуем взять простую функцию $u = f(\xi, \theta) = \xi + \theta = \sin t + \cos t$. Тогда $du = (\cos t - \sin t)dt$. Посмотрим, что получается по нашей формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 1 \to du = (1 \cdot \cos t - 1 \cdot \sin t)dt$$

То есть точно такой же результат! Вычисляем второй дифференциал. <u>Обратите внимание!</u> Здесь появляется дополнительное слагаемое, заключенное в фигурные скобки (вывод смотрите в конспекте лекций):

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} d\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \theta} d\xi d\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi} d^2\xi + \frac{\partial f}{\partial \theta} d^2\theta\right\}$$

А значит, нам теперь необходимо вычислить $d^2\xi = -\sin t\, dt^2; d^2\theta = -\cos t\, dt^2$.

Подставляем в формулу выше:

$$\boxed{\begin{aligned} d^2u = &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\Big|_{\substack{\xi = \sin t \\ \theta = \cos t}} \cos^2 t - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \theta}\Big|_{\substack{\xi = \sin t \\ \theta = \cos t}} \cos t \sin t + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \sin^2 t\right) dt^2 \\ &+ \left\{-\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi = \sin t \\ \theta = \cos t}} \sin t - \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi = \sin t \\ \theta = \cos t}} \cos t\right\} dt^2 \end{aligned}}$$

Давайте проверим полученный результат на нашем примере: $u = f(\xi, \theta) = \xi + \theta = \sin t + \cos t$. Понятно, что $d^2u = -(\sin t + \cos t)dt^2$. Проверим это, используя нашу формулу:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 1; \ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

Подставим:

$$d^2u = (0 \cdot \cos^2 t - 2 \cdot 0 \cdot \cos t \sin t + 0 \cdot \sin^2 t)dt^2 + \{-1 \cdot \sin t - 1 \cdot \cos t\}dt^2$$

То есть мы получаем такой же результат. Если бы мы не учли красные скобки – результат получился бы неверным! Как мы видим, форма второго дифференциала <u>не инвариантна.</u>

Закрепим!

№26. $\mathbf{u = f(\xi, \theta), \xi = x^2 + y^2, \theta = x^2 - y^2}$

Теперь нам остаётся лишь подставить функцию в наши формулы для первого и второго дифференциала, предварительно вычислив:

$$d\xi = 2xdx + 2ydy; d\theta = 2xdx - 2ydy$$
$$d^2\xi = 2dx^2 + 2dy^2;\ d^2\theta = 2dx^2 - 2dy^2$$
$$du = \frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta = \frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2xdx + 2ydy) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2xdx - 2ydy)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$du = 2x\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}\right)dx + 2y\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}\right)dy$$

Опять-таки, проверим на простом примере $u = f(\xi, \theta) = \xi + \theta = 2x^2 \to du = 4x\,dx$. По нашей формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 1 \to du = 2x\,(1 + 1)dx + 2y(1 - 1)dy = 4xdx$$

То есть, всё тоже самое! Второй дифференциал:

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}d\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \theta}d\xi d\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}d\theta^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}d^2\xi + \frac{\partial f}{\partial \theta}d^2\theta\right\}$$

Дополнительное слагаемое вновь выделено красным! Подставляем:

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2xdx + 2ydy)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2xdx + 2ydy)(2xdx - 2ydy)$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2xdx - 2ydy)^2$$
$$+ \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2dx^2 + 2dy^2) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=x^2+y^2\\ \theta=x^2-y^2}}(2dx^2 - 2dy^2)\right\}$$

Проверим эту формулу на нашем простом примере $u = f(\xi, \theta) = \xi + \theta = 2x^2 \to d^2u = 4\,dx^2$. Подставим в нашу формулу второго дифференциала:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$
$$d^2u = 0 \cdot (2xdx + 2ydy)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (2xdx + 2ydy)(2xdx - 2ydy) + 0 \cdot (2xdx - 2ydy)^2$$
$$+ \{1 \cdot (2dx^2 + 2dy^2) + 1 \cdot (2dx^2 - 2dy^2)\} = 4 \cdot dx^2$$

Вновь, если бы мы не учли слагаемое в фигурных скобках, мы бы получили неверный результат.

№27 будет разобран в конце конспекта.

В №28-34 нам предлагают ответить на вопрос: имеет ли функция $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ частные производные первого порядка в точке (0,0)? И если имеет, то найти их. Давайте попробуем ответить на этот вопрос!

№28. $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt[3]{\mathbf{xy}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}$

Итак, чтобы найти частную производную в точке $(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0) = (0,0)$ воспользуемся определением:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0) = \lim_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\mathrm{u}(\mathrm{x}_0+\Delta\mathrm{x},\mathrm{y}_0)-\mathrm{u}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)}{\Delta\mathrm{x}}$$

Подставим нашу функцию:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(0,0) = \lim_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\sqrt[3]{(0+\Delta\mathrm{x})\cdot 0\,(0+\Delta\mathrm{x}+0)}-\sqrt[3]{0\cdot 0(0+0)}}{\Delta\mathrm{x}} = 0$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}(0,0) = \lim_{\Delta \mathrm{y}\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot(0+\Delta\mathrm{y})\,(0+0+\Delta\mathrm{y})}-\sqrt[3]{0\cdot 0(0+0)}}{\Delta\mathrm{y}} = 0$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 0.

<u>Обратите внимание!</u> Нельзя сначала получать формулу частной производной, а потом подставлять туда вместо x,y значения $(0,0)$ - результат получится неверным!

Закрепим:

№32. $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt[3]{\mathbf{x}^3+\mathbf{y}^3}$

Подставим нашу функцию в определение частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(0,0) = \lim_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\sqrt[3]{(0+\Delta\mathrm{x})^3+0^3}-\sqrt[3]{0^3+0^3}}{\Delta\mathrm{x}} = \lim_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\Delta\mathrm{x}}{\Delta\mathrm{x}} = 1$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}(0,0) = \lim_{\Delta \mathrm{y}\to 0}\frac{\sqrt[3]{0^3+(0+\Delta\mathrm{y})^3}-\sqrt[3]{0^3+0^3}}{\Delta\mathrm{y}} = 1$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 1.

И на этом мы будем заканчивать! Попробуйте в качестве самопроверки решить оставшиеся номера:

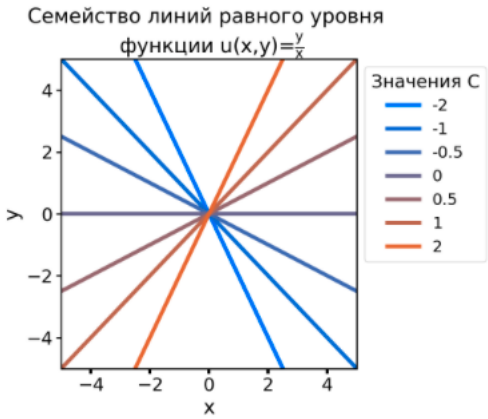
№5-6, №9-10, №12-14, №16, №18-24, №27, №29-31, №33-34

Ниже будут приложены краткие решения для самопроверки – но попробуйте сделать в первую очередь самостоятельно! До новых встреч!

4. Практика.

№5. $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$

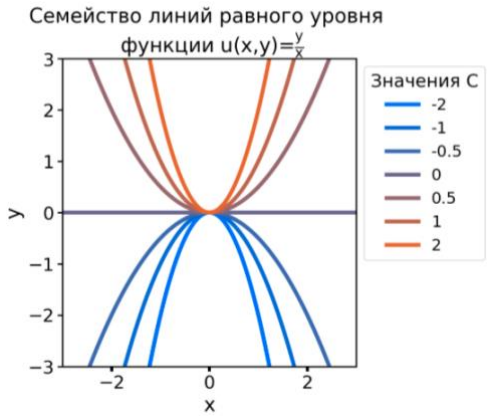
Итак, выберем произвольное C. Тогда по определению получаем $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{C} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \to \mathrm{y} = \mathrm{Cx}$. Графически:



№6. $\mathbf{u(x,y) = \frac{y}{x^2}}$

Выберем произвольное C. Тогда по определению получаем $u(x,y) = C = \frac{y}{x^2} \to y = Cx^2$.

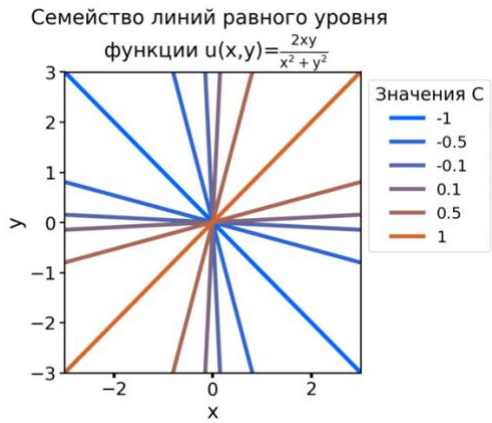
Графически:



№9. $\mathbf{u(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}}$

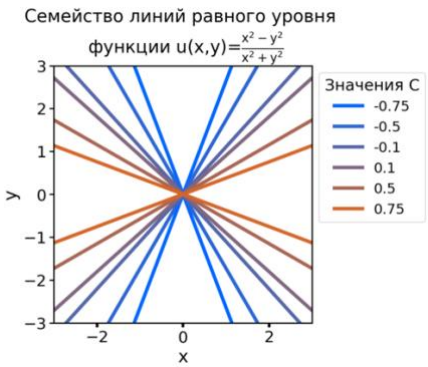
Выберем произвольное $C \neq 0$. Тогда: $u(x,y) = C = \frac{2xy}{x^2+y^2} \to y = \frac{x}{C}\left(1 \pm \sqrt{1-C^2}\right)$.

Графически:



№10. $\mathbf{u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

Выберем произвольное $C \neq 0$. Тогда: $u(x,y) = C = \frac{2xy}{x^2+y^2} \to y = \pm\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}x$. Графически:



№12. $\mathbf{u(x,y)} = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}, \quad M_0(0,0)$

Рассмотрим вопрос непрерывности по переменной x:

$$\lim_{x\to 0} u(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+0^3}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} x = 0 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3+0^3}{y^2+0^2} = \lim_{y\to 0} y = 0 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной y. В совокупности:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^3+x^3}{y^2+x^2}$$

Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^3\varphi + r^3\cos^3\varphi}{r^2} = (\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)\lim_{r\to 0} r = 0$$

То есть $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = u(0,0) = 0$ – а значит, данная функция непрерывна и по совокупности переменных.

Ответ: Функция $u(x,y)$ непрерывна как и по каждой из переменных, так и по совокупности в точке M_0.

№13. $\mathbf{u(x,y)} = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}, \quad M_0(0,0); M_1(0;1)$

Рассмотрим вопрос непрерывности по переменной x в точке M_0:

$$\lim_{x\to 0} u(x,0) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(0,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной y. В совокупности:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{\sin(\sin\varphi\cos\varphi\ r^2)}{\sin\varphi\cos\varphi\ r^2} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\lim_{r\to 0}\frac{\sin(\sin\varphi\cos\varphi\ r^2)}{r^2}$$
$$= \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = 1 = u(0,0)$$

При вычислениях подразумевается, что $\sin\varphi \neq 0, \cos\varphi \neq 0$ - иначе в этом случае $x = 0$ или $y = 0$.

Значит, данная функция непрерывна и по совокупности переменных в точке M_0.

Исследуем точку M_1 по переменной x:

$$\lim_{x\to 0} u(x,1) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(0,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной y. В совокупности:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin(xy)}{xy}$$

Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, y = 1 + r\sin\varphi$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{\sin(r\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\ r^2)}{r\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\ r^2} = \frac{1}{\cos\varphi}\lim_{r\to 0}\frac{\sin\big(r\cos\varphi + o(r)\big)}{r + o(r)} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = 1$$

Ответ: Функция $u(x,y)$ непрерывна как и по каждой из переменных, так и по совокупности в точках M_0, M_1

№14. $\mathbf{u(x,y) = \begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0\\ 1, & x = 0\end{cases}}$, $\mathbf{M_0(0,0); M_1(1;0); M_2(0;1)}$

Рассмотрим вопрос непрерывности по переменной x в точке M_0:

$$\lim_{x\to 0} u(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot 0)}{x} = 0 \neq u(0,0)$$

То есть данная функция не является непрерывной по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(0,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной y. Раз по переменной x функция разрывна, она разрывна и по совокупности переменных. Исследуем точку M_1:

$$\lim_{x\to 1} u(x,0) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x\cdot 0)}{x} = 0 \neq u(0,0)$$

То есть данная функция не является непрерывной по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 0} u(1,y) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(1\cdot y)}{1} = 0 \neq u(0,0)$$

То есть данная функция не является непрерывной по переменной y. А значит, данная функция не является непрерывной и по совокупности. Исследуем точку M_2:

$$\lim_{x\to 0} u(x,1) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot 1)}{x} = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной x. По переменной y:

$$\lim_{y\to 1} u(0,y) = \lim_{y\to 1} 1 = 1 = u(0,0)$$

То есть данная функция непрерывна по переменной y. В совокупности:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\sin(xy)}{x}$$

Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = 1 + r\sin\varphi$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\ r^2)}{r\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}\lim_{r\to 0}\frac{\sin\big(r\cos\varphi + o(r)\big)}{r} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = 1$$

Значит, данная функция непрерывна и по совокупности переменных в точке M_2.

Ответ: Функция $u(x,y)$ непрерывна как и по каждой из переменных, так и по совокупности в точке M_2; в точке M_0 разрывна по x и непрерывна по y, разрывна по совокупности; в точке M_1 разрывна и по x, и по y, разрывна по совокупности.

№16. $\mathbf{u(x,y) = 2x + 3y,\ M_0 = (3,2), \vec{L} = (3,-2)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 2dx + 3dy$$

$$d^2u = 0$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad } u = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(3,2) = 2;\ \frac{\partial u}{\partial y}(3,2) = 3$$

$$u(x_0,y_0) = u(3,2) = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(3,2)$:

$$2(x-3) + 3(y-2) - (z-12) = 0$$

И вычисляем производную по направлению:

$$\text{grad } u\ (M_0) = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad } u, \vec{l}\right) = \left(\text{grad } u, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\cdot\vec{e}_x + 3\cdot\vec{e}_y, 3\cdot\vec{e}_x - 2\cdot\vec{e}_y\right) = 0$$

№18. $\mathbf{u(x,y) = xy(3 - x - y), M_0 = (1,1), \vec{L} = (-1,-1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 3 - 2y - 2x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (3y - 2xy - y^2)dx + (3x - x^2 - 2xy)dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 = -2ydx^2 + 2(3 - 2y - 2x)dxdy - 2xdy^2$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad } u = (3y - 2xy - y^2)\vec{e}_x + (3x - x^2 - 2xy)\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 0$$

$$u(x_0, y_0) = u(1,1) = 1$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,1)$:

$$-(z - 1) = 0$$

И вычисляем производную по направлению:

$$\text{grad } u\,(M_0) = 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad } u, \vec{l}\right) = \left(\text{grad } u, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y, -1 \cdot \vec{e}_x - 1 \cdot \vec{e}_y\right) = 0$$

№19. $\mathbf{u(x,y) = x^2y^3(6 - 2x - 3y), M_0 = (1,1), \vec{L} = (-1,-1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12xy^3 - 6x^2y^3 - 6xy^4; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 18x^2y^2 - 6x^3y^2 - 12x^2y^3$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12y^3 - 12xy^3 - 6y^4; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 36xy^2 - 18x^2y^2 - 24xy^3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 36x^2y - 12x^3y - 36x^2y^2$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (12xy^3 - 6x^2y^3 - 6xy^4)dx + (18x^2y^2 - 6x^3y^2 - 12x^2y^3y)dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 = (12y^3 - 12xy^3 - 6y^4)dx^2 + 2(36xy^2 - 18x^2y^2 - 24xy^3)dxdy + (36x^2y - 12x^3y - 36x^2y^2)dy^2$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad } u = (12xy^3 - 6x^2y^3 - 6xy^4)\vec{e}_x + (18x^2y^2 - 6x^3y^2 - 12x^2y^3y)\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 0$$

$$u(x_0, y_0) = u(1,1) = 1$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,1)$:

$$-(z-1)=0$$

И вычисляем производную по направлению:

$$\text{grad u}\,(M_0) = 0\cdot\vec{e}_x + 0\cdot\vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad u}, \vec{l}\right) = \left(\text{grad u}, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0\cdot\vec{e}_x + 0\cdot\vec{e}_y, -1\cdot\vec{e}_x - 1\cdot\vec{e}_y\right) = 0$$

№20. $\mathbf{u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, M_0 = (1,1), \vec{L} = (-1,-1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -3;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 = 6xdx^2 - 6dxdy + 6ydy^2$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad u} = (3x^2 - 3y)\vec{e}_x + (3y^2 - 3x)\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 = 0;\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 = 0$$

$$u(x_0,y_0) = u(1,1) = 3\cdot 1^3 + 3\cdot 1^3 - 3\cdot 1\cdot 1 = 3$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,1)$:

$$-(z-3)=0$$

И вычисляем производную по направлению:

$$\text{grad u}\,(M_0) = (3\cdot 1^2 - 3\cdot 1)\vec{e}_x + (3\cdot 1^2 - 3\cdot 1)\vec{e}_y = 0\cdot\vec{e}_x + 0\cdot\vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad u}, \vec{l}\right) = \left(\text{grad u}, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0\cdot\vec{e}_x + 0\cdot\vec{e}_y, -1\cdot\vec{e}_x - 1\cdot\vec{e}_y\right) = 0$$

№21. $\mathbf{u(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), M_0 = (\sqrt{3},1), \overrightarrow{L_1} = (1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{L_2} = (\sqrt{3},1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad } u = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\sqrt{3},1) = -\frac{1}{4};\ \frac{\partial u}{\partial y}(\sqrt{3},1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$u(x_0,y_0) = u(\sqrt{3},1) = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(\sqrt{3},1)$:

$$-\frac{1}{4}(x-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(y-1) - \left(z-\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

И вычисляем производную по направлению $\overrightarrow{L_1}$:

$$\text{grad } u\ (M_0) = -\frac{1}{4}\cdot\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = (\text{grad } u, \overrightarrow{l_1}) = \left(\text{grad } u, \frac{\vec{L}_1}{|\overrightarrow{L_1}|}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cdot\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\vec{e}_y, 1\cdot\vec{e}_x - \sqrt{3}\cdot\vec{e}_y\right) = -\frac{1}{2}$$

И, наконец, вычисляем производную по направлению $\overrightarrow{L_2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l_2} = (\text{grad } u, \overrightarrow{l_2}) = \left(\text{grad } u, \frac{\vec{L}_2}{|\overrightarrow{L_2}|}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cdot\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\vec{e}_y, \sqrt{3}\cdot\vec{e}_x + 1\cdot\vec{e}_y\right) = 0$$

№22. $\mathbf{u(x,y) = x^y - y^x, M_0 = (e,e), M_1 = (1,1);\ \vec{L} = (1,-1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x\ln y;\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x - xy^{x-1}$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (y-1)yx^{y-2} - y^x\ln^2 y;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x - y^{x-1} - xy^{x-1}\ln y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x - (x-1)xy^{x-2}$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (yx^{y-1} - y^x\ln y)dx + (x^y\ln x - xy^{x-1})dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$
$$= \left((y-1)yx^{y-2} - y^x \ln^2 y\right)dx^2$$
$$+ 2(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x - y^{x-1} - xy^{x-1}\ln y)dxdy$$
$$+ (x^y \ln^2 x - (x-1)xy^{x-2})dy^2$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad } u = (yx^{y-1} - y^x \ln y)\vec{e}_x + (x^y \ln x - xy^{x-1})\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(e,e) = 0;\ \frac{\partial u}{\partial y}(e,e) = 0$$
$$u(x_0, y_0) = u(e,e) = 0$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(e,e)$:

$$-z = 0$$

И вычисляем производную по направлению $\vec{L}$:

$$\text{grad } u\ (M_0) = \ 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad } u, \vec{l}\right) = \left(\text{grad } u, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{|\vec{L}|}\left(0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y, \vec{L}\right) = 0$$

Анализируем точку M_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 1;\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = -1$$
$$u(x_0, y_0) = u(1,1) = 0$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_1(1,1)$:

$$(x-1) - (y-1) - z = 0$$

И вычисляем производную по направлению $\vec{L}$:

$$\text{grad } u\ (M_1) = \ 1 \cdot \vec{e}_x - 1 \cdot \vec{e}_y$$

Производная по направлению будет равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad } u, \vec{l}\right) = \left(\text{grad } u, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \cdot \vec{e}_x - 1 \cdot \vec{e}_y, 1 \cdot \vec{e}_x - 1 \cdot \vec{e}_y\right) = \sqrt{2}$$

№23. $\mathbf{u(x,y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1, M_0 = (1,1), \vec{L} = (\sqrt{3}, 1)}$

Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2xy;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - x^2$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 2y;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -2x;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

Подставим эти величины в формулы первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (3x^2 - 2xy)dx + (3y^2 - x^2)dy$$
$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 = 6xdx^2 - 4xdxdy + 6ydy^2$$

И подставляем в формулу для градиента:

$$\text{grad u} = (3x^2 - 2xy)\vec{e}_x + (3y^2 - x^2)\vec{e}_y$$

Вычислим эти производные в точке M_0 и подставим в формулу касательной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1;\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 3 \cdot 1^2 - 1^2 = 2$$

$$u(x_0, y_0) = u(1,1) = 1^3 - 1^2 \cdot 1 + 1^3 - 1 = 0$$

А значит уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,1)$:

$$(x - 1) + 2(y - 1) - z = 0$$

И вычисляем производную по направлению:

$$\text{grad u}\,(M_0) = (3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1)\vec{e}_x + (3 \cdot 1^2 - 1^2)\vec{e}_y = 1 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y$$

А значит, и производная по направлению будет равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\text{grad u}, \vec{l}\right) = \left(\text{grad u}, \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y, \sqrt{3} \cdot \vec{e}_x + 1 \cdot \vec{e}_y\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

№24. Для функции $\mathbf{u(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}}$ вычислить $\mathbf{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}}$.

Вычислим $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$$

Далее $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{x^2+y^2+z^2}\right) = 4xye^{x^2+y^2+z^2}$$

И, наконец:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4xye^{x^2+y^2+z^2}\right) = 4(2x^2 + 1)ye^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(4xye^{x^2+y^2+z^2}\right) = 8xyze^{x^2+y^2+z^2}$$

Ответ: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = 4(2x^2 + 1)ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 8xyze^{x^2+y^2+z^2}$

№27. Найти дифференциалы первого и второго порядка для сложной функции $\mathbf{u = f(\xi, \eta, \theta), \xi = xy, \eta = x - y, \theta = x + y}$.

Предварительно вычислим:

$$d\xi = ydx + xdy;\ d\eta = dx - dy;\ d\theta = dx + dy$$

$$d^2\xi = 2dxdy;\ d^2\eta = 0;\ d^2\theta = 0$$

Первый дифференциал:

$$du = \frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(ydx + xdy) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(dx - dy) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(dx + dy)$$

Проверим справедливость формулы! Возьмём, как всегда, простую функцию $u = f(\xi,\eta,\theta) = \xi + \eta + \theta = xy + x - y + x + y = xy + 2x$. Тогда $du = (y+2)dx + xdy$. Посмотрим, что получится по нашей формуле, с учётом $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 1$:

$$du = 1\cdot(ydx + xdy) + 1\cdot(dx - dy) + 1\cdot(dx + dy) = (y+2)dx + xdy$$

То есть, всё сходится! Выпишем формулу для второго дифференциала (осторожно, громоздко!):

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}d\xi^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}d\eta^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}d\theta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}d\xi d\eta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \theta}d\xi d\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \theta\,\partial \eta}d\theta d\eta + \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}d^2\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}d^2\eta + \frac{\partial f}{\partial \theta}d^2\theta\right\}$$

Не забываем про второе слагаемое, образовавшееся из-за того, что перед нами сложная функция! Подставляем выражения для $\xi(x,y), \eta(x,y), \theta(x,y)$:

$$\boxed{\begin{aligned} d^2u = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(ydx+xdy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(dx-dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(dx+dy)^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(ydx+xdy)(dx-dy) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(ydx+xdy)(dx+dy) \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \theta\,\partial \eta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}(dx+dy)(dx-dy) \\ & + \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}2dxdy + \frac{\partial f}{\partial \eta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\substack{\xi=xy\\ \eta=x-y\\ \theta=x+y}}\cdot 0\right\} \end{aligned}}$$

Проверим для нашего примера $u = f(\xi,\eta,\theta) = \xi + \eta + \theta = xy + x - y + x + y = xy + 2x$. Тогда $d^2u = 2dxdy$, а все вторые частные производные функции f равны 0. Подставим в формулу:

$$d^2u = 0\cdot(ydx+xdy)^2 + 0\cdot(dx-dy)^2 + 0\cdot(dx+dy)^2 + 2\cdot 0\cdot(ydx+xdy)(dx-dy) + 2\cdot 0\cdot(ydx+xdy)(dx+dy) + 2\cdot 0\cdot(dx+dy)(dx-dy) + \{1\cdot 2dxdy + 1\cdot 0 + 1\cdot 0\} = 2dxdy$$

То есть вновь, всё сходится!

№29. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$

Подставим нашу функцию в определение частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\cdot 0} - \sqrt[3]{0^2\cdot 0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0^2\cdot \Delta y} - \sqrt[3]{0^2\cdot 0}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 0.

№30. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$

Подставим нашу функцию в определение частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-\sqrt[3]{0\cdot 0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot \Delta y}-\sqrt[3]{0\cdot 0}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 0.

№31. $\mathbf{u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x^2+y^2)}}$

Подставим нашу функцию в определение частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)\cdot 0\cdot\ (\Delta x^2+0^2)}-\sqrt[3]{0\cdot 0(0^2+0^2)}}{\Delta x} = 0$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot \Delta y\cdot\ (0+\Delta y^2)}-\sqrt[3]{0\cdot 0(0^2+0^2)}}{\Delta y} = 0$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 0.

№32. $\mathbf{u(x,y) = \sqrt[3]{x^5-y^5}}$

Подставим нашу функцию в определение частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^5-0^5}-\sqrt[3]{0^5-0^5}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{5/3}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{2/3} = 0$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0^5-(\Delta y)^5}-\sqrt[3]{0^5-0^5}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}-\frac{(\Delta y)^{5/3}}{\Delta y}$$
$$= -\lim_{\Delta y\to 0}(\Delta y)^{2/3} = 0$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 0.

№34. $\mathbf{u(x,y) = \sqrt[3]{yx^4+xy^4}}$

Подставим нашу функцию в определение частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot(0+\Delta x)^4+(0+\Delta x)\cdot\ 0^4}-\sqrt[3]{0\cdot 0^4+0\cdot 0^4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

Полностью аналогично с производной по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{(0+\Delta y)\cdot\ 0^4+0\cdot(0+\Delta y)^4}-\sqrt[3]{0\cdot 0^4+0\cdot 0^4}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

А значит, обе частные производные существуют и равны 0.