Занятие 2. Формула Тейлора, локальный экстремум и неявные функции.

В данном видеоразборе мы познакомимся с методами решения задач ещё трёх тем курса математического анализа-II. Причём знакомиться с этими методами мы будем на примере задач из списка задач к общему зачёту, опубликованному на кафедре математики Физического факультета. Давайте приступать!

Оглавление

1. Формула Тейлора.

Как мы знаем из курса математического анализа-I, формула Тейлора имеет огромное прикладное значение, в том числе и в физике, в чём по мере обучения на Физическом факультете Вы будете убеждаться всё больше и больше. Так, в первом семестре мы познакомились с формулой Тейлора для функции одной переменной, теперь же нам предстоит ознакомиться с аналогичным материалом для функции нескольких переменных. Теоретический материал более подробно изложен, например, здесь (Гл. 9 §8).

Формула Тейлора. Если функция $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то для $\forall M(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ из этой окрестности приращение функции $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ можно представить в виде:

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}u|_N$$

где N – произвольная точка из отрезка M_0M. Как Вы помните, последний член $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}u|_N$ в этой сумме является остаточным членом, и существует несколько форм его записи. Мы будем пользоваться формой Пеано остаточного члена:

$$R_{n+1} = o(\rho^n)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$. Давайте на примерах №35-40 потренируемся в записи формулы Тейлора!

№39. $u = x^3 + y^3 - 3xy$; $M_0(1,1)$, $n = 2$

Воспользуемся выражениями для дифференциалов из №20 первой части видеоразбора:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = 6xdx^2 - 6dxdy + 6ydy^2$$

где $dx = x - x_0 = x - 1$; $dy = y - y_0 = y - 1$. Вычисляем дифференциалы в точке $M_0(1,1)$:

$$du|_{M_0} = (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1)(x-1) + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1)(y-1) = 0$$

$$d^2u|_{M_0} = 6 \cdot 1 \cdot (x-1)^2 - 6 \cdot (x-1)(y-1) + 6 \cdot 1 \cdot (y-1)^2 = 6x^2 - 6xy - 6x - 6y + 6$$

Записываем остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o(\rho^n) = o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}^2\right) = o((x-1)^2 + (y-1)^2)$$

И записываем ответ:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{M_0} + R_{n+1}$$

Ответ: $u = f(x,y) = 2 + 3x^2 - 3xy - 3x - 3y + 3y^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$

Давайте закрепим это на №35:

№35. $u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$; $M_0(2,3)$, $n = 2$

В прошлом разборе мы тренировались в записи дифференциалов, в том числе для функции $u = \arctan\frac{y}{x}$ (№21). Давайте сразу выпишем выражения для первого и второго дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$
$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2$$

где $dx = x - x_0 = x - 2; dy = y - y_0 = y - 3$. Теперь вычислим их в точке $M_0(2,3)$:

$$du|_{M_0} = -\frac{3}{2^2+3^2}(x-2) + \frac{2}{2^2+3^2}(y-3) = -\frac{3}{13}(x-2) + \frac{2}{13}(y-3) = -\frac{3}{13}x + \frac{2}{13}y$$

$$d^2u|_{M_0} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(2^2+3^2)^2}(x-2)^2 + 2\frac{3^2-2^2}{(2^2+3^2)^2}(x-2)(y-3) - \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(2^2+3^2)^2}(y-3)^2$$
$$= \frac{12}{169}x^2 + \frac{10}{169}xy - \frac{12}{169}y^2 - \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y$$

Записываем остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o(\rho^n) = o\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}^2\right) = o((x-2)^2 + (y-3)^2)$$

И записываем ответ:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{M_0} + R_{n+1}$$

Ответ: $u = f(x,y) = \arctan\frac{3}{2} - \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{6}{169}x^2 + \frac{5}{169}xy - \frac{6}{169}y^2 + o((x-2)^2 + (y-3)^2)$

Остальные номера - №36-38, 40 будут разобраны в конце конспекта. Перейдём к следующей теме данного разбора – поиск точек локального экстремума.

2. Локальный экстремум

Теоретический материал более подробно изложен, например, здесь (Гл. 9 §9). Мы же изложим краткий алгоритм действий для поиска локального экстремума функции нескольких переменных $u = f(x_1, \dots, x_m)$.

1) Находим точку M_0 возможного экстремума (таких точек может быть несколько), решая систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial u}{\partial x_m} = 0 \end{cases} \to M_0(x_1, \dots, x_m)$$
2) Выписываем второй дифференциал в точке M_0 возможного экстремума (таких точек может быть несколько)
$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j$$
3) Если $d^2u|_{M_0}$ – положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма от переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, то функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет локальный минимум (максимум) в точке M_0.
4) Если же $d^2u|_{M_0}$ – знакопеременная квадратичная форма, экстремума в точке M_0 нет.

Как определять положительность (отрицательность) квадратичной формы? Мы здесь выпишем только случай двух и трёх переменных, более общий вариант изложен в Гл. 9 §9. Для функции двух/ трёх переменных мы можем составить матрицу квадратичной формы из второго дифференциала:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix}$$

В случае функции двух переменных далее вычисляем угловые миноры:

$$\delta_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0); \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}$$

Если $\delta_1 > 0; \delta_2 > 0$ – то перед нами положительно определенная квадратичная форма. Если $\delta_1 < 0; \delta_2 > 0$ – то перед нами отрицательно определенная квадратичная форма. Для функции трёх переменных:

$$\delta_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0); \ \delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}; \delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{vmatrix}$$

Если $\delta_1 > 0; \delta_2 > 0; \delta_3 > 0$ – то перед нами положительно определенная квадратичная форма. Если $\delta_1 < 0; \delta_2 > 0; \delta_3 < 0$ – то перед нами отрицательно определенная квадратичная форма. Это - так называемый критерий Сильвестра.

Знакопеременность квадратичной формы означает, что в некоторой окрестности точки (0,…,0) квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Например: $Q(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x^2 - 3\Delta x\Delta y - \Delta y^2$ – знакопеременная квадратичная форма: $Q(1,0) > 0; Q(0,-1) < 0$. Если критерий Сильвестра не работает, то надо явно найти точки в окрестности 0, в которых квадратичная форма принимает положительные значения, и точки, в которых квадратичная форма принимает отрицательные значения

Давайте ознакомимся со всеми этими понятиями на примере!

№41. $\mathbf{u = x^2 + xy + y^2}$

1) Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x = 0 \end{cases} \rightarrow M_0(0,0)$$

2) Второй дифференциал в точке $M_0(0,0)$:

$$d^2u|_{M_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)\Delta y^2 = 2\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta y^2$$

3) Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем её угловые миноры:

$$\delta_1 = 2 > 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Раз все угловые миноры положительны, данная квадратичная форма положительно определённая и, следовательно, функция $u = x^2 + xy + y^2$ имеет локальный минимум в точке $M_0(0,0)$.

Ответ: функция $u = x^2 + xy + y^2$ имеет локальный минимум в точке $M_0(0,0)$.

№43. $\mathbf{u = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}}$

1) Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{cases} \to M_0(2,2)$$

2) Второй дифференциал в точке $M_0(2,2)$:

$$d^2u|_{M_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)\Delta y^2$$
$$= \left(\frac{16}{2^3}\right)\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \left(\frac{16}{2^3}\right)\Delta y^2 = 2\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta y^2$$

3) Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем её угловые миноры:

$$\delta_1 = 2 > 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Раз все угловые миноры положительны, данная квадратичная форма положительно определённая и, следовательно, функция $u = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$ имеет локальный минимум в точке $M_0(2,2)$.

Ответ: функция $u = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$ имеет локальный минимум в точке $M_0(2,2)$.

Посмотрим на примеры функции трёх переменных:

№47. $\mathbf{u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}}$

1) Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \to \ M_1\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right), M_2\left(-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

Вычислим второй дифференциал:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\Delta x\Delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\Delta y\Delta z$$
$$= \frac{y^2}{2x^3}\Delta x^2 + \left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right)\Delta y^2 + \left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right)\Delta z^2 - \frac{y}{x^2}\Delta x\Delta y - \frac{4z}{y^2}\Delta y\Delta z$$

Исследуем точку M_1:

2.1) Второй дифференциал в точке $M_1\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$:

$$d^2u|_{M_0} = 4\Delta x^2 + 3\Delta y^2 + 6\Delta z^2 - 4\Delta x\Delta y - 4\Delta y\Delta z$$

3.1) Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычисляем её угловые миноры:

$$\delta_1 = 2 > 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Раз все угловые миноры положительны, данная квадратичная форма положительно определённая и, следовательно, функция $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ имеет локальный минимум в точке $M_1\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Исследуем точку M_2:

2.2) Второй дифференциал в точке $M_2\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$:

$$d^2u|_{M_0} = -4\Delta x^2 - 3\Delta y^2 - 6\Delta z^2 + 4\Delta x\Delta y + 4\Delta y\Delta z$$

3.2) Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Вычисляем её угловые миноры:

$$\delta_1 = -4 < 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -32 < 0$$

А следовательно, данная квадратичная форма является отрицательно определенной квадратичной формой, и, следовательно, данная функция имеет локальный максимум в точке $M_2\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$.

Ответ: функция $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ имеет локальный минимум в точке $M_1\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ и локальный максимум в точке $M_2\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$.

№49. Исследовать функцию $u = x\cos(y) + z\cos(x)$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$.

Вычислим второй дифференциал:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\Delta x\Delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\Delta y\Delta z$$
$$= -z\cos(x)\,\Delta x^2 - x\cos(y)\Delta y^2 - 2\sin(y)\,\Delta x\Delta y - \sin(x)\Delta x\Delta z$$

Второй дифференциал в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$:

$$d^2u|_{M_0} = -\frac{\pi}{2}\Delta y^2 - \Delta x\Delta z$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\delta_1 = 0$, то данная квадратичная форма не может быть знакоопределенной. Покажем, что данная форма – знакопеременная. Например:

$$Q(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -\frac{\pi}{2}\Delta y^2 - \Delta x\Delta z \to\ Q(0,1,0) = -\frac{\pi}{2} < 0;\ Q(1,0,-1) = 1 > 0$$

Ответ: функция $u = x\cos(y) + z\cos(x)$ не имеет локального экстремума в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$

Номера №42, 44-46, 48 будут разобраны в конце!

3. Неявные функции.

Теоретический материал подробно изложен, например, здесь (Гл. 10 §1 – 4). Настоятельно рекомендуем ознакомиться с ним прежде, чем решать задачи! Неявной функцией $y = f(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ и определенной на множестве X, называются решения уравнения $\forall x \in X$: $F(x, f(x)) = 0$. Иначе говоря, все пары точек (x, y), удовлетворяющие равенству $F(x, y) = 0$. Аналогично же определяются и неявные функции $z = z(x, y)$ как решения уравнения $F(x, y, z) = 0$. Например, $F(x, y) = 8x^2y - x^4 - y^4 = 0$. Забегая вперед, Вы увидите, что решения многих дифференциальных уравнений,

востребованных в физике, представляют собой именно такое неявное представление функции. Нас, например, может интересовать – как искать производные таких функций, как исследовать их на экстремум и т.д. В конспекте лекций Вы увидели, как получается формула производной:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}$$

где $F_x \equiv \frac{\partial F}{\partial x}, F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}$. А вторую производную можно найти как производную от первой производной. Таким образом, мы сможем проверять необходимые и достаточные условия экстремума неявной функции. Давайте попробуем! Наше задание: найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$ определяемой уравнением $F(x,y) = 0$, если

№51. $\mathbf{F(x,y) = 8x^2y - x^4 - y^4 = 0, x > 0, y > 0}$

Ищем производные:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{4xy - x^3}{2x^2 - y^3}$$

$$y'' = f''(x) = [f'(x)]' = -\left(\frac{4xy - x^3}{2x^2 - y^3}\right)'$$

$$= -\left(\frac{(4y - 4xy' - 3x^2)(2x^2 - y^3) - (4x - 3y^2y')(4xy - x^3)}{(2x^2 - y^3)^2}\right)$$

Для того, чтобы найти все точки возможного экстремума, приравниваем $f'(x) = 0$:

$$-\frac{4xy - x^3}{2x^2 - y^3} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

Чтобы найти конкретные точки возможного экстремума x_i, подставим второе выражение в исходное уравнение $F(x,y,) = 0$:

$$8x^2 \cdot \frac{x^2}{4} - x^4 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^4 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$$

Итого мы получили три различных точек возможного экстремума. Однако нас интересует область $x > 0, y > 0$, поэтому нам остаётся проверить только точку $x_1 = 4$. Проверим достаточные условия в этой точке. Для того, чтобы определить знак $f''(x_1)$, нам необходимо вычислить $f(x_1)$. Выше мы уже показывали, что из равенства нулю производной следует, что:

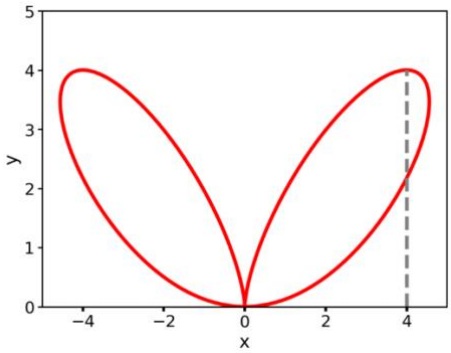
$$y = \frac{x^2}{4} \to y_1 = f(x_1) = \frac{x_1^2}{4} = 4$$

Вычислим вторую производную, чтобы проверить достаточные условия экстремума:

$$f''(x_1) = -\left(\frac{(4y_1 - 4x_1 \cdot 0 - 3x_1^2)(2x_1^2 - y_1^3) - (4x_1 - 3y_1^2 \cdot 0)(4x_1y_1 - x_1^3)}{(2x_1^2 - y_1^3)^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{(16 - 48)(32 - 64) - 16 \cdot (64 - 64)}{(32 - 64)^2}\right) = -1 < 0$$

Таким образом, неявная функция, заданная уравнением $F(x,y)=0$, имеет локальный максимум в точке $x_1=4$. Проверим себя графиком данной функции:



Действительно, всё получилось верно! Номера №50, 52 будут разобраны в конце.
Похожие формулы, как и формула для производной неявной функции $y=f(x)$, заданной уравнением $F(x,y)=0$, имеют место быть и для неявной функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$:

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)};\ z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)}$$

Потренируемся на примере №56:

№56. Найти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением:
$\mathbf{F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0.}$

Воспользуемся формулами:

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)}=-\frac{x}{z}$$
$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)}=-\frac{y}{z}$$

Вторую частную производную найдем как производную от первой частной производной:

$$z_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right)=-\frac{z-xz_x}{z^2}$$

В данном случае выражения довольно простые, поэтому можем осуществить явно подстановку z_x в это выражение:

$$z_{xx}=-\frac{z-\frac{x^2}{z}}{z^2}$$

Номера №53-55, 57-58 будут разобраны в конце.
Давайте разберёмся, как получать выражения для дифференциалов функций $u(x,y),v(x,y)$, заданных в виде систем уравнений:

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

На примере №59, где нам предстоит получить первый и второй дифференциалы:

№59. $\begin{cases}\mathbf{xu+yv-1=0}\\\mathbf{x+y+u+v=0}\end{cases}$

Возьмём дифференциалы от обоих уравнений:

$$\begin{cases} d(xu+yv-1)=0 \\ d(x+y+u+v)=0 \end{cases} \to \begin{cases} xdu+udx+ydv+vdy=0 \\ dx+dy+du+dv=0 \end{cases}$$

Теперь мы можем рассматривать эту систему как систему относительно искомых du, dv (например, при помощи формул Крамера). Решая, можем получить:

$$\begin{cases} du=-\dfrac{u-v}{x-v}dx-\dfrac{y-v}{x-v}dy \\ dv=\dfrac{u-x}{x-v}dx+\dfrac{y-x}{x-v}dy. \end{cases}$$

Второй дифференциал сможем определить, как дифференциал от первого дифференциала:

$$d^2u=d(du)=d(du)=d\left(-\frac{u-v}{x-v}dx-\frac{y-v}{x-v}dy\right)=d\left(\frac{v-u}{x-v}dx+\frac{v-y}{x-v}dy\right)$$

$$d^2u=\frac{(dv-du)(x-v)-(v-u)(dx-dv)}{(x-v)^2}dx+\frac{(dv-dy)(x-v)-(v-y)(dx-dv)}{(x-v)^2}dy$$

Используя выражения для du, dv, можно было бы получить явное выражение через x, y, u, v. Аналогично получается выражение и для второго дифференциала d^2v:

$$d^2v=\frac{(du-dx)(x-v)-(u-x)(dx-dv)}{(x-v)^2}dx+\frac{(dy-dx)(x-v)-(y-x)(dx-dv)}{(x-v)^2}dy$$

Напоследок, займёмся преобразованием дифференциальных уравнений, введя новые переменные, как указано в задании, что будет очень востребовано в курсе дифференциальных уравнений:

№60. $\mathbf{y^2+(x^2-xy)\frac{dy}{dx}=0,\ \ y=tx,\ \ y=y(t)}$

Введём $x(t)=\frac{y(t)}{t}$. Вычислим:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{t}\right)=\frac{\dot{y}t-y}{t^2}$$

Тогда:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=t^2\left(\frac{\dot{y}}{\dot{y}t-y}\right)$$

Выполним подстановку этих выражений в исходное уравнение:

$$y^2+\left(\frac{y^2}{t^2}-\frac{y^2}{t}\right)\frac{\dot{y}t^2}{\dot{y}t-y}=0$$

Преобразуем:

$$y^2\left(1+\frac{(1-t)\dot{y}}{\dot{y}t-y}\right)=0$$

$$y^2(\dot{y}t-y+\dot{y}-t\dot{y})=0$$

$$\boxed{y^2(\dot{y}-y)=0}$$

То есть, исходно уравнение значительно упростилось.

№61. $\mathbf{x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0, x=e^t, y=y(t)}$

Рассмотрим связь $y'=\frac{dy}{dx}$ и $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$:

$$\dot{x}=e^t\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dot{y}e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\dot{y}e^{-t}) = \frac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t}) \cdot \frac{dt}{dx} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-t} \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

Подставим обратно в уравнение:

$$e^{2t}(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t} + 3e^{t}\dot{y}e^{-t} + y = 0$$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0}$$

№62. Приняв $\mathbf{v}$ за новую функцию $\mathbf{v(x, y)}$, преобразуйте уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -u, \qquad u = ve^{-x-y}$$

Займёмся преобразованиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ve^{-x-y}) = e^{-x-y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - v\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ve^{-x-y}) = e^{-x-y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - v\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x-y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - v\right)\right) = e^{-x-y}\left(-1 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - v\right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)$$

$$= e^{-x-y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + v\right)$$

Выполним подстановку в исходное уравнение:

$$e^{-x-y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + v\right) + e^{-x-y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - v\right) + e^{-x-y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - v\right) = -ve^{-x-y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + v + \frac{\partial v}{\partial x} - v + \frac{\partial v}{\partial y} - v = -v$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = 0}$$

В таких координатах нам удалось избавиться в уравнении от самой неизвестной функции, а также от производных первого порядка.

Приняв $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ за новые независимые переменные, а $\mathbf{w}$ за новую функцию от $\mathbf{u, v}$, преобразуйте уравнение:

№63. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4x, \quad u = x, v = x - y, w = x - y + z$

Выполним преобразования:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(w - x + y) = \frac{\partial w}{\partial x} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(w - x + y) = \frac{\partial w}{\partial y} + 1 = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + 1 = -\frac{\partial w}{\partial v} + 1$$

Выполняем подстановку в уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1 - \frac{\partial w}{\partial v} + 1 = 4u$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial u} = 4u}$$

№64. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y},\quad u=\frac{y}{x}, v=y, w=zy-x$

Выполним преобразования:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w+x}{y}\right)=\frac{1}{y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+1\right)=\frac{1}{y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+1\right)=\frac{1}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial u}+1\right)$$

$$=\frac{1}{v}\left(-\frac{u^2}{v}\frac{\partial w}{\partial u}+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\left(-\frac{u^2}{v}\frac{\partial w}{\partial u}+1\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{v}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{v^2}\right)\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\right)$$

Вычислим каждое слагаемое отдельно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{v^2}\right)=\frac{v^2\cdot 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-u^2\cdot 2v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{v^4}=\frac{v^2\cdot 2u\cdot\left(-\frac{u^2}{v}\right)+0}{v^4}=-2\frac{u^3}{v^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u^2}{v}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

Итого, формула для второй производной:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{u^3}{v^3}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{u^4}{v^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

Выполняем подстановку в уравнение:

$$-\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{2}\frac{v}{u}\left(2\frac{u^3}{v^3}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{u^4}{v^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\right)=\frac{1}{v}$$

Сокращая подобные слагаемые, получим:

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{u^3}{v^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0}$$

Приняв u, v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение:

№65. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ u=x, v=2\sqrt{y}, (y>0)$

Как и всегда – выполняем преобразования:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{v}\right)=\frac{2}{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{v}\right)$$

$$=\frac{2}{v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=\frac{2}{v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{2}{v}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{v}\right)^3\frac{\partial z}{\partial v}$$

Так как $u=x\rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Выполним подстановку в уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{2}\right)^2\left(\left(\frac{2}{v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{v}\right)^3\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{v}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{v}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{v}=0$$

Сокращая подобные слагаемые, нам удалось упростить уравнение:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0}$$

И на этом мы заканчиваем второй видеоразбор! Попробуйте в качестве упражнения самостоятельно решить оставшиеся номера: №36-38, №40, №42, №44-46, №48, №50, №52, №53-55, №57-58. А краткие решения будут представлены ниже для самопроверки. Успехов!

4. Практика

№36. $\mathbf{u=x^y;\quad M_0(e,e),\quad n=2}$

Вычислим дифференциалы функции:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$
$$=(y-1)yx^{y-2}dx^2+2x^{y-1}(y\ln x+1)dxdy+x^y\ln^2 x\,dy^2$$

где $dx=x-x_0=x-e$; $dy=y-y_0=y-e$. Вычисляем дифференциалы в точке $M_0(e,e)$:

$$du|_{M_0}=e^e(x-e)+e^e(y-e)$$
$$d^2u|_{M_0}=(e-1)e^{e-1}(x-e)^2+2e^{e-1}(e+1)(x-e)(y-e)+e^e(y-e)^2$$

Записываем остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1}=o(\rho^n)=o\left(\sqrt{(x-e)^2+(y-e)^2}^{\,2}\right)=o((x-e)^2+(y-e)^2)$$

И записываем ответ:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=du|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2u|_{M_0}+R_{n+1}$$

Ответ: $u=f(x,y)=e^e+e^e(x-e)+e^e(y-e)+\frac{1}{2}\left((e-1)e^{e-1}(x-e)^2+2e^{e-1}(e+1)(x-e)(y-e)+e^e(y-e)^2\right)+o((x-e)^2+(y-e)^2)$

№37. $\mathbf{u=e^x\sin y;\quad M_0(0,0),\quad n=3}$

Вычислим дифференциалы функции:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2=e^x\sin y\,dx^2+2e^x\cos y\,dxdy-e^x\sin y\,dy^2$$

$$d^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3$$
$$=e^x\sin y\,dx^3+3e^x\cos y\,dx^2dy-3e^x\sin y\,dxdy^2-e^x\cos y\,dy^3$$

где $dx = x - x_0 = x - 0 = x$; $dy = y - y_0 = y - 0 = y$. Вычисляем дифференциалы в точке $M_0(0,0)$:

$$du|_{M_0} = y$$
$$d^2u|_{M_0} = 2xy$$
$$d^3u|_{M_0} = 3x^2y - y^3$$

Записываем остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o(\rho^n) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}^3\right) = o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

И записываем ответ:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{M_0} + \frac{1}{3!}d^3u|_{M_0} + R_{n+1}$$

Ответ: $u = f(x,y) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

№38. $u = \ln(1+x+y)$; $M_0(0,0)$, $n = 3$

Вычислим дифференциалы функции:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{1}{1+x+y}dx + \frac{1}{1+x+y}dy$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$
$$= -\frac{1}{(1+x+y)^2}dx^2 - \frac{2}{(1+x+y)^2}dxdy - \frac{1}{(1+x+y)^2}dy^2$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3$$
$$= \frac{2}{(1+x+y)^3}dx^3 + \frac{6}{(1+x+y)^3}dx^2dy + \frac{6}{(1+x+y)^3}dxdy^2$$
$$+ \frac{2}{(1+x+y)^3}dy^3$$

где $dx = x - x_0 = x - 0 = x$; $dy = y - y_0 = y - 0 = y$. Вычисляем дифференциалы в точке $M_0(0,0)$:

$$du|_{M_0} = x + y$$
$$d^2u|_{M_0} = -x^2 - 2xy - y^2$$
$$d^3u|_{M_0} = 2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 2y^3$$

Записываем остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o(\rho^n) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}^3\right) = o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

И записываем ответ:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{M_0} + \frac{1}{3!}d^3u|_{M_0} + R_{n+1}$$

Ответ: $u = f(x,y) = x + y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

№40. $u = x^3 + x + y + xyz$; $M_0(0,0,0)$, $n = 3$

Вычислим дифференциалы функции:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = (3x^2 + 1 + yz)dx + (1 + xz)dy + xydz$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}dydz$$
$$= 6xdx^2 + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$$
$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3 u = 6dx^3 + 6dxdydz$$

где $dx = x - x_0 = x - 0 = x$; $dy = y - y_0 = y - 0 = y$; $dz = z - z_0 = z - 0 = z$. Вычисляем дифференциалы в точке $M_0(0,0,0)$:

$$du|_{M_0} = x + y$$
$$d^2u|_{M_0} = 0$$
$$d^3u|_{M_0} = 6x^3 + 6xyz$$

Записываем остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o(\rho^n) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3\right) = o\left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

И записываем ответ:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0,z_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{M_0} + \frac{1}{3!}d^3u|_{M_0} + R_{n+1}$$

Ответ: $u = f(x,y) = x^3 + x + y + xyz + o\left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

№42. $u = x^3 + y^3 - 3xy$

Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \to M_1(0,0), M_2(1,1)$$

Выпишем общую формулу для второго дифференциала:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 = 6x\Delta x^2 - 6\Delta x\Delta y + 6y\Delta y^2$$

Второй дифференциал в точке $M_1(0,0)$:

$$d^2u|_{M_1} = -6\Delta x\Delta y$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_1) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_1) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\delta_1 = 0$, то данная квадратичная форма не может быть знакоопределенной. Покажем, что данная форма – знакопеременная. Например:

$$Q(\Delta x, \Delta y) = -6\Delta x\Delta y \to Q(1,1) = -6 < 0;\ Q(-1,1) = 6 > 0$$

То есть в точке M_1 экстремума нет. Проверяем точку $M_2(1,1)$:

$$d^2u|_{M_2} = 6\Delta x^2 - 6\Delta x\Delta y + 6\Delta y^2$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_1) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_1) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

И вычисляем угловые миноры:

$$\delta_1 = 6 > 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

Раз все угловые миноры положительны, данная квадратичная форма положительно определённая и, следовательно, функция $u = x^3 + y^3 - 3xy$ имеет локальный минимум в точке $M_2(1,1)$.

Ответ: функция $u = x^3 + y^3 - 3xy$ имеет локальный минимум в точке $M_2(1,1)$.

№44. $\mathbf{u = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}}$

Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{x^2-y}(2x^2 - x(y+5) + 1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0 \end{cases} \to M_0(1,-2)$$

Выпишем общую формулу для второго дифференциала:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2$$
$$= -2e^{x^2-y}(4x^3 - 2x^2(y+5) + 6x - y - 5)\Delta x^2$$
$$+ 4e^{x^2-y}(2x^2 - x(y+4) + 1)\Delta x\Delta y + e^{x^2-y}(-2x + y + 3)\Delta y^2$$

Второй дифференциал в точке $M_0(1,-2)$:

$$d^2u|_{M_0} = -2e^3\Delta x^2 + 4e^3\Delta x\Delta y - e^3\Delta y^2$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix} = e^3\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

И вычисляем угловые миноры:

$$\delta_1 = -2e^3 < 0;\ \delta_2 = e^3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2e^3 < 0$$

Однако все угловые миноры отрицательные - данная квадратичная форма не может быть знакоопределенной. Покажем, что данная форма – знакопеременная. Например:

$$Q(\Delta x, \Delta y) = e^3(-2\Delta x^2 + 4\Delta x\Delta y - \Delta y^2) \to Q(1,1) = e^3 > 0;\ Q(0,1) = -e^3 < 0$$

То есть в точке M_0 экстремума нет.

Ответ: функция $u = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$ не имеет локальных экстремумов.

№45. $\mathbf{u = xy + xz + yz}$

Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y + z = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + z = 0 \rightarrow \ M_0(0,0,0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = x + y = 0 \end{cases}$$

Выпишем общую формулу для второго дифференциала:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\Delta x\Delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\Delta y\Delta z$$
$$= 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta z + 2\Delta y\Delta z$$

Второй дифференциал в точке $M_0(0,0,0)$:

$$d^2u|_{M_0} = 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta z + 2\Delta y\Delta z$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\delta_1 = 0$, то мы по критерию Сильвестра не можем утверждать, что эта квадратичная форма знакоопределенная. Покажем, что данная форма – знакопеременная. Например:

$$Q(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta z + 2\Delta y\Delta z \rightarrow Q(1,1,0) = 2 > 0;\ Q(-1,1,0) = -2 < 0$$

То есть в точке M_0 экстремума нет.

Ответ: функция $u = xy + yz + xz$ не имеет локальных экстремумов.

№46. $u = xyz(4 - x - y - z)$, в области $x > 0\ \cap y > 0\ \cap z > 0$

Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -yz(2x + y + z - 4) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -xz(x + 2y + z - 4) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -xy(x + y + 2z - 4) = 0 \end{cases}$$

Так как мы рассмариваем область $x > 0\ \cap y > 0\ \cap z > 0$, то систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \rightarrow M_0(1,1,1) \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Выпишем общую формулу для второго дифференциала:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\Delta x\Delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\Delta y\Delta z =$$
$$= -2yz\Delta x^2$$
$$= -2yz\Delta x^2 - 2xz\Delta y^2 - 2xy\Delta z^2 - 2z(2x+2y+z-4)\Delta x\Delta y - 2y(2x+y+2z-4)\Delta x\Delta z - 2x(x+2y+2z-4)\Delta y\Delta z$$

Второй дифференциал в точке $M_0(1,1,1)$:

$$d^2u|_{M_0} = -2\Delta x^2 - 2\Delta y^2 - 2\Delta z^2 - 2\Delta x\Delta y - 2\Delta x\Delta z - 2\Delta y\Delta z$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем угловые миноры:

$$\delta_1 = -2 < 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

То есть данная квадратичная форма является отрицательно знакоопределенной, а значит, в точке M_0 функция $u(x,y,z)$ имеет локальный максимум.

Ответ: функция $u = xyz(4-x-y-z)$ имеет локальный максимум в точке $M_0(1,1,1)$.

№48. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2z = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x - 2z = 0 \to M_0(0,0,0) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Выпишем общую формулу для второго дифференциала:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\Delta y + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\Delta x\Delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\Delta y\Delta z =$$
$$= -2yz\Delta x^2 = 2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 + 2\Delta z^2 - 4\Delta x\Delta y - 4\Delta x\Delta z - 4\Delta y\Delta z$$

Второй дифференциал в точке $M_0(0,0,0)$:

$$d^2u|_{M_0} = 2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 + 2\Delta z^2 - 4\Delta x\Delta y - 4\Delta x\Delta z - 4\Delta y\Delta z$$

Составляем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(M_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем угловые миноры:

$$\delta_1 = 2 > 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Раз $\delta_2 = 0$, то мы по критерию Сильвестра определить знакоопределенность квадратичной формы не можем. Как и всегда, покажем, что она знакопеременная:

$$Q(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 + 2\Delta z^2 - 4\Delta x\Delta y - 4\Delta x\Delta z - 4\Delta y\Delta z$$

$$Q(1,0,0) = 2 > 0;\ Q(1,1,1) = -6 < 0$$

А значит в точке $M_0(0,0,0)$ нет экстремума.

Ответ: функция $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ не имеет локальных экстремумов.

№50. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Ищем производные:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = f''(x) = [f'(x)]' = -\left(\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = -\left(\frac{(2x - y')(y^2 - x) - (x^2 - y)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}\right)$$

Для того, чтобы найти все точки возможного экстремума, приравниваем $f'(x) = 0$:

$$-\frac{x^2 - y}{y^2 - x} = 0 \to\ y = x^2, \qquad y\ \neq \sqrt{x}$$

Чтобы найти конкретные точки возможного экстремума x_i, подставим это выражение в исходное уравнение $F(x, y) = 0$:

$$x^3 + x^6 - 3x^3 = 0 \to x_0 = 0;\ x_1 = \sqrt[3]{2}$$

Точка x_0 нас не интересует, так как в данной точке производная не определена. Поэтому нам остаётся проверить только точку $x_1 = 4$. Проверим достаточные условия в этой точке. Для того, чтобы определить знак $f''(x_1)$, нам необходимо вычислить $f(x_1)$. Выше мы уже показывали, что из равенства нулю производной следует, что:

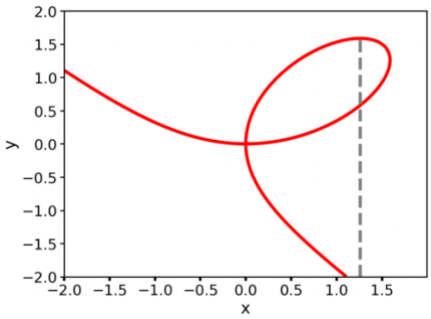
$$y = \frac{x^2}{4} \to y_1 = f(x_1) = x_1^2 = \sqrt[3]{4}$$

Вычислим вторую производную, чтобы проверить достаточные условия экстремума:

$$f''(x_1) = -\left(\frac{\left(2 \cdot \sqrt[3]{2} - 0\right)\left(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}\right) - \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}\right)\left(2\sqrt[3]{4} \cdot 0 - 1\right)}{\left(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}\right)^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}\right))}{\left(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}\right)^2}\right) < 0$$

Таким образом, неявная функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, имеет локальный максимум в точке $x_1 = \sqrt[3]{2}$. Проверим себя графиком данной функции:



Где серой линией указано значение $x_1 = \sqrt[3]{2}$.

№52. $F(x,y) = y^2 - ay - \sin x = 0, 0 \le x \le 2\pi$

Ищем производные:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{\cos x}{2y - a}$$

$$y'' = f''(x) = [f'(x)]' = \left(\frac{\cos x}{2y - a}\right)' = \frac{-\sin x\,(2y - a) - \cos x\,(2y' - a)}{(2y - a)^2}$$

Для того, чтобы найти все точки возможного экстремума, приравниваем $f'(x) = 0$:

$$\frac{\cos x}{2y - a} = 0 \to x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Остальные точки нас не интересуют, так как мы рассматриваем интервал $0 \le x \le 2\pi$.

Проверим достаточные условия в точке $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Для того, чтобы определить знак $f''(x_1)$, нам необходимо вычислить $f(x_1)$:

$$y^2 - ay - \sin x_1 = 0 \to y^2 - ay - 1 = 0 \to y_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Вычислим вторую производную, чтобы проверить достаточные условия экстремума в обеих точках:

$$f''(x_1, y_1) = -\frac{2\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right) - a}{\left(2\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right) - a\right)^2} = -\frac{\sqrt{a^2+4}}{(a^2+4)} < 0$$

То есть для любых значений параметра a мы имеем максимум в точке $x_1 = \frac{\pi}{2}, y_1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$. В точке $y_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{a^2+4}$:

$$f''(x_1, y_2) = -\frac{2\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right) - a}{\left(2\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right) - a\right)^2} = +\frac{\sqrt{a^2+4}}{(a^2+4)} > 0$$

Мы имеем локальный минимум.

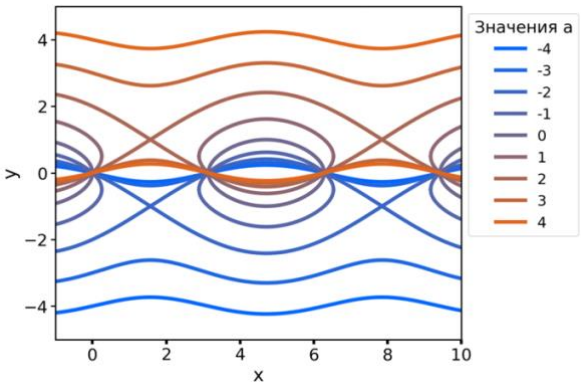
Проверим достаточные условия в точке $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Для того, чтобы определить знак $f''(x_2)$, нам необходимо вычислить $f(x_2)$:

$$y^2 - ay - \sin x_2 = 0 \to y^2 - ay + 1 = 0 \to y_{3,4} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}$$

Сразу обратим внимание: теперь мы получили дополнительное условие $|a| \geq 2$, чтобы существовал корень. Вычислим вторую производную, чтобы проверить достаточные условия экстремума в обеих точках:

$$f''(x_2, y_3) = +\frac{2\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right) - a}{\left(2\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right) - a\right)^2} = +\frac{\sqrt{a^2-4}}{(a^2-4)} > 0$$

То есть для $|a| > 2$ мы имеем минимум в точке $x_2 = \frac{3\pi}{2}, y_3 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}$. Аналогично в точке x_2, y_4 функция имеет локальный максимум. Проверим себя картинкой! (сложная картинка, но затягивающая!)



Найти первые частные производные и первый дифференциал функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением:

№53. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$

Первым делом перепишем уравнение в виде $F(x, y, z) = 0$:

$$xyz - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

Воспользуемся формулами:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{yz - 2x}{xy - 2z}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{xz - 2y}{xy - 2z}$$

А теперь осталось записать дифференциал:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1}{2z - xy}\big((yz - 2x)dx + (xz - 2y)dy\big)}$$

№54. $x^2 + zx + z^2 + y = 0$

В данном случае $F(x, y, z) = x^2 + zx + z^2 + y = 0$. Воспользуемся формулами:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{2x + z}{x + 2z}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{1}{x + 2z}$$

Дифференциал:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1}{x+2z}\left((2x+z)dx + dy\right)}$$

№55. $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$

Первым делом перепишем уравнение в виде $F(x,y,z) = 0$:

$$z\cos x + y\cos z + x\cos y - 3 = 0$$

Воспользуемся формулами:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{-z\sin y + \cos y}{\cos x - y\sin z}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{\cos z - x\sin y}{\cos x - y\sin z}$$

А теперь осталось записать дифференциал:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1}{\cos x - y\sin z}\left((-z\sin y + \cos y)dx + (\cos z - x\sin y)dy\right)}$$

№57. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением:

$$\mathbf{F(x,y,z) = \arctan\left(\frac{z}{x}\right) - (z + x + y) = 0.}$$

Воспользуемся формулами:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = \frac{x^2+z^2+z}{x^2+z^2}\cdot\frac{x^2+z^2}{x-x^2-z^2} = \frac{x^2+z^2+z}{x-x^2-z^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = \frac{x^2+z^2}{x-x^2-z^2}$$

Вторую частную производную найдем как производную от первой частной производной:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+z^2+z}{x-x^2-z^2}\right)$$

$$= \frac{(2x + 2zz_x + z_x)(x - x^2 - z^2) - (x^2+z^2+z)(1 - 2x - 2zz_x)}{(x-x^2-z^2)^2}$$

Конечно, в данное выражение можно выполнить подстановку явного выражения для z_x, однако выкладки будут затруднительными – оставим это выражение в том виде, в котором оно есть.

№58. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением:

$$\mathbf{F(x,y,z) = \ln(xy + yz) - (z^2 + x^2 + y^2 - 2) = 0.}$$

Воспользуемся формулами:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{\frac{1}{x+z} - 2x}{\frac{1}{x+z} - 2z} = -\frac{1 - 2x^2 - 2xz}{1 - 2z^2 - 2xz}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{z=z(x,y)} = -\frac{\frac{1}{y} - 2y}{\frac{1}{x+z} - 2z}$$

Вторую частную производную найдем как производную от первой частной производной:

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-2x^2-2xz}{1-2z^2-2xz}\right)$$
$$= -\frac{-2xz_y(1-2z^2-2xz)-(1-2x^2-2xz)(-4zz_y-2xz_y)}{(1-2z^2-2xz)^2}$$