ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

ФОМЕНКО
ТАТЬЯНА НИКОЛАЕВНА

ВМК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГЕОРГИЕВСКУЮ ЕКАТЕРИНУ ПАВЛОВНУ

Оглавление

1 Лекция 1. Алгебраический цепной комплекс. 6
1.1 Введение. 6
1.2 Понятие группы. 6
1.3 Коммутативная или абелева группа. 7
1.4 Гомоморфизм групп. 8
1.5 Алгебраический цепной комплекс. 9
1.6 Фактор-группа. Группа гомологий цепного комплекса. 12
1.7 Гомологичные циклы. 15
1.8 Подкомплекс алгебраического цепного комплекса. 16
2 Лекция 2. Гомоморфизм двух алгебраических цепных комплексов. Гомология симплициальных комплексов. 18
2.1 Подкомплекс алгебраического цепного комплекса. 18
2.2 Гомоморфизм двух алгебраических цепных комплексов. 18
2.3 Построение связывающего гомоморфизма и длинной гомологической последовательности пары алгебраических цепных комплексов. 21
2.4 Теорема о последовательности гомоморфизмов. 23
2.5 Гомология сим гляциальных комплексов. N-мерный симплекс. . . . 26
3 Лекция 3. Гомология симплициальных комплексов. 28
3.1 Полиэдр. Компактный полиэдр. 28
3.2 Триангуляция топологического пространства. 29
3.3 Ориентация симплекса. 32
3.4 Граница симплекса. 33
3.5 Построение алгебраического цепного комплекса для заданного симплициального комплекса. 34
3.6 Граничный гомоморфизм. 35
3.7 Группы симплициальных гомологий комплекса К. 36
3.8 Геометрический смысл циклов и границ в симплициальном комплексе К и его цепном комплексе. 37
3.9 Гомология конкретного симплициального комплекса. 40
4 Лекция 4. Точная последовательность Майера-Виеториса. 42

4.1 Гомология конкретного симплициального комплекса. 42
4.2 Вложение конечного симплициального n-мерного комплекса в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$. 45
4.3 Гомологии сфер. 47
4.4 Точная последовательность Майера-Виеториса. 48
5 Лекция 5. Теория сингулярных гомологий. Часть 1. 53
5.1 Вычисление симплициальных гомологий тора. 53
5.2 Тор с геометрической точки зрения. 55
5.3 Гомология вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^2$. 56
5.4 Об ориентации двумерных замкнутых многообразий. 59
5.5 Неориентированные поверхности. 59
5.6 Барицентрическое подразделение симплециального комплекса. . . 60
5.7 Барицентрическое подразделение симплициального n-мерного комплекса K. 62
5.8 Мелкость барицентрического подразделения. 64
6 Лекция 6. Теория сингулярных гомологий. Часть 2. 67
6.1 Барицентрическое подразделение симплициального комплекса. . . 67
6.2 Симплициальное отображение. 69
6.3 Гомоморфизм групп цепей. 69
6.4 Функтор симплициальных комплексов. 70
6.5 Теория сингулярных гомологий. 71
6.6 Сингулярные гомологии точки. 73
6.7 Гомоморфизмы групп сингулярных гомологий. 75
6.8 Понятие гомотопии и цепной гомотопии в сингулярной теории гомологии. 76
7 Лекция 7. Цепная гомотопия. 78
7.1 Понятие гомотопии. 78
7.2 Понятие цепной гомотопии. 78
7.3 Связь цепной и обычной гомотопии. 79
7.4 Теорема о цепно-гомотопных гомоморфизмах. 85
8 Лекция 8. Вопросы сингулярной теории гомологии. 89
8.1 Повторение. 89
8.2 Барицентрическое подразделение сингулярных симплексов. 89
8.3 Точные последовательности пары топологических пространств и Маера-Виеториса в теории сингулярных гомологий. 93
8.4 Существование точной последовательности Майера-Виеториса для сингулярных гомологий. 94
8.5 Отображение вырезания. 95
8.6 Аксиомы теории гомологий. 99

9 Лекция 9. Аксиомы теории гомологий. Элементы теории когомологий. . . 100
9.1 Теория гомологий. . . . 100
9.2 Аксиомы теории гомологий. . . . 100
9.3 Теорема Стинрода-Эйленберга. . . . 101
9.4 Экстраординарные теории гомологии. . . . 104
9.5 Теория когомологий. . . . 104
9.6 Кограничный гомоморфизм. . . . 104
9.7 Кольцо гомологий. . . . 105
9.8 Свойства операции $\cup$-умножения. . . . 107
10 Лекция 10. Гомологическая степень отображения сфер. . . . 108
10.1 Свойство $\cup$-произведения. . . . 108
10.2 Гомологическая степень отображения сфер. . . . 109
10.3 Свойства гомологической степени отображения сфер. . . . 110
11 Лекция 11. Характеристика векторного поля. Индекс изолированной особой точки векторного поля. . . . 119
11.1 Постановка задачи. . . . 119
11.2 Характеристика векторного поля. Свойства характеристики векторного поля. . . . 120
11.3 Индекс изолированной особой точки. . . . 122
11.4 Характеристика векторного поля на границе области в $\mathbb{R}^n$. . . . 126
12 Лекция 12. Клеточный комплекс и его гомологии. . . . 131
12.1 Замечания к предыдущей лекции. . . . 131
12.2 Клеточный комплекс и его гомологии. . . . 131
12.3 Примеры клеточных комплексов. . . . 132
12.4 Клеточные гомологии. . . . 136
12.5 Эйлерова характеристика и число Лефшеца симплициального отображения. . . . 141
13 Лекция 13. Эйлерова характеристика и число Лефшеца. . . . 147
13.1 Вычисление числа Лефшеца для отображения сферы в себя. . . . 147
13.2 Эйлерова характеристика. . . . 148
13.3 Симплициальная аппроксимация непрерывных отображений. . . . 149
13.4 Теорема о симплициальной аппроксимации. . . . 151
13.5 Число Лефшеца непрерывного отображения. . . . 155
13.6 Свойства числа Лефшеца непрерывного отображения. . . . 156
13.7 Теорема Лефшеца о неподвижной точке. . . . 156

Лекция 1. Алгебраический цепной комплекс.

Введение.

В данном курсе мы будем рассматривать алгебраический аспект топологии. Если какая-то задача решается для отображения топологических пространств, то строятся такие топологические характеристики, что задача, которая поставлена в топологическом пространстве, индуцирует соответствующую задачу для алгебраических объектов. Обычно бывает так: если задача в топологических пространствах разрешима, то она разрешима и в алгебраических объектах. Обратно, если задача не разрешима в алгебраических объектах, то она не разрешима и в топологических. Поэтому возникает вопрос: является ли задача разрешимой, если мы рассмотрим ее инвариант (индуцированную задачу) в алгебраических аспектах.

Также в курсе будет рассмотрен алгебраический цепной комплекс. Мы построим гомологии такого цепного комплекса. Далее на топологических пространствах мы будем строить алгебраические инварианты, которые и будут алгебраическими цепными комплексами. Также рассмотрим построение теории симплициальных гомологий на топологическом пространстве, сингулярная теория гомологий, клеточная структура пространства. Рассмотрим понятие гомологической степени отображения и понятие эйлеровой характеристики топологического пространства. Будут доказаны теоремы, связанные с существованием неподвижных точек. Рассмотрим понятие гомотопии отображений, понятие цепной гомотопии и аксиоматическое построение теории гомологий. В конце спецкурса мы рассмотрим вращение векторного поля на границе области в пространстве R^n.

Литература:

1. "Введение в топологию"(пятая глава), Борисович Ю.Г. и др. Издательство URSS, 2015
2. "Теория гомологий Хилтон
3. "Алгебраическая топология Э. Спеньер
4. "Современная геометрия. Методы теории гомологий Дубровин, Новиков, Фоменко
5. "Лекции по алгебраической топологии Дольд А.
6. "Элементы теории гомологий Прасолов

Понятие группы.

Определение 1. Пусть есть некоторое непустое множество $G \neq \varnothing$, в котором задана бинарная операция $*$.

$$* : G \times G \to G \tag{1.1}$$

Это значит, что упорядоченной паре элементов из множества G можно сопоставить элемент этого же множества:

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2 \tag{1.2}$$

Тогда говорят, пара $(G, *)$ – **группоид**.

Определение 2. Если

$$\exists e \in G : \ \forall g \in G \ \ g * e = e * g = g \tag{1.3}$$

то этот элемент e называется **единичным (тривиальным) элементом.**

Определение 3. Если $(G, *)$ – группоид, а операция $*$ ассоциативна, то есть выполняется

$$a, b, c \in G \ \ a * (b * c) = (a * b) * c \tag{1.4}$$

то пара $(G, *)$ называется **полугруппой**.

Определение. Если $(G, *)$ – полугруппа и существует единичный элемент e, то $(G, *, e)$ **– моноид или полугруппа с единицей.**

Определение 4. Если $(G, *, e)$ – моноид и

$$\forall g \in G, \ \exists g^{-1} \in G, \ g * g^{-1} = e \tag{1.5}$$

то $(G, *)$ – **группа**.

Таким образом, если есть некоторое непустое множество $G \neq \emptyset$ и выполнены свойства, указанные в определениях 1-4, то $(G, *)$ – **группа**.

Можно показать, что из

$$g * g^{-1} = e \tag{1.6}$$

следует

$$g^{-1} * g = e \tag{1.7}$$

Коммутативная или абелева группа.

Нас далее будут интересовать коммутативные (абелевы) группы.

Определение. Пусть $(G, *, e)$ – группа и операция $*$ коммутативна, то есть

$$\forall g, h \in G \quad h * g = g * h \tag{1.8}$$

Тогда $(G, *)$ называют **коммутативной или абелевой группой**.

Обычно, если группа абелева, то вместо $*$ пишут $+$ (такую операцию называют *сложением*), а вместо e пишут 0. Вместо элемента g^{-1} пишут $-g$.

Замечание. В произвольных группах кроме $*$ используется также $\cdot$ или $\circ$ (такую операцию называют *умножением*), а кроме $e - 1_G$.

Замечание. В произвольных группах g^{-1} называется *обратным элементом*, а в абелевой группе $-b$ называется *противоположным элементом*.

Свойства абелевых групп $(G, +)$:

1. Операция + бинарная и, соответственно, ассоциативная:

$$\forall a, b \in G \quad \exists! a + b \in G \tag{1.9}$$

2. Операция + ассоциативна

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1.10}$$

3. Операция коммутативна

$$a + b = b + a \tag{1.11}$$

4. Существует нулевой элемент

$$\exists \theta \in G \quad a + \theta = a \tag{1.12}$$

5. Для любого элемента группы

$$\forall a \in G \; \exists - a \in G : \quad a + (-a) = \theta \tag{1.13}$$

При этом операция $a + (-a)$ может быть обозначена как вычитание $a - a$ или

$$a + (-b) = a - b \in G \tag{1.14}$$

Гомоморфизм групп.

Определение. Пусть имеется две группы $(G, *)$ и $(H, \circ)$. Тогда отображение

$$f : \; G \to H \tag{1.15}$$

называется **гомоморфизмом** в том и только том случае, когда

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2) \tag{1.16}$$

Свойства гомоморфизма:

$$f(G) = \left\{ f(g) \middle| g \in G \right\} \subseteq H \tag{1.17}$$

причем $f(G)$ – подгруппа в H, то есть $f(G)$ – группа относительно операции $\circ$, заданной в H. Если для группы $(G, *)$ единичный элемент e, а для $(H, \circ)$ – e', то единичным элементом в $f(G)$ будет $f(e)$.

В случае абелевых групп:

$$(G, +) \xrightarrow{f} (H, \dot{+}) \tag{1.18}$$

$$f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2) \tag{1.19}$$

Также можно показать, что противоположный элемент будет переходить в противоположный, а единичный элемент будет переходить в единичный элемент в образе.

Алгебраический цепной комплекс.

Определение. Алгебраическим цепным комплексом (а.ц.к.) называется последовательность абелевых групп и гомоморфизмов вида

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{1.20}$$

где C_k – абелева группа, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\partial_k : \; C_k \to C_{k-1} \tag{1.21}$$

– гомоморфизмы, причем выполняется условие: если мы применили два рядом стоящих гомоморфизма в композиции, то получим нулевой гомоморфизм:

$$\partial_{k-1} \cdot \partial_k = 0 \;\; \forall k \tag{1.22}$$

Сейчас мы изучаем чисто алгебраический объект. Далее мы будем строить на топологических пространствах последовательность абелевой группы гомоморфизмов, которую будем ассоциировать с этим пространством. Оказывается, что если у нас будут заданы отображения топологических пространств из одного в другое, то они будут индуцировать отображение указанных объектов. Многие свойства пространства будут индуцировать соответствующие свойства цепных комплексов.

Определение. ∂_k называется **граничным гомоморфизмом.** Иногда его также называют дифференциалом.

C_k называется **группой k-мерных цепей.**

Из-за того, что композиция двух соседних гомоморфизмов представляют собой нулевой гомоморфизм, выполняется следующее свойство. Как было сказано, если мы рассматриваем гомоморфизм из одной группы в другую, то образ всех элементов в этой группе представляет собой подгруппу. Эта подгруппа называется образом.

Определение. Образ элементов группы C_k – это

$$Im\partial_k := \left\{x \in C_{k-1} \middle| \exists y \in C_k,\ \partial y = x\right\} = B_{k-1} \tag{1.23}$$

– подгруппа границ, $B \subseteq C_k$. Граница – это все элементы группы, которые являются образами граничного гомоморфизма из группы с номером на 1 больше.

Определение. Ядро гомоморфизма групп – это совокупность элементов

$$Ker\partial_k = \left\{z \in C_k \middle| \partial_k(z) = 0\right\} = Z_k \tag{1.24}$$

– подгруппа циклов, $Z_k \subseteq C_k$. Цикл – это такой элемент в группе C_k, который граничным гомоморфизмом в следующую группу переводится в ноль.

Рассмотрим связь между (1.23) и (1.24). Возьмем два соседних гомоморфизма. Если элемент пришел из группы C_n с помощью гомоморфизма ∂_n (то есть он является границей (образом) C_{n-1}), то далее он попадет в ноль, то есть будет лежать в группе циклов Z_k: То есть, если

$$B_n \subseteq C_n$$

$$Z_n \subseteq C_n$$

где

$$B_n = \partial_{n+1}(C_{n+1}) \tag{1.25}$$

– всевозможные образы элементов группы C_{n+1}, которые называются $n+1$-одномерными цепями.

$$Z_n = Ker\partial_n \tag{1.26}$$

Тогда

$$B_n \subseteq Z_n \tag{1.27}$$

Если у нас есть группа, то у нее бывают подгруппы. Некоторые из этих подгрупп называются нормальными делителями. То есть, если есть $(G, *)$ – группа, H – подгруппа, то H называется **нормальным делителем**

$$H \lhd G \tag{1.28}$$

Тогда и только тогда

$$\forall \in G, \;\; ghg^{-1} \in H, \text{ если } h \in H \tag{1.29}$$

Тогда

$$gHg^{-1} = H \tag{1.30}$$

Это означает, что если мы будем рассматривать классы смежности по подгруппе H, то в случае нормального делителя левые и правые классы смежности совпадают. То есть, если мы рассмотрим левые классы смежности и правые классы смежности, то эти два множества будут совпадать:

$$\left\{H * g \middle| g \in G\right\} = \left\{g * H \middle| g \in G\right\} \tag{1.31}$$

В этом случае $H \lhd G$ – нормальный делитель.

Замечание. Если $(G, +)$ – абелева группа, то любая подгруппа H является нормальным делителем. То есть, если ко всем элементам группы H прибавить некоторый элемент, то получим класс смежности этого элемента:

$$x \in G \;\; [x] = x + H = \left\{x + h \middle| h \in H\right\} \tag{1.32}$$

Таким образом, получаем разбиение, представленное на рис. 1.1.

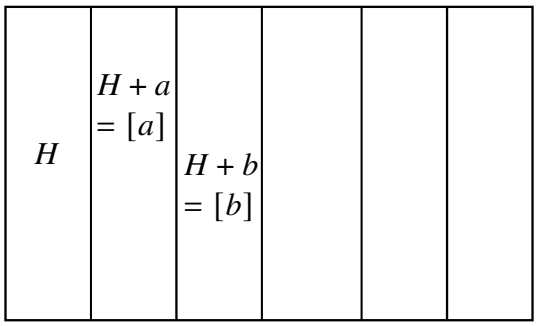

Рис. 1.1: Иллюстрация к объяснению.

Можно показать, что классы смежности или совпадают или не пересекаются.

Фактор-группа. Группа гомологий цепного комплекса.

Если в группе имеется нормальный делитель, то корректно определена так называемая **фактор-группа**. Мы рассматриваем разбиение группы на классы смежности. В случае коммутативной группы правый и левый класс смежности совпадают. Разбиение множества на части порождает эквивалентность. Мы говорим, что два элемента x и y эквивалентны, если они лежат в одном множестве разбиения. Фактор множества G по данной эквивалентности – это множество классов смежности как элементов. Фактор множества снабжается операцией. В случае абелевой группы для фактора группы определена операция сложения. Пусть $(G, +)$ – абелева группа, H – нормальный делитель: $H \lhd G$. Тогда

$$G/H = \left\{ [g] \middle| g \in G \right\} \tag{1.33}$$

В этой фактор-группе вводится операция

$$g, h \in G : \quad [g] \oplus [h] := [g' + h'] \tag{1.34}$$

где g' – представитель класса смежности: $g' \in [g]$ и $h' \in [h]$.

Аналогично определяется противоположный элемент:

$$-[g] := [-g] \tag{1.35}$$

Нулевой элемент

$$[0] = H \tag{1.36}$$

– тривиальный элемент в фактор-группе.

Таким образом, у нас есть алгебраический цепной комплекс: последовательность абелевых групп и гомоморфизмов, обладающих свойством (1.22). При этом в каждой из указанных групп есть подгруппа циклов и подгруппа границ, причем подгруппа границ всегда содержится в подгруппе циклов. Группа абелева, поэтому группа границ является в ней нормальным делителем:

$$B_n \lhd Z_n \tag{1.37}$$

Отсюда получаем, что корректно определена фактор-группа

$$\exists\, Z_n/B_n = H_n(C) \tag{1.38}$$

эта группа называется **группой гомологий алгебраического цепного коплекса** (C, ∂) (1.20).

Примеры. Рассмотрим

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_6 \tag{1.39}$$

Чтобы задать цепной комплекс, мы должны определить, как действуют указанные гомоморфизмы (так, чтобы композиция соседних была равна нулю).

Отметим, что

$$\mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2 \dots k-1\} \tag{1.40}$$

Операция сложения определена следующим образом

$$l \oplus_k m = [l+m]_k \tag{1.41}$$

Например

$$\mathbb{Z} = \{0, 1 \dots 5\} \tag{1.42}$$

Операция сложения в этой группе

$[+]_5$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	..	..	..	..	..
4	..	..	..	..	..	..
5	..	..	..	..	..	..

Зададим гомоморфизмы:

$$\partial_2(x) = 6 \cdot x \tag{1.43}$$

Тогда

$$\partial_2(1) = 6 \tag{1.44}$$

$$\partial_2(0) = 0 \tag{1.45}$$

Далее

$$\partial_1(y) = [y]_6 \tag{1.46}$$

Тогда

$$\partial_1(6) = 0 \tag{1.47}$$

$$\partial_1(7) = 1 \tag{1.48}$$

и так далее.

Далее определим

$$\partial_0(x) = 0 \tag{1.49}$$

Отметим, что в данном случае свойство (1.22) выполняется.

Рассмотрим циклы:

$$B_2 = 0 = \mathbb{Z}_2 \tag{1.50}$$

Тогда двумерная гомология цепного комплекса

$$H_2 = 0 \tag{1.51}$$

Границы в группе $\mathbb{Z}$

$$B_1 = \{0, 6\} \subset \mathbb{Z}_{12} \tag{1.52}$$

При этом

$$\mathbb{Z}_1 = B_1 \tag{1.53}$$

Тогда

$$H_1 = 0 \tag{1.54}$$

Далее

$$B_0 = \mathbb{Z}_6 = Z_0 \tag{1.55}$$

Тогда

$$H_0 = 0 \tag{1.56}$$

Рассмотрим еще один пример

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{1.57}$$

где

$$\partial_2(x) = p^2 \cdot x \tag{1.58}$$

$$\partial_1(x) = [y]_p \tag{1.59}$$

Тогда

$$B_2 = \{0\} \tag{1.60}$$

$$Z_2 = \{0\} \tag{1.61}$$

$$H_2 = 0 \tag{1.62}$$

$$Im\partial_2 = p^2\mathbb{Z} = B_1 \tag{1.63}$$

Тогда

$$Z_1 = p\mathbb{Z} \tag{1.64}$$

При этом, если мы будем находить группу гомологий:

$$H_1 = p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p \tag{1.65}$$

При этом

$$B_0 = \mathbb{Z}_p \tag{1.66}$$

$$Z_0 = \mathbb{Z}_p \tag{1.67}$$

Тогда

$$H_0 = \{0\} \tag{1.68}$$

Гомологичные циклы.

Отметим, что когда мы факторизуем группу циклов по группе границ, чтобы получить группу гомологий:

$$Z_n/B_n = H_n \tag{1.69}$$

то два цикла называются **гомологичными** в том и только том случае, если они содержатся в одном и том же классе смежности по подгруппе границ. При разбиении группы Z_n разбиваем на классы смежности по подгруппе B_n. Если два элемента лежат в одном и том же классе смежности, то каждый из них отличается от другого элемента на некоторую границу (рис. 1.2)

$$x_1 = x_2 + b, \quad \text{где } b \in B_n \tag{1.70}$$

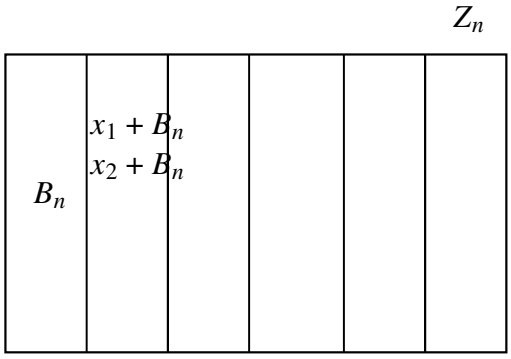

Рис. 1.2: Иллюстрация к объяснению.

Подкомплекс алгебраического цепного комплекса.

Определение. Будем называть (C^0, ∂^0) **подкомплексом** алгебраического цепного комплекса (C, ∂), если

$$C^0 = \left\{C_k^0\right\}, \quad \partial^0 = \left\{\partial_k^0\right\} \tag{1.71}$$

такие, что

$$C_k^0 \subseteq C_k \tag{1.72}$$

и

$$\partial_k^0 : \ C_k^0 \to C_{k-1}^0 \tag{1.73}$$

причем дифференциал ∂_k^0 является сужением дифференциала

$$\partial_k^0 = \partial_k\big|_{C_k^0} \tag{1.74}$$

Таким образом, получаем

$$\ldots \to C_{n+1}^0 \xrightarrow{\partial_{n+1}^0} C_n^0 \xrightarrow{\partial_n^0} C_{n-1}^0 \xrightarrow{\partial_{n-1}^0} \ldots \longrightarrow C_1^0 \xrightarrow{\partial_1^0} C_0^0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{1.75}$$

причем имеют место включения (1.72).

Для каждого номера n мы имеем группу и подгруппу, значит, можно сделать фактор-группу. Тогда получим третий алгебраический цепной комплекс, состоящий из фактор-групп. Каждую из групп C_n профакторизуем по подгруппе C_n^0, то получим

$$\ldots \to C_{n+1}/C_{n+1}^0 \xrightarrow{\hat{\partial_{n+1}}} C_n/C_n^0 \xrightarrow{\hat{\partial_n}} C_{n-1}/C_{n-1}^0 \xrightarrow{\hat{\partial_{n-1}}} \ldots \longrightarrow C_1/C_1^0 \xrightarrow{\hat{\partial_1}} C_0/C_0^0 \longrightarrow 0 \tag{1.76}$$

Рассмотрим дифференциал

$$C_n/C_n^0 \xrightarrow{\hat{\partial}} C_{n-1}/C_{n-1}^0 \tag{1.77}$$

Фактор-группа есть группа, состоящая из классов смежности по данной подгруппе. Между классами смежности определяется бинарная операция. Чтобы определить гомоморфизм фактор-групп, возьмем некоторый класс смежности g и рассмотрим, куда перейдет этот класс смежности при действии дифференциала:

$$[g] \longmapsto \hat{\partial}[g] \tag{1.78}$$

Возьмем некоторый представитель из этого класса смежности, действуем на него дифференциалом ∂_n. Далее определяем, в какой класс смежности попал полученный элемент

$$g + g_0 \xrightarrow{\partial_n} \partial_n(g + g_0), \quad g_0 \in C_n^0 \tag{1.79}$$

Классу смежности g будем сопоставлять класс смежности указанного элемента

$$[g] \longmapsto [\partial_n(g + g_0)] \tag{1.80}$$

Таким образом, мы определили дифференциалы для алгебраического цепного коплекса (1.76).

Проверим, что и в этом случае композиция будет тривиальна. Применим два дифференциала:

$$\hat{\partial_{n-1}} \cdot \hat{\partial}_n = 0 \tag{1.81}$$

Таким образом, если заданы некоторый алгебраический цепной комплекс и его подкомплекс (все его группы являются подгруппами комплекса), то можно образовать так называемый фактор-комплекс (алгебраический цепной комплекс, который является фактор-комплексом). Для него корректно определяются дифференциалы со свойством (1.81).

Лекция 2. Гомоморфизм двух алгебраических цепных комплексов. Гомология симплициальных комплексов.

Подкомплекс алгебраического цепного комплекса.

Ранее было отмечено, что в каждой размерности $m \in \mathbb{N}$ имеется последовательность гомоморфизмов:

$$0 \to C_m^0 \overset{\gamma_m}{\to} C_m \overset{\pi_m}{\to} C_m/C_m^0 \to 0 \tag{2.1}$$

группа размерности m подкомплекса складывается в группу цепей размерности m большого комплекса (C_m) и затем получаем проекцию в фактор-группу.

Отображение или вложение подкомплекса в комплекс – это мономорфизм. **Мономорфизм** – это гомоморфизм групп, который является инъективным. Если гомоморфизм групп является суръективным, он называется **эпиморфизмом**.

Отметим также что образ вложения совпадает с ядром проекции. Таким образом, γ_m – мономорфизм, π_m – эпиморфизм.

Гомоморфизм двух алгебраических цепных комплексов.

Пусть имеется некоторый комплекс

$$(C, \partial): \quad C = \{C_k\}, \quad \partial = \{\partial_k\} \tag{2.2}$$

и комплекс

$$(D, \tilde{\partial}): \quad D = \{D_k\}, \tilde{\partial} = \left\{\tilde{\partial}_k\right\} \tag{2.3}$$

Определение. Гомоморфизмом алгебраических цепных комплексов называется такое отображение

$$\varphi = \{\varphi_k\}, \ \varphi_k: \ C_k \to D_k \tag{2.4}$$

причем имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & C_{k+1} & \overset{\partial_{k+1}}{\to} & C_k & \overset{\partial_k}{\to} & C_{k-1} & \to \ldots \to & C_0 & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & \\
\ldots \to & D_{k+1} & \overset{\tilde{\partial}_{k+1}}{\to} & D_k & \overset{\tilde{\partial}_k}{\to} & D_{k-1} & \to \ldots \to & D_0 & \to 0
\end{array}$$

Рис. 2.1: Диаграмма.

Также выполняется условие коммутативности диаграмм:

$$\varphi_k \cdot \partial_{k+1} = \tilde{\partial}_{k+1} \cdot \varphi_{k+1} \quad \forall k \tag{2.5}$$

Заметим также, что если задан гомоморфизм

$$\varphi = \{\varphi_k\} \quad \varphi : \ C \to D \tag{2.6}$$

то циклы из любой группы цепей переводятся в циклы, а границы переводятся в границы:

$$\varphi_k : \ Z_k^C \to Z_k^D \tag{2.7}$$

$$\varphi_k : \ B_k^C \to B_k^D \tag{2.8}$$

Данное свойство следует из определения.

Известно, в каждой группе цепей подгруппа циклов содержит подгруппу границ. Рассмотрим гомоморфизм γ_m. Он переводит циклы комплекса C_m^0 переводит в циклы C_m:

$$Z_m^0 \overset{\gamma_m}{\to} Z_m \tag{2.9}$$

Аналогично с границами:

$$B_m^0 \to B_m \tag{2.10}$$

Следовательно, по стандартной алгебраической конструкции гомоморфизмов фактор-групп мы можем построить

$$H_m^0 \overset{\gamma_m}{\to} H_m \tag{2.11}$$

где группа гомологий есть фактор группа

$$H_m^0 = Z_m^0 / B_m^0 \tag{2.12}$$

$$H_m = Z_m / B_m \tag{2.13}$$

Аналогично можно показать, что гомоморфизм при π_m переводит гомологии комплекса C в гомологии фактор-комплекса:

$$H_m^0 \overset{\gamma_m}{\to} H_m \overset{\pi_m}{\to} H_m^\vee \tag{2.14}$$

В каждой размерности можно записать следующую последовательность групп

$$H_{m-1}^0 \overset{\gamma_{m-1}}{\longrightarrow} H_{m-1} \overset{\pi_{m-1}}{\longrightarrow} H_{m-1}^\vee \tag{2.15}$$

Рассмотрим диаграмму на рис. 2.2.

Возникает вопрос: как связать последовательности гомоморфизмов (2.14) и (2.15)?

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & C_m^0 & \to & C_m & \to & C_m/C_m^0 \to 0 \\
 & & \downarrow \partial^0 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \to & C_{m-1}^0 & \to & C_{m-1} & \to & C_{m-1}/C_{m-1}^0 \to 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial
\end{array}$$

Рис. 2.2: Диаграмма.

Вернемся к последовательности (2.1). Обратим внимание, что образ группы C_m^0 в точности совпадает с ядром следующего гомоморфизма. В связи с этим рассмотрим следующее понятие.

Определение. Последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \tag{2.16}$$

называется **точной в члене B**, если образ гомоморфизма, который действует в группу B совпадает с ядром следующего гомоморфизма, то есть

$$Im\ \alpha = Ker\ \beta \tag{2.17}$$

Применим указанное определение к (2.1). Тогда получим, что указанная последовательность является точной в члене C_m. Более того, она является точной и в других двух членах C_m^0 и C_m/C_m^0. Таким образом, последовательность (2.1) точна в каждом члене.

Рассмотрим **5-лемму (лемму Стинрода).**

Пусть даны 5-членные последовательности абелевых групп

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\alpha_3} A_4 \xrightarrow{\alpha_5} A_5 \tag{2.18}$$

и

$$B_1 \xrightarrow{\beta_1} B_2 \xrightarrow{\beta_2} B_3 \xrightarrow{\beta_3} B_4 \xrightarrow{\beta_5} B_5 \tag{2.19}$$

Между этими последовательностями имеются гомоморфизмы в соответствии с диаграммой, представленной на рис. 2.3.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_5} & A_5 \\
\downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_5} & B_5
\end{array}$$

Рис. 2.3: Диаграмма.

Пусть выполняются условия

1. указанные последовательности являются точными в членах 2,3,4.
2. Диаграмма на рис. 2.3 коммутативна (то есть каждая часть данной диаграммы коммутативна) (здесь φ_k – гомоморфизмы).
3. φ_1, φ_2, φ_4, φ_5 – изоморфизмы (то есть они инъективные и суръективные одновременно).

Тогда φ_3 – изоморфизм.

Построение связывающего гомоморфизма и длинной гомологической последовательности пары алгебраических цепных комплексов.

Вернемся к рассматриваемой задаче. Из последовательности гомоморфизмов (2.1) мы индуцируем гомоморфизм соответствующих гомологий. Тогда возникают последовательности (2.14) и (2.15). Как связать эти две последовательности? Построим некоторый гомоморфизм, переводящий группу $H_m^\vee$ в H_{m-1}, далее построим гомоморфизм, переводящий $H_{m-1}^\vee$ в группу ещё меньшей размерности и так далее. Тогда мы можем вытянуть короткие последовательности в одну длинную последовательность. Известно, что можно построить такой гомоморфизм, что полученная длинная последовательность будет точной в каждом своем члене.

Рассмотрим некоторый класс гомологий из $H_m^\vee$. Пусть $a \in H_m^\vee$.

$Z_m\,(C/C_0)$ – это такие классы смежности цепей из C, что их границы равны нулю в этом комплексе, что означает

$$\partial_n a \in C^0 \tag{2.20}$$

Тогда a – **относительный цикл** и рассматриваемая граница

$$\partial_m^\vee(a) = 0 \tag{2.21}$$

Рассмотрим некоторую относительную цепь из диаграммы на рис. 2.2. Пусть

$$\alpha \in C_m/C_m^0 \tag{2.22}$$

Пусть

$$a \to C_m^0 \xrightarrow{\gamma_n} C_m \xrightarrow{\pi_m} C_m/C_m^0 \to 0 \tag{2.23}$$

и

$$0 \to C_{m-1}^0 \xrightarrow{\gamma_{m-1}} C_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} C_{m-1}/C_{m-1}^0 \tag{2.24}$$

Известно, что

$$\pi_m^{-1}(\alpha) \in C_m \tag{2.25}$$

так как π_m – эпиморфизм.

Возьмем границу от прообраза и перейдем к прообразу гомоморфизма:

$$\gamma_{m-1}^{-1} \circ \partial \cdot \pi_m^{-1}(\alpha) = \beta \tag{2.26}$$

Получили некоторый элемент β.

Рассмотрим некоторый цикл. Пусть известно, что его относительная граница равнялась нулю. Тогда, если α – цикл, то

$$\partial\alpha \in C_{m-1}^0 \tag{2.27}$$

Тогда корректно определено

$$\exists\, \beta = \gamma_{m-1}^{-1} \cdot \partial \circ \pi_m^{-1}(\alpha) \tag{2.28}$$

При этом полученный элемент будет циклом:

$$\beta \in Z_{m-1}(C^0) \tag{2.29}$$

Тогда

$$\partial\beta = 0 \tag{2.30}$$

Проверим, что в рассматриваемом примере и граница переходит в границу. Рассмотрим границу для C_m/C_m^0. Прообраз границы есть граница (в данном случае). Граница большого алгебраического комплекса C аннулируется (так как граница будет взята повторно). Таким образом, когда мы берём границу от C_m/C_m^0, получим границу в группе C_m плюс некий элемент из n-мерных цепей комплекса C^0. Обозначим относительную границу какого-то элемента

$$\tau = \partial^\vee(\nu) \in C_m/C_m^0 \tag{2.31}$$

Тогда ее прообраз

$$\pi_m^{-1}(\tau) = \partial\eta + \xi \tag{2.32}$$

где $\partial\eta \in B_n$, $\xi \in C_m^0$.

Далее применяем границу еще раз

$$\partial(\partial\eta + \xi) = \partial\xi \tag{2.33}$$

Тогда

$$\gamma_{m-1}^{-1}\partial(\partial\eta + \xi) = \partial\xi \tag{2.34}$$

Таким образом, мы определили **цепное соответствие**

$$\boxed{\delta_m := \gamma_{m-1}^{-1} \cdot \partial \cdot \pi_m^{-1}} \tag{2.35}$$

Мы выяснили, что такое соответствие переводит циклы относительного комплекса в

циклы

$$\delta_m : \quad Z_m\left(C/C^0\right) \longrightarrow Z_{m-1}(C^0) \tag{2.36}$$

а группа границ переходит в группу границ:

$$\delta_m : \quad B_m\left(C/C^0\right) \longrightarrow B_{m-1}(C^0) \tag{2.37}$$

Группа границ содержится в циклах. Поэтому получаем, что группа гомологий будет переходить в группу гомологий C^0:

$$\boxed{\delta_m : \quad H_m(C/C^0) \longrightarrow H_{m-1}(C^0)} \tag{2.38}$$

Таким образом, мы рассмотрели в диаграмме (2.1) некое отображение, которое каждому классу эквивалентности в C_m/C_m^0 ставит в соответствие некий элемент в C_{m-1}^0. Это соответствие корректно работает, только если C_m/C_m^0 – цикл.

Таким образом, мы получили, что $n-$мерная группа гомологий фактор комплекса $H_m^\vee$ переходит в группу $n-1$-гомологий подкомплекса C^0 с помощью построенного отображения δ_m. Легко заметить, что δ_m – гомоморфизм. δ_m называется **связывающим гомоморфизмом**. Таким образом, мы получили связь между короткими последовательностями. Теперь мы можем построить с помощью связывающего гомоморфизма длинную гомологическую последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_{m+1}^\vee \xrightarrow{\delta_{m+1}} H_m(C^0) \xrightarrow{\gamma_m} H_m(C) \xrightarrow{\pi_m} H_m^\vee \xrightarrow{\delta_m} \tag{2.39}$$

где

$$H_m^\vee = H_m\left(C/C^0\right) \tag{2.40}$$

Теорема о последовательности гомоморфизмов.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Последовательность групп и гомоморфизмов (2.39) является точной в каждом члене.

Доказательство. Докажем точность в члене $H_m(C)$. Для этого нужно показать, что образ данного гомоморфизма совпадает с ядром. Соответственно, нужно показать

a) $Im\ \gamma_m \subseteq Ker\ \pi_m$

b) $Ker\ \pi_m \subseteq Im\ \gamma_m$

Откуда

$$Im\ \gamma_m = Ker\ \pi_m \tag{2.41}$$

Рассмотрим пункт a). Пусть дан некоторый элемент из группы гомологий $H_m(C)$:

$$\hat{a} \in Im\ \gamma_m \tag{2.42}$$

Тогда существует такой a – представитель класса гомологий

$$a = \alpha + \partial\beta \tag{2.43}$$

где α – некоторый цикл. Это означает, что

$$a \in Z_m(C^0) \tag{2.44}$$

Тогда, после применения π_m получим

$$\pi_m(\alpha + \partial\beta) \in B\left(C/C^0\right) \tag{2.45}$$

Это означает, что

$$\pi_m(\hat{a}) = 0 \in H_m^{\vee} \tag{2.46}$$

то есть

$$\boxed{\hat{a} \in Ker\ \pi_m} \tag{2.47}$$

Таким образом, пункт а) доказан.

Докажем пункт b). Возьмем элемент из ядра.

$$\hat{a} \in Ker\ \pi_m \tag{2.48}$$

это означает, что существует представитель такой, что

$$a \in Z_m(C^0) \tag{2.49}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{a} \in Im\ \gamma_m \tag{2.50}$$

Таким образом, пункт b) доказан. Значит, мы доказали точность в члене $H_m(C)$. Докажем также точность в члене $H_m(C^0)$. Для этого мы должны доказать

a) $Ker\ \gamma_m \subseteq Im\ \delta_{m+1}$

b) $Im\ \delta_{m+1} \subseteq Ker\gamma_m$

Возьмем некоторый элемент из ядра. Это означает, что мы взяли некоторый класс гомологий, у которого есть цикл в C^0, который при переходе в $H_m(C)$ переходит в нулевой класс гомологий. Это значит, что этот цикл в большом комплексе группы C являлся не

циклом, а границей. Таким образом, если

$$\hat{a} \in Ker\ \gamma_m \tag{2.51}$$

то существует представитель

$$a \in Z_m(C^0): \quad a \in B_m(C) \tag{2.52}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to C^0_{m+1} & \overset{\gamma_{m+1}}{\to} & C_{m+1} & \overset{\pi_m}{\to} & C_{m+1}/C^0_{m+1} \to 0 \\
\downarrow\partial^0 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial \\
0 \to C^0_m & \overset{\gamma_{m-1}}{\to} & C_m & \overset{\pi_{m-1}}{\to} & C_m/C^0_m \to 0 \\
\downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial
\end{array}$$

Рис. 2.4: Диаграмма.

Отсюда получаем, что

$$a = \partial(\beta) \tag{2.53}$$

Если мы возьмем в C_{m+1}/C^0_{m+1} какой-то класс гомологий, то его представитель имеет вид

$$\alpha + \partial\nu + \tau \tag{2.54}$$

где $\alpha \in C$, $\tau \in C^0$. Причем

$$\partial\alpha \in C^0 \tag{2.55}$$

так как речь идет об относительном цикле.

Таким образом, рассматриваемый класс и будет прообразом элемента:

$$\hat{a} \in Im\ \delta_{m+1} \tag{2.56}$$

Аналогично доказывается пункт b). Предположим, что элемент взят из образа гомоморфизма δ_{m+1}. Это означает, что мы берем класс со структурой (2.54). Берем его представитель. Берем его границу:

$$\partial(\alpha + \partial\nu + \tau) = \partial(\alpha) + \partial(\tau) \in C^0_m \tag{2.57}$$

Тогда получаем, что в $H_m(C^0)$ этот образ будет нулем, так как

$$\partial(\alpha) + \partial\tau = \gamma_m^{-1}\partial\pi_m^{-1}(a) \tag{2.58}$$

Применим к этому элементу γ_m:

$$\gamma_m\left(\partial(\alpha)+\partial\tau\right)=\gamma_m\cdot\gamma_m^{-1}\partial\pi_m^{-1}(a)=\partial\pi_m^{-1}(a)\in B_m(C) \tag{2.59}$$

То есть

$$[\partial\pi_m^{-1}]=0\in H_m(C) \tag{2.60}$$

Точность в третьем члене доказывается аналогично. Таким образом, мы построили точную длинную гомологическую последовательность пары алгебраических цепных комплексов.

Гомология сим гляциальных комплексов. N-мерный симплекс.

Определение. Стандартный симплекс $\sigma^0=\{1\}$ – точка на прямой. В n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ **стандартный симплекс размерности ноль** – это точка $\sigma^0=(1,0\ldots,0)$.

Симплекс размерности 1 представляет собой множество, представленное на рис. 2.5.

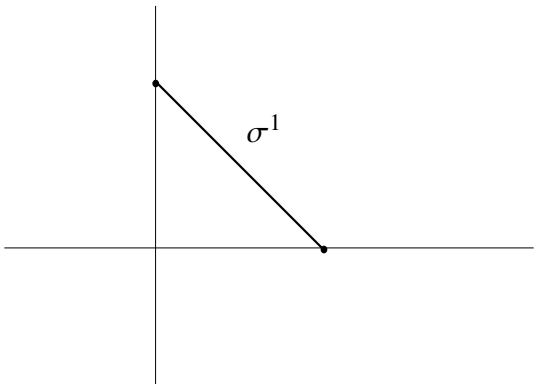

Рис. 2.5: Иллюстрация к объяснению.

То есть, σ^1 =выпуклая оболочка двух точек (1,0) и (0,1).

Аналогично, **симплекс размерности 2** есть выпуклое замыкание трах точек (рис. 2.6).
То есть

$$\sigma^2=[a_1,a_2,a_3] \tag{2.61}$$

где

$$a_1=(1,0,0),\quad a_2=(0,1,0),\quad a_2=(0,0,1) \tag{2.62}$$

Определение. n-мерным симплексом называется выпуклое замыкание (выпуклая оболочка и ее замыкание) $n+1$ точки в $\mathbb{R}^n$, находящихся в общем положении, то есть эти точки не лежат ни в какой гиперплоскости размерности меньше n.

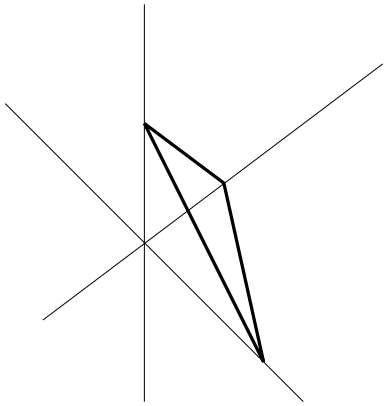

Рис. 2.6: Иллюстрация к объяснению.

Например, для симплекса τ^3 имеем четыре точки, которые не должны лежать ни в какой гиперплоскости, размерность которого меньше трех. Тогда эти четыре точки образуют некий тетраэдр.

Определение. n-мерным конечным симплициальным комплексом называется объединение симплексов размерности $k \leqslant n$ (среди них существуют n-мерные симплексы), которые удовлетворяют условиям

1. Вместе с каждым симплексом в K входят все его грани, то есть выпуклые замыкания любого подмножества его вершины

2. любые два симплекса в K могут пересекаться только по их общей грани. При этом симпплексы могут пересекаться как по вершине, так и по общей грани, но не могут пересекаться по внутренним точкам.

Лекция 3. Гомология симплициальных комплексов.

Полиэдр. Компактный полиэдр.

Замечание. Рассмотрим K – симплициальный комплекс. X – топологическое пространство, такое, что оно гомеоморфно множеству точек этого комплекса. Если топологическое прорабство гомеоморфно этому комплексу:

$$X \cong K \tag{3.1}$$

то пространство обозначают

$$X = |K| \tag{3.2}$$

и называют **полиэдром**.

Если симплициальный комплекс конечный, то пространство X будет **компактным**.

Вспомним некоторые определения.

Определение. (X, τ) – **топологическое пространство**, если

$$\tau = \{u_\alpha\}, \quad u_\alpha \in X \tag{3.3}$$

такое, что

$$\emptyset, \overline{X} \in \tau \tag{3.4}$$

для любого объединения

$$\bigcup_\alpha u_\alpha \in \tau \tag{3.5}$$

для любого конечного пересечения

$$\bigcap_{k=1}^{N} u_{\alpha_k} \in \tau \tag{3.6}$$

τ – топология.

Определение. Пусть даны два топологических пространства (X, τ) и (Y, μ) и отображение

$$f: \quad X \to Y \tag{3.7}$$

Данное отображение называется **непрерывным**, если в том и только в том случае, если из

$$\forall V_\beta \in \mu \tag{3.8}$$

следует

$$f^{-1}(V_\beta) \in \tau \tag{3.9}$$

Определение. Отображение

$$f: \quad X \to Y \tag{3.10}$$

называется **гомеоморфизмом** в том и только в том случае, если f – непрерывное и взаимно-однозначное отображение и f^{-1} непрерывно.

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется **компактным**, в том и только в том случае, если для любого набора $\{u_\gamma\}$ (он называется открытым покрытием X), что $u_\gamma \in \tau$, $\bigcup\limits_\gamma u_\gamma = X$ существует конечное подпокрытие, то есть существует конечный набор

$$\{u_{\gamma_k}\}_{1 \leqslant k \leqslant N}: \quad \bigcup_k u_{\gamma_k} = X \tag{3.11}$$

Таким образом, если нам дано некоторое топологическое пространство и существует гомеоморфный ему симплициальный комплекс, то мы можем задать так называемую триангуляцию топологического пространства.

Триангуляция топологического пространства.

Определение. **Триангуляция топологического пространства** (X, τ) задается следующим образом. Пусть

$$\varphi: \quad K \to X \tag{3.12}$$

– гомеоморфизм. Каждой вершине $\{a_j\}$ комплекса K сопоставляются

$$\varphi(a_j) \in X \tag{3.13}$$

– вершины триангуляции. Если же мы берем какой-то симплекс, принадлежащий комплексу

$$s_i \in K \tag{3.14}$$

то $\varphi(s_i)$ – криволинейный симплекс в X.

Можно сказать, что триангуляция – это пара (K, φ), где

$$\varphi: \quad K \underset{\cong}{\to} X \tag{3.15}$$

Определение. **Мелкость триангуляции** (K, φ) – это наибольшая (наибольшее существует, так как рассматриваемый симплициальный комплекс конечный) длина одномерных симплексов, входящих в K.

Рассмотрим некоторые примеры триангуляций полиэдров.

Пример 1. Пусть имеется некоторая сфера S^2 (рис. 3.1). В качестве её триангуляции можно взять симплициальный комплекс K, изображенный на рис. 3.2.

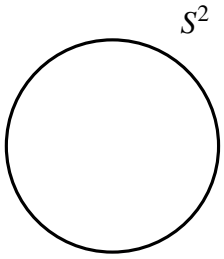

Рис. 3.1: Иллюстрация к примеру.

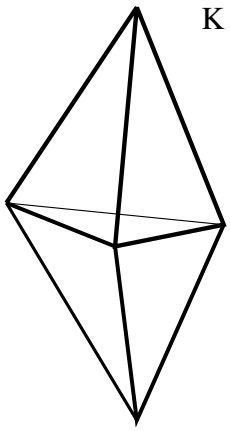

Рис. 3.2: Иллюстрация к примеру.

В этот симплициальный комплекс входит три двумерных симплекса сверху и три снизу (то есть шесть двумерных симплексов), девять одномерных симплексов и пять нульмерных симплексов.

Пример 2. Триангуляция диск D^2 представлена на рис. 3.3.

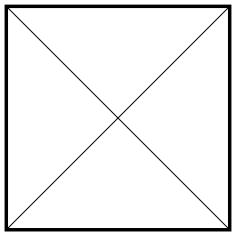

Рис. 3.3: Иллюстрация к примеру.

Здесь четыре двумерных симплекса, восемь одномерных симплексов и пять нульмерных.

Пример 3. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}P^2$ – проективное двумерное вещественное пространство, которое получается с помощью факторизации двумерного диска по эквивалентности, которая склеивает диаметрально противоположные точки (это

пространство нельзя изобразить в трёхмерном случае без самопересечений). В этом случае можно задать триангуляцию, указанную на рис. 3.4.

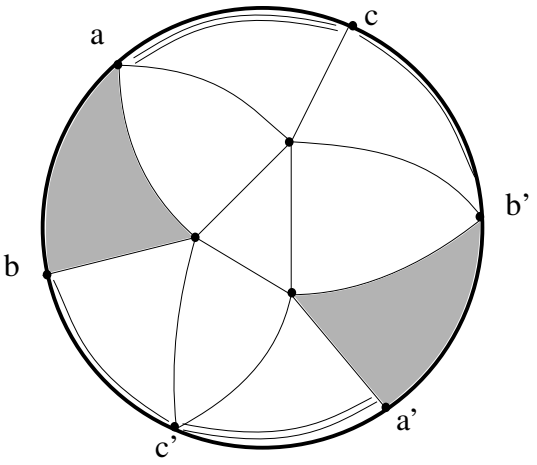

Рис. 3.4: Иллюстрация к примеру.

Пример 4. Двумерный тор (рис. 3.5) получается из слеклейки противоположных рёбер прямоугольника. Триангуляция получается путем склейки по указанным направлениям фигуры на рис. 3.6.

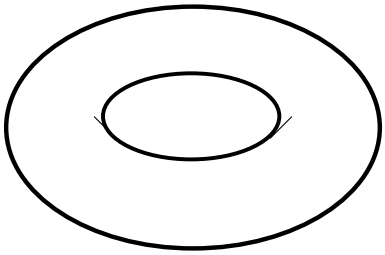

Рис. 3.5: Иллюстрация к примеру.

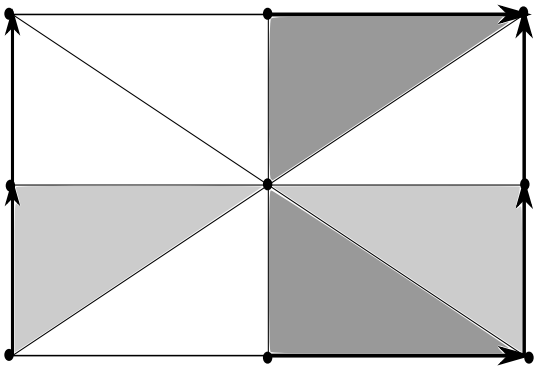

Рис. 3.6: Иллюстрация к примеру.

Ранее мы определили n-мерный сиплекс как выпуклое замыкание некоторого количества точек

$$\sigma^n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \tag{3.16}$$

Это означает, что каждая точка в этом симплексе $t \in \sigma^n$ выражается как

$$t = \sum_{k=0}^{n} t_k a_k \tag{3.17}$$

причем коэффициенты

$$t_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \tag{3.18}$$

Таким образом, n-мерный симплекс представляет собой совокупность точек, таких, что

$$\sigma^n = \left\{ t \middle| t = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k, \quad t_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \right\} \tag{3.19}$$

Ориентация симплекса.

Для последовательности точек, образующих n-мерный симплекс следует рассмотреть такое понятие, как ориентация симплекса.

Определение. Ориентация симплекса σ – это класс эквивалентности подстановок его вершин.

Отметим, что для случая $n + 1$ точки существует $(n + 1)!$ подстановок.

Определение. Две подстановки называются **эквивалентными**, если они отличаются на четное число транспозиций. Транспозиция – перестановка двух элементов.

Например, пусть дан симплекс

$$\sigma^1 = [a, b] \tag{3.20}$$

Тогда можно рассмотреть симплекс, полученный в результате перестановки

$$\tilde{\sigma}^1 = [b, a] \tag{3.21}$$

В этом случае мы получаем симплексы разной ориентации. В этом случае полагают, что

$$\sigma^1 = -\tilde{\sigma}^1 \tag{3.22}$$

То есть, если мы переходим к подстановке, которая отличается на нечетное число транспозиций, то изначальный симплекс нужно записать со знаком минус и с переставленными вершинами.

Пример. Пусть

$$\sigma^n = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots a_n] \tag{3.23}$$

Тогда

$$-\sigma^n = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-2}, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_n] \tag{3.24}$$

Граница симплекса.

В границу симплекса входит совокупность всех точек его $n-1$-одномерных граней. Например, если мы имеем некоторый двумерный симплекс, то его граница состоит из одномерных граней. Симплекс определен с помощью вершин:

$$\sigma^n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \tag{3.25}$$

Тогда граница симплекса определятся

$$\partial\sigma^n := (-1)^0[a_1, \ldots, a_n] + (-1)^1[a_0, a_2, \ldots, a_n] + \ldots + (-1)^n[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n] \tag{3.26}$$

В случае двумерного симплекса это означает введение некоторого обхода (рис. 3.7). Фактически ориентация и означает выбор обхода совокупности точек.

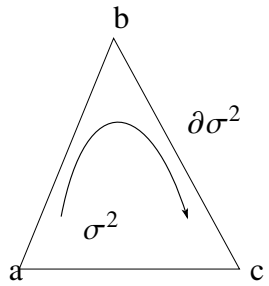

Рис. 3.7: Иллюстрация к примеру.

Соответственно, в данном примере получаем

$$\partial\sigma^2 = [b, c] - [a, c] + [a, b] = [a, b] + [b, c] + [c, a] \tag{3.27}$$

Для случая одномерного симплекса (рис. 3.8.)

$$\partial\sigma^1 = [b] - [a] = b - a \tag{3.28}$$

Рис. 3.8: Иллюстрация к примеру.

Построение алгебраического цепного комплекса для заданного симплициального комплекса.

Пусть имеется некоторый комплекс K, а в нем – какие-то симплексы разных размерностей

$$K = \left\{ s_j \right\}_{1 \leqslant j \leqslant N} \tag{3.29}$$

Группа коэффициентов $(G, +)$ – абелева группа.

Определение. m-мерной цепью комплекса K называется произвольная линейная комбинация m-мерных симплексов из K с коэффициентами из группы G.

Тогда для некоторой n-мерной цепи c

$$c = \sum_{j=1}^{n} g_j s_j^m, \quad g \in G \tag{3.30}$$

Рассмотрим совокупность всевозможных n-мерных цепей. Тогда получим абелеву группу симплициальных цепей комплекса K

$$\left\{ c = \sum_{j=1}^{n} g_j s_j^m, \quad g_j \in G \right\} = C_m(K) \tag{3.31}$$

Пусть дана некоторая цепь

$$d = \sum_{j=1}^{n} g'_j s_j^m, \; g'_j \in G \tag{3.32}$$

Тогда сумма цепей определяется через

$$\boxed{c + d := \sum_{j=1}^{n} (g_j + g'_j) s_j^m} = d + c \tag{3.33}$$

Полученная группа является абелевой, она коммутативна. Противоположным элементом будет

$$-c = \sum (-g_j) s_j^m \tag{3.34}$$

Нулевой элемент

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot s_j \tag{3.35}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом, $C_m(K;G)$ – абелева группа цепей комплекса K.

Граничный гомоморфизм.

Построим граничный гомоморфизм (дифференциал) цепного комплекса

$$\partial : \quad C_m(K;G) \to C_{m-1}(K;G) \tag{3.36}$$

Определим границу цепи как совокупность соответствующих границ

$$\partial C = \sum_{j=1}^{n} g_j \cdot \partial(s_j^m) \tag{3.37}$$

Примем обозначение

$$-g_j = (-1) \cdot g_j, \quad g_j \in G \tag{3.38}$$

Если дан симплекс

$$s_j^m = [a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{jm}] \tag{3.39}$$

то (3.37) можно продолжить следующим образом

$$\partial C = \sum_{j=1}^{n} g_j \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k [a_{j_0}, \ldots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{k+1}}, \ldots, a_{j_m}] \right) \tag{3.40}$$

Проверим, что граничный гомоморфизм удовлетворяет условию, что его квадрат есть тривиальный гомоморфизм. Применим дифференциал дважды, считая, что симплекс

$$s_j^m = [a_{j_0}, a_{j_1} \ldots a_{j_p} \ldots a_{j_q} \ldots, a_{j_m}] \tag{3.41}$$

Тогда

$$\partial s_j^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k [a_{j_0} \ldots a_{j_{n-1}} a_{j_{n+1}} \ldots a_{j_m}] \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} \partial\partial : \quad (-1)^p \left[a_{j_0} \ldots a_{j_{p-1}} a_{j_{p+1}} \ldots a_{j_p} \ldots a_{j_m} \right] \to \\ \to (-1)^p (-1)^{q-1} \left[a_{j_0} \ldots a_{j_{p-1}} a_{j_{p+1}} \ldots a_{j_{q-1}} a_{j_{q+1}} \ldots a_{j_m} \right] \end{aligned} \tag{3.43}$$

Если же при первом применении граничного гомоморфизма мы рассмотрим тот симплекс, в котором выброшена точка с номером q, то получим

$$(-1)^q [a_{j_0} \ldots a_{j_p} \ldots a_{j_{q-1}} a_{j_{q+1}} \ldots a_{j_m}] \tag{3.44}$$

Тогда, после вторичного дифференцирования

$$(-1)^q(-1)^p[a_{j_0}\dots a_{j_{p-1}}a_{j_{p+1}}\dots a_{j_{q-1}}a_{j_{q+1}}\dots a_{j_m}] \tag{3.45}$$

Таким образом, после повторного дифференцирования симплекса мы получим ноль:

$$\partial\partial(s_j^m) = 0 \tag{3.46}$$

Отметим, что часто в группы G часто берется группа целых чисел с операцией сложения.

Таким образом, мы построили группы цепей и граничный гомоморфизм. То есть, у нас есть совокупность групп цепей

$$(C, \partial),\ C = \{C_k(K, \mathbb{Z})\} \tag{3.47}$$

и граничный гомоморфизм

$$\partial = \{\partial_k :\ C_k(K, \mathbb{Z}) \to C_{k-1}(K, \mathbb{Z})\} \tag{3.48}$$

– целочисленный цепной комплекс симплициального комплекса К.

Группы симплициальных гомологий комплекса К.

Определение. Группы гомологий алгебраического цепного комплекса $(C(K, \mathbb{Z}); \partial)$ называются **группами симплициальных гомологий комплекса К.**

Если $X \cong (K)$ – полиэдр, то группа гомологий определяется как

$$H_k(X, \mathbb{Z}) := H_k\left(C(K, \mathbb{Z})\right) \tag{3.49}$$

Возникает вопрос: что происходит, если два различных симплициальных комплекса гомеоморфны полиэдру? Рассмотрим сферу. Это полиэдр, так как мы можем сопоставить гомеоморфный ей симплициальный комплекс. Например, ей можно сопоставить симплициальный комплекс, изображенный на рис. 3.9 или же просто тетраэдр (рис. 3.10.)

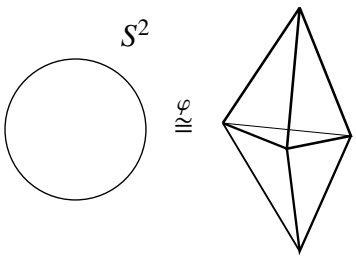

Рис. 3.9: Иллюстрация к примеру.

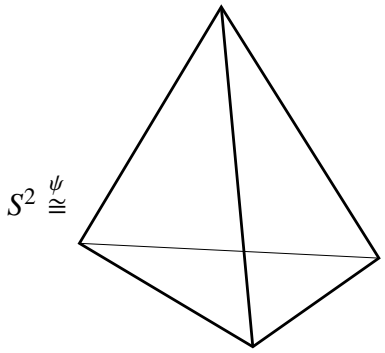

Рис. 3.10: Иллюстрация к примеру.

Вообще говоря, указанные комплексы разные. Однако, вне зависимости от того, какой комплекс мы выберем, гомологии будут одни и те же.

Теорема. Симплициальные гомологии полиэдра X (компактного) не зависят от выбора триангуляции.

Геометрический смысл циклов и границ в симплициальном комплексе K и его цепном комплексе.

Пусть есть некоторая цепь

$$c \in C_m(K; \mathbb{Z}) \tag{3.50}$$

причем

$$\partial c = 0 \tag{3.51}$$

Условие (3.51) означает, что существует совокупность n-мерных симплексов, таких, что их суммарная граница равна нулю.

Пример. Рассмотрим окружность. Ее триангулцию можно задать, например, треугольником (рис. 3.11).

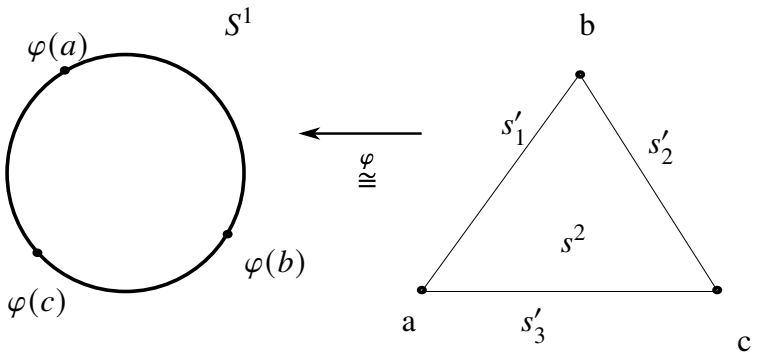

Рис. 3.11: Иллюстрация к примеру.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим цепь

$$c = s'_1 + s'_2 + s'_3 \in Z_1\left(C\left(D^2\right)\right) \tag{3.52}$$

Граница этой цепи

$$\partial c = (b-a) + (c-b) + (a-c) = 0 \tag{3.53}$$

При этом c – цикл. Граница есть

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 = \partial s^2 \tag{3.54}$$

так как

$$s^2 = [a, b, c] \tag{3.55}$$

Поэтому

$$c \in B_1\left(C\left(D^2\right)\right) \tag{3.56}$$

Очевидно, что группа гомологий диска

$$H_2(D^2, \mathbb{Z}) = 0 \tag{3.57}$$

Группа одномерных циклов совпадает с группой границ

$$Z_1 = \mathbb{Z} = B_1 \tag{3.58}$$

Поэтому одномерная группа гомологий

$$H_1 = 0 \tag{3.59}$$

Рассмотрим группу нульмерных циклов. При этом граница нульмерного симплекса всегда считается равной нулю:

$$\boxed{\partial(\sigma^0) = 0} \tag{3.60}$$

Поэтому, если мы рассмотрим нульмерную цепь

$$c = la + mb + qc \tag{3.61}$$

то получим, что c – цикл, так как $\partial c = 0$. Прибавим к данному циклу границу

$$c + \text{граница} = la + mb + qc + l(b-a) + m(c-b) = (q+m)c + lb + l(c-b) = (l+q+m)c \tag{3.62}$$

Таким образом, получаем в этом же классе гомологий нульмерную цепь, которая

определена одной вершиной. При этом (3.63) выполняется $\forall l, q, m$. Поэтому

$$H_0(D^2) \approx \mathbb{Z} \tag{3.63}$$

Таким образом, для двумерного диска получаем

$$H_k(D^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{3.64}$$

Пример. Рассмотрим полноторие. Внутри него вырежем область в виде шара (рис. 3.12).

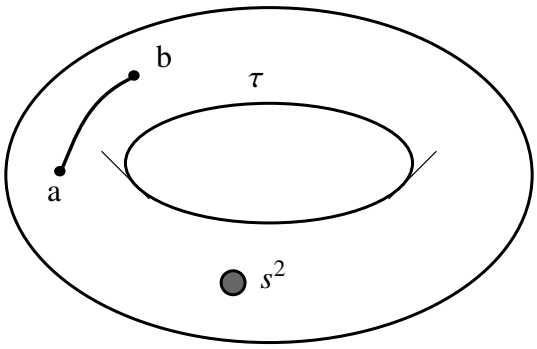

Рис. 3.12: Иллюстрация к примеру.

Рассмотрим возможные гомологии. Можно взять цепь $\alpha \cdot a$, причем ее граница

$$\partial(\alpha a) = 0 \tag{3.65}$$

К этому циклу можно добавить границу

$$\alpha b = \alpha a + \alpha(b - a) \tag{3.66}$$

Если два цикла отличаются друг от друга на границу, то они находятся в одном и том же классе гомологий. Это означает, что каждая точка определяет класс гомологий. Поэтому нульмерная группа гомологий

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \tag{3.67}$$

Одномерную группу гомологий можно определить через

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = [\tau] \cdot \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \tag{3.68}$$

Двумерная гомология

$$H_2(X, \mathbb{Z}) = [s^2] \cdot \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \tag{3.69}$$

Гомология конкретного симплициального комплекса.

Вычислим гомологии симплекса $(\tau^m) = K$. Возьмем некоторый симплициальный комплекс, который гомеоморфен трехмерному шару. Рассматриваем симплициальный комплекс, в котором

$$K = \{\tau^m, \text{ грани } \tau^m\} \tag{3.70}$$

Найдем его гомологии $H(K; G)$, где G – абелева группа коэффициентов.

Изобразим некоторый симплекс (рис. 3.13). Рассмотрим цепь размерности к

$$c^k = \sum_j g_j \tau_j^k \tag{3.71}$$

где размерность $1 < k < m$.

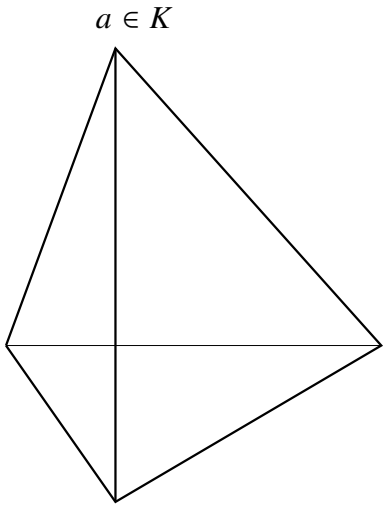

Рис. 3.13: Иллюстрация к объяснению.

Разобьем эту цепь на две суммы.

$$c^k = \sum_j g_j \tau_j^k + \sum_i^{\infty} h_i [a, \tau_i^{k-1}] \tag{3.72}$$

то есть мы выделили симплексы, которые содержат вершину а и те, которые не содержат:

$$a \notin \tau_i^{k-1}, \; a \notin \tau_j^k \tag{3.73}$$

Пусть c^k – цикл, то есть

$$\partial c^k = 0 \tag{3.74}$$

Добавим к цепи c^k некоторую границу

$$c^k + \text{граница} = \sum_j g_j \tau_j^k - \partial \sum_j g_j [a, \tau_j^k] + \sum_i h_i [a, \tau_i^{k-1}] =$$

$$= \sum_j g_j \tau_j^k - \sum_j g_j \tau_j^k + \sum_i \tilde{h}_i [a, \tau_i^{k-1}] + \sum h_i [a, \tau_i^{k-1}] = \sum_i (\tilde{h}_i + h_i)[a; \tau_i^{k-1}] =$$

$$= \sum_i \gamma_i [a; \tau_i^{k-1}] \quad (3.75)$$

Это тоже цикл. Граница этого симплекса тоже равна нулю

$$\partial \sum \gamma_i [a, \tau_i^{k-1}] = 0 \quad (3.76)$$

При этом

$$\sum \gamma_i \tau_i^{k-1} + \sum [a, \tau^{k-2}] = 0 \quad (3.77)$$

Отсюда следует

$$\gamma_i = 0 \quad (3.78)$$

Вывод: любой к-мерный цикл гомологичен нулю, то есть

$$H_k(\tau^m, G) = 0 \quad (3.79)$$

Лекция 4. Точная последовательность Майера-Виеториса.

Гомология конкретного симплициального комплекса.

Ранее мы рассматривали симплекс σ^m, который можно представить как рис. 4.1.

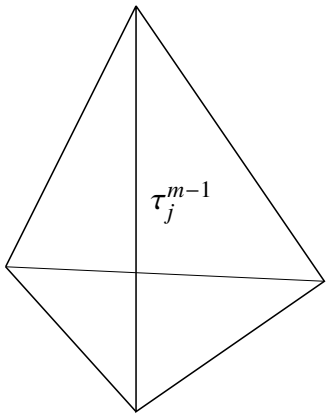

Рис. 4.1: Иллюстрация к примеру.

Мы вычислили гомологии симплициального комплекса $K = \{\sigma^m\}$, $H_k(K, \mathbb{Z})$. Посчитаем теперь гомологии комплекса, который порождается границей

$$L = \{\sigma^n\} \tag{4.1}$$

L – подкомплекс K.

Рассмотрим группы цепей $C_k(K)$ и $C_k(L)$. Заметим, что они совпадают, если $k \leqslant m-1$:

$$C_k(K) = C_k(L), \;\; 0 \leqslant k < m-1 \tag{4.2}$$

При этом подразумеваются целочисленные цепи $C_k(K; \mathbb{Z})$.

Отсюда получаем, что нульмерные гомологии подкомплекса L совпадают с группой $\mathbb{Z}$:

$$H_0(L, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \tag{4.3}$$

Отсюда следует

$$H_k(L, \mathbb{Z}) = 0, \; 0 < k < m-1 \tag{4.4}$$

Возьмем гомологию подкоплекса L размерности $k > m-1$. В этом случае гомологии тоже равны нулю, так как в границе нет симплексов равмерности больше $m-1$

$$H_k(L; \mathbb{Z}) = 0, \;\; k > m-1 \tag{4.5}$$

Остается вычислить гомологии размерности $m-1$: $H_{m-1}(L, \mathbb{Z})$. В случае рис. 4.1 симплексов τ_j^{m-1} будет четыре (вообще говоря, их больше).

Определение. Мы будем говорить, что пересекающиеся симплексы хорошо или правильно ориентированы (**согласованы**), если на общей грани у них противоположные ориентации (рис. 4.2).

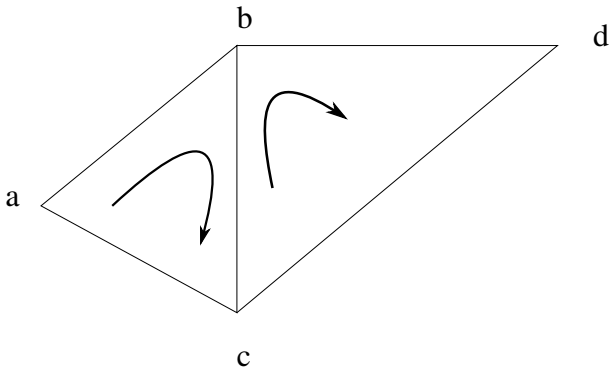

Рис. 4.2: Иллюстрация к примеру.

Например, на рис. 4.2 имеем два симплекса

$$\tau_1 = [a, b, c],\ \tau_2 = [c, b, d] \tag{4.6}$$

у которых есть общая грань cb.

Пусть на границе симплекса σ^m задана согласованная ориентация всех симплексов τ_j^{m-1}. Тогда, если мы возьмем сумму всех этих симплексов с указанной ориентацией, то общая граница будет равна нулю

$$\partial \left(\sum_j \tau_j^{m-1} \right) = 0 \tag{4.7}$$

Тогда получаем, что

$$\alpha = \sum_j \tau_j^{m-1} \in C_{m-1}(L) \tag{4.8}$$

– цикл, причем он принадлежит группе циклов рассматриваемого комплекса

$$\alpha \in Z_{m-1}(L, \mathbb{Z}) \tag{4.9}$$

Рассмотрим дифференциалы в группах цепей $C_m(K, \mathbb{Z})$. Учтем, что

$$0 = C_m(L, \mathbb{Z}) \tag{4.10}$$

Тогда можно составить диаграмму (рис. 4.3)

Группы циклов совпадают:

$$Z_{m-1}(K) = Z_{m-1}(L) \tag{4.11}$$

$$\begin{array}{ccc} C_m(K,\mathbb{Z}) & 0 = & C_m(L,\mathbb{Z}) \\ \downarrow \partial_m & & \downarrow \partial_m \\ C_{m-1}(K,\mathbb{Z}) & = & C_{m-1}(L,\mathbb{Z}) \\ \downarrow \partial_{m-1} & & \downarrow \partial_{m-1} \\ \dots & = & \dots \end{array}$$

Рис. 4.3: Диаграмма.

Однако у них не совпадают границы и, соответственно, группы гомологий тоже. Отметим, что

$$B_{m-1}(L,\mathbb{Z}) = 0 \tag{4.12}$$

При этом группа границ

$$B_{m-1}(K,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \tag{4.13}$$

Поэтому

$$H_{m-1}(K) = Z_{m-1}(K)/B_{m-1}(L) = 0 \tag{4.14}$$

и

$$H_{m-1}(L) = Z_{m-1}(L)/B_{m-1}(L) = \mathbb{Z} \tag{4.15}$$

Таким образом, гомологии размерности $m-1$, порожденные границей, равны $\mathbb{Z}$:

$$H_{m-1}(\partial\tau^m) = \mathbb{Z} \tag{4.16}$$

Рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Для симплициальных целочисленных гомологий границы n-мерного симплекса выполняется

$$H_k(\partial\tau^m,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, k = m-1 \\ 0, & k \neq 0,\ k \neq m \end{cases} \tag{4.17}$$

Замечание. Если мы берем границу n-мерного симплекса, то сам симплекс гомеоморфен шару размерности m в евклидовом пространстве

$$\tau^m \cong D^m \tag{4.18}$$

а граница гомеоморфна сфере

$$\partial\tau \cong S^{m-1} \tag{4.19}$$

Поэтому фактически получаем

$$H_k(S^{m-1},\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0,\ m-1 \\ 0, & \text{остальные случаи} \end{cases} \tag{4.20}$$

Вложение конечного симплициального n-мерного комплекса в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Теорема. Всякий конечный n-мерный симплициальный комплекс можно вложить в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Доказательство. Пусть К – n-мерный конечный стмплициальный комплекс. Пусть $\{a_j\}_{1\leqslant j\leqslant\alpha}$ – вершины. Поставим в соответствие каждой вершине a_j некоторую точку $p_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ с координатами

$$p_j = \left(i_j, i_j^2 \dots i_j^{2n+1}\right) \tag{4.21}$$

причем $i_k \neq i_j$, если $k \neq j$; $i_k \in \mathbb{N}$. Тогда при таком отображении каждый симплекс перейдет в симплекс, а каждый комплекс – в комплекс взаимного однозначно. Для того, чтобы показать, что каждый симплекс перейдет в симплекс, достаточно показать, что любые $2n+1$ точки из набора $\{p_j\}_{1\leqslant j\leqslant\alpha}$ находятся в общем положении. Это значит, что эти точки не лежат ни в какой гиперплоскости размерности меньше $2n+1$. Предположим противное. Пусть имеются точки $p_1 \dots p_{2m+2}$, которые не лежат в общем положении. Тогда существует их их линейная комбинация, которая равна нулю:

$$\exists \{\lambda_j\} : \quad \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j p_j = 0 \tag{4.22}$$

При этом не все λ_j равны нулю.

Это означает, что разрешима система

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j = 0 \\ \sum \lambda_j i_j = 0 \\ \sum \lambda_j i_j^2 = 0 \\ \dots\dots \\ \sum \lambda_j i_j^{2n+1} = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Например, пусть есть некоторые точки p_1, p_2, p_3, p_4. Если мы хотим показать, что эти точки не лежат в общем положении, то достаточно показать, что они лежат в одной гиперплоскости размерности меньше трех. В данном случае точек четыре, соответственно, они лежат в плоскости. Тогда векторы $p_1\vec{p}_2, p_1\vec{p}_3, p_1\vec{p}_4$ линейно зависимы, соответственно, существует такая линейная комбинация

$$\gamma_1 p_1\vec{p}_2 + \gamma_2 p_1\vec{p}_3 + \gamma_3 p_1\vec{p}_4 = \vec{0} \tag{4.24}$$

где коэффициенты не равны нулю одновременно.

Если расписать все эти векторы через координаты, то получим, что

$$\sum_{j=1}^{3} \gamma_j p_{j+1} - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) p_1 \tag{4.25}$$

Обозначим

$$q = -(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \tag{4.26}$$

Тогда получим

$$\gamma_1 \vec{p_2} + \gamma_2 \vec{p_3} + \gamma_3 \vec{p_4} + q\vec{p_1} = 0 \tag{4.27}$$

Аналогично получаем другие уравнения, соответствующие системе (4.23).

Рассмотрим систему (4.23). Ее матрица – квадратная. Ее определитель отличен от нуля

$$\Delta \neq 0 \tag{4.28}$$

Это так называемый определитель Вандермонда.

Отсюда следует, что не существует ненулевых решений данной системы. Соответственно, любые $2n + 2$ точки находятся в общем положении, поэтому всякий симплекс, который был в рассматриваемом комплексе, переходит в симплекс.

Замечание. Известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют примеры n-мерных симплициальных комплексов, которые нельзя вложить в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

Замечание. В силу рассмотренной теоремы топология n-мерном симплициальном комплексе задается как индуцированная из пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Например, пусть есть некоторый комплекс K, который мы вкладываем в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ (рис. 4.4). Топология задаются следующим образом. Берется любое открытое множество в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и пересечение с этим пространством будет открыто в этом образе.

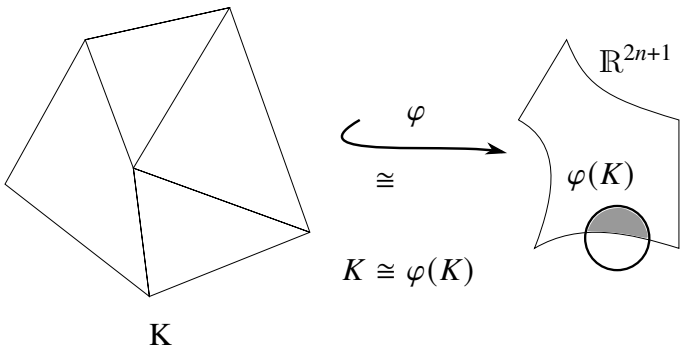

Рис. 4.4: Иллюстрация к замечанию.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Гомологии сфер.

Выше были вычислены целочисленные группы гомологий сферы $H_k\left(S^{m+1}, \mathbb{Z}\right)$ при $m > 1$. Если мы рассматриваем шар размерности 1, то получаем отрезок

$$D^1 = [a, b] \tag{4.29}$$

а сфера размерности $m - 1$

$$S^{m-1} = S^0 = \{a\} \cup \{b\} \tag{4.30}$$

То есть, с точки зрения симплициального коплекса, мы рассматриваем два нульмерных симплекса, независимых друг от друга. Поэтому в этом случае нульмерные гомологии будут отличаться от нульмерных гомологий сферы при $m > 1$:

$$C_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = Z_0(S^0) \tag{4.31}$$

При этом

$$\lambda a + \beta b \tag{4.32}$$

– цикл, так как границы нульмерных симплексов равны нулю

$$\partial a = \partial b = 0 \tag{4.33}$$

Разности циклов

$$b - a = \partial [a, b] \tag{4.34}$$

Но a и b не являются границами, поэтому

$$B_0(S^0) = 0 \tag{4.35}$$

Тогда группа гомологий нульмерной сферы есть

$$H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{4.36}$$

Таким образом, получили гомологии, равные группам циклов. В данном случае мы имеем несвязное пространство. Все остальные сферы (больших размерностей) являются связными пространствами (то есть в самом пространстве любые две точки можно связать кривой, а в триангуляции их можно связать отрезком, если мы рассматриваем конечный симплициальный комплекс).

Точная последовательность Майера-Виеториса.

Пусть дан K – конечный симплициальный комплекс и два его подкоплекса (то есть два таких подмножества симплексов из данного набора симплексов, которые сами тоже являются комплексами) L и M. Например, как на рис. 4.5.

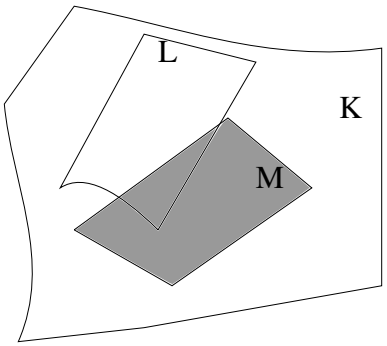

Рис. 4.5: Иллюстрация к объяснению.

В каждом из этих трех комплексов мы имеем набор симплексов. Симплексы пересекаются правильно – только по своей общей грани. Тогда мы можем рассмотреть пересечение и объединение. При этом $L \cup M$ – подкомплекс (если $\neq \emptyset$) и $L \cap M$ – подкомплекс (так как в обоих случаях выполняется условие определения подкомплекса). При этом пересечение всегда вложено в объединение. Поэтому можно рассмотреть группы симплициальных цепей этих подкомплексов и записать следующее вложение

$$C_k(L \cup M) \overset{\gamma_k}{\subset} C_k(L \cup M) \tag{4.37}$$

Построим два гомоморфизма групп цепей. У нас есть два цупных комплекса – объединения и пересечения: $\{C_k(L \bigcap M\}$ и $\{C_k(L \bigcup M)\}$. также мы можем рассмотреть цепной комплекс подкомплекса L и взять его прямую сумму с цепным комплексом комплекса M:

$$\{C_k(L) \oplus C_k(M)\} \tag{4.38}$$

Дифференциал здесь мы можем определить как прямую сумму дифференциалов

$$\partial_k = \partial_k(L) \oplus \partial_k(M) \tag{4.39}$$

Тогда мы можем взять к-мерные цепи пересечения этих комплексов и каждой такой цепи можно сопоставить

$$C_k(L \cap M) \xrightarrow{\gamma_k} C_k(L) \oplus C_k(M) \tag{4.40}$$

Причем

$$a \to (a, -a) \tag{4.41}$$

Также можно записать

$$C_k(L \cap M) \xrightarrow{\gamma_k} C_k(L) \oplus C_k(M) \xrightarrow{\pi_k} C_k(L \cup M) \tag{4.42}$$

Здесь было учтено, что возможно отображение прямой суммы в цепи объединения комплексов. Это возможно, так как в прямой сумме содержатся пары (a, b). Тогда, с помощью отображения π_k этой паре можно сопоставить $a + b$:

$$\forall (a, b) \xrightarrow{\pi_k} a + b \tag{4.43}$$

Заметим, что в данном случае мы имеем дело с момоморфизмом цепей, поэтому можно переписать (4.42)

$$0 \to C_k(L \cap M) \xrightarrow{\gamma_k} C_k(L) \oplus C_k(M) \xrightarrow{\pi_k} C_k(L \cup M) \tag{4.44}$$

Любую цепь из объединения можно разбить на два слагаемых: взять те симплексы, которые лежат в L и дополнить тем кусочком, который лежит в M. Такое разбиение возможно всегда, но оно не однозначно. Раз цепь можно представить в таком виде, значит, можно найти ее прообраз. Это означает, что рассматриваемый гомоморфизм будет эпиморфизмом (он будет суръективным). Поэтому мы можем дополнить (4.44) отображением в ноль

$$0 \to C_k(L \cap M) \xrightarrow{\gamma_k} C_k(L) \oplus C_k(M) \xrightarrow{\pi_k} C_k(L \cup M) \to 0 \tag{4.45}$$

Таким образом, мы получаем точную последовательность. Ядро гомоморфизма π_k в точности совпадает я образом гомоморфизма γ_k:

$$Ker\ \pi_k = Im\ \gamma_k \tag{4.46}$$

Соответственно, последовательность (4.45) точна в члене $C_k(L) \oplus C_k(M)$. В члене $C_k(L \cap M)$ она очевидна точна, так как образ равен нулю и ядро равно нулю. В случае $C_k(L \cup M)$ последовательность тоже точна, так как образ – вся группа цепей, которая отображается в ноль (ядро совпадает с образом). Таким образом, последовательность (4.45) точна.

Рассмотрим диаграмму (рис. 4.6.)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to C_k(L \cap M) & \xrightarrow{\gamma_k} & C_k(L) \oplus C_k(M) & \xrightarrow{\pi_k} & C_k(L \cup M) \to 0 \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 \to C_{k-1}(L \cap M) & \xrightarrow{\gamma_k} & C_{k-1}(L) \oplus C_{k-1}(M) & \xrightarrow{\pi_k} & C_{k-1}(L \cup M) \to 0
\end{array}$$

Рис. 4.6: Диаграмма.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Очевидно, что в данном случае каждый квадрат в диаграмме коммутативен, так как дифференциалы индуцированы дифференциалам цепного комплекса симплициального комплекса K. Таким образом, во всех размерностях мы имеем полное согласование с определением гомоморфизма в цепных комплексах.

Итак, мы имеем короткую точную последовательность алгебраических цепных комплексов. По аналогии с построением длинной точной гомологической последовательности пар алгебраических цепных комплексов, здесь также строится длинная гомологическая точная последовательность. Будем обозначать группу гомологий от групп цепей как

$$H_k\left(C_k\left(L \cap M\right)\right) = H_k\left(L \cap M\right) \tag{4.47}$$

Определение. Последовательностью Майера-Виеториса называется длинная точная гомологическая последовательность следующего вида

$$\boxed{\ldots \xrightarrow{\pi_{m+1}} H_{m+1}(L \cup M) \xrightarrow{\delta_{m+1}} H_m(L \cap M) \xrightarrow{\gamma_m} H_m(L) \oplus H_m(M) \xrightarrow{\pi_m} H_m(L \cup M) \xrightarrow{\delta_m} \ldots} \tag{4.48}$$

Замечание. Мы рассматриваем прямую сумму цепей

$$C_k(L) \oplus C_k(M) \tag{4.49}$$

В каждом из слагаемых суммы дифференциалы действуют независимо, поэтому для циклов от этой прямой суммы

$$Z_k\left(C_k(L) \oplus C_k(M)\right) = Z_k(L) \oplus Z_k(M) \tag{4.50}$$

Аналогично для границ

$$B_k\left(C_k(L) \oplus C_k(M)\right) = B_k(L) \oplus B_k(M) \tag{4.51}$$

Факторизация происходит покомпонентно, поэтому группа гомологий от прямой суммы групп цепей с точностью до изоморфизма будет совпадать с прямой суммой групп гомомлогий

$$H_k\left(C_k(L) \oplus C_k(M)\right) = H_k(L) \oplus H_k(M) \tag{4.52}$$

Полученная последовательность Майра-Виеториса используется для вычисления групп гомологий симплициального комплекса, равного объединению. Если нам известны группы гомологий двух подкомплексов и мы можем посчитать группы гомомлогий пересечения, то мы можем вычислить гомологии объедения.

Пример. Рассмотрим комплекс К, который является триангуляцией восьмерки (рис. 4.7). Этот комплекс состоит из пяти нульмерных симплексов и шести одномерных.

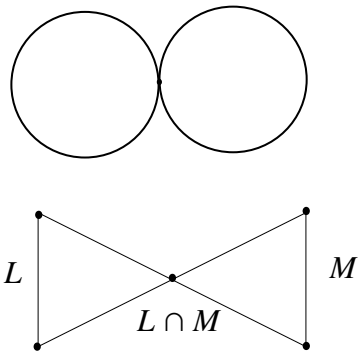

Рис. 4.7: Иллюстрация к объяснению.

Вычислим гомологии этого комплекса. Рассмотрим последовательность Майера-Виеториса. Здесь нет симплексов размерности большей, чем единица, поэтому получаем

$$0 \xrightarrow{\delta_2} H_1\left(L \cap M\right) \xrightarrow{\gamma_1} H_1(L) \oplus H_2(M) \xrightarrow{\pi_1} H_1(L \cup M) \xrightarrow{\delta_1} H_0(L \cap M) \xrightarrow{\gamma_0} \\ \xrightarrow{\gamma_0} H_0(L) \oplus H_0(M) \xrightarrow{\pi_0} H_0(L \cup M) \xrightarrow{\partial_0} 0 \qquad (4.53)$$

В данном случае одномерные гомологии пересечения равны нулю. Нульмерные гомологии пересечения есть $\mathbb{Z}$. Одномерные гомологии для комплексов L и M есть окружность, то есть $\mathbb{Z}$. Нульмерные гомологии объединения также равны $\mathbb{Z}$. Таким образом, получаем

$$0 \xrightarrow{\delta_2} 0 \xrightarrow{\gamma_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_1} H_1(L \cup M) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0 \qquad (4.54)$$

Таким образом, получаем задачу на нахождение неизвестной группы G:

$$0 \xrightarrow{\gamma_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_1} G \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad (4.55)$$

Здесь мы имеем суръективное отображение $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Его прообраз будет такой же, как и сама группа. Значит, проообразом является $\mathbb{Z}$. Тогда получаем, что и ядром, и образом является $\mathbb{Z}$. Значит, гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ есть вложение. Тогда получаем, что образом гомоморфизма $\ldots \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}$ является ноль. Значит, неизвестная группа является ядром

$$G = Ker\ \delta_1 \qquad (4.56)$$

Но тогда она же является и образом, то есть имеем

$$G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \qquad (4.57)$$

Таким образом, получили, что

$$H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{4.58}$$

$$H_0(K) = \mathbb{Z} \tag{4.59}$$

Задача. Вычислить группу гомологий $H_k(\text{Ц}, \mathbb{Z})$ цилиндра, где Ц – цилиндр, склеенный из двух квадратов с помощью последовательности Майера-Виеториса.

Лекция 5. Теория сингулярных гомологий. Часть 1.

Вычисление симплициальных гомологий тора.

Замечание. Для цилиндра (рис. 5.1) симплициальные гомологии имеют вид

$$H_k(\text{Ц}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

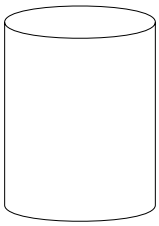

Рис. 5.1: Иллюстрация к замечанию.

Рассмотрим следующую задачу – вычисление симплициальных гомологий тора T^2 (рис. 5.2).

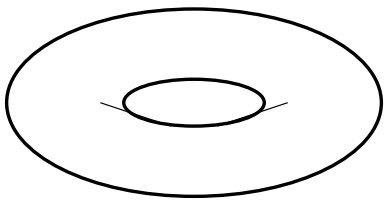

Рис. 5.2: Иллюстрация к задаче.

С помощью последовательности Майера-Виеториса тор можно склеить из двух цилиндров (рис. 5.3).

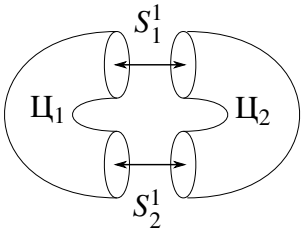

Рис. 5.3: Иллюстрация к задаче.

Пересечение этих цилиндров после склейки представляют собой пересечение двух

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

окружностей (индекс вверху означает размерность):

$$Ц_1 \cap Ц_2 = S_1^1 \cup S_2^1 \tag{5.2}$$

Заметим, что гомологии тора выше размерности двух все нулевые, так как в его триангуляции нет симплексов размерности больше двух. Пересечение этих двух цилиндров имеет размерность 1. Объединение этих цилиндров и есть тор

$$Ц_1 \cup Ц_2 = T^2 \tag{5.3}$$

Берем двумерные гомологии тора. Далее действует связывающий гомоморфизм, который переводит нас в одномерные гомологии объединения сфер. Далее вкладываем это пространство в прямую сумму и переходим в $H_1(T^2)$. Далее действует связывающий гомоморфизм размерности 1, мы переходим в нулевую группу гомологий пересечения подпространств. Далее мы переходим в прямую сумму нульмерных гомологий цилиндров. Далее переводим в нульмерную гомологию тора и далее в ноль. Таким образом, получили последовательность

$$0 \longrightarrow H_2(T^2) \xrightarrow{\delta_2} H_1\left(Sq^1 \cup S_2^2\right) \longrightarrow H_1(Ц_1) \oplus H_1(Ц_2) \longrightarrow H_1(T^2) \xrightarrow{\delta_1} H_1\left(S_1^1 \cup S_2^1\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_0(Ц_1) \oplus H_0(Ц_2) \longrightarrow H_0(T^2) \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

Достаточно указать некоторые из групп, известные нам, чтобы посчитать все известные гомологии тора. Тор – связное пространство. любые две вершины триангуляции соединены ребром, поэтому $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$. Цилиндр тоже является связным пространством, поэтому у каждого цилиндра нульмерные гомологии равны $\mathbb{Z}$. Нульмерные гомологии объединения окружностей равны $\mathbb{Z}$.

Определим двумерную гомологию тора. Отметим, что δ_2 – мономорфизм. Рассмотрим триангуляцию тора на квадрате (склейка по противоположным ребрам). Ориентируем согласованно все симплексы этой триангуляции (рис. 5.4).

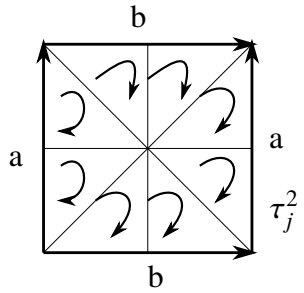

Рис. 5.4: Иллюстрация к объяснению.

Возьмем сумму рассматриваемых симплексов и составим цепь:

$$\left(\sum_j \tau_j^2\right) = c \tag{5.5}$$

Тогда граница этой цепи

$$\partial c = 0 \tag{5.6}$$

так как все границы взаимно уничтожаются (из-за согласованной ориентации). Тогда получаем, что c – цикл. Группа $\mathbb{Z}$ в данном случае

$$\mathbb{Z} = \{k \cdot c\}_{k \in \mathbb{Z}} \tag{5.7}$$

Тогда получаем, что

$$H_2(T^2) = \mathbb{Z} \tag{5.8}$$

Таким образом, нам нужно вычислить одномерные гомологии тора. Учитывая сказанное выше, получаем задачу

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(T^2) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0 \tag{5.9}$$

Отсюда получаем, что

$$H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{5.10}$$

Таким образом, получаем

$$H_k(T^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = 1 \\ 0, \text{ ост. случаи} \end{cases} \tag{5.11}$$

Тор с геометрической точки зрения.

Тор можно рассматривать как ориентированную двумерную поверхность, которая представляет собой сферу с одной ручкой. Например, пусть есть некоторая сфера, в которой вырезаны два отверстия, в которые вставлена ручка (рис. 5.5).

Существуют поверхности, возникающие в результате того, что к сфере прикрепляется не одна, а несколько ручек. Приведем (без доказательства) гомологии таких поверхностей. Тор представляет собой поверхность

$$T^2 = M_1 \tag{5.12}$$

– сфера S^2 с одной ручкой.

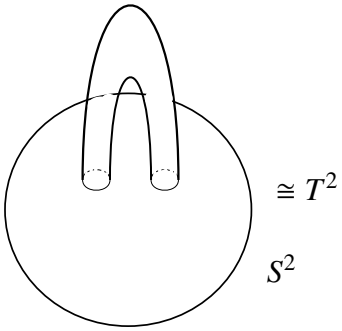

Рис. 5.5: Иллюстрация к примеру.

Рассмотрим поверхность M_p – сфера S^2 с p ручками. Нам известны гомологии для поверхности (5.12). Для поверхностей M_p они будут следующие:

$$H_k(M_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2 \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{2p}, & k = 1 \\ 0, \text{ ост. случаи} \end{cases} \tag{5.13}$$

Все такие пространства, представляющие собой сферы с ручками, называются **ориентированными двумерными многообразиями.** Таким образом, M_p – двумерные замкнутые ориентированные многообразия.

Гомология вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^2$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}P^2$. Оно задается факторизацией двумерного диска путем склейки каждой точки с ее диаметрально противоположной (рис. 5.6).

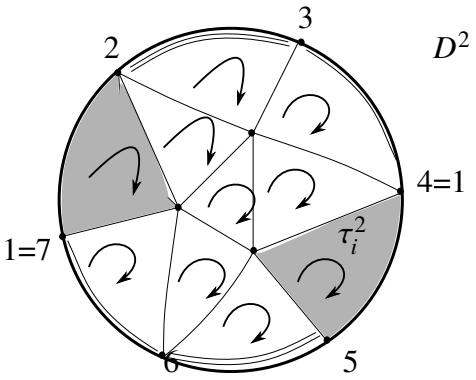

Рис. 5.6: Иллюстрация к объяснению.

Рассмотрим цепь, которая состоит из трех симплексов

$$\alpha = (1234) \in C_1(K) \tag{5.14}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Эта цепь склеивается с цепью из противоположных точек (рис. 5.6). Очевидно, рассматриваемое пространство связное (любые две его вершины соединены ребром). Тогда

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z} \tag{5.15}$$

Заметим, что α – цикл, так как его граница равна нулю

$$\partial\alpha = 0 \tag{5.16}$$

Этот цикл не является границей какого-то двумерного цикла. Рассмотрим двумерные циклы (при этом двумерные симплексы в указанной триангуляции должны быть правильно ориентированы) τ_i^2:

$$\beta = \sum_{i=1}^{10} \tau_i^2 \tag{5.17}$$

На ребрах соседних симплексов имеется противоположный обход, поэтому при суммировании границ всех симплексов все внутренние одномерные симплексы (грани) уничтожаются. Поэтому

$$\beta = \sum_{i=1}^{10} \tau_i^2 \in C_2\left(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}\right) \tag{5.18}$$

Граница же

$$\partial\beta = 2\alpha \neq 0 \text{ в } \mathbb{Z} \tag{5.19}$$

то есть граница не равна нулю в группе целых чисел. Если мы будем брать цепь α с каким-то целочисленным коэффициентом, то в группу границ попадут только те значения, где коэффициент будет четный. Таким образом, группа одномерных границ

$$B_1\left(\mathbb{R}P^2\right) = 2 \cdot \mathbb{Z} \tag{5.20}$$

А группа одномерных циклов рассматриваемого пространства

$$Z_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z} \tag{5.21}$$

Тогда, если мы профакторизуем группу циклов по группе границ, то получим одномерную группу проективного пространства

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = Z_2 = \{0; 1\} \tag{5.22}$$

Рассмотренная цепь не является циклом, так как ее граница, вообще говоря, не равна

нулю. Поэтому двумерных циклов в данном случае нет. Соответственно, двумерные циклы рассматриваемого пространства с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ образуют нулевую группу

$$Z_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = \{0\} \tag{5.23}$$

И для границ

$$B_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = 0 \tag{5.24}$$

Тогда

$$H_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = 0 \tag{5.25}$$

Таким образом, мы получаем группы целочисленных гомологий в пространстве $\mathbb{R}P^2$ равны

$$H_k\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ 0, & \text{ост. случаи} \end{cases} \tag{5.26}$$

Замечание. Если бы мы рассматривали гомологии этого пространства с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$, то есть $H_k\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)$, то мы бы получили, что одномерные циклы рассматриваемого простраства

$$\mathbb{Z}_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right) = \mathbb{Z}_2 \tag{5.27}$$

Группа одномерных границ проективного пространства с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$

$$B_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right) = 0 \tag{5.28}$$

Тогда получаем, что группа одномерных гомологий есть

$$H_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right) = 0 \tag{5.29}$$

Тогда

$$H_k\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & k = 2 \\ 0, & \text{ост. случаи} \end{cases} \tag{5.30}$$

Замечание. Геометрически пространство $\mathbb{R}P^2$ есть сфера с приклеенным к ней листом Мёбиуса (приклеиваем лист по границе отверстия в сфере):

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 \cup \mathcal{M} \tag{5.31}$$

где $\mathcal{M}$ – лист Мёбиуса. Его граница

$$\partial \mathcal{M} = S^1 \tag{5.32}$$

Полученное пространство есть двумерное многообразие, которое является неориентированным.

Об ориентации двумерных замкнутых многообразий.

Пусть дано некоторое двумерное замкнутое многообразие (рис. 5.7). Возьмем любую точку на этом многообразии и некоторую любую замкнутую кривую, проходящую через эту точку. Если при проходе по этой кривой ориентация не нарушается, то такая поверхность называется **ориентированной**. Это означает, что у рассматриваемой поверхности можно выделить внешнюю и внутреннюю стороны.

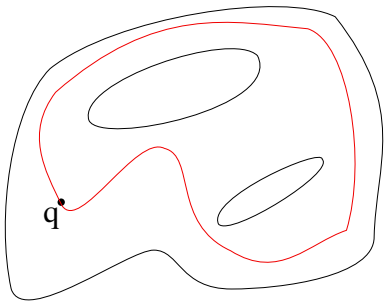

Рис. 5.7: Иллюстрация к примеру.

Неориентированная поверхность – это поверхность, при обходе которой по некоторой кривой мы приходим в точку, которая находится на противоположной стороне относительно точки старта (например – лист Мёбиуса). Это означает, что у поверхности нельзя выделить две стороны.

Неориентированные поверхности.

Таким образом, поверхность $\mathbb{R}P^2$ является неориентированной, так как в ее построении участвует лист Мёбиуса. Приклеивая к сфере несколько листов Мёбиуса, можно получить набор неориентированных поверхностей. Обозначим

$$\mathbb{R}P^2 = N_1 \tag{5.33}$$

– неориентированная поверхность = $S^2 \cup \mathcal{M}$.

$$N_q = S^2 \cup \{\mathcal{M}_i\})_{1 \leqslant i \leqslant q} \tag{5.34}$$

– неориентированное двумерное замкнутое многообразие.

Имеет место теорема о гомологиях таких поверхностях.

Теорема (без доказательства). Гомологии пространства N_q равны

$$H_k\left(N_q;\mathbb{Z}\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0\\ \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}}_{q-1}\oplus\mathbb{Z}_2, & k=1\\ 0, & k=2\\ 0, \text{ ост. случаи}\end{cases}\tag{5.35}$$

Для группы $\mathbb{Z}_2$ имеет место

$$H_k\left(N_q;\mathbb{Z}_2\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & k=0\\ \underbrace{\mathbb{Z}_2\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_2}_{q}, & k=1\\ \mathbb{Z}_2, & k=2\\ 0, \text{ ост. случаи}\end{cases}\tag{5.36}$$

Барицентрическое подразделение симплециального комплекса.

Пусть есть некоторый симплекс

$$\tau^m=[a_0,a_1,\ldots,a_n]=\left\{a\Big|\ a=\sum_{j=1}^{m}t_ja_j,\ \ t_j\geqslant 0,\ \ \sum_{j=1}^{m}t_j=1\right\}\tag{5.37}$$

Если $m=0$, то мы имеем дело с одной координатой и она равна единице. Если $m=1$, то получаем одномерный симплекс n τ^1 (рис. 5.8).

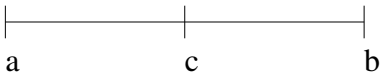

Рис. 5.8: Иллюстрация к объяснению.

Причем любую точку отрезка как выпуклого множества можно представить в виде

$$c=tb+(1-t)a,\ \ 0\leqslant t\leqslant 1\tag{5.38}$$

Двумерный симплекс имеет вид, представленный на рис. 5.9.

Из вершины можно провести отрезок, который будет проходить через рассматриваемую точку и пересекаться с другой гранью в точке d. Тогда точку d можно описать с помощью (5.38). Далее мы можем рассмотреть отрезок bd и представить рассматриваемую точку уже относительно этого отрезка. Тогда получим уже три координаты.

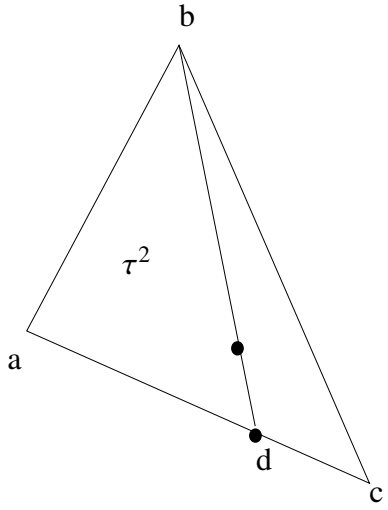

Рис. 5.9: Иллюстрация к объяснению.

Аналогично для симплексов большей размерности.

Определение. Барицентр симплекса τ^m – это точка вида

$$b = b(\tau^m) = \{t_0, \ldots, t_m\} \tag{5.39}$$

где

$$t_j = \frac{1}{m+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m \tag{5.40}$$

Барицентр нульмерного симплекса $\tau^0 = \{a\}$:

$$b(\tau^0) = a \tag{5.41}$$

Барицентр одномерного симплекса

$$\beta(\tau^1) = \frac{a+b}{2} \tag{5.42}$$

Барицентр двумерного симплекса

$$b(\tau^2) = \frac{1}{3}(a+b+c) \tag{5.43}$$

– точка пересечения медиан треугольника.

Для трехмерного симплекса (рис. 5.10) находим барицентр основания тетраэдра (то есть барицентр точки e) и ищем точку на отрезке, соединяющем b и e, чтобы координаты этой точки были одинаковы по отношению ко всем четырем вершинам были равны $\frac{1}{4}$. Можно показать, что барицентр трехмерного симплекса $b(\tau^3)$ (точка Ц) – это точка на отрезке, соединяющей b и e на расстоянии $\frac{3}{4}|be|$ от точки b и на расстоянии $\frac{1}{4}|be|$ от точки e.

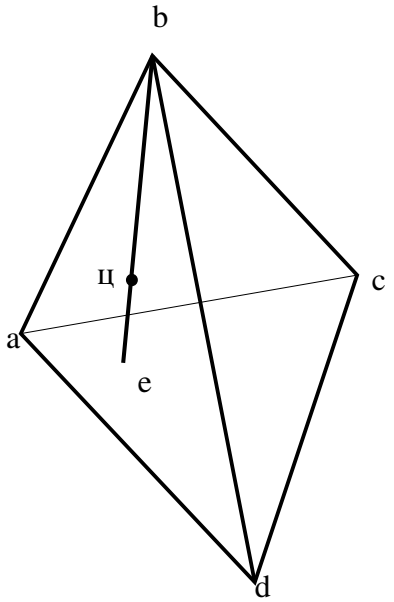

Рис. 5.10: Иллюстрация к объяснению.

Тогда

$$\text{Ц} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} \tag{5.44}$$

Барицентрическое подразделение симплициального n-мерного комплекса K.

Построим новый симплициальный комплекс $K' = \beta(K)$, где указан барицентр каждого симплекса K как новая вершина. Совокупность этих вершин порождает комплекс от $K' = \beta(K)$. Пусть $n = 0$. Тогда в рассматриваемом комплексе есть только нульмерные симплексы, а его барицентрическое подразделение есть этот же нульмерный симплекс:

$$\tau^0 = [a], \quad \beta(\tau^0) = \tau^0 \tag{5.45}$$

Если $n = 1$, то есть некоторый одномерный симплекс

$$\tau^1 = [a, b] \tag{5.46}$$

Его барицентрическое подразделение (см. рис. 5.11):

$$\beta(K) = [a, c] + [c, b] = [c, \partial[a, b]] \tag{5.47}$$

где

$$c = \beta([a, b]) \tag{5.48}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

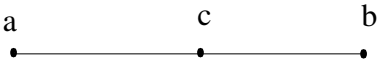

Рис. 5.11: Иллюстрация к объяснению.

При этом граница одномерного симплекса

$$\partial\tau^1 = b - a \tag{5.49}$$

Будем понимать под записью

$$\left[c, \partial\tau^1\right] := [c, b] - [c, a] = [a, c] + [c, b] \tag{5.50}$$

Таким образом, каждому симплексу данного симлициального комплекса мы ставим в соответствие сумму тех симплексов, которые получаются после его барицентрического подразделения. В данном случае

$$\tau^1 = [a, b] \xrightarrow{\beta} [a, c] + [c, b] \tag{5.51}$$

Рассмотрим двумерный симплекс (рис. 5.12).

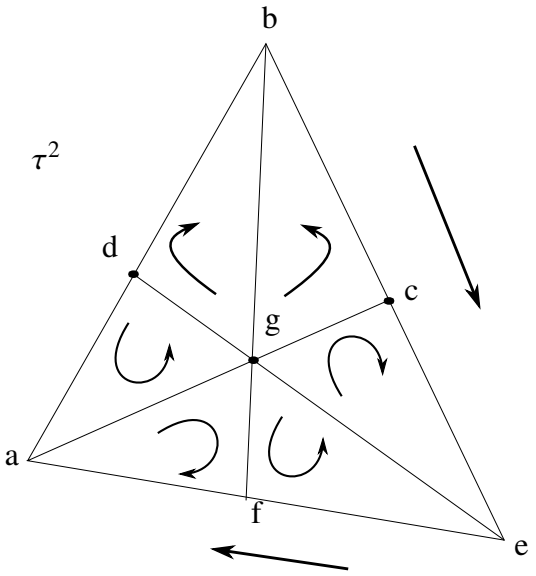

Рис. 5.12: Иллюстрация к примеру.

Тогда

$$\tau^2 = [a, b, c] \xrightarrow{\beta} [g, \partial\tau^2] = [gad] + [gdb] + [gbe] + [gec] + [gcf] + [gfa] \tag{5.52}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда граница

$$\partial\left(\tau^2\right) = [ad] + [db] + [bc] + [ec] + [cf] + [fa] = \partial\left(\beta(\tau^2)\right) \tag{5.53}$$

Отметим, что для границы полученного симплекса мы получаем такое же выражение. То есть,

$$\partial\left(\tau^2\right) = \partial\left(\beta(\tau^2)\right) \tag{5.54}$$

Рассмотрим некоторый n-мерный симплициальный комплекс К. Тогда мы можем построить следующее соответствие. Возьмем цепь размерности k:

$$c = \sum_{j=1}^{N} l_j \tau_j^k \tag{5.55}$$

Тогда ей можно сопоставить

$$c = \sum_{j=1}^{N} l_j \tau_j^k \xrightarrow{\beta} \beta(c) = \sum l_j \beta\left(\tau_j^k\right) \tag{5.56}$$

Таким образом, каждому симплексу τ_j^k мы сопоставляем сумму симплексов той же размерности к, которые получены при барицентрическом подразделении всех симплексов, которые являются его гранями. Ориентация каждого из симплексов барицентрического подразделения определяется последовательностью барицентров по убыванию размерности симплексов.

Отметим, что граница симплекса τ^2

$$\partial[a,b,c] = [b,c] - [a,c] + [a,b] = [a,b] + [b,c] + [c,a] \tag{5.57}$$

Мелкость барицентрического подразделения.

Мелкость симплициального комплекса – это максимальный диаметр его одномерных симплексов. Пусть дан К – n-мерный симплициальный комплекс. Его мелкость $\mu(K)$. Рассмотрим соответствие мелкости исходного комплекса и его барицентрического подразделения $\beta(K) = K'$. Мелкость барометрического подразделения обозначим как

$$\mu\left(\beta(K)\right) = \mu\left(K'\right) \tag{5.58}$$

Отметим, что для одномерного симплекса (рис. 5.13) имеем

$$\mu\left(\beta\left(\tau^1\right)\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\tau^2\right) \tag{5.59}$$

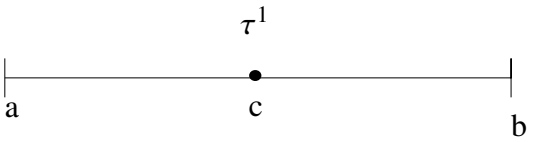

Рис. 5.13: Иллюстрация к объяснению.

Для двумерного симплекса (рис. 5.14):

$$\tau^2 = [abc] \tag{5.60}$$

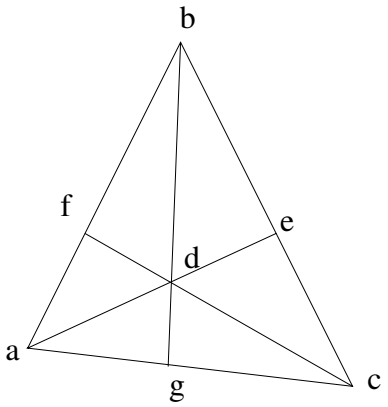

Рис. 5.14: Иллюстрация к объяснению.

имеем зависимость

$$\mu\left(\beta\left(\tau^2\right)\right) \leqslant \frac{2}{3}\mu\left(\tau^2\right) \tag{5.61}$$

В общем случае имеет место неравенство

$$\boxed{\mu\left(\beta(K)\right) = \mu\left(K'\right) \leqslant \frac{n}{n+1}\mu(K)} \tag{5.62}$$

Замечание. Рассмотрим связь между цепными комплексами исходного симплициального комплекса и его барицентрического подразделения. Рассмотрим двумерный симплекс (рис. 5.14) $\tau^2 = [abc]$. Его барицентрическое подразделение:

$$\beta(\tau^2) = [dfb] - [deb] + [dec] - [dgc] + [dga] - [dfa] \tag{5.63}$$

Заметим, что

$$\partial\left(\beta\tau^k\right) = \beta\left(\partial\tau^k\right) \tag{5.64}$$

Рассмотрим цепной комплекс $C_k\left(K; G\right)$. Тогда для цепи

$$C = \sum_{i=1}^{N} g_i \tau_i^k \tag{5.65}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Граница барицентрического подразделения этой цепи будет совпадать с барицентрическим подраздедением границы этой цепи:

$$\partial\left(\beta C\right) = \beta\left(\partial C\right) \tag{5.66}$$

Таким образом, имеет место переход

$$\beta:\ C_k(K;G) \to C_k(K';G) \tag{5.67}$$

И

$$\boxed{\beta \cdot \partial = \partial \cdot \beta} \tag{5.68}$$

Тогда имеет место гомоморфизм цепных комплексов β:

$$C_k(K) \xrightarrow{\beta} C_k(K') \tag{5.69}$$

Он индуцирует гомоморфизм групп гомологий

$$H_k(K;G) \xrightarrow{\beta_k} H_k(K';G) \tag{5.70}$$

Тогда получаем, что полиэдр

$$|K| = X \tag{5.71}$$

аналогичен гомоморфизму групп гомологий этого полиэдра

$$H_k(X;G) \xrightarrow{\beta_k} H_k(X;G) \tag{5.72}$$

Гомоморфизм β_k совпадает с тождественным отображением групп с точки зрения рассматриваемых полиэдров

$$\beta_k = id \tag{5.73}$$

Лекция 6. Теория сингулярных гомологий. Часть 2.

Барицентрическое подразделение симплициального комплекса.

Рассмотрим некоторый нульмерный симплекс τ^0. Его барицентрическое подразделение

$$\beta(\tau^0) = \tau^0 = \{a\} \tag{6.1}$$

Для некоторого одномерного симплекса (рис. 6.1)

$$c = \frac{a+b}{2} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \tag{6.2}$$

Рис. 6.1: Иллюстрация к объяснению.

Тогда

$$\beta(\tau^1) = \{[c, b], [c, a]\} \tag{6.3}$$

При этом мы ставим в соответствие симплексу

$$\tau^1 = [a, b] \to [c, \beta(\partial\tau)] = [c, [b] - [a]] = [c, b] - [c, a] = [[a, c] + [c, b]] = \beta([a, b]) \tag{6.4}$$

Таким образом, барицентрическое подразделение симплекса τ^1:

$$\boxed{\beta([a; b]) = [a, c] + [c, b]} \tag{6.5}$$

Рассмотрим двумерный симплекс (рис. 6.2)

$$\tau^2 = [a, b, c] \tag{6.6}$$

Барицентр определяется как

$$d = \frac{a+b+c}{3} \tag{6.7}$$

Отметим, что

$$\partial\tau^2 = [a, b] + [b, c] - [a, c] = [a, b] + [b, c] + [c, a] \tag{6.8}$$

Тогда мы можем поставить в соответствие

$$\begin{aligned}\tau^2 = [a,b,c] \longrightarrow \beta(\tau^2) = \left[d, \beta[\partial\tau^2]\right] = [d, \beta([ab]+[bc]+[ca])] = \\ = [d,[ac]+[eb]+[bf]+[fc]+[cg]+[ga]] = \\ = [dac]+[deb]+[dbf]+[dfc]+[dcg]+[dga] = \beta([a,b,c])\end{aligned} \tag{6.9}$$

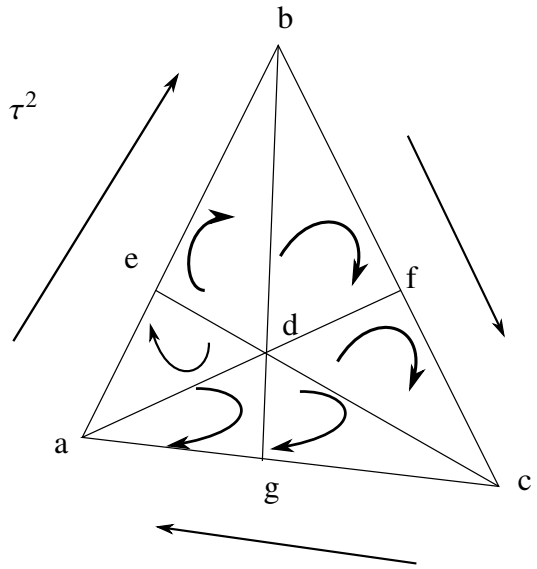

Рис. 6.2: Иллюстрация к объяснению.

Для границ можно получить

$$\boxed{\beta(\partial\tau^2) = \partial\beta(\tau^2)} \tag{6.10}$$

Мы можем построить гомоморфизм групп цепей. Возьмем k-мерные цепи комплекса K и отобразим их в цепи барицентрического подразделения указанного комплекса

$$C_k(K;G) \xrightarrow{\beta_k} C_k(\beta(K);G) \tag{6.11}$$

Принято обозначение

$$\beta(K) = K' \tag{6.12}$$

Тогда

$$\sum_j g_j \tau_j^k \to \sum g_j \beta(\tau_j^k) \tag{6.13}$$

Отсюда получаем гомоморфизм групп гомологий

$$\hat{\beta}_k : H_k(K;G) \xrightarrow{\cong} H_k(K';G) \tag{6.14}$$

Отметим, если мелкость симплициального комплекса размерности n равна $\mu(K)$, то мелкость его барицентрического подразделения

$$\mu\left(\beta K\right) = \frac{n}{n+1}\mu(K) \tag{6.15}$$

Симплициальное отображение.

Определение. Пусть даны два симплициальных комплекса K и L. Пусть есть некоторое отображение

$$f: \ |K| \to |L| \tag{6.16}$$

Будем говорить, что f – **симплициальное отображение**, если и только если

1. вершины переходят в вершины (если $a_i \in K$ – вершины, то $f(a_i)$ – вершины в L)
2. для любого симплекса
$$\tau^k = [a_0, a_1, \ldots, a_k] \in K \tag{6.17}$$
образ определяется как
$$f(\tau^k) = [f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)] \tag{6.18}$$
3. пусть
$$a = \sum_{i=0}^{k} t_i a_i \in \tau^k \tag{6.19}$$
Тогда
$$f(a) = \sum_{i=0}^{k} t_i f(a_i) \tag{6.20}$$
То есть отображение f – линейно относительно барицентрических координат в каждом симплексе.

Гомоморфизм групп цепей.

Симплициальное отображение индуцирует гомоморфизм групп цепей и соответствующий гомоморфизм групп гомологий. Любое симплициальное отображение $f: \ K \to L$ индуцирует гомоморфизм цепных комплексов по правилу

$$g\cdot\tau^k \xrightarrow{f_k} \begin{cases} g\cdot[f(a_0),\dots,f(a_k)]\,, \text{ если } f_k(\tau^k)=[f(a_0),\dots,f(a_k)] - \text{размерности к,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{то есть эти вершины в общем положении} \\ 0, \text{ если } f_k(\tau^k)=[f(a_0),\dots,f(a_k)] \text{ меньшей размерности, чем } k \end{cases} \tag{6.21}$$

Тогда имеет место отображение

$$\sum_j g_j\tau_j^k \xrightarrow{f_k} \sum_j g_j f_k(\tau^k) \tag{6.22}$$

Можно показать, что f_k индуцирует гомоморфизм групп гомологий

$$H_k(K;G) \xrightarrow{\hat{f_k}} H_k(L;G) \tag{6.23}$$

Функтор симплициальных комплексов.

Таким образом, мы получили, что симплициальное отображение между двумя симплициальными комплексами задают гомоморфизм групп гомологий. Значит, у нас есть два полиэдра K и L – гомологические пространства, гомеоморфные сиплициальным комплексам $K,\ L$:

$$K \xrightarrow{f} L \tag{6.24}$$

Таким образом, имеется категория, в которой рассматриваются симплициальные комплексы и отображения между этими объектами. Объекты – симплициальные комплексы, симплициальные отображения – морфизмы. Полученный объект называется **категорией симплициальных комплексов и их симплициальных отображений**. Каждому симплициальному комплексу мы сопоставляем его группы гомологий $\{H_k\ (L;G)\}$ и $\{H_k\ (L;G)\}$. Каждому симплициальному отображению мы сопоставляем совокупность гомоморфизмов этих групп гомологий

$$\hat{f_k}:\ \ H_k(K;G)\to H_k(L;G) \tag{6.25}$$

Соответственно, мы перешли из построенной выше категории в другую категорию, где объектами служат абелевы групп, а морфизмы – это гомоморфизмы этих абелевых групп. То есть мы получили **категорию абелевых групп и гомморфизмов.** Соответствие такого рода (одной категории сопоставляется другая категория) называется **функтором**. Если отображение было из K в L перешло в соответствующее отображение из группы перешло в соответствующее отображение K в группу L (то есть стрелки в (6.24) и (6.25) имеют одно направление), то такой функтор называется **ковариантым**. Если стрелка меняет направление, то функтор называется **контрвариантным**. Таким образом, в данном случае

мы построили ковариантный функтор, который называется **функтором симплициальных гомологий**.

Теория сингулярных гомологий.

Вспомним определение стандартного симплекса. Пусть дан стандартный симплекс нулевой размерности (рис. 6.3). Для одномерного симплекса определяем двумерное пространство

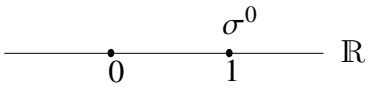

Рис. 6.3: Стандартный симплекс нулевой размерности.

(рис. 6.4) и получаем стандартный симплекс размерности 1. Аналогично для трехмерного

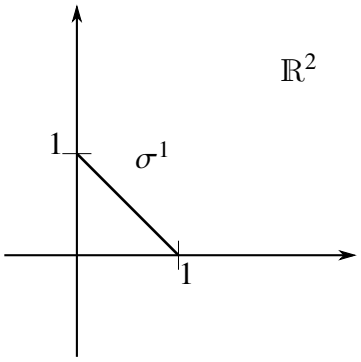

Рис. 6.4: Стандартный симплекс размерности 1.

пространства – по каждой оси отмечаем точку с координатой 1 и соединяем эти точки (рис. 6.5). Тогда получаем стандартный симплекс размерности 2.

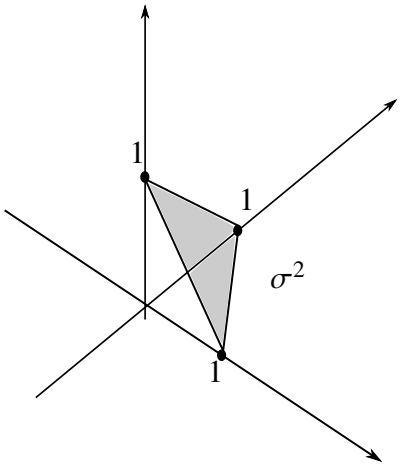

Рис. 6.5: Стандартный симплекс размерности 2.

Пусть X – топологическое пространство.

Определение. Сингулярным симплексом размерности k $(0 \leqslant k)$ называется любое непрерывное отображение вида

$$\varphi^k : \ \sigma^k \to X \tag{6.26}$$

Определение. i-й гранью сингулярного симплекса φ^k называется непрерывное отображение

$$\varphi^k \cdot \Delta_i^{k-1} : \ \sigma^{k-1} \to X \tag{6.27}$$

где

$$\Delta_i^{k-1} : \ \sigma^{k-1} \to \sigma^k \tag{6.28}$$

определено по правилу

$$\sigma^{k-1} \ni t = (t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{k-1}) \xrightarrow{\Delta_i} \Delta_i^{k-1}(t) := (t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{k-1}) \in \sigma^k \tag{6.29}$$

Пример. Возьмем стандартный симплекс σ^1 (рис. 6.6). Точка t имеет координаты (t_0, t_1). Тогда можно взять отображение

$$\Delta_0^1 : \ \sigma^1 \to \sigma^2 \tag{6.30}$$

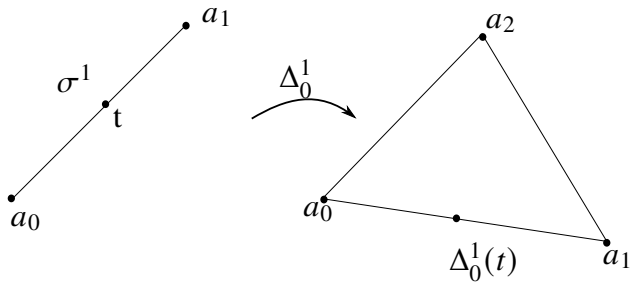

Рис. 6.6: Иллюстрация к примеру.

Фактически мы сопоставляем точке t

$$\Delta_0^1(t) = (t_0, 0, t_1) \tag{6.31}$$

Таким образом, мы имеем сингулярный симплекс размерности $k - 1$:

$$\varphi^k \cdot \Delta_i^{k-1} : \ \sigma^{k-1} \xrightarrow{\Delta_i^{k-1}} \sigma^k \xrightarrow{\varphi_k} X \tag{6.32}$$

Тогда $\varphi^k \cdot \Delta_i^{k-1}$ – $i-$я грань сингулярного симплекса φ^k.

Определение. Пусть

$$\varphi^k : \ \sigma^k \to X \tag{6.33}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

– сингулярный симплекс. Тогда **граница сингулярного симплекса**

$$\boxed{\partial\varphi^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^k\varphi^k \cdot \Delta_i^{k-1}} \tag{6.34}$$

Сингулярная цепь с коэффициентами из группы G:

$$C_k^S \ni \sum_j g_j\varphi_j^k \tag{6.35}$$

Аналогично рассматриваются **сингулярные циклы**

$$Z_k^s\,(X;G) = Ker\ \partial_k \tag{6.36}$$

и **сингулярные границы**

$$B_k^s\,(X;G) = Im\ \partial_{k+1} \tag{6.37}$$

Группа сингулярных гомологий – $H_k^s\,(X;G)$.

Замечание. Пусть G – абелева группа. Тогда для цепи

$$C_k^s(X) \ni c_k = \sum g_i\varphi_j^k \tag{6.38}$$

граница определяется как

$$\partial c_k = \sum_j g_j\partial\varphi_j^k = \sum_j\sum_l g_j(-1)^l\varphi^k \cdot \Delta_l^{k-1} \tag{6.39}$$

Полагаем

$$g_j(-1) = -g_j \tag{6.40}$$

Задача. Пусть имеется группа сингулярных цепей

$$\xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k^s\,(X;G) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}^s\,(X;G) \tag{6.41}$$

Проверить, что этот граничный гомоморфизм удовлетворяет условию

$$\boxed{\partial_k \cdot \partial_{k+1} \equiv 0} \tag{6.42}$$

Сингулярные гомологии точки.

Пусть дано пространство из одной точки

$$X = pt \tag{6.43}$$

Сколько может быть сингулярных симплексов размерности к у данного пространства? Имеет место отображение

$$\varphi^k : \ \sigma^k \to pt \tag{6.44}$$

Такое отображение существует только одно. Рассмотрим сингулярные цепи размерности к:

$$C_k^s\,(pt; G) \cong G, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots \tag{6.45}$$

Рассмотрим граничный гомоморфизм

$$\partial\varphi^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^k\varphi^k \cdot \Delta_i^{k-1} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\varphi^{k-1} \tag{6.46}$$

где было учтено, что имеет место выражение

$$\varphi^{k-1} = \varphi^k \cdot \Delta_i^{k-1} : \ \sigma^{k-1} \to pt \tag{6.47}$$

Отсюда следует, что граница такого симплекса равна нулю, если в сумме (6.46) нечетное число слагаемых:

$$\partial_k\varphi^k = 0, \ \text{ если к - нечетно} \tag{6.48}$$

Если к – четно, то

$$\partial_k\varphi^k = \varphi^{k-1} \tag{6.49}$$

Отметим, что для нульмерного дифференциала

$$\partial_0\varphi^0 = 0 \tag{6.50}$$

Посчитаем группу гомологий данного одноточечного пространства.

$$\begin{array}{lll}
k - \text{четно} & C_k^s(pt) \ \Rightarrow \ Z_k^s = G & \\
& \Big\downarrow \partial_k & \\
k - 1 - \text{неч.} & C_{k-1}^s(pt) & B_{k-1}^s = G \\
& \Big\downarrow \partial_{k-1} & \| \\
& C_{k-2}^s(pt) & Z_{k-1}^s = G \\
& \vdots & \\
& C_0^s(pt) & \\
& \Big\downarrow & \\
& 0 &
\end{array}$$

Рис. 6.7: Диаграмма.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда получаем, что группа гомологий

$$H_m^s\,(pt;G) = 0 = G/G \tag{6.51}$$

если m – нечетно.

Если же m – четно, то

$$Z_k^s(pt) = B_k^s(pt) = 0 \tag{6.52}$$

Тогда

$$H_m^s\,(pt;F) = 0 = 0/0 \tag{6.53}$$

Для размерности 0 получаем

$$C_0^s(pt) = Z^{-s}\,(pt) = G \tag{6.54}$$

Тогда

$$B_0^s(pt) = 0 \tag{6.55}$$

Тогда

$$H_0\,(pt;G) = G/0 = G \tag{6.56}$$

Таким образом, группа сингулярных гомологий точки

$$\boxed{H_k^s\,(pt;G) = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ G, & k = 0 \end{cases}} \tag{6.57}$$

Гомоморфизмы групп сингулярных гомологий.

Пусть имеются X, Y – топологические пространства и непрерывное отображение

$$f\,:\; X \to Y \tag{6.58}$$

Тогда, если

$$\varphi^k\,:\;\; \sigma^k \to X \tag{6.59}$$

– сингулярный симплекс подпространства X, то при отображении

$$\sigma^k \xrightarrow{\varphi^k} X \xrightarrow{f} Y \tag{6.60}$$

композиция

$$f \circ \varphi^k\,:\;\; \sigma^k \to Y \tag{6.61}$$

есть сингулярный симплекс в Y. Тогда, если есть группа цепей

$$C_k^s(X;G) \to C_k^s(K;G) \tag{6.62}$$

Тогда имеет место отображение

$$\sum_j g_j \varphi_j^k \to \sum_j g_j f \cdot \varphi_j^k \tag{6.63}$$

В итоге получаем коммутативную диаграмму (рис. 6.8).

$$\begin{array}{ccc} C_k^s(X;G) & \xrightarrow{f_k} & C_k^s(Y;G) \\ \partial_k \downarrow & & \partial_k \downarrow \\ C_{k-1}^s(X;G) & \xrightarrow{f_{k-1}} & C_{k-1}^s(Y;G) \end{array}$$

Рис. 6.8: Диаграмма.

Таким образом, возникает гомоморфизм алгебраических цепных комплексов сингулярных цепей, индуцированный отображением f.

Понятие гомотопии и цепной гомотопии в сингулярной теории гомологии.

Определение. Пусть даны два непрерывных отображения топологических пространств

$$f, h: \quad X \to Y \tag{6.64}$$

Говорят, что f **гомотопно** g, если существует такое непрерывное отображение

$$F: \quad X \times I \to Y \tag{6.65}$$

так, что

$$(x,t) \to F(x,t) = F_t(x) = y \in Y \tag{6.66}$$

где

$$I = [0,1] \tag{6.67}$$

удовлетворяющее условиям

1. $F(x,0) = f(x)$
2. $F(x,1) = g(x)$

Иллюстрация данного отображения представлена на рис. 6.9.

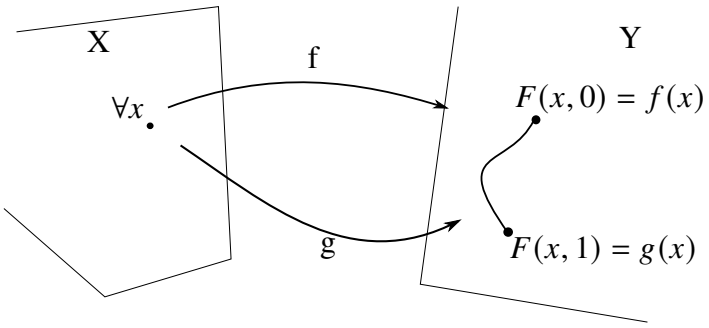

Рис. 6.9: Иллюстрация к объяснению.

Отметим, что отображение непрерывно по совок унести. Соответственно, оно непрерывно по каждой переменной $F(x,t)$. Соответственно, образы в Y соединены непрерывной прямой.

Лекция 7. Цепная гомотопия.

Понятие гомотопии.

Пусть даны два непрерывных отображения

$$f, g : \ X \to Y \tag{7.1}$$

они называются **гомотопными**, если существует непрерывное отображение H

$$f \simeq g \Leftrightarrow \exists H : \ X \times I \to Y \tag{7.2}$$

такое, что H непрерывно по совокупности переменных и удовлетворяет условиям

$$H(x; 0) \equiv f(x) \tag{7.3}$$

и

$$H(x; 1) \equiv g(x) \tag{7.4}$$

$\forall x \in X$, причем

$$I = [0, 1] \tag{7.5}$$

Каждое отображение гомотопно самому себе. Если g гомотопно f, то и f гомотопно g. Например, если

$$H(x; t) : \ f \simeq g \tag{7.6}$$

То можно определить

$$\hat{H}(x, t) := H(x; 1 - t) : \ g \simeq f \tag{7.7}$$

Соответственно, отношение гомотопности обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, то есть

$$f \simeq q // \ g \simeq h \implies \ f \simeq h \tag{7.8}$$

Понятие цепной гомотопии.

Пусть заданы два алгебраических цепных комплекса C, ∂ и $\hat{C}, \hat{\partial}$. Имеются группы цепей

$$\ldots C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \longrightarrow \ldots \tag{7.9}$$

и

$$\ldots \longrightarrow \hat{C}_k \xrightarrow{\hat{\partial}_k} \hat{C}_{k-1} \xrightarrow{\hat{\partial}_{k-1}} \hat{C}_{k-2} \longrightarrow \ldots \tag{7.10}$$

Отметим, что композиция двух соседних граничных гомоморфизмов всегда равна нулю

в алгебраических цепных комплексах.

Пусть заданы два гомоморфизма между этими цепными комплексами

$$f, g : C \to \hat{C} \tag{7.11}$$

-Это означает, что в каждой размерности у нас есть гомоморфизм из C_k в $\hat{C}_k$. Гомоморфизмы алгебраических цепных комплексов коммутируют с дифференциалами. Например, если мы зададим диаграмму на рис. 7.1, то она будет коммутативна.

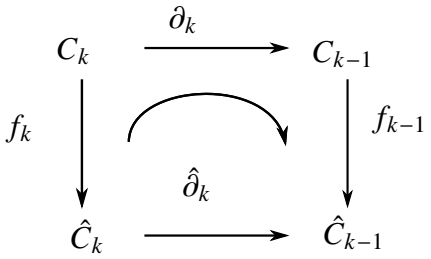

Рис. 7.1: Иллюстрация к объяснению.

Определение. Цепной гомотопией между гомоморфизмами f и g алгебраических цепных комплексов называется такой гомоморфизм $D = \{D_k\}$, что

$$D_k : C_k \to \hat{C}_{k+1} \tag{7.12}$$

то есть он действует с повышением размерности.

При этом имеет место следующее свойство. Рассмотрим диаграмму (рис. 7.2).

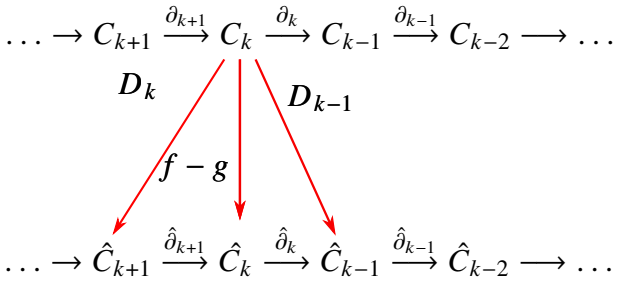

Рис. 7.2: Диаграмма.

Разность отображений $f - g$ будет совпадать с суммой двух композиций, причём

$$\boxed{f_k - g_k = D_{k-1} \cdot \partial_k + \partial_{k+1} \cdot D_k} \tag{7.13}$$

Связь цепной и обычной гомотопии.

Теорема. Если непрерывные отображения f, g

$$f, g : \ X \to Y \tag{7.14}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(где K и L – симплициальные комплексы) причем f гомомотопно g:

$$f \simeq q \tag{7.15}$$

тогда соответствующие гомоморфизмы сингулярных цепных комплексов являются цепно-гомотопными.

Доказательство. Пусть существует некоторая гомотопия

$$\exists H: \quad X \times I \to Y \tag{7.16}$$

Причём это отображение непрерывно по совокупности переменных. Тогда можно построить соответствующие сингулярные цепные комплексы. Отметим также, что

$$H(x, 0) = f(x) \tag{7.17}$$

$$H(x, 1) = g(x) \tag{7.18}$$

выполняются $\forall x \in X$.

Рассмотрим цепную гомотопию на примере одного сингулярного симплекса. Пусть

$$\varphi^k: \quad \sigma^k \to X \tag{7.19}$$

– сингулярный симплекс. Тогда можно рассмотреть отображение

$$\varphi^k_{xid}: \ \sigma^k \times I \to X \times I \tag{7.20}$$

Здесь единичный отрезок отображается в себя тождественным образом. Тогда можно построить композицию

$$H \cdot \left(\varphi^k \times id\right): \ \sigma^k \times I \to X \times I \to Y \tag{7.21}$$

-На этой основе построим цепную гомотопию. Когда мы умножаем симплекс на отрезок, получаем произведение вида рис. 7.3.

Разобьём это произведение на объединение симплексов. Пусть симплексы имеют вид

$$\sigma^k = [a_0, a_1, \ldots, a_k] \tag{7.22}$$

Причем каждая точка этого симплекса

$$t \in \sigma^k, \ t = (t_0, t_1, \ldots, t_k) \tag{7.23}$$

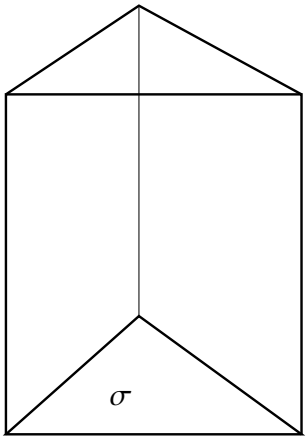

Рис. 7.3: Иллюстрация к объяснению.

Тогда произведение

$$\sigma^k \times I = \bigcup_j \sigma_j^{k+1} \tag{7.24}$$

При этом симплексы мы зададим как совокупность координат

$$\sigma_j^m = \left\{(t_0, t_1, \ldots, t_k, \tau) \middle| \ \tau \in I,\ t_0 + \ldots + t_{j-1} \leqslant \tau \leqslant t_0 + \ldots + t_{j-1} + t_j\right\} \tag{7.25}$$

Порядок барицентрических координат определяют ориентацию каждого из этих симплексов. Далее определим цепную гомотопию как композицию

$$D_k\left(\varphi^k\right)\left(\sigma^k\right) := H \circ \left(\varphi^k \times id\right)\left(\sigma^k \times I\right) = H \circ \left(\varphi^k \times id\right)\left(\sum_j (-1)^j \sigma_j^{k+1}\right) \tag{7.26}$$

Пример. Рассмотрим симплекс размерности ноль $k = 0$. Тогда

$$\sigma^0 \times I = \sigma^1 \tag{7.27}$$

Тогда, если $\sigma^0 = [a]$, то при умножении на I получим отрезок (рис. 7.4).

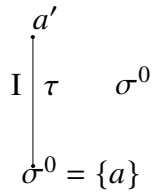

Рис. 7.4: Иллюстрация к объяснению.

Возьмем точку из этого симплекса

$$t \in \sigma_0^1 \tag{7.28}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда будет уже две барицентрические координаты

$$t = (t_0, \tau) \tag{7.29}$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant t_0$. Однако фактически мы получаем, что $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Пример. Рассмотрим случай ,$k = 1$. Пусть симплекс

$$\sigma^1 = [a, b] \tag{7.30}$$

Тогда произведение $\sigma^1 \times I$ имеет вид рис. 7.5.

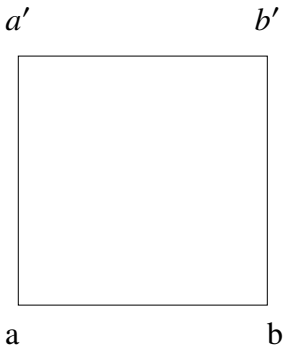

Рис. 7.5: Иллюстрация к примеру.

Отметим, что $0 \leqslant j \leqslant k$. Тогда получим два симплекса (согласно формуле (7.25)) (рис. 7.6).

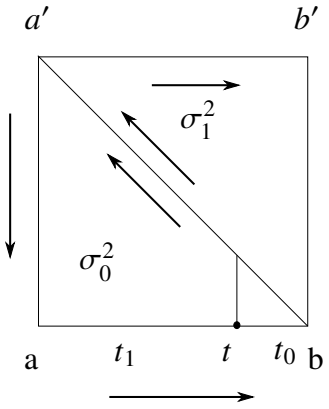

Рис. 7.6: Иллюстрация к примеру.

Причем первый симплекс мы зададим следующим образом

$$\sigma_0^2 = \left\{(t_0, t, \tau) \,\middle|\, 0 \leqslant \tau \leqslant t_0\right\} \tag{7.31}$$

Последовательность вершин задает его ориентацию, то есть получаем симплекс,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

натянутый на точки:

$$\sigma_0^2 = [a\ b\ a'] \tag{7.32}$$

Второй симплекс есть совокупность точек

$$\sigma_1^2 = \left\{(t_0, t, \tau)\middle|\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + t_1\right\} \tag{7.33}$$

Его вершины определяют ориентацию (см. рис. 7.6).

$$\sigma_1^2 = [a'\ b'\ b] \tag{7.34}$$

Тогда произведению сопоставляется цепь

$$\sigma^1 \times I \to \sigma_0^2 - \sigma_1^2 \tag{7.35}$$

Возникает сингулярная цепь. Рассмотрим композицию и применим ее к произведению

$$H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right) :\ \sigma^1 \times I = \sigma_0^2 - \sigma_1^2 \to Y \tag{7.36}$$

Обозначим

$$D_1(\varphi^1)(\sigma) := H\left(p^1 \times id\right)\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right) \tag{7.37}$$

Тогда, более абстрактно

$$D_1(\varphi^1) = H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right) \tag{7.38}$$

Продолжим по линейности и получим гомоморфизм сингулярных цепей

$$D_1 :\ C_1^s(X) \to C_2^s(Y) \tag{7.39}$$

Проверим, что D_1 удовлетворяет опережению цепной гомотопии. Для этого проверим равенство

$$\left(\partial_{k+1} D_k + D_{k+1}\partial_k\right)(C_k) = (f_k - g_k)(C_k) \tag{7.40}$$

В данном случае вычислим два образа: $D_0\partial_1(\varphi^1)(sug^1)$ и $\partial_2 D_1(\varphi^1)(\sigma^1)$. Произведем вычисления:

$$\partial_2 D_1\left(\varphi^1\right)\left(\sigma^1\right) = \partial_2 \cdot \left(H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right)\right)\left(\sigma^1 \times I\right) = \partial_2\left(H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right)\right)\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right) =$$
$$= H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right)\partial_2\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right) = H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right)([ab] + [ba'] + [a'a] - [ba'] - [a'b'] - [b'b]) \tag{7.41}$$

Теперь посчитаем

$$D_0 \cdot \partial_1\left(\varphi^1\right)\left(\sigma^1\right) = D_0\left(\varphi^1\left(\partial\sigma^1\right)\right) = D_0\left(\varphi^1(b \times I) - \varphi^2(a \times I)\right) =$$
$$= H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right)([b] \times I - [a] \times I) = H \cdot \left(\varphi^1 \times id\right)([b'b] - [a'a]) \tag{7.42}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Сложим полученные выражения и получим

$$D_0\partial_1\left(\varphi^1\right)\left(\sigma^1\right)+\partial_2 D_1\left(\varphi^1\right)\left(sug^1\right)=H\cdot\left(\varphi^1\times id\right)\left([ab]-[a'b']\right)=f\varphi^1\left([ab]\right)-g\varphi^1\left([a,b]\right) \tag{7.43}$$

Здесь мы учли, что отображение является гомотопным (рис. 7.7).

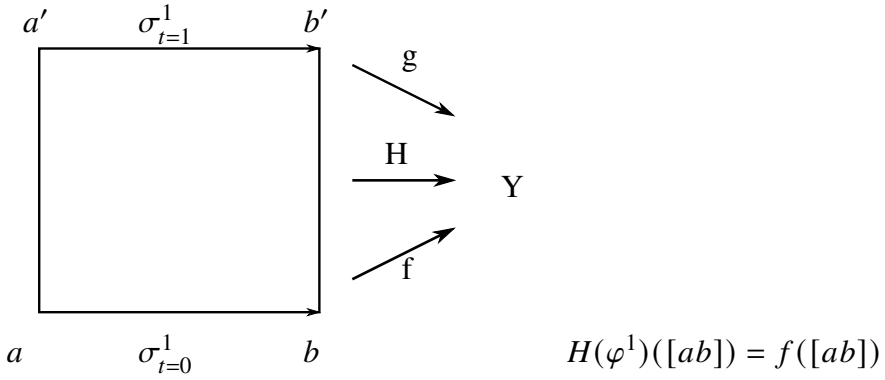

Рис. 7.7: Иллюстрация к примеру.

Таким образом, фактически мы получили

$$D_0\partial_1\left(\varphi^1\right)+\partial_2 D_1\left(\varphi^1\right)=f\left(\varphi^1\right)-g\left(\varphi^1\right)=\left(D_0\partial_1+\partial_2 D_1\right)\left(\varphi^1\right)=(f-g)(\varphi^1) \tag{7.44}$$

Таким образом,

$$\left(D_0\partial_1+\partial_2 D_1\right)\left(\varphi^1\right)=(f-g)\left(\varphi^1\right) \tag{7.45}$$

Рассмотрим случай размерности $k=2$. Тогда стандартный двумерный симплекс

$$\sigma^2=[a,b,c] \tag{7.46}$$

Мы хотим рассмотреть некоторой сингулярный симплекс, который отображает

$$\varphi^2:\ \sigma^2\to X \tag{7.47}$$

Положим

$$D_2\left(\varphi^2\right):=H\cdot\left(\varphi^2\times id\right) \tag{7.48}$$

Представим произведение в виде цепи

$$\sigma^2\times I=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\sigma^3_j \tag{7.49}$$

Тогда получим рис. 7.8.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

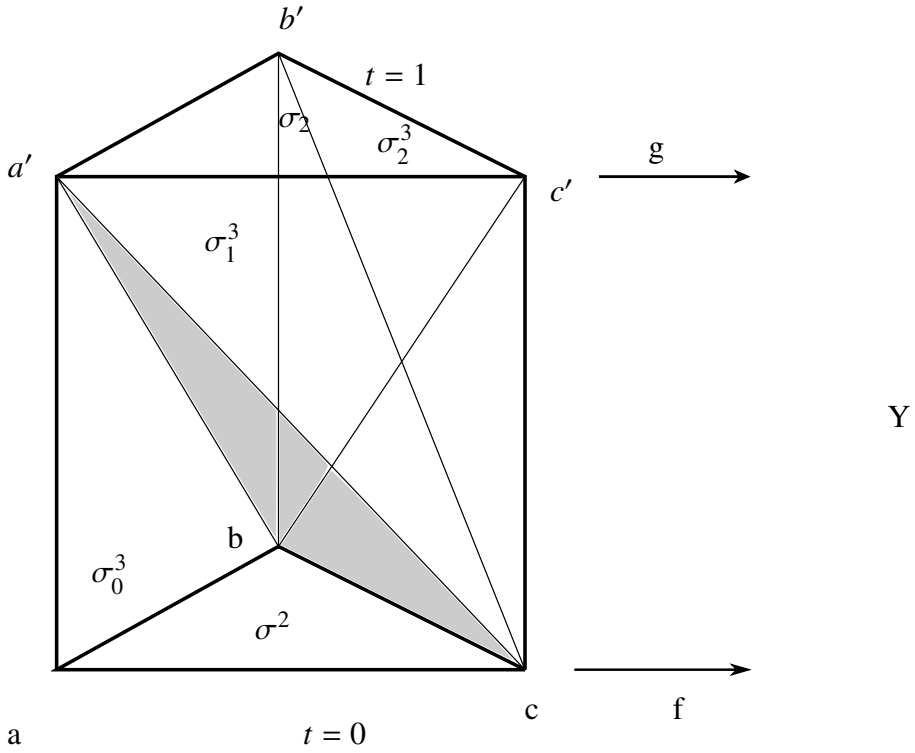

Рис. 7.8: Иллюстрация к примеру.

Образуется три тетраэдра:

$$\sigma_0^3 = \left\{(t_0t_1t_2,\tau)\middle|\ 0 \leqslant \tau \leqslant t_0\right\} = [abca'] \tag{7.50}$$

$$\sigma_1^3 = \left\{(t_0t_1t_2,\tau)\middle|\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0+t_1\right\} = [b'a'bc] \tag{7.51}$$

$$\sigma_2^3 = \left\{(t_0t_1t_2,\tau)\middle|\ t_0+t_1 \leqslant \tau \leqslant t_0+t_1+t_2\right\} = [c'a'b'c] \tag{7.52}$$

Теорема о цепно-гомотопных гомоморфизмах.

Теорема 2. Если два цепных гомоморфизма f и g цепно гомотопны, то они индуцируют одинаковые гомоморфизмы в сингулярных гомологиях.

Доказательство. По условию для f и g выполняется

$$\exists D = \{D_k\} \tag{7.53}$$

– цепная гомология. При этом имеет место равенство

$$\partial_{k+1}D_k + D_{k+1}\partial_k = f - g \tag{7.54}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Применим эти отображения к циклу. Пусть дан некоторый цикл

$$z \in Ker\ \partial_k = Z_k^s \tag{7.55}$$

Тогда

$$(f-g)(z) = (\partial_{k+1}D_k + D_{k+1}\partial_k)\,(z) = \partial_{k+1}D_k(z) + D_{k+1}\partial_k(z) = \partial_{k+1}D_k(z) \in B_k \tag{7.56}$$

Здесь мы учли, что граница цепи равна нулю. Тогда получаем, что

$$f(z) - g(z) \in B_k(C^s) \tag{7.57}$$

Это означает, что классы гомологий $f(z)$ и $g(z)$ совпадают:

$$[f(z)] = [g(z)] \tag{7.58}$$

то есть

$$f_k = g_k :\ \ H_k^s(X) \to H_k^s(Y) \tag{7.59}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть

$$f \simeq g \tag{7.60}$$

и

$$f, g :\ \ X \to Y \tag{7.61}$$

Тогда отображения в сингулярных гомомлогиях

$$\boxed{f_k^s = g_k^s :\ H_k^s\,(x, G) \to H_k^s\,(Y; G)} \tag{7.62}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, получаем, что

$$f \simeq g \ \ \Rightarrow \ \ f_k \overset{\text{Ц}}{\simeq} g_k \tag{7.63}$$

в сингулярных цепных комплексах. Отсюда следует (по теореме 2)

$$f_k = g_k :\ H_k^s(X; G) \to H_k^s(Y; G) \tag{7.64}$$

Следствие доказано.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение. Говорят, что X – **гомотопически эквивалентно** Y, если

$$\exists f:\ X \to Y,\ \exists g:\ Y \to X \tag{7.65}$$

такие, что

$$g \cdot f \simeq id_X \tag{7.66}$$

$$f \cdot g \simeq id_Y \tag{7.67}$$

Следствие 2. Если пространство X гомологически эквивалентно Y, то сингулярные гомологии пространства X совпадают с сингулярными гомологиями пространства Y

$$H_k^s(X;G) = H_k^s(Y;G) \tag{7.68}$$

Доказательство. По теореме 1

$$g_k \cdot f_k \overset{\text{Ц}}{\simeq} id_{C_k^s(X)} \tag{7.69}$$

$$f_k \cdot g_k \overset{\text{Ц}}{\simeq} id_{C_k^s(Y)} \tag{7.70}$$

Тогда

$$f_k = g_k^{-1} \tag{7.71}$$

и обратно

$$g_k = f_k^{-1} \tag{7.72}$$

Тогда

$$H_k^s(X;g) \overset{f,g}{\simeq} H_k^s(Y;G) \tag{7.73}$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Если X – *стягиваемо*, то есть существует гомотопия между тождественным отображением

$$id:\ X \to X \tag{7.74}$$

и отображением в точку

$$\gamma_0:\ \ X \to \{pt\} \tag{7.75}$$

Тогда

$$\gamma_n \simeq id \tag{7.76}$$

Отсюда получаем

$$H^s(X;g) \xrightarrow{id} H^s(X;G) = Im\ id \tag{7.77}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$H^s(X;G) \longrightarrow H^s(pt;G) \tag{7.78}$$

Соответственно, получаем

$$H_k^s(X;G) = H_k^s(pt;G) = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ G, & k = 0 \end{cases} \tag{7.79}$$

Утверждается, что тогда

$$\boxed{H_k^s(X;G) = H_k^s(pt;G)} \tag{7.80}$$

Следствие доказано.

Следствие 4. Сфера S^n – не стягивающая.

Доказательство. Предположим противное. Пусть S^n – стягиваемая. Тогда ее гомологии были бы как у точки. В частности, при $n > 0$

$$H_n^s(S^n;G) = 0 \tag{7.81}$$

Но известно, что

$$H_n^s(S^n;G) = G \neq 0 \tag{7.82}$$

Известно, что одномерные гомологии окружности

$$H_1^s\left(S^1;G\right) = G_1 \tag{7.83}$$

Двумерные гомологии

$$H_2\left(S^2;G\right) = G_2 \tag{7.84}$$

Замечание. Нульмерная сфера – совокупность двух точек

$$S^0 = \{a \cup b\} \tag{7.85}$$

Тогда

$$H_0^s\left(S^0;G\right) = G \oplus G \neq H(pt) \tag{7.86}$$

Лекция 8. Вопросы сингулярной теории гомологии.

Повторение.

На прошлой лекции были рассмотрены

- понятие цепной гомотопии;
- доказательство теоремы о том, что если два непрерывных отображения топологических пространств гомотопны, то они цепно гомотопны и, следовательно, индуцируют одинаковые гомоморфизмы в сингулярных гомологиях;
- были рассмотрены следующие следствия: если два пространства гомотопически эквивалентны (т.е. между ними сущетсвую отображения в обе стороны такие, что композиции их гомотопны и тождественны)тогда гомологии этих пространств изоморфны;
- доказано, что если пространство стягиваемо, тогда гомологии его сингулярны этой гомологии точки, которая была вычислена.

Далее будут рассмотрены вопросы, связанные с сингулярной теорией гомологии, а также связь сингулярной теории гомологии с симплициальной.

Барицентрическое подразделение сингулярных симплексов.

Ранее обсуждалось барицентрическое подразделение обычных симплексов в геометрическом симплициальном комплексе. На основе этого понятия вводится понятие барицентрического подразделения сингулярного симплекса.

Пусть имеется

$$\varphi^k : \sigma^k \to X \tag{8.1}$$

– это сингулярный симплекс пространства X, где X – топологическое пространство, φ^k – сингулярный симплекс.

Так как стандартный симплекс σ^k умеем разбивать, делать его барицентрическое подразделение с учетом барицентрического подразделения всех его граней, представим барицентрическое подразделение σ^k в виде цепи (см. рис. 8.1):

$$\beta\sigma^k = \sum_i \gamma_i \sigma_i^k , \quad \text{где } \gamma_i = \pm 1 \tag{8.2}$$

Знак плюс перед коэффициентом берется, если ориентация симплекса σ_i^k – стандартная, от барицентра большей размерности к барицентру меньшей размерности, так что она совпадает с ориентацией исходного симплекса. Иначе берется знак минус.

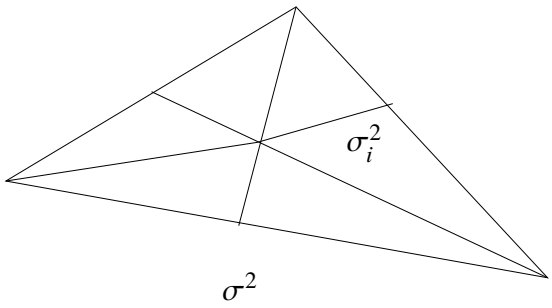

Рис. 8.1: Иллюстрация к объяснению.

Затем рассматриваем сужение сингулярного симплеса φ^k на симплексы барицентрического подразделения :

$$\beta\varphi^k = \sum_{i=1}^{(k+1)!} \gamma_i \varphi^k \Big|_{\sigma_i^k} \tag{8.3}$$

Получаем цепь из сингулярных симплексов той же размерности.

Для такого барицентрического подразделения можно доказать следующее утверждение.

Теорема. Пусть имеется комплекс и кратное барицентрическое подразделение тогда возникает гомоморфизм. Можно показать, что барицентрическое подразделение сингулярного комплекса перестановочно с границей.

$$\delta(\beta(\varphi^k)) = \beta(\delta\varphi^k) \tag{8.4}$$

При сопоставлении каждому сиплексу его барицентрического подразделения, отображение барицентрического подразделения перестановочно с дифференциалом. Т.е. оно отображает циклы в циклы, границы в границы и индуцирует отображение сингулярных гомологий.

$$H_k^s(X;G) \;\to\; H_k^s(X^{(r)};G) \tag{8.5}$$

где H_k^s – комплекс сингулярных гомологий барицентрического подразделения.

Другими словами, если мы отображаем гомологии любой размерности в сингулярные гомологии барицентрического подразделения цепного комплекса, то это отображение $\hat{\beta_k}$ тождественно.

$$H_k^s\big(C^s(X;G)\big) \xrightarrow{\hat{\beta_k}} H_k^s\big(\beta C^s(\bar{X};G)\big) \tag{8.6}$$

Более того, существует такая цепная гомотопия между отображением β и тождественным отображением, что образ сингулярной цепи $\beta(\varphi^k)$ в пространстве X лежит в образе самого φ^k.

Если применим эту сингулярную цепь к стандартному симплексу, получим некий образ пространстве X.

Сам сингулярный симплекс отображается в пространство X:

$$\varphi^k : \sigma^k \to X \tag{8.7}$$

и сама цепь $\beta\sigma^k$ отображается в X с помощью сингулярной цепи:

$$\sum \gamma_i \varphi^k \left(\beta\sigma^k\right) \to X \tag{8.8}$$

где $\varphi_i^k = \varphi^k\Big|_{\sigma_i^k}$ - это сужение φ^k на симплекс разбиения симплекса σ^k на более мелкие симплексы барицентрического подразделения.

Доказательство (идея). Представим себе, что имеется двумерный симплекс σ^k. Умножаем этот симплекс на отрезок I.

Цепную гомотопию строим следующим образом: берем барицентр симплекса (пересечение медиан) и на каждой двумерной грани срединную точку соединяем с точками основания. Центр симплекса тоже соединяем с точками основания. Получаем шесть симплексов, не включая центральный (рис. 8.2). Эти симплексы представляют собой сумму симплексов размерности k+1:

$$\sigma^k \times I = \sum \gamma_i \sigma_i^{k+1} \tag{8.9}$$

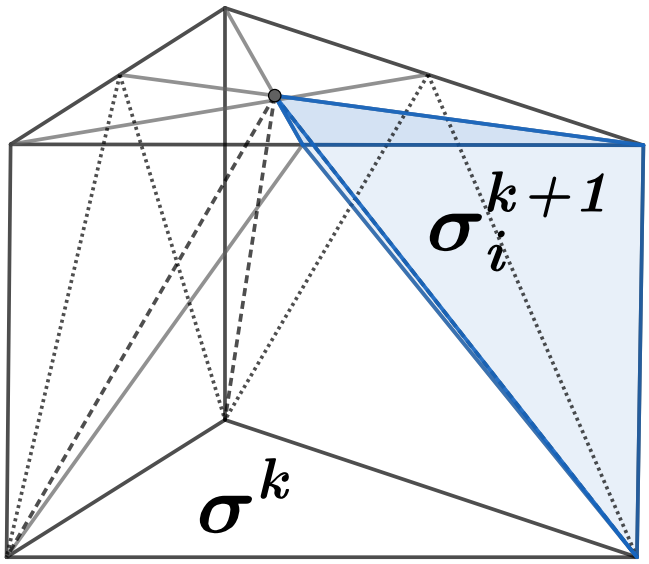

Рис. 8.2: Иллюстрация к доказательству.

Сингулярный симплекс

$$\varphi^k : \sigma^k \to X \tag{8.10}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

отобразим в сингулярную цепь размерности k+1 следующим образом: берем симплекс σ_i^{k+1} и проектируем его (рис. 8.3).

$$\varphi_i^{k+1} : \sigma_i^{k+1} \xrightarrow{\varphi^k} \sigma^k \to X \tag{8.11}$$

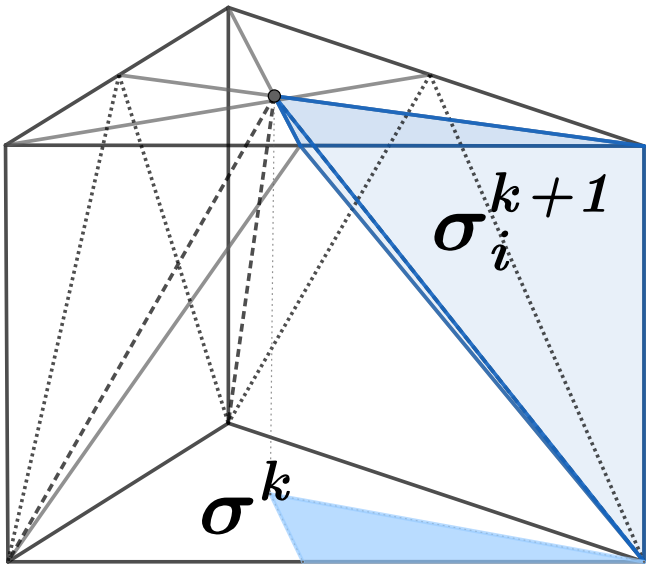

Рис. 8.3: Иллюстрация к доказательству.

После того, как проделаем эту процедуру со всеми симплексами, сингулярному симплексу φ^k поставим в соответствие формальную сумму симплексов :

$$\varphi^k \to \sum_i \gamma_i \varphi_i^{k+1} \tag{8.12}$$

Продолжим по линейности. Возьмем любую цепь

$$\forall c \in C_k^s(X; G) \tag{8.13}$$

Пусть

$$c = \sum g_j \varphi_j^k \tag{8.14}$$

Тогда обозначим соответствие

$$\boxed{D_k(c) := \sum_j g_j D_k\left(\varphi_j^k\right)} \tag{8.15}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда по линейности получим отображение

$$\boxed{D_k : \ C_k^s(X;G) \to C_{k+1}^s(X;G)} \tag{8.16}$$

Можно показать, что построенная таким образом D_k – это цепная гомотопия между тождественным отображением цепей

$$id : \ C_k^s(X;G) \to C_k^s(X;G) \tag{8.17}$$

и барицентрическим подразделением

$$\beta : \ C_k^s(X;G) \to C_k^s(X;G) \tag{8.18}$$

Таким образом, мы показали, что барицентрическое подразделение не меняет сингулярных гомологий. Таким образом, мы всегда можем получить сколь угодно мелкое подразделение симплексов и соответствующее барицентрическое подразделение сингулярных симплексов для решения определенных задач.

Точные последовательности пары топологических пространств и Маера-Виеториса в теории сингулярных гомологий.

Пусть (X, A) – пара топологических пространств, то есть $A \subset X$. Построим точную последовательность этой пары. Рассмотрим сингулярные цепи любой размерности подпространства A

$$0 \longrightarrow C_k^s(A) \hookrightarrow C_k^s(X) \longrightarrow C_k^s(X)/C_k^s(A) \longrightarrow 0 \tag{8.19}$$

Любая сингулярная цепь, вообще говоря, содержится в множестве сингулярных цепей самого пространства X (этим объясняется вложение $\hookrightarrow$). Мы можем профакторизовать одну группу по другой и получить соответствующую фактор группу. Коэффициенты берутся из абелевой группы G. Таким образом, получаем короткую точную последовательность. Введем обозначение для фактор группы

$$C_k^s(X)/C_k^s(A) = C_k^s(X, A) \tag{8.20}$$

– цепи пары пространств.

Возникает короткая точная последовательность алгебраических цепных комплексов сингулярных цепей. Из короткой точной последовательности можно получить длинную гомологическую точную последовательность, которая будет называться точной

последовательностью пары в сингулярных гомологиях.

$$\ldots \longrightarrow H^s_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H^s_k(A) \longrightarrow H^S_k(X) \longrightarrow H^s_k(X, A) \xrightarrow{\delta_k} \ldots \tag{8.21}$$

Существование точной последовательности Майера-Виеториса для сингулярных гомологий.

Пусть имеется для топологических пространства X_1 и X_2. Тогда можно рассмотреть сингулярные цепи. Существует группа сингулярных цепей пересечения с коэффициентами в абелевой группе G. Эту сингулярную цепь можно рассматривать как в группе сингулярных цепей первого пространства, так и в группе сингулярных цепей второго пространства. Поэтому имеет место вложение

$$C^s_k(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow C^s_k(X_1) \oplus C^s_k(X_2) \tag{8.22}$$

Каждой цепи можно сопоставить пару

$$a \to (a, -a) \tag{8.23}$$

Где $a \in C^s_k(X_1 \cap X_2)$.

Возьмем пару прямой суммы и сопоставим ей сумму. Тогда

$$C^s_k(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow C^s_k(X_1) \oplus C^s_k(X_2) \longrightarrow C^s_k(X_1) + C^s_k(X_2) \tag{8.24}$$

Завершим эту последовательность:

$$0 \to C^s_k(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow C^s_k(X_1) \oplus C^s_k(X_2) \longrightarrow C^s_k(X_1) + C^s_k(X_2) \longrightarrow 0 \tag{8.25}$$

Отметим, что цепи пересечения фактически есть пересечение цепей

$$C^s_k(X_1 \cap X_2) = C^s_k(X_1) \cap C^s_k(X_2) \tag{8.26}$$

Мы можем построить по данной точной короткой последовательности длинную гомологическую последовательность. По стандартной конструкции получаем длинную точную гомологическую последовательность следующего вида

$$\ldots \longrightarrow H^s_{k+1}\left(C^s_{k+1}(X_1) + C^s_{k+1}(X_2)\right) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H^s_k\left(C^s_{k+1}(X_1 \cap X_2)\right) \longrightarrow H^s_k(X_1) \oplus H^s_k(X_2) \to$$
$$\to \boxed{H^s_k\left(C^s_k(X_1) + C^s_k(X_2)\right)} \xrightarrow{\delta_k} \ldots \tag{8.27}$$

При этом

$$H^s_k\left(C^s_k(X_1 \cap X_2)\right) = H^s_k(X_1 \cap X_2) \tag{8.28}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Возникает вопрос, в каком случае для выделенного участка цепи выполняется

$$H_k^s\left(C_k^s(X_1)+C_k^s(X_2)\right)=H_k^s\left(X_1\cup X_2\right) \tag{8.29}$$

Это необходимо для получения настоящей последовательности Майера-Виеториса.

Вывод: для существования точной последовательности Майера-Виеториса в сингулярных гомологиях необходимо и достаточно, чтобы в каждой размерности выполнялось

$$\boxed{H_k^s\left(C_k^s(X_1)+C_l^s(X_2)\right)\cong H_k^s\left(C_k^s\left(X_1\cup X_2\right)\right)} \tag{8.30}$$

Для сингулярных гомологий это выполняется не всегда.

Отображение вырезания.

Определение. Пусть задано вложение пар топологических пространств

$$(Y_1,X_1)\overset{\gamma}{\hookrightarrow}(Y_2,X_2) \tag{8.31}$$

то есть

$$(Y_1\subseteq Y_2)\wedge(X_1\subseteq X_2) \tag{8.32}$$

и одновременно

$$X_1\subset Y_1,\quad X_2\subset Y_2 \tag{8.33}$$

Тогда отображение γ называется **отображением вырезания**, если для дополнений пространств имеет место равенство

$$Y_1\backslash X_1=Y_2\backslash X_2 \tag{8.34}$$

Теорема. Пара топологических пространств X_1, X_2 удовлетворяет аксиоме вырезания тогда и только тогда, когда отображение вырезания

$$(X_1,X_1\cap X_2)\hookrightarrow(X_1\cup X_2,X_2) \tag{8.35}$$

индуцирует изоморфизм в сингулярных гомологиях.

Аксиома вырезания:

$$\boxed{H_k^s\left(C_k^s(X_1)+C_k^s(X_2)\right)\cong H_k^s\left(C_k^s\left(X_1\cup X_2\right)\right)} \tag{8.36}$$

Покажем, что условие теоремы (8.35) всегда выполнено для конечных симплициальных комплексов. А именно, верна следующая теорема.

Теорема. Всякое отображение вырезания для пар симплициальных комплексов индуцирует изоморфизм в симплициальных гомологиях.

Доказательство. Пусть имеется две пары симплициальных комплексов (K_1, L_1), (K_2, L_1), причем имеет место вложение

$$(K_1, L_1) \hookrightarrow (K_2, L_2) \tag{8.37}$$

и

$$K_1 \backslash L_1 = K_2 \backslash L_2 \tag{8.38}$$

Отсюда получаем два условия:

$$\begin{cases} K_2 = (K_1 \backslash L_1) \cup L_2 = K_1 \cup L_2 \\ L_1 = K_1 \cap L_2 \end{cases} \tag{8.39}$$

Изобразим полученную ситуацию на рис. 8.4. Докажем, что мы получили отображение

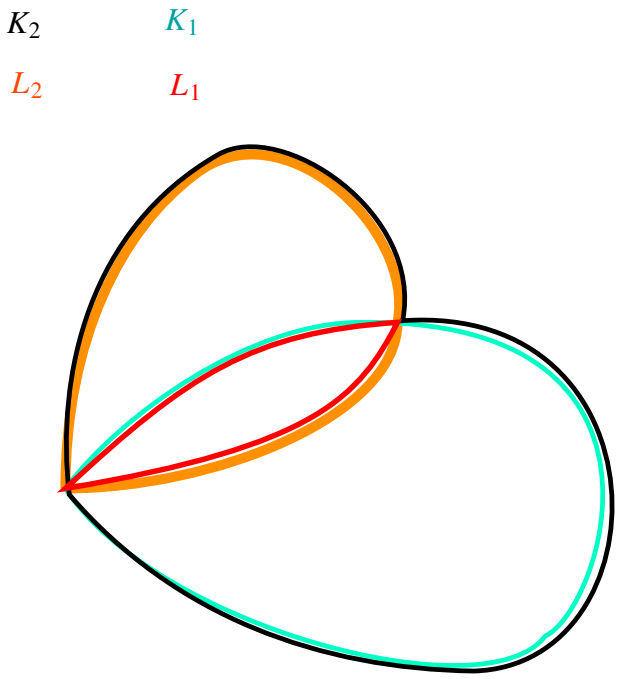

Рис. 8.4: Иллюстрация к объяснению.

вырезания и что оно индуцирует изоморфизм соответствующих гомологий. Рассмотрим цепи

$$C_k(K_1)/C_k(L_1) = C_k(K_1)/C_k\left(K_1 \cap L_2\right) \tag{8.40}$$

Рассмотрим цепи

$$C_k(K_2)/C_k(L_2) = \left(C_k(K_1) + C_k(L_2)\right)/C_k(L_2) \tag{8.41}$$

Если мы докажем, что группы, стоящие в правых частях (8.40) и (8.41), изоморфны, то тогда будут изоморфны и группы, стоящие в левых частях соответствующих равенств

$$C_k(K_1)/C_k(L_1) \cong C_k(K_2)/C_k(L_2) \tag{8.42}$$

Это будет означать, что гомоморфизм вырезания, то есть вложение (8.37) индуцирует изоморфизм в симплициальных гомологиях:

$$\boxed{H_k(K_1, L_1) \cong H_k(K_2, L_2)} \tag{8.43}$$

Для доказательства этого изоморфизма воспользуемся теоремой Нётер.

Теорема Нётер. Пусть A,B – подмодули некоторого модуля C над областью главных идеалов Q. Обозначим $A + B$ – подмодуль, порожденный $A \cup B$ (то есть это наименьший модуль, содержащий это объединение). Тогда

$$A \hookrightarrow A + B, \quad B \hookrightarrow A + B \tag{8.44}$$

и

$$A \cap B \hookrightarrow A, \quad A \cap B \hookrightarrow B \tag{8.45}$$

и фактор модуля A

$$A/A \cap B \cong A + B/B \tag{8.46}$$

Отметим, что рис. 8.4 соответствует условиям данной теоремы. Более того, в указанных обозначениях

$$K_2 \backslash L_2 = K_1 \backslash L_1 \tag{8.47}$$

Определение. Модуль над кольцом – это абелева группа M, в которой дополнительно определено умножение на элементы этого кольца Q (кольцо коммутативное). При этом это умножение удовлетворяет аксиомам

$$\alpha, \beta \in Q \;\; x, y \in M \tag{8.48}$$

$$\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y \tag{8.49}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \tag{8.50}$$

$$(\alpha + \beta)\,(x) = \alpha x + \beta x \tag{8.51}$$

Пример. Модуль над $\mathbb{R}$ – это линейное пространство.

Определение. Область главных идеалов – это кольцо Q, в которой каждый идеал является главным.

Определение. Идеал

$$I \subseteq Q \tag{8.52}$$

– это подкольцо в Q, удовлетворяющее условиям

$$\forall a, b \in Q, \ \ \forall h \in \ \Rightarrow \ \ b \cdot h \cdot a \in I \tag{8.53}$$

Пример. Кольцо целых чисел с умножением и сложением $(\mathbb{Z}; +)$ – кольцо. Его подкольцом может быть $2\mathbb{Z}$. Вместе с тем он же и идеал.

Замечание. В сингулярных гомологиях не всегда выполняется аксиома вырезания.

Определение. Главный идеал в кольце Q – это идеал, порожденный одним элементом. Например,

$$a \in Q, \ \ I_a = \{bac\} \quad \forall b, c \in Q \tag{8.54}$$

Область главных идеалов – это такое кольцо, в котором каждый идеал является главным.

Пример. Кольцо $\mathbb{Z}$ с операциями сложения и умножения $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ является областью главных идеалов.

Таким образом, если мы возьмем

$$A = C_k(K_1) \tag{8.55}$$

$$B = C_k(L_2) \tag{8.56}$$

Тогда из теоремы Нётер получаем изоморфизм

$$C_k(K_1)/C_k\left(K_1 \cap L_2\right) \cong \left(C_k(K_1) + C_k(L_2)\right)/C_k(L_2) \tag{8.57}$$

Отсюда получаем, что изоморфны и фактор-группы, то есть выполняется (8.42). Таким образом. условие вырезания действительно выполняется для симплициальных пар.

Отметим, что для симплициальных гомологий условие вырезания выполняется автоматически; там возникают гомологии объединения комплексов. В сингулярных же гомологиях это не всегда так.

Замечание. Существует пример для сингулярных гомологий, когда аксиома вырезания не выполнена. Соответствующий пример есть в книге Э.Спеньер "Алгебраическая топология".

Аксиомы теории гомологий.

Чтобы понять связь между сингулярной и симплициальной теориями гомологий, нужно ввести аксиоматическое определение теории гомологий. Аксиомы теории гомологий были разработаны Эйленбергом и Стинродом.

Лекция 9. Аксиомы теории гомологий. Элементы теории когомологий.

Теория гомологий.

Определение. Теорией гомологий называют совокупность

$$(H, \delta)\,, \quad H = \{H_k\}_{k \geqslant 0}\,, \quad \delta = \{\delta_k\}_{k>0} \tag{9.1}$$

где H_k – ковариантный функтор из категории пар топологических пространств и непрерывных отображений в категорию абелевых групп и гомоморфизмов. Здесь δ_k – **связывающие гомоморфизмы.** При этом указанная совокупность должна удовлетворять аксиомам:

1. гомотопии
2. точности
3. вырезания
4. размерности

Аксиомы теории гомологий.

Аксиома гомотопии. Пусть G – абелева группа коэффициентов, $(X; A)$, (Y, B) – пары топологических пространств и

$$f, g: \quad (X, A) \longrightarrow (Y, B) \tag{9.2}$$

– непрерывные отображения из одной пары в другую.

Тогда, если эти два отображения гомотопны, то есть

$$f \simeq g \tag{9.3}$$

то индуцированные гомоморфизмы совпадают

$$f_k = g_k: \quad H_k(X, A) \to H_k(Y, B) \tag{9.4}$$

Аксиома точности. Для двух пар таких пространств, что

$$(X, A) \hookrightarrow (Y, B) \tag{9.5}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

то возникает точная гомологическая последовательность, которая имеет вид

$$\ldots \to H_{k+1}\left((Y,B),(X,A)\right) \xrightarrow{\delta_k} H_k(X,A) \xrightarrow{\gamma_k} H_k(Y,B) \xrightarrow{\pi_k} H_k\left((Y,B),(X,A)\right) \to \ldots \tag{9.6}$$

Тогда эта последовательность точна. Здесь

$$H_k\left((Y,B),(X,A)\right) = H_k\left(C_k(Y,B)/C_k(X,A)\right) \tag{9.7}$$

Аксиома вырезания. Для любой пары (X,A) и любого открытого множества U такого, что его замыкание содержится во внутренности A:

$$\overline{U} \subseteq Int\ A \tag{9.8}$$

Имеет место выражение

$$H_k\left(X\backslash U,\ A\backslash U\right) \xrightarrow{\cong} H_k(X,A) \tag{9.9}$$

Данную аксиому можно проиллюстрировать (рис. 9.1).

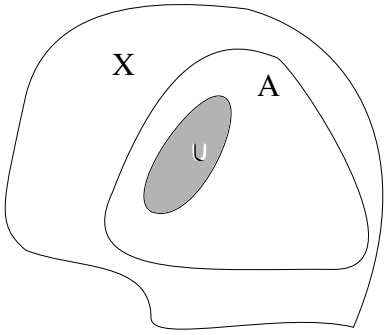

Рис. 9.1: Иллюстрация к объяснению.

Аксиома размерности. Если пространство X представляет собой одну точку:

$$X = pt \tag{9.10}$$

то все гомологии от этого пространства равны нулю

$$H_k(pt) = 0,\ \ k > 0 \tag{9.11}$$

Теорема Стинрода-Эйленберга.

Допустим, возникло две различных теории, которые удовлетворяют указанным аксиомам. Возникает вопрос – можно ли их сравнить и можно ли наложить дополнительное условие, позволяющее данным теориям совпасть. Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема Стинрода — Эйленберга.

1. Если для двух теорий гомологий (H, δ), $(\hat{H}, \partial)$ выполнены четыре перечисленные аксиомы и
$$H_0(pt) = \hat{H}_0(pt) = G \tag{9.12}$$
то эти гомологии совпадают
$$H = \hat{H} \tag{9.13}$$
с точностью до изоморфизма.

2. Пусть (H, δ) и $(\tilde{H}, \tilde{\delta})$ – теории гомологий, такие, что
$$H_0(pt) = \tilde{H}_0(pt) = \mathbb{Z} \tag{9.14}$$
Тогда, согласно первому утверждению, они изоморфны. Пусть задан некоторый гомоморфизм, который отображает
$$h: \ H_k \longrightarrow \tilde{H}_k \tag{9.15}$$
причем для любой пары (X, A) определён гомоморфизм
$$H_k(X, A) \xrightarrow{h_k} \tilde{H}_k(X, A) \tag{9.16}$$
который является коммутативной для любого непрерывного отображения
$$\forall f: \ (X, A) \to (Y, B) \tag{9.17}$$
Таким образом, если для диаграммы на рис. 9.2 выполняется коммутативность, то говорят, что гомоморфизм h **функториальный**. Пусть все указанное выше

$$\begin{array}{ccc} H_k(X, A) & \xrightarrow{h_k} & \tilde{H}_k(X, A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_k} \\ H_k(Y, A) & \xrightarrow{h_k(Y,B)} & \tilde{H}_k(Y, B) \end{array}$$

Рис. 9.2: Иллюстрация к примеру.

выполняется. Тогда указанный гомоморфизм индуцирует гомоморфизм
$$h_0: \ H_0(pt) \longrightarrow \tilde{H}_k(Y, B) \tag{9.18}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда оказывается, что верно и кратное: для любого гомоморфизма

$$\tilde{h} \cdot \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \tag{9.19}$$

существует такой гомоморфизм

$$\exists \tilde{h} : \ H_k \longrightarrow \tilde{H}_k \tag{9.20}$$

что $\tilde{h}$ индуцирует $\tilde{h}_0$.

Замечания:

1) Отметим, что чаще всего рассматривается $G = \mathbb{Z}$.

2) h_k коммутирует также со связывающими гомоморфизмами δ_k и $\tilde{\delta}_k$.

Таким образом, если задан гомоморфизм точки

$$\tilde{h}_0 : \ \mathbb{Z} = H_0(pt) \to \mathbb{Z} = \tilde{H}_0(pt) \tag{9.21}$$

то из него можно соорудить полный гомоморфизм групп гомологий.

3. Если гомоморфизм h_0 тождественный (изоморфизм), то эти теории гомологий H и $\tilde{H}$ изоморфны.

Следствия.

1. Так как симплициальные нульмерные гомологии точки совпадают с сингулярными гомологиями точки
$$H_0(pt; G) = H_0^s(pt; G) \tag{9.22}$$
то на категории конечных симплициальных комплексов (компактных полиэдров) эти теории гомологий: симплициальная и сингулярная – совпадают.

2. На категории компактных полиэдров определена точная последовательность Майера-Виеториса в сингулярных гомологиях.

3. Для любых двух триангуляций компактного полиэдра K_1 и K_2 симплициальные гомологии совпадают, то есть
$$H_k(K_1) = H_k(K_2) = H_k^s(|K|) = H_k^s(P) \tag{9.23}$$
так как сингулярные гомологии полиэдра $H_k^s(P)$ не зависит от триангуляций в силу определения сингулярных симплексов и сингулярных цепей.

Экстраординарные теории гомологии.

Определение. Экстраординарная теория гомологий – это такая теория гомологий, которая удовлетворяет аксиомам Стинрода-Эйленберга 1-3, но не удовлетворяют аксиоме 4.

Пример. Теория сингулярных бордизмов и другие. Это относится к так называемой К-теории.

Теория когомологий.

Определение. Алгебраический коцепной комплекс (C, ∂) это некоторая совокупность абелевых групп вида

$$(C, \partial), \;\; C = \left\{C^k\right\}_{k \geqslant 0}, \;\; \partial = \left\{\partial^k\right\}_{k \geqslant 0} \tag{9.24}$$

где C_k – абелевы группы, ∂_k – гомоморфизмы. При этом

$$\ldots \to C^{k-1} \xrightarrow{\partial^{k-1}} C^k \xrightarrow{\partial^k} C^{k+1} \longrightarrow \ldots \tag{9.25}$$

При этом выполняется условие

$$\partial^{k+1} \cdot \partial^k = 0 \tag{9.26}$$

Тогда образ предыдущего гомоморфизма будет содержаться в ядре следующего гомоморфизма

$$Im\ \partial^k \subseteq Ker\ \partial^{k+1} \tag{9.27}$$

и группы гомологий определяются следующим образом

$$\boxed{H^{k+1}(C, \partial) := Ker\ \partial^{k+1} / Im\ \partial^k = Z^{k+1} / B^{k+1}} \tag{9.28}$$

– группа $(k+1)$ **- мерных когомомлогий цепного комплекса** (C, ∂).

Кограничный гомоморфизм.

Рассмотрим теперь построение коцепного комплекса по заданному цепному комплексу. Пусть задан цепной комплекс $(\{C_k\}, \{\partial_k\})$, G – абелева группа коэффициентов.

Определение. k-мерной границей коцепей алгебраического цепного комплекса $(\{C_k\}, \{\partial_k\})$ называется группа

$$\boxed{C^k := Hom\,(C_k; G)} \tag{9.29}$$

Определим **кограничный гомоморфизм**:

$$\partial^k : C^k \to C^{k+1} \tag{9.30}$$

Рассмотрим

$$a^k \in C^k, \quad a^k \in Hom\,(C_k, G) \tag{9.31}$$

Тогда

$$\partial^k(a^k) \in Hom(C_{k+1}, G) \tag{9.32}$$

Тогда для

$$\forall \gamma \in C_{k+1} \tag{9.33}$$

определим кограничный гомоморфизм по закону сопряженности:

$$\boxed{\partial^k(a^k)(\gamma) := a^k(\partial_k \gamma)} \tag{9.34}$$

При этом

$$\partial^{k+1} \cdot \partial^k(a^k)(\beta) = \partial^k(a^k)(\partial_k \beta) = a^k\,(\partial_{k-1}\partial_k(\beta)) = a^k(0) = 0 \tag{9.35}$$

где $\beta \in C_{k+2}$.

Аналогично, если задан симплициальный комплекс, то мы можем перейти к когомологиям

$$H_k(P; G) \to H^k(P; G) \tag{9.36}$$

Кольцо гомологий.

Было показано, что из когомологий можно построить кольцо. Этим они оказываются даже более удобными, чем просто гомологии.

Рассмотрим некоторое кольцо $(A, +, \cdot)$, где A – абелева группа по сложению и полугруппа по умножению. Понятие *полугруппы* по операции определяет ассоциативность операции. Сложение и умножение здесь связаны дистрибутивностью. Построим кольцо когомологий. Пусть X – конечный симплициальный комплекс. У нас есть его симплексы, цепной комплекс с коэффициентами в группе G. По нему мы можем построить коцепной комплекс

$$(C_k(X), G) \rightarrowtail \left(C^k(X); G\right) \tag{9.37}$$

Если имеются сингулярные цепи рассматриваемого пространства, то аналогично им сопоставляются сингулярные коцепи

$$\left(C^s_k(X), G\right) \rightarrowtail \left(C^k_s(X); G\right) \tag{9.38}$$

Введем в группах коцепей операцию $\cup$-произведение. Пусть имеется некоторый стандартный симплекс

$$\sigma^{p+q} = \left[a_0 a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_{p+q}\right] \tag{9.39}$$

Определение. Передней p-гранью симплекса σ^{p+q} называется симплекс, определенный как

$$\sigma^p := \left[a_0 a_1 \dots a_p\right] = {}_p\sigma^{p+q} \tag{9.40}$$

Задней q-гранью симплекса σ^{p+q} называется симплекс

$$\sigma^q := \left[a_p a_{p+1} \dots a_{p+q}\right] = \sigma^{p+q}_q \tag{9.41}$$

Пусть дана некоторая сингулярная цепь, которая принадлежит группе сингулярных коцепей рассматриваемого симплициального комплекса (здес X – конечный симплициальный комплекс)

$$c^p \in C^p_s(X), \;\; c^q \in C^q_s(X) \tag{9.42}$$

Пусть дан сингулярный симплекс

$$\varphi^m \in C_m(X) \tag{9.43}$$

Определим его переднюю и заднюю грани. Рассмотрим симплекс φ^m, суженный на переднюю p-грань симплекса σ^m

$$\varphi^m\big|_{{}_p\sigma^m} = {}_p\varphi^m \tag{9.44}$$

– передняя грань симплекса φ^m.

Аналогично, задняя q-грань:

$$\varphi^m\big|_{\sigma^m_q} = \varphi^m_q \tag{9.45}$$

Определение. Пусть даны две коцепи, действующие на цепь размерности $p+q$. Тогда, по определению, первый сомножитель будут действовать на переднюю p-грань этого сингулярного симплекса, а второй сомножитель действует на заднюю q-грань

$$C^p \cup C^q\left(\varphi_{p+q}\right) := C^p\left({}_p\varphi^{p+q}\right) \cdot C^p\left(\varphi^{p+q}_q\right) \tag{9.46}$$

При этом G – кольцо коэффициентов, коммутативная с единицей.

Аналогично для любой цепи можно определить

$$C^p \cup C^q\left(\sum g_j \varphi^j_{p+q}\right) := \left(\sum g_j C^p\left({}_p\varphi^j_{p+q}\right)\right) \cdot \left(\sum g_j C^q\left(\varphi^q_{p+q}\right)_q\right) \tag{9.47}$$

Свойства операции $\cup$-умножения.

1. Применение когранично гомоморфизма осуществляется по правилу

$$\partial\left(C^p \cup C^q\right) = \partial C^p \cup C^q + (-1)^p C^p \cup \partial C^q \tag{9.48}$$

2. Умножение ассоциативно

$$C^p \cup \left(C^q \cup C^q\right) = \left(C^p \cup C^q\right) \cup C^q \tag{9.49}$$

3. Умножение не коммутативно

$$C^p \cup C^q = (-1)^{pq} C^q \cup C^q \tag{9.50}$$

4. Применение гомоморфизма коцепного комплекса f соответствует правилу

$$f\left(C^p \cup C^q\right) = f\left(C^p\right) \cup f\left(C^q\right) \tag{9.51}$$

Лекция 10. Гомологическая степень отображения сфер.

Свойство ∪-произведения.

1. Граница произведения

$$\partial\left(C^p \cup C^q\right) = \partial C^p \cup C^q + (-1)^p C^p \cup \partial C^q \tag{10.1}$$

2. Свойство ассоциативности

$$C^p \cup \left(C^q \cup C^q\right) = \left(C^p \cup C^q\right) \cup C^q \tag{10.2}$$

3. Свойство анти-коммутативности

$$C^p \cup C^q = (-1)^{pq} C^q \cup C^q \tag{10.3}$$

4. Действие гомоморфизма цепного комплекса

$$f : \left(C^k, \partial^k\right) \to \left(D^k, \partial^k\right) \tag{10.4}$$

осуществляется по правилу

$$f^{p+q}\left(C^p \cup C^q\right) = f^p\left(C^p\right) \cup f^q\left(C^q\right) \tag{10.5}$$

5. Пусть

$$\alpha : \ G \to H \tag{10.6}$$

– гомоморфизм колец коэффициентов. Тогда можно рассмотреть соответствующий гомоморфизм

$$\alpha^k : \ \left(C^k; G\right) \to \left(C^k; G\right) \tag{10.7}$$

И тогда

$$\alpha\left(C^p \cup C^q\right) = \alpha(C^p) \cup \alpha(C^q) \tag{10.8}$$

6. Операция ∪ - произведение переводит циклы в циклы, границы – в границы. Отсюда следует, что для любых классов когомомлогий

$$\forall h^p \in H^p(C), \ \ \forall h^q \in H^q(C) \tag{10.9}$$

корректно определено произведение

$$\exists! \ \ h^p \cup h^q \in H^{p+q}(C) \tag{10.10}$$

Рассмотрим симплициальные коцепи. Проверим свойство 1 на примере $p = 1,\ q = 2$. Возьмем кограничный гомоморфизм от произведения. По определению получаем

$$\begin{aligned}
\partial_2\left(C^1 \cup C^2\right)\left([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]\right) = C^1 \cup C^2\left(\partial\sigma^4\right) = \\
= C^1 \cup C^2\left([a_0a_1a_3a_4] - [a_0a_2a_3a_4] + [a_0a_1a_3a_4] - [a_0a_1a_2a_4] + [a_0a_1a_2a_3]\right) = \\
= C^1\left([a_1a_2]\right) \cdot C^2\left([a_2a_3a_4]\right) - C^1\left([a_0a_2]\right) \cdot C^2\left([a_2a_3a_4]\right) + \\
+C^1\left([a_0a_1]\right) \cdot C^2\left([a_1a_3a_4]\right) - C^1\left([a_0a_1]\right) \cdot C^2\left([a_1a_2a_4]\right) + C^1\left([a_0a_1]\right) \cdot C^2\left([a_1a_2a_3]\right) = \\
= C^1\left([a_1a_2] - [a_0a_2] + [a_0a_1]\right) \cdot C^2\left([a_2a_3a_4]\right) - \\
-C^1\left([a_0a_1]\right) \cdot C^2\left([a_2a_3a_4] + [a_1a_2a_4] - [a_1a_2a_3] - [a_1a_3a_4]\right) = \\
= \partial C^1\left([a_0a_1a_2]\right) \cdot C^2\left([a_2a_3a_4]\right) + (-1)^1 C^1\left([a_0a_1]\right) \cdot \partial C^2[a_1a_2a_3a_4] \qquad (10.11)
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Проверим третье свойство – свойство антикоммутативности.

$$\begin{aligned}
C_p \cup C^q\left([a_0a_1 \dots a_pa_{p+1} \dots a_{p+q}]\right) = C^p\left([a_0a_1 \dots a_p]\right) \cdot C^q\left([a_pa_{p+1} \dots a_{p+q}]\right) = \\
= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \cdot C^p\left([a_p \dots a_1a_0]\right) \cdot (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \cdot C^q\left([a_{q+p} \dots a_{p+1}a_p]\right) = \\
= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}} C^q\left([a_q \dots a_{p+1}a_p]\right) \cdot C^p\left([a_p \dots a_1a_0]\right) = \\
= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}\frac{q(q+1)}{2}} C^q \cup C^p\left([a_{p+q} \dots a_{p+1}a_pa_{p-1} \dots a_1a_0]\right) = \\
= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}} C^q \cup C^p\left([a_0a_1 \dots a_pa_{p+1} \dots a_{p+q}]\right) = \\
= (-1)^{pq} C^q \cup C^p\left([a_0 \dots a_{p+q}]\right) \qquad (10.12)
\end{aligned}$$

Задача.

1. Показать, что если C^p и C^q – коциклы, то и $C^p \cup C^q$ – коцикл.
2. Если C^p и C^q – кограницы, то и $C^p \cup C^q$ – кограница.

Гомологическая степень отображения сфер.

Рассмотрим симплициальные (сингулярные) гомомлогии. Пусть имеется непрерывное отображение в n-мерную сферу

$$f : \ S^n \to S^n \qquad (10.13)$$

Тогда существует отображение целочисленных гомологий этой сферы

$$\exists\ f_n : \ H_n\left(S^n; \mathbb{Z}\right) \to H_n\left(S^n; \mathbb{Z}\right) \qquad (10.14)$$

Эти гомологии равны

$$\boxed{H_k\left(S^n;\mathbb{Z}\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0,n\\ 0, & \text{остальные}\end{cases}} \tag{10.15}$$

Группа $\mathbb{Z}$ порождена одним элементом – единичкой, поэтому нам достаточно знать, куда перейдет единичка. Пусть

$$f_n(1)=k\in\mathbb{Z} \tag{10.16}$$

Определение. Гомологической степенью отображения f называется число

$$k=deg\ f\in\mathbb{Z} \tag{10.17}$$

такое, что

$$f_n(x)=deg f\cdot x=k\cdot x \tag{10.18}$$

Свойства гомологической степени отображения сфер.

1. Если два отображения из сферы в сферу

$$f,g:\ \ S^n\longrightarrow S^n \tag{10.19}$$

гомотопны, то есть

$$f\simeq g \tag{10.20}$$

то их степени одинаковы:

$$deg\ f=deg\ g \tag{10.21}$$

так как соответствующие отображения в гомологиях совпадают

$$f_n=g_k:\ \ H_n\left(S^n;\mathbb{Z}\right)\to H_n\left(S^n l\mathbb{Z}\right) \tag{10.22}$$

2. Если степени двух отображений сфера в сферу совпадают

$$deg\ f=deg\ g \tag{10.23}$$

то они гомотопны

$$f\simeq g \tag{10.24}$$

3. Пусть имеется композиция отображени

$$S^n\xrightarrow{\ f\ }S^n\xrightarrow{\ g\ }S^n \tag{10.25}$$

Тогда степень композиции есть произведение степеней

$$deg\ (g \circ f) = deg\ f \cdot deg\ g = k \cdot m \tag{10.26}$$

4. **Теорема.** Пусть есть отображение

$$F:\ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1},\ \ F(x) \neq 0 \tag{10.27}$$

Тогда

$$r \leqslant ||x|| \leqslant R \tag{10.28}$$

То есть в кольце (рис. 10.1) отображение отлично от нуля.

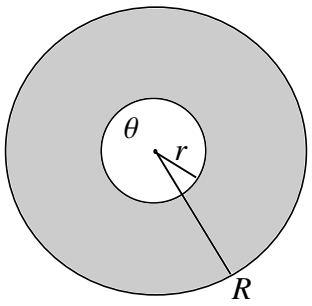

Рис. 10.1: Иллюстрация к объяснению.

Определим отображение сферы в сферу следующим образом.

Определение.

$$f_p:\ \ S^n \to S^n \tag{10.29}$$

Где S^n – единичная сфера радиуса 1, $r \leqslant \rho \leqslant R$. Тогда можно определить

$$\boxed{f_\rho(x) = \frac{F(\rho \cdot x)}{||F(\rho x)||}} \tag{10.30}$$

Таким образом, дана единичная сфера. Получаем сферу радиуса ρ. Отображение задано на всем пространстве. Отображаем ρx в $F(\rho x)$ (рис. 11.2). Далее снова переходим к единичной сфере, то есть сопоставляем полученному образу отношение (10.30). Деление на норму возможно, так как на данном кольце отображение не отображается в ноль. Зададим данные отображения (10.30) на всех сферах рассматриваемого кольца (изменяя ρ, то есть для любой сферы в указанном сферическом слое) (рис. 10.3).

Тогда указанная теорема утверждает, что степени отображений совпадают

$$deg\ f_r = deg\ f_\rho \tag{10.31}$$

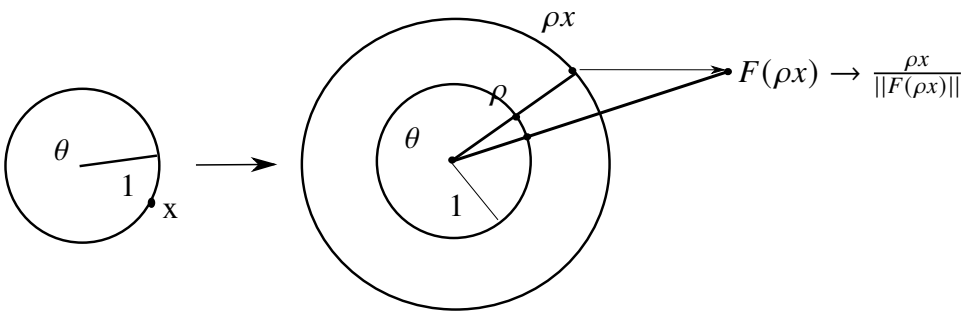

Рис. 10.2: Иллюстрация к объяснению.

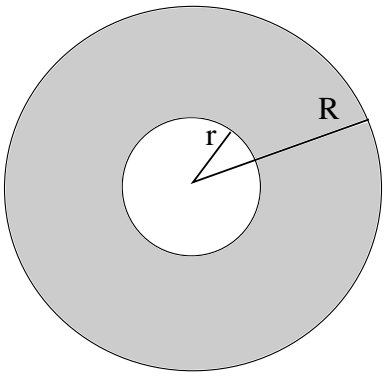

Рис. 10.3: Иллюстрация к объяснению.

Идея доказательства теоремы. Возьмем отображение с параметром r. Тогда можно устроить гомотопию

$$H(x,t) = \frac{F\left([tr + (1-t)R]\,x\right)}{||F\left([r + (1-t)R]\,x\right)||} \tag{10.32}$$

где $r \leqslant t \leqslant R$. При $t = 0$ получаем отображение (10.30) для R, при $t = 1$ получаем отображение для r.

Теперь рассмотрим последнее, пятое свойство $\cup$-произведения.

5. Пусть

$$A: \ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \tag{10.33}$$

– невырожденный линейный оператор. Тогда по нему можно определить соответствующее отображение единичной сферы в себя

$$\exists \tilde{A}: \ S^n \to S^n \tag{10.34}$$

где

$$\hat{A} = \frac{A(x)}{||A(x)||} \tag{10.35}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда имеет место утверждение о степени данного отображения

$$\boxed{deg\ \hat{A} = sgn\ (det\ A)} \tag{10.36}$$

Доказательство утверждения 5. Пусть дан некоторый базис $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. Пусть оператор A имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

Тогда оператор переворачивает первый базисный вектор

$$A(e_1) = -e_1 \tag{10.38}$$

а все остальные он переводит в них же

$$A(e_i) = e_i \tag{10.39}$$

Найдем степень отображения оператора $\hat{A}$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, выделим в нем начало координат и ортогональное ему пространство (рис. 10.3). Рассмотрим единичную сферу. Тогда при действии оператора на сферу, все, что находилось в верхнем полушарии, окажется в нижнем и наоборот. То есть, данное отображение $\hat{A}$ выворачивает сферу наизнанку. При этом степень отображения будет равна -1. n-мерный цикл здесь равен сумме n-мерных симплексов, которые покрывают всю сферу. Если мы перевернем первый базисный вектор, то получим, что все симплексы поменяют ориентацию. Таким образом, $\hat{A}$ выворачивает сферу S^n наизнанку, так как все n-мерные симплексы триангуляции S^n меняют ориентацию.

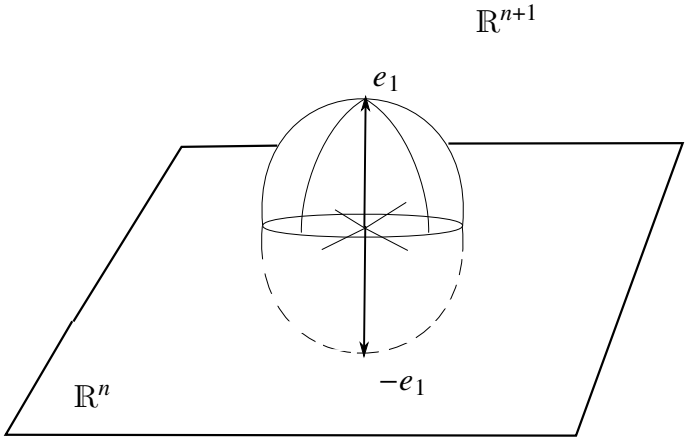

Рис. 10.4: Иллюстрация к объяснению.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом,

$$deg\ \hat{K} = -1 = deg\ A = 1 \tag{10.40}$$

Заметим, что определитель оператора тоже равен -1.

Рассмотрим оператор другого типа. Пусть все коэффициенты равны -1:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & -1 \end{pmatrix} \tag{10.41}$$

Тогда этот оператор можно представить как композицию

$$A = B_{n-1} \cdot \ldots \cdot B_1 \tag{10.42}$$

где каждый из операторов B_i переворачивает только один вектор, а все остальные оставляет на месте

$$B_i : \quad e_i \to e_i, \quad e_k \to e_k, \quad k \neq i \tag{10.43}$$

Тогда аналогично получаем, что степень оператора B_i равна -1. Для композиции гомологических отображений степень равна произведению степеней

$$deg\ A = \prod_{k=1}^{n+1} deg\ B_k = (-1)^{n+1} = sgn\ det\ A \tag{10.44}$$

Оператор невырожденный, поэтому он осуществляет взаимно-однозначное отобрание сферы S^{n+1} в себя. Следовательно, оператор $\hat{A}$ осуществляет взаимно-однозначное отображение сферы в сферу. Значит, оператор обратим. Соответственно, произведение степени исходного и обратного равно 1. Значит, степень рассматриваемого оператора может быть только ± 1.

Пусть матрица рассматриваемого линейного оператора подобным невырожденным преобразованием приводится к диагональной матрице:

$$A = B^{-1} \cdot \Lambda \cdot B \tag{10.45}$$

где B – невырожденный оператор

$$det\ B \neq 0 \tag{10.46}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определитель произведения равен произведению определителей, поэтому

$$det\ A = det\ \Lambda \tag{10.47}$$

где Λ – диагональная матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \tag{10.48}$$

При этом

$$deg\ \hat{B} \cdot deg\ \hat{B}^{-1} = 1 \tag{10.49}$$

Оказывается, такой диагональный линейный оператор можно прогомотопировать (то есть создать гомотопию, у которой на диагонали будут стоять ± 1)

$$\Phi_t : \begin{pmatrix} t \cdot \lambda_1 + (1-t)\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t \cdot \lambda_{n+1} + (1-t)\frac{\lambda_{n+1}}{|\lambda_{n+1}|} \end{pmatrix} \tag{10.50}$$

Если возьмем $t = 1$, получим оператор (10.48), а при $t = 0$ получим

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} sgn\ \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & sgn\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \tag{10.51}$$

соответственно, получим матрицу с ± 1. Для нее степень была найдена выше.

Таким образом,

$$\Lambda \simeq \tilde{\Lambda} \tag{10.52}$$

При этом

$$deg\ (\tilde{\Lambda}) = sgn\ (det\ B) \tag{10.53}$$

Рассмотрим случай, при котором матрицу нельзя привести к диагональному виду. В этом случае имеет место теорема: любой невырожденный оператор приводится к жордановой форме невырожденным преобразованием.

Пусть оператор A (его матрица) приводится к жордановой форме с помощью невырожденного преобразования B. Тогда

$$A = B^{-1} \cdot G \cdot B \tag{10.54}$$

где G – жорданова матрица, состоящая из жордановых клеток:

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{n+1}} \end{pmatrix} \tag{10.55}$$

где сумма размерностей этих клеток совпадает с $n+1$. J_k – жордановы клетки. Они могут быть разных видов:

- на диагонали стоит одно и то же вещественное число, а над ней – ряд из единиц

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{10.56}$$

- на диагонали – повторяющаяся клетка $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, а над ней – ряд из $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$J_j = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} \end{pmatrix} \tag{10.57}$$

Рассмотрим соответствующие гомотопии для жордановых клеток. Отметим, что клетка

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{10.58}$$

всегда гомотопна, то есть можно считать, что

$$(a^2 + b^2 = 1) \tag{10.59}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При этом (10.58) гомотопна матрице

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{10.60}$$

или матрице

$$\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{10.61}$$

Построим гомотопии

$$\Phi_t = \begin{pmatrix}a(1-t)+t\frac{a}{|a|} & b(1-t)\\ -b(1-t) & a(1-t)+t\frac{a}{|a|}\end{pmatrix} \tag{10.62}$$

Если $t = 0$, то мы получаем матрицу (10.58), если $t = 1$, то получаем (10.60). Чтобы получить другой вариант матрицы, можно рассмотреть гомотопию

$$\Psi_t = \begin{pmatrix}a(1-t) & b(1-t)+t\frac{b}{|b|}\\ -\left[b(1-t)+t\frac{b}{|b|}\right] & a(1-t)\end{pmatrix} \tag{10.63}$$

Аналогично, если $t = 0$, получаем исходную матрицу, если $t = 1$, получим (10.61). Более того, можно прогомотопировать матрицы (10.60) и (10.61):

$$H_t : \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi t}{2} & \sin\frac{\pi t}{2}\\ -\sin\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2}\end{pmatrix} \tag{10.64}$$

Тогда, при $t = 1$ получаем матрицу

$$H_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{10.65}$$

При $t = 0$ получим

$$H_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{10.66}$$

Таким образом, все рассмотренные матрицы гомотопны между собой. Отметим, что при таких гомотопиях ориентация сферы сохраняется.

Рассмотрим жорданову клетку (10.57). Отметим, что фактически ее можно привести к тождественной матрице или к матрице, гомотопной тождественной. Аналогично (10.56) можно свести к тождественному или отрицательному тождественному отображению. При этом размерность клетки (10.57) – четная, поэтому степень отображения всегда будет

равна 1, даже если степени внутренних клеток равны -1

$$deg\ \hat{J}_j = 1 \tag{10.67}$$

Вернемся к жордановой матрице G. Определитель исходной матрицы есть произведение внутренних J_k. Соответственна, степень соответствующего отображения будет равна произведению степень каждого из отображений, поэтому

$$deg\ \hat{A} = sgn(det\ A) = sgn\left(\prod_{k=1}^{m} det\ J_k\right) \tag{10.68}$$

Таким образом, мы рассмотрели самый общий вид матрицы, который приводится невырожденным преобразованием к жордановой форме. Тогда соответствующее отображение единичной сферы имеет степень, которая фактически равна знаку исходного определителя. Таким образом, для любого невырожденного линейного оператора A степень его отображения в единичной сфере равна

$$deg\ \hat{A} = sgn(det\ A) \tag{10.69}$$

Лекция 11. Характеристика векторного поля. Индекс изолированной особой точки векторного поля.

Постановка задачи.

Рассмотрим характеристику векторного поля и индекс изолированной особой точки векторного поля. Пусть

$$\Phi : \ U \to \mathbb{R}^n \tag{11.1}$$

– непрерывное отображение. Нас интересует вопрос: существуют ли нули этого отображения Φ на этой области U? То есть, существуют ли точки $x_0 \in U$:

$$\Phi(x_0) = \theta \in \mathbb{R}^n \tag{11.2}$$

Нужно определить некоторую характеристику, которая бы индексировала, есть нули или нет. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторую точку x_0 и её шаровую окретсноть (рис. 11.1). Окрестность

$$U_r(x_0) = D^n_r(x_0) = S^{n-1}_r(x_0) \tag{11.3}$$

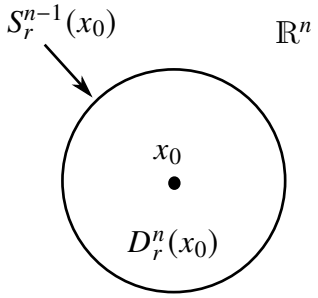

Рис. 11.1: Иллюстрация к объяснению.

Предположим, что на указанной сфере нет нулей

$$\Phi\left(\partial D^n_r(x_0)\right) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\} \tag{11.4}$$

Тогда мы можем определить отображение из единичной сферы в единичную сферу, для которого можно посчитать степень

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{\Phi\left(x_0 + rx\right)}{||\Phi\left(x_0 + rx\right)||} \tag{11.5}$$

Такое отображение действует

$$\widetilde{\Phi} : \ \ S^{n-1} \to S^{n-1} \tag{11.6}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где

$$S^{n-1} = S_1^{n-1}(\theta) \tag{11.7}$$

Гомологии $n-1$-мерной сферы совпадают с группой $\mathbb{Z}$, поэтому возникает индуцированное отображение

$$\widetilde{\Phi}: \quad H_{n-1}\left(S^{n-1}, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow H_{n-1}\left(S^{n-1}, \mathbb{Z}\right) \tag{11.8}$$

и степень возникает как коэффициент при образующей.

Характеристика векторного поля. Свойства характеристики векторного поля.

Определение. Полученная степень отображения

$$\boxed{deg\ \widetilde{\Phi} =: æ\left(\Phi, S_t^{n-1}(x_0)\right)} \tag{11.9}$$

определяется как **характеристика** векторного поля Φ на сфере.

Теорема. Пусть отображение Φ отображает диск в пространство $\mathbb{R}^n$ без нуля

$$\Phi: \quad D_r^n(x_0) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{11.10}$$

то есть нулей нет ни на сфере, ни внутри диска. Тогда на границе диска можно определить характеристику. Отображение Φ предполагается непрерывным. Тогда характеристика векторного поля на границе диска равна нулю

$$æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) = 0 \tag{11.11}$$

Доказательство. В описанных условиях существует гомотопия между отображением $\widetilde{\Phi}$ и постоянным отображением в точку $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$\hat{\Phi}(t,x) := \frac{\Phi\left(x_0 + trx\right)}{||\Phi\left(x_0 + trx\right)||}: \quad S^{n-1} \to S^{n-1} \tag{11.12}$$

Тогда, если

$$t = 0 \quad \Rightarrow \hat{\Phi} \equiv \frac{\Phi(x_0)}{||\Phi(x_0)||} \tag{11.13}$$

Таким образом, мы имеем точку x на единичной сфере, операция $x_0 + trx$ переводит ее в точку, лежащую на сфере с центром x_0. Далее мы отображаем эту точку с помощью Φ и снова переходим в единичную сферу (рис. 11.2). После этого проектируем полученную точку на единичную сферу. Таким образом,

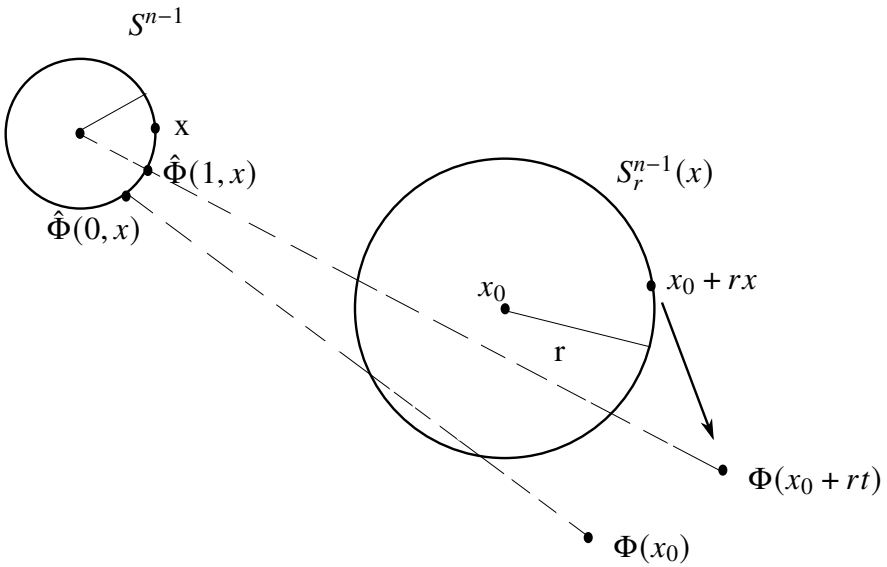

Рис. 11.2: Иллюстрация к объяснению.

$$\widetilde{\Phi}(x) \simeq \frac{\Phi(x_0)}{||\Phi(x_0)||} \tag{11.14}$$

Раз отображения гомотопны, значит, они индуцируют одно и то же отображение гомологий. Имеет место диаграмма (рис. 11.3).

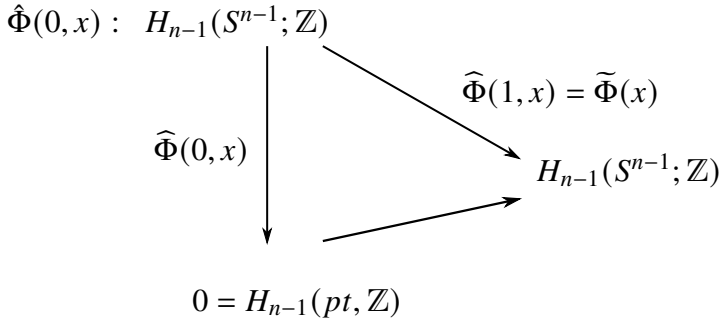

Рис. 11.3: Иллюстрация к объяснению.

Гомологии точки равны нулю, поэтому и вся композиция на рис. 11.3 равна нулю. Здесь точка

$$pt = \frac{\Phi(x_0)}{||\Phi(x_0)||} \tag{11.15}$$

Очевидно, что данная диаграмма коммутативна, поэтому степени отображений совпадают, поэтому

$$æ\left(\Phi; S_r^{n+1}(x_0)\right) = 0 \tag{11.16}$$

так как

$$0 = deg\ \hat{\Phi}(0,x) \tag{11.17}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом, мы доказали теорему о том, что в случае, если диск отображается без нулей, то характеристика векторного поля на этой сфере равна нулю.

Следствие 1. Если векторное поле Φ определено только на сфере $S_r^{n-1}(x_0)$ и отображение

$$\Phi: \quad S_r^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{11.18}$$

Тогда возникает отображение

$$\widetilde{\Phi}: \quad S^{n-1} \to S^{n-1} \tag{11.19}$$

и определена характеристика

$$æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) \tag{11.20}$$

Если при этом поле Φ задано на всем диске $D_r^n(x_0)$ и его характеристика на сфере

$$æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) \neq 0 \tag{11.21}$$

то внутри этого диска $D_r^n(x_0)$ имеются нули векторного поля Φ.

Следствие 2. Если векторное поле Φ задано только на сфере $S_r^{n-1}(x_0)$ и его характеристика

$$æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) \neq 0 \tag{11.22}$$

то векторное поле Φ нельзя продолжить непрерывно на весь диск $D_r^n(x_0)$ без нулей. Доказательство вытекает из следствия 1.

Индекс изолированной особой точки.

Объясним термин "векторное поле". Рассмотрим некоторое отображение

$$\Phi: \quad U \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{11.23}$$

При этом

$$U \subset \mathbb{R}^n \tag{11.24}$$

Рассмотрим область U (рис. 11.4). Каждой точке x сопоставляется некий образ $\Phi(x)$. Тогда каждой точке пространства можно сопоставить радиус-вектор ее образа. Отложим этот вектор из точки x. Тогда получаем, что у всех точек появляются векторы. Отсюда появляется термин "векторное поле". Во многих задачах нас интересуют точки, в которых это векторное поле становится равным нулю.

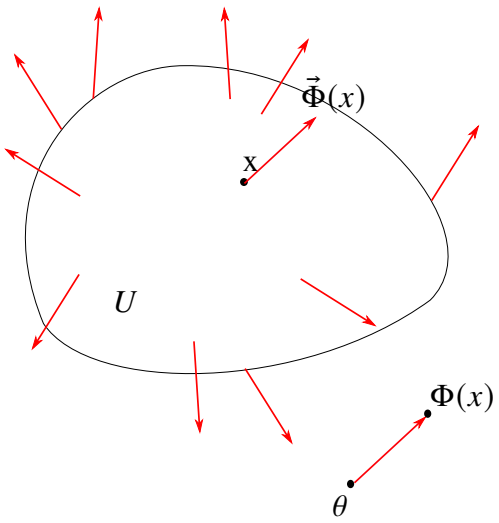

Рис. 11.4: Иллюстрация к объяснению.

Определение. Точка x_0, где

$$\Phi(x_0) = \theta \in \mathbb{R}^n \tag{11.25}$$

называется **особой точкой** векторного поля Φ.

Говорят, что особая точка x_0 является **изолированной особой точкой**, если существует ее окрестность $D^n_R(x_0)$, которая не содержит нулей векторного поля Φ, то есть

$$\Phi: \ D^n_r(x_0)\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{\theta\} \tag{11.26}$$

Определим индекс изолированной особой точки. Пусть x_0 – изолированная особая точка векторного поля Φ. Вокруг нее имеется окрестность радиуса R рис. 11.5. Пусть $0 < r < R$. Рассмотрим сферу $S^{n-1}_r(x_0)$.

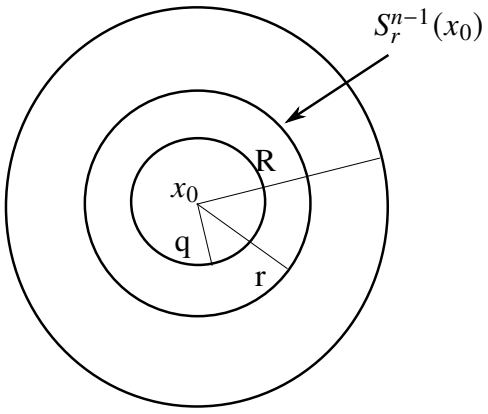

Рис. 11.5: Иллюстрация к объяснению.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда определена характеристика векторного поля Φ

$$æ\left(\Phi, S_r^{n-1}(x_0)\right) \tag{11.27}$$

Возьмем другую сферу. Аналогично, для $0 < q < R$, $q \neq r$ определена характеристика

$$æ\left(\Phi; S_q^{n-1}(x_0)\right) \tag{11.28}$$

Будут ли отличаться данные характеристики?

Лемма. В описанных условиях указанные характеристики совпадают

$$æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) = æ\left(\Phi; S_q^{n-1}(x_0)\right) \tag{11.29}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (рис. 11.6).

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}\left(S_q^{n-1}(x_0); \mathbb{Z}\right) & & \\ \Big\updownarrow \hat{\gamma} & \searrow & \\ & & H_{n-1}\left(\mathbb{R}\backslash\{0\}; \mathbb{Z}\right) = H_{n-1}\left(S^{n-1}; \mathbb{Z}\right) \\ H_{n-1}\left(S_r^{n-1}(x_0); \mathbb{Z}\right) & \nearrow & \end{array}$$

Рис. 11.6: Диаграмма.

Здесь мы учли гомотопическую эквивалентность между $H_{n-1}\left(\mathbb{R}\backslash\{0\}; \mathbb{Z}\right)$ и гомологиями единичной сферы $H_{n-1}\left(S^{n-1}; \mathbb{Z}\right)$. Имеет место гомеофорфизм между сферами:

$$\gamma: \quad S_q^{n-1}(x_0) \xrightarrow{\cong} S_r^{n-1}(x_0) \tag{11.30}$$

Проиллюстрировать это можно следующим образом (рис. 11.7).

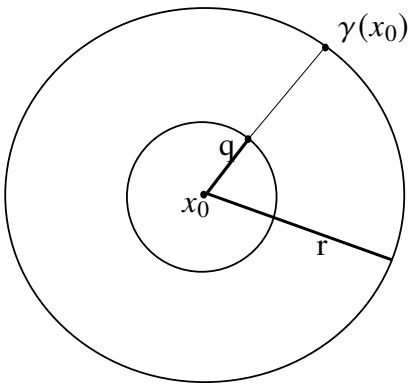

Рис. 11.7: Иллюстрация к объяснению.

Например, берем некоторую точку на сфере с радиусом q, продолжаем радиус

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

вектор через эту точку до пересечения со второй сферой. Это и будет $\gamma(x)$. Это гомеоморфизм, значит, в гомологиях это изоморфизм. Возникающий изоморфизм можно считать тождественным. Соответственно, получаем выражение на равенство степеней. Соответственно, характеристики векторного поля на двух сферах совпадают:

$$æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) = æ\left(\Phi; S_q^{n-1}(x_0)\right) \tag{11.31}$$

Для доказательства этого факта можно привести более геометрическое рассуждение. Рассмотрим обе сферы (рис. 11.8). Каждый диск есть компактный полиэдр, поэтому мы можем рассмотреть компактный полиэдр, составленный из шарового слоя (на рис. 11.8 выделен серым). Здесь P – компактный полиэдр. В нем границы представляют собой два цикла S_r^{n-1} и S_q^{n-1}.

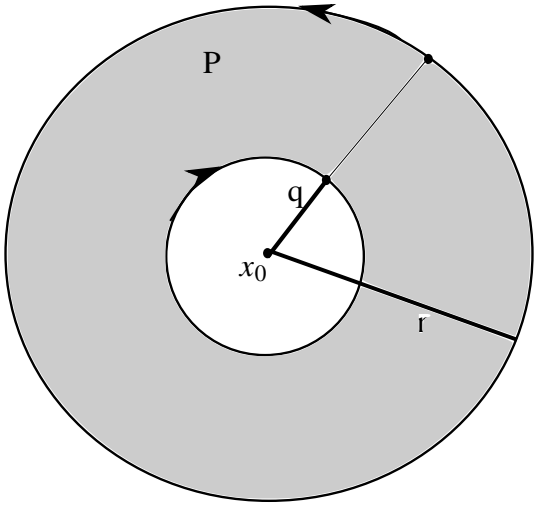

Рис. 11.8: Иллюстрация к объяснению.

Соответственно, граница полиэдра

$$\partial P = S_r^{n-1} - S_q^{n-1} \tag{11.32}$$

Минус обусловлен тем, что ориентации сферы направлены в разные стороны, что обусловлено правильной триангуляцией полиэдра. Например, возьмем цикл, равный сумме всех n-мерных симплексов полиэдра

$$z = \sum_j \tau_j^n \tag{11.33}$$

Тогда его граница

$$\partial z = \sum_j \partial \tau_j^n \tag{11.34}$$

Тогда при сложении границ на внутренних ребрах (при триангуляции) ориентации будут

направлены в разные стороною. Соответственно, общая граница будет совпадать с разностью (11.32). Так как (11.32) – граница, то цикл дает нулевой класс гомологий. Соответственно, каждый из двух циклов задает один и тот же элемент групп гомологий этой границы. Поэтому получаем, что элементы гомологий совпадают – (11.30). Соответственно

$$\boxed{\hat{S}_q^{n-1} = \hat{S}_r^{n-1} \in H_{n-1}\left(S^{n-1}\right)} \tag{11.35}$$

Определение. Индексом изолированной особой точки x_0 векторного поля Φ (в описанных выше условиях) называется

$$ind\,(\Phi, x_0) := æ\left(\Phi; S_r^{n-1}(x_0)\right) \tag{11.36}$$

При $0 < r < R$. Корректность определения следует из этой леммы.

Характеристика векторного поля на границе области в $\mathbb{R}^n$.

Пусть U – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то есть U – открытое связное множество. Рассмотрим векторное поле, заданное на замыкании этой области

$$\Phi: \ \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{11.37}$$

– непрерывное векторное поле.

Пусть известно, что векторное поле на границе области не имеет нулей

$$\Phi: \ \partial U \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{11.38}$$

Тогда определена характеристика векторного поля Φ на границе области ∂U следующим образом. Векторное поле непрерывно и на границе не обращается в ноль. Соответственно, существует некоторая α-окрестность (для некоторого $\alpha > 0$) $V_\alpha(\partial U)$ (рис. 11.9), где

$$\Phi(x) \neq \theta \tag{11.39}$$

Эта окрестность равна объединению дисков радиуса α по всем точкам, принадлежащим границе области

$$V_\alpha\left(\partial U\right) = \bigcup_{x\in\partial U} D_\alpha^n(x) \tag{11.40}$$

Таким образом, возникает некоторая кратность (на рис. 11.9 изображена тонкой линией). Разобьем рассматриваемую область на множество кубиков (рис. 11.10). Рассмотрим совокупность эти кубиков, которые пересекаются с замыканием $U\setminus V_\alpha(\partial U)$. В итоге получим то, что находится внутри тонкой линии в области плюс замыкание. Объединение указанных кубиков – компактный полиэдр P_α (его граница указана красным).

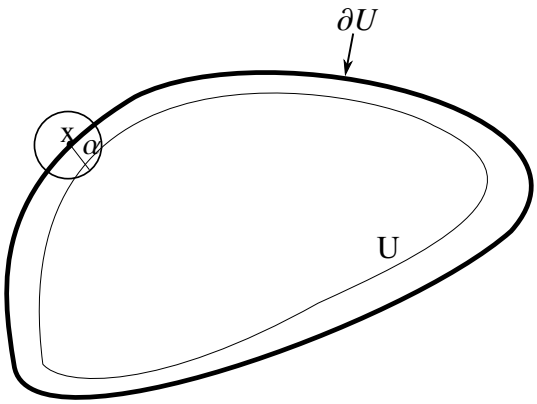

Рис. 11.9: Иллюстрация к объяснению.

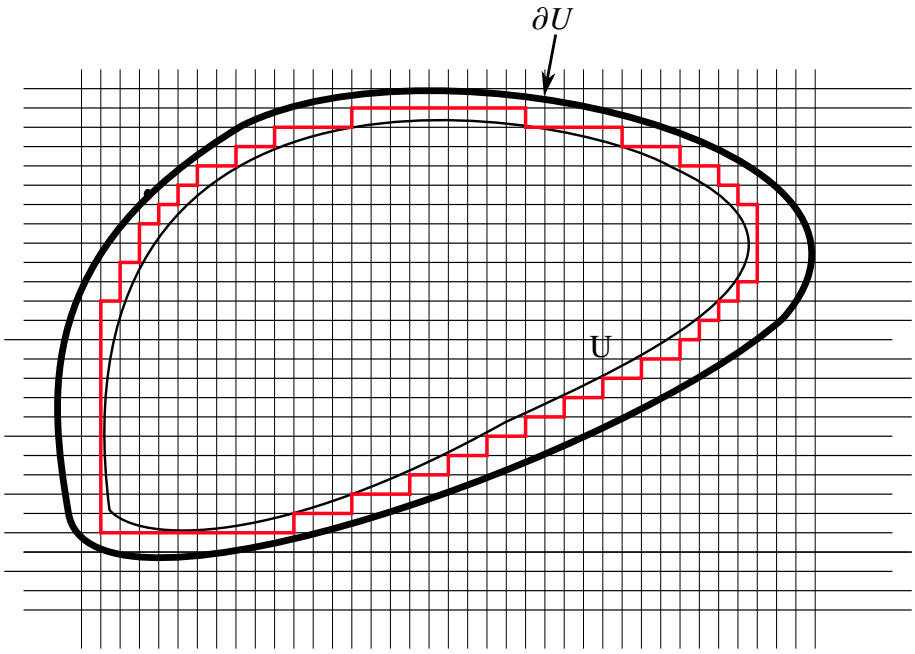

Рис. 11.10: Иллюстрация к объяснению.

Рассмотрим цепь

$$z = \sum_j \tau_j^n \tag{11.41}$$

– сумма всех n-мерных симплексов в P_α с согласованной ориентацией. Тогда граница цепи

$$\partial z = \sum \partial \tau_j^n \tag{11.42}$$

– фундаментальный цикл в ∂P_α. Этот цикл является образующей в группе гомологий $H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$.

Рассмотрим случай связной области U. Если U не связна, то в $H_n(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$ столько образующих, сколько компонент связности в области U. Тогда получаем, что есть

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

только одна образующая и определена степень отображения этой образующей в сферу. Соотвественно

$$æ\left(\Phi; \partial P_\alpha\right) = deg\ \widetilde{\Phi} \tag{11.43}$$

Где степень отображения определяется через

$$H_{n-1}\left(\partial P_\alpha; \mathbb{Z}\right) \longrightarrow H_{n-1}\left(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}\, l\mathbb{Z}\right) = H_{n-1}\left(S^{n-1}; \mathbb{Z}\right) \tag{11.44}$$

То есть получаем отображение

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \tag{11.45}$$

которая определяет степень deg.

Лемма (без доказательства). Для любых двух таких компактных полиэдров, удовлетворяющих всем описанным условиям характеристики на границах совпадают

$$æ\left(\Phi; \partial P_\alpha\right) = æ\left(\Phi; \partial P_\beta\right) \tag{11.46}$$

Отсюда следует корректность определения.

Определение. Характеристикой (вращением) векторного поля Φ на границе области ∂U называется

$$\boxed{æ\left(\Phi; \partial U\right) := æ\left(\Phi; \partial P_\alpha\right)} \tag{11.47}$$

Теорема. Если в описанных условиях в замкнутой области $\overline{U}$ у векторного поля Φ нет особых точек, то есть

$$\Phi: \ \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \tag{11.48}$$

Тогда характеристика векторного поля на границе области равняется нулю

$$æ\left(\Phi; \partial U\right) = 0 \tag{11.49}$$

Доказательство. Поле индуцирует отображение. Получаем диаграмму (рис. 11.11).

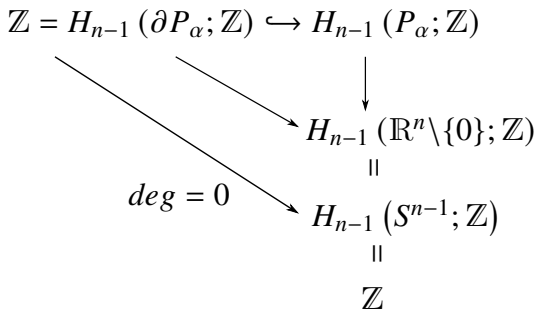

Рис. 11.11: Диаграмма.

При этом отображение

$$H_{n-1}\left(\partial P_\alpha;\mathbb{Z}\right) \hookrightarrow H_{n-1}(P_\alpha;\mathbb{Z}) = 0 \tag{11.50}$$

переводит нас в ноль (так как цепь является границей). Соответственно, композиция равна нулю. Значит, отображение индуцирует степень

$$deg = 0 \tag{11.51}$$

Следовательно, характеристика векторного поля

$$æ\left(\Phi, \partial U\right) = 0 \tag{11.52}$$

Теорема доказана.

Следствие. Если характеристика векторного поля

$$æ\left(\Phi, \partial U\right) \neq 0 \tag{11.53}$$

то внутри U существуют особые точки (нули).

Пусть внутри области U существует конечное число изолированных особых точек векторного поля Φ в расширенном смысле, то есть точки $x_1, \ldots, x_N$ либо изолированные нули векторного поля Φ, либо изолированные точки, в которых векторное поле Φ либо имеет разрыв, либо не определено.

При построении компактного полиэдра P_α всегда можно считать, что точки x_i располагаются внутри n-симплексов, причем в этих симплексах векторное поле Φ определено и без разрывов (кроме точек x_i). Каждая точка x_i лежит внутри симплекса

$$x_i \in \tau_i^n \tag{11.54}$$

Рассмотрим полиэдр без этих симплексов $P_\alpha \setminus \cup\, \tau_i^n$. Тогда получим полиэдр с "дырками". Рассмотрим полиэдр

$$\overline{P_\alpha - \bigcup_{i=1}^{N} \tau_i^n} = Q_\alpha \tag{11.55}$$

Рассмотрим цепь – сумму всех его n-мерных симплексов (они согласованно ориентированы)

$$\gamma = \sum_j \tau_j^n \tag{11.56}$$

Тогда граница этой цепи равна

$$\partial\gamma = \partial P_\alpha \cup \left(\sum_{i=1}^{N} \partial\tau_i^n\right) = \partial P_\alpha \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i^{n-1}\right) \tag{11.57}$$

где сферы S_i^{n-1} – границы $\partial\tau_i^n$.

Заметим, что цикл $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} S_i^{n-1}\right)$ и цикл ∂P_α – гомологичны в $H_{n-1}\left(Q_\alpha;\mathbb{Z}\right)$, соответственно, им соответствует один класс гомологий. Соответственно, у них одинаковая степень и поэтому разность этих циклов

$$\partial P_\alpha - \sum_{i=1}^{N} S_i^{n-1} \tag{11.58}$$

– граница в $H_n\left(Q_\alpha;\mathbb{Z}\right)$. Соответственно, характеристика векторного поля на границе

$$æ\left(\Phi;\partial P_\alpha\right) = \sum_{i=1}^{N} æ\left(\Phi;S_i^{n-1}\right) \tag{11.59}$$

Каждая из характеристик есть сумма индексов особых точек, поэтому

$$\boxed{æ\left(\Phi;\partial U\right) = \sum_{i=1}^{N} ind\ \left(\Phi,X_i\right)} \tag{11.60}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12. Клеточный комплекс и его гомологии.

Замечания к предыдущей лекции.

Ранее была доказана теорема о сумме индексов. Мы получили формулу для характеристики векторного поля на границе области

$$æ\left(\Phi;\partial U\right)=\sum_{i=1}^{N}ind\left(\Phi,x_i\right) \tag{12.1}$$

Если мы рассматриваем компактный полиэдр, то границы полиэдра ∂P_α гомологичны сумме циклов границ симплексов, внутри которых – особые точки ($\partial\tau_i^n$). Поэтому степень отображения разности

$$[\partial P_\alpha]-[\partial\tau^n] \tag{12.2}$$

при отображении в сферу мы можем пропустить этот цикл через отображение в сам полиэдр P_α. При этом, так как речь идет о границе, отображение идет в нуль. Поэтому получаем, что степень равна нулю

$$deg=0 \tag{12.3}$$

Упражнение. Доказать, что индекс изолированной особой точки векторного поля $\mathbb{Z}^2$ в точке ноль равен двум

$$ind\left(\mathbb{Z}^2;\theta\right)=2 \tag{12.4}$$

У нас есть векторное поле. Соответственно, имеем отображение

$$F(z)=\mathbb{Z}^2 \tag{12.5}$$

на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. У этого отображения есть особая точка – ноль. Нужно показать, что индекс этой особой точки равен двум. Понятно, что z пробегает единичную сферу. Тогда отображение

$$\widetilde{F}(z)=\frac{z^2}{||z^2||} \tag{12.6}$$

дает отображение из сферы в сферу. Тогда, если z пробегает окружность один раз, то z^2 пробегает сферу дважды. Поэтому степень отображения сферы в сферу будет равна двум.

Клеточный комплекс и его гомологии.

Определение. Клеточным комплексом называют хаусдорфово топологическое пространство X, представленное в виде объединения клеток.

Первое условие клеточного комплекса:

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} \left(\bigcup_{j \in I_i} e_i^j \right) \tag{12.7}$$

где e_i^j - j-ая клетка размерности i.

Рассмотрим понятие клетки. Клетка это такое подмножество

$$e_i^j \subset X : \ \exists \varphi_i^j : D^n \to X, (\dot{D}^n) \cong e_n^j \tag{12.8}$$

Замыкание этого диска тоже отображается в X. При этом граница клетки содержится в объединении клеток меньших размерностей

$$\overline{D}^n \to X \quad \partial e_j^n \subset \bigcup_{k<n} e_j^k \tag{12.9}$$

Второе условие клеточного комплекса: топология X согласована с клеточным разбиением, то есть подмножество K замкнуто в топологии пространства X тогда и только тогда, прообраз пересечения

$$\varphi_j^{-1}(K \cap e_j^n) \tag{12.10}$$

замкнут в этом диске D^n для любой клетки.

Примеры клеточных комплексов.

Рассмотрим сферу S^2. Склеим ее из клеток. Берем двумерную клетку (диск). Границу этой клетки мы должны поместить в клетку меньшей размерности.Таким образом, берем одну клетку размерности ноль и приклеиваем к ней границу (рис. 12.1). Таким образом, сферу

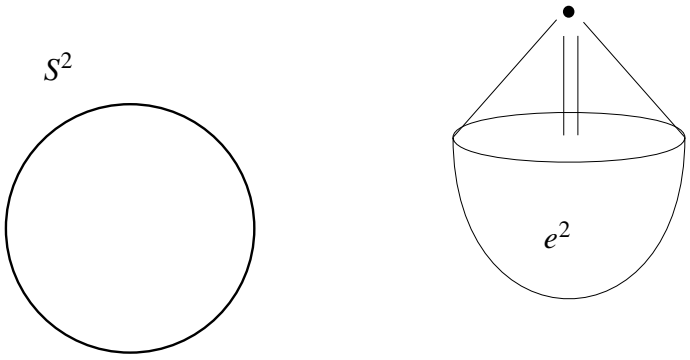

Рис. 12.1: Иллюстрация к примеру.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

можно представить как объединение

$$S^2 = e^2 \cup e^0 \tag{12.11}$$

Теперь рассмотрим двумерный тор (рис. 12.2). Тор можно склеить из квадрата (склеивая противоположные ребра друг с другом). Рассмотрим два клетки размерности 1 и одну клетку размерности 0. Тогда, берем клетку a. Приклеиваем клетку a_2 с плюсом к клетке e^0, а клетку a_1 – с минусом. Тогда граница приклеится в одну и ту же точку с коэффициентом ноль. Аналогично для клетки b. В итоге получим двумерную клетку, представленную в правой части рис. 12.2.

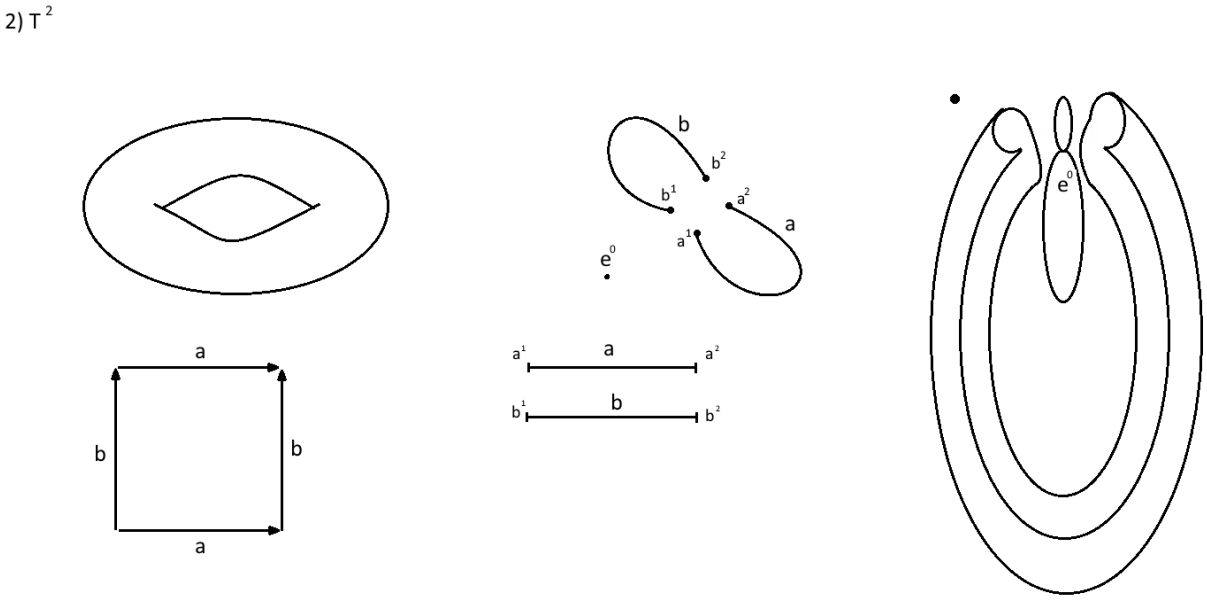

Рис. 12.2: Иллюстрация к объяснению

Таим образом, тор представлен в виде

$$T^2 = e^2 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^0 \tag{12.12}$$

В качестве третьего примера возьмём проективное вещественное пространство (рис. 12.3). Берем двумерный диск, склеиваем окружность этого диска по эквивалентности. Тогда каждая точка склеивается с диаметрально противоположной. Представим полученное пространство в виде объединения клеток. Возьмём двумерную клетку. Учитывая ориентацию, производим склеивание. Получим границу диска (то есть границу двумерной клетки). Граница должна быть приклеена к одной одномерной клетке. Чтобы склеивание соответствовало ориентации, нужно нижнюю клетку перевернуть относительно верхней.

Таким образом, вещественное проективное пространство состоит из одной двумерной

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

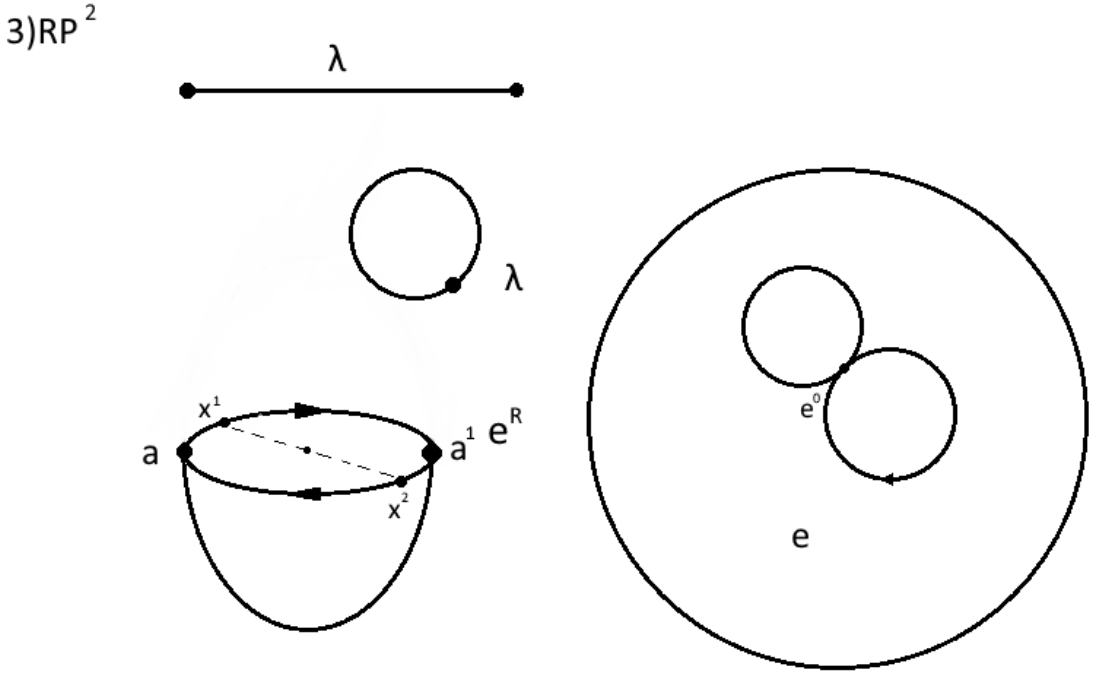

Рис. 12.3: Иллюстрация к примеру.

клетки, одной одномерной клетки и одной нульмерной клетки

$$\mathbb{R}P^2 = e^2 \cup e^1 \cup e^0 \tag{12.13}$$

Для каждого клеточного комплекса образуется цепной комплекс каждого клеточного комплекса. Группа цепей клеточного комплекса есть линейные комбинации его клеток данной размерности. Цепной клеточный комплекс некоторого пространства X есть группа цепей

$$C^{\text{кл}}(X) = \{C_g^{\text{кл}}(X; G)\} \tag{12.14}$$

Так, для S^2:

$$C_2^{\text{кл}}(S^2; Z) = \mathbb{Z} \tag{12.15}$$

$$C_1^{\text{кл}}(S^2; Z) = 0 \tag{12.16}$$

$$C_0^{\text{кл}}(S^2; Z) = \mathbb{Z} \tag{12.17}$$

Граничный гомоморфизм в клеточном комплексе.

Для единичной клетки e^n:

$$\varphi : D^n \to e^n) \tag{12.18}$$

Рассмотрим φ, суженное на границу данной диска

$$\varphi \Big|_{\delta D^n} : \delta e^n \to X^{n-1} \tag{12.19}$$

где X^{n-1} – объединение клеток X размерности $\leq n-1$. Далее мы можем профакторизовать данное множество по совокупности клеток которых размерность не выше $n-2$. Тогда получим букет сфер

$$\varphi\Big|_{\partial D^n} : \quad \partial e^n \to X^{n-1} X^{n-1}/X^{n-2} = \bigvee_{j=1}^{k_{n-1}} S_j^{n-1} \tag{12.20}$$

Букет окружностей – это несколько окружностей, которые склеиваются между собой только в одной точке.

Продолжим отображение

$$\varphi_j^{n-1} = \varphi\Big|_{\partial e^n} \to X \to X^{n-1}/X^{n-2} = \bigvee_j S_j^{n-1} \tag{12.21}$$

Таким образом, мы берем границу диска и получаем отображение

$$\varphi_j^{n-1} : \quad S^{n-1} \to S_j^{n-1} \tag{12.22}$$

Степень этого отображения обозначается

$$deg\ P_j^{n-1} =: \left[e^n, e_j^{n-1}\right] \tag{12.23}$$

Таким образом, граница клетки

$$\partial e^n : \quad \varphi_j^n : \quad S^{n-1} = \partial e^n \to X^{n-1}/X^{n-2} = \cup e_j^{n-1} = \bigvee_j S_j^{n-1} \to S_j^{n-1} \tag{12.24}$$

Определение. Коэффициентом инцидентности клеток e^n и e_j^{n-1} называется величина

$$\left[e^n, e_j^{n-1}\right] := deg\ \varphi_j^{n-1} \tag{12.25}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Вследствие этого мы можем определить границу клетки

$$\partial e^n := \sum_j \left[e^n, e_j^{n-1} \right] e_j^{n-1} \tag{12.26}$$

– сумма по всем клеткам.

Можно показать, что такой граничный гомоморфизм является цепным граничным гомоморфизмом, то есть

$$\partial \cdot \partial = 0 \tag{12.27}$$

Дальше распространяем по линейности на клеточные цепи. Это значит, что для линейной комбинации клеток размерности n

$$C_n = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i^n \tag{12.28}$$

получаем границу цепи

$$\boxed{\partial C_n := \sum_{i=1}^{k} a_i \partial e_i^n} \tag{12.29}$$

Клеточные гомологии.

Теперь мы можем рассмотреть клеточные комплексы у сферы, тора и проективного пространства. Мы знаем, какие там клетки, что представляют группы цепей. В данном случае легко вычислить граничные гомоморфизмы и клеточные гомологии. Раз у нас есть алгебраические цепные комплексы, то мы можем посчитать и их гомологии – клеточные гомологии.

Ранее мы получили для сферы S^2

$$S^2 = e^2 \cup e^0 \tag{12.30}$$

Клеточные гомологии этой сферы

$$C_2^{\text{кл}}\left(S^2; \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \tag{12.31}$$

$$C_0^{\text{кл}}\left(S^2; \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \tag{12.32}$$

$$C_1^{\text{кл}}\left(S^2; \mathbb{Z}\right) = 0 \tag{12.33}$$

При этом все дифференциалы нулевые

$$\partial_2 = 0 \tag{12.34}$$

$$\partial_1 = 0 \tag{12.35}$$

$$\partial_0 = 0 \tag{12.36}$$

Все дифференциалы нулевые, границ нет, поэтому получаем, что гомологии сферы будут такие же, как и группы цепей

$$H_q\left(S^2;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases} \tag{12.37}$$

Аналогично можно почитать гомологии тора T^2. Для тора группы цепей

$$C_2\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \tag{12.38}$$

$$C_1\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{12.39}$$

$$C_0\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \tag{12.40}$$

Тогда граница двумерной клетки (рис. 12.4) равна нулю

$$\partial\left(e^2\right) = a - b - a + b = 0 \tag{12.41}$$

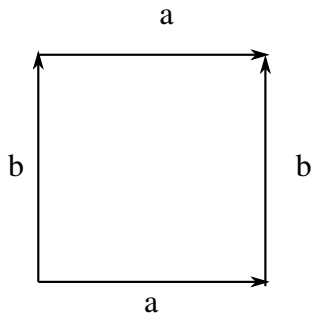

Рис. 12.4: Иллюстрация к объяснению.

Поэтому группа гомологий

$$H_2\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \tag{12.42}$$

Далее, если мы берем граничный гомоморфизм размерности 1, то границы этих клеток склеиваются с противоположными знаками и граница будет равна нулю

$$\partial_1 = 0 \tag{12.43}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поэтому одномерные гомологии тора

$$H_1\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \tag{12.44}$$

Нульмерный дифференциал всегда полагается равным нулю

$$\partial_0 = 0 \tag{12.45}$$

поэтому нульмерные гомологии тора

$$H_0\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \tag{12.46}$$

Рассмотрим клеточную структуру вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^2$ и посчитаем его гомологии. Клеточная структура представлена на рис. 12.5. Противоположные точки склеиваются между собой, поэтому мы получаем рис. 12.6. Таким

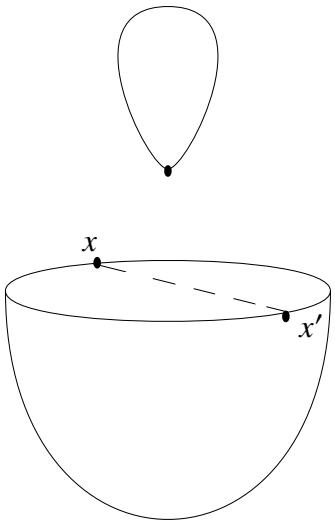

Рис. 12.5: Иллюстрация к объяснению.

образом, получаем

$$d_2(e^2) = 2e^1 \neq 0 \tag{12.47}$$

При этом граничный гомоморфизм, действующий на клетку e^1, будет равен нулю, так как границы склеиваются в точке с противоположным знаком

$$d_1(e^1) = 0 \tag{12.48}$$

Рассмотрим гомологии с целыми коэффициентами.Мы получили (12.47), то есть граница $d_2(e^2) \neq 0$, то есть данная клетка не является циклом. Поэтому получаем, что двумерные гомологии

$$H_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = 0 \tag{12.49}$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

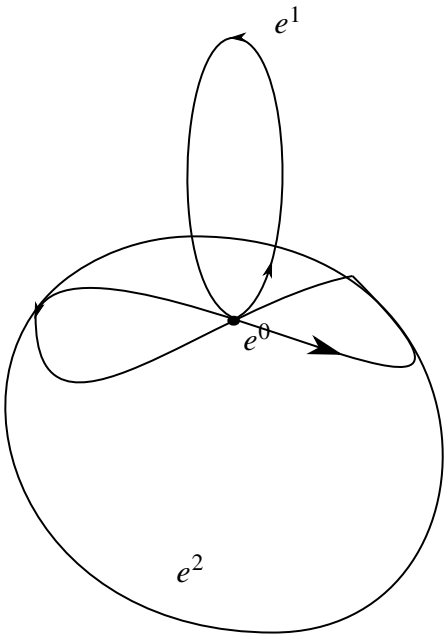

Рис. 12.6: Иллюстрация к объяснению.

Для одномерной клетки дифференциал нулевой, поэтому она является циклом. Поэтому группа одномерных циклов равна группе $\mathbb{Z}$

$$Z_1\left(\mathbb{Z}P^2;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z} \tag{12.50}$$

Одномерные границы клеточного комплекса есть

$$B_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)=2\mathbb{Z} \tag{12.51}$$

Поэтому получаем группу гомологий

$$H_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)=Z_1/B_1=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_2 \tag{12.52}$$

У нас всего одна нульмерная клетка. Дифференциал нулевой

$$d_0(e^0)=0 \tag{12.53}$$

поэтому e^0 – цикл, границ нет:

$$B_0=0 \tag{12.54}$$

Поэтому

$$Z_0\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z} \tag{12.55}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поэтому получаем нульмерные гомологии

$$H_0\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z} \tag{12.56}$$

Таким образом, целочисленные гомологии

$$H_k\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)=\begin{cases}0, & k\geqslant 2\\ \mathbb{Z}_2, & k=1\\ \mathbb{Z}, & k=0\end{cases} \tag{12.57}$$

Если мы будем рассматривать гомологии этого же пространства с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$, то результат будет другим. Рассмотрим гомологии пространства $H_k\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)$. В этом случае граничный гомоморфизм d_2 равен нулю

$$d_2(e^2)=0\in\mathbb{Z}_2 \tag{12.58}$$

так как все удвоенные элементы в группе $\mathbb{Z}_2$ равны нулю. Поэтому получаем, что e^2 – цикл и группа циклов равна группе коэффициентов

$$Z_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)=\mathbb{Z}_2 \tag{12.59}$$

Границы равны нулю при любых коэффициентах

$$B_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)=0 \tag{12.60}$$

Тогда двумерные гомологии

$$H_2\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)=\mathbb{Z}_2 \tag{12.61}$$

Группа циклов

$$Z_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)=\mathbb{Z}_2 \tag{12.62}$$

Группа границ

$$B_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)=0 \tag{12.63}$$

так как все удвоенные элементы обращаются в ноль. Отсюда получаем

$$H_1\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)=\mathbb{Z}_2 \tag{12.64}$$

Аналогично для нульмерных гомологий

$$H_0\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}_2 \tag{12.65}$$

Замечание. Предполагается, что клеточный комплекс – это хаусдорфово пространство.

Пример. Рассмотрим пространство, не являющееся клеточным комплексом. Рассмотрим квадрат, у которого отсутствует правое ребро (рис. 12.7). Разобьем его на клетки.

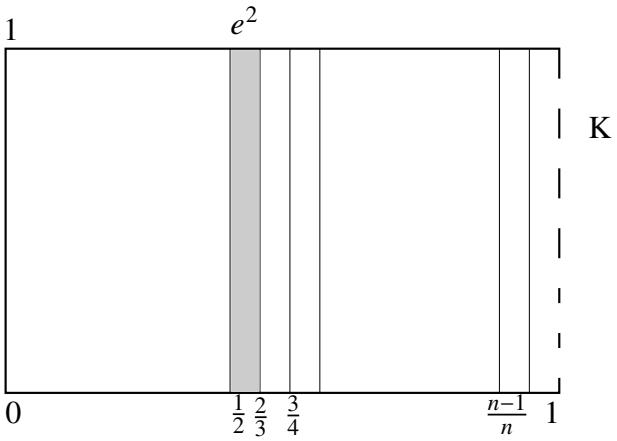

Рис. 12.7: Иллюстрация к примеру.

Ширина этой клетки равна

$$e^2_k: \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{12.66}$$

И высота равна 1.

Одномерными клетками здесь будут ребра. Разбиение на клетки получается, но не выполнена вторая аксиома – условие согласования топологии с клеточным разбиением. K не замкнуто, однако любое пересечение этого K с клеткой e^2 – замкнутое множество.

Теорема (без доказательства). Гомологии клеточных комплексов совпадают с симплициальными и сингулярными гомологиями (для компактных полиэдров).

Эйлерова характеристика и число Лефшеца симплициального отображения.

Пусть X – симплициальный комплекс. Пусть

$$F: \quad X \to X \tag{12.67}$$

– симплициальное отображение. Рассмотрим цепной комплекс X с коэффициентами в поле G (где G – поле характеристики 0, то есть это $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$).

Характеристика поля G: $\gamma(G)$ – наименьшее кратное 1_G, которое равно нулю. Если такого кратного нет, то полагают, что характеристика поля равна нулю. При этом для

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

указанных полей характеристика равна нулю

$$\gamma(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{Q}) = \gamma(\mathbb{C}) = 0 \tag{12.68}$$

Рассмотрим гомологии данного симплициального комплекса $H_k\,(X;G)$. Пусть эти группы конечно порождены (то есть у них конечное число образующих). Тогда, если выбраны базисы в линейном пространстве $H_k\,(X;G)$, тогда F индуцирует отображение

$$F_k:\;\; H_k\,(X;G) \to H_k\,(X;G) \tag{12.69}$$

и определяет матрицу коэффициентов

$$F_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ & & \\ & \dots & \end{pmatrix} \tag{12.70}$$

Где коэффициенты

$$F_{ij}^k \in G \tag{12.71}$$

Замечание. *Модуль над полем* – это линейное пространство.

Определение. Числом Лефшеца симплициального отображения

$$F:\;\; X \to X \tag{12.72}$$

называется число

$$\Lambda_F = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k tr\,(F_k) \tag{12.73}$$

причем след матрицы

$$tr\,(F_k) := \sum_{i=1}^{n_k} F_{ij}^k \tag{12.74}$$

Аналогично определяется число Лефшеца для групп цепей:

$$\hat{\Lambda}_F = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k tr\,\left(\hat{F}_k\right) \tag{12.75}$$

где $\hat{F}_k$ – матрица отображения

$$\hat{F}_k:\;\; C_k\,(X;G) \to C_k\,(X;G) \tag{12.76}$$

При этом базис в группе цепей симплициального комплекса $C_k\,(X;G)$ состоит из всех ориентированных симплексов размерности k. Тогда матрица, создаваемая в этом базисе, в

группе цепей $C_k\ (X; G)$ состоит только из элементов, которые могут быть равны только 0,1 или -1. Отсюда следует, что число Лефшеца в группах цепей $\hat{\Lambda}_F$ – целое число.

Теорема. При таком построении число Лефшеца, которое мы построили в гомологиях, совпадает с числом Лефшеца, которое мы построили для групп цепей

$$\boxed{\Lambda_F = \Lambda_{\widehat{F}}} \tag{12.77}$$

Здесь G – поле характеристики нуль.

Доказательство. Рассмотрим k-мерных группу цепей (рис. 12.8). В ней есть границы размерности k, циклы, группы гомологий – циклы, факторизованные по границам

$$H_k = Z_k / B_k \tag{12.78}$$

Если мы всю группу профакторизуем по циклам, получим группу

$$C_k / Z_k = T_k \tag{12.79}$$

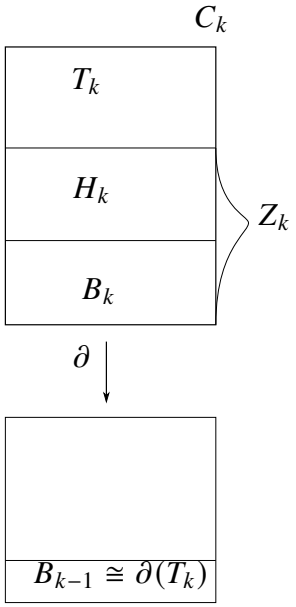

Рис. 12.8: Иллюстрация к доказательству.

Далее мы действуем дифференциалом в группу цепей меньшей размерности. Тогда границы и циклы переходят в ноль, а T_k перейдет в группу границ. Имеют место две теоремы.

Теорема. Если в линейном пространстве L A – это F-инвариантное множество (то есть

отображение переводит его в себя), тогда след отображения будет равен

$$tr(F) = tr\,(F/A) + tr\,(F/(L/A)) \tag{12.80}$$

Теорема. Если два линейных оператора имеют подобные матрицы, то следы у них одинаковы (характеристические многочлены подобных матриц совпадают).

Отсюда получаем, что след отображения складывается из нескольких следов

$$tr\left(\widehat{F}_k\right) = tr\left(\widehat{F}_K/B_k\right) + tr\left(\hat{F}_k/H_k\right) + tr\left(\hat{F}_{k-1}/B_{k-1}\right) \tag{12.81}$$

Умножим левую и правую часть этого выражения на $(-1)^k$:

$$(-1)^k \cdot tr\left(\widehat{F}_k\right) = tr\left(\widehat{F}_K/B_k\right) + tr\left(\hat{F}_k/H_k\right) + tr\left(\hat{F}_{k-1}/B_{k-1}\right) \cdot (-1)^k \tag{12.82}$$

При этом след $tr\left(\hat{F}_k/H_k\right)$ будет умножаться на $(-1)^k$, а след отображения меньшей размерности, то есть $tr\left(\hat{F}_{k-1}/B_{k-1}\right)$ будет умножаться на (-1) не в своей размерности. Поэтому при суммировании этот след встретится дважды

$$\hat{\Lambda}_F = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot tr\left(\widehat{F}_k\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[tr\left(\widehat{F}_K/B_k\right) + tr\left(\hat{F}_k/H_k\right) + tr\left(\hat{F}_{k-1}/B_{k-1}\right)\right] \tag{12.83}$$

Поэтому, первый и последний слагаемые в квадратных скобках уничтожают друг друга и мы получаем

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k tr\left(\hat{F}_k/H_k\right) = \Lambda_F \tag{12.84}$$

Мы рассматривали число Лефшеца отображения в цепях (12.83), а получили число Лефшеца отображения в гомологиях (12.84).

Заметим, что подгруппа границ размерности n равна нулю

$$B_n = 0 \tag{12.85}$$

так как нет симплексов размерности $n + 1$.

Теорема о неподвижной точке. Если число Лефшеца

$$\Lambda_F \neq 0 \tag{12.86}$$

то существует точка в симплициальном комплексе

$$\exists \xi \in X \tag{12.87}$$

такая, что

$$F(\xi) = \xi \tag{12.88}$$

Доказательство. Известно, что

$$\Lambda_F = \hat{\Lambda}_F \neq 0 \tag{12.89}$$

Число Лефшеца можно записать в виде

$$\hat{\Lambda}_F = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k tr\left(\hat{F}_k\right) \tag{12.90}$$

Если число Лефшеца не равно, то есть вся сумма (12.90) не равна нулю, то хотя бы один из следов в данной сумме не равен нулю

$$tr\left(\hat{F}_k\right) \neq 0 \tag{12.91}$$

Диагональные элементы матрицы равны 0 или 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n_k n_k} \end{pmatrix} \tag{12.92}$$

Поэтому существует хотя бы один ненулевой элемент в матрице цепного отображения $\hat{F}_k$ (на диагонали). Например, этот ненулевой элемент – a_{qq} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{qq} \neq 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n_k n_k} \end{pmatrix} \tag{12.93}$$

Это значит, что существует некоторый симплекс τ_q^k такой, что цепное отображение размерности q приводит этот симплекс в себя

$$\hat{F}_q\left(\tau_q^k\right) = \pm\tau_q^k \tag{12.94}$$

То есть его ориентация можно сохраниться или измениться. Значит, его вершины могут переставиться при этом отображении. Однако его барицентр перейдет в себя в точности. Соответственно, барицентр этого симплекса ξ – это неподвижная точка рассмотренного отображения F. Например, пусть есть некоторый симплекс (рис. 12.9). Он может перейти в симплекс с переставленными вершинами, однако его барицентр перейдет в барицентр, так как барицентрические координаты сохраняются.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

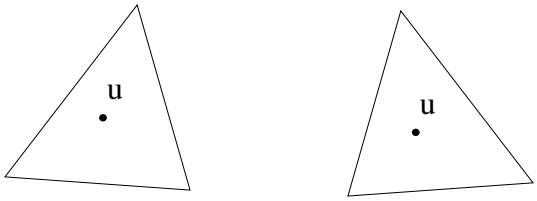

Рис. 12.9: Иллюстрация к объяснению.

Таким образом, если число Лефшеца в гомологиях не равно нулю, то оно не равно нулю и в вычесленных цепях. Значит, хотя бы один след цепного отображения хотя бы в одной размерности не равен нулю. Следовательно, в соответствующей матрице есть по крайней мере один диагональный элемент, не равный нулю. Соответственно, есть симплекс в этой размерности, который перешел в себя с плюсом или с минусом и его барицентр переходит в точности в себя.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13. Эйлерова характеристика и число Лефшеца.

Вычисление числа Лефшеца для отображения сферы в себя.

Известно, что для сферы S^n гомологии равны

$$H_k\left(S^n;\mathbb{R}\right)=\begin{cases}\mathbb{R}, & k=0,n\\ 0, & k\neq 0,n\end{cases} \tag{13.1}$$

Рассмотрим некоторое отображение сферы в себя

$$f:\ \ S^n\to S^n,\quad n>0 \tag{13.2}$$

Тогда число Лейшеца для такого отображения

$$\Lambda_f=1+(-1)^n deg\ f \tag{13.3}$$

Тогда возможны варианты

1. если степень этого отображения
$$deg\ f=0 \tag{13.4}$$
То
$$\Lambda_f=1\neq 0 \tag{13.5}$$
Соответственно, существует неподвижная точка.

2. n - нечетно и степень отображения
$$deg\ f\neq 1 \tag{13.6}$$
Тогда
$$\Lambda_f\neq 0 \tag{13.7}$$
Следовательно, существует неподвижная точка.

3. n - чётно и степень отображения
$$deg\ f\neq -1 \tag{13.8}$$
Тогда
$$\Lambda_f\neq 0 \tag{13.9}$$
и существует неподвижная точка.

Эйлерова характеристика.

Пусть K – компактный полиэдр размерности n и d_q – количество симплексов размерности q в K.

Определение. Эйлеровой характеристикой K называется число

$$\boxed{\chi(K) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q d_q} \tag{13.10}$$

Рассмотрим число Лефшеца тождественного отображения

$$id: \quad K \to K \tag{13.11}$$

Любая матрица отображения, индуцированного на симплициальном отображении в группе цепей будет тождественна, поэтому все матрицы будут диагональными (на диагонали единицы)

$$id = f_q = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{13.12}$$

если рассматривать отображение как

$$f_q = id: \quad C_q(K;\mathbb{R}) \to C_q(K;\mathbb{R}) \tag{13.13}$$

Поэтому след такой матрицы

$$tz(f_q) = d_q \tag{13.14}$$

Тогда

$$\hat{\Lambda}_{id} = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q tz\,(id)_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q d_q \tag{13.15}$$

Известно, что число Лефшеца в вычисленных группах цепей совпадает с числом Лефшеца, вычисленном в группе гомологий. Поэтому

$$\hat{\Lambda}_{id} = \Lambda_{id} \tag{13.16}$$

где

$$\Lambda_{id} = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q tz(id_H) \tag{13.17}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь отображение

$$id_H : \ H_q(K;\mathbb{R}) \to H_q(K;\mathbb{R}) \tag{13.18}$$

Таким образом, Эйлерова характеристика компактного полиэдра – фактически число Лефшеца тождественного отображения этого компактного полиэдра

$$\boxed{\chi(K) = \Lambda_{id_K}} \tag{13.19}$$

Симплициальная аппроксимация непрерывных отображений.

Рассмотрим непрерывные отображения компактных полиэдров и сделаем симплициальную аппроксимацию. Вследствие такое аппроксимации можно будет ввести поятие числа Лефшеца для непрерывного отображения. Понадобится следующая теорема Лебега.

Теорема (Лебега). Пусть K – компактный полиэдр. Пусть совокупность $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – открытое покрытие K, то есть

$$\bigcup_\alpha V_\alpha = K \tag{13.20}$$

Тогда существует число $\sigma > 0$, $\sigma = \{\sigma(\{V_\alpha\})\}$ такое, что для любого подмножество A диаметром

$$diam\ A < \sigma \tag{13.21}$$

существует элемент покрытия V_{α_0} такой, что

$$A \subseteq V_{\alpha_0} \tag{13.22}$$

Иллюстрация к теореме представлена на рис. 13.1.

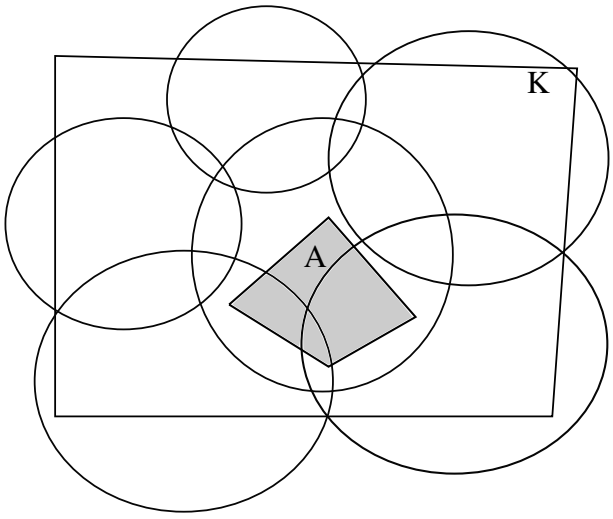

Рис. 13.1: Иллюстрация к объяснению.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Предположим противное

$$\forall \sigma > 0 \;\; \exists A = A(\sigma) : \;\; diam\, A < \sigma \tag{13.23}$$

но A не содержится ни в одном из Элементов покрытия V_α. Пусть

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \tag{13.24}$$

Тогда существует A_n такое, что

$$diam\, A_m < \frac{1}{n} \tag{13.25}$$

и A_n не содержится ни в каком V_α. Возьмем по одной точке из каждого множеств

$$x_n \in A_n \tag{13.26}$$

Тогда образуется последовательность, лежащая в компактном полиэдре

$$\{x_n \subset K\} \tag{13.27}$$

Полиэдр компактный, соответственно существует некоторая предельная точка. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность, которая сходится к некоторому элементу ξ в этом де компакте

$$\exists x_{n_k} \to \xi \in K \tag{13.28}$$

Значит

$$\exists V_{\alpha_0} \in \{V_\alpha\} : \;\; \xi \in V_{\alpha_0} \tag{13.29}$$

То есть элемент ξ содержится в некотором элементе покрытия V_{α_0} (рис. 13.2), причем этот элемент покрытия является открытым множеством.

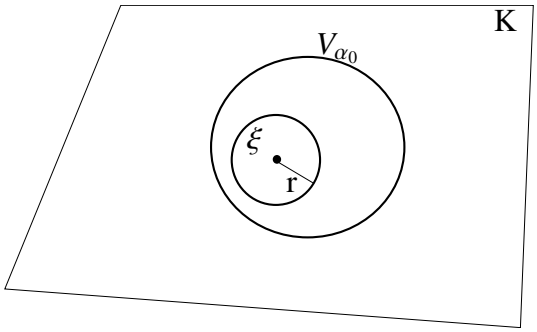

Рис. 13.2: Иллюстрация к объяснению.

Значит, каждая точка, которая в нем содержится, содержится с некоторой окрестностью

$$\exists U_r(\xi) \subseteq V_{\alpha_0} \tag{13.30}$$

Так как последовательность сходится

$$x_{n_k} \to \xi \tag{13.31}$$

то существует номер N_1, что для любого $k > N_1$ расстояние

$$\rho\left(x_{n_k}, \xi\right) < \frac{r}{2} \tag{13.32}$$

Кроме того, существует номер N_2, что для любого $k > N_2$ для диаметра выполняются неравенства

$$diam\ A_{n_k} < \frac{1}{n_k} < \frac{r}{2} \tag{13.33}$$

Тогда, если взять любое k, для которого

$$k > max\left(N_1, N_2\right) \tag{13.34}$$

Тогда для такого k будут выполнены условия (13.32) и (13.33). Тогда получаем

$$\boxed{A_{n_k} \subseteq U_\varepsilon(\xi) \subseteq V_{\alpha_0}} \tag{13.35}$$

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема о симплициальной аппроксимации.

Пусть

$$f: \ K \to K \tag{13.36}$$

– непрерывное отображение компактного полиэдра в себя. K – симплициальный комплекс. Для каждой его вершины можно рассмотреть понятие звезды вершины (рис. 13.3).

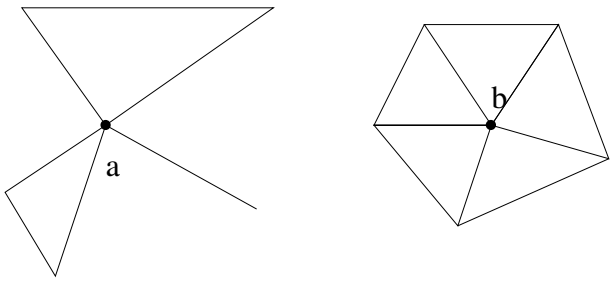

Рис. 13.3: Иллюстрация к определению.

Определение. Звезда вершины b симплициального комплекса K – это внутренность объединения всех симплексов размерности > 0, содержащих эту вершину. Обозначение $St(b)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть задано покрытие комплекса K звездами его вершин. f – непрерывное отображение, поэтому прообразы звезд тоже будут открытыми. То есть

$$f^{-1}\left(St(b_i)\right) \tag{13.37}$$

– открытые множества в K и

$$\left\{f^{-1}\left(St(b_i)\right)\right\} \tag{13.38}$$

– открытые покрытия.

Теорема (о симплициальной аппроксимации). Для любого непрерывного отображения

$$f: \ K \to K \tag{13.39}$$

и $\forall \varepsilon > 0$ и некоторого барицентрического подразделения $K^{(r)}$ существует симплициальное отображение

$$f_\varepsilon: \ K^{(r)} \to K \tag{13.40}$$

такое, что расстояние между образом симплициального отображения и исходного отображения

$$\rho\left(f_\varepsilon(x), f(x)\right) < \varepsilon, \ \forall x \in K \tag{13.41}$$

Доказательство. Для $\forall \varepsilon > 0$ зададим триангуляцию комплекса K с мелкостью $d < \varepsilon$. Рассмотрим покрытие звездани вершин $\{St(b_i)\}$, где $\{b_i\}$ – вершины триангуляции K. Рассмотрим прообразы $f^{-1}\left(St(b_i)\right)$ – открытое покрытие $|K|$. По теореме Лебега, для покрытия $\left\{f^{-1}\left(St(b_i)\right)\right\}$ существует лебегово число $\gamma > 0$, такое, что некоторое множество диаметром меньше γ целиком попадет в какой-то из элементов покрытия. Сделаем барицентрическое подразделение $K^{(r)}$ так, чтобы его мелкость была

$$\widetilde{d} < \frac{\gamma}{3} \tag{13.42}$$

Тогда, для любой вершины этого подразделения его звезда будет иметь диаметр, лежащий в элементе покрытия

$$St(a_j) \subset f^{-1}\left(St(b_i)\right) \tag{13.43}$$

Зададим симплициальное отображение

$$f_\varepsilon: \ K^{(r)} \to K \tag{13.44}$$

по правилу

$$a_j \to b_i = f_\varepsilon(a_j) \tag{13.45}$$

При этом оказывается, что

$$f(a_j) \in St(b_i) \tag{13.46}$$

То есть в звезде вершины лежит $f(a_j)$ (рис. 13.4).

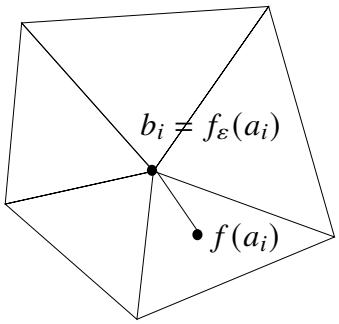

Рис. 13.4: Иллюстрация к объяснению.

Соответственно, для расстояния имеет место неравенство

$$\rho\left(f(a_i), f_\varepsilon(a_i)\right) \leqslant d < \varepsilon \tag{13.47}$$

Пусть

$$\forall x \in \tau^1 = \left[a_0, a_1, \ldots, a_q\right] \in K^{(r)} \tag{13.48}$$

Каждой вершине мы сопоставили вершину b, поэтому получаем

$$f_\varepsilon(x) \in \left[f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_q)\right] = [b_0, b_1, \ldots] \in K \tag{13.49}$$

Вместе с тем x принадлежит пересечению звезд вершин

$$x \in \bigcap_{i=0}^{q} St(a_i) \tag{13.50}$$

Поэтому

$$f_\varepsilon(x) \in \bigcap_{i=0}^{q} St(b_i) \tag{13.51}$$

При этом, если

$$x \in \bigcup_i St(a_i) = \bigcap_i f^{-1}\left(St(b_i)\right) = f^{-1}\left(\bigcap St(b_i)\right) \tag{13.52}$$

то имеет место выражение

$$f(x) \in \bigcap_i St(a_i) = [b_0, \ldots, b_q) \tag{13.53}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом, получаем

$$\forall x \in \tau^1 \quad f(x), f_\varepsilon(x) \in \left[b_0, b_1, \ldots, b_q\right] \tag{13.54}$$

Поэтому расстояние между ними

$$\boxed{\rho\left(f(x) f_\varepsilon(x)\right) \leqslant d < \varepsilon} \tag{13.55}$$

Таким образом, мы построили симплициальное отображение, которое действует из барицентрического подразделения в сам комплекс K

$$f_\varepsilon : \quad K^{(r)} \to K \tag{13.56}$$

такое, что

$$\forall x \quad \rho\left(f_\varepsilon(x), f(x)\right) < \varepsilon \tag{13.57}$$

Любой симплекс – выпуклое замкнутое множество, поэтому любые две точки в нем можно соединить отрезком (рис. 13.5).

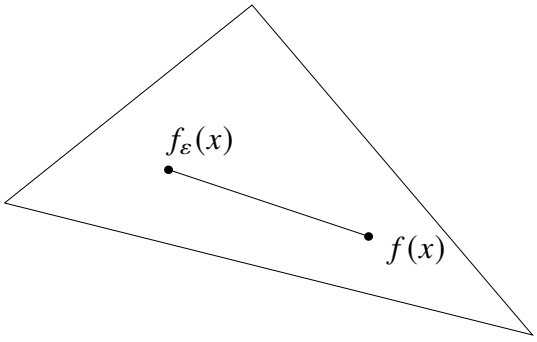

Рис. 13.5: Иллюстрация к объяснению.

Соответственно, существует линейная гомотопия между этими отображениями f_ε и f

$$\boxed{F(t,x) = t f(x) + (1-t) f_\varepsilon(x)} \tag{13.58}$$

Отсюда следует, что если f_ε и f'_ε две такие ε-симплициальные аппроксимации f, то они между собой тоже гомотопны

$$f_\varepsilon \simeq f'_\varepsilon \tag{13.59}$$

Теорема доказана.

Число Лефшеца непрерывного отображения.

Определение. Числом Лефшеца непрерывного отображения

$$f: \ K \to K \tag{13.60}$$

называется

$$\Lambda^s_{f_\varepsilon} = \sum_{q=0}^{n} (-1) tz\left((f_\varepsilon)_q\right) \tag{13.61}$$

где

$$(f_\varepsilon)_q: \ H^s\left(K^{(r)}; \mathbb{R}\right) \to H^s\left(K; \mathbb{R}\right) \tag{13.62}$$

– отображение сингулярных гомологий.

Утверждение (без доказательства). Сингулярные гомологии совпадают с симплициальными и отображение $(f_\varepsilon)^s_q$ совпадает с отображением $\left(\hat{f}\right)_q$, где

$$\hat{f}_q: \ H_q\left(K^{(r)}; \mathbb{R}\right) \to H_q\left(K^{(r)}; \mathbb{R}\right) \tag{13.63}$$

– индуцировано композицией

$$\hat{f}_q: \ C_q\left(K^{(r)}; \mathbb{R}\right) \longrightarrow C_q\left(K; \mathbb{R}\right) \xrightarrow{\theta_q} C_q\left(K^{(r)}; \mathbb{R}\right) \tag{13.64}$$

Здесь отображение θ_q сопоставляется любому симплексу из K цепь всех симплексов его r-кратного барицентрического подразделения. Например, был некоторый симплекс τ^q. Отображаем его в некоторый симплекс побольше (τ^q_i). Этому симплексу можно сопоставить разбиение. Оно кратное, поэтому у каждого симплекса снова берется разбиение (рис. 13.6). Таким образом, получаем множество маленьких симплексов. Сопоставим большому симплексу цепь. Далее распространяем полученное отображение по линейности. Тогда линейная комбинация симплексов переходит в линейную комбинацию цепей.

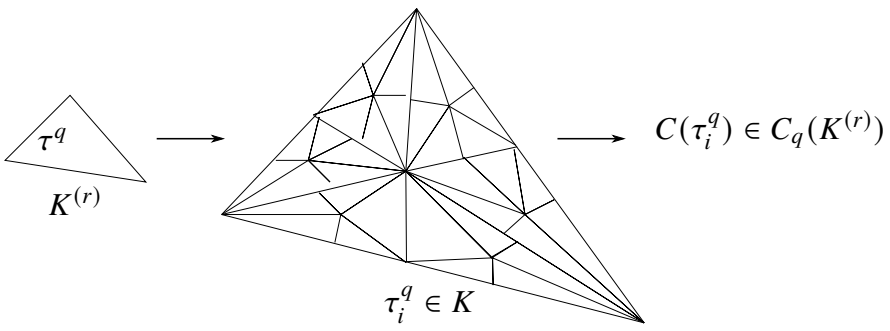

Рис. 13.6: Иллюстрация к примеру.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойства числа Лефшеца непрерывного отображения.

Если

$$f, g: \quad K \to K \tag{13.65}$$

– непрерывные отображения и f гомотопно g, то есть

$$f \simeq g \tag{13.66}$$

тогда их числа Лефшеца совпадают

$$\Lambda_f = \Lambda_g \tag{13.67}$$

Теорема Лефшеца о неподвижной точке.

Пусть в описанных условиях

$$f: \ K \to K \tag{13.68}$$

– непрерывное отображение компактного полиэдра и его число Лефшеца

$$\Lambda_f \neq 0 \tag{13.69}$$

Тогда

$$\exists \xi \in K: \quad f(\xi) = \xi \tag{13.70}$$

– неподвижная точка.

Доказательство. Предположим противное. Пусть нет неподвижных точек. Тогда $\exists \gamma > 0$, что для $\forall x \in K$ для расстояния имеет место неравенство

$$\rho\left(x, f(x)\right) \geqslant \gamma \tag{13.71}$$

Покажем это. Если такого γ нет, то

$$\forall \gamma_m \to \quad \exists \{x_n\}: \quad \rho\left(x_n, f(x_n)\right) < \gamma_n \tag{13.72}$$

Полиэдр компактный, поэтому существует сходящаяся подпоследовательность

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}: \quad x_{n_k} \to \xi \tag{13.73}$$

Тогда получаем, что f – непрерывно и

$$f(x_{n_k}) = f(\xi) \tag{13.74}$$

Соответственно,

$$\rho\left(\xi, f(\xi)\right) = 0 \tag{13.75}$$

то есть ξ – неподвижная точка.

Для $\varepsilon \leqslant \frac{\gamma}{3}$ построим $\frac{\gamma}{3}$ – симплициальную аппроксимацию отображения f, то есть для отображения

$$f: \ K \to K \tag{13.76}$$

получаем

$$\hat{f}_{\frac{\gamma}{3}}: \ K^{(r)} \to K \to K^{(r)} \tag{13.77}$$

Если неподвижных точек нет, то в (13.77) не может быть включения. Проверим это. Возьмем некоторый симплекс $\tau^q \in K^{(r)}$ (рис. 13.7). Возьмём в нем любые две точки и образы от них. Рассмотрим расстояния между точками и образами. По построению симплициальной аппроксимации расстояние между образами не превышает ε.

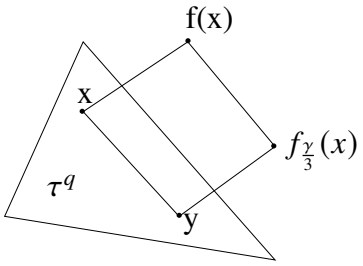

Рис. 13.7: Иллюстрация к объяснению.

Поэтому

$$\rho\left(y, f_{\frac{\gamma}{3}}\right) \geqslant \rho\left(x, f(x)\right) - \rho(x, y) - \rho\left(f(x), f_{\frac{\gamma}{3}(x)}\right) \tag{13.78}$$

Учтем, что

$$\rho\left(x, f(x)\right) \geqslant \gamma, \ \ \rho(x, y) \leqslant \frac{\gamma}{3}, \ \ \rho\left(f(x), f_{\frac{\gamma}{3}(x)}\right) \leqslant \frac{\gamma}{3} \tag{13.79}$$

Соответственно

$$\rho\left(y, f_{\frac{\gamma}{3}}\right) \geqslant \rho\left(x, f(x)\right) - \rho(x, y) - \rho\left(f(x), f_{\frac{\gamma}{3}(x)}\right) \geqslant \frac{\gamma}{3} \tag{13.80}$$

Таким образом, при отображении

$$K^{(r)} \to K \xrightarrow{\theta} K^3 \tag{13.81}$$

симплекс $K^{(r)}$ должен быть включен в симплекс K, однако мы получили, что расстояние между ними больше, чем размер симплекса, поэтому невозможно включение (для $\forall y$)

$$\tau^q \subset f_{\frac{\gamma}{3}}\left(\tau^q\right) \in K \tag{13.82}$$

где

$$\tau^q \in K^{(r)} \tag{13.83}$$

Однако, по условию теоремы число Лефшеца отлично от нуля

$$\Lambda_f \neq 0 \tag{13.84}$$

Оно равно числу Лефшеца отображения, индуцированного композицией. Тогда оно тоже отлично от нуля

$$\Lambda_{\hat{f}} \neq 0 \tag{13.85}$$

Значит, должен существовать симплекс τ^q, что он содержится в образе аппроксимации

$$\tau^q \subset f_{\frac{\gamma}{3}}((\tau)^q) \tag{13.86}$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ