Занятие 3. Условный экстремум. Кратные интегралы.

Продолжим наше изучение материала курса математического анализа, второго семестра, читаемого на Физическом факультете. На примере решения задач, опубликованных на кафедре математики, изучим две следующие темы. Давайте приступать!

Оглавление

1. Условный экстремум. 0
№66. 1
№70. 2
№72. 3

2. Кратные интегралы. 5

2.1. Сведение двойного интеграла к повторному. 6
№73. 6
№75. 7
№78. 9
№87. 9

2.2. Замена переменных в кратных интегралах. 10
№79. 11
№80. 11
№82. 12

3. Практика 13
№67. 13
№68. 13
№69. 14
№71. 14
№74. 16
№76. 17
№77. 17
№88. 18
№81. 18

1. Условный экстремум.

Прежде, чем приступать к решению задач, просим Вас ознакомиться с теорией, описанной, например, здесь (Гл. 10 §4). Тут мы кратко сформулирем постановку задачи.

Требуется найти точки локального экстремума функции $u = f(x_1, x_2 \dots, x_n)$ с некоторыми условиями связи, то есть некоторыми формулами, описывающие связь независимых аргументов. Формулы эти, в общем виде, могут быть представлены в виде $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – то есть m условий связи. Иначе говоря, условный минимум (максимум) в точке M_0 — это наименьшее (наибольшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, координаты которых удовлетворяют условиям связи.

Необходимость умения решения задач подобного типа для физики очевидна: например, если мы хотим описать движение связанных тел (например, двух материальных точек – концов отрезка, представляющего собой модель движения линейного тела) – нам необходимо учитывать, что материальные точки, для каждой из которой мы можем записать уравнения движения Ньютона, не будут являться независимыми – необходимо учитывать наличие связей. Конечно, кроме физики, данная задача возникает во многих других областях (например, в методе машинного обучения – метод главных компонент).

Для решения данной задачи мы будем пользоваться методом Лагранжа. Его суть состоит в следующем:

1) Составляем вспомогательную функцию – функцию Лагранжа по формуле:
$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, \dots, x_n) \dots + \lambda_m F_m(x_1, \dots, x_n)$$
где λ_i – пока неизвестные нам числа.
2) Находим точки возможного экстремума из системы:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = F_1 = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_m} = F_m = 0 \end{cases}$$
Получаем систему из n+m уравнений для нахождения m значений λ_i $(i = 1 \dots m)$ и n координат точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ возможного экстремума. (Не стоит пугаться громоздкой системы – всё же она написана в общем виде!)
3) Анализируем второй дифференциал функции Лагранжа с учётом условий связи (как это делать – посмотрим подробно на примерах).

Давайте попробуем решить задачи!

№66. $u = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 2$.

В данном случае мы имеем дело с условием связи $F(x,y) = x + y - 2 = 0$. Запишем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$$

И найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ F = x + y - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Второй дифференциал функции Лагранжа при $x = 1, y = 1, \lambda = -2$:

$$d^2\Phi = 2dx^2 + 2dy^2$$

Теперь нам необходимо учесть связь независимых переменных уравнением $F(x,y) = 0$. Возьмём дифференциал от обеих частей:

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

$$dx + dy = 0 \to dx = -dy$$

И подставляем это выражение во второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 4dx^2$$

Раз второй дифференциал положителен, то в точке $(1,1)$ функция $u = f(x,y)$ имеет условный минимум.

Ответ: функция $u = x^2 + y^2$ имеет условный минимум в точке $(1,1)$ при условии $x + y = 2$

Замечание: конечно, в данном случае можно было поступить гораздо проще – из условия связи выразить $y = 2 - x$, подставить в функцию $u = x^2 + y^2 = x^2 + (2 - x)^2$ и далее анализировать экстремум данной функции. Однако понятно, что далеко не при каждом условии связи получится в явном виде выразить y через x (или наоборот) – поэтому мы и учим более универсальный метод Лагранжа.

Давайте закрепим метод!

№70. $u = x + y + z$ при условии $xyz = 1$

Запишем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,y,z) = x + y + z + \lambda(xyz - 1)$$

И найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 + \lambda xz = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 1 + \lambda xy = 0 \\ F = xyz - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

И записываем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 2\lambda z\, dxdy + 2\lambda x\, dydz + 2\lambda y\, dzdx = -2dxdy - 2dxdz - 2dydz$$

Воспользуемся условием связи:

$$F(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \to yzdx + xzdy + xydz = 0 \to dx + dy + dz = 0$$

И подставим это выражение в формулу для второго дифференциала:

$$d^2\Phi = -2dxdy - 2dx(-dx - dy) - 2dy(-dx - dy) = 2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2$$

Анализируем наличие экстремума при помощи критерия Сильвестра (смотри предыдущее занятие):

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \delta_1 = 2 > 0, \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

А значит, данная квадратичная форма знакоположительная, и следовательно, в точке $(1,1,1)$ мы имеем локальный минимум.

Ответ: функция $u = x + y + z$ имеет условный минимум в точке $(1,1,1)$ при условии $xyz = 1$

<u>Замечание:</u> как видно из данного примера, из условий связи при анализе второго дифференциала у нас получается функция с n-m переменными! (в данном случае n=3, m=1 – функция трёх переменных с одним условием связи).

И напоследок, рассмотрим пример, в котором мы будем иметь дело сразу с двумя условиями связи.

№72. $u = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$

Алгоритм всё тот же - составляем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

И определяем точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ F_2 = x + y + z = 0 \end{cases}$$

Решаем систему – для начала определим из 5го уравнения $z = -x - y$. Далее вычитаем из первого второе:

$$(y - x)(z - 2\lambda_1) = 0$$

Откуда или $z = 2\lambda_1$, или $y = x$.

Рассматриваем случай $y = x$ и подставим в четвёртое уравнение $z = -2x$:

$$x^2 + x^2 + 4x^2 = 1 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \to y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \to z = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Подставим тройку чисел $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}; z = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ во второе и третье уравнения:

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{6}}\lambda_1 + \lambda_2 = 0;\ \frac{1}{6} - \frac{4}{\sqrt{6}}\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Откуда $\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}; \lambda_2 = \frac{1}{6}$. Итого, имеем первое решение: $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}; z = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}; \lambda_2 = \frac{1}{6}$.

Подставим тройку чисел $x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}}; z = \frac{2}{\sqrt{6}}$ во второе и третье уравнения:

$$-\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{6}}\lambda_1+\lambda_2=0;\ \frac{1}{6}+\frac{4}{\sqrt{6}}\lambda_1+\lambda_2=0$$

Откуда $\lambda_1=-\frac{1}{2\sqrt{6}};\lambda_2=\frac{1}{6}$. Итого, имеем второе решение: $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}};z=\frac{2}{\sqrt{6}};\lambda_1=-\frac{1}{2\sqrt{6}};\lambda_2=\frac{1}{6}$.

Итого мы уже получили 2 решения. Если вернуться в начало вычислений – где мы вычитали из первого уравнения второе – можно попробовать вычесть из первого третье, или из второго третье уравнение и проделать похожие выкладки, получив в результате вычислений 6 решений системы. Выпишем их:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=-\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=-\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{6}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=-\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x=-\frac{2}{\sqrt{6}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=\frac{2}{\sqrt{6}} \\ z=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=-\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=-\frac{2}{\sqrt{6}} \\ z=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Очевидно, что анализ этих точек абсолютно однотипен, поэтому здесь будет произведен анализ одной из точек – остальные предоставляются читателю в качестве проверки усвоения материала. Рассмотрим, например, точку:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=-\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \lambda_1=\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi=2\lambda_1dx^2+2\lambda_1dy^2+2\lambda_1dz^2+2zdxdy+2xdydz+2ydxdz$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dy^2+dz^2-4dxdy+2dydz+2dxdz)$$

Воспользуемся условиями связи:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}\to\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}}dx+\frac{2}{\sqrt{6}}dy-\frac{4}{\sqrt{6}}dz=0 \end{cases}\to\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ dx+dy-2dz=0 \end{cases}$$

Откуда $dz=0, dy=-dx$. Подставим в формулу второго дифференциала:

$$d^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dx^2 + 4dx^2) = \sqrt{6}dx^2 > 0$$

Что значит, что в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ мы имеем локальный минимум. Анализ оставшихся точек предоставляется читателям.

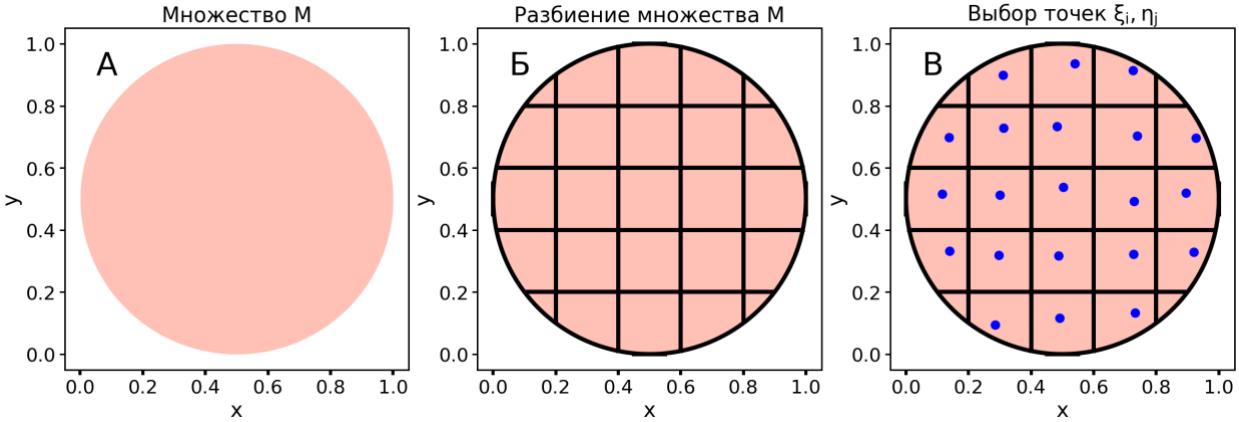
Остальные номера - №67-69, 71 будут разобраны в конце конспекта.

2. Кратные интегралы.

Давайте знакомиться с чрезвычайно важной темой, посвященной кратным интегралам, что в дальнейшем нам позволит изучать криволинейные и поверхностные интегралы. Среди задач общего зачёта много физических задач – задач, посвященных вычислению физических величин при помощи кратных интегралов, например, момент инерции тела, знакомый Вам из курса механики.
Давайте в первую очередь ознакомимся с понятием кратного интеграла – для простоты будем рассматривать двойной интеграл. Любой интеграл начинается со своей интегральной суммы. Ознакомимся, как строится интегральная сумма для случая функции $u = f(x, y)$ в области точек на плоскости M (рис. А). Пусть, для простоты, область M – круг. Разобьем область M на небольшие области размера $\Delta x \times \Delta y$ (рис. Б). Далее внутри каждой маленькой области выбираем произвольным образом точки (ξ_i, η_i) (рис. В). Тогда интегральной суммой для данного разбиения и для данного выбора точек (ξ_i, η_i) называется следующая величина:

$$I = \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

Ещё раз подчеркнем – эта величина зависит и от области M, и от вида функции $f(x, y)$, и от размера разбиений $\Delta x \times \Delta y$, и от выбора точек (ξ_i, η_i).



Понятно, что необязательно разбиение проводить прямоугольниками – оно может быть абсолютно произвольным. Здесь было выбрано такое разбиение лишь для простоты иллюстрации.

Двойным интегралом функции $u = f(x, y)$ по области M называется предел (главное, чтобы значение предела не зависело ни от выбора точек (ξ_i, η_j), ни от разбиения на области):

$$\iint_M f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

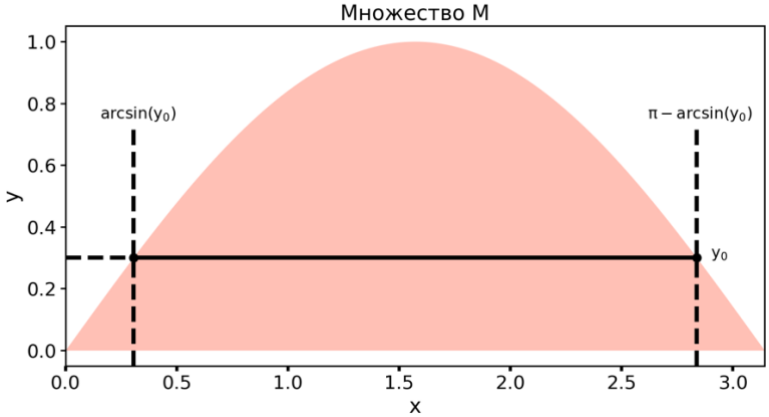
Подробно теория описана здесь (Гл. 12 §1 – 5). Ознакомимся с методами вычисления таких интегралов. Первый метод – сведение интеграла к повторным интегралам.

2.1. Сведение двойного интеграла к повторному.

Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

№73. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy$

В первую очередь, давайте попробуем изобразить область M, в которой нас просят вычислить интеграл. Смотрим на внешнюю переменную – x – она изменяется от 0 до π. При этом, при каждом фиксированном $x_0 \in [0, \pi]$ переменная y изменяется от 0 до $\sin x_0$. Изобразим графически:



Тогда чтобы поменять порядок интегрирования, мы должны внешней переменной выбрать y, которая изменяется от 0 до 1. При этом при каждом фиксированном $y_0 \in [0,1]$ переменная x изменяется от $\arcsin(y_0)$ до $\pi - \arcsin(y_0)$. Тогда повторный интеграл перепишется в виде (подынтегральную функцию не изменяем!):

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy = \int_0^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} 2ydx$$

В задании нам необходимо ещё вычислить интеграл. Понятно, что исходный интеграл технически проще вычислять – его и вычислим.

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy = \int_0^{\pi} dx\, y^2|_0^{\sin x} = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Замечание: конечно же, необязательно рисовать фигуру на плоскости для того, чтобы изменить порядок интегрирования. Могут быть полезны следующие рассуждения (вновь, на примере №73). Нам необходимо произвести замену переменных в интеграле:

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy$$

Границы области аналогичны системе неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \sin x \end{cases}$$

Нам нужно установить границы изменения y так, чтобы они не зависели от x, а границы изменения x могут зависеть от y. Очевидно, что левая граница для y: $0 \le y$, а правая $y \le \max\limits_{x\in[0,\pi]} \sin x = 1$. То есть границы изменения y: $0 \le y \le 1$.

Теперь для x: здесь просто, так как $\sin x \ge y \to \arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$.

Окончательно приходим к граничным условиям:

$$\begin{cases} \arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

А соответствующий интеграл:

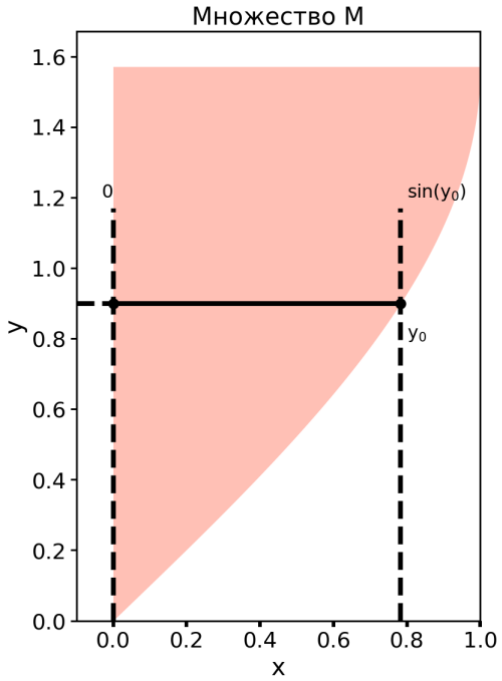
$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy = \int_0^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} 2ydx$$

И мы обошлись без графического построения области (что не всегда возможно).

Потренируемся ещё:

№75. $\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y dy$

Изображаем область M – для этого заметим, что внешняя переменная x изменяется от 0 до 1. При этом, при каждом фиксированном $x_0 \in [0,1]$ переменная y изменяется от $\arcsin x_0$ до $\frac{\pi}{2}$. Изобразим это графически:



Тогда переменная y изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. При каждом фиксированном $y_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ переменная x изменяется от 0 до $\sin y_0$. То есть интеграл перепишется следующим образом:

$$\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\, dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\sin y} \cos y\, dx$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\sin y} \cos y\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy \int_0^{\sin y} dx = \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy \cdot x\Big|_0^{\sin y} = \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy \cdot \sin y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2y\, dy = \frac{1}{2}$$

<u>Замечание:</u> как и в №73, конечно можно было выполнить данный номер и без рисунка. Границы области аналогичны системе неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \arcsin x \le y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Нам нужно установить границы изменения y так, чтобы они не зависели от x, а границы изменения x могут зависеть от y. Очевидно, что правая граница для y: $y \le \frac{\pi}{2}$, а левая $y \ge \min\limits_{x\in[0,1]} \arcsin x = 0$.

Теперь для x: левая граница $0 \le x$; правая граница $\arcsin x \le y \to x \le \sin y$. И тогда получаем ответ:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \sin y \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

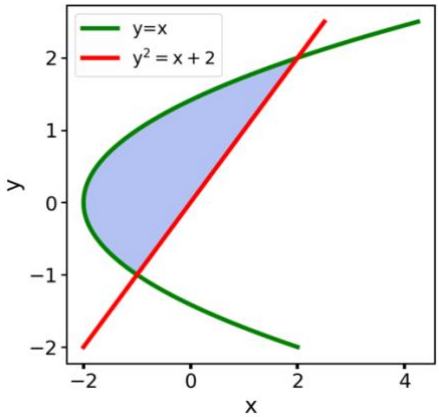
А соответствующий интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\, dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\sin y} \cos y\, dx$$

Сведите двойной интеграл $\iint_M f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

№78. $M = \{(x,y): y^2 \le x+2, y \ge x\}$

Для того, чтобы изобразить данную область на плоскости (x,y), изобразим графики функций $y^2 = x+2$ и $y = x$, и отметим их пересечение:



Сведём двойной интеграл к повторному первым способом (внешняя переменная y). Из графика видим, что $y \in [-1,2]$. При каждом фиксированном $y_0 \in [-1,2]$ переменная x изменяется от $y_0^2 - 2$ до y_0. Тогда двойной интеграл запишется в виде:

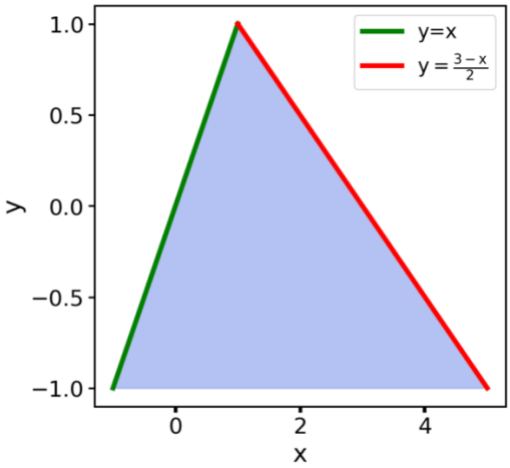
$$\iint_M f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2-2}^{y} f(x,y)dx$$

Сведём двойной интеграл к повторному вторым способом (внешняя переменная x). Из графика видим, что $x \in [-2,2]$. При этом видно, что если $-2 \le x \le -1$, то при каждом $x_0 \in [-2,-1]$ переменная y изменяется в пределах $-\sqrt{x_0+2}$ до $\sqrt{x_0+2}$. При $x_0 \in [-1,2]$ переменная y изменяется в пределах от x_0 до $\sqrt{x_0+2}$. Тогда запишем двойной интеграл в виде повторного:

$$\iint_M f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^{2} dx \int_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dx$$

№87. Изобразите на плоскости (x,y) область M, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint_M f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{y}^{3-2y} f(x,y)dx$. Измените порядок интегрирования.

Изобразим графики функции $x = y$ и $x = 3 - 2y$ (или $y = x$ и $y = \frac{3-x}{2}$), причём переменная y изменяется от -1 до 1:



Как видим, $x \in [-1,5]$. При фиксированном $x_0 \in [-1,1]$ переменная y изменяется от 0 до x_0. А при фиксированном $x_0 \in [1,5]$ переменная y изменяется от 0 до $\frac{3-x_0}{2}$. Тогда изменим порядок интегрирования:

$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{3-2y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{5} dx \int\limits_{0}^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$$

Резюмируя, можно сказать, что если область достаточно простая, мы можем попробовать вычислить кратный интеграл методом сведения кратного интеграла к повторным. Однако ещё одним сильным методом вычисления кратных интегралов является метод замены переменных.

2.2. Замена переменных в кратных интегралах.

Давайте вспомним, по каким формулам производилась замена переменных в обычных интегралах. Пусть перед нами интеграл:

$$\int f(x)dx$$

Заменив $x = \phi(t) \to dx = \phi'(t)dt$, мы имеем:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Важно появление нового сомножителя – помимо исходной функции $f(\cdot)$ после замены мы получили в качестве сомножителя $\phi'(\cdot)$. Аналогичная ситуация и с двойными (кратными) интегралами. Пусть в интеграле:

$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy$$

мы заменили $x = \xi(u,v), y = \eta(u,v)$. Тогда формула замены переменных оказывается следующей:

$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(\xi(u,v),\eta(u,v))|D(u,v)|dudv$$

где G – образ области M в координатах (u,v); $D(u,v)$ – так называемый якобиан. Вычисляется он по формуле:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix} = \xi_u\eta_v - \xi_v\eta_u$$

Обратите внимание – в формуле перехода к новым координатам стоит <u>модуль</u> якобиана!
Пример: частой заменой переменной оказывается переход к полярным координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Вычислим якобиан:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Запомним этот результат! Вычислим следующие интегралы:

№79. $\iint_M (x^2+y^2)dxdy, M = \{x^2+y^2 \le 6\}$;

Наша область – круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{6}$. А значит, переходим в полярные координаты. При этом наша область превратится в прямоугольник $\varphi \in [0,2\pi], \rho \in [0,\sqrt{6}]$:

$$\iint_M (x^2+y^2)dxdy = \iint_G \rho^2\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}} \rho^3 d\rho = 2\pi\cdot\frac{36}{4} = 18\pi$$

Всё довольно просто!

№80. $\iint_M (x^2-y^2)dxdy, M = \left\{1 \le x^2+y^2 \le 4 \cap \frac{\pi}{6} \le \arctan\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{4} \cap x > 0\right\}$;

Область выглядит довольно сложно. Однако можно вспомнить, что $\arctan\frac{y}{x}$ – это ни что иное, как переменная φ из полярных координат. То есть в нашем случае, при замене переменных на полярные координаты, наша область превратится в прямоугольник $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right], \rho \in [1,2]$. А значит, наш интеграл:

$$\iint_M (x^2-y^2)dxdy = \iint_G \rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)d\varphi\int_1^2\rho^3 d\rho$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\, d\varphi\cdot\frac{2^4-1^4}{4} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{15}{4} = \frac{15}{16}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

№82. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область M на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xe^y=1, xe^y=2, x=e^y, x=2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области M, используя замену переменных в двойном интеграле.

На самом деле, подсказка спрятана уже в самой формулировке задачи. Действительно, если мы возьмём в качестве новых переменных $u = xe^y, v = xe^{-y}$, то тогда наши новые переменные будут изменяться в пределах $u\in[1,2], v\in[1,2]$ – прямоугольник в новых переменных. Наша задача – определить площадь области, вычисляемой по формуле:

$$S = \iint_M dxdy = \iint_G |D|dudv$$

Так как область G — прямоугольник. Вычислим якобиан, предварительно выразив функции $x=\xi(u,v), y=\eta(u,v)$:

$$u\cdot v = x^2 \to x=\sqrt{uv};\quad \frac{u}{v}=e^{2y}\to y=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$$

Вычисляем:

$$D = \begin{vmatrix}\xi_u & \xi_v\\ \eta_u & \eta_v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v}\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{uv}}-\frac{1}{\sqrt{uv}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Остаётся только вычислить площадь фигуры:

$$S = \iint_M dxdy = \iint_G |D|dudv = \int_1^2\frac{1}{\sqrt{v}}dv\int_1^2\frac{1}{2\sqrt{u}}du = 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

На этом мы заканчиваем наш третий семинар! Продолжим изучение кратных интегралов в следующем, четвёртом занятии – но пока рекомендуем самостоятельно решить следующие номера: №67-69, №71, №74, №76-77, №81, №88. Ниже будут приложены их краткие решения.

3. Практика

№67. $\mathbf{u = x + y}$ при условии $\mathbf{x^2 + y^2 = 2}$.

Запишем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

И найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + 2y\lambda = 0 \\ F = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Получили две точки возможного экстремума. Выписываем второй дифференциал функции Лагранжа в точке возможного экстремума:

$$d^2\Phi = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$$

Найдем связь дифференциалов dx и dy:

$$x^2 + y^2 - 2 = 0 \to 2xdx + 2ydy = 0 \to dx = -dy$$

Для обеих точек. Проанализируем первую точку, подставив значение $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$d^2\Phi = -dx^2 - dy^2 = -2dx^2$$

И в точке $x = y = 1$ мы имеем локальный максимум. В точке $x = y = -1$ знак λ меняется на противоположный, и там мы будем иметь локальный минимум.

Ответ: функция $u = x + y$ имеет условный максимум в точке $(1,1)$ и условный минимум в точке $(-1, -1)$ при условии $x^2 + y^2 - 2 = 0$

№68. $\mathbf{u = x + y}$ при условии $\mathbf{xy = 1}$.

Запишем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y) = x + y + \lambda(xy - 1)$$

И найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + x\lambda = 0 \\ F = xy - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Получили две точки возможного экстремума. Выписываем второй дифференциал функции Лагранжа в точке возможного экстремума:

$$d^2\Phi = 2\lambda dxdy$$

Найдем связь дифференциалов dx и dy:

$$xy - 1 = 0 \to ydx + xdy = 0 \to dx = -dy$$

Для обеих точек. Проанализируем первую точку, подставив значение $\lambda = -1$:

$$d^2\Phi = -2dxdy = +2dx^2$$

И в точке $x = y = 1$ мы имеем локальный минимум. В точке $x = y = -1$ знак λ меняется на противоположный, и там мы будем иметь локальный максимум.

Ответ: функция $u = x + y$ имеет условный минимум в точке $(1,1)$ и условный максимум в точке $(-1,-1)$ при условии $xy - 1 = 0$

№69. $u = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ в области $x > 0 \cap y > 0$.

Запишем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,y) = xy + \lambda(x^3 + y^3 - 2xy)$$

И найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = y + 3x^2\lambda - 2y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = x + 3y^2\lambda - 2x\lambda = 0 \\ F = x^3 + y^3 - 2xy = 0 \end{cases}$$

Во-первых понятно, что данная система имеет решение $x = y = 0$ – однако нас интересует область $x > 0 \cap y > 0$. Решаем систему при этих условиях: выразим из первого уравнения y:

$$y = \frac{3x^2\lambda}{2\lambda - 1}$$

Подставляем это выражение во второе уравнение:

$$x + 3\lambda \cdot \frac{9x^4}{(2\lambda - 1)^2} - 2x\lambda = 0 \to (3x)^3 \cdot \frac{\lambda^3}{(2\lambda - 1)^2} = 2\lambda - 1$$

(мы сократили $x \neq 0$). Откуда получаем:

$$x = \frac{2\lambda - 1}{3\lambda} \to y = \frac{3\lambda}{2\lambda - 1}x^2 = \frac{3\lambda}{2\lambda - 1} \cdot \left(\frac{2\lambda - 1}{3\lambda}\right)^2 = \frac{2\lambda - 1}{3\lambda}$$

Подставляем эти выражения в третье уравнение:

$$\left(\frac{2\lambda - 1}{3\lambda}\right)^3 + \left(\frac{2\lambda - 1}{3\lambda}\right)^3 - 2 = 0 \to \frac{2\lambda - 1}{3\lambda} = 1 \to \lambda = -1 \to x = y = 1$$

Выписываем второй дифференциал функции Лагранжа в точке возможного экстремума:

$$d^2\Phi = 6x\lambda dx^2 + 2 \cdot (1 - 2\lambda)dxdy + 6y\lambda dy^2 = -6dx^2 + 6dxdy - 6dy^2$$

Найдем связь дифференциалов dx и dy:

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0 \to (3x^2 - 2y)dx + (3y^2 - 2x)dy = 0 \to dx + dy = 0 \to dy = -dx$$

В переходе от второго к третьему равенству мы подставили значения $x = y = 1$. И тогда второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = -18dx^2 < 0$$

А значит в точке $(1,1)$ функция $u = xy$ имеет условный максимум.

Ответ: функция $u = xy$ имеет условный максимум в точке $(1,1)$ при условии $x^3 + y^3 - 2xy = 0$

№71. $u = x^2y^3z^4$ при условии $2x + 3y + 4z = 9$

Запишем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,y,z) = x^2y^3z^4 + \lambda(2x + 3y + 4z - 9)$$

И найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xy^3z^4 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 + 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + 4\lambda = 0 \\ F = 2x + 3y + 4z - 9 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему. Подставляем из первого уравнения $\lambda = -xy^3z^4$ во второе уравнение:

$$x^2y^2z^4 - xy^3z^4 = 0 \to xy^2z^4(x - y) = 0$$

То есть или $x = 0$, или $y = 0$, или $z = 0$, или $x = y$. Рассмотрим вариант, когда только одна из переменных равна нулю ($x = 0$). Тогда из первого уравнения $\lambda = 0$, а из четвертого уравнения мы получаем $3y + 4z = 9$ – данная система не разрешима.

Рассмотрим случай $x = y = 0$. Тогда $\lambda = 0, 4z - 9 = 0 \to z = \frac{9}{4}$

Рассмотрим случай $x = z = 0$. Тогда $\lambda = 0, 3y - 9 = 0 \to y = 3$

Рассмотрим случай $y = z = 0$. Тогда $\lambda = 0, 2x - 9 = 0 \to x = \frac{9}{2}$

Рассмотрим случай $x = y \neq 0$. Тогда из второго уравнения:

$$y^4z^4 = -\lambda$$

Подставляем в третье:

$$y^5z^3 - y^4z^4 = 0 \to y = z = x$$

Из четвертого уравнения получим $2z + 3z + 4z = 9 \to z = 1$. А из $y^4z^4 = -\lambda$ получим $\lambda = -1$.

Итого имеем четыре решения:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{9}{4} \\ \lambda = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Выпишем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 2y^3z^4dx^2 + 6x^2yz^4dy^2 + 12x^2y^3z^2dz^2 + 12xy^2z^4dxdy + 24x^2y^2z^3dydz + 16xy^3z^3dxdz$$

Очевидно, что второй дифференциал равен нулю в первых трёх точках, а значит необходим более подробный анализ. Однако понятно данный случай схож со случаем отсутствия экстремума функции $y(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$. Поэтому осталось проанализировать четвертую точку. Найдем связь дифференциалов dx, dy, dz:

$$2x + 3y + 4z - 9 = 0 \to 2dx + 3dy + 4dz = 0 \to dx = -\frac{3}{2}dy - 2dz$$

Подставим в формулу дифференциала, учтя $x = y = z = 1$:

$$d^2\Phi = 2\left(-\frac{3}{2}dy - 2dz\right)^2 + 6dy^2 + 12dz^2 + 12\left(-\frac{3}{2}dy - 2dz\right)dy + 24dydz$$
$$+ 16\left(-\frac{3}{2}dy - 2dz\right)dz = -\frac{15}{2}dy^2 - 12dydz - 12dz^2$$

Анализируем наличие экстремума при помощи критерия Сильвестра:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \to \delta_1 = -\frac{15}{2} < 0, \delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{15}{2} & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 90 - 36 > 0$$

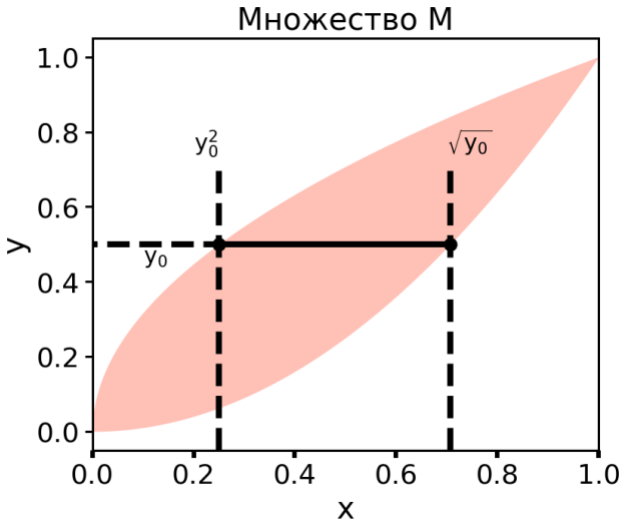
А значит в точке $(1,1,1)$ функция $u = x^2y^3z^4$ имеет условный максимум.

Ответ: функция $u = x^2y^3z^4$ имеет условный максимум в точке $(1,1,1)$ при условии $2x + 3y + 4z - 9 = 0$

<u>Замечание</u>: возможно, в данном случае технически было проще выразить $x = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}y - 2z$ и анализировать безусловный экстремум функции $u(y,z) = \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y - 2z\right)^2 y^3z^4$.

№74. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2ydy$

Изображаем область M – для этого заметим, что внешняя переменная x изменяется от 0 до 1. При этом, при каждом фиксированном $x_0 \in [0,1]$ переменная y изменяется от $\sqrt{x_0}$ до x_0^2. Изобразим это графически:



Тогда переменная y изменяется от 0 до 1. При каждом фиксированном $y_0 \in [0,1]$ переменная x изменяется от y_0^2 до $\sqrt{y_0}$. То есть интеграл перепишется следующим образом:

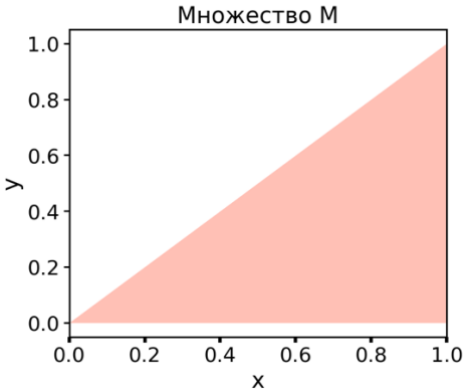
$$\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\, dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 2ydx$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2ydy = \int_0^1 dx\left(\sqrt{x}^2 - (x^2)^2\right) = \int_0^1 dx(x - x^4) = \frac{3}{10}$$

№76. $\int_0^1 dy \int_y^1 xydx$

Заметим, что внешняя переменная y изменяется от 0 до 1. При этом, при каждом фиксированном $y_0 \in [0,1]$ переменная y изменяется от y_0 до 1.



Тогда переменная x изменяется от 0 до 1. При каждом фиксированном $x_0 \in [0,1]$ переменная y изменяется от 0 до x_0. То есть интеграл перепишется следующим образом:

$$\int_0^1 dy \int_y^1 xydx = \int_0^1 dx \int_0^x xydy$$

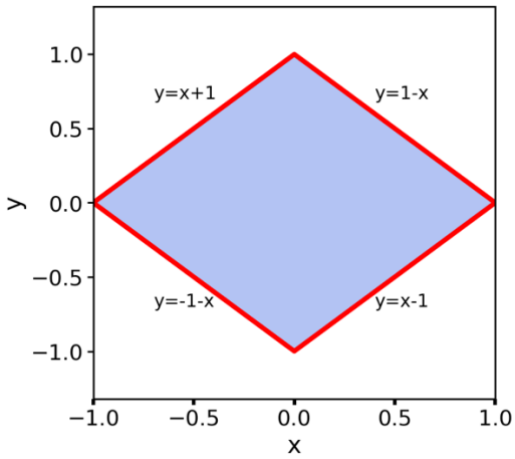
Вычислим интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_0^x xydy = \int_0^1 xdx \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{8}$$

Сведите двойной интеграл $\iint_M f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

№77. $M = \{(x,y): |x| + |y| \le 1\}$

Данная область представляет собой ромб, как изображено на рисунке ниже:



Сведём двойной интеграл к повторному первым способом (внешняя переменная y). Из графика видим, что $y \in [-1,1]$. При каждом фиксированном $y_0 \in [-1,0]$ переменная x изменяется от $-1 - y_0$ до $y_0 + 1$. При $y_0 \in [0,1]$ переменная x изменяется от $y_0 - 1$ до $1 - y_0$. Тогда двойной интеграл запишется в виде:

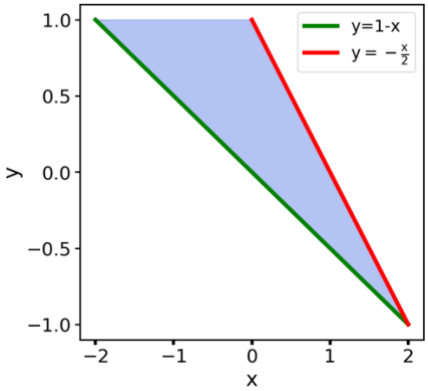
$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1-y}^{y+1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx$$

Сведём двойной интеграл к повторному вторым способом (внешняя переменная x). Видим, что $x \in [-1,1]$. При каждом фиксированном $x_0 \in [-1,0]$ переменная x изменяется от $-1 - x_0$ до $x_0 + 1$. При $x_0 \in [0,1]$ переменная x изменяется от $x_0 - 1$ до $1 - x_0$. Тогда двойной интеграл запишется в виде:

$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-x}^{x+1} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$$

№88. Изобразите на плоскости (x,y) область M, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint_M f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-2y}^{1-y} f(x,y)dx$. Вычислите указанный интеграл для $f(x,y) = y$.

Изобразим графики функции $x = -2y$ и $x = 1 - y$ (или $y = -\frac{x}{2}$ и $y = 1 - x$), причём переменная y изменяется от -1 до 1:



Вычислим интеграл, сведя его к повторному:

$$\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-2y}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{1} ydy \int\limits_{-2y}^{1-y} dx = \int\limits_{-1}^{1} (1 - y + 2y)dy = 2$$

№81. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область M на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y^2 = 16x, y^2 = 9x, x = 2y, x = 4y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области M, используя замену переменных в двойном интеграле.

Как и в №82, подсказка спрятана в условии. Если мы возьмём в качестве новых переменных $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x}{y}$, то тогда наши новые переменные будут изменяться в пределах $u \in [9,16], v \in [2,4]$ – прямоугольник в новых переменных. Определим площадь области:

$$S = \iint\limits_M dxdy = \iint\limits_G |D| dudv$$

Вычислим якобиан, предварительно выразив функции $x = \xi(u,v), y = \eta(u,v)$:

$$u \cdot v = y \to \ y = \eta(u,v) = uv; \quad uv^2 = x \to x = \xi(u,v) = uv^2$$

Вычисляем:

$$D = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^2 & 2uv \\ v & u \end{vmatrix} = uv^2 - 2uv^2 = -uv^2$$

Остаётся только вычислить площадь фигуры:

$$S = \iint\limits_M dxdy = \iint\limits_G |D| dudv = \int\limits_2^4 v^2 dv \int\limits_9^{16} udu = \frac{56}{3} \cdot \frac{175}{2} = \frac{4900}{3}$$