Занятие 7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности.

На этом занятии будут разобраны темы, посвященные вычислению площади поверхности, что в дальнейшем позволит нам сформулировать понятия поверхностных интегралов Iго и IIго рода. Данную тему будем разбирать на примере решения задач, опубликованных на кафедре математики к общему зачёту. Перед началом просмотра данных материалов настоятельно рекомендуем в первую очередь ознакомиться с теоретической частью, описанной, например, здесь (Гл. 14 §1).

Оглавление

Замечание: в данной работе есть задания с повторяющейся нумерацией. Точно такие же номера записаны в оригинальном файле, поэтому для более простой навигации по номерам из списка задач к общему зачёту, оригинальная нумерация сохранена.

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности S в её точке M_0 называется плоскость, в которой лежат касательные ко всем кривым, проведённым на поверхности S через точку M_0.
Данная тема уже рассматривалась так или иначе в курсе аналитической геометрии, однако вспомним основные результаты. Конечно же, методы вычисления касательной плоскости будут зависеть от того, каким образом задана поверхность S.
Во-первых, вспомним, что уравнение плоскости в пространстве определяется следующим образом:

$$Ax + By + Cz = D$$

где A, B, C, D – некоторые числа. Вектор нормали к этой плоскости:

$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

Рассмотрим три способа задания поверхности S и каким образом вычислить касательную плоскость и нормаль к поверхности в заданной точке M_0.

1) Поверхность S задана явно, уравнением $z = f(x, y)$.

В данном случае всё максимально просто – если точка M_0 обладает координатами $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение касательной плоскости выглядит следующим образом:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

А соответствующая нормаль к поверхности в этой точке:

$$\vec{n} = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}$$

2) Поверхность S задана неявно, уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ неявно определяет функцию $z = f(x, y)$. Запишем формулы для частных производных этой функции:

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)};\ f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

И подставим их в формулу (1):

$$-\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Умножим это выражение на $-F_z(x_0, y_0, z_0)$ и получим формулу для касательной плоскости (2):

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

А соответствующая нормаль к поверхности в этой точке:

$$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$$

3) Поверхность S задана параметрически, уравнениями $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$.

В данном случае вычисления чуть сложнее. Нормаль определяется из следующего соотношения:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \phi_u & \psi_u & \chi_u \\ \phi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = A\overrightarrow{e_x} + B\overrightarrow{e_y} + C\overrightarrow{e_z}$$

где $A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} \chi_u & \phi_u \\ \chi_v & \phi_v \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{vmatrix}$. Обратите внимание на знак в определении коэффициента B!

Для записи формулы касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = \phi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0), z_0 = \chi(u_0, v_0)$, вспомним уравнение плоскости из аналитической геометрии:

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\overrightarrow{r_0}, \vec{n})$$

где $\overrightarrow{r_0} = \{x_0, y_0, z_0\}, \vec{r} = \{x, y, z\}$. Раскрывая скалярные произведения и перенося все слагаемые в левую часть, получим формулу (3):

$$A(u_0, v_0)(x - x_0) + B(u_0, v_0)(y - y_0) + C(u_0, v_0)(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

Давайте потренируемся в нахождении вектора нормали и уравнения касательной плоскости к поверхности S в заданной точке M_0:

№114. S: $\mathbf{z = x^2 + y^2}$; $\mathbf{M_0(3, 4, 25)}$

Поверхность S задана явно – а значит пользуемся формулой (1):

$$f_x(x, y) = 2x \to f_x(x_0, y_0) = 6$$
$$f_y(x, y) = 2y \to f_y(x_0, y_0) = 8$$

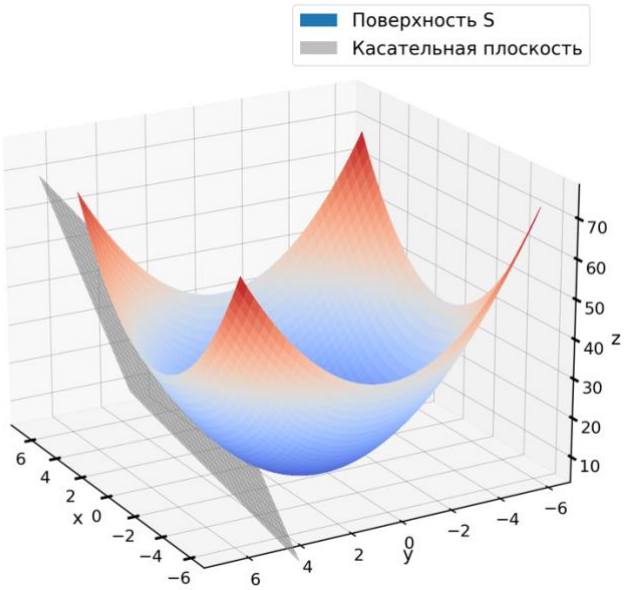
И следовательно, уравнение касательной плоскости:

$$6(x - 3) + 8(y - 4) - (z - 25) = 0$$

А нормаль к данной поверхности в точке M_0:

$$\vec{n} = \{6, 8, -1\}$$

На картинке ниже графически представлена полученная плоскость и данная нам поверхность:



№115. $\mathbf{S: x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2;\ \ M_0(1,1,0)}$

Пользуемся формулой (2):

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 2 = 0$$
$$F_x(x,y,z) = 2x + yz \to F_x(x_0,y_0,z_0) = 2$$
$$F_y(x,y,z) = 2y + xz \to F_y(x_0,y_0,z_0) = 2$$
$$F_z(x,y,z) = 2z + xy \to F_z(x_0,y_0,z_0) = 1$$

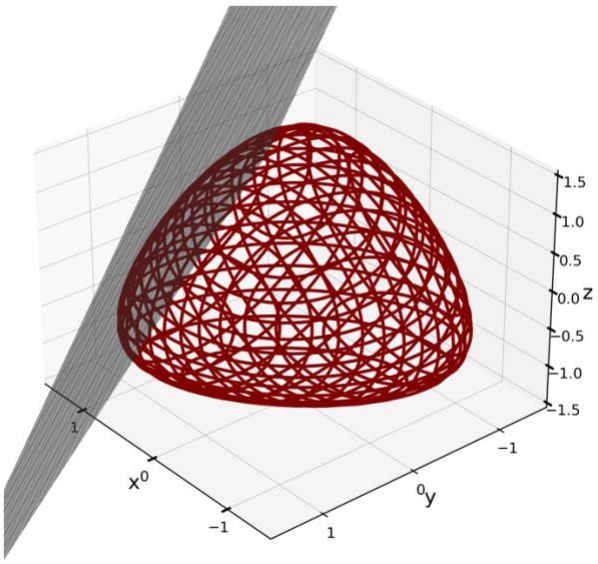
И уравнение касательной плоскости запишется в виде:

$$2(x-1) + 2(y-1) + z = 0$$

А нормаль выражается следующим образом:

$$\vec{n} = \{2,2,1\}$$

Графически:



№116. S: $\mathbf{x = 2uv, y = u + v, z = u^2 + v^2}$; $\mathbf{u_0 = 1, v_0 = -1}$

Пользуемся формулой (3):

$$x = \phi(u,v) = 2uv;\ \ y = \psi(u,v) = u + v;\ \ z = \chi(u,v) = u^2 + v^2$$

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 1 & 2v \end{vmatrix} = 2(v - u) \to A(u_0, v_0) = -4$$

$$B = \begin{vmatrix} \chi_u & \phi_u \\ \chi_v & \phi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 - v^2) \to B(u_0, v_0) = 0$$

$$C = \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2v & 1 \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = 2(v - u) \to C(u_0, v_0) = -4$$

Вычислим координаты точки M_0:

$$x_0 = \phi(u_0, v_0) = -2;\ \ y_0 = \psi(u_0, v_0) = 0, z_0 = \chi(u_0, v_0) = 2$$

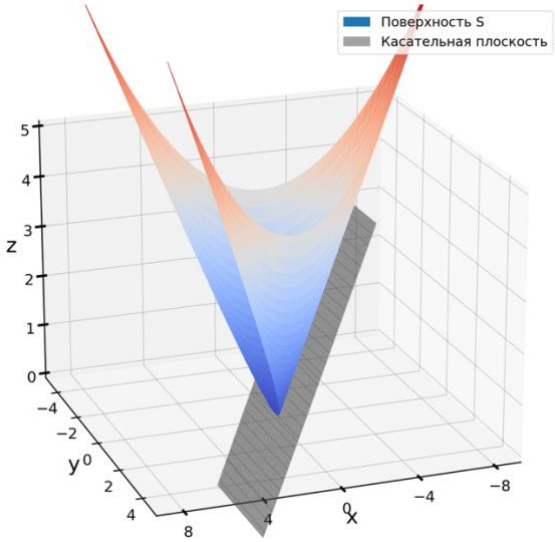
Тогда уравнение касательной плоскости запишется в виде:

$$-4(x + 2) + 0 \cdot (y - 0) - 4(z - 2) = 0$$

А нормаль выражается следующим образом:

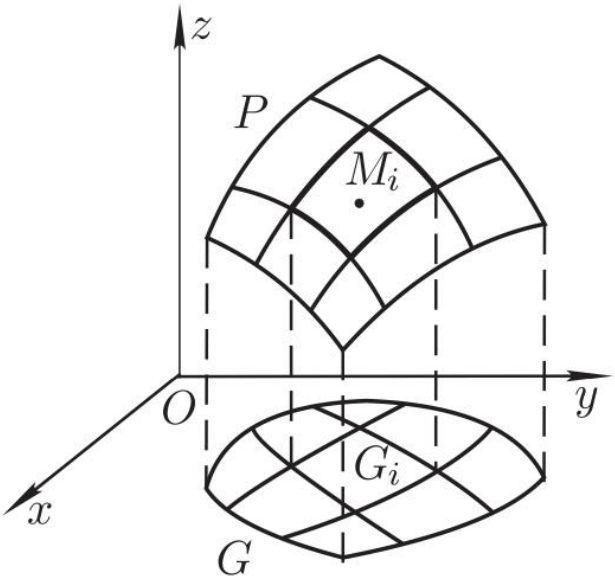
$$\vec{n} = \{-4, 0, -4\}$$

Графически:



2. Площадь поверхности.

В данном разделе мы начнём знакомиться с поверхностными интегралами. Как и в случае криволинейных интегралов, где мы сначала определили длину кривой, а затем лишь сформулировали определение интегралов, так и тут мы поступим схожим образом. Идея вычисления площади поверхности состоит в проецировании поверхности на плоскость Oxy (рисунок ниже, взят из Гл. 14 §1).



В случае криволинейных интегралов, у нас был некий «коэффициент масштабирования», зависящий от свойств кривой C и связывающий длину участка dl с изменением аргумента dx (см. занятия 5-6):

1) $\mathrm{dl} = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(\mathrm{x})^2}\mathrm{dx}$ в случае явного задания кривой C

2) $\mathrm{dl} = \sqrt{\phi'(\mathrm{t})^2 + \psi'(\mathrm{t})^2}\mathrm{dt}$ в случае параметрического задания кривой C

В случае с поверхностными интегралами дело обстоит аналогично, однако вывод формул более сложный (ознакомьтесь с теоретическим материалом!). Выпишем формулы вычисления площади поверхности в двух случаях:

1) Поверхность P задана явно: $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}),\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{G}$.

Здесь площадь элемента поверхности ds связана с её проекцией на плоскость Oxy следующим образом:

$$\mathrm{ds} = \sqrt{1 + \mathrm{f}_\mathrm{x}^2 + \mathrm{f}_\mathrm{y}^2}\mathrm{dxdy}$$

Тогда площадь S поверхности P может быть вычислена по следующей формуле:

$$\mathrm{S} = \iint\limits_{\mathrm{G}} \sqrt{1 + \mathrm{f}_\mathrm{x}^2 + \mathrm{f}_\mathrm{y}^2}\mathrm{dxdy} \tag{4}$$

Если же поверхность была бы задана неявно уравнением $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0$, то здесь рассуждения были бы аналогичным тому, что мы проделывали для уравнения плоскости: уравнение $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0$ задаёт неявно функцию $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, причём формулы для вычисления производных:

$$\mathrm{f}_\mathrm{x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = -\frac{\mathrm{F}_\mathrm{x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{\mathrm{F}_\mathrm{z}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})};\ \mathrm{f}_\mathrm{y}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = -\frac{\mathrm{F}_\mathrm{y}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{\mathrm{F}_\mathrm{z}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}$$

Подставляя это в формулу (4):

$$\mathrm{S} = \iint\limits_{\mathrm{G}} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{F}_\mathrm{x}^2}{\mathrm{F}_\mathrm{z}^2} + \frac{\mathrm{F}_\mathrm{y}^2}{\mathrm{F}_\mathrm{z}^2}}\mathrm{dxdy} \tag{4.1}$$

Замечание: необходимо отметить, что подынтегральное выражение может зависеть от z. Чтобы вычислить двойной интеграл, необходимо исключить переменную z из него путём подстановок из уравнения $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0$.

2) Поверхность P задана параметрически: $\mathrm{x} = \phi(\mathrm{u}, \mathrm{v}),\ \mathrm{y} = \psi(\mathrm{u}, \mathrm{v}),\ \mathrm{z} = \chi(\mathrm{u}, \mathrm{v})$, $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in \mathrm{g}$.

Здесь площадь элемента поверхности ds связана с её проекцией в координатах u, v следующим образом:

$$ds = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv$$

где A,B,C мы ввели раньше и вычисляются они по формулам:

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} \chi_u & \phi_u \\ \chi_v & \phi_v \end{vmatrix};\ C = \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

Тогда площадь S поверхности P может быть вычислена по следующей формуле:

$$S = \iint\limits_g \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv \qquad (5)$$

Потренируемся в нахождении площади поверхностей:

№115. $\mathbf{z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \le 1}$

В данном случае поверхность задана явно функцией $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Область G – круг единичного радиуса $G = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Тогда вычисляем площадь поверхности по формуле (4):

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_G dxdy$$

Интеграл вычислим при помощи перехода к полярным координатам:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$$

Якобиан перехода $D = \rho$.

$$S = \sqrt{2}\iint\limits_G dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = \sqrt{2}\pi$$

№117. $\mathbf{z = xy, x^2 + y^2 \le a^2}$

В данном случае поверхность задана явно функцией $z = f(x, y) = xy$. Область G – круг радиуса a, $G = \{(x, y): x^2 + y^2 \le a^2\}$. Тогда вычисляем площадь поверхности по формуле (4):

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1 + y^2 + x^2}dxdy$$

Для вычисления интеграла вновь переходим в полярные координаты:

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + y^2 + x^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{1 + \rho^2}\rho d\rho = \{u = \rho^2\} = \pi\int\limits_0^{a^2} \sqrt{1 + u}du$$
$$= \frac{2\pi}{3}\left((a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

№120. $\mathbf{x = u\cos v, y = u\sin v, z = v, 0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi}$

В данном случае поверхность задана явно параметрически:

$$x = \phi(u,v) = u\cos v;\ \ y = \psi(u,v) = u\sin v;\ \ z = \chi(u,v) = v$$

Вычисления будем производить при помощи формулы (5). Вычислим функции A, B, C:

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & 0 \\ u\cos v & 1 \end{vmatrix} = \sin v$$

$$B = \begin{vmatrix} \chi_u & \phi_u \\ \chi_v & \phi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix} = -\cos v$$

$$C = \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u$$

Запишем формулу (5), учтя, что область $g = \{(u,v): 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi\}$

$$S = \iint\limits_g \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv = \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^a \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2}\,du = 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{1 + u^2}\,du$$

Такие интегралы мы вычисляли в занятии 5, например, №96. Опуская выкладки, убедитесь самостоятельно, что итоговый ответ окажется равным:

$$S = \pi\left(a\sqrt{a^2+1} + \ln\left(\sqrt{a^2+1} + a\right)\right)$$

И на этом мы заканчиваем видеоразбор! В следующей части мы разберёмся с поверхностными интегралами, а пока попробуйте в качестве упражнения <u>самостоятельно</u> решить оставшиеся номера: №114, №116, №118-119. А краткие решения будут представлены ниже для самопроверки. Успехов!

3. Практика

№114. $z = 3x + 4y, x^2 + y^2 \le 1$

В данном случае поверхность задана явно функцией $z = f(x,y) = 3x + 4y$. Область G – круг единичного радиуса $G = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Тогда вычисляем площадь поверхности по формуле (4):

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_G \sqrt{1 + 9 + 16}\,dx\,dy = \sqrt{26}\iint\limits_G dx\,dy = \sqrt{26}\pi$$

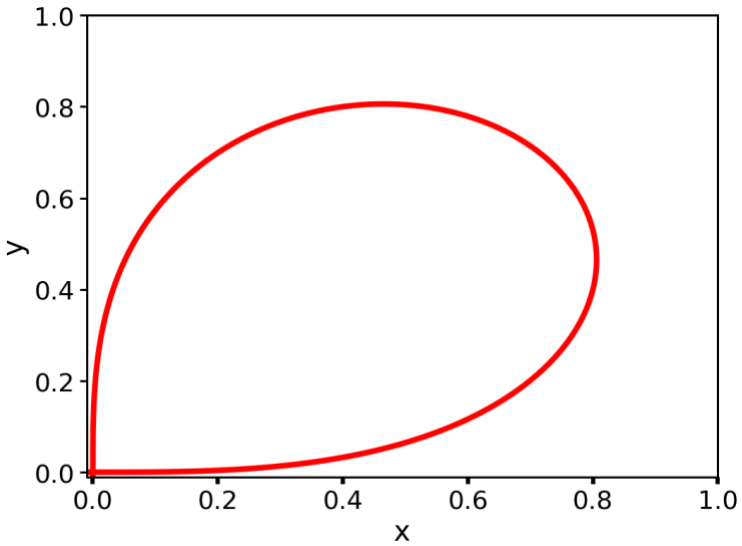
№116. $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 1$

В данном случае поверхность задана явно функцией $z = f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Область G – круг единичного радиуса $G = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Тогда вычисляем площадь поверхности по формуле (4):

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \rho^2}\rho d\rho = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

№118. $\mathbf{2z = x^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2 \leq 2xy, x \geq 0, y \geq 0}$

В данном случае поверхность задана явно функцией $z = f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Область G задана соотношением $G = \{(x, y): (x^2 + y^2)^2 \leq 2xy, x \geq 0, y \geq 0\}$. Граница области представлена на рисунке ниже:



Тогда вычисляем площадь поверхности по формуле (4):

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$$

Переходим в полярные координаты. Так как мы работаем в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$), то $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Границы изменения переменной ρ определим из условия:

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2xy \rightarrow \rho^4 \leq 2\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \rightarrow \ \rho^2 \leq \sin 2\varphi$$

То есть переменная ρ для фиксированного $\varphi = \varphi_0$ изменяется от 0 до $\sqrt{\sin 2\varphi_0}$. Вычислим интеграл:

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho = \{u=\rho^2, du = 2\rho d\rho\} = \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\sqrt{\sin 2\varphi}^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\sin 2\varphi + 1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(2\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\varphi = \frac{\sqrt{8}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 u\, du - \frac{\pi}{6} = \{t = \cos u, dt = -\sin u\, du\}$$

$$= -\frac{\sqrt{8}}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-t^2)dt - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{10}{9} - \frac{\pi}{6} \approx 0.588$$

№119. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$

В данном случае поверхность задана неявно. Однако $z \geq 0$, а значит, можем явно выразить $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (или можно просто воспользоваться формулой (4.1)). Область G – круг единичного радиуса $G = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$. Тогда вычисляем площадь поверхности по формуле (4):

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_G \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho = 2\pi$$

Результат тривиальный – перед нами половина сферы радиуса 1.