Занятие 6. Криволинейные интегралы IIго рода.

Продолжим изучение криволинейных интегралов, и в данной работе рассмотрим криволинейные интегралы IIго рода. Данную тему будем разбирать на примере решения задач, опубликованных на кафедре математики к общему зачёту. Перед началом просмотра данных материалов настоятельно рекомендуем в первую очередь ознакомиться с теоретической частью, описанной, например, здесь (Гл. 13 §3 – 5).

Оглавление

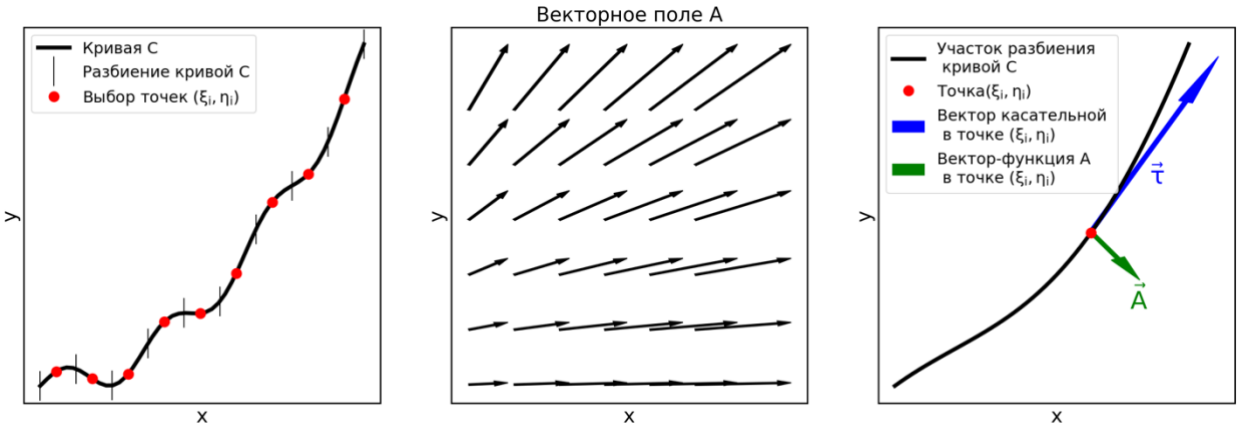
1. Криволинейные интегралы IIго рода. 0
№106. 3
№107. 3
№108. 4

2. Приложения криволинейных интегралов IIго рода для физических задач. 5
№111. 5
№112. 5
№115. 6

3. Практика 7
№109. 7
№110. 8
№113. 8
№114. 8
№116. 9

1. Криволинейные интегралы IIго рода.

Построение интегральной суммы для криволинейного интеграла IIго рода очень похоже аналогичному построению для интеграла Iго рода. Пусть на плоскости Oxy имеется кривая C, имеющая конечную длину L (заданная уравнением $y = f(x)$ или неявным представлением $F(x, y) = 0$). Разобьём кривую на N кусочков, длина каждого из которого Δl_i (рисунок ниже, левая панель). Пусть также в каждой точке кривой C задано значение вектор-функции $\vec{A} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$. Такую вектор-функцию ещё часто называют векторным полем. По сути, отличие от обычной функции двух переменных в том, что в каждой точке плоскости Oxy мы знаем не число, а длину и направление вектора $\vec{A}$ (рисунок ниже, центральная панель).
Выберем внутри каждого кусочка Δl_i произвольным образом точку (ξ_i, η_i). Будем считать в каждом участке разбиения значение скалярного произведения между вектором $\vec{A}_i$ в точке (ξ_i, η_i) и единичным вектором касательной $\vec{\tau}_i$ к кривой C в точке (ξ_i, η_i) (рисунок ниже, правая панель).



Тогда интегральная сумма (зависящая и от выбора участков разбиения кривой C, и от выбора точек (ξ_i, η_i), и от вида вектор-функции $\vec{A}$, и от вида кривой C) будет определена следующим выражением:

$$I = \sum_i (\vec{A}_i, \vec{\tau}_i)\Delta l_i$$

Предел интегральной суммы при $\Delta l = \max_i \Delta l_i \to 0$ будет называться криволинейным интегралом IIго рода:

$$\int_C (\vec{A}, \vec{\tau})dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_i (\vec{A}_i, \vec{\tau}_i)\Delta l_i$$

Часто вводят вектор $d\vec{l} = \vec{\tau}dl$ и тогда криволинейный интеграл IIго рода запишется следующим образом:

$$\int_C (\vec{A}, \vec{\tau})dl = \int_C (\vec{A}, d\vec{l})$$

Также данный интеграл переписывают следующим образом. Запишем в явном виде скалярное произведение векторов:

$$\vec{A} = P(x,y)\vec{e_x} + Q(x,y)\vec{e_y}$$
$$d\vec{l} = \vec{e_x}dx + \vec{e_y}dy$$

Тогда:

$$\int_C (\vec{A}, d\vec{l}) = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Необходимость вычисления таких интегралов определяется потребностями многочисленных приложений в физике (электромагнетизм, механика, термодинамика…). Самый простой пример: если $\vec{A}$ – сила, действующая на материальную точку, движущуюся по кривой C, то значение интеграла будет ни что иное, как работа силы по перемещению частицы вдоль контура C.

Как вычислять такие интегралы? На самом деле, всё опять-таки определяется видом задания кривой C. Если C задана явно в виде уравнения $y = f(x), x_1 \le x \le x_2$, то криволинейный интеграл довольно просто сводится к определенному:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P\big(x, f(x)\big)dx + Q\big(x, f(x)\big)f'(x)dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \big[P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big)f'(x)\big]dx$$

где мы воспользовались $y = f(x) \to dy = f'(x)dx$. Если кривая C задана неявно уравнениями $x = \phi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta$:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)dt + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)dt$$
$$= \int_\alpha^\beta [P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$$

где мы воспользовались $x = \phi(t) \to dx = \phi'(t)dt,\ y = \psi(t) \to dy = \psi'(t)dt$.
В случае, если кривая C – замкнута, криволинейный интеграл IIго рода обозначается следующим образом:

$$\int_C Pdx + Qdy = \oint_C Pdx + Qdy$$

Если не сказано другое, то подразумевается, что контур проходится в положительном направлении – против часовой стрелки. Иначе, положительным направлением называют такое, что если бы человек шёл по этому контуру, то внутренняя часть находилась бы по левую руку.
Для криволинейных интегралов IIго рода по замкнутому контуру справедлива формула Грина:

$$\oint_C \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{dxdy}$$

где M – область, ограниченная контуром C. Данная формула справедлива в случае, если контур C обходится в положительном направлении (см. выше). В противном случае – в формуле появится знак минус.
<u>Замечание</u>:
Если в качестве функций $P(x,y), Q(x,y)$ взять $Q(x,y) = \frac{x}{2}, P(x,y) = -\frac{y}{2}$, то применение формулы Грина приведет к следующему результату:

$$\oint_C \mathrm{Pdx} + \mathrm{Qdy} = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{dxdy} \to \frac{1}{2}\oint_C -\mathrm{ydx} + \mathrm{xdy} = \frac{1}{2}\iint_M \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) \mathrm{dxdy}$$
$$= \iint_M \mathrm{dxdy} = S$$

где S – площадь области M. Иначе говоря:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C \mathrm{xdy} - \mathrm{ydx}$$

Этой формулой тоже часто пользуются для вычислений площади области.
Потренируемся в вычислении интегралов:
№106. $\int_{AB} \mathbf{xdx} + \mathbf{ydy}$, где кривая AB задана уравнением $\mathbf{y = x^2, A(0,0), B(1,1)}$.
Кривая AB задана явно – это участок параболы, где переменная x изменяется от 0 до 1. Значит, воспользуемся тем, что $y = x^2 \to dy = 2xdx$. Перепишем криволинейный интеграл через определенный:

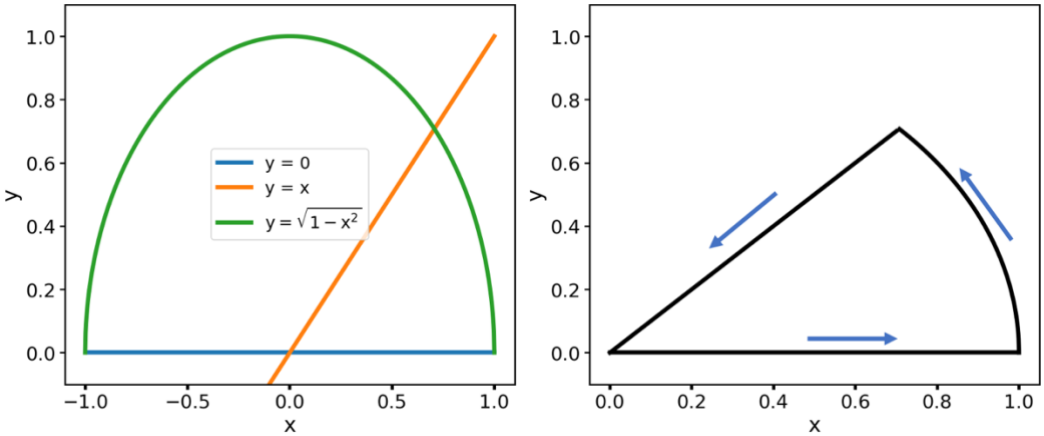
$$\int_{AB} \mathrm{xdx} + \mathrm{ydy} = \int_0^1 \mathrm{xdx} + x^2 \cdot 2\mathrm{xdx} = \int_0^1 (x + 2x^3)\mathrm{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

№107. $\int_C (\mathbf{2 - y})\mathbf{dx} + \mathbf{xdy}$, где кривая C задана уравнениями $\mathbf{x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \le t \le 2\pi}$, и пробегается в сторону увеличения значения параметра t.
Воспользуемся тем, что $x = t - \sin t \to dx = (1 - \cos t)dt$, $y = 1 - \cos t \to dy = \sin t\, dt$.
Подставим это в интеграл:

$$\int_C (2 - y)\mathrm{dx} + \mathrm{xdy} = \int_0^{2\pi} \big(2 - (1 - \cos t)\big)(1 - \cos t)\mathrm{dt} + (t - \sin t)\sin t\, \mathrm{dt}$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\big(2 - (1 - \cos t)\big)(1 - \cos t) + (t - \sin t)\sin t\Big)\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} t \sin t\, \mathrm{dt} = -2\pi$$

№108. $\oint_C \mathbf{xdy + 2ydx}$**, где кривая C задана соотношениями:** $\mathbf{y = 0}$, $\mathbf{y = \sqrt{1 - x^2}}$, $\mathbf{y = x}$, $\mathbf{0 \le y \le x}$**.**

Изобразим нашу кривую C с учётом того, что $0 \le y \le x$ по условию:



Данная область – сектор круга, а значит интеграл достаточно легко было бы вычислить в полярных координатах. Воспользуемся формулой Грина:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

где $P(x, y) = 2y, Q(x, y) = x$:

$$\oint_C xdy + 2ydy = \iint_M \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (2y)}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_M dxdy$$

Переходим в полярные координаты:

$$-\iint_M dxdy = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = -\frac{\pi}{8}$$

<u>Замечание</u>: эту задачу можно было бы решить и «в лоб». Разобьём интеграл на 3 части:

$$\oint_C xdy + 2ydy = \int_{C_1} xdy + 2ydy + \int_{C_2} xdy + 2ydy + \int_{C_3} xdy + 2ydy$$

где C_1 – участок контура $y = 0$, x изменяется от 0 до 1; C_2 – участок кривой $y = \sqrt{1 - x^2}$, x изменяется от 1 до пересечения с прямой $y = x$:

$$x = \sqrt{1 - x^2} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Нас интересует решение $+1/\sqrt{2}$, так как мы работаем в первой координатной четверти. И контур C_3 – участок вдоль прямой $y = x$ где координата x меняется от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 0 (обращаем внимание на направление обхода контура!). Вычислим указанные интегралы:

$$\int_{C_1} xdy + 2ydy = \{y = 0 \to dy = 0\} = 0$$

$$\int_{C_2} xdy + 2ydy = \left\{y = \sqrt{1-x^2} \to dy = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\right\} = \int_1^{1/\sqrt{2}} \left(-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2}\right) dx = \cdots$$
$$= \frac{6-\pi}{8}$$

$$\int_{C_3} xdy + 2ydy = \{y = x \to dy = dx\} = \int_{1/\sqrt{2}}^{0} 3xdx = -\frac{6}{8}$$

Складывая указанные величины, получим тот же результат, что и с применением формулы Грина:

$$\oint_C xdy + 2ydy = \int_{C_1} xdy + 2ydy + \int_{C_2} xdy + 2ydy + \int_{C_3} xdy + 2ydy = -\frac{\pi}{8}$$

Задачи №109-110 будут кратко разобраны в конце конспекта.

2. Приложения криволинейных интегралов IIго рода для физических задач.

Как мы уже выяснили, при помощи криволинейных интегралов IIго рода можно вычислить площадь области. Давайте попробуем сделать это – а далее посмотрим на другие физические приложения криволинейных интегралов IIго рода.

<u>В следующих задачах нам требуется найти площади областей, ограниченных:</u>

№111. Эллипсом $\mathbf{x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0, b > 0}$

Вычислим интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Воспользуемся тем, что $x = a\cos t \to dx = -a\sin t\,dt$; $y = b\sin t \to dy = b\cos t\,dt$:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 tdt + ab\sin^2 tdt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

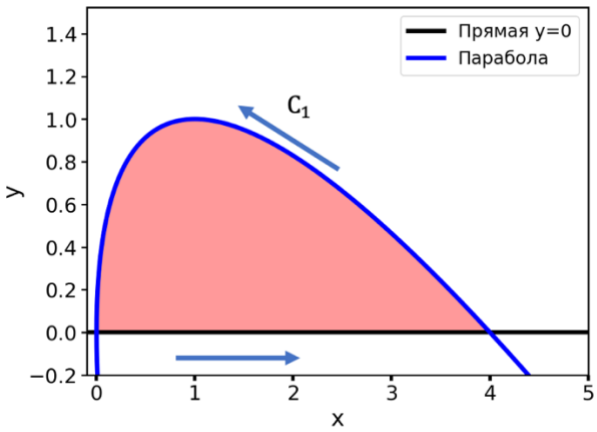
Известный ещё со школы результат.

№112. Параболой $\mathbf{(x+y)^2 = 2ax\ (a > 0)}$ с осью Ox.

Вычислим интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

где контур C получается пересечением параболы и оси Ox (y=0) (см. рисунок ниже).



Интегрирование вдоль прямой $y = 0$ даст нулевой вклад, поэтому остаётся только вычислить интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\int_{C_1} xdy - ydx$$

По условию $a > 0$. Значит, и $x > 0$, а тогда можем явно выразить y:

$$(x + y)^2 = 2ax \to y = -x \pm \sqrt{2ax}$$

Так как нас интересует пересечение с осью Ox, то нас интересует область $y > 0$, а следовательно, выбираем $y = -x + \sqrt{2ax} \to dy = \left(\sqrt{\frac{a}{2x}} - 1\right)dx$.

Найдём пределы интегрирования. Уравнение $-x + \sqrt{2ax} = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0, x_2 = 2a$. Из рисунка видно, что интегрируем мы от x_2 до x_1. Итого:

$$S = \frac{1}{2}\int_{C_1} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{0} x\left(\sqrt{\frac{a}{2x}} - 1\right)dx - \left(-x + \sqrt{2ax}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}\int_{0}^{2a} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}a^2$$

Номера №113-114 будет разобран в конце конспекта.

№115. Вычислите работу силы $\vec{F} = \{y, x\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки A(1,-1) до точки B(1,1).

Как мы уже обсуждали, работа силы по определению из физики:

$$A = \int_C \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \int_C F_x dx + F_y dy$$

Вычислим интеграл. $x = y^2 \to dx = 2ydy$, причём переменная y изменяется от -1 до 1:

$$A = \int_{-1}^{1} y \cdot 2ydy + y^2 dy = 3\int_{-1}^{1} y^2 dy = 2$$

На этом мы заканчиваем видеоразбор! Попробуйте в качестве упражнения самостоятельно решить оставшиеся номера: №109-110, №113-114, №116. А краткие решения будут представлены ниже для самопроверки. Успехов!

3. Практика

№109. $\oint_C \mathbf{xydx - x^3y^3dy}$**, где замкнутый контур C задан уравнением:** $\mathbf{|x-y|+|x+y|=1}$**.**

Данная область – квадрат с единичной стороной и центром в начале координат.
Воспользуемся формулой Грина:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

где $P(x,y) = xy, Q(x,y) = -x^3y^3$:

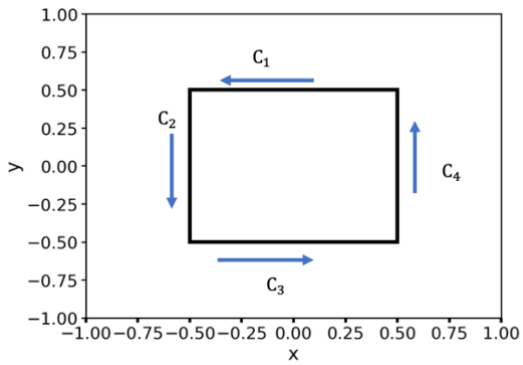
$$\oint_C xydx - x^3y^3dy = -\iint_M \left(\frac{\partial(x^3y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_M (3x^2y^3 + x)dxdy$$

$$= -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3x^2y^3 + x)dx = -\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^3dy = 0$$

<u>Замечание</u>: данный интеграл можно было бы вычислить иначе:

$$\oint_C xydx - x^3y^3dy = \int_{C_1}(\dots) + \int_{C_2}(\dots) + \int_{C_3}(\dots) + \int_{C_4}(\dots)$$

где контуры нарисованы ниже:



Вычисляем:

$$\int_{C_1} xydx - x^3y^3dy = \left\{y = \frac{1}{2} \to dy = 0\right\} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} xdx = 0$$

$$\int_{C_2} xydx - x^3y^3dy = \left\{x = -\frac{1}{2} \to dx = 0\right\} = \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} y^3dy = 0$$

$$\int_{C_3} xydx - x^3y^3dy = \left\{y = -\frac{1}{2} \to dy = 0\right\} = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xdx = 0$$

$$\int_{C_4} xydx - x^3y^3dy = \left\{x = \frac{1}{2} \to dx = 0\right\} = -\frac{1}{8}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^3dy = 0$$

№110. $\int_C ydx + zdy + xdz$, где C задана уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t, z = t \quad 0 \le t \le 2\pi$, пробегаемая в сторону увеличения значения параметра t.

Воспользуемся тем, что $x = \cos t \to dx = -\sin t\, dt$, $y = \sin t \to dy = \cos t\, dt, z = t \to dz = dt$. Подставим это в интеграл:

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt + t\cos t\, dt + \cos t\, dt = -\pi$$

<u>В следующей задаче нам требуется найти площадь области, ограниченной:</u>

№113. Астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Вычислим интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Параметризуем кривую: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$. Следовательно, $dx = -3a\cos^2 t\sin t\, dt, dy = 3\,a\sin^2 t\cos t\, dt$, подставим в интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^3 t\sin^2 t\cos t\, dt + 3a^2\sin^3 t\cos^2 t\sin t\, dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{3\pi a^2}{8}$$

№114. Вычислите моменты инерции относительной осей координат кривой, заданной как пересечение поверхностей $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.

Формулы для моментов инерции были получены в предыдущем занятии через криволинейные интегралы Iго рода:

$$I_x = \int_C y^2 dl$$

$$I_y = \int_C x^2 dl$$

Получим уравнение кривой C. Для этого подставим $z = x + 1$ в первую формулу:

$$2x^2 + y^2 - (x+1)^2 = -1 \to (x-1)^2 + y^2 = 1$$

А значит можем записать нашу кривую параметрически: $y = \sin t, x = 1 + \cos t, 0 \le t \le 2\pi$. Вычислим интегралы (по формуле (2) занятия 5):

$$I_x = \int_C y^2 dl = \int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \pi$$

$$I_y = \int_C x^2 dl = \int_0^{2\pi} (1+\cos t)^2 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 3\pi$$

№116. Вычислите работу силы $\vec{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,-3).

Работа силы вычисляется по формуле:

$$A = \int_C \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \int_C F_x dx + F_y dy$$

Уравнение кривой C определяется из подстановки уравнения плоскости в уравнение эллипсоида:

$$3x^2 + y^2 + (x-2)^2 = 4 \to (2x-1)^2 + y^2 = 1$$

Вычислим интеграл. Параметризуем эллипс: $x = 1 + \frac{1}{2}\cos t \to dx = -\frac{1}{2}\sin t\, dt$, $y = \sin t \to dy = \cos t\, dt$

$$A = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin t\, dt\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right)\cos t\, dt = 0$$

В этой задаче даже не пришлось задумываться о положительности пробегания контура, так как ответ все равно будет 0. В других задачах будьте внимательны, так как возможна потеря знака.