Занятие 3. Краевые задачи и уравнения в частных производных

В данном видеоразборе будут разобраны следующие темы: методы построения функции Грина, решение задачи Штурма-Лиувилля и решение уравнений в частных производных 1го порядка. Знаю, вам не терпится приступить – так давайте начинать!

Оглавление

1. Функция Грина

В данном разделе познакомимся, во-первых, с понятием краевой задачи, а во-вторых, выясним, зачем необходимо строить функции Грина для этих задач. Итак, краевой задачей мы будем называть задачу вида:

$$\begin{cases} L[y] = f(x), \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

где $L[y]$ - некий дифференциальный оператор 2го порядка. Нас будут интересовать операторы вида $L[y] = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$. Однако нас не будут интересовать сложные операторы – мы будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами (максимум – уравнения Эйлера). Неоднородность - $f(x)$ - нас не будет особо интересовать, так как нашей целью будет построение <u>функции Грина.</u> Что это за функция? По сути, знание этой функции позволит записать решение краевой задачи для любой неоднородности в следующем интегральном виде:

$$y(x) = \int\limits_a^b f(s)G(x,s)ds$$

где $G(x,s)$ – функция Грина. Таким образом, зная данную функцию, мы можем записать решение задачи для любой неоднородности! (удобно, не правда ли?). С физической точки зрения такая постановка задачи – найти решение краевой задачи для любой неоднородности – весьма востребована: если представить, что дифференциальный оператор описывает эволюцию нашей физической системы (например, закрепленная с двух сторон струна, совершающая колебания под действием внешней силы), то правая часть $f(x)$ – это наше воздействие на систему. И тогда такое универсальное с точки зрения неоднородности решение позволит нам ответить на вопрос – как нам необходимо воздействовать на систему, чтобы добиться желаемого отклика.
Однако есть нюанс – такая функция существует только для таких задач, решение которых при $f(x) \equiv 0$ тривиально, то есть $f(x) \equiv 0 \to y(x) \equiv 0$. Сразу отметим, что это условие всегда стоит проверять перед решением задачи! Нам же предстоит познакомиться с методом построения функции Грина. По определению, функция Грина – это функция двух переменных $G(x,s)$, определенная в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{cases} \alpha_1 G(a,s) + \beta_1 G_x(a,s) = 0 \\ \alpha_2 G(b,s) + \beta_2 G_x(b,s) = 0 \\ G(s,s)|_{x=s+0} = G(s,s)|_{x=s-0} \\ G_x(s,s)|_{x=s+0} - G_x(s,s)|_{x=s-0} = \dfrac{1}{a_2(s)} \end{cases} \quad (1)$$

То есть функция Грина удовлетворяет граничным условиям по переменной x, а также непрерывна при $x = s$ и терпит разрыв производной по переменной x при $x = s$. Ещё раз напоминаем, что $a_2(x)$ – коэффициент при второй производной. Алгоритм нахождения функции Грина может быть следующим:

1) Находим общее решение однородного уравнения $L[y] = 0$ в виде $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x), y_2(x)$ – любые независимые решения уравнения.
2) Ищем функцию Грина в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x) + b(s)y_2(x), \quad a < x < s \\ c(s)y_1(x) + d(s)y_2(x), \quad s < x < b \end{cases}$$

3) Чтобы найти коэффициенты a, b, c, d подставляем вид функции Грина в систему (1). Давайте попробуем разобраться на примере:

№79. $\begin{cases} \mathbf{y'' = f(x), \quad 0 < x < l} \\ \mathbf{y(0) = y(l) = 0} \end{cases}$

Давайте убедимся, что функция Грина действительно существует – попробуем решить задачу при $f(x) \equiv 0$.

$$\begin{cases} y'' = 0, \quad 0 < x < l \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения - $y(x) = C_1 x + C_2$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = C_2 = 0; y(l) = C_1 l + C_2 = 0 \to C_1 = C_2 = 0$$

То есть $y(x) \equiv 0$, а значит, функция Грина существует. (Конечно, странно было бы ожидать другого от задания с формулировкой «Построить функцию Грина», но тем не менее, такую процедуру стоит проводить). Функция Грина ищется в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)x + b(s), \quad 0 < x < s \\ c(s)x + d(s), \quad s < x < l \end{cases}$$

В данном случае $y_1(x) = x, \; y_2(x) = 1$. Для определения коэффициентов необходимо решить систему (ещё раз взгляните на определение функции Грина!):

$$\begin{cases} b = 0 \\ cl + d = 0 \\ as + b = cs + d \\ c - a = 1 \end{cases} \to \begin{cases} b = 0 \\ d = -s \\ c = \dfrac{s}{l} \\ a = \dfrac{s-l}{l} \end{cases}$$

Заметим, что у нас при таком построении будет система из 4 уравнений для определения 4 функций - $a(s), b(s), c(s), d(s)$. Подставим эти значения в вид функции Грина:

$$G(x,s) = \frac{1}{l}\begin{cases} (s-l)x, \quad 0 < x < s \\ (x-l)s, \quad s < x < l \end{cases}$$

Обратите внимание – мы получили симметричную функцию (обычно так и бывает).

Ответ: $G(x,s) = \frac{1}{l}\begin{cases} (s-l)x, \quad 0 < x < s \\ (x-l)s, \quad s < x < l \end{cases}$

Замечание: решение для произвольной неоднородности $f(x)$ будет записываться в виде:

$$y(x) = \int_0^l f(s)G(x,s)ds = \frac{x-l}{l}\int_0^x f(s)sds + \frac{x}{l}\int_x^l f(s)(s-l)ds$$

Не перепутайте, что в первом интеграле берется вторая строчка из функции Грина.
Давайте тренироваться ещё!

№81. $\begin{cases} \mathbf{y'' = f(x), \quad 0 < x < l} \\ \mathbf{y(0) = y'(l) = 0} \end{cases}$

Убедитесь самостоятельно, что функция Грина существует. Функцию Грина ищем в виде (ведь левая часть уравнения такая же, как и в предыдущей задаче):

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)x + b(s), \quad 0 < x < s \\ c(s)x + d(s), \quad s < x < l \end{cases}$$

Для определения коэффициентов необходимо решить систему:

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ as + b = cs + d \\ c - a = 1 \end{cases} \to \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = -1 \\ d = -s \end{cases}$$

И записываем ответ!

Ответ: $G(x, s) = -\begin{cases} x, & 0 < x < s \\ s, & s < x < l \end{cases}$

Замечание: решение для произвольной неоднородности $f(x)$ будет записываться в виде:

$$y(x) = \int_0^l f(s)G(x, s)ds = -\int_0^x sf(s)ds - x\int_x^l f(s)ds$$

№82. $\begin{cases} \mathbf{y'' + y = 1, \ \ 0 < x < 1} \\ \mathbf{y(0) = 1; \ y(1) = -1} \end{cases}$

Сразу, что может смутить – ненулевая правая часть в граничных условиях. Чтобы строить функцию Грина (или проверить, что она существует) нужно, чтобы граничные условия были 0. Давайте попробуем их занулить введением функции $z(x) = y(x) - 1 + 2x \to z'' = y''$:

$$\begin{cases} z'' + z = 2x, \ \ 0 < x < 1 \\ z(0) = 0; \ z(1) = 0 \end{cases}$$

Теперь легко убедиться, что решение однородной задачи – только тривиальное. Общее решение однородного уравнения: $z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функцию Грина ищем в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)\cos x + b(s)\sin x, & 0 < x < s \\ c(s)\cos x + d(s)\sin x, & s < x < 1 \end{cases}$$

Запишем систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c\cos 1 + d\sin 1 = 0 \\ a\cos s + b\sin s = c\cos s + d\sin s \\ -a\sin s + b\cos s + c\sin s - d\cos s = -1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ b = -\cos s + \dfrac{\sin s}{\tan 1} \\ c = -\sin s \\ d = \dfrac{\sin s}{\tan 1} \end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin s}{\tan 1} - \cos s\right)\sin x, & 0 < x < s \\ \left(\dfrac{\sin x}{\tan 1} - \cos x\right)\sin s, & s < x < 1 \end{cases}$$

И запишем решение для нашей неоднородности ($f(x) = 2x$):

$$y(x) = z(x) + 1 - 2x = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds + 1 - 2x$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\tan 1} - \cos x\right)\int_0^x 2s\sin s\,ds - \sin x\int_x^1 2s\left(\cos s - \frac{\sin s}{\tan 1}\right)ds + 1 - 2x$$

$$= 2\left(\frac{\sin x}{\tan 1} - \cos x\right)(\sin x - x\cos x) + \frac{2\sin x}{\sin 1}(\sin(1 - x) + x\cos(1 - x) - 1)$$

$$+ 1 - 2x = 1 - \frac{2\sin x}{\sin 1}$$

№83 решается полностью аналогично. Замечание: в задании было указано о необходимости построения функции Грина – без этого мы могли бы просто выписать общее решение уравнения и вычислить коэффициенты из граничных условий, так как в данной задаче это было бы быстрее (зато есть способ самопроверки!).

№84 решается абсолютно аналогично тому, как разобран №85:

№85. $\begin{cases} \mathbf{y'' + y' = f(x)}, & \mathbf{0 < x < 1} \\ \mathbf{y(0) = 0;\ y'(1) = 0} \end{cases}$

Убедитесь самостоятельно, что решение однородной задачи – только тривиальное. Общее решение однородного уравнения $y(x) = C_1 + C_2e^{-x}$. Строим функцию Грина в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s) + b(s)e^{-x}, & 0 < x < s \\ c(s) + d(s)e^{-x}, & s < x < 1 \end{cases}$$

Запишем систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c - de^{-1} = 0 \\ a + be^{-s} = c + de^{-s} \\ -de^{-s} + be^{-s} = 1 \end{cases}$$

Очевидно, что арифметически такую систему довольно сложно искать. Поэтому в таких случаях (и в любом другом) систему можно попробовать сразу упростить. Для этого, используя решение однородной задачи $y(x) = C_1 + C_2e^{-x}$ найдём частные решения уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, чтобы они удовлетворяли первому и второму граничному условиям соответственно и не удовлетворяли другому! Иначе они могут получиться линейно зависимыми:

$$y_1(0) = C_1 + C_2e^0 = 0 \to C_1 = -C_2 \to y_1(x) = C_1(1 - e^{-x})$$
$$y_2'(1) = -C_2e^{-1} = 0 \to C_2 = 0 \to y_2(x) = C_1$$

Итак, мы получили 2 линейно независимых решения однородного уравнения. Причем первое решение удовлетворяет левому граничному условию, второе – правому. Нас интересует частные решения, а значит значения констант можем выбрать произвольным образом – например, равными 1. Теперь, зная данные функции, функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), & 0 < x < s \\ b(s)y_2(x), & s < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} a(s)(1 - e^{-x}), & 0 < x < s \\ b(s), & s < x < 1 \end{cases}$$

Заметим, что при таком построении функция Грина уже удовлетворяет граничным условиям. Функции $a(s)$ и $b(s)$ найдем из непрерывности функции Грина и из разрыва первой производной функции Грина, то есть оставшихся условий из определения функции Грина. Заметим, что у нас 2 условия для определения двух функций:

$$\begin{cases} G(s,s)|_{x=s+0} = G(s,s)|_{x=s-0} \\ G_x(s,s)|_{x=s+0} - G_x(s,s)|_{x=s-0} = \dfrac{1}{a_2(s)} \end{cases}$$

По факту, мы просто произвели вычисления коэффициентов в функции Грина в два этапа. Цель такого приёма – вместо решения сложной системы для 4х неизвестных решить систему для 2х неизвестных. Применим это к нашей задаче:

$$\begin{cases} a(1 - e^{-s}) - b = 0 \\ -ae^{-s} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -e^s \\ b = -e^s + 1 \end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x,s) = -\begin{cases} e^s(1-e^{-x}), & 0 < x < s \\ e^s - 1, & s < x < 1 \end{cases}$$

А решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x,s)ds = \int_0^x f(s)(1-e^s)ds - (1-e^{-x})\int_x^1 f(s)e^s ds$$

№86 будет решаться абсолютно аналогично №87:

№87. $\begin{cases} \mathbf{x^2y'' - 6y = f(x), \quad 0 < x < 1.} \\ \mathbf{|y(0)| < \infty; \quad y'(1) + 2y(1) = 0} \end{cases}$

В данном номере, во-первых, может смущать уравнение – уравнение Эйлера (вспоминаем второе занятие), а во-вторых, первое граничное условие. Запишем общее решение однородного уравнения (если не помним, как решать – смотрим 2е занятие): $y(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2x^3$. Найдём функцию Грина также, как искали её в №85:

$$|y_1(0)| < \infty \to C_1 = 0 \to y_1(x) = x^3$$

$$y_2'(1) + 2y_2(1) = 0 \to -2C_1 + 3C_2 + 2C_1 + 2C_2 = 0 \to C_2 = 0 \to y_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

Функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)x^3, & 0 < x < s \\ \dfrac{b(s)}{x^2}, & s < x < 1 \end{cases}$$

Используем непрерывность функции Грина и разрыв её первой производной:

$$\begin{cases} as^3 - \dfrac{b}{s^2} = 0 \\ -\dfrac{2b}{s^3} - 3as^2 = \dfrac{1}{s^2} \end{cases} \to \begin{cases} a = -\dfrac{1}{5s^4} \\ b = -\dfrac{1}{5}s \end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x,s) = -\frac{1}{5}\begin{cases} \dfrac{x^3}{s^4}, & 0 < x < s \\ \dfrac{s}{x^2}, & s < x < 1 \end{cases}$$

А решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x,s)ds = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(s)sds + x^3\int_x^1 \frac{f(s)}{s^4}ds\right)$$

На это мы завершим с функцией Грина и двинемся к ещё одной задаче – задаче Штурма-Лиувилля.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

Задача формулируется следующим образом для такой задачи:

$$\begin{cases} L[y] = -\lambda\rho(x)y, & 0 < x < l. \\ \alpha_1y(0) + \beta_1y'(0) = \alpha_2y(l) + \beta_2y'(l) = 0 \end{cases}$$

Необходимо найти такие значения параметра λ (такие значения называются собственными значениями - СЗ), при которых данная задача имеет нетривиальное решение (такие решения называются собственными функциями - СФ).
Опять-таки, в физике такие задачи очень востребованы. Например, стационарное уравнение Шрёдингера $\widehat{H}\psi = E\psi$ – есть ни что иное, как задача Штурма-Лиувилля. Например, уравнение Шрёдингера в потенциале «квантового ящика»

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,a) \\ +\infty, & x \notin (0,a) \end{cases}$$

Записывается следующим образом в области $x \in (0,a)$ с граничными условиями:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi. \\ \psi(0) = \psi(a) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, чтобы изучать квантовую физику, необходимо уметь решать задачу Штурма-Лиувилля! Так давайте попробуем решить такие задачи!

№88. $\begin{cases} \mathbf{y'' + \lambda y = 0}, \ \ \mathbf{0 < x < 1}. \\ \mathbf{y(0) = 0}; \ \ \ \mathbf{y'(1) = 0} \end{cases}$

Так как при разных значениях параметра λ мы будем получать разные решения уравнения, рассмотрим различные варианты:

1) $\lambda = -\delta^2 < 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cosh\delta x + B\sinh\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \ \ y'(1) = \delta B\cosh\delta = 0 \to B = 0$$

То есть мы имеем только тривиальное решение.

2) $\lambda = 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = Ax + B$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = B = 0; \ \ y'(1) = A = 0$$

То есть вновь только тривиальные решения. И, наконец, третий случай:

3) $\lambda = \delta^2 > 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \ \ y'(1) = \delta B\cos\delta = 0 \to \cos\delta = 0 \to \delta_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ): $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $n = 0,1,2\ldots$ и соответствующие им собственные функции (СФ): $y_n(x) = B\sin\delta_n x = B\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x$

Ответ: $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $y_n(x) = B\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x$, $\ n = 0,1,2\ldots, \forall B \neq 0$

Замечание: обратите внимание на условие $B \neq 0$ – в случае $B = 0$ получим тривиальное решение, что по определению не является решением задачи Штурма-Лиувилля.

№90. $\begin{cases} \mathbf{y'' + \lambda y = 0}, \ \ \mathbf{2 < x < 4}. \\ \mathbf{y(2) = 0}; \ \ \ \mathbf{y(4) = 0} \end{cases}$

Рассматриваем вновь 3 случая:

1) $\lambda = -\delta^2 < 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cosh\delta x + B\sinh\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(2) = A\cosh 2\delta + B\sinh 2\delta = 0 \\ y(4) = A\cosh 4\delta + B\sinh 4\delta = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно A, B необходимо равенство нулю определителя:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cosh 2\delta & \sinh 2\delta \\ \cosh 4\delta & \sinh 4\delta \end{vmatrix} = \cosh 2\delta \sinh 4\delta - \cosh 4\delta \sinh 2\delta = \sinh(2\delta)\,! = 0\ \forall\delta! = 0$$

То есть данный определитель не обращаются в нуль ни при каких δ – а значит, мы имеем только тривиальное решение.

2) $\lambda = 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = Ax + B$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(2) = 2A + B = 0 \\ y(4) = 4A + B = 0 \end{cases}$$

Данная система вновь имеет только тривиальное решение.

3) $\lambda = \delta^2 > 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(2) = A\cos 2\delta + B\sin 2\delta = 0 \\ y(4) = A\cos 4\delta + B\sin 4\delta = 0 \end{cases}$$

Вновь вспоминаем, что для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно A, B необходимо равенство нулю определителя:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cos 2\delta & \sin 2\delta \\ \cos 4\delta & \sin 4\delta \end{vmatrix} = \cos 2\delta \sin 4\delta - \cos 4\delta \sin 2\delta = \sin(2\delta) = 0 \to \ \delta_n = \frac{\pi n}{2}, n = 1,2\ldots$$

Найдём коэффициенты A, B, подставив во второе уравнение:

$$A\cos 4\delta_n + B\sin 4\delta_n = 0 \to A\cos 2\pi n + B\sin 2\pi n = 0 \to A = 0$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ): $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, n = 1,2\ldots$ и соответствующие им собственные функции (СФ): $y_n(x) = B\sin\delta_n x = B\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)x$

Ответ: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, y_n(x) = B\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)x,\ \ n = 1,2\ldots,\ \forall B \neq 0$

<u>Замечание:</u> в данном случае $n \neq 0$, так как иначе мы получим тривиальное решение $y_0 \equiv 0$.

№92. $\begin{cases} \mathbf{y'' + \lambda y = 0},\ \ \mathbf{0 < x < \pi}. \\ \mathbf{y(0) = 0};\ \ \ \mathbf{y'(\pi) + y(\pi) = 0} \end{cases}$

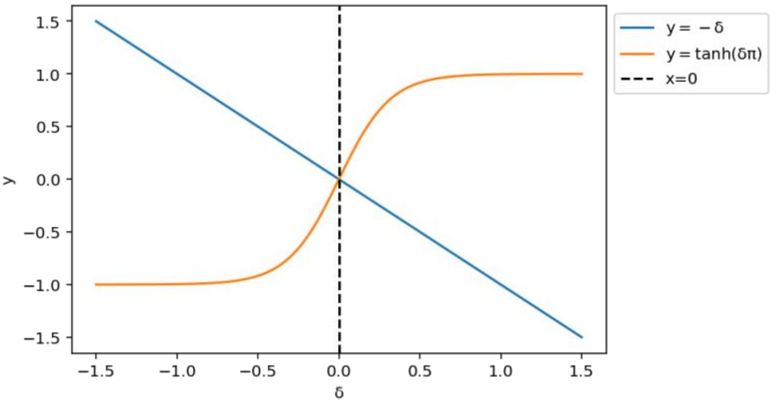
Вновь рассматриваем 3 случая.

1) $\lambda = -\delta^2 < 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cosh\delta x + B\sinh\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0;\ \ y'(\pi) + y(\pi) = \delta B\cosh\delta\pi + B\sinh\delta\pi = 0 \to B = 0$$

Так как такое уравнение не имеет решения для ненулевых δ, в чём легко убедиться графически (поделив обе части на косинус гиперболический: $-\delta = \tanh\delta\pi$):



То есть мы имеем только тривиальное решение, так как решение $\delta = 0$ (откуда и $\lambda = 0$, а мы рассматриваем только отрицательные λ) нас не устраивает в этом пункте.

2) $\lambda = 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = Ax + B$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = B = 0; \;\; y'(\pi) + y(\pi) = A + A\pi = 0 \to A = 0$$

То есть вновь только тривиальные решения. И, наконец, третий случай:

3) $\lambda = \delta^2 > 0$:

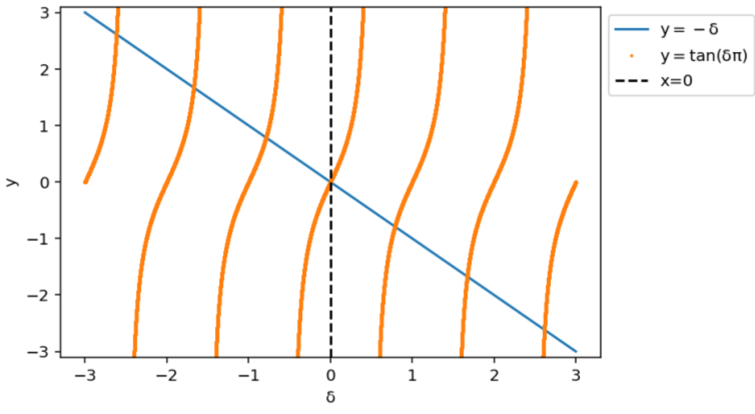
В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \;\; y'(\pi) + y(\pi) = \delta B\cos\delta\pi + B\sin\delta\pi = 0 \to \delta\cos\delta\pi + \sin\delta\pi = 0$$

Перед нами так называемое трансцендентное уравнение. Однако, графически легко убедиться, что у такого уравнения много решений. Для этого поделим всё на косинус (косинус и синус одновременно в нуль не обращаются):

$$-\delta = \tan\delta\pi$$

Графически такое уравнение:



То есть видно, что мы имеем большое количество решений – точек пересечения. Однако аналитически мы их выписать не можем. Тем не менее, перенумеруем решения уравнения $-\delta = \tan\delta\pi$ индексом n, и тогда мы получим набор СЗ $\lambda_n = \delta_n^2$, где δ_n – решения уравнения $-\delta = \tan\delta\pi$.

Ответ: $\lambda_n = (\delta_n)^2$, $y_n(x) = B\sin\delta_n x$, $n = 1,2\ldots$, $\forall B \neq 0$

№94. $\begin{cases} \mathbf{y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 2\pi.} \\ \mathbf{y(0) = y(2\pi); \quad y'(0) = y'(2\pi)} \end{cases}$

Начинаем всё также – рассматриваем 3 случая!

1) $\lambda = -\delta^2 < 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cosh\delta x + B\sinh\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi): \quad A = A\cosh 2\pi\delta + B\sinh 2\pi\delta \\ y'(0) = y'(2\pi): \delta B = \delta A\sinh 2\pi\delta + \delta B\cosh 2\pi\delta \end{cases}$$

Во втором уравнении можно смело сократить на δ, так как нас не интересуют в этом пункте нулевые СЗ. Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно A, B необходимо равенство нулю определителя (все слагаемые переносим в правую часть уравнений):

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cosh 2\pi\delta - 1 & \sinh 2\pi\delta \\ \sinh 2\pi\delta & \cosh 2\pi\delta - 1 \end{vmatrix} = (\cosh 2\pi\delta - 1)^2 - \sinh^2 2\pi\delta$$
$$= \cosh^2 2\pi\delta - 2\cosh 2\pi\delta + 1 - \sinh^2 2\pi\delta = 0$$

По основному тождеству для гиперболических функций $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ получаем:

$$\cosh 2\pi\delta = 1$$

Однако это уравнение имеет только решение при $\delta = 0$. То есть данная система имеет только тривиальное решение

2) $\lambda = 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = Ax + B$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi): \quad B = 2\pi A + B \\ \quad y'(0) = y'(2\pi) \; : \; A = A \end{cases}$$

Откуда $A = 0$, B – любое число. То есть мы имеем нетривиальное решение для СЗ=0.

3) $\lambda = \delta^2 > 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi): \quad A = A\cos 2\pi\delta + B\sin 2\pi\delta \\ y'(0) = y'(2\pi): \delta B = -\delta A\sin 2\pi\delta + \delta B\cos 2\pi\delta \end{cases}$$

Вновь во втором уравнении мы можем сократить δ, и далее запишем определитель матрицы:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cos 2\pi\delta - 1 & \sin 2\pi\delta \\ -\sin 2\pi\delta & \cos 2\pi\delta - 1 \end{vmatrix} = (\cos 2\pi\delta - 1)^2 + \sin^2 2\pi\delta$$
$$= \cos^2 2\pi\delta - 2\cos 2\pi\delta + 1 + \sin^2 2\pi\delta = 0$$

Уже по основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ получаем:

$$\cos 2\pi\delta = 1$$

Откуда $\delta_n = n, \quad n = 1,2,\dots$. Однако если теперь мы подставим это значение в нашу систему, мы получим не очень внятную систему уравнений:

$$\begin{cases} A = A \\ B = B \end{cases}$$

Что, в целом-то, и так понятно. На самом деле, каждое из наших СЗ обладает двумя линейно независимыми решения (геометрическая кратность=2, вспоминаем линейную алгебру!). Более того, мы можем включить в это множество решений решение из пункта 2) таким образом:

Ответ: $\lambda_n = n^2$, $y_n(x) = A\cos nx + B\sin nx$, $\quad n = 0,1,2\dots$, $\; A^2 + B^2 \neq 0$

И на этом мы закончим с задачей Штурма-Лиувилля и перейдём к следующей теме.

3. Уравнения в частных производных

Нас будут интересовать относительно простые уравнения – линейные уравнения в частных производных первого порядка для функций двух или трёх переменных. Такие уравнение часто встречаются в реальных физических задачах (уравнения переноса, например). Более того, в будущем у вас будет даже отдельный курс, посвященный более сложным уравнениям в частных производных – методы математической физики (ММФ). Однако вернёмся к нашим, более простым линейным уравнениям в частных производных первого порядка. Далее выкладки мы напишем для функции 2х переменных, и посмотрим, как эти методы обобщаются для функций трёх и более аргументов. Итак, вид уравнения:

$$z_x\, X(x,y) + z_y\, Y(x,y) = F(x,y)$$

В данном разделе задачи мы будем решать методом характеристик, и для такой задачи уравнение характеристик записывается следующим образом:

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)} = \frac{dz}{F(x,y)}$$

Чтобы получить общее решение уравнения, необходимо:

1) Из уравнения характеристик находим интегралы $\Psi_1(x,y,z) = C_1, \Psi_2(x,y,z) = C_2$.
2) Решение записывается в виде некоторой функции $\Phi(C_1,C_2) = 0$, где $\Phi(C_1,C_2)$ – произвольная дифференцируемая функция. Заметим, что решением является произвольная дифференцируемая функция, а наша задача явно найти ее аргументы. Это и есть общее решение уравнения

Посмотрим пример:

№96. $\begin{cases} \mathbf{y z_x - x z_y = 0} \\ \mathbf{z_{x=1} = y^2} \end{cases}$

Для того, чтобы найти функцию $z(x,y)$ выписываем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

(Не теряйте знак "-"). Деление на нуль в последнем равенстве не стоит воспринимать как деление на нуль в смысле арифметической операции – это скорее просто удобная запись уравнения характеристик. А воспринимать такую запись можно следующим образом - возьмём из этой цепочки уравнений следующие (можно взять два любых уравнения):

$$-xdx = ydy; \quad dz = 0$$

где второе уравнение получилось из правила пропорции $\frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0} \to -x\, dz = 0\, dy \to dz = 0$. Проинтегрируем получившиеся выражения:

$$x^2 + y^2 = C_1; \quad z = C_2$$

Перед нами так называемые <u>интегралы</u> данного уравнения – величины, сохраняющиеся на характеристиках. Если совсем упрощать – то на каждой окружности $x^2 + y^2 = C_1$ функция $z(x,y)$ сохраняет постоянное значение C_2. Зная данные интегралы, можно показать, что решение уравнения записывается в виде некоторой неявной функции:

$$\Phi(C_1,C_2) = 0 \to \Phi(x^2 + y^2, z) = 0$$

Где Φ – произвольная дифференцируемая функция. Однако, как нам известно из второго семестра математического анализа, такая конструкция задаёт неявную функцию $C_2 = f(C_1) \to z = f(x^2 + y^2)$ – это и есть решение нашего уравнения! Опять-таки, $f(t)$ пока остается произвольной дифференцируемой функцией. То есть решением уравнения в частных производных является целый класс функций, зависящих от аргументов x, y таким образом! То есть $z(x, y)$ – это любая функция, которая может быть выражена как $z(x, y) = f(x^2 + y^2)$. Найдём решение, удовлетворяющее дополнительному условию:

$$z_{x=1} = y^2 \to f(1 + y^2) = y^2$$

Обозначим $t = y^2 + 1 \to y^2 = t - 1$. То есть $f(t) = t - 1$. Итого, ответ задачи:

Ответ: $z(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Закрепим!

№96. $\begin{cases} \mathbf{xu_x + yu_y + xyu_z = 0} \\ \mathbf{u_{z=0} = x^2 + y^2} \end{cases}$

Записываем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy} = \frac{du}{0}$$

Из этой цепочки выберем следующие уравнения:

$$\begin{cases} du = 0 \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{xy} \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $u = C_1$. Из второго: $y = C_2 x \to C_2 = \frac{y}{x}$. Из третьего:

$$dx = \frac{dz}{y} = \frac{dz}{C_2 x} \to \frac{x^2}{2} - \frac{z}{C_2} = C_3 \to \frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y} = C_3$$

Итого решение задачи записывается в виде:

$$\Phi(C_1, C_2, C_3) = 0 \to \Phi\left(u, \frac{y}{x}, \frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y}\right) = 0$$

Эта функция неявно задаёт зависимость $C_1 = f(C_2, C_3) \to u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y}\right)$. Где f - произвольная дифференцируемая функция (далее эту фразу мы будем опускать во избежание повторений, однако при оформлении решения это стоит всегда прописывать!). Это общее решение. Подставляем дополнительное условие:

$$u_{z=0} = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{2}\right) = x^2 + y^2$$

Переобозначим $t = \frac{y}{x}, v = \frac{x^2}{2}$. Тогда $x^2 = 2v,\ y^2 = t^2x^2 = 2t^2v$. Итого:

$$f(t, v) = 2v + 2t^2v = 2v(1 + t^2)$$

Ответ: $u(x, y, z) = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y}\right)\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$

Посмотрим, что изменится в случае неоднородных уравнений:

№98. $\begin{cases} \mathbf{y^2 z_x + xyz_y = x} \\ \mathbf{z_{x=0} = y^2} \end{cases}$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}$$

Из этой цепочки выберем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{x} = \dfrac{dy}{xy} \\ \dfrac{dx}{y^2} = \dfrac{dy}{xy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z - \ln y = C_1 \\ y^2 - x^2 = C_2 \end{cases}$$

А значит ищем решение в виде $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_1 = f(C_2) \rightarrow z = \ln y + f(y^2 - x^2)$

$$z_{x=0} = \ln y + f(y^2) = y^2 \rightarrow f(y^2) = y^2 - \ln y$$

Обозначив $t = y^2 \rightarrow f(t) = t - \frac{1}{2}\ln(t)$

Ответ: $z(x, y) = \ln y + y^2 - x^2 - \frac{1}{2}\ln(y^2 - x^2)$

То есть – ничего сложного!

№99. $\begin{cases} \mathbf{xz_x - 2yz_y = x^2 + y^2} \\ \mathbf{z_{y=1} = x^2} \end{cases}$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

Из уравнения $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{2y}$ имеем первый интеграл: $C_1 = x^2 y$. Тогда используем равенство

$$-\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{\frac{C_1}{y} + y^2} \rightarrow dz = -dy\left(\frac{C_1}{2y^2} + \frac{y}{2}\right) \rightarrow z + \frac{y^2}{4} - \frac{C_1}{2y} = C_2$$

Исключая C_1: $z + \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = C_2$. Отсюда получаем $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_2 = f(C_1)$:

$$z + \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = f(x^2 y) \rightarrow z = f(x^2 y) - \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2}$$

Находим функцию f:

$$z_{y=1} = f(x^2) - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2} = x^2 \rightarrow t = x^2 \rightarrow f(t) - \frac{1}{4} + \frac{t}{2} = t \rightarrow f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

Ответ: $z(x, y) = -\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{1}{4}$

И на этом мы будем завершать! В качестве самопроверки усвоения материала попробуйте решить следующие номера – оставшиеся по данной теме из списка задач к подготовке к зачету. Успехов! Ниже, как и всегда, будут приложены решения.
№80, 83-84, 86, 89, 91,93, 95, 100.

4. Практика

№80. $\begin{cases} \mathbf{y'' = f(x)}, \quad \mathbf{0 < x < l} \\ \mathbf{y'(0) = y(l) = 0} \end{cases}$

Убедитесь самостоятельно, что при $f(x) \equiv 0$ задача имеет только тривиальное решение – а значит, функция Грина существует! Функцию Грина ищем в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)x + b(s), & 0 < x < s \\ c(s)x + d(s), & s < x < l \end{cases}$$

Для определения коэффициентов необходимо решить систему:

$$\begin{cases} a = 0 \\ cl + d = 0 \\ as + b = cs + d \\ c - a = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ b = s - l \\ c = 1 \\ d = -l \end{cases}$$

Подставим эти значения в вид функции Грина: $G(x,s) = \begin{cases} s - l, & 0 < x < s \\ x - l, & s < x < l \end{cases}$. А значит, используя эту функцию, мы сможем записать решение краевой задачи для любой неоднородности $f(x)$.

Ответ: $G(x,s) = \begin{cases} s - l, & 0 < x < s \\ x - l, & s < x < l \end{cases}$

Решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x,s)ds = (x - l)\int_0^x f(s)ds + \int_x^l (s - l)f(s)ds$$

№83. $\begin{cases} \mathbf{y'' - y = 1}, & \mathbf{0 < x < 1} \\ \mathbf{y'(0) = -1;\ y(1) = 1} \end{cases}$

Необходимо избавиться от неоднородных граничных условий! Введём функцию $z(x) = y(x) + x - 2$:

$$\begin{cases} z'' - z = 3 - x, & 0 < x < 1 \\ z'(0) = 0;\ z(1) = 0 \end{cases}$$

Теперь легко убедиться, что решение однородной задачи – только тривиальное. Общее решение однородного уравнения: $z(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$. Найдём функции $z_1(x), z_2(x)$, удовлетворяющие левому и правому граничному условию:

$$z'(0) = C_2 = 0 \to z_1(x) = \cosh x$$

$$z(1) = C_1 \cosh 1 + C_2 \sinh 1 = 0 \to z_2(x) = \sinh(x - 1)$$

И будем искать функцию Грина в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)\cosh x, & 0 < x < s \\ b(s)\sinh(x - 1), & s < x < 1 \end{cases}$$

Воспользуемся непрерывностью функции Грина и разрывом первой производной:

$$\begin{cases} a\cosh s = b\sinh(s - 1) \\ b\cosh(s - 1) - a\sinh s = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{2e\sinh(s - 1)}{1 + e^2} \\ b = \dfrac{2e\cosh s}{1 + e^2} \end{cases}$$

Итого, наша функция Грина:

$$G(x,s) = \frac{2e}{1 + e^2}\begin{cases} \sinh(s - 1)\cosh x, & 0 < x < s \\ \cosh s \sinh(x - 1), & s < x < 1 \end{cases}$$

И запишем решение для нашей неоднородности ($f(x) = 3 - x$):

$$y(x) = z(x) + 2 - x = \int_0^1 f(s)G(x,s)ds + 2 - x$$
$$= \frac{2e\sinh(x-1)}{1+e^2}\int_0^x \cosh s\,(3-s)ds + \frac{2e\cosh x}{1+e^2}\int_x^1 \sinh(s-1)\,(3-s)ds + 2 - x$$
$$= \frac{2e\sinh(x-1)}{1+e^2}\big((3-x)\sinh x + \cosh x - 1\big) + \frac{2e\cosh x}{1+e^2}(\sinh(1-x) + (x-3)\cosh(1-x) + 2) + 2$$
$$- x = \frac{e^2+4e-1}{1+e^2}\cosh x - \sinh x - 1$$

Ответ: $G(x,s) = \frac{2e}{1+e^2}\begin{cases}\sinh(s-1)\cosh x, & 0 < x < s\\ \cosh s\sinh(x-1), & s < x < 1\end{cases}$, $y(x) = \frac{e^2+4e-1}{1+e^2}\cosh x - \sinh x - 1$

№84. $\begin{cases}\mathbf{y'' + y = f(x),\ \ 0 < x < \pi}\\ \mathbf{y'(0) = 0;\ y(\pi) = 0}\end{cases}$

Убедитесь самостоятельно, что решение однородной задачи – только тривиальное. Решение однородного уравнения $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. Строим функцию Грина в виде:

Найдём частные решения уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, чтобы они удовлетворяли первому и второму граничному условиям соответственно:

$$y'(0) = C_2 = 0 \to y_1(x) = \cos x$$
$$y(\pi) = -C_1 = 0 \to y_2(x) = \sin x$$

Теперь, зная данные функции, функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x,s) = \begin{cases}a(s)\cos x, & 0 < x < s\\ b(s)\sin x, & s < x < \pi\end{cases}$$

А функции $a(s)$ и $b(s)$ найдем из непрерывности функции Грина и из разрыва первой производной функции Грина:

$$\begin{cases}a\cos s = b\sin s\\ b\cos s + a\sin s = 1\end{cases} \to \begin{cases}a = \sin s\\ b = \cos s\end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x,s) = \begin{cases}\sin s\cos x, & 0 < x < s\\ \cos s\sin x, & s < x < \pi\end{cases}$$

А решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^\pi f(s)G(x,s)ds = \sin x\int_0^x f(s)\cos s\,ds + \cos x\int_x^\pi f(s)\sin s\,ds$$

№86. $\begin{cases}\mathbf{x^2y'' + 2xy' = f(x),\ \ 0 < x < 3.}\\ \mathbf{|y(0)| < \infty;\ \ \ y'(3) = 0}\end{cases}$

Запишем решение однородного уравнения (если не помним, как решать – смотрим 2е занятие): $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$. Проверим, является ли решение однородной задачи тривиальным:

$$|y(0)| < \infty \to C_1 = 0 \to y(x) = C_2$$
$$y'(3) = 0$$

А значит, C_2 может оставаться произвольной! Действительно, для однородной задачи функция вида $y(x) = C$ является решением – у данной задачи не существует функции Грина! Также убедитесь, что при $f(x) \equiv 1$ решений, удовлетворяющих обоим граничным условиям – не существует.

№89. $\begin{cases}\mathbf{y'' + \lambda y = 0,\ \ 0 < x < 1.}\\ \mathbf{y'(0) = 0;\ \ \ y'(1) = 0}\end{cases}$

Так как при разных значениях параметра λ мы будем получать разные решения уравнения, рассмотрим различные варианты:

1) $\lambda = -\delta^2 < 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cosh\delta x + B\sinh\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = \delta B = 0;\;\; y'(1) = \delta A\sinh\delta = 0 \to A = 0$$

То есть мы имеем только тривиальное решение.

2) $\lambda = 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = Ax + B$. Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = A = 0;\;\; y'(1) = A = 0$$

Так, мы имеем нулевое СЗ и соответствующую ему СФ: $\lambda_0 = 0; y_0(x) = C$.

3) $\lambda = \delta^2 > 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = \delta B = 0;\;\; y'(1) = \delta A\sin\delta = 0 \to \sin\delta = 0 \to \delta_n = \pi n$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ): $\lambda_n = (\pi n)^2, n = 1,2\dots$ и соответствующие им собственные функции (СФ): $y_n(x) = A\cos\delta_n x = A\cos(\pi n x)$. Можно объединить с нулевым СЗ:

Ответ: $\lambda_n = (\pi n)^2$, $y_n(x) = A\cos(\pi n x)$, $n = 0,1,2\dots\forall A \neq 0$

№91. $\begin{cases} \mathbf{y'' + \lambda y = 0}, & \mathbf{0 < x < 3} \\ \mathbf{y'(0) = 0}; & \mathbf{y(3) = 0} \end{cases}$

Убедитесь самостоятельно, что задача не имеет СЗ, меньших нуля. А значит, рассматриваем случай $\lambda = \delta^2 > 0$:

В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = \delta B = 0;\;\; y(3) = A\cos 3\delta = 0 \to \cos 3\delta = 0 \to \delta_n = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n = 0,1,2\dots$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ): $\lambda_n = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, n = 0,1,2\dots$ и соответствующие им собственные функции (СФ): $y_n(x) = A\cos\delta_n x = A\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x$.

Можно объединить с нулевым СЗ:

Ответ: $\lambda_n = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $y_n(x) = A\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x$, $n = 0,1,2\dots,\forall A \neq 0$

№93. $\begin{cases} \mathbf{y'' + \lambda y = 0}, & \mathbf{0 < x < \pi}. \\ \mathbf{y'(0) = y(0)}; & \mathbf{y'(\pi) = 0} \end{cases}$

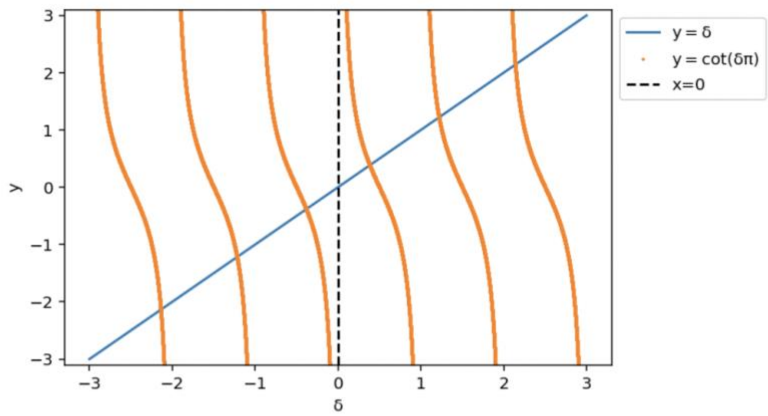
Убедитесь самостоятельно, что задача не имеет СЗ, меньших нуля. А значит, рассматриваем случай $\lambda = \delta^2 > 0$. В этом случае общее решение уравнения: $y(x) = A\cos\delta x + B\sin\delta x$. Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} \delta B = A \\ -\delta A\sin\delta\pi + \delta B\cos\delta\pi = 0 \end{cases}$$

Находим определитель и приравниваем его к нулю:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} 1 & -\delta \\ -\delta\sin\delta\pi & \delta\cos\delta\pi \end{vmatrix} = \delta\cos\delta\pi - \delta^2\sin\delta\pi = 0 \to \cot\delta\pi = \delta$$

Вновь перед нами трансцендентное уравнение! Графически:



То есть видно, что мы имеем большое количество решений – точек пересечения двух графиков. Однако аналитически мы их выписать не можем. Тем не менее, перенумеруем решения уравнения $\cot\delta\pi = \delta$ индексом n, и тогда мы получим набор СЗ $\lambda_n = \delta_n^2$, где δ_n – решения уравнения $\cot\delta\pi = \delta$. Подставим найденные δ_n обратно в первое уравнение системы:

$$A = \delta_n B$$

И запишем ответ:

Ответ: $\lambda_n = (\delta_n)^2$, $y_n(x) = B(\delta_n \cos\delta_n x + \sin\delta_n x), \quad n = 1,2 \dots, \forall B \neq 0$

№95. $\begin{cases} \mathbf{z_x + cz_y = 0} \\ \mathbf{z_{y=0} = \phi(x)} \end{cases}$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{c} = \frac{dz}{0}$$

Из уравнения $dx = \frac{dy}{c}$ имеем первый интеграл: $C_1 = x - \frac{y}{c}$. Второй интеграл, очевидно: $z = C_2$.

Отсюда получаем $\Phi(C_1, C_2) = 0 \to C_2 = f(C_1)$:

$$z = f\left(x - \frac{y}{c}\right)$$

где f – произвольная дифференцируемая функция. Находим функцию f:

$$z_{y=0} = f(x) = \phi(x)$$

Ответ: $z(x,y) = \phi\left(x - \frac{y}{c}\right)$

№100. $\begin{cases} \mathbf{xz_x + zz_y = y} \\ \mathbf{y = 2z, \quad x + 2y = z} \end{cases}$

Обратите внимание! Данное уравнение является квазилинейным, так как коэффициент при z_y зависит от решения z. Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

Из уравнения $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$ имеем первый интеграл: $C_1 = z^2 - y^2$. Для нахождения второго интеграла, воспользуемся свойством (см. Филиппов, §19):

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = t \to \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = t$$

Воспользуемся им $\left(a_1 = dy, b_1 = z, a_2 = dz, b_2 = y, t = \frac{dx}{x}\right)$:

$$\frac{dy + dz}{z + y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{d(z + y)}{z + y} = \frac{dx}{x} \rightarrow z + y - C_2 x = 0$$

Отсюда получаем $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_2 = f(C_1)$:

$$\frac{z + y}{x} = f(z^2 - y^2)$$

Находим функцию f, выразив всё через z:

$$y = 2z, x + 2y = z \rightarrow x = -3z, y = 2z$$

$$\frac{3z}{-3z} = f(z^2 - 4z^2) \rightarrow f(t) \equiv -1$$

Ответ: $z(x, y) = -x - y$