КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Занятие 5. Криволинейные интегралы Iго рода.

Следующие два занятия будут посвящены криволинейным интегралам – Iго и IIго рода соответственно. Данную тему будем разбирать на примере решения задач, опубликованных на кафедре математики к общему зачёту. Перед началом просмотра данных материалов настоятельно рекомендуем в первую очередь ознакомиться с теоретической частью, описанной, например, здесь (Гл. 13 §1 – 2).

Оглавление

1. Криволинейные интегралы Iго рода. 0
№96. 2
№99. 3

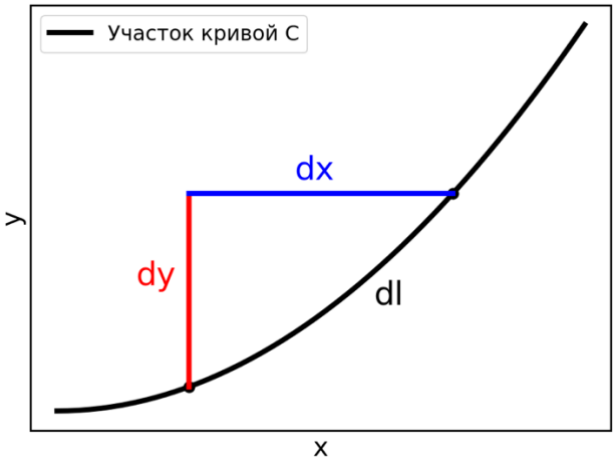
2. Приложения криволинейных интегралов Iго рода для физических задач. 4
№101. 4
№102. 5
№104. 5
№105. 6

3. Практика 7
№97. 7
№98. 7
№100. 8
№103. 8

1. Криволинейные интегралы Iго рода.

Как и всякий интеграл, криволинейный интеграл строится как предельное значение некой интегральной суммы. Давайте посмотрим, как строится эта интегральная сумма для криволинейных интегралов Iго рода. В первую очередь, нам необходимо понятие длины кривой, поэтому давайте определим длину кривой дифференциально малого кусочка кривой dl (тогда длина кривой C определим как интеграл $\mathrm{L} = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{dl}$, о чём речь пойдёт ниже).
На физическом уровне строгости (см. рисунок ниже) мы можем ввести длину dl через теорему Пифагора:

$$\mathrm{dl} \approx \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2}$$



Далее мы будем пользоваться строгим равенством, подробнее см. здесь (Гл. 13 §1). В случае, если же кривая C задана уравнением $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, то выражение для dl можно преобразовать:

$$\mathrm{dl} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2}\,\mathrm{dx} = \sqrt{1 + \mathrm{f}'^2(\mathrm{x})}\mathrm{dx}$$

Если же кривая C задана неявно уравнением $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, то данное выражение можно всегда переписать в параметрической форме:

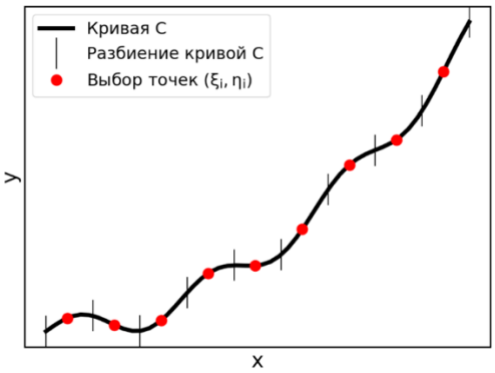
$$\mathrm{x} = \phi(\mathrm{t}), \mathrm{y} = \psi(\mathrm{t}) \to \mathrm{dx} = \phi'(\mathrm{t})\mathrm{dt}; \mathrm{dy} = \psi'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$\mathrm{dl} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \sqrt{\phi'^2(\mathrm{t}) + \psi'^2(\mathrm{t})}\mathrm{dt}$$

Теперь мы готовы сформулировать определение криволинейного интеграла. Пусть на плоскости Oxy имеется кривая C, имеющая конечную длину L (заданная уравнением $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ или неявным представлением $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$). Разобьём кривую на N кусочков, длина каждого из которого $\Delta\mathrm{l}_\mathrm{i}$ (рисунок ниже). Пусть также в каждой точке кривой C задана функция $\mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Выберем внутри каждого кусочка $\Delta\mathrm{l}_\mathrm{i}$ произвольным образом точку $(\xi_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{i})$. Тогда интегральная сумма будет определена следующим выражением:

$$\mathrm{I} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{g}(\xi_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{i})\Delta\mathrm{l}_\mathrm{i}$$

Отметим, что данная конструкция зависит не только от вида функции $g(x,y)$ и кривой C, но и от способа разбиения кривой C и выбора точек (ξ_i, η_i).



Предел интегральной суммы при $\Delta l = \max\limits_i \Delta l_i \to 0$ будет называться криволинейным интегралом Iго рода:

$$\int\limits_C g(x,y)dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_i g(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i$$

Для того, чтобы вычислить криволинейный интеграл Iго рода, необходимо свести его к обычному определенному интегралу. Если кривая C задана уравнением $y = f(x), x_1 \le x \le x_2$, то криволинейный интеграл перепишется следующим образом:

$$\int\limits_C g(x,y)dl = \int\limits_{x_1}^{x_2} g\big(x, f(x)\big)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad (1)$$

Если кривая C задана параметрически $x = \phi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta$ (или неявно, что равносильно):

$$\int\limits_C g(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g\big(\phi(t), \psi(t)\big)\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \qquad (2)$$

В случае, если $g(x,y) \equiv 1$, мы получим выражение для длины кривой C:

$$L = \int\limits_C dl = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

или:

$$L = \int\limits_C dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

Потренируемся!

№96. $\int_C$ dl, где кривая C задана уравнением $y = \frac{x^2}{2}, 0 \le x \le 1$.

В данном случае кривая задана явно. Значит, пользуемся формулой (1):

$$\int_C g(x,y)dl = \int_{x_1}^{x_2} g\big(x,f(x)\big)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

где $f(x) = \frac{x^2}{2}, g(x,y) = 1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Подставим эти выражения и вычислим интеграл:

$$\int_C dl = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \left\{x = \tan t, dx = \frac{dt}{\cos^2 t}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t\, dt}{\cos^4 t}$$

$$= \{u = \sin t; du = \cos t\, dt\} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

Разложим подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2} \to A = B = C = D = \frac{1}{4}$$

Подставим в интеграл:

$$\int_C dl = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$\approx 1.1478$$

№99. $\int_C x^2 y dl$, где кривая C: $\left\{(x,y): x = 4\cos t, y = \sin 2t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

В данном случае кривая задана <u>параметрически</u>. Значит, пользуемся формулой (2):

$$\int_C g(x,y)dl = \int_\alpha^\beta g\big(\phi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

где $g(x,y) = x^2 y,\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}, \phi(t) = 4\cos t, \psi(t) = \sin 2t$. Подставим эти выражения и вычислим интеграл:

$$\int_C x^2 y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^2 t \sin 2t \sqrt{16\sin^2 t + 4\cos^2 2t}\, dt$$

$$= \{u = \sin t, du = \cos t\, dt, \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2u^2\}$$

$$= 32\int_0^1 (1-u^2)u\sqrt{16u^2 + 4(1-2u^2)^2}du = 64\int_0^1 (1-u^2)u\sqrt{4u^4+1}du$$

$$= 64\left(\int_0^1 u\sqrt{4u^4+1}du - \int_0^1 u^3\sqrt{4u^4+1}du\right)$$

Вычисляем первый интеграл:

$$\int_0^1 u\sqrt{4u^4+1}du = \{w = 2u^2; dw = 4udu\} = \frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{w^2+1}dw$$

Далее вычисления аналогичны тем, что были проделаны в №96 (только нужно будет суметь вычислить $\sin(\arctan 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$).

$$\frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{w^2+1}dw = \frac{1}{8}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$

Со вторым интегралом проще:

$$\int_0^1 u^3\sqrt{4u^4+1}du = \{w = 4u^4; dw = 16u^3du\} = \frac{1}{16}\int_0^4 \sqrt{w+1}dw = \frac{1}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Итого:

$$\int_C x^2ydl = 64\left(\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) - \frac{1}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)\right) \approx 20.179$$

Задачи №97-98, 100 будут кратко разобраны в конце конспекта.

2. Приложения криволинейных интегралов Iго рода для физических задач.

Как и все прочие интегралы, криволинейные интегралы Iго рода активно используются для вычисления физических величин. С некоторыми из таких приложений мы познакомимся на примере задач из списка задач к общему зачёту.

№101. Вычислите массу кривой $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, 0 \le x \le 3$ с линейной плотностью $\rho(x) = 2\sqrt{1+x}$

Наиболее интуитивно понятное приложение криволинейных интегралов. Если разбить кривую C на N кусочков длины Δl_i, то масса кривой будет определяться выражением:

$$m = \sum_i m_i = \sum_i \rho(x_i)\Delta l_i$$

Производя предельный переход, получим выражение для массы:

$$m = \int_C \rho(x)dl$$

Вычислим полученный интеграл. Так как в данном случае кривая C задана явно, пользуемся формулой (1):

$$m = \int_C \rho(x)dl = \int_0^3 2\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}dx = 2\int_0^3 (1+x)dx = 15$$

№102. Вычислите x-координату центра масс кривой $\mathbf{x = cost, y = sint, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}}$, если линейная плотность постоянна.

Представим кривую в виде совокупности материальных точек. x-координата центра масс x_c системы материальных точек задаётся выражением:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\sum_i x_i \rho(x_i) \Delta l_i}{\sum_i \rho(x_i) \Delta l_i}$$

Производя предельный переход, получим выражение для x_c:

$$x_c = \frac{\int_C x\rho(x)dl}{\int_C \rho(x)dl}$$

Так как в нашем случае $\rho(x) \equiv \rho_0 = const$, выражение упростится:

$$x_c = \frac{\int_C xdl}{\int_C dl}$$

Вычислим полученные интегралы. Так как в данном случае кривая C задана параметрически, пользуемся формулой (2):

$$\int_C dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_C xdl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 1$$

Тогда получаем для x-координаты центра масс выражение:

$$x_c = \frac{2}{\pi}$$

№104. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $\mathbf{x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi}$; линейная плотность $\boldsymbol{\rho(t) = \sin t}$.

Представим кривую в виде совокупности материальных точек. Момент инерции относительно оси Ox I_x системы материальных точек задаётся выражением:

$$\mathbf{I_x = \sum_i y_i^2 \Delta m_i = \sum_i y_i^2 \rho(x_i) \Delta l_i}$$

Производя предельный переход, получим выражение для x_c:

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x) dl$$

В качестве замечания можно отметить, что момент инерции относительно оси Oy I_y вычислялся бы аналогично:

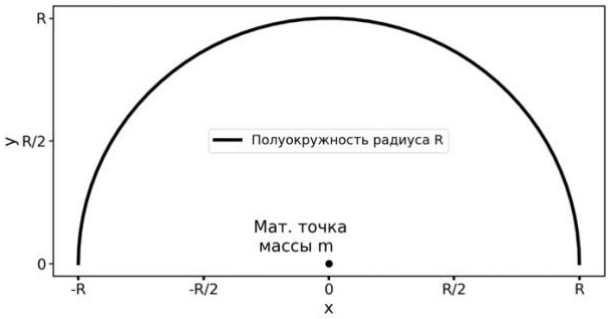
$$I_y = \int_C x^2 \rho(x) dl$$

Так как в данном случае кривая C задана параметрически, пользуемся формулой (2) для выражения I_x:

$$I_x = \int_C y^2\rho(x)dl = \int_0^{\pi} \sin^2 t \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \{u = \cos t, du = -\sin t\, dt\}$$
$$= -\int_1^{-1} (1-u^2)du = \frac{4}{3}$$

№105. Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m однородной полуокружностью массой M и радиусом R; точка помещена в центре соответствующей окружности.

Сделаем рисунок и введём координатные оси Oxy к нашей задаче:



Получим выражения для проекций сил на оси Ox и Oy. Представим полуокружность в виде совокупности материальных точек. Тогда проекции силы взаимодействия для кусочка Δm_i с материальной точкой m будут даваться выражениями:

$$\mathbf{F_{x_i} = G\frac{m\Delta m_i}{x^2+y^2}\cos\alpha_i = G\frac{m\rho_i\Delta l_i}{x_i^2+y_i^2}\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}}$$
$$\mathbf{F_{y_i} = G\frac{m\Delta m_i}{x^2+y^2}\sin\alpha_i = G\frac{m\rho_i\Delta l_i}{x_i^2+y_i^2}\frac{y_i}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}}$$

Так как наша кривая – полуокружность, то $x_i^2 + y_i^2 = R^2\ \forall i$. Суммарная сила будет определяться суммой по всем точкам кривой. Производя предельный переход, получим выражения для проекций силы:

$$F_x = \frac{Gm}{R^3}\int_C x\rho(x,y)dl$$
$$F_y = \frac{Gm}{R^3}\int_C y\rho(x,y)dl$$

где G – гравитационная постоянная. По условию кривая однородна, то есть её плотность постоянна и равна:

$$\rho(x,y) = \rho_0 = \frac{M}{\pi R} = \text{const}$$

Тогда выражения для силы также упростятся:

$$F_x = \frac{GMm}{\pi R^4}\int_C x dl$$

$$F_y = \frac{GMm}{\pi R^4}\int_C y dl$$

Осталось только вычислить интегралы. Зададим нашу кривую параметрически: $x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le \pi$. Произведем вычисления по формуле (2):

$$\int_C x dl = \int_0^\pi R\cos t\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = R^2\int_0^\pi \cos t\,dt = 0$$

Довольно тривиальный результат – данная компонента силы равна нулю в силу симметрии в данной задаче. Вычислим вторую компоненту:

$$\int_C y dl = \int_0^\pi R\sin t\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = R^2\int_0^\pi \sin t\,dt = 2R^2$$

Запишем итоговый результат:

$$\vec{F} = \{F_x, F_y\} = \left\{0, 2\frac{GMm}{\pi R^2}\right\}$$

На этом мы заканчиваем видеоразбор! Попробуйте в качестве упражнения самостоятельно решить оставшиеся номера: №97-98, №100, №103. А краткие решения будут представлены ниже для самопроверки. Успехов!

3. Практика

№97. $\int_C$ ydl, где кривая C задана уравнением $y = e^x, 0 \le x \le 2$.

В данном случае кривая задана явно. Значит, пользуемся формулой (1):

$$\int_C g(x,y)dl = \int_0^2 g\big(x, f(x)\big)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

где $f(x) = e^x, g(x,y) = y = e^x$. Подставим эти выражения и вычислим интеграл:

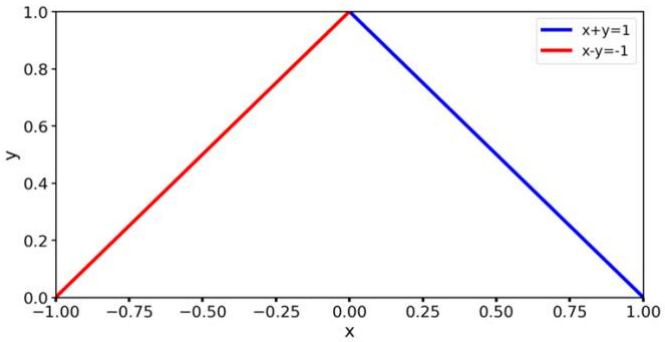
$$\int_C y dl = \int_0^2 e^x\sqrt{1 + e^{2x}}dx = \{t = e^x; dt = e^x dx\} = \int_1^{e^2}\sqrt{1 + t^2}dt$$

Далее вычисления интеграла производятся абсолютно аналогично тому, как это было проделано в №96. В результате вычислений (довольно громоздких) получим:

$$\int_C y dl = \frac{1}{2}\left(e^2\sqrt{1 + e^4} - \sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \ln\left(e^2 + \sqrt{1 + e^4}\right)\right) \approx 27.75$$

№98. $\int_C$ xydl, где кривая C часть ломаной линии $x + y = 1, x - y = -1, -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

В первую очередь изобразим кривую C:



Разумно производить вычисления по двум кускам ломаной отдельно, обозначив их C_1 и C_2 соответсвенно:

$$\int_C xydl = \int_{C_1} xydl + \int_{C_2} xydl$$

Вычислим первый интеграл. Кривая C_1 задана явно уравнением $x - y = -1 \to y = x + 1$, причем координата x меняется от -1 до 0. Поэтому пользуемся формулой (1):

$$\int\limits_{C_1} xydl = \int\limits_{-1}^{0} x(x+1)\sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0} x(x+1)dx = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Вычисляем второй интеграл. Кривая C_2 задана явно уравнением $x + y = 1 \to y = 1 - x$, причем координата x меняется от 0 до 1. Вновь пользуемся формулой (1):

$$\int\limits_{C_2} xydl = \int\limits_{0}^{1} x(1-x)\sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{1} x(1-x)dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

В сумме два интеграла дадут нуль:

$$\int_C xydl = \int_{C_1} xydl + \int_{C_2} xydl = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} = 0$$

№100. Вычислите длину кривой $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, 0 \le x \le 3$.

Воспользуемся формулой (1) в случае $g(x, y) \equiv 1$:

$$L = \int_C dl = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \int\limits_{0}^{3} \sqrt{1+x}dx = \frac{14}{3}$$

№103. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi$; линейная плотность $\rho(t) \equiv 1$.

Воспользуемся формулами, полученными в №104 раздела 2. Так как в данном случае кривая C задана параметрически, пользуемся формулой (2) для выражения I_x:

$$I_x = \int_C y^2\rho(x)dl = \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t \cdot 1 \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{2}$$