ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ENTANGLED

математический анализ
1 семестр

МУКСЕЕВ
ГЕОРГИЙ НИКОЛАЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МУКСЕЕВА ГЕОРГИЯ НИКОЛАЕВИЧА

Содержание

1 Числовые множества и последовательности. Часть 1 — 5
1.1 Ограниченные множества и последовательности . . . 5
1.2 Сходимость последовательностей . . . 5
1.3 Монотонные последовательности . . . 6
1.4 Некоторые полезные теоремы . . . 6
1.5 Предельная точка последовательности . . . 7
1.6 Полезные равенства и неравенства . . . 7
1.7 Решение задач . . . 7

2 Числовые множества и последовательности. Часть 2 — 15

3 Предел и непрерывность функции — 22
3.1 Определения и отрицания к ним . . . 22
3.2 Некоторые полезные теоремы . . . 24
3.3 Решение задач . . . 24

4 «о»-малое — 29
4.1 Определения . . . 29
4.2 Асимптотическое разложение некоторых функций при $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ . . . 29
4.3 Решение задач . . . 29

5 Типы разрывов функции. Часть 1 — 37

6 Типы разрывов функции. Часть 2 — 41

7 Пределы функций — 45

8 Производная функций — 47
8.1 Определение производной . . . 47
8.2 Понятие дифференцируемости функции . . . 47
8.3 Правила дифференцируемости суммы, разности, произведения и частного . . . 48
8.4 Вычисление производных степенной функции, тригонометрических функций и логарифмической функции . . . 48
8.5 Теорема о производной обратной функции . . . 49
8.6 Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций . . . 49
8.7 Правила дифференцирования сложной функции . . . 49
8.8 Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем . . . 49

8.9 Инвариантность формы первого дифференциала 50

9 Производная n-го порядка 57
9.1 Производные и дифференциалы высших порядков 57
9.2 Решение задач 58

10 Исследование интегралов 65
10.1 Основные определения 65
10.2 Основные теоремы и формулы 65
10.3 Решение задач 67

11 Вычисление интегралов. Часть 1 71
11.1 Основные теоремы и формулы 71
11.2 Решение задач 72

12 Вычисление интегралов. Часть 2 76

13 Непрерывные и дифференцируемы функции 83
13.1 Полезные формулы для вычисления производных высших порядков . . 83
13.2 Решение задач 84

14 Исследование графиков функций 89
14.1 Полезные формулы для вычисления производных высших порядков . . 89
14.2 Решение задач 90

1 Числовые множества и последовательности. Часть 1

1.1 Ограниченные множества и последовательности

Множество вещественных чисел $\{x\}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует такое вещественное число M (число m), что каждый элемент множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $x \leq M$ $(m \leq x)$.

Множество вещественных чисел называется **ограниченным**, если оно ограничено снизу и сверху.

Множество вещественных чисел называется **ограниченным**, если существуют такие вещественые числа m и M, что каждый элемент множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $m \leq x \leq M$.

Множество вещественных чисел называется **ограниченным**, если существует такое вещественное число $A > 0$, что каждый элемент множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $|x| \leq A$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существуют такие вещественные числа m и M, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $m \leq x_n \leq M$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое вещественное число $A > 0$, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $|x_n| \leq A$.

№ 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ **не является ограниченной**, если для любого вещественного числа $A > 0$ найдётся такой элемент x_n этой последовательности, что будет выполнено неравенство $|x_n| > A$.

1.2 Сходимость последовательностей

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для любого номера $n \geq N$ все элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Последовательность x_n называется **сходящейся**, если существует вещественное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. При этом число a называют **пределом** данной последовательности.

№ 4.4. Число b **не является пределом** последовательности $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - b\}$ не является бесконечно малой.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого $A > 0$ можно указать номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для любого номера $n \geq N$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$.

№ 4.5. Последовательность $\{x_n\}$ **не является бесконечно малой**, если найдётся такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $N \in \mathbb{N}$ найдётся номер

$n \geq N$, что будет выполнено неравенство $|x_n| \geq \varepsilon$.

№ 4.6. Последовательность $\{x_n\}$ **не является бесконечно большой**, если найдётся такое $A > 0$, что для любого числа $N \in \mathbb{N}$ найдётся номер $n \geq N$, что будет выполнено неравенство $|x_n| \neq A$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для любого номера $n \geq N$ и для любого числа $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

№ 4.7. Последовательность $\{x_n\}$ **не является фундаментальной**, если найдётся такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $N \in \mathbb{N}$ найдётся номер $n \geq N$ и такое число $p \in \mathbb{N}$, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$.

1.3 Монотонные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_{n+1} > x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_{n+1} < x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_{n+1} \geq x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **невозрастающая**, если для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_{n+1} \leq x_n$.

Неубывающая и невозрастающая последовательности объединяются в класс **монотонных** последовательностей, убывающая и возрастающая — в класс **строго монотонных**.

1.4 Некоторые полезные теоремы

Теорема 1.1. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонна, то из ограниченности этой последовательности следует её сходимость и, наоборот, из сходимости последовательности $\{x_n\}$ следует ограниченность этой последовательности.

Теорема 1.2. Сумма, разность, произведение и частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме, разности, произведению и частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и$\{y_n\}$ (в случае частного предел последовательности $\{y_n\}$ не должен быть равен нулю).

Теорема 1.3. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 1.4. (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Теорема 1.5. (О двух полицейских). Пусть при $n \to \infty$ последовательности x_n и z_n стремятся к общему пределу, равному a, а начиная с некоторого номера N для последовательности y_n начинает выполняться неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$. Тогда при $n \to \infty$ последовательность y_n также будет сходиться к a.

1.5 Предельная точка последовательности

Число b называется **предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к b.

Число b называется **предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε-окрестности этой точки имеется бесконечно много элементов этой последовательности.

№ 4.30. Число b **не является предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к b.

№ 4.31. Число b **не является предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$, если существует ε-окрестности точки b такая, что в ней либо имеется конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, либо в ней вовсе нет элементов этой последовательности.

1.6 Полезные равенства и неравенства

1. $|ab| = |a||b|$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$
3. $|a - b| \geq ||a| - |b||$
4. $|a - b| \leq |a| + |b|$

1.7 Решение задач

№ 4.1. Приведите примеры ограниченного и неограниченного множеств вещественных чисел.

Пример ограниченного множества:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{2^k},\, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Действительно, существует такое вещественное число $A > 0$, что все элемент x этого множества удовлетворяют неравенству $|x| \leq A$. Например, в качестве A можно взять число 1.

Теперь запишем пример неограниченного множества:

$$X = \{1, 2, \dots\} \equiv \mathbb{N}$$

Оно не является ограниченным, так как какое бы вещественное число $A > 0$ мы ни взяли, мы всегда сможем найти такой элемент x множества X такой, что будет выполнено неравенство $|x| > A$. Например, в качестве числа x можно взять число $[A] + 1$, где $[A]$ — целая часть от числа A. В этом случае $x = [A] + 1$ будет принадлежать множеству X и будет выполнено неравенство $|x| > A$.

№ 4.2. Докажите неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ при $x \neq -1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ неравенство выполнено:

$$(1 + x)^1 = 1 + 1x$$

Теперь допустим, что для n-го шага неравенство выполнено. Докажем, что оно будет выполнено и для $n + 1$-го шага. Запишем неравенство для n-го шага:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Домножим это неравенство на $(1 + x)$ и преобразуем правую часть:

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

Таким образом, для $n + 1$-го шага неравенство также выполнено:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

Неравенство Бернулли доказано. Причём равенство достигается в случаях, когда либо $n = 1$, либо $x = 0$. Докажем это.

1 случай. Если $x = 0$ или $n = 1$, то достигается равенство. Проверяется подстановкой.

2 случай. $n > 1$ и $x > 0$. Разложим левую часть неравенства Бернулли:

$$1 + nx + C_n^2 x^2 + \dots + x^n \geq 1 + nx$$

$$C_n^2 x^2 + \dots + x^n \geq 0$$

Очевидно, что в случае, когда $x > 0$, равенство достигнуто не будет. Тогда можем поставить строгое неравенство:

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

3 случай. Осталось рассмотреть случай, когда $n > 1$, а $x \in [-1, 0)$. Введём замену переменной $t = 1 + x$. Тогда $t \in [0, 1)$. Докажем, что равенство Бернулли в этом случае не достигается.

$$t^n = 1 + n(t-1)$$

$$t^n - n(t-1) - 1 = 0$$

Так как $x = 0$ $(t = 1)$ — корень уравнения (смотри 1 случай), то $(t-1)$ можно вынести за скобку. После преобразований получится:

$$(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + (1-n)) = 0$$

$t = 1$ в случе 3 мы не рассматриваем, следовательно, на $t - 1$ можно сократить:

$$n - 1 = t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t$$

Так как $t \in [0, 1)$, то каждое слагаемое в левой части меньше 1, следовательно:

$$n - 1 = t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-1} = n - 1$$

Таким образом, получили, что $n - 1 > n - 1$, что неверно. Поэтому предположение о том, что в случае 3 достигается равенство, неверно. Поэтому мы доказали, что равенство может быть достигнуто только в двух случаях: либо когда $n = 1$, либо когда $x = 0$. Других вариантов нет.

№ 4.8. Докажите, что последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n$ — возрастающая.

Докажем, что $x_{n+1} > x_n$, т.е. что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) >$$

(применяем строгое неравенство Бернулли, т.к. $n > 1$ и $x = -\frac{1}{(n+1)^2} \neq 0$)

$$> \left(1 - (n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1$$

Таким образом, мы доказали, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая.

№ 4.9. Докажите, что последовательность $x_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ — убывающая. Докажем, что $x_{n-1} > x_n$, т.е. что $\frac{x_{n-1}}{x_n} > 1$:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} >$$

(применяем строгое неравенство Бернулли, т.к. $n > 1$ и $x = \frac{1}{n^2-1} \neq 0$)

$$> \left(1 + (n+1)\frac{1}{n^2-1}\right)\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n} = 1$$

Таким образом, мы доказали, что $\frac{x_{n-1}}{x_n} > 1$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ — убывающая.

№ 4.10. Докажите, что последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n$ сходится.

Чтобы доказать, что последовательность сходится, достаточно доказать, что она возрастает и что она ограничена сверху (см. теорему 1.1). Возрастание последовательности $\{x_n\}$ было доказано в №4.8. Осталось доказать ограниченность сверху. Введём следующую последовательность $\{y_n\}$:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \equiv y_n$$

Последовательность $\{y_n\}$ убывает (см. №4.9.), поэтому $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n \leq y_1 = 4$. Т.е. последовательность $\{y_n\}$ ограничена сверху, а значит, и последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, а значит, в виду монотонности, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

№ 4.11. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, $\alpha_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $\{1/\alpha_n\}$ — бесконечно большая.

Зададим произвольное вещественное число $A > 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{A} > 0$ существует номер N такой, что $\forall n \geq N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < 1/A$ или $|1/\alpha_n| > A$. Т.е. для последовательности $\{1/\alpha_n\}$ выполнено определение бесконечно большой.

№ 4.12. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Докажите, что последовательность $\{1/x_n\}$ определена, начиная с некоторого номера n, и является бесконечно малой.

Зададим произвольное вещественное число $\varepsilon > 0$. Тогда для $A = 1/\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > A = 1/\varepsilon$, т.е. $|1/x_n| < \varepsilon$, а значит, эта последовательность является бесконечно малой.

№ 4.14. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$? Ответ обоснуйте.

Допусти, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится к c. Рассмотрим последовательность $\{(x_n+y_n)-x_n\}$. Так как последовательности $\{x_n+y_n\}$ и $\{x_n\}$ сходятся, то и их разность сходится к разности пределов этих последовательностей, т.е. к $c-a$.

С другой стороны, последовательность $\{(x_n + y_n) - x_n\} = \{y_n\}$, а последовательность $\{y_n\}$ расходится по условию и, стало быть, не может сходится к $c - a$.

Поэтому сумма сходящейся и расходящейся последовательностей всегда есть расходящаяся последовательность.

№ 4.16. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная последовательность будет сходиться и когда она будет расходиться.

Пусть:
$\{x_n\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ — сходится к 0
$\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n \cdot y_n\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ — **сходится**

Теперь пусть:
$\{x_n\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \dots\}$ — сходится к 0
$\{y_n\} = \{1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n \cdot y_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ — **расходится**

№ 4.18. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n/y_n\}$? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная последовательность будет сходиться и когда она будет расходиться.

Пусть:
$\{x_n\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ — сходится к 0
$\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n/y_n\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ — **сходится**

Теперь пусть:

$\{x_n\} = \{0,\ 1,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 1/3,\ \dots\}$ — сходится к 0
$\{y_n\} = \{2,\ 1,\ 2,\ 1/2,\ 2,\ 1/3,\ \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n/y_n\} = \{0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots\}$ — **расходится**

№ 4.15. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная последовательность будет сходиться и когда она будет расходиться.
Пусть:
$\{x_n\} = \{0,\ +1,\ 0,\ +1,\ \dots\}$ — расходится
$\{y_n\} = \{0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n + y_n\} = \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots\}$ — **сходится**

Теперь пусть:
$\{x_n\} = \{0,\ +1,\ 0,\ +1,\ \dots\}$ — расходится
$\{y_n\} = \{0,\ +1,\ 0,\ +1,\ \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n + y_n\} = \{0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \dots\}$ — **расходится**

№ 4.17. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная последовательность будет сходиться и когда она будет расходиться.
Пусть:
$\{x_n\} = \{0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ \dots\}$ — расходится
$\{y_n\} = \{1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n \cdot y_n\} = \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots\}$ — **сходится**

Теперь пусть:
$\{x_n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\}$ — расходится
$\{y_n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\}$ — расходится
Тогда:

$\{x_n \cdot y_n\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ — **расходится**

№ 4.19. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + /y_n\}$? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная последовательность будет сходиться и когда она будет расходиться.

Пусть:
$\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ — расходится
$\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n/y_n\} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ — **сходится**

Теперь пусть:
$\{x_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ — расходится
$\{y_n\} = \{1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\}$ — расходится
Тогда:
$\{x_n/y_n\} = \{0, 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, \dots\}$ — **расходится**

№ 4.13. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $a \neq 0$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

Докажем, что последовательность $\{1/x_n\}$ ограничена, начиная с некоторого номера N. Выберем $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. Для этого числа ε $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Распишем $|a|$:

$$|a| = |(a - x_n) + x_n| \leq |a - x_n| + |x_n| < \varepsilon + |x_n| = \frac{|a|}{2} + |x_n|$$

Отсюда следует, что

$$|a| < \frac{|a|}{2} + |x_n| \text{ или } \frac{|a|}{2} < |x_n| \text{ или } \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$$

Это означает, что все элементы последовательности $\{1/x_n\}$ ограничены, начиная с номера N. Теперь докажем, что последовательность $\{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\}$ — бесконечно малая.

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{1}{x_n}\frac{a - x_n}{a} = \frac{1}{x_n}\frac{-\alpha_n}{a},$$

где $\alpha_n = x_n - a$. В итоге мы получили произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую. Т.е. последовательность $\{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\}$ — бесконечно малая, и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

№ 4.20. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

По определению предела последовательности $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n \geq N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Но тогда для этого произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n \geq N$ будет выполнено неравенство $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

№ 4.23. Известно, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

Из $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что последовательность $\{x_n\}$ можно представить в виде суммы предела a и некоторой бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$:

$$x_n = a + \alpha_n.$$

Докажем, что $\{x_n^2 - a^2\}$ — бесконечно малая последовательность.

$$x_n^2 - a^2 = (a + \alpha_n)^2 - a^2 = 2a\alpha_n + \alpha_n^2$$

Последовательности $\{2a\alpha_n\}$ и $\{\alpha_n^2\}$ — бесконечно малые, следовательно, и $\{x_n^2 - a^2\}$ — бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

№ 4.24. Пусть, начиная с некоторого номера, $x_n \geq y_n$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Из $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ следует, что

$$\forall A > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N \implies y_n > A$$

Но тогда начиная с некоторого номера и $x_n \geq y_n > A$, т.е. $\{x_n\}$ — бесконечно большая и $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2 Числовые множества и последовательности. Часть 2

№ 4.25. Пользуясь определением предела последовательности, докажите что:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Заффиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N$ выполнено неравенство $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$.

Заметим, что

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Т.е. неравенсвто выполнено, если $n > 1/\varepsilon$. Число ε мы заффиксировали, нам осталось выбрать номер N, начиная с которого оно начнёт выполняться. Выберем этот номер N следующим образом:

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть от числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Приемер. Если $\varepsilon = 0.4$, то $1/\varepsilon = 2.5$, и неравенство $n > 1/\varepsilon = 2.5$ будет выполнено, начиная с $n = 3$, т.е. за номер N, начиная с которого неравенство будет выполнено, следует вязть число 3. Формула $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ как раз и даёт число 3. Целая часть нужна, чтобы сделать число N натуральным. Прибавление единицы нужно, т.к. просто взятия одной только целой части бывает недостаточно, чтобы неравенстов было выполнено (на этом примере это хорошо видно: при $N = 2$ неравенство невыполнено).

б) $\lim_{n\to\infty}(0.8)^n = 0$

Заффиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N$ выполнено неравенство $|0.8^n| < \varepsilon$.

Так как оснавание логарифма меньше единицы (он убывает), то

$$|0.8^n| = 0.8^n < \varepsilon \implies n = \log_{0.8} 0.8^n > \log_{0.8} \varepsilon$$

Осталось выбрать номер N, начиная с которого это неравенство начнёт выполняться:

$$N = [\log_{0.8} \varepsilon] + 1$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем указать такой номер N, начиная с которого наше неравенство будет выполнено, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(0.8)^n = 0$.

в) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}\sin n^2}{n+1} = 0$

Снова заффиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N$ выполнено неравенство $\left|\frac{n^{2/3}\sin n^2}{n+1}\right| < \varepsilon$.

Запишем цепочку неравенств:

$$\left|\frac{n^{2/3}\sin n^2}{n+1}\right| \leq \left|\frac{n^{2/3}}{n+1}\right| < \frac{n^{2/3}}{n} = \frac{1}{n^{1/3}} < \varepsilon \implies n > 1/\varepsilon^3$$

Осталось выбрать номер N, начиная с которого неравенство начнёт выполняться:

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right] + 1$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем указать такой номер N, начиная с которого наше неравенство будет выполнено, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}\sin n^2}{n+1} = 0$.

№ 4.21. Известно, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

Согласно критерию Коши, из сходимости последовательности $\{x_n\}$ следует её фундаментальность, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} \implies |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

И, в частсности,

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Откуда и следует, что $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

№ 4.22. Известно, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)^n = 0$.

Согласно критерию Коши, из сходимости последовательности $\{x_n\}$ следует её фундаментальность, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} \implies |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Например, для $\varepsilon = 1/2\ \exists N_{1/2} \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N_{1/2}$ и $p = 1 \implies |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon = 1/2$. Возведём обе части неравенства в степень n:

$$|x_{n+1} - x_n|^n < 1/2^n \leq \varepsilon',$$

где ε' — некоторое вещественное число, удовлетворяющее неравенству.

Нам нужно доказать, что для произвольного числа ε' найдётся такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N$ будет выполнено неравенство $|x_{n+1} - x_n|^n < 1/2^n \leq \varepsilon'$.

Поэтому, во-первых, мы заффиксируем произвольное число $\varepsilon' > 0$, а во-вторых, выберем число N следующим образом:

$$N = max(N_{1/2}, [\log_2 1/\varepsilon'] + 1).$$

Действительно, в этом случае, мы гарантируем, что $\forall n \geq N$ будут выполнены оба неравенства:

$$1/2^n \leq \varepsilon' \text{ и } |x_{n+1} - x_n|^n < 1/2^n$$

№ 4.26. Исследуйте вопрос о сходимости последовательности $x_n = \frac{n^\alpha - 1}{2n^2+n+1}$ в зависимости от α.

Лемма. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n^\beta = 0$ при $\beta > 0$ и $x_n \geq 0$.

Заффиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для числа $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/\beta}$ существует номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого будет выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon_1 = \varepsilon^{1/\beta}$ (так как последовательность $\{x_n\}$ сходится).

Но тогда при $\beta > 0$ и $x_n \geq 0$ выполнено неравенство $|x_n^\beta| < \varepsilon$, что и доказывает лемму.

Вернёмся к решению задачи. Разделим числитель и знаменатель на n^2:

$$x_n = \frac{n^\alpha - 1}{2n^2 + n + 1} = \frac{1/n^{2-\alpha} - 1/n^2}{2 + 1/n + 1/n^2}$$

Воспользуемся леммой в случае, когла $x_n = 1/n$. Очевидно, что $x_n \geq 0$ и $x_n \to 0$. Тогда $(1/n)^{2-\alpha} \to 0$ в случае, когда $\beta \equiv 2 - \alpha > 0$.

Таким образом, если $\alpha < 2$, то

$$x_n = \frac{1/n^{2-\alpha} - 1/n^2}{2 + 1/n + 1/n^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Если $\alpha = 2$, то

$$x_n = \frac{1 - 1/n^2}{2 + 1/n + 1/n^2} \to \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty$$

Если $\alpha > 2$, то $\forall A > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ n^{\alpha-2} > A$, т.е. $(1/n)^{2-\alpha}$ — бесконечно большая и, следовательно, расходится. Тогда и последовательность $\{x_n\}$ — расходится при $n \to \infty$.

№ 4.27. Найдите:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - 1 = 0$$

Тот факт, что оба предела сходятся к единице, не трудно проверить по определению предела последовательности, но нужно аккуратно раскрывать модуль.

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Разделим числитель и знаменатель на 3^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2/3)^n+1}{(-2/3)^n(-2)+3} = \frac{1}{3}$$

Тот факт, что $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ при $n\to\infty$, доказывается по определению предела последовательности.

в) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$

Эта последовательность монотонна. Действительно, рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3n+3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}} = \left(\frac{n+1+2}{n+1}\frac{n}{n+2}\right)^{3n+3}\left(\frac{n+2}{n}\right)^3 =$$

$$= \left[\left(1-\frac{2}{n^2+3n+2}\right)^{n+1}\right]^3 \left(\frac{n+2}{n}\right)^3 > \left[\left(1-\frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\right]^3 = 1$$

Было использовано неравенство Бернулли при $x=-\frac{2}{n^2+3n+2}$.

Последовательность $\{x_n\}$ возрастает и, следовательно,

$$x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n+2}$$

Но последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+2}\}$ сходятся к e^6. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{3\cdot 2n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^6 = e^6$$

Был использован второй замечательный предел. Аналогично,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+2}\right)^{3(2n+2)} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^6 = e^6$$

Но тогда, по теореме о двух полицейских (см. теорему 1.5), должна стремиться к e^6 подпоследовательность с нечётными номерами $\{x_{2n+1}\}$ (так как $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n+2}$). А это означает, что все подпоследовательности исходной поледовательности $\{x_n\}$ сходятся к e^6, поэтому и сама последовательность стремится к e^6.

№ 4.28. Докажите, что последовательности являются бесконечно большими:

а) $x_n = \sqrt{n}$

Заффиксируем произвольное число $A > 0$. Найдём номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого будет выполнено неравенство $|x_n| > A$, или

$$|\sqrt{n}| = \sqrt{n} > A, \text{ или } n > A^2$$

Возьмём $N = [A^2] + 1$. Действительно, в этом случает будет выполнено неравенство $n \geq N = [A^2] + 1 > A^2$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая.

б) $a_n = (-1)^n \cdot n$

Аналогично, заффиксируем произвольное число $A > 0$. Найдём номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого будет выполнено неравенство $|(-1)^n \cdot n| = n > A$. Очевидно, что нужно взять, $N = [A] + 1$, тогда неравенство будет выполнено.

№ 4.29. Докажите, что последовательность $\{(1 + (-1)^n)n\}$ неограниченная, однако не является бесконечно большой.

Неограниченная. Действительно, $\forall A > 0\ \exists x_n :\ |x_n| > A$. Для этого нужно рассматривать чётные номера.

Не бесконечно большая. Чтобы последовательность была бесконечно большой, нужно, чтобы начиная с некоторого номера N все члены последовательности были больше некоторого заданного числа $A > 0$. Но все нечётные члены последовательности равны нулю и, следовательно, не могут быть больше числа A.

№ 4.32. Приведите пример последовательности, у которой есть одна предельная точка, но последовательность не является сходящейся.

$$\{0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots\}$$

Ноль — предельная точка, но последовательность расходится.

№ 4.33. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

$$\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$$

Ноль и один — предельнаые точки.

№ 4.34. Докажите, что монотонная неограниченная последовательность не имеет предельной точки.

От противного. Пусть послеловательность возрастает и предельная точка есть и равна a. Тогда все элементы x_n последовательности могут быть только меньше или равны a, так как если найдётся номер N такой, что $x_N > a$, то, в виду монотонности, $\forall n \geq N$ будет выполнено неравенство $x_n > a$. А значит, в некоторой окрестности точки a окажется лишь конечное чилсо членов последовательности, т.е. a — не предельная точка. Но тогда все $x_n \leq a$, т.е. последовательность ограничена, что противоречит условию. Таким образом, монотонная неограниченная последовательность не имеет предельных точек.

№ 4.35. Найдите все предельные точки данной последовательности

а) $x_n = (-1)^n$

$$x_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ чётные номера} \\ -1, \text{ нечётные номера} \end{cases}$$

Членов последовательности $\{x_n\}$ вблизи точек -1 и $+1$ бесконечно много, следовательно, они предельные по определению. Других предельных точек нет, так как начиная с некоторго номера N все элементы последовательности окажутся в некоторой ε-окрестности точек ± 1, а вне этих окрестностей будет лишь конечное число элементов последовательности (в данном случае их не будет вовсе).

б) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

Снова имеем несколько случаев:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \implies \begin{cases} \text{чётные номера} \implies x_n = 1/n + 1 \to 1 \\ \text{нечётные номера} \implies x_n = -1/n + 0 \to 0 \end{cases}$$

Членов последовательности $\{x_n\}$ вблизи точек 0 и 1 бесконечно много, следовательно, они предельные по определению. Других предельных точек нет.

в) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$

Имеем несколько случаев:

$$x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3} = \frac{1-1/n}{1+1/n}\cos\frac{2\pi n}{3} \to \begin{cases} 1, \text{ если } n = 3k;\ k = 1, 2, 3, \dots \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } n = 3k-2;\ k = 1, 2, 3, \dots \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } n = 3k-1;\ k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Членов последовательности $\{x_n\}$ вблизи точек $-1/2$ и 0 бесконечно много, следовательно, они предельные по определению. Других предельных точек нет.

г) $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$

Пользуясь результатами пункта в), получим элеметны последовательности $\{x_n\}$:

$$x_n = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, 1^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^5, 1^6, \dots \right\}$$

Подпоследовательность послледовательности $\{x_n\}$, полученная путём исключения из неё элементов с номерами $n = 3k$, сходится к нулю, а подпоследовательность с номерами $n = 3k$ сходится к единице. Стало быть, вблизи точек 0 и 1 бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ и они являются предельными по определению. Других предельных точек нет.

д) $x_n = \sin\left(\pi n/2 + 1/n\right)$

Разложим синус и рассмотрим несколько случаев:

$$x_n = \sin\left(\pi n/2 + 1/n\right) = \sin\left(\pi n/2\right)\cos\left(1/n\right) + \cos\left(\pi n/2\right)\sin\left(1/n\right) \to$$

$$\to \begin{cases} 0, \text{ если } n = 4k;\ k = 1, 2, 3, \dots \\ 1, \text{ если } n = 4k-3;\ k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, \text{ если } n = 4k-2;\ k = 1, 2, 3, \dots \\ -1 \text{ если } n = 4k-1;\ k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Здесь было учтено, что $\cos\left(1/n\right) \to 1$ и $\sin\left(1/n\right) \to 0$ при $n \to \infty$ (проверяется по определению).

Членов последовательности $\{x_n\}$ вблизи точек -1, 0 и $+1$ бесконечно много, следовательно, они предельные по определению. Других предельных точек нет.

Нижним пределом последовательности называется наименьшая из её предельных точек, **верхним пределом** — наибольшая.

3 Предел и непрерывность функции

3.1 Определения и отрицания к ним

Функция сходится к точке b в точке a по «Коши», если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X$ ($x \neq a$, a —предельная точка множества X) из $|x - a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

№ 4.1. Функция не имеет предела b в точке a по «Коши», если $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 :\ \exists x \in X$ ($x \neq a$, a —предельная точка множества X) из $|x - a| < \delta$, что будет выполнено неравенство $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

Пусть a — предельная точка множества X. Тогда $f(x) \to b$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X\ (x \neq a)\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

№ 4.2. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow b$ при $x \to a$, если

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 :\ \exists x \in X\ (x \neq a)\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

Пусть X — неограниченное множество. Тогда $f(x) \to b$ при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0 :\ \forall x \in X\ |x| > A \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

№ 4.3. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow b$ при $x \to \infty$, если

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall A > 0 :\ \exists x \in X\ |x| > A \implies |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

Пусть X — неограниченное снизу множество. Тогда $f(x) \to b$ при $x \to -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0 :\ \forall x \in X\ x < -A \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

№ 4.4. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow b$ при $x \to -\infty$, если

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall A > 0 :\ \exists x \in X\ x < -A \implies |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

Пусть a — предельная точка множества X. Тогда $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, если

$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X\ (x \neq a)\ |x - a| < \delta \implies f(x) > A$$

№ 4.5. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow +\infty$ при $x \to a$, если

$$\exists A > 0\ \forall \delta > 0 :\ \exists x \in X\ (x \neq a)\ |x - a| < \delta \implies f(x) \leq A$$

Пусть X — неограниченное сверху множество. Тогда $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$, если

$$\forall A > 0\ \exists B > 0 :\ \forall x \in X\ x > B \implies f(x) < -A$$

№ 4.6. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow -\infty$ при $x \to +\infty$, если

$$\exists A > 0 \; \forall B > 0 : \; \exists x \in X \; x > B \implies f(x) \geq -A$$

Пусть $f(x)$ определена в левой полуокрестности точки a. Тогда $f(x) \to -\infty$ при $x \to a - 0$, если

$$\forall A > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in X \text{ из } -\delta < x - a > 0 \implies f(x) < -A$$

№ 4.7. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow -\infty$ при $x \to a - 0$, если

$$\exists A > 0 \; \forall \delta > 0 : \; \exists x \in X \text{ из } -\delta < x - a > 0 \implies f(x) \geq -A$$

Пусть $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки a. Тогда $f(x) \to +\infty$ при $x \to a + 0$, если

$$\forall A > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in X \text{ из } 0 < x - a < \delta \implies f(x) > A$$

№ 4.8. Строим отрицание. $f(x) \nrightarrow +\infty$ при $x \to a + 0$, если

$$\exists A > 0 \; \forall \delta > 0 : \; \exists x \in X \text{ из } 0 < x - a < \delta \implies f(x) \leq A$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке a, если выполнены следующие три условия:

1. $f(x)$ определена в точке a
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

№ 4.11. Функция не является непрерывной, если не выполнено хотя бы одно из вышеперечисленных условий, то есть если $f(x)$ не определена в точке a, либо $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, либо $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Пример: $f(x) = \operatorname{sign} x$. Функция имеет разрыв в точке 0, так как не имеет предела в этой точке.

Типы разрывов функции:

1. **Устранимый разрыв.** В точке разрыва функции существует предел, но функция либо не определена в данной точке, либо предельное значение функции не совпадает с частным значением функции в этой точке.

2. **Разрыв первого рода.** Функция имеет в данной точке левый и правый пределы, но они не равны друг другу.

3. **Разрыв второго рода.** У функции нет левого или правого предельного значения.

3.2 Некоторые полезные теоремы

Теорема 3.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором одном и том же множестве X и их пределы в некоторой точке a этого множества равны соответственно числам b и c. Тогда пределы суммы, разности, произведения и частного (в случае $c \neq 0$) равны соответственно сумме, разности, произведению и частному пределов этих функций.

Теорема 3.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором одном и том же множестве X и они непрерывны в некоторой точке a этого множества. Тогда функции суммы, разности, произведения и частного (в случае $f(a) \neq 0$) этих функций также будут непрерывны в точке a множества X.

3.3 Решение задач

№ 4.9. Докажите, что сумма бесконечно малой в точке a функции $\alpha(x)$ и ограниченной в окрестности точки a функции $f(x)$ является ограниченной функцией в некоторой окрестности точки a.

По определению функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0 :\ \forall x \in X\ 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |\alpha(x)| < \varepsilon$$

По определению, функция $f(x)$ называется ограниченной в некоторой окрестности δ_2, если

$$\exists\delta_2 > 0\ \forall A > 0 :\ \forall x \in X\ |x - a| < \delta_2 \implies |f(x)| \leq A$$

Теперь выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для этого ε существует $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ и $\exists A > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполнено следующее неравенство:

$$|\alpha(x) + f(x)| \leq |\alpha(x)| + |f(x)| \leq \max[\varepsilon, \alpha(a)] + A$$

Таким образом, видим, что функция $\alpha(x) + f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a по определению.

№ 4.10. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке a, а $g(x)$ не имеет предела в этой точке. Что можно сказать о существовании пределов суммы $f(x) + g(x)$ и разности $f(x) - g(x)$ в точке a ? Ответ обоснуйте.

Допустим, что функция $f(x) + g(x)$ сходится к d. Рассмотрим функцию $(f(x) + g(x)) - f(x)$. Так как функции $f(x) + g(x)$ и $f(x)$ сходятся, то и их разность сходится к разности пределов этих функций, то есть к $d - b$ (смотри теорему 3.1).

С другой стороны, функция $(f(x)+g(x))-f(x)$ равна $g(x)$, но функция $g(x)$ не имеет предела по условию задачи и, стало быть, не может сходиться к $d-b$.

Поэтому у суммы, сходящейся к точке a функции и функции, не имеющей предела в этой точке, предела нет. Аналогичное рассуждение можно провести и для разности.

№ 4.12. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке a . Что можно сказать о непрерывности суммы $f(x)+g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная функция будет непрерывной и когда будет разрывной:
$h(x) = \text{sign } x + (-\text{sign } x) \equiv 0$ — непрерывна в точке 0
$h(x) = \text{sign } x + \text{sign } x = 2\,\text{sign } x$ — разрывна в точке 0

№ 4.13. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке a. Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x)\cdot g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная функция будет непрерывной и когда будет разрывной.

Пусть $g(x) = \begin{cases} 0, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$
Тогда $f(x) = \text{sign } x \cdot g(x) \equiv 0$ — непрерывна в точке 0.

С другой стороны:
$f(x) = \text{sign } x \cdot \text{sign } x = \text{sign}^2\, x$ — разрывна в точке 0.

№ 4.14. Пусть существует предел $f(x)$ в точке a и не существует предел $g(x)$ в точке a. Что можно сказать о пределе отношения $f(x)/g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная функция будет иметь предел и когда не будет. В качестве функции $f(x)$ будем брать константы, которые, очевидно, сходятся. А в качестве функции $g(x)$ в обоих случаях возьмём $\text{sign } x + 2$. У неё нет предела в точке 0.

$h(x) = 0/(\text{sign } x + 2) \equiv 0$ — имеет предел в точке 0, равный 0

$h(x) = 1/(\text{sign } x + 2)$ — предела в точке 0 нет (предел слева не равен пределу справа)

№ 4.16. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной в некоторой точке функции есть функция, разрывная в этой точке? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная функция будет непрерывной и когда будет разрывной.

Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ -1, \ x \leq 0 \end{cases}$

Тогда $h(x) = (f(x))^2 \equiv 1$ — непрерывна в точке 0.

С другой стороны:

$f(x) = \operatorname{sign} x$. Тогда $h(x) = (f(x))^2 = \operatorname{sign}^2 x$ — разрывна в точке 0.

№ 4.18. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a, $g(x)$ — разрывна в точке a. Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x) \cdot g(x)$ в точке а? Ответ обоснуйте.

Приведём примеры, когда указанная функция будет непрерывной и когда будет разрывной:

$h(x) = 0 \cdot \operatorname{sign} x \equiv 0$ — непрерывна в точке 0

$h(x) = 1 \cdot \operatorname{sign} x = \operatorname{sign} x$ — разрывна в точке 0

№ 4.15. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна в точке a, то и $|f(x)|$ — непрерывная функция в точке a.

Заффиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство:

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$$

По определению, если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X \text{ из } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Тогда для этого же $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X$ из $|x - a| < \delta$ следует, что

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Т.е. $|f(x)|$ — непрерывная функция в точке a.

№ 4.17. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке а , $g(x)$ — разрывна в точке a. Что можно сказать о непрерывности суммы $f(x) + g(x)$ и разности $f(x) - g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

Пусть функция $h(x) = f(x) + g(x)$ — непрерывна в точке a. Рассмотрим разность двух непрерывных функций $h(x) - f(x)$. Согласно теореме 3.2, разность этих двух функций должна быть также непрерывной функцией. С другой стороны, функция $h(x) - f(x) = g(x)$ не является непрерывной функцией по условию. Следовательно, сумма указанных функций $f(x)$ и $g(x)$ есть разрывная функция.

№ 4.20. Докажите, что $\lim_{x\to\infty} \cos x$ не существует.

Допусти, что существует $\lim_{x\to\infty} \cos x = b$. Тогда для любой последовательности аргументов функции $x_n \to \infty$ соответствующая последовательность значений функции $\{\cos(x_n)\}$ должна сходиться к b.

Возьмём последовательность $x_n = \frac{\pi n}{3}$. Очевидно, она стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

С другой стороны, $\cos x_n$ будет принимать в зависимости от номера n одно из 4 значений: -1, $-1/2$, $1/2$ или 1, причём каждое из них бесконечно много раз. Т.е. имеем последовательность, у которой есть 4 предельные точки, но у сходящейся последовательности существует лишь одна предельная точка. Таким образом, мы пришли к противоречию, а значит, предела $\lim_{x\to\infty} \cos x$ не существует.

№ 4.21. Существует ли $\lim_{x\to 1} x \cdot \operatorname{sign}(x-1)$? Обоснуйте ответ.

Введём замену переменной $t = x - 1$ и получим $\lim_{t\to 0}(t+1) \cdot \operatorname{sign} t$.

Рассмотрим пределы слева и справа в точке $t = 0$:

$$\lim_{t\to 0+0}(t+1)\cdot \operatorname{sign} t = 1 \text{ и } \lim_{t\to 0-0}(t+1)\cdot \operatorname{sign} t = -1$$

Видим, что предел слева не равен пределу справа, следовательно, предела у функции в точке $x = 1$ нет.

№ 4.22. Вычислите:

а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 5$$

б) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \sin x \frac{1}{x} = \{\text{огр. функция} \cdot \text{бесконечно малая функция}\} = 0$$

№ 4.19. Найти предел функции $\lim_{x\to+\infty} R(x)$ (вид функции см. ниже) при различных соотношениях параметров n и m ($a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$).

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = x^{n-m}\frac{a_0 + a_1/x^1 + \cdots + a_n/x^n}{b_0 + b_1/x^1 + \cdots + b_m/x^m} \to$$

$$\to \begin{cases} +\infty, \text{ при } x \to +\infty \text{ и } n > m \\ a_0/b_0, \text{ при } x \to +\infty \text{ и } n = m \\ 0, \text{ при } x \to +\infty \text{ и } n < m \end{cases}$$

№ 4.23. Докажите, что:

а) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Пусть $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Тогда

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} = \ln f(x)$$

Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x = 0$. Доопределим функцию $f(x)$ в точке $x = 0$ по непрерывности. Воспользовавшись вторым замечательным пределом, получим

$$f(0) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

Таким образом, функция $f(x)$ получилась непрерывной на всей числовой прямой. Тогда в следующем выражении можно внести знак предела под знак логарифма

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$$

б) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, если $a > 0$.

Положим $x = \log_a(1+u)$ (при $x \to 0 \implies u \to 0$). Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{a^{\log_a(1+u)} - 1}{\log_a(1+u)} = \lim_{u\to 0}\left[u\frac{\ln a}{\ln(1+u)}\right] = \ln a$$

Здесь мы воспользовались результатами предыдущего пункта, а именно

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = 1$$

4 «о»-малое

4.1 Определения

Символ «*о*»-малое. По определению, $\alpha = o(\beta)$ в точке a, если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Бесконечно малые функции называются **эквивалентными** в точке a ($\alpha \sim \beta$), если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

4.2 Асимптотическое разложение некоторых функций при x $\to$ 0

1. $\sin x = x + o(x)$
2. $\cos x = 1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$
3. $\ln(1+x) = x + o(x)$
4. $a^x = 1 + x\ln a + o(x), \ a > 0$
5. $e^x = 1 + x + o(x)$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + ax + o(x)$
7. $\operatorname{tg} x = x + o(x)$
8. $\operatorname{sh} x = x + o(x)$
9. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$
10. $\operatorname{th} x = x + o(x)$

4.3 Решение задач

№ 4.24. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ функции. Докажите справедливость следующих равенств при $x \to a$:

Вспомним, что по определению $\alpha = o(\beta)$, если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

а) $o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)$

Обозначим первую функцию $o(\beta)$ через α_1, а вторую через α_2. Важно отметить, что, в общем случае, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. При этом

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}=0 \text{ и } \lim_{x\to a}\frac{\alpha_2}{\beta}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=0$$

Преобразуем предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}\pm\lim_{x\to a}\frac{\alpha_2}{\beta}=0\pm 0=0$$

б) $o(c\beta)=o(\beta)$, где $c=const$

Обозначим функцию $o(c\beta)$ через α. При этом

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{c\beta}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

Преобразуем предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{c\beta}=\frac{1}{c}\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0 \implies \lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

в) $co(\beta)=o(\beta)$, где $c=const$

Обозначим функцию $o(\beta)$ через γ, а функцию $c\gamma$ через α. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=0 \implies 0=c\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{c\gamma}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} \implies \lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

г) $(o(\beta))^n=o(\beta^n)$

Обозначим функцию $o(\beta)$ через α. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha^n}{\beta^n}=0$$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha^n}{\beta^n}=\left[\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}\right]^n=0$$

д) $\beta^n o(\beta)=o(\beta^{n+1})$

Обозначим функцию $o(\beta)$ через α. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta^n\alpha}{\beta^{n+1}}=0$$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta^n\alpha}{\beta^{n+1}}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

е) $o(\beta^n)/\beta=o(\beta^{n-1})$

Обозначим функцию $o(\beta^n)$ через α. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^n}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha/\beta}{\beta^{n-1}}=0$$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha/\beta}{\beta^{n-1}}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^n}=0$$

ё) $o(o(\beta))=o(\beta)$

Обозначим функцию $o(\beta)$ через α, а функцию $o(\alpha)$ через γ. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0 \text{ и } \lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=0$$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}\right]=0\cdot 0=0$$

ж) $o(\beta+o(\beta))=o(\beta)$

Обозначим функцию $o(\beta)$ через α, а функцию $o(\beta+\alpha)$ через γ. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0 \text{ и } \lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta+\alpha}=0$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=0$$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\gamma}{\beta+\alpha}\frac{\beta+\alpha}{\beta}\right]=0\cdot(1+0)=0$$

з) $\alpha\beta=o(\alpha)$ или $\alpha\beta=o(\beta)$

Выполним преобразования

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha\beta}{\alpha}=\lim_{x\to a}\beta=0 \text{ и } \lim_{x\to a}\frac{\alpha\beta}{\beta}=\lim_{x\to a}\alpha=0$$

и) $\alpha\sim\beta \implies \alpha-\beta=o(\alpha)$ и $\alpha-\beta=o(\beta)$

Бесконечно малые функции называются эквивалентными в точке a ($\alpha\sim\beta$), если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=1-1=0 \text{ и } \lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta}{\beta}=1-1=0$$

№ 4.25. Пользуясь свойствами символа *«o»*-малое, запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o((x-a)^k)$ при $x\to a$ ($k\in\mathbb{N}$):

а) $\alpha(x)=o(-5x+x^2-x^3+o(-5x+x^2-x^3)),\ x\to 0$

Введём обозначение $\beta(x) = -5x + x^2 - x^3$. Тогда

$$\beta(x) = -5x + x^2 - x^3 = -5x + o(x), \text{ т.к. } \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^3}{x} = 0$$

В свою очередь $\alpha(x) = o(-5x + x^2 - x^3 + o(-5x + x^2 - x^3)) = o(\beta + o(\beta)) = o(\beta) =$

$$= o(-5x + o(x)) = o(x)$$

б) $\alpha(x) = (x-1)\cdot(o((x-1)^2 + o(x-1)), \ x \to 1$

Введём обозначение $\beta(x) = x - 1$. Тогда

$$\alpha(x) = \beta\cdot o(\beta^2 + o(\beta)) = \beta\cdot o(o(\beta) + o(\beta)) = \beta\cdot o(\beta) = o(\beta^2) = o\left((x-1)^2\right)$$

в) $\alpha(x) = \frac{1}{3x} o(5x + x^2), \ x \to 0$

Введём обозначение $\beta(x) = 5x$. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{1}{3x} o(5x + x^2) = \frac{5}{3\beta} o(\beta + o(\beta)) = \frac{5}{3\beta} o(\beta) = \frac{5}{3} o(\beta^0) = o(1)$$

г) $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}\cdot o(2x^4 + o(x^4 + 2x^2)), \ x \to 0$

Введём обозначение $\beta(x) = 2x^2$. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{1}{x^2}\cdot o(2x^4 + o(x^4 + 2x^2)) = \frac{2}{\beta}\cdot o(\frac{1}{2}\beta^2 + o(o(\beta) + \beta)) = \frac{2}{\beta}\cdot o(\beta) = o(1)$$

д) $\alpha(x) = \frac{o(2(x+2)^3)}{(x+2)^2} + \frac{o(4(x+2)^5)}{(x+2)^4}, \ x \to -2$

Введём обозначение $\beta(x) = x + 2$. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{o(2(x+2)^3)}{(x+2)^2} + \frac{o(4(x+2)^5)}{(x+2)^4} = \frac{o(2\beta^3)}{\beta^2} + \frac{o(4\beta^5)}{\beta^4} =$$

$$= o(2\beta) + o(4\beta) = o(\beta) = o(x+2)$$

№ 4.26. Пользуясь свойствами символа *«o»*-малое, запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x) = o(1)$ или $\alpha(x) = o(\frac{1}{x^k})$ при $x \to \infty$ $(k \in \mathbb{N})$:

а) $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$\alpha(x) = o\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

б) $\alpha(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

$$\alpha(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

в) $\alpha(x) = x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

Введём обозначение $\beta(x) = 1/x$. Тогда

$$\alpha(x) = x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{\beta^2} \cdot o\left(\beta^3\right) = o\left(\beta\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

г) $\alpha(x) = x\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

Введём обозначение $\beta(x) = 1/x$. Тогда

$$\alpha(x) = x\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\beta} \cdot o\left(\beta^2\right) = o\left(\beta\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

д) $\alpha(x) = 5x \cdot o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Введём обозначение $\beta(x) = 1/x$. Тогда

$$\alpha(x) = 5x \cdot o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 5x \cdot o\left(o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= 5x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{\beta} \cdot o\left(\beta\right) = o(1)$$

№ 4.27. Напишите асимптотическое разложение функции при $x \to 0$ с остаточным членом $o(x^\alpha)$, где $\alpha \geq 0$:

Будем пользоваться асимптотическими разложениями, которые нам известны (см. пункт 4.2).

а) $\sin^2(5\sqrt{x} + x)$

Введём обозначение $\beta(x) = 5\sqrt{x} + x$. Тогда

$$\sin^2(5\sqrt{x} + x) = \sin^2\beta = (\beta + o(\beta))^2 = \beta^2 + 2\beta o(\beta) + o(\beta^2) = \beta^2 + o(\beta^2) =$$

$$= (5\sqrt{x} + x)^2 + o((5\sqrt{x} + x)^2) = 25x + 5x\sqrt{x} + x^2 + o(25x + 5x\sqrt{x} + x^2) =$$

$$= 25x + o(x) + o(x) + o(25x + o(x) + o(x)) = 25x + o(x)$$

б) $\cos(4x^2 + x)$

$$\cos(4x^2 + x) = 1 - \frac{(4x^2 + x)^2}{2} + o\left(\frac{(4x^2 + x)^2}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

в) $\ln(1-x^2+x)$

$$\ln(1-x^2+x) = x - x^2 + o(x-x^2) = x - o(x) + o(x - o(x)) = x + o(x)$$

г) $\ln(\cos 2x)$

$$\ln(\cos 2x) = \ln\left(1 - \frac{4x^2}{2} + o\left(\frac{4x^2}{2}\right)\right) = -2x^2 + o(2x^2) + o(-2x^2 + o(2x^2)) =$$

$$= -2x^2 + o(x^2)$$

д) $\ln(e^x + \sqrt{x})$

$$\ln(e^x + \sqrt{x}) = \ln(1 + x + o(x) + \sqrt{x}) = \ln\left[1 + o(\sqrt{x}) + o(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\right] = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

е) $\cos\sqrt{\sin x},\ x > 0$

$$\cos\sqrt{\sin x} = \cos\sqrt{x + o(x)} = 1 - \frac{(x + o(x))}{2} + o\left(\frac{(x+o(x))}{2}\right) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

№ 4.28. Напишите асимптотическое разложение функции при $x \to \infty$ с остаточным членом $o(1/x^\alpha)$, где $\alpha \geq 0$:

а) $\sqrt{x^2+x} - x$

Рассмотрим два случая: когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.
Первый случай ($x \to +\infty$):

$$\sqrt{x^2+x} - x = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \frac{1}{2} + o(1)$$

Второй случай ($x \to -\infty$). Введём обозначение $t = -x$:

$$\sqrt{x^2+x} - x = \sqrt{t^2 - t} + t = t\left(\sqrt{1 - \frac{1}{t}} + 1\right) =$$

$$= t\left(1 - \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) + 1\right) = 2t - \frac{1}{2} + o(1) \to +\infty$$

б) $\sqrt[3]{x^3+x} - x$

$$\sqrt[3]{x^3+x} - x = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

в) $\ln\cos\left(\frac{2}{x}\right)$

$$\ln\cos\left(\frac{2}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{4}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(-\frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$
$$= -\frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

г) $e^{1/\sqrt{x}} - 1,\ x > 0$

$$e^{1/\sqrt{x}} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

5 Типы разрывов функции. Часть 1

№ 4.30. Найдите все точки разрыва функции $f(x)$ и определите их тип:

а) $f(x) = e^{-1/x}$

Функция e^y непрерывная функция на всей свой области задания. Наша функция задана на всей числовой оси x кроме точки $x = 0$, поэтому только в этой точке у нашей функции есть разрыв. Определим его тип:

$$\lim_{x\to 0-0} e^{-1/x} = +\infty$$

У функции нет левого предельного значения, следовательно, разрыв второго рода.

б) $f(x) = (1+x)^{1/x}$

Аналогично пункту а, данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$. Но в точке $x = 0$ функция имеет предел, равный числу e (второй замечательный предел). Следовательно, это устранимый разрыв.

в) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Снова нужно проверить лишь точку $x = 0$. В ней наблюдается устранимый разрыв, так как снова функция имеет предел в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \{\text{бесконечно малая функция}\} \cdot \{\text{ограниченная функция}\} = 0$$

г) $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln|x|}$

В данном случае разрыв есть в трёх точках: в -1, 0 и 1.

Покажем, что функция имеет предел в точке $x = 1$ (и введём обозначение $y = x - 1$):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\ln|x|} = \lim_{y\to 0} \frac{y(y+2)}{\ln|y+1|} = \lim_{y\to 0} \frac{y(y+2)}{y+o(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y+2}{1+o(1)} = 2$$

Таким образом, в точке $x = 1$ функция имеет устранимый разрыв. Аналогично, можно показать, что функция имеет устранимый разрыв в точке $x = -1$. В точке $x = 0$ функция также имеет устранимый разрыв, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\ln|x|} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

№ 4.29. Вычислите пределы:

а)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$$

б)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4/x^2}{(1-2/x)(1+1/x)}=1$$

в)

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{1+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{1+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+3}{4-2x^{1/3}+x^{2/3}}\cdot\frac{4-2x^{1/3}+x^{2/3}}{\sqrt{1-x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{-(x-8)}{x-8}\cdot\frac{4-2x^{1/3}+x^{2/3}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4-2(-8)^{1/3}+(-8)^{2/3}}{\sqrt{1-(-8)}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2$$

г)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x-2)^{25}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{40}x^{10}}{x^{25}}\frac{(1-3/x)^{40}(5+1/x)^{10}}{(3-2/x)^{25}}=+\infty$$

д)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}}{\sqrt{1+1/x}}=1$$

е) Выполним замену $y=x-\pi/3$

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1-2\cos(y+\pi/3)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y+o(y)}{1-(1+o(y))+\sqrt{3}y+o(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1+o(1)}{\sqrt{3}+o(1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ё) Выполним замену $y=x-1$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}y\operatorname{tg}\frac{\pi(y+1)}{2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\pi y}{2}+o(y)}=\frac{2}{\pi}$$

ж) $m,\ n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\frac{1}{m}ax+o(x)\right]-\left[1+\frac{1}{n}bx+o(x)\right]}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a/m-b/n+o(1)}{1}=\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$$

з) Требуется рассмотреть два варианта: $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1/x^2+1/x+1}+\sqrt{1/x-1/x+1}} = 1$$

Выполним замену $y=-x$ и получим аналогию предыдущему случаю со знаком минус:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{1-y+y^2}-\sqrt{1+y+y^2}\right) = -1$$

и)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2+o(x^2)}-\sqrt[3]{1-x^2+o(x^2)}}{x^2+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{3}{6}x^2+o(x^2)+\frac{2}{6}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}+o(1)}{1+o(1)} = -\frac{1}{6}$$

й)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \left(\frac{1+0}{2+0}\right)^{\frac{1-\sqrt{0}}{1-0}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \left(\frac{1+1}{2+1}\right)^{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1/x+1}{2/x+1}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = 1^0 = 1$$

к) Выполним замену $y = x-\pi/2$

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \exp\left[\lim_{x\to\pi/2}\operatorname{tg} x(\ln\sin x)\right] = \exp\left[-\lim_{y\to0}\operatorname{ctg} y(\ln\cos y)\right] =$$

$$= \exp\left[-\lim_{y\to0}\cos y\frac{\ln(1+o(y))}{y+o(y)}\right] = \exp\left[-\lim_{y\to0}\cos y\frac{o(1)}{1+o(1)}\right] = e^0 = 1$$

л)

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch}2x}{\ln\cos3x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x^2/2+o(x^2))}{\ln(1-9x^2/2+o(x^2))} = \lim_{x\to0}\frac{4x^2/2+o(x^2)}{-9x^2/2+o(x^2)} = \frac{4}{9}$$

м)

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\cos\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\cos\left[n\pi\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\cos\left[n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)\right] = -\lim_{n\to\infty}\sin\left[n\pi+o(1)\right] =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left[\sin(n\pi)\cos o(1)+\cos(n\pi)\sin o(1)\right] = 0+0 = 0$$

н)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+3/x}-\sqrt{1-2/x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=2$$

6 Типы разрывов функции. Часть 2

№ 4.29. Вычислите пределы:

о) Выполним замену $y = x - 1$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\log_x 2 = \lim_{y\to 0}(-y)\log_{y+1} 2 = \lim_{y\to 0}(-y)\frac{\ln 2}{\ln(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(-y)\frac{\ln 2}{y+o(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{-\ln 2}{1+o(1)} = -\ln 2$$

п) $\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$ при $a > 0$
Для начала докажем, что $o\left(\frac{1}{n^2+n}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
По определению $o\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{1/(n^2+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{1/n^2}(1+1/n) = 0$$

$$\text{Если } x_n = \frac{\alpha_n}{1/n^2},\ y_n = 1+\frac{1}{n} \to 0 \text{ и } x_n\cdot y_n \to 0 \text{ то } x_n = \frac{x_n\cdot y_n}{y_n} \to 0,$$

$$\text{т.е. } \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{1/n^2} = 0 \text{ и } \alpha_n = o(1/n^2)$$

Вернёмся к решению номера:

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) = \lim_{n\to\infty} n^2 a^{1/n}(1 - a^{1/(n+1)-1/n}) = \lim_{n\to\infty} n^2 a^{1/n}(1 - a^{-1/[n(n+1)]}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left[1+\frac{1}{n}\ln a + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1 - 1 + \frac{\ln a}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n + \ln a + o(1)\right]\left[\frac{\ln a}{(n+1)} + n\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln a}{(1+1/n)} + \frac{\ln^2 a}{(n+1)} + \frac{\ln a\cdot o(1)}{(n+1)} + n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right) + \ln a\cdot o\left(\frac{1}{n}\right) + o(1)\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \ln a + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = \ln a$$

р)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x = \exp\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right] =$$

$$= \exp\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = \exp\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] =$$

$$= \exp\lim_{x\to\infty}(1+o(1)) = e$$

с)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+o(x))}{\ln(1+2x+o(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1}{2}$$

т)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln[e^x(1+x^2e^{-x})]}{\ln[e^{2x}(1+x^4e^{-2x})]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln[1+x^2e^{-x}]}{2x+\ln[1+x^4e^{-2x}]}=\frac{1}{2}$$

у)

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4+x))}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+o(x)\right)-\ln\left(1-x+o(x)\right)}{\sin bx}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x)+x+o(x)}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{2x+o(x)}{bx+o(x)}=\frac{2}{b}$$

ф)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=2\cdot\{\text{б.м. ф-я}\}\cdot\{\text{огр. ф-я}\}=0$$

х)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-1)+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\frac{(a-1)+\left(1+\frac{\ln b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{a}\right]=$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{\ln b}{a\cdot n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{\ln b}{a\cdot n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]=$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln b}{a}+o(1)\right]=\exp\frac{\ln b}{a}=\sqrt[a]{b}$$

ц) $a>0$. Выполним замену $y=x-a$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{y\to0}\frac{a^{y+a}-(y+a)^a}{y}=a^a\lim_{y\to0}\frac{a^y-(1+y/a)^a}{y}=$$

$$=a^a\lim_{y\to0}\frac{1+yln a+o(y)-1-y+o(y)}{y}=a^a\lim_{y\to0}\left(lna+o(1)-1+o(1)\right)=$$

$$=a^a\left(lna-1\right)$$

ч) $a>0$, $b>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(\frac{1+\frac{\ln a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+1+\frac{\ln b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\right)\right]=$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{\frac{\ln a+\ln b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\right)\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\left[n\frac{\frac{\ln a+\ln b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\right]=$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln a + \ln b + o(1)}{2}\right] = \exp \frac{\ln a + \ln b}{2} = \sqrt{ab}$$

ш)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \alpha x + o(x) - 1 - \beta x + o(x)}{\alpha x + o(x) - \beta x - o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x - \beta x + o(x)}{\alpha x - \beta x - o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha - \beta + o(1)}{\alpha - \beta - o(1)} = 1$$

щ) Выполним замену $y = x - 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln(\cos(\pi \cdot 2^x))} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^{y+1})}{\ln(\cos(\pi \cdot 2^{y+1}))} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(2\pi \cdot 2^y)}{\ln(\cos(2\pi \cdot 2^y))} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(2\pi(1 + y\ln 2 + o(y))}{\ln(\cos(2\pi(1 + y\ln 2 + o(y))))} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(2\pi(y\ln 2 + o(y))}{\ln(\cos(2\pi(y\ln 2 + o(y))))} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{[2\pi \ln 2 \cdot y + o(y)]^2}{\ln(1 - 4\pi^2 \ln^2 2 \cdot y^2/2 + o(y^2))} = \lim_{y\to 0} \frac{4\pi^2 \ln^2 2 \cdot y^2 + o(y^2)}{-4\pi^2 \ln^2 2 \cdot y^2/2 + o(y^2)} = -2$$

ъ)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3^x + o(3^x)}{2^x + o(2^x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3^x}{2^x} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 0$$

ы)

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n \left(\frac{2\pi n}{3n + 1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sin \frac{2\pi}{3 + 1/n}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\infty = 0$$

ь) $a > 0$, $c > 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^x = \begin{cases} \infty, \text{ при } a > c \\ 0, \text{ при } a < c \\ \text{см. ниже, при } a = c \end{cases}$$

При $a = c$:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{ax + b}{ax + d}\right)^x = \exp \lim_{x\to +\infty} \left[x \ln \left(\frac{1 + b/ax}{1 + d/ax}\right)\right] =$$

$$= \exp \lim_{x\to +\infty} \left[x \left[\frac{b}{ax} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{ax} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right] =$$

$$= \exp \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{b + d}{a} + o(1)\right] = \exp \frac{b + d}{a}$$

э)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2/2 + o(x^2)}}{1 - 1 + x/2 + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - x^2/4 + o(x^2)}{x/2 + o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x/4 + o(x)}{1/2 + o(1)} = 0$$

ю)

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)) = \lim_{x\to+\infty} \left[x - \ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x - \ln e^x - \ln\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right] = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

я) Рассмотрим два варианта: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\sqrt{1 + 1/x} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2} + o(1)\right] = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = +\infty$$

7 Пределы функций

№ 4.29. Вычислите пределы:

I)

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \exp \lim_{n\to\infty} \left[n \ln \frac{\operatorname{tg} 1/n + 1}{1 - \operatorname{tg} 1/n}\right] =$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \left[n \ln(1/n + o(1/n) + 1) - \ln(1 - 1/n + o(1/n))\right] =$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \left[n(1/n + o(1/n) + 1/n + o(1/n))\right] = \exp \lim_{n\to\infty} [2 + o(1)] = e^2$$

II) $a > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h + a^{-h} - 2a^h a^{-h}}{h^2} = a^x \lim_{h\to 0} \left[\frac{a^{h/2} - a^{-h/2}}{h}\right]^2 =$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \left[\frac{1 + \frac{h\ln a}{2} + o(h) - 1 + \frac{h \ln a}{2} + o(h)}{h}\right]^2 = a^x \left[\lim_{h\to 0} \frac{h \ln a + o(h)}{h}\right]^2 = a^x \ln^2 a$$

III)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} \ln \left[1 + \frac{x(2^x - 3^x)}{1+x3^x}\right]\right] =$$

$$= \exp \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} \left[\frac{x(2^x - 3^x)}{1+x3^x} + o\left(\frac{x(2^x-3^x)}{1+x3^x}\right)\right]\right] =$$

$$= \exp \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} \left[\frac{x(1 + x\ln 2 + o(x) - 1 - x \ln 3 + o(x))}{1+x3^x} + o\left(\frac{x(2^x-3^x)}{1+x3^x}\right)\right]\right] =$$

$$= \exp \lim_{x\to 0} \left[\left[\frac{(\ln 2/3 + o(1))}{1+x3^x} + \frac{1}{x^2} o\left(\frac{x(2^x-3^x)}{1+x3^x}\right)\right]\right] = \exp \ln \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Отдельно докажем, что $\alpha(x) = o(x^2)$, где $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$, а $\beta(x) = \frac{x(2^x-3^x)}{1+x3^x}$

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x^2}\frac{x^2}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x^2} const \implies \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x^2} = 0$$

Сама константа была найдена раннее в ходе решения.

IV)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)\right]}{\ln\left[\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1 + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1/2 \ln x + \ln\left(1 + x^{-1/2} + x^{-1/6}\right)}{1/3 \ln x + \ln\left(1 + x^{-1/3} + x^{-1/12}\right)} = \frac{3}{2}$$

V) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x \ln abc + o(x)}{3}\right)\right] =$$

$$= \exp \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\frac{x\ln abc + o(x)}{3}\right] = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln abc + o(1)}{3} = \sqrt[3]{abc}$$

VI) $x > 0$. Выполним замену $n = 1/t$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{t\to 0}\frac{x^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1 + t\ln x + o(t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0}[\ln x + o(1)] = \ln x$$

VII)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}}{\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}} = \exp\lim_{n\to\infty}\left[n^2\ln\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)}\right] = \exp\lim_{n\to\infty}\left[n^2\left[\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]\right] =$$

$$= \exp\lim_{n\to\infty}\left[n^2\left[\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln\left(1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\right] =$$

$$= \exp\lim_{n\to\infty}\left[n^2\left[\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right] =$$

$$= \exp\lim_{n\to\infty}\left[\left[\pi^2 + o(1)\right]\right] = e^{\pi^2}$$

VIII)

$$\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x\to\infty} x\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1$$

IX)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\cdot\left[1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)\right]\cdot\left[1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right]}{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \left[1 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]}{1 - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]} = 14$$

8 Производная функций

8.1 Определение производной

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b). Зафиксируем любое значение x из (a, b) и зададим ему произвольное приращение Δx такое, что $x+\Delta x$ также будет принадлежать интервалу (a, b).

Тогда соответствующим **приращением функции** $y = f(x)$ будет называться число $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась **непрерывной** в точке x, **необходимо и достаточно**, чтобы **приращение $\mathbf{\Delta y}$** этой функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, являлось **бесконечно малым** при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{x\to 0} \Delta y = \lim_{x\to 0}[f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$$

Мы получили **разностную форму условия непрерывности** функции $y = f(x)$ в точке x. Определим **разностное отнешение** в точке x при $\Delta x \neq 0$ как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, при условии, что этот предел существует, т.е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пусть P — точка на кривой с координатами $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Тогда **касательная**, проходящая через данную точку $M(x, f(x))$ кривой, определяется как предельное положение секущей MP при $\Delta x \to 0$. Тогда $f'(x)$ — тангенс угла наклона касательной.

Анналогично определению производной, вводятся определения **производной слева** $f'(x - 0)$ и **производной справа** $f'(x + 0)$ функции $f(x)$.

Также, в полной аналогии, вводится определение **производной векторной функции** $\vec{a}(t)$.

8.2 Понятие дифференцируемости функции

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в данной точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где A некоторое число, независящее от Δx, а α — функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Удобно положить $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, откуда следует, что

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Теорема 8.1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась **дифференцируемой** в данной точке x, **необходимо и достаточно**, чтобы она **имела** в этой точкуке **конечную производную**.

Теорема 8.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x, то она и непрерывна в этой точке.

В случае $A \neq 0$ **дифференциалом функции** $y = f(x)$ в данной точке x, соответствующим приращению аргумента Δx, называют главную линейную относительно Δx часть приращения этой функции в точке x, т.е. $dy = A\Delta x$. В случе, когда $A = 0$, будем считать, что дифференциал тоже равен 0, т.е. $dy = 0$.

В случае, когда переменная x является независимой, можно ввести **дифференциал независимой переменной dx**. Договоримся в дальнейшем, что будет выполнено равенсвто $dx = \Delta x$. Тогда

$$dy = f'(x)dx.$$

8.3 Правила дифференцируемости суммы, разности, произведения и частного

Теорема 8.3. Если каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное, при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причём имеют место формулы

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

8.4 Вычисление производных степенной функции, тригонометрических функций и логарифмической функции

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$$

$$(\sin x)' = \cos x;\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e;\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

8.5 Теорема о производной обратной функции

Теорема 8.4. Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 возрастает (или убывает) и является непрерыной. Пусть, кроме того, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и производная $f'(x_0)$ отлична от нуля. Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности соответствующей точки $y_0 = f(x_0)$, дифференцируема в этой точке и имеет в этой точке производную, равную $\frac{1}{f'(x_0)}$.

8.6 Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций

$$(a^x)' = a^x \ln a; \ (e^x)' = e^x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

8.7 Правила дифференцирования сложной функции

Теорема 8.5. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в некоторой точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f[\varphi(t)]$ дифференцируема в указанной точке t_0, причём для производной этой функции справедлива следующая формула:

$$\{f[\varphi(t_0)]\}' = f'(x_0)\varphi'(t_0)$$

8.8 Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем

Пусть функция $y = f(x)$ положительна и дифференцируема в данной точке x. Тогда в этой точке существует $\ln y = \ln f(x)$.Взяв производную, получим **логарифмическую производную** функции $y = f(x)$:

$$[\ln f(x)]' = y'/y.$$

Если в качестве функции $f(x)$ взять, степенно-показательную функцию $u(x)^{v(x)}$, то её производная будет равна

$$y'(x) = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Пользуясь логарифмической производной, можно найти производную степенной функции x^α при $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Запишем некоторые производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\ (x \neq 0).$$

Таким образом, производная любой элементарной функции есть элементарная функция.

8.9 Инвариантность формы первого дифференциала

Производнаф функции $y = f(x)$ всегда (даже в случае, когда переменная x не является независимой) равна отношению дифференциала этой функции dy к дифференциалу аргумента dx, т.е.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Правило дифференцирования сложной функции принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

а правило дифференцирования обратной функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}.$$

№ 4.1. Докажите, что если $\exists f'(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Запишем определение производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

Теперь докажем равенство $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Для этого перегруппируем слагаемые и разделим левую и правую часть на $\Delta x \neq 0$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

А теперь устремим левую и правую часть к 0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Пользуясь определением производной (1) и определением символа «o»-малое, заключаем, что пределы левой и правой части равенства равны нулю.

№ 4.2. Докажите, что если существует число A такое, что

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x) \text{ при } \Delta x\to 0,$$

то $\exists f'(x_0)$ и $f'(x_0)=A$.
Выразим A и устремим к нулю обе части неравенства

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right].$$

Так как $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$ по определению символа «o»-малое, то предел выражения выше будет существовать только в том случае, если будет существовать предел (1). Отсюда следует равенство $f'(x_0)=A$.

№ 4.3. Пользуясь определением производной, выведите формулы производных функций:
а) x^n, $n\in\mathbb{N}$
Воспользуемся формулой (1)

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^n-(x_0)^n}{\Delta x}=x_0^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x/x_0)^n-1}{\Delta x}=$$

$$=x_0^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+n\Delta x/x_0+o(\Delta x)-1}{\Delta x}=nx_0^{n-1}$$

б) $\sin x$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}\cos\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\{\text{первый замечательный предел}\}=\cos x_0$$

в) $\cos x$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}\sin\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\{\text{первый замечательный предел}\}=\sin x_0$$

г) $\log_a x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\Delta x/x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x/x_0)}{\ln a\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x/x_0+o(\Delta x)}{\ln a\Delta x} = \frac{1}{x_0\ln a}$$

д) a^x

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} =$$
$$= a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x\ln a+o(\Delta x)-1}{\Delta x} = a^x\ln a$$

№ 4.11. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, то $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x\neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$.

Так как у функуии $f(x)$ существует дифференциал в точке x_0, то $\exists dy = f'(x_0)dx$ или
$$\exists f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$
.

Нам нужно доказать, что функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$, где
$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$
Возьмём предел функции $\alpha(\Delta x)$ и выполним подстановку $f'(x_0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] - f'(x_0) = f'(x_0)-f'(x_0) = 0$$
Таким образом, $\alpha(\Delta x)$ действительно является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$.

№ 4.12. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то существует число A такое, что $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A+\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x\neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$.

Так как у функуии $f(x)$ существует дифференциал в точке x_0, то $\exists dy = f'(x_0)dx$ или
$$\exists f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$
.

Нам нужно доказать, что при $\Delta x \to 0$ существует некоторое число A, которое определяется следующим соотношением

$$A = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \alpha(\Delta x)$$

Возьмём предел $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \alpha(\Delta x) \right] = f'(x_0) - 0 = A$$

Таким образом, число A существует и численно равно производной функции $f(x)$ в точке $x - x_0$.

№ 4.3. Пользуясь определением производной, выведите формулы производных функций:

а) x^n, $n \in \mathbb{N}$

Воспользуемся формулой (1)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - (x_0)^n}{\Delta x} = x_0^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x / x_0)^n - 1}{\Delta x} =$$

$$= x_0^n \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + n\Delta x / x_0 + o(\Delta x) - 1}{\Delta x} = n x_0^{n-1}$$

б) $\sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x / 2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \{\text{первый замечательный предел}\} = \cos x_0$$

в) $\cos x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \sin \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x / 2} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \{\text{первый замечательный предел}\} = \sin x_0$$

г) $\log_a x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(1 + \Delta x / x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \Delta x / x_0)}{\ln a \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x / x_0 + o(\Delta x)}{\ln a \Delta x} = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

д) a^x

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$
$$= a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 + \Delta x \ln a + o(\Delta x) - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

№ 4.6. Пользуясь определением производной, найдите производную функции в данной точке:
а) $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}\right)\left(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}\right)} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{4+\Delta x} + 2\right)} = \frac{1}{4}$$

б) $y = x|x|$ в точке $x = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} |\Delta x| = 0$$

№ 4.7. Найдите односторонние производные $f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0)$ функции:
а) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$
$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$
$$f'(1+0) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{|1+\Delta x| - |1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{1+\Delta x - 1}{\Delta x} = 1$$
$$f'(1-0) = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{|1+\Delta x| - |1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{1+\Delta x - 1}{\Delta x} = 1$$

б) $f(x) = x \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$.
Т.к. $x = |x| \operatorname{sgn} x$, то $f(x) = |x| \operatorname{sgn}^2 x$. Но $\operatorname{sgn}^2 x = 1$ при $x \neq 0$, поэтому его можно опустить при записи функции. Получим функцию $f(x) = |x|$. Задача свелась к предыдущей. Искомые пределы равны

$$f'(0+0) = 1 \text{ и } f'(0-0) = -1.$$

в) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$.
Аналогично предыдущему пункту, получим, что $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x = x|x| \operatorname{sgn}^2 x = x|x|$.

Предел этой функции в точке $x_0 = 0$ был найден в номере 4.6. пункте б и равен 0. Следовательно,

$$f'(0+0) = f'(0-0) = 0.$$

г) $f(x) = |x-1|e^x$, $x_0 = 1$.

$$f'(1+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|1+\Delta x - 1|e^{1+\Delta x} - |1-1|e^1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x| e^{1+\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x e^{1+\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} e^{1+\Delta x} = e$$

$$f'(1-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|1+\Delta x - 1|e^{1+\Delta x} - |1-1|e^1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x| e^{1+\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x e^{1+\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} -e^{1+\Delta x} = -e$$

№ 4.9. Пусть $F(x) = \begin{cases} f(x), \ x \le x_0 \\ ax+b, \ x > x_0 \end{cases}$, где функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке $x = x_0$. При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет дифференцируемой в точке x_0?

Функция $F(x)$ будет дифференцируемой в точке $x = x_0$, если будет существовать предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

Или, что эквивалентно, в точке $x = x_0$ будут существовать аналогичные пределы слева и справа и они будут равны друг другу. Из условия очевидно, что предел слева существует и равен

$$F'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 - 0)$$

Найдём предел справа

$$F'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+0} \left[a + \frac{ax_0 + b - f(x_0)}{\Delta x} \right]$$

Очевидно, что этот предел существует и равен a только в случае, если $ax_0 + b = f(x_0)$. Помимо этого нужно потребовать равенство производных $F'(x_0 - 0) = F'(x_0 + 0)$, что даёт следующее условие

$$f'(x_0 - 0) = a$$

Теперь из полученных условий можно выразить коэффициенты a и b

$$\begin{cases} a = f'(x_0 - 0) \\ b = f(x_0) - f'(x_0 - 0)x_0 \end{cases}$$

№ 4.10. При каких значениях a и b функция $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x},\ |x| \geq 2 \\ a + bx^2,\ |x| < 2 \end{cases}$ является дифференцируемой на всей числовой прямой?

Функция $f(x)$ является симметричной относительно оси x, следовательно, поведение функции в зависимости от параметров a и b для отрицательных и положительных значений x будет полностью аналогичным. Поэтому мы будем рассматривать только область значений $x \geq 0$. Более того, пользуясь правилами дифференцирования, легко найти производные функции $f(x)$ на промежутках $[0, 2)$ ($f'(x) = 2bx$) и $(2, +\infty)$ ($f'(x) = -1/x^2$). Осталось потребовать дифференцируемости в точке $x = 2$. Снова для этого потребуем, чтобы в точке $x = 2$ существовали пределы слева и справа и они были равны друг другу

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{a + b(2 + \Delta x)^2 - 1/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{a + 4b + 4b\Delta x + b\Delta x^2 - 1/2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \left[4b + b\Delta x + \frac{a + 4b - 1/2}{\Delta x}\right]$$

Чтобы предел слева существовал и был равен $4b$, необходимо, чтобы было выполнено условие $a + 4b = 1/2$. Теперь рассмотрим предел справа

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{1/(2 + \Delta x) - 1/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{2 - (2 + \Delta x)}{2(2 + \Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4}$$

Приравниваем предел слева пределу справа

$$4b = -1/4$$

Тогда, выражая из условий a и b, получаем

$$\begin{cases} a = 3/4 \\ b = -1/16 \end{cases}$$

9 Производная n-го порядка

9.1 Производные и дифференциалы высших порядков

Понятие n-й производой вводится индуктивно: пусть в точке x существует производная $(n-1)$-го порядка и она дифференцируема в некоторой окрестности точки x. Следовательно, эта функция имеет призводную в точке x, которая и будет называться **n-й производой функции f(x)**. Таким образом, n-я производная находится по фомуле

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'.$$

Имеют место следующие формулы:

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \tag{2}$$

$$(x^{m})^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n} \text{ при } m > n \tag{3}$$

$$(x^{m})^{(n)} = 0 \text{ при } m < n \tag{4}$$

$$(x^{n})^{(n)} = n! \tag{5}$$

$$(\alpha^{x})^{(n)} = \alpha^{x}\ln^{n}\alpha;\ (e^{x})^{(n)} = e^{x} \tag{6}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (ad-bc)(-1)^{(n-1)}n!(cx+d)^{-(n+1)}c^{n-1} \tag{8}$$

Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1u^{(n-1)}v' + \dots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)},\ \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{9}$$

Займёмся поиском высших дифференциалов функции $y = f(x)$ в случае, когда переменная x **независима**.

Пусть функция $y = f(x)$ диффереенцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $dy = f'(x)dx$ есть функция двух переменных (x и dx).

Предположим, что $f'(x)$ также диффереенцируема в некоторой окрестности точки x_0 и что величина dx имеет фиксированное значение для всей рассматриваемой окрестности точки x_0. Рассмотрим дифференциал функции $dy = f'(x)dx$, который обозначим как $\delta(dy)$:

$$\delta(dy) = \delta(f'(x)dx)|_{x=x_0} = [(f'(x)dx)]'|_{x=x_0}\,\delta x = f''(x_0)dx\delta x$$

Значение $\delta(dy)$ дифференциала от первого дифференциала dy, взятое при $\delta x = dx$, называют **вторым дифференциалом** функции $y = f(x)$ (в точке x_0) и обозначают символом d^2y.

В случае независимой переменной x получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Т.к. мы считали, что $dx = const$, то сразу получаем, что второй дифференциал независимой переменной равен нулю, т.е. $\delta(dx) = d^2x = 0$.

Аналогично, методом индукции, вводится **дифференциал n-ого порядка** (в случае независимой переменной x)

$$d^ny = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

Тогда получим

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}$$

В том случае, когда x не будет независимой, второй дифференциал d^2x не будет равен нулю. Тогда можно показать, что

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

9.2 Решение задач

№ 4.4. Пользуясь теоремой о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций выведите формулы для производных функций:

а) $\operatorname{tg} x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

б) $\operatorname{ctg} x$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

в) $\operatorname{sh} x$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' - (e^{-x})'\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

г) $\operatorname{ch} x$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' + (e^{-x})'\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

д) $\operatorname{th} x$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

е) $\operatorname{cth} x$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

№ 4.5. Пользуясь теоремой о производной сложной функции, выведите формулу для производной функции x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Представим функцию через экспоненту, а затем, возьмём производную

$$(x^\alpha)' = (exp\,[\alpha \ln x])' = exp\,[\alpha \ln x]\,\alpha \frac{1}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

№ 4.8. Найдите первые производные и первые дифференциалы функций:
а) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} + \frac{1}{4\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} + \frac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$dy = f'(x)dx = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} dx$$

б) $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$

$$\left(\sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)\right)' = -2\sin(\cos x)\cos(\cos x)\sin x - 2\cos(\sin x)\sin(\sin x)\cos x$$

$$dy = \left[-2\sin(\cos x)\cos(\cos x)\sin x - 2\cos(\sin x)\sin(\sin x)\cos x\right] dx$$

в) $y = e^{x^2}\cos 2x$

$$\left(e^{x^2}\cos 2x\right)' = e^{x^2} 2x \cos 2x - 2e^{x^2}\sin 2x = 2e^{x^2}\left(x\cos 2x - \sin 2x\right)$$

$$dy = 2e^{x^2}\left(x\cos 2x - \sin 2x\right) dx$$

г) $y = x^{\sin x}$

$$\left(x^{\sin x}\right)' = \left(\exp\left[\sin x \ln x\right]\right)' = x^{\sin x}\left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$dy = x^{\sin x}\left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right] dx$$

д) $y = e^{e^x} + x^{e^x}$

$$\left(e^{e^x} + x^{e^x}\right)' = e^{e^x} e^x + (\exp\left[e^x \ln x\right])' = e^{e^x} e^x + x^{e^x}\left[e^x \ln x + e^x/x\right] = e^x\left[e^{e^x} + x^{e^x}\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$dy = e^x\left[e^{e^x} + x^{e^x}\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\right]dx$$

е) $y = \ln^3\left(\ln^2(\ln x)\right)$

$$\left(\ln^3\left(\ln^2(\ln x)\right)\right)' = \frac{3\ln^2\left(\ln^2(\ln x)\right)}{\ln^2(\ln x)}\frac{2\ln(\ln x)}{\ln x}\frac{1}{x} = \frac{6\ln^2\left(\ln^2(\ln x)\right)}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

$$dy = \frac{6\ln^2\left(\ln^2(\ln x)\right)}{x\ln x\ln(\ln x)}dx$$

ж) $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\left(\operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1 + x/\sqrt{1+x^2}}{1 + x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\sqrt{1+x^2}\left[1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\right]}$$

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\sqrt{1+x^2}\left[1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\right]}dx$$

з) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$

$$\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$dy = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$$

и) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$

$$\left(\ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)\right)' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}\left[e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right] = \frac{e^{2x} + e^x\sqrt{1+e^{2x}}}{1 + e^{2x} + e^x\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$dy = \frac{e^{2x} + e^x\sqrt{1+e^{2x}}}{1 + e^{2x} + e^x\sqrt{1+e^{2x}}}dx$$

к) $y = \sin x^{\cos x}$

$$\left(\sin x^{\cos x}\right)' = (\exp\left[\cos x\ln\sin x\right])' = \sin x^{\cos x}\left[-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right] =$$

$$= \sin x^{1+\cos x}\left[\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x\right]$$

$$dy = \sin x^{1+\cos x}\left[\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x\right]dx$$

№ 4.13. Найдите дифференциалы n-го порядка функции $f(x)$:
а) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

Для начала найдём первую производную

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Теперь трижды воспользуемся формулой (8)

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n-1)} = (ad-bc)(-1)^n(n-1)!(cx+d)^{-n}c^{n-2}$$

Тогда

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]^{(n-1)} =$$

$$= -2(-1)^n(n-1)!(x+1)^{-n} - (-1)^n(n-1)! \cdot x^{-(n)} + (-1)^n(n-1)!(x+1)^{-n} =$$

$$= (-1)^{(n-1)}(n-1)! \cdot x^{-n} + (-1)^{(n-1)}(n-1)!(x+1)^{-n} =$$

$$= (-1)^{(n-1)}(n-1)! \left[\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n}\right]$$

$$d^n y = \left[(-1)^{(n-1)}(n-1)! \left[\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n}\right]\right](dx)^n$$

б) $f(x) = x^2 \sin 2x$, $n = 20$

Воспользуемся формулой Лейбница (9)

$$(x^2 \sin 2x)^{(20)} = 2\frac{20!}{18!2!}(\sin 2x)^{(18)} + 2x\frac{20!}{19!}(\sin 2x)^{(19)} + x^2(\sin 2x)^{(20)} =$$

$$= 380 \cdot (\sin 2x)^{(18)} + 40x(\sin 2x)^{(19)} + x^2(\sin 2x)^{(20)} =$$

$$= 380 \cdot 2^{18} \cdot \sin\left(2x + \frac{18\pi}{2}\right) + 40x \cdot 2^{19} \cdot \sin\left(2x + \frac{19\pi}{2}\right) + x^2 \cdot 2^{20} \cdot \sin\left(2x + \frac{20\pi}{2}\right) =$$

$$= -380 \cdot 2^{18} \cdot \sin 2x - 40x \cdot 2^{19} \cdot \cos 2x + x^2 \cdot 2^{20} \cdot \sin 2x =$$

$$= 2^{20}\left[(x^2 - 95) \cdot \sin 2x - 20x \cdot \cos 2x\right]$$

$$d^n y = \left[2^{20}\left[(x^2 - 95) \cdot \sin 2x - 20x \cdot \cos 2x\right]\right](dx)^n$$

в) $f(x) = xe^{5x}$, $n = 11$

Воспользуемся формулой Лейбница (9)

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(xe^{5x})^{(11)} = 11 \cdot (e^{5x})^{(10)} + x(e^{5x})^{(11)} = 11 \cdot 5^{10} \cdot e^{5x} + x \cdot 5^{11} \cdot e^{5x} =$$
$$= 5^{10} \cdot e^{5x}\,(11 + 5x)$$
$$d^n y = \left[5^{10} \cdot e^{5x}\,(11+5x)\right](dx)^n$$

г) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $n = 8$

Разобьём дробь на две и воспользуемся формулой (8)

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(n)} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} =$$
$$= (-1)^{(n-1)} n!(x+1)^{-(n+1)} + (-1)^{(n-1)} n!(x+1)^{-(n+1)} = 2 \cdot (-1)^{(n-1)} n!(x+1)^{-(n+1)}$$
$$d^n y = \left[2 \cdot (-1)^{(n-1)} n!(x+1)^{-(n+1)}\right](dx)^n$$

№ 4.14. Используя теорему о производной обратной функции, выведите формулу для производной функции $f(x)$:

а) $f(x) = \arcsin x$

Функция $y = \arcsin x$ является обратной функцией для функции $x = \sin y$. Для функции $x = \sin y$ выполнены все условия теоремы о производной обратной функции на промежутке $[-\pi/2,\ \pi/2]$, следовательно, производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной функцией для функции $x = \operatorname{tg} y$. Для функции $x = \operatorname{tg} y$ выполнены все условия теоремы о производной обратной функции на промежутке $[-\pi/2,\ \pi/2]$, следовательно, производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

в) $f(x) = \ln x$

Функция $y = \ln x$ является обратной функцией для функции $x = e^y$. Для функции $x = \ln y$ выполнены все условия теоремы о производной обратной функции на промежутке $(-\infty, +\infty]$, следовательно, производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

№ 4.15. Найдите производную n-го порядка функции $f(x)$:

а) $f(x) = x \ln x$, $n = 20$
Возьмём первые два производные

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Найдём искомую производную, пользуясь формулой (8)

$$(f(x))^{(20)} = (f''(x))^{(18)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(18)} = \frac{18!}{x^{19}}$$

б) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $n = 30$

Воспользуемся формулой (2)

$$(x^{1/2})^{(30)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - 30 + 1\right)x^{\frac{1}{2}-30} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - 29\right)x^{-59/2}$$

в) $f(x) = xe^x$, $n = 30$

Воспользуемся формулой (9)

$$(xe^x)^{(30)} = x^{(30)}e^x + C_{30}^1 x^{(29)}(e^x)' + \cdots + C_{30}^{29} x'(e^x)^{(29)} + x(e^x)^{(30)} =$$

$$= 30e^x + xe^x = (30 + x)e^x$$

г) $f(x) = 1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$, $n = 40$

Воспользуемся формулой (2)

$$(x^{-1/2})^{(40)} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} - 40 + 1\right)x^{\frac{1}{2}-40} = \frac{(-1)}{2}\frac{(-3)}{2}\ldots\frac{(-79)}{2}x^{-81/2}$$

д) $f(x) = x \sin x$, $n = 12$

Воспользуемся формулами (7) и (9)

$$(x \sin x)^{(12)} = 0 + \cdots + 0 + C_{12}^{11} x'(\sin x)^{(11)} + x(\sin x)^{(12)} =$$

$$= 12 \sin\left(x + 11\frac{\pi}{2}\right) + x \sin\left(x + 12\frac{\pi}{2}\right) = -12 \cos x + x \sin x$$

е) $f(x) = x^2 e^x$, $n = 100$

Воспользуемся формулой (9)

$$(x^2e^x)^{(100)} = 0 + \dots + 0 + C_{100}^{98}(x^2)''(e^x)^{(98)} + C_{100}^{99}(x^2)'(e^x)^{(99)} + x^2(e^x)^{(100)} =$$

$$= \frac{100!}{98!(100-98)!} \cdot 2 \cdot e^x + \frac{100!}{99!(100-99)!} \cdot 2x \cdot e^x + x^2e^x =$$

$$= \left[9900 + 200x + x^2\right] e^x$$

ж) $f(x) = x^2 \sin x$, $n = 200$

Воспользуемся формулами (7) и (9)

$$(x^2 \sin x)^{(12)} = 0 + \dots + 0 + C_{200}^{198}(x^2)''(\sin x)^{(198)} + C_{200}^{199}(x^2)'(\sin x)^{(199)} + x^2(\sin x)^{(200)} =$$

$$= 199 \cdot 200 \cdot \sin\left(x + 198\frac{\pi}{2}\right) + 200 \cdot 2x \cdot \sin\left(x + 199\frac{\pi}{2}\right) + x^2 \cdot \sin\left(x + 200\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= (x^2 - 398) \cdot \sin x - 400x \cdot \cos x$$

з) $f(x) = x \cos x$, $n = 60$

Воспользуемся формулами (7) и (9)

$$(x \cos x)^{(60)} = 0 + \dots + 0 + C_{60}^{59}x'(\cos x)^{(59)} + x(\cos x)^{(12)} =$$

$$= 60 \cos\left(x + 59\frac{\pi}{2}\right) + x \cos\left(x + 60\frac{\pi}{2}\right) = 60 \sin x + x \cos x$$

и) $f(x) = x^2 \cos x$, $n = 71$

Воспользуемся формулами (7) и (9)

$$(x^2 \cos x)^{(71)} = 0 + \dots + 0 + C_{71}^{69}(x^2)''(\cos x)^{(69)} + C_{71}^{70}(x^2)'(\cos x)^{(70)} + x^2(\cos x)^{(71)} =$$

$$= 70 \cdot 71 \cdot \cos\left(x + 69\frac{\pi}{2}\right) + 71 \cdot 2x \cdot \cos\left(x + 70\frac{\pi}{2}\right) + x^2 \cdot \cos\left(x + 71\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= (x^2 - 4970) \cdot \sin x - 142 \cos x$$

10 Исследование интегралов

10.1 Основные определения

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в любой точке x интервала (a, b) функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$.

Функция называется **интегрируемой по Риману** на сегменте $[a, b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\Delta \to 0$.

Теорема. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция интегрируема на этом сегменте.

Утверждение. Неограниченная на сегменте $[a, b]$ функция неинтегрируема на этом сегменте.

10.2 Основные теоремы и формулы

Основные свойства неопределённого интеграла:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx; \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int [Af(x)]dx = A\int f(x)dx \ (A = \text{const})$$

Основные свойства определённого интеграла:

$$\int_a^a f(x) = 0; \int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x);$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^x f(t)dt\right) = f(x)$$

Таблица основный неопределённых интегралов (с точностью до константы):

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \tag{11}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \; 0 < a \neq 1 \tag{12}$$

$$\int e^x dx = e^x \tag{13}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \tag{14}$$

$$\int \cos x dx = \sin x \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n = 0, \pm 1, \dots \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \; x \neq \pi n, \; n = 0, \pm 1, \dots \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \end{cases}, \; x \in (-1, 1) \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \\ -\operatorname{arcctg} x \end{cases} \tag{19}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right|, \; |x| > 1 \tag{20}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, |x| \neq 1 \tag{21}$$

$$\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \tag{22}$$

$$\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \tag{23}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x \tag{24}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x \tag{25}$$

Формула замены переменной для неопределённого интеграла. Пусть функция $t = \phi(x)$ определена и дифференцируема на некотором множестве $\{x\}$ и пусть t — множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $g(t)$ существует на множестве t первообразная функция $G(t)$, т.е.

$$\int g(t) dt = G(t) + C.$$

Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $g(\phi(x))\phi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G(\phi(x))$, т.е.

$$\int g(\phi(x))\phi'(x) dx = G[\phi(x)] + C$$

Пусть нам требуется взять интеграл $\int f(x)dx$ и $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(\phi(x))\phi'(x)$. Тогда допустима замена переменной $t = \phi(x)$, которая сведёт вычисление интеграла $\int f(x)dx$ к вычислению более простого интеграла $\int g(t)dt$. В итоге получим

$$\int f(x) dx = G(\phi(x)) + C.$$

Замена переменной для определённого интеграла. Пусть $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$, сегмент $[a, b]$ является множеством значений некоторй функции $x = g(t)$, определённой на сегменте $t \in [\alpha, \beta]$ и имеющей на этом сегменте непрерывную производную, $g(\alpha) = a$ и $g(\beta) = b$. Тогда при этих условиях справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt.$$

Интегрирование по частям. Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$ и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная u для функции $u(x)v'(x)$, причём справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

А для определённого интеграла имеем

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Теорема. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}\dots(x-b_m)^{\beta_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_{11}}{(x-b_1)^1} + \dots + \frac{B_{\beta_1 1}}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_{1m}}{(x-b_m)^1} + \dots + \frac{B_{\beta_m m}}{(x-b_m)^{\beta_m}} +$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^1} + \dots + \frac{M_{\lambda_1 1}x+N_{\lambda_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_{1n}x+N_{1n}}{(x^2+p_nx+q_n)^1} + \dots + \frac{M_{\lambda_n n}x+N_{\lambda_n n}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}$$

10.3 Решение задач

№ 4.3. Следует ли из интегрируемости суммы двух функций $f(x) + g(x)$ (разности двух функций $f(x) - g(x)$) интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

Нет, не следует. Функция не является интегрируемой на сегменте $[a, b]$, если она неограничена на этом сегменте. Рассмотрим следующие функции:

$$f(x) = -\frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x} \text{ при } x \in [-1, 1]$$

Очевидно, что сумма этих функций тождественна нулю, а значит, интегрируема на данном множестве. В свою очередь, функции $f(x)$ и $g(x)$ неограничены, а значит и неинтегрируемы на заданном промежутке. Случай разности двух функций аналогичен. Для этого в качестве функции $f(x)$ можно взять функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

№ 4.4. Следует ли из интегрируемости произведения двух функций $f(x) \cdot g(x)$ интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

Нет, не следует. Функция не является интегрируемой на сегменте $[a, b]$, если она неограничена на этом сегменте. Рассмотрим следующие функции:

$$f(x) = x,\ g(x) = \frac{1}{x}\ \text{при}\, x \in [-1, 1]$$

Очевидно, что произведение этих функций тождественно единице, а значит, произведение интегрируемо на данном множестве. В свою очередь, функция $g(x)$ неограниченная, а значит и неинтегрируема на заданном промежутке.

№ 4.5. Пусть $f(x)$ интегрируема, а $g(x)$ неинтегрируема. Что можно сказать об интегрируемости $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$? Ответы обоснуйте.

Рассмотрим случай суммы. Допустим, функция $h(x) = f(x) + g(x)$ интегрируема. Рассмотрим функцию $g(x) = h(x) - f(x)$. Так функции $f(x)$ и $h(x)$ интегрируемы, то их разность тоже интегрируемая функция. Но это противоречит условию, что $g(x)$ неинтегрируема. Значит, допущение неверно и функция $h(x) = f(x) + g(x)$ неинтегрируема. Случай разности рассматривается аналогично.

Рассмотрим случай произведения. Произведение интегрируемой и неинтегрируемой функции может дать интегрируемую функцию (смотри номер 4.4). Но если взять функции

$$f(x) = x,\ g(x) = \frac{1}{x^2}\ \text{при}\, x \in [-1, 1],$$

то $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x}$. Т.е. получилась неинтегрируемая функция. Таким образом, в случае произведения интегрируемой и неинтегрируемой функции может получиться как интегрируемая, так и неинтегрируемая функция.

№ 4.6. Пусть $f(x)$ неинтегрируема и $g(x)$ неинтегрируема. Что можно сказать об интегрируемости $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$? Ответы обоснуйте.

Рассмотрим случай суммы. Если сложить две неинтегрируемые на отрезке $[-1, 1]$ функции $-\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x}$, то получится ноль, т.е. интегрируемая функция. С другой стороны, если на том же промежутке сложить две функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x}$, то получится $\frac{2}{x}$, т.е. неинтегрируемая функция. Аналогичные результаты получатся в случае разности двух неинтегрируемых функций. Таким образом, в случае суммы или разности двух неинтегрируемых функций получится функция, которая может быть как интегрируемой, так и неинтегрируемой.

Рассмотрим случай произведения. Произведение неинтегрируемых функциий может дать неинтегрируемую функцию. Например, $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$. С другой стороны, если взять неинтегрируемые функции

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x\in\mathbb{R}\\ 0, \text{ при } x\in\mathbb{J}\end{cases};\ g(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x\in\mathbb{J}\\ 0, \text{ при } x\in\mathbb{R}\end{cases},$$

то их произведение даст ноль, т.е. интегрируемую функцию. Функции $f(x)$ неинтегрируемы и $g(x)$ неинтегрируемы, так как у них нижний и верхний интегралы Римана не равны друг другу.

№ 4.1. Вычислите интегралы (все равенства ниже будут записаны с точностью до константы):

а) $\int(x^3+1)x^2dx$

$$\int(x^3+1)x^2dx=\int x^5dx+\int x^2dx=\frac{x^6}{6}+\frac{x^3}{3}$$

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$

При замене переменной $t=2-5x$ получим $dt=-5dx$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}=-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{2}{5}\sqrt{t}=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$$

в) $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\operatorname{arctg}x$$

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\int\frac{d\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x+\sqrt{\frac{8}{3}x^2+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left|\sqrt{8}x+\sqrt{8x^2+3}\right|$$

В конце под знаком логарифма вынесли $1/\sqrt{3}$ за скобки. Далее воспользовались тем, что логарифм произведения есть сумма логарифмов. Одно из слагаемых есть константа, следовательно, так как мы интегрируем с точностью до константы, её можно опустить.

д) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

При замене переменной $t=1+e^x$ получим $dt=e^xdx$. Тогда

$$\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int\frac{t-1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{t-1}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{1+e^x}$$

е) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3|$$

ё) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-2}$

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-2} = \int \frac{(x-1)dx}{(x+2)(x-1)} = \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|$$

ж) $\int \frac{x^2dx}{x^2+x-2}$

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+x-2} = \int dx - \int \frac{(x-2)dx}{(x+2)(x-1)} = x - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} =$$
$$= x - \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1|$$

з) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = -\int \frac{1}{(x+1)^2}d(x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

к) $\int \sin^3 xdx$

$$\int \sin^3 xdx = \int(\cos^2 x - 1)d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

л) $\int (x+1)\cos 2xdx$

$$\int (x+1)\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int d(2x)x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xd(2x) = \frac{1}{2}\int xd\sin 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xd2x =$$
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx + \frac{1}{2}\int d(\sin 2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

м) $\int xe^{-x}dx$

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

11 Вычисление интегралов. Часть 1

11.1 Основные теоремы и формулы

Симфолом $R(x,y)$ будем обозначать дробно-рациональную дробь вида

$$R(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}=\frac{a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots+a_{0n}y^n}{b_{00}+b_{10}x+b_{01}y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2+\cdots+b_{0m}y^m}$$

Существуют стандартные приёмы (замены переменных), позволяющие свести интегрирование некоторых функций $R(x,y)$ к интегрированию более простых функций. Рассмотрим эти замены переменных.

Если нам нужно взять интеграл от функции вида $R(\sin x,\cos x)$, то можно воспользоваться заменой переменной $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\operatorname{arctg}t;\ dx=\frac{2t}{1+t^2}$$

Если нам нужно взять интеграл от функции вида $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ (при $ab-cd\neq0$), то можно воспользоваться заменой переменной $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тогда

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d};\ x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n};\ dx=\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

$$x=2\operatorname{arctg}t;\ dx=\frac{2t}{1+t^2}$$

Если нам нужно взять интеграл от функции вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, то можно воспользоваться одной из подстановок Эйлера.
Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней, то нужно воспользоваться первой подстановкой Эйлера $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$. Тогда

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b};\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b};\ dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c несовпадающие вещественные корни, то есть $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то нужно воспользоваться второй подстановкой Эйлера $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$. Тогда

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a};\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t;\ dx=\frac{-2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

Теперь введём интеграл $K_\lambda=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}$, где $\lambda=1,2,\ldots$. Данный интеграл берётся рекуррентно по формуле

$$K_\lambda=\frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{(2\lambda-3}{2\lambda-2}K_{\lambda-1}$$

Причём

$$K_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

11.2 Решение задач

№ 4.1. Вычислите интегралы (все равенства ниже будут записаны с точностью до константы):

и) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

При замене переменной $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ получим

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1};\ dx = \frac{4at}{(1+t^2)^2}dt$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = 4a\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = 4a\int \frac{1}{1+t^2}dt - 4a\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt =$$

Второй интеграл вычисляется по формуле интеграла K_λ при $\lambda = 2$

$$= 4a\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - 4a\frac{t}{2(t^2+1)} - 2a\operatorname{arctg}t = 2a\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}(x-a)$$

й) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $t = \sqrt{x^2+a^2} + x$. Тогда

$$x = \frac{t^2-a^2}{2t};\ \sqrt{x^2+a^2} = \frac{t^2+a^2}{2t};\ dx = 2\frac{t^2+a^2}{(2t)^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2\int \frac{(2t)^3}{(t^2+a^2)^3}\frac{t^2+a^2}{(2t)^2}dt = \int \frac{4t}{(t^2+a^2)^2}dt = \int \frac{2}{(t^2+a^2)^2}d(t^2+a^2) =$$
$$= \frac{-2}{t^2+a^2} = \frac{-2}{x^2+a^2+2\sqrt{x^2+a^2}x+x^2+a^2} = \frac{-1}{x^2+a^2+\sqrt{x^2+a^2}x}$$

Заметим, что если к ответу прибавить константу $1/a^2$, то выражение упростится

$$\frac{-1}{x^2+a^2+\sqrt{x^2+a^2}x} + \frac{1}{a^2} = \frac{-a^2+x^2+a^2+\sqrt{x^2+a^2}x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

Онлайн-решатели чаще дают упрощённый ответ и используют для решения другие методы. По внешнему виду не очевидно, что ответы выше отличаются на константу. Однако, мы убедились, что это действительно так.

н) $\int x^5 e^{x^3}dx$

После небольшого преобразования выполним замену переменной $t = x^3$:

$$\int x^5 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int x^3 e^{x^3}d(x^3) = \frac{1}{3}\int te^t dt = \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t(t-1) = \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1)$$

о) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

При замене переменной $t = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ получим $dt = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ и $x = \operatorname{tg}^2 t$. Тогда

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = \int 2t \operatorname{tg} t (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt = \int \frac{2t \operatorname{tg} t}{\cos^2 t} dt = \int t d(\operatorname{tg}^2 t) =$$

$$= t \operatorname{tg}^2 t - \int \operatorname{tg}^2 t dt = t \operatorname{tg}^2 t - \left[\int \frac{1}{\cos^2 t} dt - \int \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} dt \right] = t \operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg} t + t =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

п) $\int e^x \cos x dx$

$$I = \int e^x \cos x dx = \int \cos x d(e^x) = e^x \cos x - \int e^x d(\cos x) = e^x \cos x + \int \sin x d(e^x) =$$

$$= e^x (\cos x + \sin x) - \int e^x d(\sin x) = e^x (\cos x + \sin x) - I$$

Выражаем I:

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

р) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} \int \ln x d(x^{3/2}) = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} d(\ln x) = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2} (\ln x - \frac{2}{3})$$

с) $\int x \ln \sqrt{x} dx$

$$\int x \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int \ln \sqrt{x} dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^2 \ln \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{1}{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln \sqrt{x} - \frac{1}{4} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \sqrt{x} - \frac{1}{8} x^2 = \frac{1}{2} x^2 (\ln \sqrt{x} - \frac{1}{4})$$

т) $\int \sin(\ln x) dx$

При замене переменной $t = \ln x$ получим $x = e^t$ и $dx = e^t dt$. Тогда

$$I = \int \sin(\ln x) dx = \int \sin t e^t dt = e^t \sin t - \int \cos t e^t dt = e^t (\sin t - \cos t) + \int \sin t e^t dt =$$

$$I = e^t (\sin t - \cos t) + I$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) = \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x)$$

у) $\int \ln \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) dx$

При замене переменной $t = \sqrt{x^2 - 1} - x$ получим $x = -\frac{t^2+1}{2t}$. Тогда

$$\int \ln \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) dx = \int \ln t d \left(-\frac{t^2 + 1}{2t} \right) = -\frac{t^2 + 1}{2t} \ln t - \int \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt =$$

$$= -\frac{t^2+1}{2t}\ln t + \frac{1}{2}\int dt + \int \frac{1}{2t^2}dt = -\frac{t^2+1}{2t}\ln t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t} =$$

$$= x\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) + \frac{t^2-1}{2t} = x\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) + \frac{x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}-1+x^2-1}{2(\sqrt{x^2-1}-x)} =$$

$$= x\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) + \frac{x^2-1-x\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1}-x)}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = x\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) + \sqrt{x^2-1}$$

ф) $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$

При замене переменной $t = \sqrt{x^2-1}+x$ получим $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Тогда

$$\int \ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)dx = \int \ln t\, d\left(\frac{t^2+1}{2t}\right) = \frac{t^2+1}{2t}\ln t - \int \frac{t^2+1}{2t^2}dt =$$

$$= \frac{t^2+1}{2t}\ln t - \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}dt = x\ln t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{1}{t} = x\ln t - \frac{t^2+1}{2t} =$$

$$= x\ln t - \frac{x^2+x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}{2(x+\sqrt{x^2-1})}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1}$$

х) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

При замене переменной $t = \operatorname{tg}(x/2)$ получим

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2(t^2+1)dt}{(2+2t^2+1-t^2)2t} =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)dt}{(t^2+3)t} = \frac{2}{3}\int \frac{tdt}{t^2+3} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln\left|t^2+3\right| + \frac{1}{3}\ln|t| =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

ц) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

При замене переменной $t = \operatorname{tg}(x/2)$ получим

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{4t-1+t^2+5+5t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{9}{5}\frac{\sqrt{5}}{3}\int \frac{d\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right]}{\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right]^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

№ 4.2. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{0}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

б) $\int_0^1 x(1-x^{10})dx$

$$\int_0^1 x(1-x^{10})dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^{11}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^{12}}{12}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

в) $\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1}$

При замене переменной $t=e^x$ получим $x=\ln t$. Тогда

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1} = \int_e^{e^2}\frac{dt}{(t-1)t} = \int_e^{e^2}\frac{dt}{t-1} - \int_e^{e^2}\frac{dt}{t} = (\ln|t-1|-\ln|t|)|_e^{e^2} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\bigg|_e^{e^2} =$$

$$= \ln\frac{e^2-1}{e^2} - \ln\frac{e-1}{e} = \ln\frac{(e-1)(e+1)e}{e^2(e-1)} = \ln\frac{e+1}{e} = \ln(e+1)-1$$

г) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \int_0^1 \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(x+1/2)d(x+1/2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left[(x+1/2)^2\right]}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x+1/2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\bigg|_0^1 - \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\bigg|_0^1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{9+3}{4} - \ln\frac{1+3}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 - \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right] = \ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

12 Вычисление интегралов. Часть 2

№ 4.2. Вычислите интегралы:

д) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

Воспользуемся второй подстановкой Эйлера:

$$t = \frac{\sqrt{-x^2+1}}{x-1};\ x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{-2t}{t^2+1};\ dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$$

Тогда

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int_{-1}^{-\sqrt{3}} \frac{(t^2+1)^3}{(-2t)^3}\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt = \int_{-1}^{-\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{-2t^2}dt = \int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{1}{2}dt + \int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{1}{2t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\bigg|_{-\sqrt{3}}^{-1} - \frac{1}{2t}\bigg|_{-\sqrt{3}}^{-1} = \frac{1}{2}\left[(-1+\sqrt{3}) - \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

е) $\int_1^e \ln x dx$

При замене переменной $t = \ln x$ получим $x = e^t$. Тогда

$$\int_1^e \ln x dx = \int_0^1 te^t dt = te^t\big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = (1e^1 - 0e^0) - e^t\big|_0^1 = e - (e-1) = 1$$

ё) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}}$

Воспользуемся второй подстановкой Эйлера:

$$t = \frac{\sqrt{-x^2-x}}{x+1};\ x = \frac{-t^2}{t^2+1}$$

$$\sqrt{-x^2-x} = \frac{t}{t^2+1};\ dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}} = \int \frac{t^2+1}{t}\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{-2}{(t^2+1)}dt = -2\operatorname{arctg} t = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-x}}{x+1}$$

ж) $\int_0^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

При замене переменной $t = x + \sqrt{1+x^2}$ получим:

$$x = \frac{t^2-1}{2t};\ \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t};\ dx = 2\frac{t^2+1}{4t^2}dt$$

Тогда (с учётом замены $p = \ln t$)

$$\int_0^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = 2\int_1^{2+\sqrt{5}} \ln t\frac{t^2+1}{4t^2}dt = \frac{1}{2}\int_1^{2+\sqrt{5}} \ln t dt + \frac{1}{2}\int_1^{2+\sqrt{5}} \ln t\frac{1}{t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left.(p-1)e^p\right|_0^{\ln(2+\sqrt{5})} - \frac{1}{2}\int_1^{2+\sqrt{5}} \ln t d\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left[(\ln(2+\sqrt{5})-1)e^{\ln(2+\sqrt{5})} - (0-1)e^0\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left.\frac{\ln t}{t}\right|_1^{2+\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})\ln(2+\sqrt{5}) - (2+\sqrt{5}) + 1 - \left.\frac{\ln t + 1}{t}\right|_1^{2+\sqrt{5}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})\ln(2+\sqrt{5}) - (2+\sqrt{5}) + 1 - \frac{\ln(2+\sqrt{5})+1}{2+\sqrt{5}} + \frac{\ln 0 + 1}{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})\ln(2+\sqrt{5}) - (2+\sqrt{5}) + 2 + (2-\sqrt{5})\ln(2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\ln(2+\sqrt{5}) - 2\sqrt{5} + 2\right] = 2\ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{5} + 1$$

з) $\int_0^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$

При замене переменной $t = \ln x$ получим $x = e^t$. Тогда

$$\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx = \int_0^1 \sin t dt = -\left.\cos t\right|_0^1 = 1 - \cos 1$$

и) $\int_0^\pi \cos^4 x dx$

$$\int_0^\pi \cos^4 x dx = \int_0^\pi \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\right]dx = \frac{3}{8}\int_0^\pi dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\pi \cos(2x)d(2x) + \frac{1}{32}\int_0^\pi \cos(4x)d(4x) = \frac{3\pi}{8} + \frac{\sin(2\pi)}{4} + \frac{\sin(4\pi)}{32} = \frac{3\pi}{8}$$

й) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}$

Применить универсальную замену $t = \operatorname{tg}(x/2)$ для определённого интеграла сходу не получится, так как в точке π функция $\operatorname{tg}(x/2)$ терпит разрыв. Однако мы найдём неопределённый интеграл на тех промежутках, где $\operatorname{tg}(x/2)$ непрерывна, т.е. на промежутках $[0,\pi)$ и $(\pi, 2\pi]$. Затем, пользуясь тем, что неопределённый интеграл определён с точностью до константы, сошьём первообразные на двух промежутках в непрерывную функцию, для которой будет применима формула Ньютона-Лейбница.

Выполним замену переменной $t = \operatorname{tg}(x/2)$ и получим:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Тогда на промежутках, где $\operatorname{tg}(x/2)$ непрерывна, получим

$$\int \frac{dx}{2-\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2-\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2-t+1} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] + C$$

Определим левое и правое предельные значения в точке $x = \pi$

$$\lim_{x\to\pi-0} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to\pi+0} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Таким образом, чтобы сшить первообразную в точке $x = \pi$, необходимо первообразную справа от этой точки приподнять на $C = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ Итоговая непрерывная первообразная запишется в виде:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right], \text{ при } x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \text{ при } x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \text{ при } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Теперь можно вычислить определённый интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x} = F(2\pi) - F(0) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{0}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

к) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^2+x+1)(x-1)}$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^2+x+1)(x-1)} = -\frac{1}{3}\int_0^{1/2} \frac{(x+2)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{3}\int_0^{1/2} \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|x-1|\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right) d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int_0^{1/2} \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right|\Bigg|_0^{1/2} - \frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{1/2} \frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{7}{4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{1/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{7}{4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = -\frac{\ln 7}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

л) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3-8}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3-8} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{12}\left[\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \int_{-1}^{1} \frac{(x+4)dx}{x^2+2x+4}\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\ln|x-2|\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+3} - 3\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[0 - \ln 3 - \frac{1}{2}\ln\left[(x+2)^2+3\right]\Big|_{-1}^{1} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\int_{-1}^{1}\frac{d(x/\sqrt{3})}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[-\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 7 + \frac{1}{2}\ln 3 - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^{1}\right] = -\frac{\ln 21}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$$

м) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Воспользуемся второй подстановкой Эйлера:

$$t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1};\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1};\ dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt$$

Кроме того, выпишем значения интеграла $K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+1)^\lambda}$ для $\lambda = 1, 2, 3$:

$$K_1 = \operatorname{arctg} t$$

$$K_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$$

$$K_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]$$

Тогда

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_1^0 \frac{2t}{t^2+1}\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt = 8\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^3}dt =$$

$$= 8\left[\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} - \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3}dt\right] = 8\left[K_2 - K_3\right]\Big|_0^1 =$$

$$= 8\left[\left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right] - \frac{t}{4(t^2+1)^2} - \frac{3}{4}\left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]\right]\Big|_0^1 =$$

$$= 2\left[-\frac{t}{(t^2+1)^2} + \left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]\right]\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} t\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

н) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $t = \sqrt{x^2-x+1} + x$. Тогда

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1};\ \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-t+1}{2t-1};\ dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\frac{2(t^2-t+1)dt}{(2t-1)^2} = \int \frac{2dt}{2t-1} = \ln|2t-1| =$$

$$= \ln|2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1|$$

о) $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x dx$

Выполним замену переменной $t=\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^5 x dx = -\int_0^{\pi/2}\sin^4 x d(\cos x) = -\int_1^0 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (t^4-2t^2+1)dt =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1=\frac{8}{15}$$

п) $\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cos 3x dx$

Найдём первообразную:

$$I=\int \cos 3x e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x d(e^{2x}) = \frac{1}{2}\left[\cos 3x e^{2x} - \int e^{2x}d(\cos 3x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 3x e^{2x}+\frac{3}{2}\int \sin 3x d(e^{2x})\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 3x e^{2x}+\frac{3}{2}\left(\sin 3x e^{2x} - 3\int \cos 3x e^{2x}dx\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x\right)-\frac{9}{4}I$$

Тогда

$$I(x)=\frac{2}{13}e^{2x}\left(\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x\right)$$

Посчитаем значение определённого интеграла:

$$I(\pi/6)-I(0) = \frac{2}{13}e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{13}e^0\left(\cos 0+\frac{3}{2}\sin 0\right) =$$

$$= \frac{2}{13}\left[\frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}}-1\right]$$

р) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\sin^2 x dx$

Выполним замену переменной $t=\sin x$:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin^2 x d(\sin x) = \int_0^1 (1-t^2)t^2 dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 t^4 dt = \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{15}$$

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $t=\sqrt{x^2+4x+3}+x$. Тогда

$$x=\frac{t^2-3}{2t+4};\ \sqrt{x^2+4x+3}=\frac{t^2+4t+3}{2t+4};\ dx = 2\frac{t^2+4t+3}{(2t+4)^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{2t+4}{t^2+4t+3}\frac{2(t^2+4t+3)}{(2t+4)^2}dt = \int \frac{d(2t+4)}{(2t+4)} =$$

$$= \ln|t+2| + \ln 2 = \ln|\sqrt{x^2+4x+3}+x+2|$$

т) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $t = \sqrt{x^2+1}+x$. Тогда

$$x = \frac{t^2-1}{2t};\ \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t};\ dx = \frac{2(t^2+1)}{4t^2}dt$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{2}-1} \frac{2t}{t^2-1}\frac{2t}{t^2+1}\frac{2(t^2+1)}{4t^2}dt = \int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{2}-1} \frac{2dt}{t^2-1} =$$

$$= -2\,\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{2}-1} = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Bigg|_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{2}-1} = \ln\left|\frac{1-(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)}\right| - \ln\left|\frac{1-(\sqrt{5}-2)}{1+(\sqrt{5}-2)}\right| =$$

$$= \ln\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \ln\frac{3-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \ln\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1)}{3-\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

Последний переход записан без доказательства, однако можно проверить, что равенство выполняется. Стоит отметить, что первообразная в зависимости от способа решения может принять совершенно другой вид, но если решение было верным, можно показать, что две первообразные будут отличаться друг от друга лишь на константу.

у) $\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

Заменим переменную $t = \operatorname{tg} 2x$ и получим:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Тогда

$$\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \int_0^{\pi/8} \frac{8dx}{\cos 4x - 4\cos 2x + 3 + \cos 4x + 4\cos 2x + 3} =$$

$$= \int_0^{\pi/8} \frac{d(4x)}{\cos 4x+3} = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{1-t^2+3+3t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{d\left[\frac{t}{\sqrt{2}}\right]}{\left[\frac{t}{\sqrt{2}}\right]^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

№ 4.7. Вычислите производные:

а) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^2 dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^2 dt = \sin x^2$$

б) $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{d}{dx}\text{const} = 0$$

в) $\frac{d}{dx}\int_x^1 \arcsin\sqrt{t}dt$

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \arcsin\sqrt{t}dt = -\frac{d}{dx}\int_1^x \arcsin\sqrt{t}dt = -\arcsin\sqrt{x}$$

г) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$
Введём замену $p = x^2$. Тогда $2xdx = dp$ и $\frac{d}{dx} = 2x\frac{d}{dp}$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt = 2x\frac{d}{dp}\int_0^p \sqrt{1+t^2}dt = 2x\sqrt{1+p^2} = 2x\sqrt{1+x^4}$$

д) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt$
Введём замену $p = x^2$. Тогда $2xdx = dp$ и $\frac{d}{dx} = 2x\frac{d}{dp}$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt = 2x\frac{d}{dp}\int_0^p \ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt =$$

$$= 2x\ln\left(\frac{2p^2}{1+\operatorname{arctg}^2 p+\sin^4 p}\right) = 2x\ln\left(\frac{2x^4}{1+\operatorname{arctg}^2 x^2+\sin^4 x^2}\right)$$

е) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$
Введём замены $r = x^2$ и $p = x^3$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{c} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{d}{dx}\int_{c}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= 3x^2\frac{d}{dp}\int_c^p \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - 2x\frac{d}{dr}\int_c^r \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 3x^2\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - 2x\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} =$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

ё) $\frac{d}{dx}\int_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}dt$
Введём замены $r = \operatorname{arctg} x$ и $p = \cos x$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\int_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}dt = \frac{d}{dx}\int_{\operatorname{arctg} x}^{c} e^{-t^2}dt + \frac{d}{dx}\int_{c}^{\cos x} e^{-t^2}dt =$$

$$= -\sin x\frac{d}{dp}\int_c^p e^{-t^2}dt - \frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dr}\int_c^r e^{-t^2}dt = -\sin x e^{-p^2} - \frac{1}{1+x^2}e^{-r^2} =$$

$$= -\sin x e^{-\cos^2 x} - \frac{1}{1+x^2}e^{-\operatorname{arctg}^2 x}$$

13 Непрерывные и дифференцируемы функции

13.1 Полезные формулы для вычисления производных высших порядков

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента, то внутри сегмента $[a,b]$ найдётся точка ξ такая, что справедлива формула

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Правило Лопиталя. Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной выше окрестности точки a. Тогда, если существует (конечное или бесконечное) предельное значение

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует и предельное значение $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка $n+1$. Пусть, далее, x — произвольное значение аргумента из указанной окрестности, p — произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдётся точка ξ такая, что справедлива следующая формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p}f^{n+1}(\xi)$$

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ можно переписать в форме Пеано, т.е. $R_{n+1}(x)=o[(x-a)^n]$. Если в формуле Тейлора положить $a=0$, получится формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

13.2 Решение задач

№ 4.1. Найдите точку c в формуле конечных приращений Лагранжа на сегменте $[0,2]$ для функции $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-x^2), \text{ при } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x}, \text{ при } x \in [1,2] \end{cases}$

Функция непрерывна на сегменте $[0,2]$ и дифференцируема на нём (нетрудно проверить). Поэтому формула Лагранжа применима к данной функции

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3-0^2)}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, \text{ при } x \in [0,1] \\ -\frac{1}{x^2}, \text{ при } x \in [1,2] \end{cases}$$

При $x = \frac{1}{2}$ получим

$$f'(c) = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, точка $c = \frac{1}{2}$ является внутренней точкой отрезка $[0,2]$ и удовлетворяет формуле Лагранжа.

№ 4.2. Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

а) $\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x \ln a - a x^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a = a^a(\ln a - 1)$$

б) $\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a}$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\exp(x \ln x))'}{1} = \lim_{x\to a}[\exp(x\ln x)(\ln x + 1)] = a^a(\ln a + 1)$$

в) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1$$

г) $\lim_{x\to \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} 2x$

$$\lim_{x\to \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} 2x = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos^2 2x}{2} = \frac{\cos^2 \pi}{2} = \frac{1}{2}$$

д) $\lim_{x\to +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)}$

$$\lim_{x\to +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x\to +0} \frac{\sin \beta x \cos \alpha x}{\sin \alpha x \cos \beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x\to +0} \frac{\sin(\alpha+\beta)x - \sin(\alpha-\beta)x}{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} - 2\frac{\alpha}{\beta} \lim_{x\to +0} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x\to+0} \frac{(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha\cos\alpha x\cos\beta x - \beta\sin\beta x\sin\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{(\alpha-\beta)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{-\alpha+\beta}{\beta} = 1$$

№ 4.3. Запишите разложение функции $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом $o(x^n)$:

а) $f(x) = \cos x$

$$\cos^{(n)}(x)\big|_{x=0} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\Big|_{x=0} = \cos\frac{\pi}{2}n = \begin{cases} 0,\ n - \text{нечётное} \\ (-1)^{n/2},\ n - \text{чётное} \end{cases}$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ для чётного } n$$

б) $f(x) = e^x$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

в) $f(x) = e^{-x}$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + o(x^n)$$

г) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=0} = \left((1+x)^{-1}\right)^{(n)}\Big|_{x=0} = (-1)(-2)\dots(-1-n+1)(1+x)^{-1-n}\big|_{x=0} =$$
$$= (-1)^n n!$$
$$f(x) = 1 - 1!\frac{x}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!} - 3!\frac{x^3}{3!} + \dots + n!\frac{(-1)^n x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

д) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=0} = (-1)(-2)\dots(-1-n+1)(1-x)^{-1-n}(-1)^n\big|_{x=0} = n!$$
$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

е) $f(x) = -\ln(1-x)$

$$[-\ln(1-x)]' = \frac{1}{1-x}$$

$$(-\ln(1-x))^{(n)}\big|_{x=0} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{x=0} = (n-1)!$$

$$f(x) = 0!\frac{x}{1!} + 1!\frac{x^2}{2!} + 2!\frac{x^3}{3!} + \dots + (n-1)!\frac{(-1)^n x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

ж) $f(x) = \ln(1+x)$

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$$

$$(\ln(1+x))^{(n)}\Big|_{x=0} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f(x) = 0!\frac{x}{1!} - 1!\frac{x^2}{2!} + 2!\frac{x^3}{3!} + \dots + (n-1)!\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$$

з) $f(x) = \sin x$

$$\sin^{(n)}(x)\big|_{x=0} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\Big|_{x=0} = \sin\frac{\pi}{2}n = \begin{cases} 0,\ n - \text{чётное} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}},\ n - \text{нечётное} \end{cases}$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{\frac{n+3}{2}}\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ для нечётного } n$$

№ 4.4. Разложите функцию $f(x)$ по формуле Маклорена до члена порядка x^n:

а) $f(x) = \sin(\sin x)$, $n = 3$

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} + o\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right] =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

б) $f(x) = \ln\cos x$, $n = 4$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2}{2} + o\left[\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^4}{8} + o(x^4) + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

в) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $n = 3$

$$e^{2x-x^2}\Big|_{x=0} = 1$$

$$\left[e^{2x-x^2}\right]'\Big|_{x=0} = e^{2x-x^2}(2-2x)\Big|_{x=0} = 2$$

$$\left[e^{2x-x^2}\right]''\Big|_{x=0} = \left(2e^{2x-x^2}(2-2x) - 2e^{2x-x^2} - 2xe^{2x-x^2}(2-2x)\right)\Big|_{x=0} = 4-2=2$$

$$\left[e^{2x-x^2}\right]'''\Big|_{x=0} = 2\left(e^{2x-x^2}(2-2x)\right)'\Big|_{x=0} - 2\left(e^{2x-x^2}\right)'\Big|_{x=0} - 4\left(e^{2x-x^2}(x-x^2)\right)'\Big|_{x=0} =$$

$$= 2\cdot 2 - 2\cdot 2 - 4\left[e^{2x-x^2}(2-2x)(x-x^2) + e^{2x-x^2}(1-2x))\right]\Big|_{x=0} = -4$$

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

г) $f(x) = \ln\frac{\sin x}{x}$, $n = 4$

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) - \frac{\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2}{2} + o\left[\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) - \frac{x^4}{2\cdot 36} + o(x^4) + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$$

д) $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$, $n = 2$

$$\left((a^m+x)^{1/m}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{m}(a^m+x)^{\frac{1}{m}-1}\Big|_{x=0} = \frac{1}{m}(a^m)^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m}a^{1-m}$$

$$\left((a^m+x)^{1/m}\right)''\Big|_{x=0} = \frac{1-m}{m^2}(a^m+x)^{\frac{1}{m}-2}\Big|_{x=0} = \frac{1-m}{m^2}(a^m)^{\frac{1}{m}-2} = \frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}$$

$$\sqrt[m]{a^m+x} = a + \frac{1}{m}a^{1-m}x + \frac{1-m}{2m^2}a^{1-2m}x^2 + o(x^2)$$

№ 4.5. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + xe^{-x^2/2}}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x + e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}}{12x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^{-x^2/2} - 2xe^{-x^2/2} + x^3e^{-x^2/2}}{24x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3e^{-x^2/2} + 3x^2e^{-x^2/2} + 3x^2e^{-x^2/2} - x^4e^{-x^2/2}}{24} = \frac{1-3}{24} = -\frac{1}{12}$$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3) - 2x - 2\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2 + o(1)}{1 + o(1)} = -2$$

в) $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

Сделаем замену переменной $t = \frac{1}{x}$:

$$\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]'' = \left[\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right]' = -\left[\frac{1}{\sqrt{x^4+x^3}}\right]' = \frac{4x^3+3x^2}{2(x^4+x^3)^{3/2}} = \frac{4+\frac{3}{x}}{2(x^4+x^3)^{3/2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2\right) =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) + 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) - 2\right) =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t^2}\left(-\frac{t^2}{4} + o(t^2)\right) = -\frac{1}{4}$$

г) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

д) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^2 + o(x^2)} = 0$$

14 Исследование графиков функций

14.1 Полезные формулы для вычисления производных высших порядков

Говорят, что функция $f(x)$ **возрастает (убывает)** в точке c, если найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой $f(x) > f(c)$ при $x > c$ и $f(x) < f(c)$ при $x < c$ ($f(x) < f(c)$ при $x > c$ и $f(x) > f(c)$ при $x < c$).

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в точке c.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет c **локальный максимум (минимум)**, если найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой значение $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений этой функции.

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть точка c является точкой возможного экстремума функции $f(x)$, и пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c. Тогда, если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от неё, то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (имнимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке c нет.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ имеет в данной точке c возможного экстремума конечную вторую производную. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке c максимум, если $f''(c) < 0$, и минимум, если $f''(c) > 0$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c, и непрерывна в точке c. Тогда, если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительная (отрицательная) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке c нет.

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость, направленную вниз (вверх)**, если график этой функции в пределах указанного интервала лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную вторую производную и если эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Точка $M(c, f(c))$ графика функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** этого графика, если существует такая окрестность точки c оси абсцисс, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от c имеет разные направления выпуклости.

Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке c вторую производную и график этой функции имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$, то $f''(c) = 0$.

Первое достаточное условие перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки c и $f''(c) = 0$. Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от c, то график этой функции имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Второе достаточное условие перегиба. Если функция $y = f(x)$ в точке c конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$, то график этой функции имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

равно $+\infty$ или $-\infty$.

Говорят, что прямая $y = kx+b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b.$$

14.2 Решение задач

№ 4.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции, точки локального экстремума, промежутки сохранения направления выпуклости, точки перегиба графика функции $f(x)$, а также нарисуйте эскиз графика функции $f(x)$

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$

Функция задана, непрерывна и дифференцируема бесконечное число раз на всей числовой прямой.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x; \; f''(x) = 6x - 12; \; f'''(x) = 6$$

Если приравнять к нулю первую производную, то получим точки возможного экстремума:

$$3x^2 - 12x = 0 \implies x_1 = 0, \, x_2 = 4$$

Вторая производная в точке $x_1 = 0$ меньше нуля. Следовательно, в точке $x_1 = 0$ функция имеет максимум. Вторая производная в точке $x_2 = 4$ больше нуля. Следовательно, в точке $x_2 = 4$ функция имеет минимум.
При $x \to +\infty$ получим $f(x) \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ получим $f(x) \to -\infty$. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает до точки $x_1 = 0$, в которой имеет свой максимум. Затем убывает до точки минимума $x_2 = 4$, после чего снова начинает возрастать.
Если приравнять к нулю вторую производную, то получится точка $x_3 = 2$. Это точка возможного перегиба. Так как третья производная нулю не равна, то точка $x_3 = 2$ действительно является точкой перегиба. При этом при $x < 2$ функция выпукла вверх, а при $x > 2$ — вниз.
б) $f(x) = x \ln x$
Функция определена при $x > 0$. Она непрерывна и дифференцируема на этом промежутке. Найдём первые две производные

$$f'(x) = \ln x + 1;\ f''(x) = \frac{1}{x}$$

Первая производная обращается в ноль в точке $x_1 = \frac{1}{e}$. Вторая производная в этой точке равна e и больше нуля. Следовательно, в точке $x_1 = \frac{1}{e}$ функция имеет минимум.
Рассмотрим предельные случаи:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+0} (-x) = 0;\ \lim_{x\to +\infty} x \ln x = +\infty$$

Таким образом, функция убывает на промежутке $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, в точке $x_1 = \frac{1}{e}$ имеет минимум, затем возрастает на оставшемся промежутке $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Так как вторая производная нулю не равна, то точек перегиба нет. Направление выпуклости функции — вниз.
в) $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$
Функция определена при $x \geq 0$. Она непрерывна и дифференцируема на этом промежутке. Найдём первые две производные

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} e^{-x};\ f''(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} - \frac{e^{-x}}{4x^{3/2}} + \sqrt{x} e^{-x}$$

Первая производная обращается в ноль в точке $x_1 = \frac{1}{2}$. Вторая производная в этой точке меньше нуля. Следовательно, в точке $x_1 = \frac{1}{2}$ функция имеет максимум.
Рассмотрим предельные случаи:

$$f(0) = \sqrt{0} e^{-0} = 0;\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} = 0$$

Таким образом, функция возрастает на промежутке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, в точке $x_1 = \frac{1}{2}$ имеет максимум, затем убывает на оставшемся промежутке $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Вторая производная обращается в ноль при $x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. И в этой точке производная меняет знак, следовательно, это точка перегиба. Причём на промежутке $\left(0, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ она имеет направление выпуклости вверх, а на промежутке $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ — вниз.

г) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Функция определена на всей числовой прямой кроме точек $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Она непрерывна и дифференцируема на этих промежутках. Найдём первые две производные

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x)^2};\ f''(x) = \frac{2x(1-x)^2 + (1+x^2)2(1-x)}{(1-x)^4} = 2\frac{1-x^2}{(1-x)^4}$$

Первая производная в ноль не обращается, следовательно, экстремумов нет. Более того, первая производная положительна на всей области определения, следовательно, функция всюду возрастает. Вторая производная не обращается в ноль на своей области определения.

Рассмотрим предельные случаи:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1/x}{1/x^2-1} = 0;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1/x}{1/x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{2\cdot(0-0)} = +\infty;\ \lim_{x\to-1+0} \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{2\cdot(0+0)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{(0+0)\cdot 2} = +\infty;\ \lim_{x\to1+0} \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{(0-0)\cdot 2} = -\infty$$

Функция выпукла вниз на промежутке $(-1, 1)$, на остальной области определения она выпукла вверх. На всей области определения функция возрастает, экстремумов функция не имеет, но имеет две вертикальные асимптоты в точках $x = \pm1$. Точек перегиба функция не имеет, так как точки $x = \pm1$ не принадлежат графику функции.

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t: $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$. При этом мы предположим, что функции $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют нужное число производных по переменной t в рассматриваемой области изменения этой переменной. Кроме того, мы предположим, что функция $x = \phi(t)$ в окрестности рассматриваемой точки имеет обратную функцию $t = \phi^{-1}(x)$. Тогда производная функции $y = f(x)$ по переменной x запишется в виде

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

№ 4.2. Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x)$:

а) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

Найдём пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\operatorname{arctg}x - \frac{\pi}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x-\pi/2}{1/x} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{1/(1+x^2)}{1/x^2} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x^2+1} = -1$$

Из существования пределов следует существование наклонной асимптоты:

$$y(x) = kx+b \implies y(x) = \frac{\pi}{2}x - 1$$

б) $f(x) = x\ln\frac{x+1}{x}$
Найдём пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+1/x) = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = 1$$

Из существования пределов следует существование наклонной асимптоты:

$$y(x) = kx+b \implies y(x) = 1$$

в) $f(x) = x^2\ln\frac{x+1}{x}$
Найдём пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\frac{x+1}{x}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(x\ln\frac{x+1}{x}-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln\frac{x+1}{x}-1}{1/x} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}+x\frac{x}{x+1}\frac{x-(x+1)}{x^2}}{1/x^2} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}+\frac{-1}{x+1}}{1/x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}{1/x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-(x+1)}{x(x+1)^2}}{1/x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Из существования пределов следует существование наклонной асимптоты:

$$y(x) = kx+b \implies y(x) = x - \frac{1}{2}$$

г) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$
Найдём пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+1/x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}$$

Из существования пределов следует существование наклонной асимптоты:

$$y(x)=kx+b \implies y(x)=x+\frac{1}{2}$$

д) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$
Найдём пределы. Так как $\sin x$ — ограниченная функция, то

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Из существования пределов следует существование наклонной асимптоты:

$$y(x)=kx+b \implies y(x)=0$$

№ 4.3. Для функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,\pi]$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции в точке, соответствующей:
а) $t=\pi/4$

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}(t)$$

$$k=y'_x(t=\pi/4)=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}(\pi/4)=-\frac{b}{a}$$

Найдём частные значения функции в точке $t=\pi/4$:

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}};\ y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

Уравнение касательной:

$$y(x)=-\frac{b}{a}x+p$$

Найдём p:

$$y_0=-\frac{b}{a}x_0+p \implies p=\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}b$$

Тогда получим

$$y(x)=-\frac{b}{a}x+\sqrt{2}b$$

Уравнение нормали:

$$y(x)=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0 \implies y(x)=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+\frac{b}{\sqrt{2}}$$

б) $t = \pi/2$

Найдём частные значения функции в точке $t = \pi/2$:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{2} = 0;\ y_0 = b\sin\frac{\pi}{2} = b$$

$$k = y'_x(t = \pi/2) = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$$

Запишем уравнение касательной

$$y(x) = p \implies y = b$$

и уравнение нормали

$$x = 0$$

№ 4.4. Для функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции при:

а) $t = \pi/4$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$k = y'_x(t = \pi/4) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{2}+1$$

Найдём частные значения функции в точке $t = \pi/4$:

$$x_0 = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4};\ y_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Уравнение касательной:

$$y(x) = (\sqrt{2}+1)x + p$$

Найдём p:

$$y_0 = (\sqrt{2}+1)x_0 + p \implies p = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}+1) =$$

$$= \frac{4-2\sqrt{2}+\pi(\sqrt{2}+1)-4-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-4\sqrt{2}+\pi(\sqrt{2}+1)}{4}$$

Тогда получим

$$y(x) = (\sqrt{2}+1)x + \frac{-4\sqrt{2}+\pi(\sqrt{2}+1)}{4}$$

Уравнение нормали:

$$y(x) = -\frac{1}{k}(x-x_0) + y_0 \implies y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}\left(x - \frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

б) $t = \pi$

Найдём частные значения функции в точке $t = \pi$:

$$x_0 = \pi - \sin\pi = \pi;\ y_0 = 1 - \cos\pi = 2$$

$$k = y'_x(t = \pi) = \frac{\sin\pi}{1 - \cos\pi} = \frac{0}{2} = 0$$

Запишем уравнение касательной и уравнение нормали

$$y = 2;\ x = \pi$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ