КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

# Занятие 8. Поверхностные интегралы Iго и IIго рода.

В заключительном занятии по математическому анализу-II мы изучим поверхностные интегралы Iго и IIго рода. Данные темы будем разбирать на примере решения задач, опубликованных на кафедре математики к общему зачёту. Перед началом просмотра данных материалов настоятельно рекомендуем в первую очередь ознакомиться с теоретической частью, описанной, например, здесь (Гл. 14 §2 – 3).

## Оглавление

**1. Поверхностные интегралы Iго рода. ..... 1**
№123. ..... 2
№125. ..... 3

**2. Приложения поверхностных интегралов Iго рода. ..... 3**
№126. ..... 4
№127. ..... 5

**3. Поверхностные интегралы IIго рода. ..... 6**
№129. ..... 10
№130. ..... 11
№132. ..... 12

**4. Практика ..... 14**
№121. ..... 14
№122. ..... 14
№124. ..... 15
№128. ..... 15
№131. ..... 16
№133. ..... 17



ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ENTANGLED teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

## 1. Поверхностные интегралы Iго рода.

В занятии 7 мы сформулировали определение площади поверхности и научились её вычислять. Воспользуемся этим определением для поверхностных интегралов Iго рода. Пусть нам дана поверхность S. Пусть также нам задана функция $g(x, y, z)$, определенная во всех точках поверхности S. Разобьём поверхность S на N маленьких участков, площадь каждого из которых $\Delta S_i$. Выберем внутри каждого участка разбиения произвольным образом точку $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим интегральную сумму:

$$I = \sum_i g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

Которая зависит не только от формы поверхности S и функции $g(x, y, z)$, но и от выбора кусочков разбиения поверхности, и от выбора точек $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Вычислив предел при $\Delta S = \max_i \Delta S_i \to 0$, получим <u>определение поверхностного интеграла Iго рода</u>:

$$\iint_S g(x, y, z)dS = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

По сути, поверхностный интеграл Iго рода – обобщение понятие двойного интеграла в случае, когда область интегрирования не является плоской фигурой. Методы вычисления зависят от способа задания поверхности S. Рассмотрим три случая:

1) S задана явно, уравнением вида $z = f(x, y), (x, y) \in G$

Тогда поверхностный интеграл Iго рода сводится к двойному по формуле (1):

$$\iint_S g(x, y, z)dS = \iint_G g\big(x, y, f(x, y)\big)\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy \qquad (1)$$

где, по сути, произошло лишь единственное преобразование из занятия 7:

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$$

2) S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0,\ (x, y) \in G$

В этом случае опять-таки можно воспользоваться тем фактом, что уравнение вида $F(x, y, z) = 0$ неявно задаёт функцию $z = f(x, y)$, причём нужные для использования формулы (1) частные производные $f_x, f_y$ определяются:

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z};\ f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Подставляя эти формулы в (1), получим формулу (2):

$$\iint\limits_S g(x,y,z)dS = \iint\limits_G g\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{1+\frac{F_x^2}{F_z^2}+\frac{F_y^2}{F_z^2}}\,dxdy \qquad (2)$$

<u>Замечание:</u> при данном подходе обязательно нужно избавиться от переменной $z$ в подынтегральном выражении. Если же от $z$ не получится избавиться, то поверхность, заданную уравнением $F(x,y,z)=0$ всегда можно параметризовать уравнениями $x=\phi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$ и следуем в пункт (3).

3) Поверхность S задана параметрически уравнениями $x=\phi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$, $(u,v)\in G$.

В данном случае формула для сведения поверхностного интеграла к двойному выглядит следующим образом:

$$\iint\limits_S g(x,y,z)dS = \iint\limits_G g\big(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv \qquad (3)$$

где функции A, B, C определяются (см. занятие 7):

$$A=\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix};\ B=\begin{vmatrix}\chi_u & \phi_u\\ \chi_v & \phi_v\end{vmatrix};\ C=\begin{vmatrix}\phi_u & \psi_u\\ \phi_v & \psi_v\end{vmatrix}$$

Потренируемся! Вычислим поверхностные интегралы Iго рода:

**№123. $\iint_S (x+y+z)dS$, где поверхность S: $x^2+y^2+z^2=1\ \cap z\geq 0$.**

Воспользуемся формулой (1). Так как по условию $z\geq 0$, можно выразить уравнение поверхности явным образом:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\qquad G=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$$

Область G получилась путём проецирования области – верхней ($z\geq 0$) половины сферы единичного радиуса на плоскость Oxy. Пользуемся формулой (1):

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = \iint\limits_G (x+y+f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_G \left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_G \frac{\left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy=\iint\limits_G \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy+\iint\limits_G dxdy$$

Второе слагаемое в сумме – это площадь области G, то есть единичного круга, равная $\pi$. Первое слагаемое вычислим путём перехода в полярные координаты (занятие 3):

$$\iint\limits_G \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho = 0$$

Так как первый сомножитель равен нулю. Итого:

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = 0+\pi = \pi$$

Точно такой же результат получился бы в случае вычислений по формуле (2).

**№125.** $\iint_S \left(\mathbf{x^2+y^2+z-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{dS}$**, где поверхность S:** $\mathbf{2z = 2-x^2-y^2 \ \cap z \geq 0}$**.**

Воспользуемся формулой (1). Поверхность S задана явно уравнением

$$z = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$$

Определим вид области G. По условию переменная $z \geq 0$. Подставим вместо z явное задание поверхности:

$$1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2} \geq 0 \to x^2+y^2 \leq 2$$

То есть область G – круг радиуса $\sqrt{2}$. Пользуемся формулой (1):

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)dS = \frac{1}{2}\iint\limits_G (x^2+y^2+1)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

Перейдём в полярные координаты:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_G (x^2+y^2+1)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\rho^2+1)\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho = \begin{Bmatrix} u = \rho^2+1 \\ du = 2\rho d\rho \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_1^3 u^{\frac{3}{2}}du = \frac{\pi}{5}(9\sqrt{3}-1)$$

Номера №121-122, №124 будут разобраны в конце.

## 2. Приложения поверхностных интегралов Iго рода.



ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ENTANGLED teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поверхностные интегралы Iго рода используются для вычислений физических величин. Посмотрим примеры физических задач, в которых возникают вычисления при помощи поверхностных интегралов Iго рода.

**№126. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $\mathbf{x^2+y^2+z^2=R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0}$ с помощью поверхностного интеграла.**

Получим формулу для координат центра масс. Разобьём нашу поверхность на настолько маленькие кусочки, чтобы каждый из них можно было считать материальной точкой. Тогда x-координата центра масс $x_c$ системы материальных точек запишется следующим образом:

$$x_c=\frac{\sum_i x_i\Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i}=\frac{\sum_i x_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i}{\sum_i \rho(x_i,y_i)\Delta S_i}$$

где $x_i$ – x-координата материальной точки с номером i, $\rho(x,y)$ – поверхностная плотность. Производя предельный переход:

$$x_c=\frac{\iint_S x\rho(x,y)dS}{\iint_S \rho(x,y)dS}$$

Абсолютно аналогичные формулы для y- и z-координаты центра масс:

$$y_c=\frac{\iint_S y\rho(x,y)dS}{\iint_S \rho(x,y)dS};\ z_c=\frac{\iint_S z\rho(x,y)dS}{\iint_S \rho(x,y)dS}$$

В нашем случае поверхность однородная, то есть $\rho(x,y)=\rho_0=\mathrm{const}$. Тогда:

$$x_c=\frac{\iint_S xdS}{\iint_S dS};\ y_c=\frac{\iint_S ydS}{\iint_S dS};\ z_c=\frac{\iint_S zdS}{\iint_S dS}$$

Интеграл в знаменателе – просто площадь поверхности; перед нами 1/8 поверхности сферы радиуса R, то есть:

$$\iint_S dS=\frac{1}{8}4\pi R^2=\frac{\pi R^2}{2}$$

Вычислим остальные интегралы. Так как $z\geq 0$, выразим явно $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ и воспользуемся формулой (1), где область G – четверть круга (в первой координатной четверти) радиуса R:

$$\iint_S xdS=\iint_G x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\iint_G\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

Переходим в полярные координаты:

$$R\iint\limits_G \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho = R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$= \begin{Bmatrix} \rho = R\sin u \\ d\rho = R\cos u\, du \end{Bmatrix} = R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\sin^2 u}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 u}} R\cos u\, du = R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\, du = \frac{\pi}{4}R^3$$

Итого x-координата центра масс:

$$x_c = \frac{\iint_S xdS}{\iint_S dS} = \frac{\frac{\pi R^3}{4}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R}{2}$$

Аналогично вычисляются y- и z- координаты центра масс:

$$\iint_S ydS = R\iint\limits_G \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho = \frac{\pi}{4}R^3$$

$$\iint_S zdS = R\iint\limits_G \frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\iint\limits_G dxdy = R\cdot\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi}{4}R^3$$

Итого:

$$x_c = y_c = z_c = \frac{R}{2}$$

**№127. Найдите момент инерции относительно оси Oz части канонической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = x$.**

Получим формулу для момента инерции. Разобьём нашу поверхность на настолько маленькие кусочки, чтобы каждый из них можно было считать материальной точкой. Тогда момент инерции относительно оси Oz запишется как:

$$I_z = \sum_i (x_i^2+y_i^2)\Delta m_i = \sum_i (x_i^2+y_i^2)\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

Производя предельный переход:

$$I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$$

Теперь разберемся с нашей областью. По сути дела, мы работаем с конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$, в области изменения координат $x^2+y^2 \le 2x$. Преобразуем это выражение, выделив полный квадрат и получим явное представление области G:

$$G = \{(x,y):\ (x-1)^2+y^2 \le 1\}$$

Вычисляем момент инерции, сводя поверхностный интеграл к повторному по формуле (1):

$$I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)\cdot x\cdot dS = \iint\limits_G (x^2+y^2)\cdot x\cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dS$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_G (x^2+y^2)\cdot xdxdy$$

Переходим в полярные координаты по формулам:

$$x = 1+\rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$$

$$I_z = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 ((1+\rho\cos\varphi)^2+\rho^2\sin^2\varphi)(1+\rho\cos\varphi)\rho d\rho$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho^4\cos^3\varphi+\rho^4\sin^2\varphi\cos\varphi+\rho^3\sin^2\varphi+3\rho^3\cos^2\varphi$$
$$+3\rho^2\cos\varphi+\rho)d\rho$$

Легче сначала проинтегрировать по переменной $\varphi$, так как это обнулит некоторые из слагаемых:

$$I_z = \sqrt{2}\int\limits_0^1 (\rho^3\pi+3\rho^3\pi+2\pi\rho)d\rho = \sqrt{2}\pi\int\limits_0^1 (4\rho^3+2\rho)d\rho = 2\sqrt{2}\pi$$

Номер №128 будет разобран в конце.

## 3. Поверхностные интегралы IIго рода.

Настоятельно рекомендуем в первую очередь ознакомиться теоретическим материалом, описанным, например, здесь (Гл. 14 §3). Здесь же мы лишь кратко изложим основные определения и положения.

Сформулируем определение поверхностного интеграла IIго рода. Логика здесь во многом будет такой же, как и в криволинейных интегралах IIго рода. Пусть нам задана (явно или параметрически) поверхность S. Пусть в каждой точке поверхности S нам задана вектор-функция $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$. Разобьём поверхность S на N кусочков площадью $\Delta S_i$ каждый, выберем внутри каждого кусочка точку с координатами $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ и составим интегральную сумму:

$$\sum_i \left(\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i), \vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\right)\Delta S_i$$

где $\vec{n}$ – нормированный (т.е. $|\vec{n}| = 1$) вектор нормали к поверхности S в точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Эта интегральная сумма зависит от вида вектор-функции $\vec{A}$, вида поверхности S, разбиения поверхности и выбора точек $M_i$. Производя предельный переход при $\Delta S = \max_i \Delta S_i \to 0$ получим поверхностный интеграл IIго рода:

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i \left(\vec{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \vec{A}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\right) \Delta S_i$$

В физике величины, вычисляемые при помощи поверхностных интегралов IIго рода, часто называют потоком физической величины $\vec{A}$ (например, изучаемые ещё в школе поток электрического/магнитного поля) через поверхность S. Поверхностные и криволинейные интегралы фигурируют во многих физических приложениях. Так, например, фундаментальные уравнения Максвелла (исчерпывающе описывающих электромагнетизм) могут быть записаны в интегральном виде.

Нас же в первую очередь будет интересовать метод расчёта этих интегралов. Во-первых, так как в интеграле стоит скалярное произведение, то интеграл «чувствителен» к способу задания нормали к поверхности. Так, если поверхность S – сфера, то нормаль может быть направлена как внутрь сферы, так и во внешнюю сторону. В условии задач всегда указано, как направлена нормаль, и всегда обращайте внимание на это в условии задачи! Во-вторых, форма записи поверхностного интеграла IIго рода, как мы его записали выше, не очень часто используется в математике. Сделаем переобозначение:

$$d\vec{s} = \vec{n} \cdot dS = \overrightarrow{e_x} dydz + \overrightarrow{e_y} dxdz + \overrightarrow{e_z} dxdy$$

Запомнить это выражение очень просто – каждое слагаемое содержит все три компоненты – x,y,z. Так, в первом слагаемом орт $\overrightarrow{e_x}$ умножается на дифференциалы $dydz$ и т.д. Тогда перепишем выражение интеграла:

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \iint_S (\vec{A}, \vec{n} dS) = \iint_S (\vec{A}, d\vec{s})$$

И распишем явно скалярное произведение:

$$\iint_S (\vec{A}, d\vec{s}) = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Именно в таком виде обычно записываются условия задач. Данный интеграл можно рассматривать как сумму трёх интегралов:

$$I = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S Pdydz + \iint_S Qdxdz + \iint_S Rdxdy = I_1 + I_2 + I_3$$

Для вывода следующих формул распишем вектор $d\vec{s}$ другим способом. Так как вектор $\vec{n}$ – нормированный, то его компоненты запишутся в следующем виде:

$$\vec{n} = \{cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma\}$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ – углы с осями Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда:

$$\iint\limits_S (\vec{A}, \vec{n})dS = \iint\limits_S (\vec{A}, \overrightarrow{e_x}\,cos\,\alpha + \overrightarrow{e_y}\,cos\,\beta + \overrightarrow{e_z}\,cos\,\gamma)dS$$

$$= \iint\limits_S P\,cos\,\alpha\,dS + \iint\limits_S Q\,cos\,\beta\,dS + \iint\limits_S R\,cos\,\gamma\,dS = I_1 + I_2 + I_3$$

Данные интегралы можно свести к двойным по формулам:

1) Если поверхность S задана явно уравнением $z = f(x, y), (x, y) \in G$.

В этом случае <u>нормированный</u> вектор нормали записывается в виде:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\{f_x, f_y, -1\}$$

Или сравнивая с формулой $\vec{n} = \{cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma\}$:

$$cos\,\alpha = \pm\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, cos\,\beta = \pm\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, cos\,\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

где знак “+” или “-“ зависит от направления нормали. Направление нормали всегда задано в условии, т.е. из условия мы поймём какую из этих двух формул нам стоит использовать. Элемент площади $dS$:

$$dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

Тогда поверхностный интеграл IIго рода запишется в виде (4):

$$I_1 = \iint\limits_S P(x,y,z)\,cos\,\alpha\,dS = \pm\iint_G P\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

$$= \pm\iint_G P\big(x,y,f(x,y)\big)\,f_x\,dxdy$$

$$I_2 = \iint\limits_S Q(x,y,z)\,cos\,\beta\,dS = \pm\iint_G Q\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

$$= \pm\iint_G Q\big(x,y,f(x,y)\big)\,f_y\,dxdy$$

$$I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \mp \iint_G R\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

$$= \mp \iint_G R\big(x,y,f(x,y)\big)\ dxdy$$

Таким образом, можно свести по этим формулам (4) поверхностный интеграл IIго рода к трём двойным интегралам.

2) Если поверхность S задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0, (x,y)\in G$.
В этом случае <u>нормированный</u> вектор нормали записывается в виде:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\{F_x, F_y, F_z\}$$

То есть:

$$\cos\alpha = \pm\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}, \cos\beta = \pm\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}, \cos\gamma = \pm\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

Элемент площади $dS$:

$$dS = \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{F_z}dxdy$$

Тогда поверхностный интеграл IIго рода запишется в виде (5):

$$I_1 = \iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\, dS = \pm\iint_G P\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{F_x}{F_z}dxdy \qquad (5.1)$$

$$I_2 = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta\, dS = \pm\iint_G Q\big(x,y,f(x,y)\big)\frac{F_y}{F_z}\ dxdy \qquad (5.2)$$

$$I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \pm\iint_G R\big(x,y,f(x,y)\big)\, dxdy \qquad (5.3)$$

где $z=f(x,y)$ – неявная функция, определяемая уравнением $F(x,y,z)=0$. Таким образом, можно свести по этим формулам (5) поверхностный интеграл IIго рода к трём двойным интегралам.

3) Поверхность S задана параметрически уравнениями $x=\phi(u,v),\ y=\psi(u,v),$ $z=\chi(u,v),\ (u,v)\in G$.
В этом случае <u>нормированный</u> вектор нормали записывается в виде:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\{A,B,C\}$$

То есть:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

где функции A, B, C определяются (см. занятие 7):

$$A = \begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix}\chi_u & \phi_u\\ \chi_v & \phi_v\end{vmatrix};\ C = \begin{vmatrix}\phi_u & \psi_u\\ \phi_v & \psi_v\end{vmatrix}$$

Элемент площади $dS$:

$$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

Тогда поверхностный интеграл IIго рода запишется в виде (6):

$$I_1 = \iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\, dS = \pm\iint_G P\big(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\, A\, dudv \qquad (6.1)$$

$$I_2 = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta\, dS = \pm\iint_G Q\big(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\, B\, dudv \qquad (6.2)$$

$$I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \pm\iint_G R\big(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\, C\, dudv \qquad (6.3)$$

Давайте потренируемся:

**№129. $\iint_S$ $\mathbf{xdydz + ydzdx + zdxdy}$, где S – верхняя сторона плоскости $\mathbf{x+y+z=1}$, $\mathbf{x \in [-1,1], y \in [-1,1]}$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью Oz.**

Поверхность S задана явно: $z = 1 - x - y$, а значит пользуемся формулами (4). Вычислим нормаль:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}}\{-1,-1,-1\} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{-1,-1,-1\}$$

Какой взять знак? Нам сказано, что угол с осью Oz – острый, а значит $\cos\gamma > 0$. Раз $\cos\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$, то выбираем знак «+»:

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\{f_x, f_y, -1\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\} \to \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Применяем формулы (4):

$$I_1 = \iint\limits_S xdydz = \iint\limits_S x\cos\alpha\, dS = -\iint\limits_G x\, f_x\, dxdy = \iint\limits_G x\cdot 1\cdot dxdy$$

Область G – квадрат: $G = \{(x,y): x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}$. Значит:

$$I_1 = \iint\limits_G x\cdot 1\cdot dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

Аналогично вычислим остальные интегралы:

$$I_2 = \iint\limits_S ydxdz = \iint\limits_S y\cos\beta\, dS = -\iint\limits_G y\, f_y\, dxdy = \iint\limits_G y\cdot 1\cdot dxdy = 0$$

$$I_3 = \iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_S z\cos\gamma\, dS = \iint\limits_G (1-x-y)\ dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1}(1-x-y)dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}(2-2y)dy = 4$$

Итого:

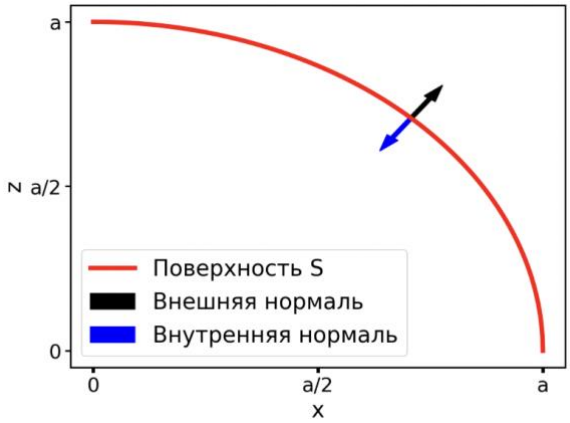
$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 0 + 4 = 4$$

**№130.** $\iint_S\ (\mathbf{y^2+z^2})\mathbf{dxdy}$**, где S – часть внешней стороны конической поверхности** $\mathbf{z = \sqrt{a^2-x^2},\ \ 0 \le y \le b}$**.**

Поверхность S задана явно: $z = \sqrt{a^2-x^2}$, а значит пользуемся формулами (4). Вычислим нормаль:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2+0^2}}\left\{-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, 0, -1\right\} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}}\left\{-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, 0, -1\right\}$$

Определим знак. Нам сказано, S – часть <u>внешней</u> поверхности. Изобразим поверхность S в проекции на плоскость Oxz (y=0):




То есть внешней нормалью будет та нормаль, у которой проекции на оси Ox и Oz – положительны. Тогда:

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\{f_x, f_y, -1\} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, 0, 1\right\} \to cos\,\alpha = \frac{x}{a};\ cos\,\beta = 0;\ cos\,\gamma = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

Применяем формулы (4). Из трёх интегралов $I_1, I_2, I_3$ ненулевым является только $I_3$ по условию. Запишем:

$$I_3 = \iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy = \iint\limits_S (y^2+z^2)\,cos\,\gamma\,dS = \iint\limits_G (y^2+a^2-x^2)\,dxdy$$

Результат применения формулы достаточно тривиальный. Однако в результате наших рассуждений мы достаточно просто получили правильный знак перед интегралом, что немаловажно! Область G – квадрат: $G = \{(x,y): x \in [-a,a], y \in [0,b]\}$. Значит:

$$I_3 = \iint\limits_G (y^2+a^2-x^2)\,dxdy = \int\limits_0^b dy \int\limits_{-a}^a (y^2+a^2-x^2)dx = \int\limits_0^b \left(\frac{4}{3}a^3 + 2ay^2\right)dy = \frac{2ab}{3}(2a^2+b^2)$$

Итого:

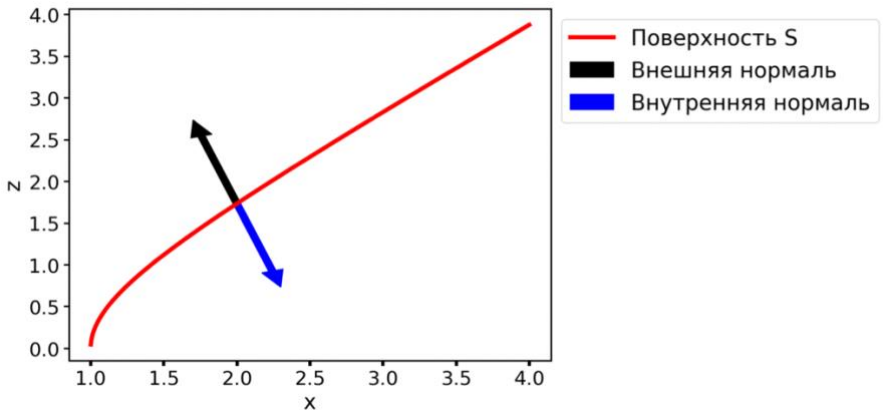
$$\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy = I_3 = \frac{2ab}{3}(2a^2+b^2)$$

**№132.** $\iint_S$ $\mathbf{x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy}$**, где S – часть внутренней стороны гиперболоида** $\mathbf{x^2+y^2-z^2=1,\ 0 \le z \le 3}$**.**

Поверхность S задана неявно уравнением $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1 = 0$, а значит пользуемся формулами (5). Вычислим вектор нормали:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\{2x, 2y, -2z\} = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x, y, -z\}$$

Определим знак внутренней стороны гиперболоида. Изобразим проекцию поверхности при $y = 0$:




Тогда внутренняя нормаль – та, у которой z координата меньше нуля, то есть выбираем знак «+»:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x, y, -z\} \to cos\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ cos\,\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ cos\,\gamma = \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Определим вид области G. Так как $z \geq 0$ по условию, то выразим явно:

$$z = \sqrt{x^2+y^2-1}$$

С другой стороны, $z \leq 3$:

$$\sqrt{x^2+y^2-1} \leq 3 \to x^2+y^2 \leq 10$$

Так как $z \geq 0$, то $x^2+y^2 \geq 1$. То есть область G – кольцо: $G = \{(x,y): 1 \leq x^2+y^2 \leq 10\}$.
Раз мы выразили функцию $z = f(x,y)$ явно, можно воспользоваться формулами (4):

$$I_1 = \iint\limits_S x^2 dydz = \iint\limits_S x^2\, cos\,\alpha\, dS = \iint\limits_G x^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dxdy = \iint\limits_G \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2-1}} dxdy$$

Вычисляем интеграл в полярных координатах:

$$I_1 = \iint\limits_G \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2-1}} dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{10}} \frac{\rho^3\, cos^3\,\varphi}{\sqrt{\rho^2-1}} \rho d\rho = 0$$

Так как $\int_0^{2\pi} cos^3\,\varphi\, d\varphi = 0$. Аналогично вычислим остальные интегралы:

$$I_2 = \iint\limits_S y^2 dxdz = \iint\limits_S y^2\, cos\,\beta\, dS = \iint\limits_G y^2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dxdy = \iint\limits_G \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2-1}} dxdy = 0$$

$$I_3 = \iint\limits_S z^2 dxdy = \iint\limits_S z^2 \cos\gamma\, dS = -\iint\limits_G (x^2+y^2-1)\, dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{10}} (\rho^2+1)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho$$

$$= \{\rho^2 = u\} = -\pi \int\limits_1^{10} (u+1)^{\frac{3}{2}} du = -\frac{2\pi}{5}(121\sqrt{11} - 4\sqrt{2})$$

Итого:

$$\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{2\pi}{5}(121\sqrt{11} - 4\sqrt{2})$$

И на этом мы заканчиваем наш курс математического анализа-II. Попробуйте в качестве упражнения самостоятельно решить оставшиеся номера: №121-122, №124, №128, №131, №133. Краткие решения будут представлены ниже для самопроверки. Успехов и до новых встреч!

## 4. Практика

**№121. $\iint_S$ dS, где поверхность S: $\mathbf{x+y+z=1, x\in[-1,1], y\in[-1,1]}$.**

Поверхность S задана явно уравнением $z = 1 - x - y$, а значит пользуемся формулой (1):

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1+1+1}\, dxdy = \sqrt{3}\iint\limits_G dxdy$$

В данном случае область G представляет собой прямоугольник, поэтому интеграл легко сводится к двойному:

$$\iint\limits_S dS = \sqrt{3}\iint\limits_G dxdy = \sqrt{3}\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} dx = 4\sqrt{3}$$

**№122. $\iint_S$ $\mathbf{(x+y+z)}$dS, где поверхность S: $\mathbf{x+y+z=1, x\in[-1,1], y\in[-1,1]}$.**

Поверхность S задана явно уравнением $z = 1 - x - y$, а значит пользуемся формулой (1):

$$\iint\limits_S (x+y+z) dS = \iint\limits_G (x+y+1-x-y)\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1+1+1}\, dxdy$$

$$= \sqrt{3}\iint\limits_G dxdy$$

В данном случае область G представляет собой прямоугольник, поэтому интеграл легко сводится к двойному:

$$\iint\limits_S dS = \sqrt{3}\iint\limits_G dxdy = \sqrt{3}\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} dx = 4\sqrt{3}$$

**№124. $\iint_S (\mathbf{x^2+y^2})\mathbf{dS}$, где S – граница тела $\mathbf{V} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}): \sqrt{\mathbf{x^2+y^2}} \le \mathbf{z} \le \mathbf{1}\}$**

Поверхность S состоит из двух частей – круга радиуса 1 плоскости z=1 ($S_1$) и поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 1$ ($S_2$):

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)dS = \iint\limits_{S_1} (x^2+y^2)dS + \iint\limits_{S_2} (x^2+y^2)dS$$

В обоих случаях поверхность задана явно, поэтому пользуемся формулой (1). Вычисляем первый интеграл.

$$\iint\limits_{S_1} (x^2+y^2)dS = \iint\limits_G (x^2+y^2)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy = \iint\limits_G (x^2+y^2)\sqrt{1+0^2+0^2}dxdy$$

Область G – круг единичного радиуса, поэтому переходим в полярные координаты:

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\cdot\rho\cdot d\rho = \frac{\pi}{2}$$

Вычисляем второй интеграл:

$$\iint\limits_{S_2} (x^2+y^2)dS = \iint\limits_G (x^2+y^2)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

$$= \iint\limits_G (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Итого ответ:

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)dS = \frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

**№128. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $\mathbf{x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0, y\ge 0}$, вырезанной цилиндром $\mathbf{x^2+y^2=2x}$. Поверхностная плотность $\boldsymbol{\rho = zy}$.**

Воспользуемся формулой из №127:

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dS$$

Теперь разберемся с нашей областью – с частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, в области изменения координат $x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$. Преобразуем это выражение, выделив полный квадрат и получим явное представление области G:

$$G = \{(x, y):\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\ \cap y \geq 0\}$$

Вычисляем момент инерции, сводя поверхностный интеграл к повторному по формуле (1). Так как нас интересует область $z \geq 0$, то $z$ можно явно выразить:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Вычисляем:

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)zy \cdot dS$$

$$= \iint\limits_G (x^2 + y^2) \cdot y\sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}dS$$

$$= \iint\limits_G (x^2 + y^2) \cdot ydxdy$$

Переходим в полярные координаты по формулам:

$$x = 1 + \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$$

Причем переменная $\varphi$ изменяется от 0 до $\pi$, так как нас интересует область $y \geq 0$.

$$I_z = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 ((1 + \rho\cos\varphi)^2 + \rho^2\sin^2\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho$$

$$= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 (\rho^4\sin^3\varphi + \rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi + 2\rho^3\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi)d\rho$$

Легче сначала проинтегрировать по переменной $\varphi$:

$$I_z = \int\limits_0^1 (2\rho^4 + 2\rho^2)d\rho = \frac{16}{15}$$

**№131. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz).**

Поверхность S задана явно: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а значит пользуемся формулами (4). Вычислим нормаль:

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right\}$$

Определим знак. По условию нормаль образует тупой угол с осью Oz, а значит z-координата должна быть отрицательной, т.е. берём знак «+»:

$$\vec{n} = +\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right\} \to \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}};\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}};\ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Применяем формулы (4). Из трёх интегралов $I_1, I_2, I_3$ ненулевым является только $I_3$ по условию. Запишем:

$$I_3 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dxdy = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\cos\gamma\, dS = -2\iint\limits_G (x^2+y^2)\, dxdy$$

Область G – круг радиуса $c$. Переходим в полярные координаты:

$$-2\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy = -2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^c \rho^2\cdot\rho d\rho = -\pi c^4$$

**№133.** $\iint_S$ $\mathbf{x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy}$, **где S – внешняя сторона сферы** $\mathbf{x^2+y^2+z^2=1}$**.**

Данную задачу можно решать также, как был решён №132 – потренируйтесь! Лучше, чтобы не напутать со знаком нормали, разбить поверхность на две части: $S_1$ – верхняя половина сферы ($z \geq 0$), $S_2$ – нижняя половина сферы $z \leq 0$). Однако здесь мы покажем альтернативное решение при помощи формулы Остроградского Гаусса описанной, например, здесь (Гл. 14 §4). Если поверхность S – замкнутая (как в нашем случае) и направление нормали – внешнее (если же внутренняя, то надо поменять знак в формуле), то поверхностный интеграл можно вычислить по формуле:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

где V – фигура, ограниченная поверхностью S. Посчитаем:

$$\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$$

Тройной интеграл посчитаем в сферический координатах (смотри занятие 4):

$$2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = 2\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} (\cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \sin\theta + \cos\theta) r^3 \sin\theta \, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \sin\theta + \cos\theta) \sin\theta \, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= 0$$