ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. СЕМИНАРЫ

ВАСИЛЬЕВА
ОЛЬГА НИКОЛАЕВНА

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
БЕЛОВА МИХАИЛА АНАТОЛЬЕВИЧА

Оглавление

Семинар 1. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность электрического поля. 9
Задача 1.1 10
Задача 1.2 11
Задача 1.3 12
Задача 1.4 14
Задача 1.5 15
Задача 1.6 15
Задача 1.7 16
Семинар 2. Потенциал электростатического поля. 17
Задача 2.1 18
Задача 2.2 18
Задача 2.3 19
Задача 2.4 20
Задача 2.5 22
Задача 2.6 23
Семинар 3. Проводники в электростатическом поле. 25
Задача 3.1 25
Задача 3.2 26
Задача 3.3 27
Задача 3.4 27
Задача 3.5 28
Задача 3.5’ 29
Задача 3.6 30
Семинар 4. Метод электростатических изображений. 32
Задача 4.1 32
Задача 4.2 33
Задача 4.3 34
Задача 4.4 35
Задача 4.5 36
Задача 4.6 37

Задача 4.7 37
Задача 4.8 38
Семинар 5. Электроемкость. Простые конденсаторы. 39
Задача 5.1 40
Задача 5.2 41
Задача 5.3 42
Задача 5.4 43
Задача 5.5 44
Задача 5.6 45
Задача 5.7 45
Задача 5.8 46
Семинар 6. Диэлектрики в электростатическом поле. 47
Задача 6.1 48
Задача 6.2 49
Задача 6.3 50
Задача 6.4 51
Задача 6.5 52
Задача 6.6 53
Задача 6.7 54
Семинар 7. Диэлектрики с заданным состоянием поляризации. 55
Задача 7.1 56
Задача 7.2 57
Задача 7.3 58
Задача 7.4 59
Задача 7.5 60
Задача 7.6 60
Семинар 8. Энергия и работа электрического поля. 62
Задача 8.1 63
Задача 8.2 63
Задача 8.3 64
Задача 8.4 66

Задача 8.6 68
Задача 8.6 (случай 2). 69
Семинар 9. Пондермоторные силы в электрическом поле. 70
Задача 9.1 71
Задача 9.2 72
Задача 9.3 73
Задача 9.4 73
Задача 9.5 75
Задача 9.6 76
Семинар 10. Токи в сплошных проводящих средах. 77
Задача 10.1 77
Задача 10.2 79
Задача 10.2* 80
Задача 10.3 81
Задача 10.4 82
Задача 10.5 83
Задача 10.6 85
Семинар 11. Расчет цепей постоянного тока. 87
Задача 11.1 87
Задача 11.2 89
Задача 11.3 90
Задача 11.4 91
Задача 11.5 92
Задача 11.6.а 92
Задача 11.6.б 93
Задача 11.7 94
Задача 11.8 95
Семинар 12. Магнитные поля проводников с током. 96
Задача 12.1 96
Задача 12.2 98
Задача 12.3 99

Задача 12.4 100
Задача 12.5 101
Задача 12.6 102
Задача 12.7 102
Задача 12.8 103
Семинар 13. Сила Ампера. Сила Лоренца. 104
Задача 13.1.а 104
Задача 13.1.б 105
Задача 13.2 105
Задача 13.3 106
Задача 13.4 107
Задача 13.5 108
Задача 13.6 109
Задача 13.7 111
Семинар 14. Электромагнитная индукция. 113
Задача 14.1 113
Задача 14.2 114
Задача 14.3 115
Задача 14.4 117
Задача 14.5 118
Задача 14.6 119
Семинар 15. Самоиндукция и взаимная индукция. Энергия магнитного поля. ... 121
Задача 15.1 121
Задача 15.2 122
Задача 15.3 123
Задача 15.4 124
Задача 15.5 125
Задача 15.6 126
Задача 15.7 127
Задача 15.8 127
Семинар 16. Магнетики в магнитном поле. Метод молекулярных токов. 129

Задача 16.1 131
Задача 16.2 132
Задача 16.3 133
Задача 16.4 135
Задача 16.5 136
Семинар 17. Поле постоянных магнитов. Метод «магнитных зарядов». 137
Задача 17.1 138
Задача 17.2 141
Задача 17.3 142
Задача 17.4 144
Семинар 18. Энергия, работа и пондермоторные силы в магнитном поле. 145
Задача 18.1 146
Задача 18.2 147
Задача 18.3 148
Задача 18.4 149
Задача 18.5 149
Задача 18.6 150
Семинар 19. Переходные процессы в электрических цепях. 153
Задача 19.1 153
Задача 19.2 154
Задача 19.3 156
Задача 19.4 157
Задача 19.5 157
Задача 19.6 159
Задача 19.7 161
Задача 19.8 161
Семинар 20. Расчет цепей переменного тока. 163
Задача 20.1 164
Задача 20.2 165
Задача 20.3 165
Задача 20.4 167

Задача 20.5 168
Задача 20.6 169
Задача 20.7 170
Семинар 21. Колебания в электрических контурах. 171
Задача 21.1 173
Задача 21.2 174
Задача 21.3 176
Задача 21.4 177
Задача 21.5 177

Семинар 1. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность электрического поля.

Электростатическое поле – постоянное электрическое поле, характеристики которого в каждой точке не зависят от времени. Создается заряженными электрическими телами. Если заряд попадает в электрическое поле, на него со стороны поля действует электрическая сила.

Точечный заряд – материальная точка, которая несет на себе заряд. Точечными можно считать заряды, если их размеры значительно меньше расстояния до интересующей нас точки либо линейных размеров неоднородности поля в случае изучения сил, действующих на электрические заряды.

Закон Кулона.

$$\overrightarrow{F_{12}} = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{Кл}},$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}}{\text{В}\cdot\text{м}}$$

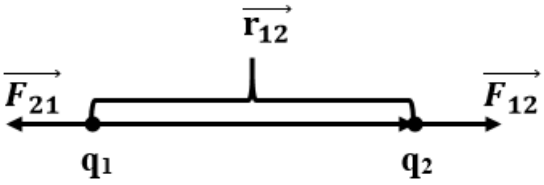


Рис. 1.1. К определению закона Кулона

Напряженность электрического поля.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Напряженность поля точечного заряда.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Принцип суперпозиции.

$$\vec{E} = \sum_i \overrightarrow{E_i}$$

Непрерывное распределение заряда.

Линейная плотность распределения заряда:

$$\tau = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

Объемная плотность заряда:

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

Задача 1.1

Имеется тонкая нить длиной 2L с плотностью заряда τ (Рис.1.2). Определить напряженность электрического поля $\vec{E}(M) - ?$

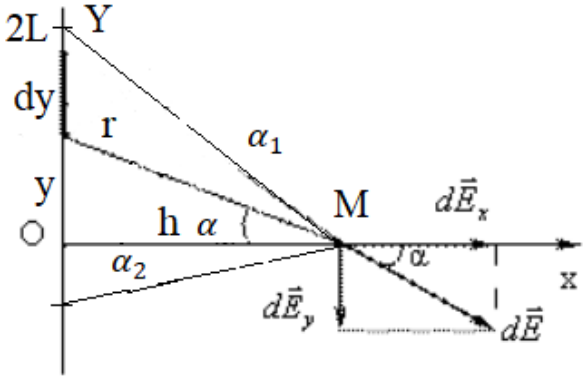


*Рис. 1.2. К нахождению напряженности поля **E**, создаваемого отрезком заряженной нити.*

Решение:

Выберем на нашей нити участок длины dy, этот участок несет на себе заряд $dq = \tau\, dy$ и выразим $r = \frac{h}{\cos\alpha}$.

Пользуясь формулой напряженности точечного заряда, получаем:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dy}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

А по компонентам имеем следующее:

$$dE_x = dE\cos\alpha$$

$$dE_y = -\,dE\sin\alpha$$

$$y = h\, ctg\, \alpha$$

$$dy = \frac{h}{cos^2\alpha}d\alpha$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\frac{h}{cos^2\alpha}\,d\alpha}{\frac{h^2}{cos^2\alpha}} = \frac{\tau\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 h}$$

Найдем значение напряженности по-компанентно:

$$dE_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}\cos\alpha\, d\alpha\,,\ E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$$

$$dE_y = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}\sin\alpha\, d\alpha\,,\ E_y = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

И, наконец, находим напряженность поля в точке M:

$$\vec{E} = E_x\vec{e_x} + E_y\vec{e_y}, \qquad tg\theta = \frac{E_x}{E_y}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 h}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

Далее рассмотрим два интересных частных случая этой задачи.

1. Если $L \to \infty, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, то

$$E_y = 0, E_x = E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 h}$$

2. Если точка M напротив середины нити, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $tg\alpha = \frac{L}{h}$ и

$$E_y = 0, E = E_x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 h}\sin\alpha$$

Задача 1.2

По кольцу равномерно распределен заряд q. Радиус кольца R (Рис.1.3). Нужно вычислить напряженность электрического поля на оси кольца $\vec{E}(z) - ?$

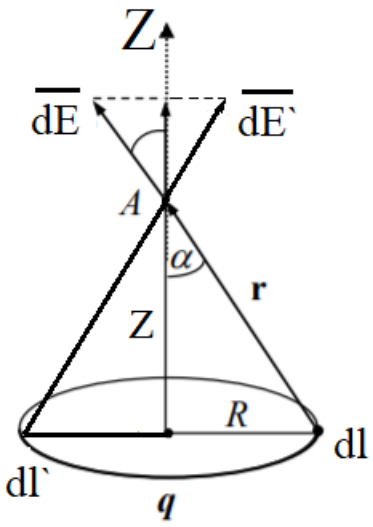


*Рис. 1.3. Определение напряженности поля **E** на оси заряженного кольца.*

Решение:

Выберем маленький участок кольца длиной dl. На нем будет находится заряд $dq = \tau\, dl$, $\tau = \frac{q}{l}$, где l – длина кольца.

В силу симметрии задачи видно, что компоненты напряженности поля параллельные плоскости кольца будут равны нулю. То есть для нахождения $\vec{\boldsymbol{E}}$ нужно суммировать только компоненты вдоль оси z.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Для напряженности вдоль оси z имеем:

$$dE_z = dE\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E(z) = \frac{\frac{q}{l}\,z}{4\pi\varepsilon_0\,(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\oint_l dl = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\,(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Посмотрим на поведение напряженности в зависимости от расстояния z:

1. Если $z = 0$, то

$$E = 0.$$

2. При $z \to \infty$ имеем

$$E \sim \frac{z}{z^3} = \frac{1}{z^2} \to 0$$

Далее найдем такое расстояние z, на котором имеется максимальное значение напряженности электрического поля. Для этого исследуем функцию на экстремум.

$$\left.\frac{dE(z)}{dz}\right|_{z_{max}} = 0$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - z\,\frac{3}{2}\,(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\,2z}{(R^2 + z^2)^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{(R^2 + z^2)}}{(R^2 + z^2)^3}(R^2 - 2z^2)|_{z_{max}} = 0$$

И откуда получаем расстояние с максимальной напряженностью:

$$z_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Задача 1.3

Определить напряженность поля на оси тонкого диска радиуса R, заряженного равномерно с поверхностной плотностью σ (Рис.1.4).

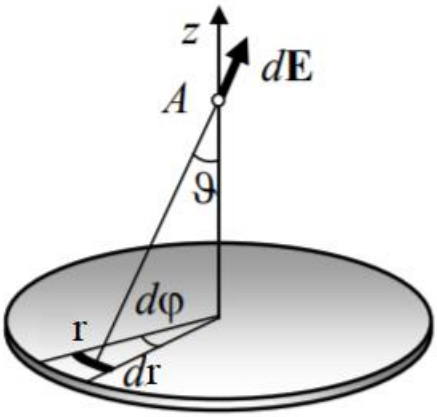


*Рис.1.4 Определение напряженности поля **E** на оси заряженного диска.*

Решение:

Для решения этой задачи воспользуемся результатом предыдущей задачи. Для этого разобьем весь диск на составляющие колечки радиуса r, и толщина его dr. Тогда такое тонкое колечко можно рассматривать как кольцо из предыдущей задачи. Используем известную формулу:

$$dE_{\text{кольца}} = \frac{dq_{\text{кольца}}\, z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

А заряд кольца:

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

Также площадь можно найти исходя из соотношений:

$$S = \pi r^2 \,, dS = 2\pi r dr$$

Теперь найдем напряженность самого диска:

$$E_{\text{диска}} = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{1 d(r^2 + z^2)}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left. \frac{-2}{\sqrt{(r^2 + z^2)}} \right|_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)}}\right) = E(z)_{\text{диска}}$$

Далее рассмотрим частный случай:

При $R \to \infty$:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Данная формула описывает напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной плоскостью.

Существует другой способ нахождения напряженности электрического поля, который применим только в трех случаях, когда распределение заряда имеет

1. Плоскостную симметрию
2. Цилиндрическую симметрию
3. Сферическую симметрию

Данный метод основан на применении электростатической теоремы Гаусса. Сначала введем понятия потока вектора ***E*** через площадку площадью dS (Рис.1.5).

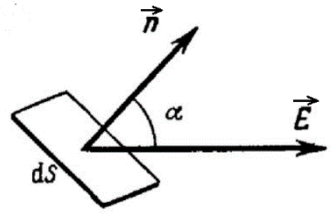


*Рис.1.5. К определению потока вектора **E** через площадку dS.*

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \cdot \cos\alpha \, dS$$

Обычно считается поток вектора ***E*** через большую площадку, тогда проинтегрируем и получим:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}(\vec{r}) dS$$

Электростатическая теорема Гаусса – поток вектора ***E*** через любую замкнутую поверхность равен заряду, охватываемому этой поверхностью, делённому на ε_0.

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E}(\vec{r})dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Задача 1.4

Имеется бесконечная плоскость, которая заряжена с некоторой поверхностной плотностью σ. Нужно найти $\vec{E}$ во всем пространстве.

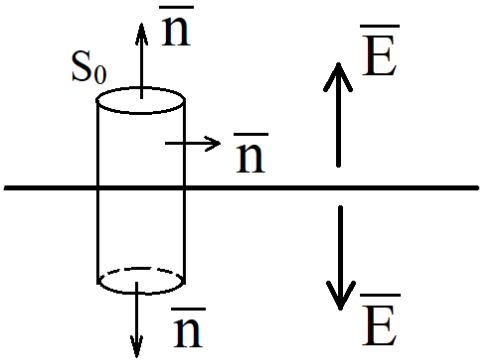


Рис.1.6. Поверхность Гаусса для равномерно заряженной плоскости.

Решение:

Будем считать, что $\sigma > 0$. Для применения теоремы выберем некоторый цилиндр, основания которого параллельны плоскости, а образующие перпендикулярны этой плоскости. Нам нужно вычислить поток вектора $\boldsymbol{E}$ через полную поверхность цилиндра.

$$\Phi_{\text{бок}} = \vec{E}\vec{n} \int dS = 0$$

$$\Phi_{\text{осн}} = ES_0$$

Применяем теорему Гаусса:

$$2ES_0 = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Как видно, этим способом мы получили ту же самую формулу, что и в 3 задаче, однако сделать это было гораздо проще.

Величина напряжённости не зависит от того, на какой высоте над или под плоскостью находится точка. Вектор $\boldsymbol{E}$ испытывает разрыв. Этот результат происходит из-за того, что мы считаем толщину пластины равную нулю. На самом деле, если мы приближаемся очень близко к краям пластины, то толщина у нее есть. И на расстояниях несколько межатомных расстояний величина напряженности электрического поля резко меняется, поэтому мы должны учитывать распределение электрических зарядов в самих атомах и молекулах.

Задача 1.5

Пусть есть цилиндр радиуса R и этот цилиндр заряжен с поверхностной плотностью σ. Нужно найти напряженность электрического поля $\vec{E}(r) - ?$

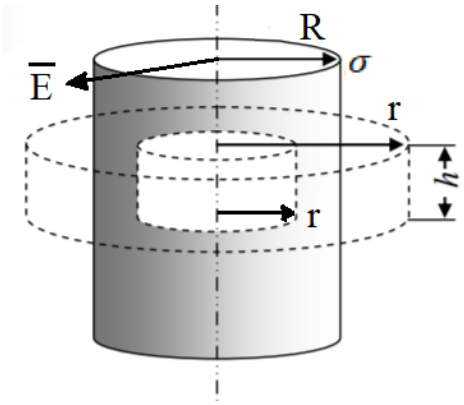


Рис.1.7. Поверхность Гаусса для круглого цилиндра.

Решение:

Для нахождения напряженности применим теорему Гаусса. Для этого сначала рассмотрим область внутри цилиндра ($r < R$):

$$\Phi_{\text{бок}} = ES_{\text{бок}} = 0 \rightarrow E = 0$$

А в случае ($r > R$):

$$\Phi_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi rh = \frac{\sigma \cdot 2\pi Rh}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma \mathrm{R}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Из этой задачи в случае тонкого цилиндра можно записать теорему Гаусса для нити:

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\tau h}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Задача 1.6

Имеется шар радиусом R, который равномерно по объему заряжен с $\rho = const$. Нужно найти $\vec{E}(r) - ?$

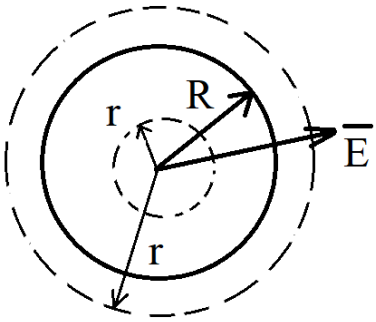


*Рис.1.8. Вычисление напряженности поля **E** от равномерно заряженного шара.*

Решение:

Также рассмотрим две области, где будем применять теорему Гаусса. Первая в случае ($r \leq R$):

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r$$

Во второй области ($r > R$):

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho\, \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R^3 \rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2}$$

В данном случае разрыва вектора $\boldsymbol{E}$ не будет, так как при подходе к границе шара с двух сторон значение напряжённости будет равно:

$$E(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

Задача 1.7

Тот же шар с радиусом R, но заряжен с объемной плотностью $\rho = \alpha r, \alpha = const$. Нужно найти $\vec{E}(r) - ?$

Решение:

Также рассмотрим область ($r \leq R$) и разделим эту поверхность на сферические слои, причем радиус каждого слоя будет r' и толщина dr'. Поэтому чтобы вычислить заряд q внутри поверхности r найдем сначала заряд dq одного сферического слоя:

$$dq = \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 \cdot dr'$$

И полный заряд будет равен:

$$q(r) = \int_0^r \alpha r' \cdot 4\pi r'^2 \cdot dr' = \pi\alpha r^4$$

Далее применим теорему Гаусса:

$$E \cdot 4\,\pi r^2 = \frac{\pi\alpha r^4}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\alpha}{4\varepsilon_0} r^2$$

Теперь проведем вычисления для области ($r > R$):

$$q(r) = \int_0^R \alpha r' \cdot 4\pi r'^2 \cdot dr' = \pi\alpha R^4$$

И напряженность поля равна:

$$E \cdot 4\,\pi r^2 = \frac{\pi\alpha R^4}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Семинар 2. Потенциал электростатического поля.

Если имеется электрическое поле, то при помещении заряда в это поле на него будет действовать сила $\vec{F}$ равная:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

При перемещении заряда на расстояние dr, силы будут совершать работу

$$\delta A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = q \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

А полная работа

$$A = q \int_1^2 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{dr}$$

Электростатическое поле обладает следующим свойством: работа не зависит от того, по какой траектории происходит перемещение точечного заряда из первой точки во вторую, а зависит только от начального и конечного положения точек. Такие поля называются потенциальными.

Для их характеристики вводят специальный параметр – потенциал.

Сначала дадим определение разности потенциалов между двумя точками электростатического поля:

$$\varphi_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{dr}$$

Потенциал $\varphi(r)$ равен отношению работы электростатических сил по перемещению заряда из данной точки поля в точку, потенциал которой принимается равным нулю.

$$\varphi(r) = \frac{A_{\vec{r} \to \vec{r_0}}}{q} = \int_r^{r_0} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{dr}$$

Теперь через потенциал точек 1 и 2 выразим разность потенциалов между этими точками:

$$\varphi_{12} = \int_1^2 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_1^{r_0} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{r_0}^2 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Найдем потенциал точечного заряда, причем будем считать, что $\varphi_\infty = 0$. Тогда по определению $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ и получаем:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-1}{r}\Big|_r^\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Потенциал подчиняется принципу суперпозиции:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

Связь между φ и $\vec{E}$ можно написать еще следующим образом:

$$\vec{E}(r) = -grad\,\varphi(r)$$

Задача 2.1

Имеется заряженная тонкая нить длиной $2L$ с линейно плотностью τ. Нужно определить потенциал поля этой нити в точке на продолжении этой нити на расстоянии $d > L$ от середины нити. $\varphi_\infty = 0$.

Решение:

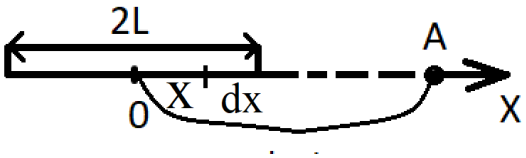


Рис.2.1. К нахождению потенциала поля, создаваемого заряженной нитью.

Выберем маленький участок толщины dx, находящийся на расстоянии x от середины нити. Тогда этот участок нити несет заряд

$$dq = \tau \cdot dx$$

И потенциал, созданный этим маленьким участком в точке А равен

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dx}{d - x}$$

Далее складываем потенциалы всех участков этой заряженной нити:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau \int_{-L}^{L} \frac{dx}{d-x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{-d(d-x)}{d-x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} ln\frac{d+L}{d-L} = \varphi_A$$

Задача 2.2

На тонком кольце радиуса R распределен равномерно заряд q (Рис.2.2). Нужно найти потенциал на оси этого кольца на расстоянии z от плоскости кольца. $\varphi_\infty = 0$.

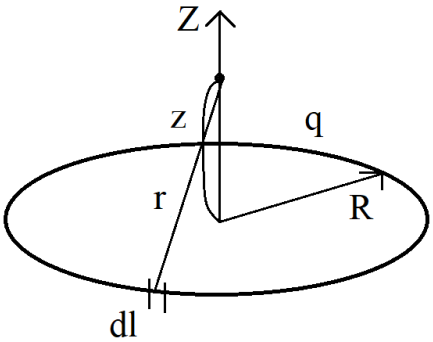


Рис.2.2. К нахождению потенциала электростатического поля на оси кольца.

Решение:

На кольце возьмём маленький участок длины dl и на нем будет находиться заряд

$$dq = \tau dl, \tau = \frac{q}{l}, l - \text{длина кольца}$$

Тогда потенциал этого маленького точечного заряда равен:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dl}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Теперь интегрируем по всему кольцу и получаем

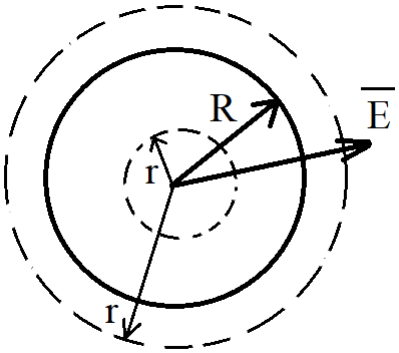
$$\varphi(z) = \frac{\frac{q}{l}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} \oint_l dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$$

В центре кольца $z = 0$ и получаем

$$\varphi(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Задача 2.3

Имеется заряженный шар радиуса R с объемной плотностью $\rho = const$ (Рис.2.3). Нужно найти зависимость потенциала $\varphi(r)$ от расстояния до центра шара во всем пространстве. $\varphi_\infty = 0$.



Решение:

В данном случае видно, что

Рис.2.3. Нахождение потенциала поля в пространстве от центра заряженного шара.

$$grad\ \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}$$

Тогда для напряженности и потенциала имеем:

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr} \rightarrow \varphi = -\int E dr$$

Рассмотрим область $(r \geq R)$:

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

А потенциал будет равен:

$$\varphi_1(r) = -\int E(r)dr = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

Константу C_1 найдем из условия нормировки $\varphi_\infty = 0$:

$$\varphi(\infty) = 0 = C_1$$

Теперь рассмотрим область внутри шара ($r \le R$):

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \to E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

А потенциал в этой области будет равен:

$$\varphi_2(r) = -\int E(r)dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_2$$

Так как потенциал это непрерывная функция, то на границе шара R потенциалы φ_1 и φ_2 должны давать одинаковые значения:

$$\varphi_1(R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \varphi_2(R) = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_2 \to C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

И в конечном итоге:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(-r^2 + 3R^2\right)$$

Смысл константы C_2 в том, что она показывает значение потенциала центра шара при выбранной нами нормировки потенциала на бесконечности.

Иначе непрерывность потенциала на границе еще называется сшивкой потенциала.

Задача 2.4

Имеются две полые сферы. Одна радиуса R_1 и на эту сферу нанесен равномерно по поверхности заряд q_1. И концентрическая с этой сферой вторая сфера радиусом R_2 с поверхностным зарядом q_2. Нужно найти зависимость потенциала $\varphi(r)$ во всем пространстве от расстояния r до центра этих сфер. $\varphi_\infty = 0$ и $q_1 \cdot q_2 > 0$.

Решение:

Рассмотрим решение в первой области ($r \ge R_2$):

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \to E(r) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\varphi_1(r) = -\int E(r)dr = -\frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1$$

Используя условие нормировки $\varphi_\infty = 0$, получим значение $C_1 = 0$.

Далее рассмотрим вторую область ($R_1 \le r \le R_2$)

$$E(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\varphi_2(r) = -\int E(r)dr = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$$

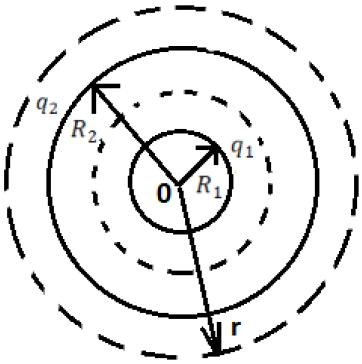


Рис.2.4. К нахождению потенциала поля в пространстве от центра двух полых сфер.

Для определения C_2 пользуемся условием непрерывности на границе, разделяющей области вне сфер и между двумя сферами:

$$\varphi_1(R_2) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_2(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

И значение потенциала в области между сферами будет равно

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$

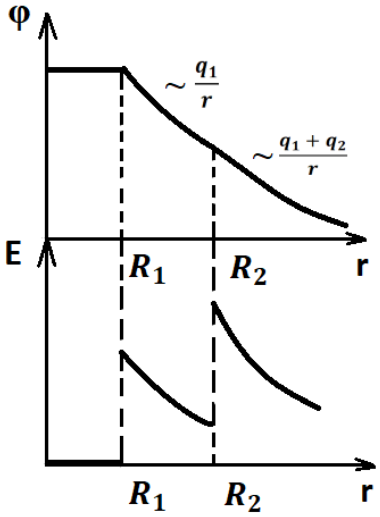


Рис.2.5. Вид графиков зависимости $\varphi(r)$ и $E(r)$ к задаче 2.4.

Теперь рассмотрим область внутри сферы меньшего радиуса ($r \leq R_1$):

$$E = 0 \rightarrow \varphi_3(r) = -\int E(r)dr = const = C_3$$

Чтобы найти эту константу C_3 приравняем потенциал на границе малой сферы и потенциал вне этой сферы:

$$\varphi_3(r) = C_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$

В отличии от непрерывного потенциала напряженность электрического поля испытывает разрыв при переходе из одной области в другую (Рис.2.5.)

Задача 2.5

Пусть имеется бесконечный цилиндр, заряженный по объему объемной плотностью $\rho = const$. Радиус цилиндра R (Рис.2.6). Нужно определить разность потенциалов φ_{12}. Причем $r_1 = 0.5\,R, r_2 = 2\,R$.

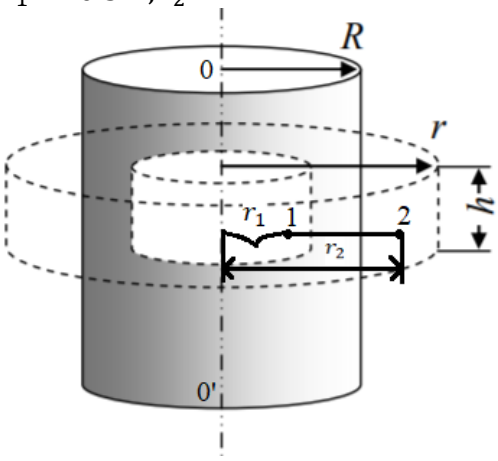


Рис.2.6. К нахождение разности потенциалов между двумя точками в поле заряженного цилиндра.

Решение:

Выберем вспомогательный цилиндр высотой h и радиусом $r < R$ и в области $r \leq R$ вычислим поток вектора $\boldsymbol{E}$:

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r h = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

Далее также выберем цилиндрическую поверхность, но уже с $r > R$ и тогда во второй области $r \geq R$ имеем:

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0} \rightarrow E_2(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Наконец, для определения разности потенциала φ_{12} между 1 и 2 точкой привлечем определение разности потенциалов, то есть

$$\varphi_{12} = \int_1^2 E(r)dr = \int_{r_1}^{R} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr + \int_R^{r_2} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(R^2 - r_1^2) + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} ln\frac{r_2}{R}$$

$$= \frac{\rho R^2}{16\varepsilon_0}(3 + 8\,ln2) = \varphi_{12}$$

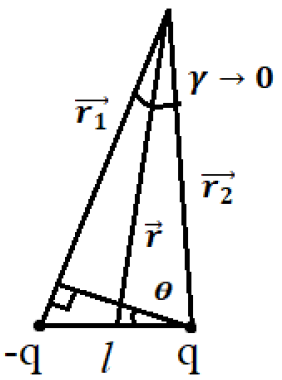


Рис.2.7. К определению понятий электрического диполя и дипольного момента $\vec{p}$.

Электрический диполь – это совокупность двух разноимённо заряженных, но одинаковых по величине зарядов, которые находятся на некотором расстоянии друг от друга, причем обычно это расстояние мало (Рис.2.7).

Для характеристики диполя вводят понятие дипольного момента $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$, где $\vec{l}$ направлен от $-q$ к q.

Точечный диполь – такой диполь, у которого расстояние между зарядами l значительно меньше расстояния до точки наблюдения, в которой мы хотим определить поле диполя.

Задача 2.6

Нужно найти потенциал поля точечного диполя.

Решение:

Проведем дополнительные построения для удобства нахождения потенциала поля точечного диполя (Рис.2.8).

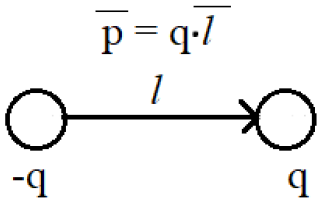


Рис.2.8. К определению потенциала поля точечного диполя.

Потенциал вычисляем следующим образом:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \cong \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Теперь используя получившееся значение найдем напряженность поля

$$\vec{E} = -grad\,\varphi(r)$$

$$grad = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Проведем дифференцирование:

$$\vec{E}(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\,grad(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})grad\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\}$$

$$grad(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x\vec{\imath} + p_y\vec{\jmath} + p_z\vec{k} = \vec{p}$$

$$grad\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

И окончательно для напряженности поля имеем:

$$\vec{E}(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\vec{p} - (\vec{p}\cdot\vec{r})\frac{3\vec{r}}{r^5}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right\}$$

Покажем как на практике использовать данную формулу для $\vec{E}(r)$ точечного диполя (Рис.2.9).

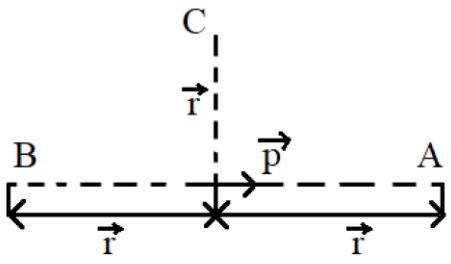


Рис.2.9. К нахождению напряженности поля точечного диполя.

Найдем напряженность поля в точке А, где $\vec{r} = r\overrightarrow{e_p}$:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3pr\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3pr\overrightarrow{e_p}}{r^4} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Теперь вычислим E в точке В, где $\vec{r} = -\,r\overrightarrow{e_p}$:

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-3pr\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3pr\overrightarrow{e_p}}{r^4} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

И для точки С, где $(\vec{p}\cdot\vec{r}) = 0$ имеем:

$$E_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$

Семинар 3. Проводники в электростатическом поле.

Проводники – тела, обладающими большим количеством свободных зарядов.

Свободные заряды – такие заряды, которые под действием внешнего электрического поля могу в веществе передвигаться на макроскопические расстояния. В проводниках это электроны.

Внутри проводника в случае электростатики происходит перераспределение свободных зарядов таким образом, чтобы $\vec{E} = 0$. Такое перераспределение зарядов в проводнике называется явлением электростатической индукции.

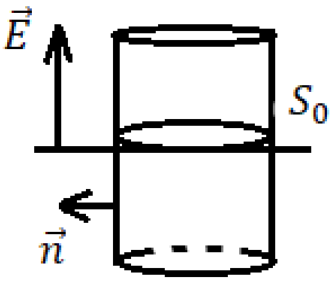


Рис.3.1. К определению плотности поверхностного заряда.

Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ и при } \vec{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$$

На поверхности проводника возникает индуцированный поверхностный заряд. Определим плотность поверхностного заряда на участке площадью S_0 (Рис.3.1).

Выберем вспомогательный цилиндр, ось которого перпендикулярна поверхности и применим к этому цилиндру теорему Гаусса. Получаем:

$$\Phi_{\text{бок}} = 0, \text{так как } \vec{E} \perp \vec{n}$$

$$\Phi_{\text{верхнее осн}} = E \cdot S_0$$

$$\Phi_{\text{нижнее осн}} = 0, \text{так как } \vec{E} = 0 \text{ внутри проводника}$$

И для напряженности электрического поля имеем:

$$E \cdot S_0 = \frac{\sigma \cdot S_0}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности проводника.

Силовая линия электрического поля – такая линия, касательная к которой в каждой точке проводника совпадает по направлению с направлением вектора напряженности электрического поля в данной точке. Силовые линии начинаются и заканчиваются на электрических зарядах или бесконечности, а также они не пересекаются.

Задача 3.1

Имеется металлический незаряженный проводящий шар радиуса R. Возле этого шара на расстоянии d от него поместим точечный заряд q. Нужно определить потенциал шара $\varphi_{\text{шара}} - ?$

Решение:

Так как шар не был заряжен, то

$$\sum q_{\text{инд}} = 0$$

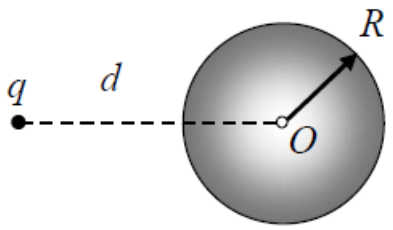


Рис.3.2. Система из точечного заряда и проводящего шара.

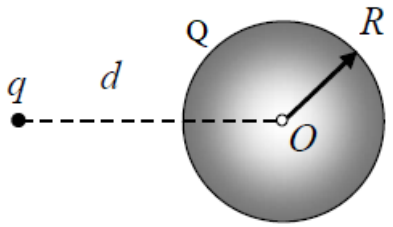
Будем определять потенциал в точке О. Разобьем всю поверхность шара на малые участки, на каждом из которых будет индуцирован заряд Δq_i. Тогда потенциал поля в точке О будет равен:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \sum_i \frac{\Delta q_i}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{d}$$

И мы помним, что весь шар является эквипотенциальной областью, поэтому потенциал шара будет равен потенциалу какой-либо его точки.

Задача 3.2

Пусть у нас есть шар радиуса R с зарядом Q. Возле этого шара на расстоянии d от



него поместим точечный заряд q. Нужно определить потенциал шара $\varphi_{\text{шара}} - ?$

Решение:

Также разобьем всю поверхность шара на малые участки, на каждом из которых будет индуцирован заряд Δq_i. Тогда потенциал в точке О будет равен:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \frac{\sum_i \Delta q_i}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \frac{Q}{R}\right)$$

Причем в данном случае

Рис.3.3. Система из точечного заряда и проводящего заряженного шара.

$$\sum_i \Delta q_i = Q$$

Задача 3.3

Есть сферическая оболочка, у которой внутренняя окружность имеет радиус R_1, а внешняя радиус R_2. Точечный заряд q находится от центра шара на расстоянии a. Требуется найти потенциал $\varphi_0 -$?

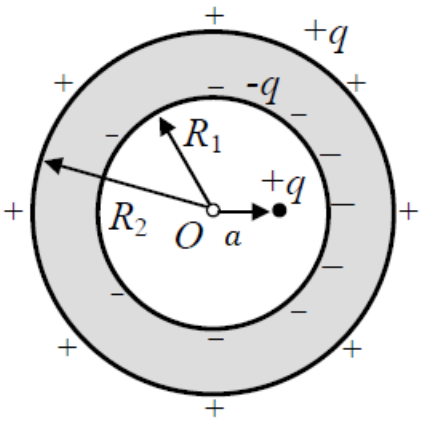


Рис.3.4. Точечный заряд внутри проводящего сферического слоя.

Решение:

На внутренний поверхности оболочки возникает индуцированный заряд $-q$, а на внешней q. Найдем потенциал в центре шара:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} + \frac{\sum_i \Delta q_{i\,in}}{R_1} + \frac{\sum_i \Delta q_{i\,ex}}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Посмотрим как именно произошло распределение зарядов на внутренней и внешней оболочках. Внутри внешней оболочки $\vec{E} = 0$. В виду наличия внутри шара заряда q мы имеем неравномерное распределение отрицательного заряда на внутренней оболочке, а на внешней поверхности распределение является равномерным. Отметим, что в области $r > R_2$ имеем:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

То есть изолированная проводящая замкнутая оболочка не экранирует внешнее пространство от поля зарядов, находящихся внутри оболочки.

Задача 3.4

Имеется металлический шар радиуса R_1 с зарядом $q > 0$. Этот шар окружен замкнутой сферической проводящей оболочкой с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3. Причем проводящая сферическая оболочка заземлена. Требуется найти $E(r)$ и $\varphi(r)$.

Решение:

Будем считать, что $\varphi_\infty = 0$ и $\varphi_{\text{земл}} = 0$. Тогда потенциал оболочки, соединенной с землей тоже равен нулю. Используя определения потенциала запишем:

$$\varphi = \int_1^\infty \vec{E}(r)\overrightarrow{dr} = 0 \rightarrow E_{\text{обол}} = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

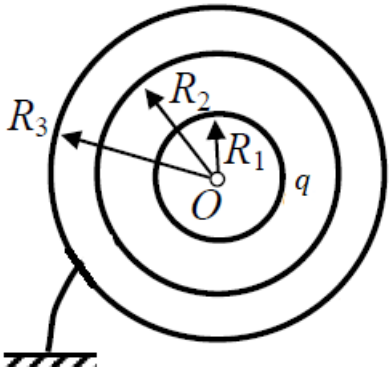


Рис.3.5. Система из трех концентрических сфер с заземленной оболочкой.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma = 0$$

То есть на внешней поверхности сферической оболочке нет заряда. Внутри проводящего шара $E = 0$.

Рассмотрим первую область $r < R_1$ в ней

$$E = 0$$

Во второй области $R_1 < r < R_2$ применим теорему Гаусса и получим:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

В третьей области $R_2 < r < R_3$ также имеем

$$E = 0$$

А в четвертой области $r > R_3$ получим:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q - q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = 0$$

Покажем графически зависимость $E(r)$ и $\varphi(r)$ (Рис.3.6).

Также отметит, что проводящая замкнутая оболочка любой формы экранирует внутреннюю область от внешнего электрического поля.

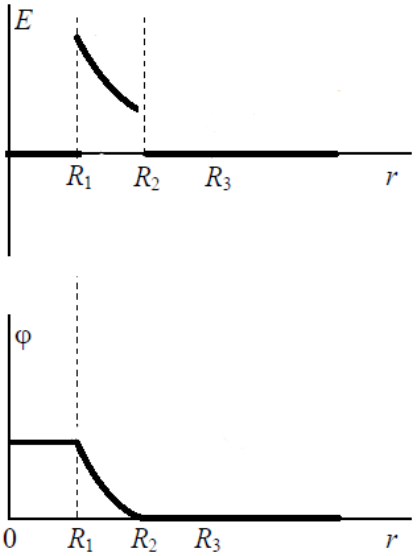


Рис.3.6. Зависимость напряженности и потенциала от расстояния до центра сфер в задаче 3.4.

Задача 3.5

Имеются две пластины, расположенные на расстоянии d и параллельные друг другу. Площади каждой пластины равны S. Причем линейные размеры пластин гораздо больше толщины пластин и расстояния d. На первой пластине помещен заряд $Q_1 > 0$, а

на второй $Q_2 > 0$. Нужно найти поверхностную плотность заряда σ_i $(i = 1,2,3,4)$ и разность потенциала $\Delta\varphi$ между пластинами.

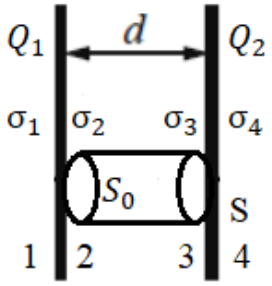


Рис.3.7. К нахождение поверхностной плотности заряда двух пластин.

Решение:

Сумма индуцированных зарядов на каждой поверхности равна нулю. Значит заряд первой и второй пластин есть:

$$\begin{cases}(\sigma_1 + \sigma_2)\cdot S = Q_1\\(\sigma_3 + \sigma_4)\cdot S = Q_2\end{cases}$$

Теперь чтобы найти связь поверхностных плотностей на поверхностях 2 и 3 выберем цилиндр с основанием S_0 как показано на Рис.3.7. Напряженность поля $\boldsymbol{E}$ перпендикулярна пластине. Применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = 0 = \frac{\sigma_2 S_0 + \sigma_3 S_0}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_2 = -\sigma_3$$

Напряженность поля выражается формулой

$$E_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0}$$

Для того чтобы напряжённость поля внутри металла была равна нулю необходимо, чтобы $\sigma_1 = \sigma_4$. Тогда

$$E_{\text{между}} = 2\cdot\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}, \qquad \Delta\varphi = E_{\text{между}}\cdot d = \frac{\sigma_2 d}{\varepsilon_0}$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\sigma_1 + \sigma_2 = \dfrac{Q_1}{S}\\-\sigma_2 + \sigma_1 = \dfrac{Q_2}{S}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2\sigma_1 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{S}\\\sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2S}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2\sigma_2 = \dfrac{Q_1 - Q_2}{S}\\\sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{Q_1 - Q_2}{2S}\end{cases}$$

А для разности потенциалов имеем:

$$\Delta\varphi = \frac{Q_1 - Q_2}{2S\varepsilon_0}\, d$$

Задача 3.5’

Возьмем и заземлим в задаче 3.5 правую пластину.

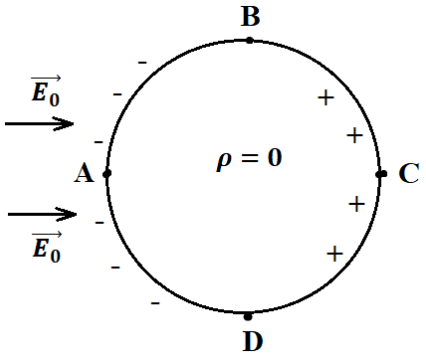


Рис.3.8. Проводящий шар во внешнем поле с напряженностью $\vec{E_0}$.

Решение:

Имеем условия $\varphi_\infty = 0$ и $\varphi_{\text{земл}} = 0$. Кроме того, потенциал второй пластины также будет равен нулю $\varphi_{II} = 0$. Следовательно, напряженность поля везде правее II пластины $E_{\text{правее } II} = 0$. Внутри II пластины тоже $E = 0$. Тогда и $\sigma_4 = 0$. Весь заряд ушел в землю. Поэтому запишем:

$$\sigma_4 = 0 = \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = \frac{Q_1}{S} \text{ и } \sigma_3 = -\frac{Q_1}{S}$$

И для напряженности поля получим выражение

$$E = \frac{2\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{S\varepsilon_0}$$

Задача 3.6

Имеется проводящий металлический шар, который помещен во внешнее поле с напряженностью $\vec{E_0}$. Необходимо рассчитать $E_{A,B,C,D}$ – ?

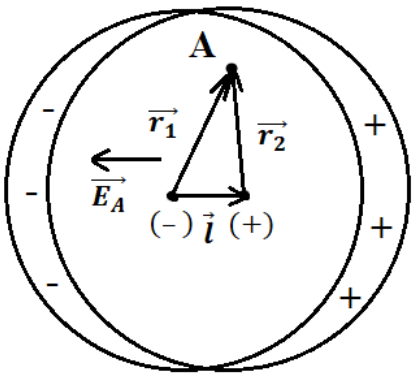


Рис.3.9. Вспомогательная модель к задаче 3.6.

Решение:

У шара слева появятся отрицательные заряды, которые будут сосредоточены в узкой области, а справа – положительные заряды (Рис.3.8).

Теперь рассмотрим модель, которая поможет решить данную задачу. Пусть у нас есть первый шар с объемной плотностью ρ, который сдвинут относительно второго шара с объемной плотностью $-\rho$ (Рис.3.9). Выберем некоторую точку A внутри общей области этих шаров, где $\rho = 0$. Проведем радиус-вектора $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$. Напряженность электрического поля внутри шара будет равна:

$$\overrightarrow{E_A} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{l} = const$$

$$\vec{l} + \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_1} \rightarrow \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = -\vec{l}$$

Вернемся к нашей задаче. Электрическое поле индуцированных зарядов направлено противоположно напряженности внешнего поля. Поэтому поле индуцированных зарядов должно компенсировать внешнее поле, чтобы внутри проводника $E = 0$.

$$\overrightarrow{E_0} - \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0} = 0 \rightarrow \vec{l} = \frac{3\varepsilon_0}{\rho\overrightarrow{E_0}}$$

Для определения ρ выберем малый участок ΔS на поверхности шара. Проведем из центра от вектора $\vec{l}$ вектор к участку ΔS под углом θ. А толщину слоя в месте, где был выбран участок ΔS обозначим δ. И его заряд будет равен

$$\Delta q = \Delta S \cdot \delta = \sigma \cdot \Delta S, \qquad \delta = l\cos\theta$$

Тогда для поверхностной плотности заряда получим:

$$\sigma = \rho l\cos\theta = \frac{\rho 3\varepsilon_0}{\rho}E_0\cos\theta$$

А для напряженности поля вблизи поверхности шара имеем:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow E = 3E_0|\cos\theta|$$

И, наконец, найдем $E_{A,B,C,D}$

$$E_A = 3E_0 = E_C \ \ (\theta = \pi, 0)$$

$$E_B = 0 = E_D \ \ (\theta = \pm\frac{\pi}{2})$$

Семинар 4. Метод электростатических изображений.

Эквипотенциальная поверхность – это поверхность равного потенциала. То есть это места, объединяющие точки с одинаковым потенциалом. Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку, в которой существует электрическое поле. Эти поверхности не пересекаются друг с другом. Являются замкнутыми или начинаются и заканчиваются на бесконечности. Также они перпендикулярны силовым линиям электрического поля.

Теорема единственности в электростатике.

$$\Delta\varphi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}, \qquad \Delta\varphi(r) = 0, \qquad \text{где } \Delta = (\nabla \cdot \nabla)$$

Может быть найдено единственное решение уравнения Пуассона или Лапласа при заданных граничных условиях.

Метод электростатических изображений применяется в том случае, когда у нас имеется поверхность проводящего тела и рядом находится система зарядов. В результате этого в поле зарядов на проводящей плоскости индуцируются заряды, поверхностная плотность которых распределена неравномерно, поэтому пытаются подобрать такую систему точечных фиктивных зарядов изображений, которая в совокупности с заданной системой заряда создавала бы электрическое поле, одна из эквипотенциальных поверхностей которого совпадала бы с поверхностью проводящего поля. Тогда по теореме единственности, поле вне проводника будет в точности совпадать с полем, созданным этими фиктивными зарядами изображениями и системой исходных зарядов.

Задача 4.1

Имеется проводящая бесконечная заземленная плоскость. Над ней находится точечный заряд q. Необходимо определить поверхностную плотность заряда σ.

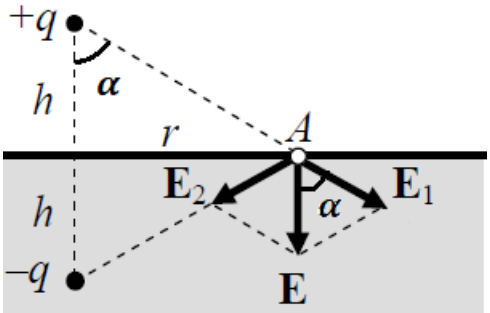


Рис.4.1. К определению поверхностной плотности заряда, индуцированного на бесконечной проводящей плоскости.

Решение:

В поле точечного заряда на плоскости индуцируются отрицательные заряды. Силовые линии всегда начинаются на заряде и заканчиваются на заряде. Так как потенциал поверхности равен нулю, то мы можем заменить проводящую поверхность с

распределенными по ней индуцированными зарядами на заряд, который получим зеркальным отражением нашего заряда q (Рис.4.1).

Выберем точку A, в которой будем определять поверхностную плотность заряда.

Найдем составляющие напряженности поля точечного заряда:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+h^2}$$

$$E_{n1} = E_1 \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

И полную напряженность

$$\vec{E} = 2\overrightarrow{E_{n1}} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qh}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{n}$$

А по определению $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, тогда

$$\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Чтобы убедиться в правильности решения, найдем полный заряд на поверхности, который индуцировался в поле заряда q. Для этого разделим поверхность на систему колец. Радиус одного из колец r и толщина dr. На этом кольце находится заряд dq равный:

$$dq = \sigma(r) \cdot 2\pi dr$$

И полный заряд плоскости есть

$$q_{\text{плоск}} = -qh\int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -qh\int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}d(r^2+h^2)}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = qh\left.\frac{1}{\sqrt{(r^2+h^2)}}\right|_0^\infty = -q$$

Задача 4.2

Пусть есть заземленный двугранный угол, составленный из полубесконечных проводящих плоскостей. На биссектрисе этого угла на расстоянии d находится точечный заряд q. Найти силу, с которой этот двугранный угол действует на точечный заряд $\overrightarrow{F_q}$ – ?

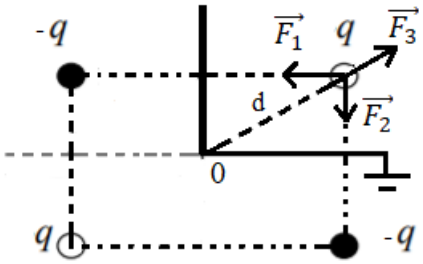


Рис.4.2. К нахождению силы, действующей со стороны двугранного угла на точечный заряд.

Решение:

На поверхности возникает индукционный заряд, распределенный неравномерно. Поэтому для решения задачи найдем такую систему точечных зарядов, которая вне этого проводящего угла будет создавать такое же поле, как система заряда q и индуцированного заряда (Рис.4.2).

Изобразим также силы, которые действуют на наш заданный заряд q. И найдем их:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2d^2} = F_2, \qquad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d^2}$$

$$F_{1+2} = F_1 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\sqrt{2}}{2d^2}$$

И общая сила будет равна:

$$F = F_{1+2} - F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d^2}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

То есть заряд q будет притягиваться к двугранному углу по направлению биссектрисы.

Задача 4.3

Теперь угол между двумя заземленными плоскостями составляет 60º. И точечный заряд q находится в произвольном месте между плоскостями. Нужно найти систему точечных зарядов изображений.

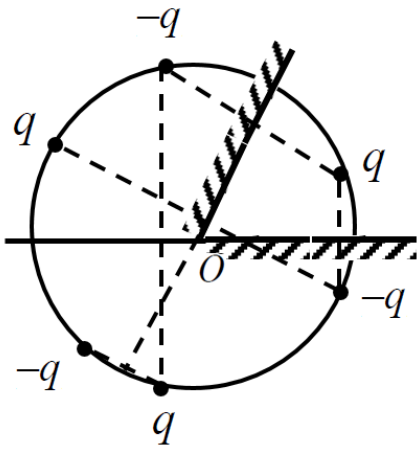


Рис.4.3. Система точечных зарядов изображений к задаче 4.3.

Решение:

Проведем построение. Для начала отразим заряд q относительно горизонтальной полуплоскости и поменяем его знак. Также сделаем со второй полуплоскостью. Все заряды находятся на окружности с центром в точке О. Будем отражать получившиеся заряды дальше в плоскостях. В итоге, придем к тому, что изображено на Рис.4.3.

Мы получили полную замкнутую систему зарядов. Всего число зарядов $N = 6$. Для такого рода систем можно найти замкнутую систему для случая, когда $\varphi = \frac{\pi}{n}$, где n – целое число. А общее число зарядов, включая первоначальный заряд q есть $2N$.

Задача 4.4

Пусть имеются два заряда q' и q, которые находятся на расстоянии d друг от друга. Нужно доказать, что поверхностью нулевого потенциала такой системы зарядов является сфера. Найти ее радиус R и место расположения центра. $\varphi_\infty = 0$.

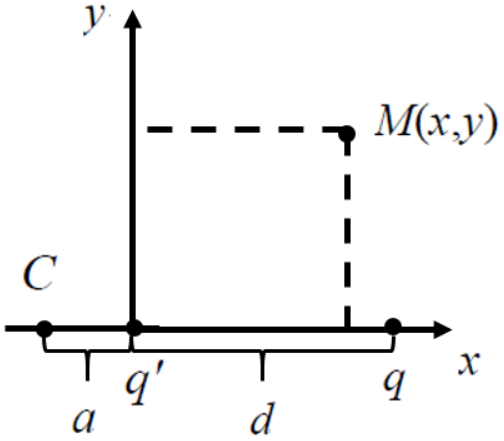


Рис.4.4. К определению поверхности нулевого потенциала системы двух точечных зарядов.

Решение:

Запишем потенциал точки M:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{q}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}}\right) = 0$$

Данное равенство выполняется только в случае, когда знаки q' и q – разные. Приведем подобные:

$$\frac{q'^2}{x^2+y^2} = \frac{q^2}{(d-x)^2+y^2};$$

$$q'^2[x^2+d^2-2dx+y^2] = q^2(x^2+y^2);$$

$$y^2\left(q^2-q'^2\right) + x^2\left(q^2-q'^2\right) + 2dq'^2x - q'^2d^2 = 0$$

Теперь выделим полный квадрат и запишем следующее выражение:

$$y^2 + x^2 + \frac{2dq'^2}{q^2-q'^2}x + \frac{d^2q'^4}{(q^2-q'^2)^2} - \frac{d^2q'^4}{\left(q^2-q'^2\right)^2} - \frac{d^2q'^2}{q^2-q'^2} = 0$$

Получаем уравнение окружности:

$$\left(x + \frac{dq'^2}{q^2-q'^2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2q'^2q^2}{\left(q^2-q'^2\right)^2}$$

Выпишем выражения для радиуса этой окружности и сдвига a от центра

$$a = -\frac{dq'^2}{q^2 - q'^2}$$

$$R = \frac{dqq'}{q^2 - q'^2}$$

Для этой же задачи в пространстве у нас получилась бы сфера с такими же значениями R и a.

Задача 4.5

Имеется металлический заземленный шар радиусом R. На некотором расстоянии b от центра шара находится точечный заряд q. Нужно найти силу, с которой шар действует на заряд $\overrightarrow{F_q}$–?

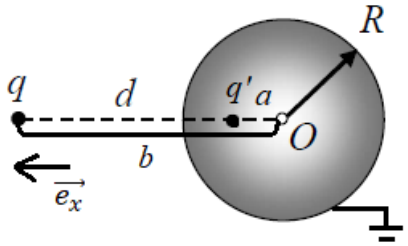


Рис.4.5. К определению силы взаимодействия между шаром и точечным зарядом.

Решение:

Мы помним, при заземлении $\varphi_{\text{шара}} = \varphi_\infty = 0$. Подбираем такой заряд q', чтобы поверхность нулевого потенциала совпала с поверхностью шара (Рис.4.5). Для этого используем результаты задачи 4.4, где расстояние a будет взято по модулю.

$$\frac{R}{a} = -\frac{q}{q'} \to q' = -\frac{a}{R}q$$

Подставим значение q' в формулу для a:

$$a = \frac{da^2q^2}{R^2\left(q^2 - \frac{a^2q^2}{R^2}\right)}; d = b - a$$

Проведя преобразование, получаем:

$$1 = \frac{(b-a)a}{R^2 - a^2};\ R^2 - a^2 = ab - a^2 \to a = \frac{R^2}{b} \to q' = -\frac{R}{b}q$$

Таким образом, мы свели первоначальную задачу к задаче о двух точечных зарядах q и q'. И теперь выразим искомую силу

$$\overrightarrow{F_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(b-a)^2}\overrightarrow{e_x} = -\frac{\frac{R}{b}q^2}{\left(b - \frac{R^2}{b}\right)^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{e_x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rq^2b}{(b^2 - R^2)^2}\overrightarrow{e_x}$$

Задача 4.6

Имеется изолированный шар ($Q_{\text{шара}} = 0$) радиуса R. На некотором расстоянии b от центра шара находится точечный заряд q. Необходимо определить силу, с которой шар действует на заряд $\overrightarrow{F_q}$–?

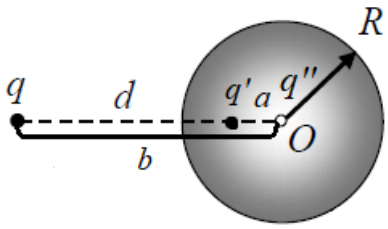


Рис.4.6. К определению силы взаимодействия между изолированным шаром и точечным зарядом.

Решение:

Нам известно, что потенциал шара имеет следующий вид:

$$\varphi_{\text{шара}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b}$$

Из прошлой задачи мы знаем, что если поместить заряд $q' = -\frac{R}{b}q$ на расстояние $a = \frac{R^2}{b}$, то данная система зарядов обеспечит равенство нулю потенциала на поверхности шара. Но теперь потенциал шара другой, поэтому необходимо использовать заряд q'' (Рис.4.6), который дает следующее значение:

$$\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b} \rightarrow q'' = q\frac{R}{b}$$

То есть сейчас мы рассматриваем систему трех точечных зарядов. Причем силы $\overrightarrow{F_{q'}}$ и $\overrightarrow{F_{q''}}$ соотносятся как

$$|F_{q'}| > |F_{q''}|$$

Отсюда следует, что точечный заряд q будет притягиваться к центру сферы. Предлагается доделать задачу самостоятельно.

Задача 4.7

Пусть имеется шар радиуса R, который теперь заряжен с зарядом Q. На некотором расстоянии b от центра шара находится точечный заряд q. Необходимо определить силу, с которой шар действует на заряд $\overrightarrow{F_q}$–?

Решение:

Запишем выражение для потенциала

$$\varphi_{\text{шара}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b} + \frac{Q}{R}\right)$$

Методика остается такой же. Снова помещаем заряд q' на расстояние a и заряд q''' в центр шара, который равен

$$\varphi_{q'''} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'''}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b} + \frac{Q}{R}\right) \rightarrow q''' = q\frac{R}{b} + Q$$

Тогда искомая сила будет равна

$$\overrightarrow{F_q} = \overrightarrow{F_{q'}} + \overrightarrow{F_{q'''}}$$

Причем направление силы зависит от знака заряда шара Q. Если $Q < 0$, то будет действовать сила притяжения к центру шара, а в случае $Q > 0$ возможны как вариант притяжения, так и отталкивания, что зависит от соотношения зарядов и расстояний.

Задача 4.8

Имеется бесконечная заземленная плоскость. Над этой плоскостью находится точечный электрический диполь на расстоянии d, причем его дипольный момент $\vec{p}$ перпендикулярен плоскости. На расстоянии a возьмем точку A. Необходимо найти напряженность поля в этой точке $\overrightarrow{E_A}$—?

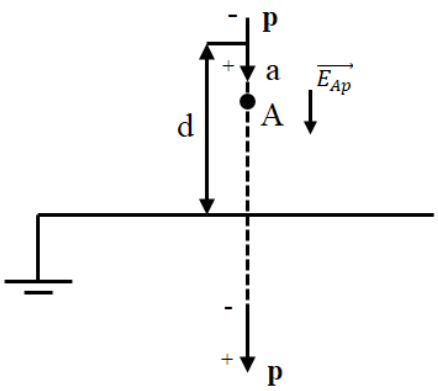


Рис.4.7. К определению напряженности в точке А в системе диполя и бесконечной плоскости.

Решение:

Построим диполь изображения в нашей плоскости (Рис.4.7). Тогда напряженность поля в точке A, созданная самим диполем $\vec{p}$ есть

$$\overrightarrow{E_{A\vec{p}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{a^3}$$

А для напряженности диполя изображения имеем:

$$\overrightarrow{E_{A\,\text{из}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{(2d-a)^3}$$

Поэтому суммарная напряженность равна

$$\overrightarrow{E_A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\vec{p}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(2d-a)^3}\right)$$

Семинар 5. Электроемкость. Простые конденсаторы.

Уединенный проводник – такой проводник, расстояние которого до других тел достаточно велико, так что можно пренебречь электрическими полями зарядов, находящихся на этих телах по сравнению с электрическим полем, создаваемым данным проводником.

Электроемкость.

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \qquad \varphi_\infty = 0$$

Примером такого уединенного проводника может служить металлический шар радиуса R, находящийся в воздухе или вакууме. При выбранной нормировке потенциал этого шара равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \ \varphi_{\text{шара}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \to C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Простой конденсатор – совокупность двух заряженных проводников, поле между которыми не зависит от электрического поля внешней среды. На этих проводниках находятся заряды равные по величине и противоположные по знаку. В конденсаторе эти проводники называются обкладками. Разность потенциалов между обкладками называют напряжением U.

$$C = \frac{q}{U}$$

Плоский конденсатор.

Пусть у нас есть плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d (Рис.5.1). Причем $d \ll \sqrt{S}$.

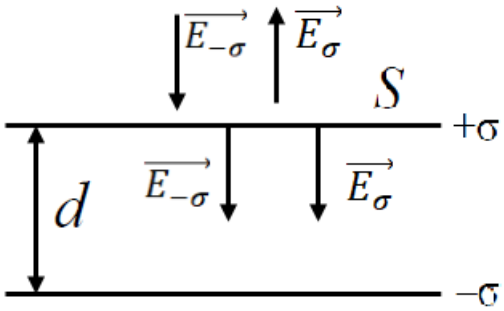


Рис.5.1. К определению напряжения и емкости плоского конденсатора.

Напряженность поля одной пластины:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Вне конденсатора $E = 0$, а внутри

$$E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

А напряжение выражается следующим образом:

$$U = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0}$$

И емкость плоского конденсатора будет равна

$$q = \sigma \cdot S, \qquad C = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

Далее рассмотрим правила о сложении емкостей при последовательном и параллельном соединении конденсаторов.

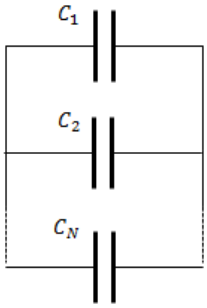


Рис.5.2. Параллельное соединение плоских конденсаторов.

Параллельное соединение:

$$U_1 = U_2 = \cdots = U$$

$$q_1 = C_1 U, \qquad q_2 = C_2 U, \ldots$$

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_N = U(C_1 + C_2 + \cdots) = CU \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \sum_i C_i$$

Последовательное соединение:

$$q_1 = q_2 = \cdots = q$$

$$U_i = \frac{q}{C_i}$$

$$U = \sum_i U_i = q \sum_i C_i \rightarrow \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_0$$

$$\frac{1}{C} = \frac{n}{C_0} \rightarrow C = \frac{C_0}{n}$$

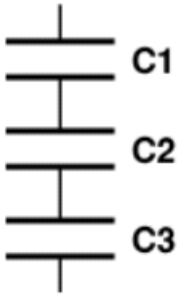


Рис.5.3. Последовательное соединение плоских конденсаторов.

Задача 5.1

Имеется сферический конденсатор, у которого внутренняя сфера имеет радиус R_1, а внешняя R_2. Нужно вычислить емкость такого конденсатора.

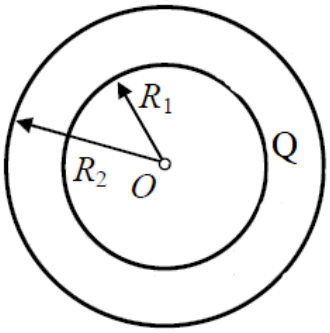


Рис.5.4. К определению емкости сферического конденсатора.

Решение:

Воспользуемся формулой простого конденсатора. А для этого поместим на обкладку заряд Q. Тогда напряженность поля в области между обкладками равна

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

И разность потенциалов имеет вид

$$U \equiv \Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Выражение для емкости будет следующим:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Задача 5.2

Имеется длинный цилиндрический конденсатор, у которого радиус внутренней обкладки r_1 и внешней r_2. Необходимо вычислить емкость единицы длины.

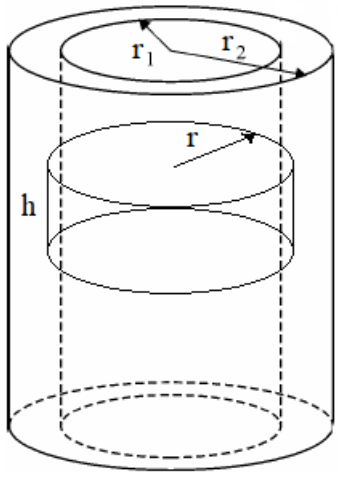


Рис.5.5 Цилиндрический конденсатор к задаче 5.2.

Решение:

Пусть внутренний цилиндр заряжен с линейно плотностью заряда τ (Рис.5.5). Вычислим напряженность электрического поля между обкладками. Для этого применим теорему Гаусса, то есть выберем цилиндр радиуса r и запишем:

$$\Phi_E = E(r)\cdot 2\pi r h = \frac{\tau h}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Вычислим разность потенциалов между обкладками цилиндра:

$$U \equiv \Delta\varphi = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_2}{r_1}$$

И для емкости единицы длины получим:

$$C_1 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Задача 5.3

Имеется горизонтальный металлический провод радиуса a. Он находится на расстоянии b от бесконечной вертикальной металлической пластины, которая заземлена. Необходимо вычислить емкость, приходящуюся на единицу длины провода между проводом и плоскостью.

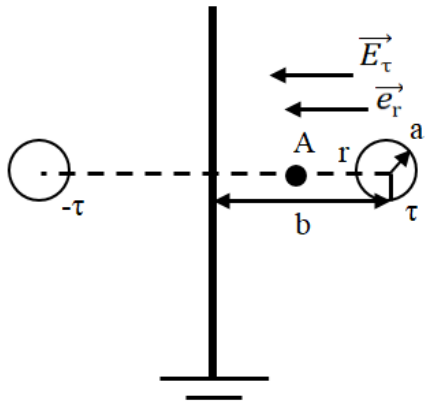


Рис.5.6. К определению емкости между проводом и бесконечной плоскостью.

Решение:

Будем считать, что на проводе находится заряд с линейной плотностью τ. Так как плоскость заземлена, то ее потенциал равен нулю. Решим задачу методом электростатического отображения. Для этого зеркально отобразим провод относительно плоскости с линейной плотностью $-\tau$. Теперь выберем некоторую точку A на расстоянии r от центра провода. Тогда напряженность в точке A от настоящего провода равна:

$$\vec{E_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$$

А от провода отображения:

$$\vec{E_2} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(2b-r)}(-\vec{e_r}) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(2b-r)}\vec{e_r}$$

А суммарный вектор $\vec{E}$ равен

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(2b-r)}\right)$$

Далее вычислим разность потенциалов между реальным проводом и плоскостью:

$$U \equiv \Delta\varphi = \int_a^b E(r)dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(2b-r)}\right)dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(ln\frac{b}{a} - ln\frac{b}{2b-a}\right)$$
$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{2b-a}{a} = U$$

При $a \ll b$ получим

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{2b}{a}$$

И, наконец, найдем значение емкости:

$$C_1 = \frac{\tau}{U} \cong \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\frac{2b}{a}}$$

Задача 5.4

Имеется плоский конденсатор, у которого расстояние между обкладками d значительно меньше линейных размеров его пластин. В конденсаторе находится металлическая пластина толщиной h. Расстояние от верхней обкладки до пластины – b. Известно, что конденсатор заряжен таким образом, что при $\varphi_\infty = 0$ потенциал верхней обкладки равен φ_1, а нижней $\varphi_2 < \varphi_1$. Нужно определить потенциал металлической пластины φ_0 и емкость конденсатора с пластиной C'

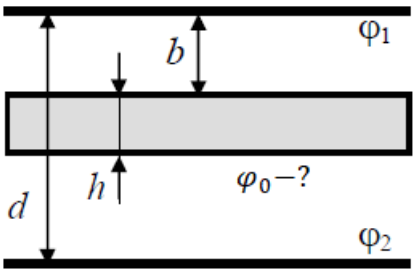


Рис.5.7. Металлическая пластина внутри плоского конденсатора.

Решение:

Напряженность электрического поля в воздушных зазорах будет равно

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d - h}$$

Запишем разность потенциалов между верхней обкладкой и пластиной:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \int_0^b E(x)dx = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d-h} b \rightarrow$$
$$\rightarrow \varphi_0 = \varphi_1 - \frac{b}{d-h}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Определим потенциал в точке на расстоянии x от верхней пластины:

$$\varphi_1 - \varphi(x) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d-h}x \to \varphi(x) = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d-h}x$$

Далее вычислим емкость конденсатора с пластиной. Вся область является эквипотенциальной, поэтому можно считать, что наш конденсатор состоит из двух последовательных конденсаторов. Тогда имеем:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{b}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-b-h}$$

И применяя ранее полученную формулу:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \to \frac{1}{C} = \frac{b}{\varepsilon_0 S} + \frac{d-b-h}{\varepsilon_0 S} = \frac{d-h}{\varepsilon_0 S} \to$$

$$\to C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h}$$

Стоит отметить, что эта емкость не зависит от положения металлической пластины внутри конденсатора.

Задача 5.5

Имеется 4 одинаковых пластины, которые расположены на одинаковых расстояниях друг от друга. Верхняя и нижняя пластины соединены проводом. Емкость конденсатора между двумя таким пластинами равна C. Нужно найти емкость такой системы между точками A и B (Рис.5.8).

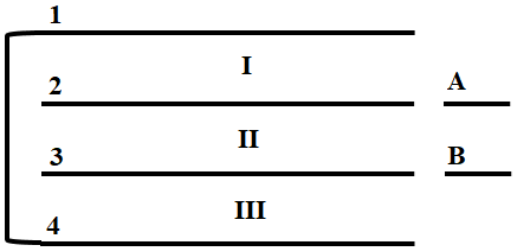


Рис.5.8. Система из 4-х одинаковых пластин к задаче 5.5.

Решение:

Так как первая и четвертая пластины соединены, то

$$\varphi_1 = \varphi_4$$

Мы можем записать, что

$$\Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} + \Delta\varphi_{34} = 0 \to \Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{34} = -\frac{\Delta\varphi_{23}}{2}$$

На Рис.5.8 пронумерованы три конденсатора. Можно сказать, что I и III конденсаторы соединены последовательно. И эти конденсаторы, в свою очередь, соединены параллельно с конденсатором II.

Теперь найдем емкость системы между точками A и B:

$$C_{AB} = C_{II} + C_{I+III} = C + \frac{C}{2} = 1.5C$$

Далее ответим на вопрос: как изменится емкость, если верхнюю пластину соединить с одной из внутренней пластиной этой схемы. C'_{AB}—?

Если мы соединим верхнюю пластину со второй, то не будет конденсатора, обкладками которого являются пластины 1 и 2. Тогда искомая емкость будет равна:

$$C'_{AB} = 2C$$

Задача 5.6

Имеется схема, изображенная на Рис.5.9. Необходимо найти суммарную емкость системы.

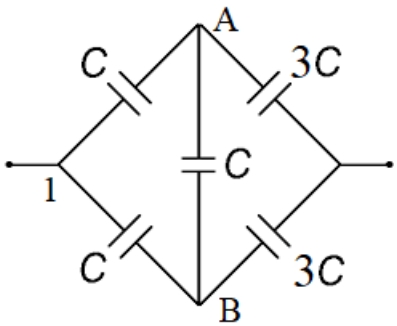


Рис.5.9. Схема из 5 конденсаторов к задаче 5.6.

Решение:

Для решения воспользуемся симметрией системы. Имеем равенство потенциалов

$$\varphi_A = \varphi_B$$

Далее воспользуемся свойством эквипотенциальных точек. Их можно соединять и разъединять не изменяя электростатического состояния всей системы. У центрального конденсатора $q = 0$. Поэтому его можно исключить из рассмотрения. Тогда задача легко решается.

$$\frac{1}{C_{C+3C}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{3C} = \frac{4}{3C} \rightarrow C_{C+3C} = \frac{3}{4}C$$

И суммарная емкость имеет следующий вид:

$$C_{\text{сумм}} = 2\frac{3}{4}C = \frac{3}{2}C$$

Задача 5.7

Имеется схема, изображенная на Рис.5.10. Необходимо найти суммарную емкость системы.

Решение:

В силу симметрии схемы понятно, что потенциалы в точках A и B равны

$$\varphi_A = \varphi_B$$

У конденсатора с емкостью $2C$ $q = 0$, поэтому можно убрать его из системы. Тогда эквивалентная схема будет содержать два последовательных конденсатора C и $3C$, которые параллельны таким же последовательным конденсаторам C и $3C$.

И суммарная емкость равна данной системы будет иметь вид:

$$C_{\text{сумм}} = 1.5C$$

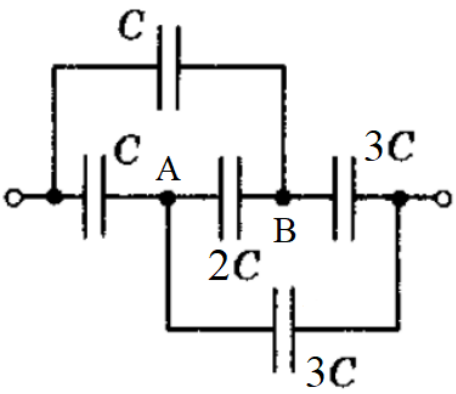


Рис.5.10. Схема из 5 конденсаторов к задаче 5.7.

Задача 5.8

Имеется схема, изображенная на Рис.5.11. Необходимо вычислить падение напряжения на первом и втором конденсаторах.

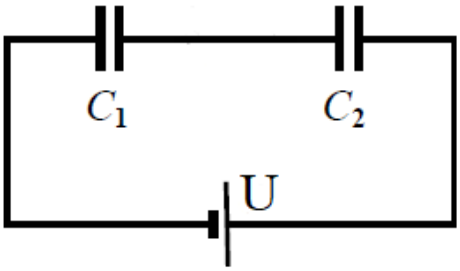


Рис.5.11. Схема с двумя конденсаторами в цепи к задаче 5.8.

Решение:

Заряды на обкладках будут равны

$$q_1 = q_2 = q$$

А напряжения на конденсаторах имеют вид:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \qquad U_2 = \frac{q}{C_2}$$

И в сумме напряжение от двух конденсаторов равно:

$$U = U_1 + U_2 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \rightarrow q = \frac{UC_1C_2}{C_1 + C_2}$$

Выражая значения для напряжений в нашей схеме в итоге получим:

$$U_1 = \frac{UC_2}{C_1 + C_2}, \qquad U_1 = \frac{UC_1}{C_1 + C_2}$$

Семинар 6. Диэлектрики в электростатическом поле.

Диэлектрики – тела, не имеющие свободные заряды. То есть в них не может протекать ток проводимости. Однако если диэлектрик помещен в электрическое поле, то происходит его поляризация, то есть молекулы диэлектрика приобретают дипольные моменты.

Неполярные диэлектрики – такие диэлектрики, у молекул которых центры отрицательного и положительного зарядов без электрического поля находятся в одной точке. И в электрическом поле эти центры расходятся и молекула приобретает дипольный момент.

Полярные диэлектрики – диэлектрики, у которых в молекуле центры отрицательного и положительного зарядов уже находятся в разных точках, такие молекулы уже обладают дипольным моментом и в электрическом поле эти дипольные моменты ориентируются со направлено с полем.

Вектор поляризации.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p_i}}{\Delta V}$$

Для него справедлива теорема Гаусса – поток вектора $\vec{P}$ через любую замкнутую поверхность равен связанному заряду, находящимся внутри этой поверхности, взятому со знаком минус.

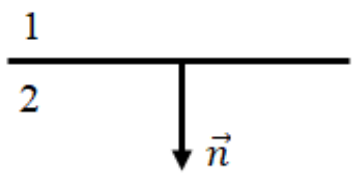


Рис.6.1. Определение поверхностной плотности на границе сред.

$$\oint_S \vec{P} \cdot \overrightarrow{dS} = -q'$$

$$div\, \vec{P} = -\rho'$$

Найдем значение поверхностной плотности на границе двух сред (Рис.6.1).

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

$$\left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right)\vec{n} = -\sigma'$$

Вектор электрической индукции.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Также запишем теорему Гаусса для нашего вектора – поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность равен свободному заряду, находящимся внутри данной поверхности.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = q$$

$$div\, \vec{D} = \rho$$

Используя Рис.6.1, запишем выражение для вектора электрической индукции на границе сред:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$(\overrightarrow{D_2} - \overrightarrow{D_1})\vec{n} = \sigma$$

В линейно изотропных диэлектриках вектор $\vec{P}$ выражается как

$$\vec{P}(r) = \varepsilon_0 \chi(r) \vec{E}(r),$$

где $\chi(r)$ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

И для вектора диэлектрической индукции получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad (1 + \chi) = \varepsilon$$

Откуда следует материальное уравнение для векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\vec{E}$$

Задача 6.1

Имеется плоский конденсатор с зарядом верхней пластины $+\sigma$ и нижней $-\sigma$. Затем его отключили от источника напряжения. В конденсатор внесли диэлектрическую пластину с ε (Рис.6.2). Также будем считать, что $V_{\text{пласт}} = \frac{V_{\text{кон}}}{2}$. Необходимо определить $\vec{P}$ внутри пластины, σ' и ρ'.

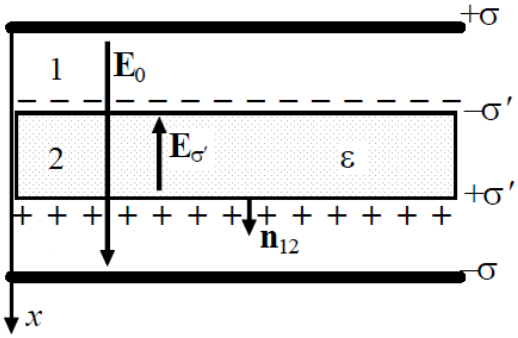


Рис.6.2. Диэлектрическая пластина внутри конденсатора. Задача 6.1.

Решение:

Получим выражение для вектора электрической индукции от одной пластины:

$$D_0^{\text{одна}} = \frac{\sigma}{2}$$

Но внутри конденсатора имеем:

$$D_0 = \sigma$$

На границах диэлектрика нет свободных зарядов, поэтому применим граничные условия для D

$$D_{0n} = D_n = D = \sigma$$

По материальному уравнению запишем:

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon E \rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

То есть напряженность поля внутри диэлектрика в ε раз меньше, чем в воздушном слое.

$$E_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = const \rightarrow E = const$$

Тогда запишем теорему Гаусса для $\vec{P}$:

$$div\,\vec{P} = -\rho', \qquad P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \sigma\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = const$$

И приходим к ответу $\rho' = 0$, то есть объемных связанных зарядов внутри нет.

Но на поверхности заряды будут:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \qquad P = -\sigma' = -\sigma\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$$

Теперь вычислим разность потенциалов между обкладками конденсатора с учетом диэлектрической пластины:

$$\Delta\varphi = E_0\frac{d}{2} + E\frac{d}{2} = \frac{d}{2}\left(E_0 + \frac{E_0}{\varepsilon}\right) = \frac{dE_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) < \Delta\varphi_{\text{без пласт.}}$$

где d – расстояние между обкладками.

Задача 6.2

Имеется металлический шар с зарядом q радиуса R_1. Вплотную к этому шару прилегает сферическая оболочка с внешним радиусом R_2. Оболочка представляет собой диэлектрик с ε. Нужно найти σ', ρ' и Q'.

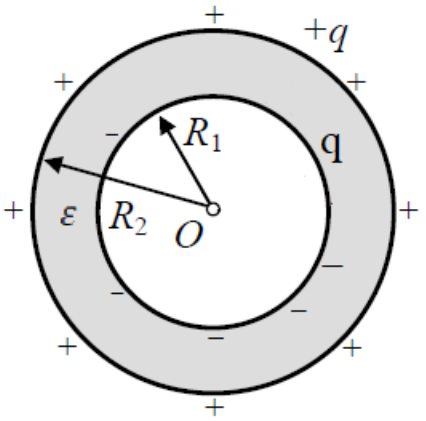


Рис.6.3. Шар и сферическая оболочка, заполненная диэлектриком. Задача 6.2.

Решение:

Выберем сферическую поверхность с радиусом r и применим теорему Гаусса:

$$\Phi_D = D(r)\cdot 4\pi r^2 = q \to D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Далее используя материальное уравнение, вычисляем E:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

$$P(r) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(r) = \frac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Теперь вспоминаем, что

$$div\,\vec{P} = -\rho', \qquad div\,\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = 0 \to \rho' = 0$$

Используем граничные условия для определения заряда на поверхности диэлектрика:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

Внутренняя граница: $r = R_1$

$$\frac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon R_1^2} = -\sigma'$$

Внешняя граница: $r = R_2$

$$\frac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon R_2^2} = \sigma'$$

Для вычисления общего заряда найдем

$$Q'_{\text{внутр}} = \sigma'(R_1) \cdot 4\pi R_1^2 = -q\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$$

$$Q'_{\text{внешн}} = \sigma'(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 = q\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$$

Задача 6.3

Имеется безграничное полупространство, заполненное диэлектриком с ε. Над этой поверхностью находится точечный заряд q на высоте h от поверхности. Нужно определить σ' и Q'.

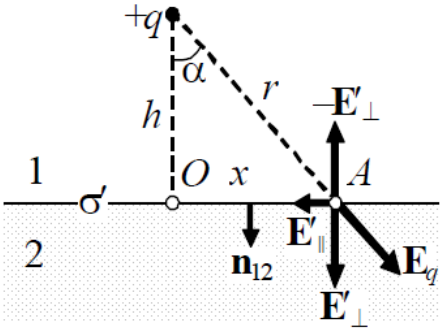


Рис.6.4. *Напряженности полей, создаваемых в точке A сторонним зарядом q и поляризационными зарядами диэлектрика.*

Решение:

Выбреем некоторую точку A на поверхности диэлектрика. Напряженность электрического поля в этой точке будет создаваться двумя источниками, точечным зарядом:

$$\overrightarrow{E_q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

И поляризованными зарядами диэлектрика.

Напряженность компоненты

$$|E'_{?}| = \frac{|\sigma'|}{2\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{E'_{\parallel}} = \overrightarrow{E_{q\parallel}}$$

Так как нет свободных зарядов, то вектор $\vec{D}$ при переходе из воздуха в диэлектрик сохраняет свою нормальную компоненту:

$$D_{2n} = D_{1n}, \qquad E_{qn} = E_q \cos\alpha = E_q \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$D_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n} = \varepsilon_0 \left(\frac{qh}{4\pi\varepsilon_0 (h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{|\sigma'|}{2\varepsilon_0} \right)$$

$$D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{2n} = \varepsilon\varepsilon_0 \left(\frac{qh}{4\pi\varepsilon_0 (h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|\sigma'|}{2\varepsilon_0} \right)$$

И приравнивая данные выражения:

$$\frac{qh(\varepsilon - 1)}{4\pi(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma'(1 + \varepsilon)}{2} \rightarrow |\sigma'| = \frac{qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)}$$

Теперь вычислим полный заряд на этой поверхности:

$$Q' = -\int_0^\infty |\sigma'(x)| 2\pi x \, dx = -\frac{qh(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)} \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{qh(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)} \frac{1}{\sqrt{(h^2 + x^2}} \Bigg|_0^\infty$$

$$= -\frac{q(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)} = Q'$$

Задача 6.4

Имеется изотропный диэлектрик с проницаемостью ε. В воздухе создано внешнее электрическое поле (Рис.6.5). Нужно определить как направлены $\overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{D_2}$ и $\overrightarrow{P_2}$

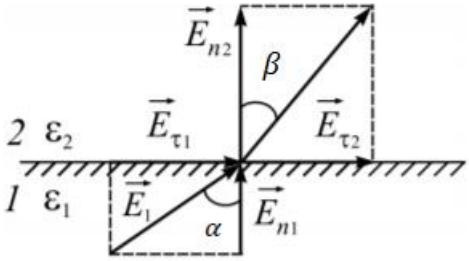


Рис.6.5. Напряженность поля на границе диэлектрика.

Решение:

Под углом α направлен вектор напряженности в первой среде. А под углом β уже в диэлектрике проходит вектор напряженности $\overrightarrow{E_2}$.

Запишем материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$$

То в изотропной среде вектора $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$ будут направлены одинакого, поэтому достаточно определить направление одного любого вектора.

Запигем граничные условия для $\vec{D}$:

$$D_{2n} = D_{1n}$$

А для вектора $\vec{E}$:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}$$

Тогда используя соотношения выше, имеем:

$$D_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n} = E_1 \cos\alpha = \varepsilon\varepsilon_0 E_{2n} \to E_{2n} = \frac{E_{1n}}{\varepsilon}$$

$$E_{1\tau} = E_1 \sin\alpha = E_{2\tau}, \qquad D_{2\tau} = \varepsilon\varepsilon_0 E_{2\tau} = \varepsilon\varepsilon_0 E_1 \sin\alpha$$

Далее найдем полное значение напряженности поля:

$$E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2} = E_1\sqrt{\frac{cos^2\alpha}{\varepsilon^2} + sin^2\alpha}$$

И для вектора электрической индукции:

$$D_2 = \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = \varepsilon_0 E_1\sqrt{cos^2\alpha + \varepsilon^2 sin^2\alpha}$$

Используя связь векторов, запишем:

$$P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_1\sqrt{\frac{cos^2\alpha}{\varepsilon^2} + sin^2\alpha}$$

Что касается направления вектора $\overrightarrow{E_2}$, то найдем его через следующее отношение:

$$tg\beta = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{E_1 \sin\alpha}{E_1 \cos\alpha}\varepsilon = \varepsilon \cdot tg\alpha > tg\alpha \to \beta > \alpha$$

Задача 6.5

Имеется плоский конденсатор, внутри которого есть электрическое поле E_0. После этого конденсатор отключают от источника напряжения и заполняют диэлектриком (Рис.6.6). Причем $V_{диэл} = \frac{V_{кон}}{2}$. Нужно найти E, D—?

Решение:

Сначала рассмотрим случай без диэлектрика внутри:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad D = \sigma$$

А разность потенциалов между пластинами будет равна для двух случаев:

$$\Delta\varphi = E_1 d = E_2 d \to E_1 = E_2$$

Поверхностные заряды на пластинах перераспределяются, чтобы данное равенство выполнялось.

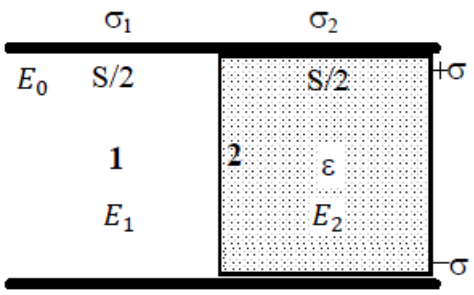


Рис.6.6. Конденсатор, частично заполненный диэлектриком.

А выражения для напряженностей будут следующие:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad D_2 = \sigma_2$$

Сравнивая эти уравнения, имеем:

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon\varepsilon_0} \to \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon}$$

Общий заряд на пластине найдем как

$$q = \sigma S = \sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} \to \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \sigma = \frac{\sigma_1 + \varepsilon\sigma_1}{2} \to$$

$$\to \sigma_1 = \frac{2\sigma}{\varepsilon + 1}, \qquad \sigma_2 = \frac{2\varepsilon\sigma}{\varepsilon + 1}$$

И теперь найдем напряженности полей в воздушной и диэлектрической частях:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0(\varepsilon + 1)} = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0(\varepsilon + 1)} = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}$$

Для вектора электрической индукции используем материальные уравнения связи:

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{2E_0\varepsilon_0}{\varepsilon + 1}$$

$$D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 = \frac{2E_0\varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon + 1}$$

Задача 6.6

Условие из задачи 6.5, но теперь после зарядки конденсатора его не отключают от источника напряжения. Также найдем E, D−?

Решение:

Так как источник действует постоянно, то разность потенциалов $\Delta\varphi = const$.

Тогда для напряженности будем иметь:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{d}, \qquad E_1 = E_0 = E_2$$

А для электрической индукции равенства выглядят следующим образом:

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_0, \qquad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0$$

Задача 6.7

Имеется конденсатор, заполненный двумя слоями диэлектрика (Рис.6.7). Нужно найти его емкость $C-$?

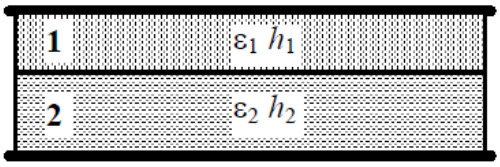


Рис.6.7. Конденсатор, заполненный двумя слоями диэлектриков.

Решение:

Для решения этой задачи запишем выражение для емкостей:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{h_1}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{h_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S} + \frac{h_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S} \rightarrow C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{h_1 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1}$$

Семинар 7. Диэлектрики с заданным состоянием поляризации.

В случае, если у нас диэлектрик изотропный, однородный и занимает пространство полностью между эквипотенциальными поверхностями системы, то

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\overrightarrow{E_0}(\vec{r})}{\varepsilon}$$

И потенциал поля будет равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\overrightarrow{\varphi_0}(\vec{r})}{\varepsilon}$$

А для вектора электрической индукции имеем:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \overrightarrow{D_0}(\vec{r})$$

Все величины с нулевым индексом обозначают характеристики системы без диэлектрика.

Диэлектрики ограниченного размера.

При внесении такого диэлектрика в электрическое поля возникает вектор поляризации и внутри самого диэлектрика возникает электрическое поле. Причем такой диэлектрик намагничивается неоднородно. Но существует случай, когда диэлектрик намагничивается однородно – диэлектрик формы эллипсоида.

При нахождении эллипсоидального диэлектрика во внешнем поле, внутри него возникает деполяризующее поле. Тогда напряженность компоненты может быть вычислена как

$$E_\alpha = E_{0\alpha} - n_\alpha \frac{P_\alpha}{\varepsilon_0}, \qquad n_x + n_y + n_z = 1, \qquad \alpha = x, y, z$$

n_α – фактор формы.

Определим фактор формы для трех важных случаев.

1. Тонкий цилиндр (стержень).

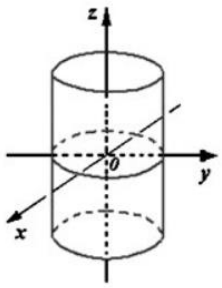


Рис.7.1. Цилиндр.

Направим оси как показано на Рис.7.1. Во внешнем поле сохраняется тангенциальная компонента вектора $\vec{E}$, поэтому:

$$E_{0z} = E_z$$

$$E_z = E_{0z} - n_z \frac{P_z}{\varepsilon_0} \to n_z = 0$$

В плоскостях X и Y можем записать, что

$$n_x = n_y = \frac{1}{2}$$

2. Тонкий диск.

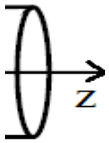


Рис.7.2. Диск.

Тогда в таком случае сохраняется нормальная компонента вектора $\vec{D}$:

$$D_{0z} = D_z, D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

$$\varepsilon_0 E_{0z} = \varepsilon\varepsilon_0 E_z$$

Сокращаем ε_0 и получаем:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$E_z = \frac{E_{0z}}{\varepsilon}$$

$$E_z = E_{0z} - E_{0z} + \frac{E_{0z}}{\varepsilon} = E_{0z} - \frac{E_{0z}}{\varepsilon}(\varepsilon - 1) = E_{0z} - E_z(\varepsilon - 1)$$

Используя материальные уравнения, в итоге получим:

$$E_z = E_{0z} - \frac{P_z}{\varepsilon_0} \rightarrow n_z = 1$$

А для оставшихся компонент, очевидно

$$n_x = n_y = 0$$

3. Шар.

В силу своей сферической симметрии у шара все три направления равноправны:

$$n_x = n_y = n_y = \frac{1}{3}$$

Задача 7.1

Пусть имеется большого радиуса R тонкий диск толщиной d. Этот диск поляризован таким образом, что $\vec{P} = \overrightarrow{P_0}\frac{x}{d}$. Нужно найти $\Delta\varphi_{12}$–?

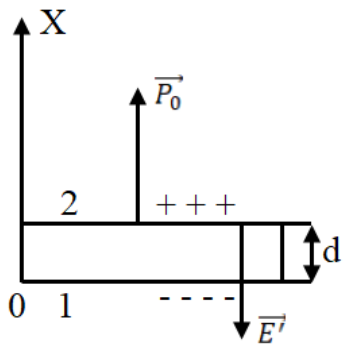


Рис.7.3. Определение разности потенциала тонкого диска.

Решение:

В направлении перпендикулярного плоскости диска фактор формы $n_z = 1$.

Внешнего поля здесь нет, поэтому запишем:

$$E_x = -\frac{P}{\varepsilon_0} = -\frac{\overrightarrow{P_0}x}{d\varepsilon_0}$$

Теперь воспользуемся определением разности потенциалов:

$$\Delta\varphi_{12} = -\int_1^2 \vec{E}(x)\overrightarrow{dx} = \frac{P_0}{d\varepsilon_0}\int_0^d x dx = \frac{P_0 d}{2\varepsilon_0}$$

Причем направление электрического поля $\overrightarrow{E'}$ противоположно направлению оси X (Рис.7.3).

Задача 7.2

Рассмотрим шар с дипольным моментом $\vec{P}$. Выберем ось Z, сонаправленную с вектором поляризации (Рис.7.4).

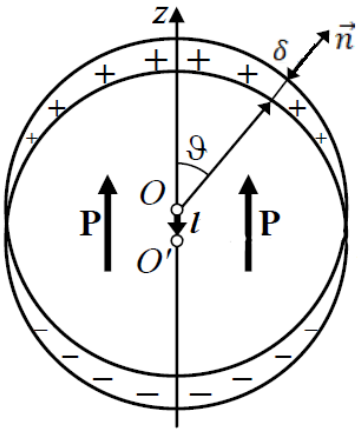


Рис.7.4. К вычислению напряженности поля внутри однородно поляризованного шара.

Решение:

Внутри шара зарядов не будет, то есть $-\rho' = div\,\vec{P} = 0$. Но заряды будут на поверхности.

$$\sigma' = \left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right) = P\cos\theta$$

Данная система может быть представлена совокупностью двух шаров, один из которых заряжен с объемной плотностью ρ, а второй $-\rho$. И центры этих шаров сдвинуты на вектор $\vec{l}$. Тогда в области перекрытия шаров:

$$\rho_{\text{перекр}} = 0$$

Выделим маленький участок поверхности δS. Тогда можно записать

$$\delta = l\cos\theta$$

А заряд, сосредоточенный в данном объеме будет равен:

$$\delta q = \rho\delta V = \rho\,\delta S\delta = \rho l\cos\theta\,\delta S = \sigma\delta S$$

Также положим

$$P = \rho l, \qquad \vec{P} = -\rho\vec{l}$$

Напряженность поля внутри шаров для некоторой точки будет иметь вид:

$$\overrightarrow{E_A} = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overrightarrow{r_+} - \overrightarrow{r_-}\right) = \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = const$$

То есть мы получили, что напряженность противоположна по направлению вектору поляризации. Это и есть деполяризующее поле.

Далее используем формулы для факторов формы и получаем:

$$E_z = E_{0z} - \frac{P_z}{\varepsilon_0} \rightarrow n_z = \frac{1}{3}$$

Что и было получено ранее.

Задача 7.3

Рассмотрим шар с проницаемостью ε. Он помещен в однородное электрическое поле с напряженностью $\overrightarrow{E_0}$. Нужно найти $\vec{E}$ внутри шара, $\vec{P}$, ρ', σ' и $\overrightarrow{E'}$–?

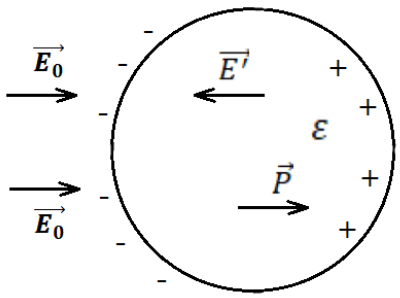


Рис.7.5. Направление напряженности электрических полей для диэлектрического шара. Задача 7.3.

Решение:

В электрическом поле образуются заряды на поверхности шара (Рис.7.5). В результате у шара появится вектор поляризации $\vec{P}$, значит возникает деполяризующее поле $\overrightarrow{E'}$.

Напряженность внутри состоит из следующих слагаем:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E'} = \overrightarrow{E_0} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Используем материальные уравнения и получаем:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} - \frac{\varepsilon - 1}{3}\vec{E}$$

Группируем члены с $\vec{E}$:

$$\vec{E}\left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}\right) = \overrightarrow{E_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\overrightarrow{E_0}$$

Вектор $\vec{P}$ имеет следующий вид:

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\overrightarrow{E_0}$$

Далее сразу найдем напряженность деполяризующего поля:

$$\overrightarrow{E'} = \vec{E} - \overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{E_0}\left(\frac{3}{\varepsilon + 2} - 1\right) = -\overrightarrow{E_0}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

Посмотрим на выражение для вектора $\vec{P}$. В данном электрическом поле эта величина $const$. Поэтому

$$\rho' = -\,div\,\vec{P} = 0$$

А поверхностная плотность равна

$$\sigma' = \left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right) = P\cos\theta = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}E_0\cos\theta$$

Задача 7.4

Пусть имеется неполяризованный цилиндр, который помещен во внешнее однородное поле с напряженностью $\overrightarrow{E_0}$. Нужно найти напряженность электрического поля в цилиндре $\vec{E}$ и вектор поляризации $\vec{P}$.

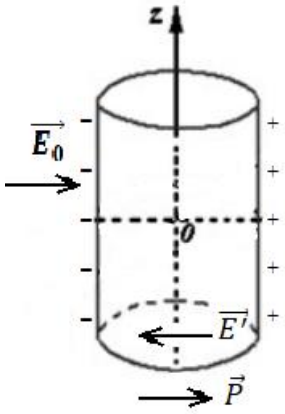


Рис.7.6. Цилиндр во внешнем однородном электрическом поле.

Решение:

Возникают связанные заряды (Рис.7.6).

В плоскостях перпендикулярной оси фактор формы составляет

$$n_x = n_y = \frac{1}{2}$$

Поэтому можем написать, что электрическое поле внутри цилиндра равно

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} - \frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0} = \overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E'}$$

С учетом материальных уравнений получим:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} - \frac{(\varepsilon-1)}{2}\vec{E}$$

Сгруппируем члены с $\vec{E}$:

$$\vec{E}\left(1+\frac{\varepsilon-1}{2}\right) = \overrightarrow{E_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{2\overrightarrow{E_0}}{\varepsilon+1}$$

А для вектора поляризации имеем:

$$\vec{P} = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{\varepsilon+1}\overrightarrow{E_0}$$

Задача 7.5

Имеется цилиндр, который поляризован и его вектор поляризации $\vec{P}$ направлен вдоль оси цилиндра (Рис.7.7). Нужно найти напряженность поля в точке O, если у цилиндра проницаемость ε.

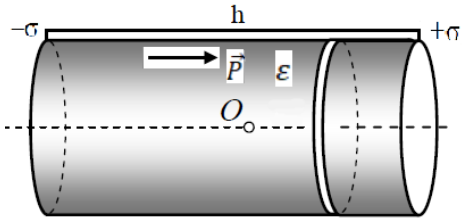


Рис.7.7. Поляризованный цилиндр с проницаемостью ε.

Решение:

Внутри такого поляризованного цилиндра зарядов не будет. Все заряды будут сосредоточены на основаниях.

То есть перейдем к эквивалентной задаче о двух заряженных дисках. Тогда напряженность электрического поля на оси диска будет равна:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Сложим две таких напряженности и получим:

$$\overrightarrow{E_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{h^2}{2} + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Электрет – такие диэлектрики, которые составлены из жестких электрических диполей, которые сохраняют в течение долгого времени свою поляризацию. Если электрет поляризован и помещен во внешнее поле, то напряженность внешнего поля практически не влияет на состояние поляризации электрета.

Задача 7.6

Имеется конденсатор с плотностями на обкладках $+\sigma$ и $-\sigma$. В этот конденсатор вносят электрет с вектором поляризации $\vec{P}$. Причем $V_{\text{элек}} = \frac{V_{\text{кон}}}{3}$. Нужно найти разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi_{12}$−?

Решение:

Электрет имеет постоянную поляризацию, значит внутри зарядов нет, но есть заряды на гранях с поверхностной плотностью σ' и $-\sigma'$. Эти заряды создает поле $\overrightarrow{E'}$, направленное как показано на Рис.7.8.

Теперь рассмотрим случай, когда мы внесли электрет в конденсатор, разность потенциалов будет равно

$$\Delta\varphi = const = E_1 d = E_2 d \rightarrow E_1 = E_2$$

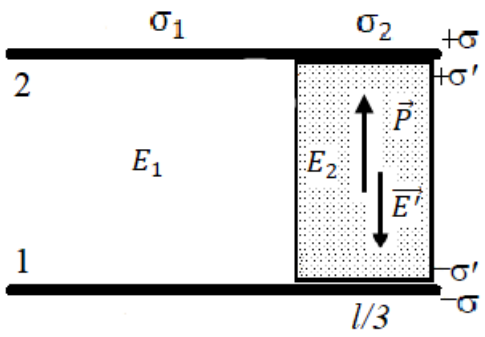


Рис.7.8. Электрет внутри плоского конденсатора.

Это возможно только если заряды перераспределились. Запишем выражения для электрических полей

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \qquad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \qquad \pm\sigma' = \pm P$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 + P}{\varepsilon_0}$$

С учетом равенства напряженностей имеем:

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 + P}{\varepsilon_0}$$

Заряд, который был на обкладках конденсатора остался прежним

$$q = \sigma S = \sigma_1 \frac{2S}{3} + \sigma_2 \frac{S}{3} \to 3\sigma = 2\sigma_1 + \sigma_2$$

В итоге приходим к конечному значению σ

$$3\sigma = 2(\sigma_2 + P) + \sigma_2 \to \sigma_2 = \sigma - \frac{2}{3}P, \qquad \sigma_1 = \sigma + \frac{1}{3}P$$

А для напряженности полей с учетом полученных выше значений имеем:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma + \frac{1}{3}P}{\varepsilon_0} = \frac{3\sigma + P}{3\varepsilon_0}$$

Теперь находим искомый ответ к задаче:

$$\Delta\varphi = E_1 d = \frac{3\sigma + P}{3\varepsilon_0} d$$

Семинар 8. Энергия и работа электрического поля.

Определим энергию попарного взаимодействия двух зарядов (Рис.8.1).

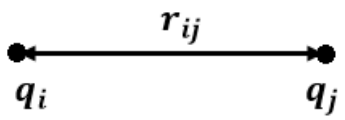


Рис.8.1. К определению энергии попарного взаимодействия.

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = q_j\widetilde{\varphi_j} = q_i\widetilde{\varphi_i} = \frac{1}{2}(q_i\widetilde{\varphi_i} + q_j\widetilde{\varphi_j})$$

Из данной формулы сразу же можно получить формулу взаимной энергии системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\,\widetilde{\varphi_i}$$

Взаимная энергия зарядов – энергия, равная работе сил кулоновского взаимодействия зарядов при разнесении этих зарядов на бесконечность. При этом не нарушается взаимное расположение элементов каждого заряда.

Собственная энергия заряда – равна работе сил кулоновского взаимодействия элементов заряда при разнесении этих элементов на бесконечность.

Полная энергия системы.

$W = W_{\text{взаим}} + W_{\text{соб}}$, причем $W_{\text{взаим}}$ либо > 0, либо < 0, а $W_{\text{соб}} > 0$.

В случае, если точечный заряд находится в электрическом поле с напряженностью $\boldsymbol{E_0}$, то энергия заряда будет равна:

$$W = q\int_r^{\infty}\overrightarrow{E_0}(r)\overrightarrow{dr} = q\varphi_o(r)$$

Если точечный диполь с дипольным моментом $\vec{\boldsymbol{p}}$ находится во внешним электрическом поле, то энергия точечного диполя во внешнем поле равна:

$$W = -(\vec{p}\cdot\vec{E})$$

Если энергия запасена в конденсаторе, то энергия конденсатора может вычислена по формуле:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

И также нам понадобится закон изменения энергии при изменении электрического состояния системы.

$$A_{\text{внешн}} + A_{\text{источника}} = \Delta W + Q$$

Если процессы квазистатические, то возникающие токи системы настолько малы, что можно пренебречь джоулевым теплом, которое выделяется при протекании этих токов в элементах:

$$Q = 0$$

$$A_{\text{внешн}} + A_{\text{источника}} = \Delta W$$

Задача 8.1

Пусть имеются четыре точечных заряда, которые расположены в вершинах квадрата (Рис.8.2). Сторона квадрата a. Требуется определить энергию взаимодействия этой системы зарядов.

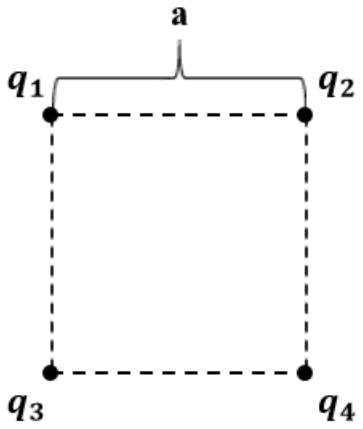


Рис.8.2. К нахождению энергии взаимодействия четырех точечных зарядов.

Решение:

Воспользуемся формулой:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Преобразуем к виду:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2 + q_2q_4 + q_3q_4 + q_1q_3}{a} + \frac{q_1q_4 + q_2q_3}{a\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left(q_1q_2 + q_2q_4 + q_3q_4 + q_1q_3 + \frac{q_1q_4 + q_2q_3}{\sqrt{2}}\right)$$

Если есть конкретные значения зарядов, стоит только подставить их в общую формулу.

Задача 8.2

Имеются три одинаковых точечных заряда q, которые находятся в вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника a. Нужно определить изменение энергии системы, если мы расположим данные заряды в линию на расстояние a (Рис.8.3).

Решение:

Запишем энергию в первом состоянии:

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}(q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1)$$

И для второго положения также:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}(q_1q_3 + q_3q_2) + \frac{1}{2a}q_1q_2\right]$$

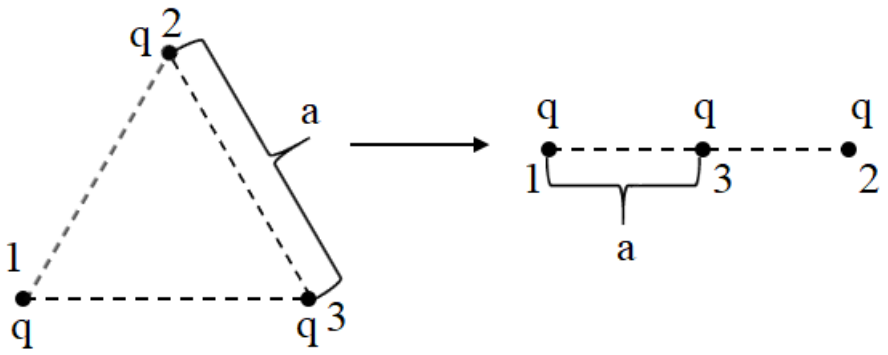


Рис.8.3. К определению изменения энергии системы трех зарядов.

Сравним данные формулы и увидим, что изменение энергии равно:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a}$$

Что является закономерным результатом.

Заряды, распределенные по объему и поверхности.

Энергия таких зарядов будет иметь вид:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV$$

где ρ – объемная плотность энергии.

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS$$

где σ – поверхностная плотность энергии.

Задача 8.3

Металлический шар радиуса R несет заряд q (Рис.8.4). Требуется определить собственную энергию шара.

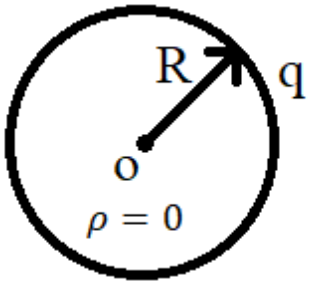


Рис.8.4. Определение собственной энергии металлического шара.

Решение:

Решение будем производить двумя способами.

I способ.

Руководствуясь формулами, найдем энергию

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS$$

Внутри шара $\rho = 0$, а все заряды находятся на поверхности шара. Причем

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

А потенциал всего шара будет равен:

$$\varphi_{\text{шара}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

Тогда получаем итоговый вид энергии:

$$W = \frac{1}{2}\frac{q}{S}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}\int_S dS = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

II способ.

Вычислим энергию электрического поля, которая создана этим зарядом во всем пространстве, где локализовано это электрическое поле.

$$W_{\text{эл.поля}} = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})dV$$

Введем понятие **объемной плотности энергии,** которая будет равна

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

Внутри шара $\vec{E} = 0$, поэтому энергия внутри шара $W = 0$. Теперь вычислим объемную плотность энергии электрического поля вне шара.

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4}$$

Чтобы посчитать всю энергию, выделим шаровой слой радиуса r и толщиной dr.

$$dW = w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{q^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

И для полной энергии проинтегрируем данное выражение:

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Первый способ является достаточно быстрым, однако второй способ более общий.

Для анализа распределения энергии вокруг заряда выделим слой вокруг заряда радиусом $2R$. И найдем энергию этого слоя.

$$W_{R-2R} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R} = \frac{W}{2}$$

Также вычислим энергию слоя от R до $3R$.

$$W_{R-3R} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{3R}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2}{3}W$$

То есть можно сделать вывод, что энергия шара сосредоточена в основном вокруг шара.

Задача 8.4

Имеется диэлектрический шар с ε и радиусом R. Он равномерно по объему заряжен зарядом q (Рис.8.5). Нужно определить энергию вне шара, внутри шара и полную энергию всей системы.

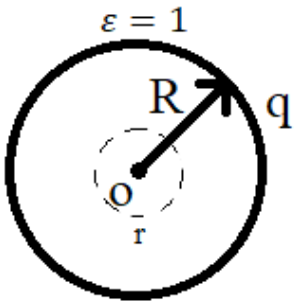


Рис.8.5. Определение энергий диэлектрического шара.

Решение:

Для начала найдем энергию вне шара W_1, что аналогично задаче 8.3.

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Внутри шара объемная плотность заряда есть

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Так как шар диэлектрический, удобно применить теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$. Выделим некоторую поверхность сферическую радиуса r.

$$D4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \to D = \frac{\rho}{3}r$$

Для вычисления энергии в шаровом слое имеем:

$$dW = wdV = \frac{\rho^2}{18\varepsilon\varepsilon_0 R^2}r^2 4\pi r^2 dr$$

И полная энергия соответственно:

$$W = \frac{\rho^2}{18\varepsilon\varepsilon_0 R^2} 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$$

Посмотрим на соотношение этих двух энергий.

$$\frac{W_{\text{вне}}}{W_{\text{внутр}}} = 5\varepsilon$$

И полная энергия всей системы найдется как сумма этих энергий:

$$W_{\text{полн}} = W_{\text{вне}} + W_{\text{внутр}} = \frac{q^2(5\varepsilon + 1)}{40\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$$

Задача 8.5

Имеется металлический шар с R_1 и Q_1 на расстоянии a находится еще один металлический шар с R_2 и Q_2 (Рис.8.6). Нужно найти собственную энергии системы двух шаров.

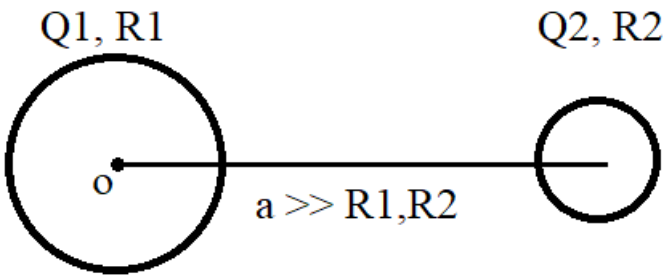


Рис.8.6. К определению энергии системы двух шаров.

Решение:

Будем искать энергию шара как работу внешних сил по созданию этой системы. Сначала будем считать, что оба шара не заряжены. И найдем работу, которую нужно совершить, чтобы зарядить первый шар зарядом Q_1. Если мы уже сообщили шару какой-то заряд q, то потенциал этого шара равен:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Для того, чтобы к шару еще перенести малый заряд dq, нужно совершить работу

$$\delta A = dq \cdot \varphi_1$$

А полная работа равна:

$$A_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \int_0^{Q_1} q dq = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Теперь в присутствии заряженного первого шара начнем заряжать также второй шар. Потенциал второго шара будет равен:

$$\varphi_{21} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Потенциал второго шара увеличился на величину:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \rightarrow \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

И общая работа, которую нужно совершить для зарядки второго шара равна:

$$A_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{Q_2}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{q}{R_2}\right)dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1 Q_2}{a} + \frac{Q_2^2}{2R_2}\right)$$

А для нахождения общей работы для зарядки обоих шаров имеем:

$$W = A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{2R_1} + \frac{Q_1 Q_2}{a} + \frac{Q_2^2}{2R_2}\right)$$

Можно сделать вывод, что собственная энергия не является аддитивной величиной, так как при сложении добавляется также энергия взаимодействия зарядов.

Задача 8.6

Имеется плоский конденсатор с ε. Он подключен к источнику тока (Рис.8.7). Нужно определить работу внешних сил, которые требуются для увеличения расстояния между обкладками конденсатора от $d \rightarrow 2d$.

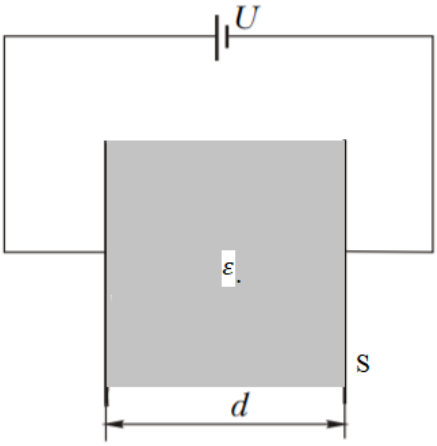


Рис.8.7. К определению работы внешних сил при увеличении расстояния между пластинами конденсатора.

Решение:

Когда конденсатор имел начальную толщину d, то его емкость была равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}$$

А емкость получившегося конденсатора будет равна

$$C_2 = \frac{C C_1}{C + C_1} = \frac{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}{d(\varepsilon + 1)} < C_1$$

Энергия, которой стал обладать конденсатор равна:

$$W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d(\varepsilon+1)} < W_1$$

А изменение энергии имеет следующий вид:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{\varepsilon^2\varepsilon_0 S U^2}{2d(\varepsilon+1)}$$

Используем закон изменения энергии в виде:

$$A_{\text{внешн.сил}} + A_{\text{ист}} = \Delta W$$

Изменение заряда конденсатора будет равно:

$$\Delta q = U(C_2 - C_1) = -\frac{U\varepsilon^2\varepsilon_0 S}{d(\varepsilon+1)} < 0$$

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = -\frac{U^2\varepsilon^2\varepsilon_0 S}{d(\varepsilon+1)}$$

Тогда для ответа на задачу проведем элементарное вычисление:

$$A_{\text{внешн.сил}} = \Delta W - A_{\text{ист}} = -\frac{\varepsilon^2\varepsilon_0 S U^2}{2d(\varepsilon+1)} + \frac{U^2\varepsilon^2\varepsilon_0 S}{d(\varepsilon+1)} = \frac{\varepsilon^2\varepsilon_0 S U^2}{2d(\varepsilon+1)} > 0$$

Задача 8.6 (случай 2).

Пусть теперь после зарядки конденсатора мы отключаем его от источника питания. И только после этого поднимаем верхнюю обкладку конденсатора. Нужно определить какую работу должны совершить внешние силы при увеличении расстояния в этом случае.

Решение:

Заряд остается постоянным на обкладках конденсатора, который равен

$$q = C_1 U = const$$

Работа источника равна нулю. Поэтому из закона сохранения получим:

$$A_{\text{внешн.сил}} = \Delta W = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{U^2}{2}\frac{C_1}{C_2}(C_1 - C_2) = \frac{\varepsilon^2\varepsilon_0 S U^2}{2d}$$

Семинар 9. Пондермоторные силы в электрическом поле.

Пондермоторные силы – такие силы, которые действуют на тела в электромагнитном поле. Если заряды жестко связаны с телом и распределены в объеме тела, то на элемент объемом dV этого тела действует сила

$$d\vec{F} = \rho\vec{E}dV, \qquad \overrightarrow{f_V} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{E} = -\rho\, grad\varphi$$

Если заряд распределён по поверхности с σ, то на площадь dS действует сила

$$d\vec{F} = \sigma dS\vec{E}, \qquad \overrightarrow{f_S} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma\vec{E}$$

А в случае нахождения диполя в электрическом поле, имеем:

$$\vec{F} = p_x\frac{\partial\overrightarrow{E_0}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\overrightarrow{E_0}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\overrightarrow{E_0}}{\partial z} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\overrightarrow{E_0}$$

Кроме того на дипольный момент будет действовать момент силы

$$\vec{M} = [\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{E_0}]$$

Для вычисления силы, которая действует на заряженные тела существует способ, основанный на связи силы с энергией.

Если все заряды сохраняются при виртуальных перемещениях $q_i = const$, то

$$F_{x_j} = -\left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{q=const}$$

В случае, когда виртуальные перемещения происходят при $\varphi_i = const$, то

$$F_{x_j} = \left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{\varphi=const}$$

Кроме того, пондермоторные силы можно вычислить с помощью **максвелловских сил притяжений и отталкивания (Рис.9.1).**

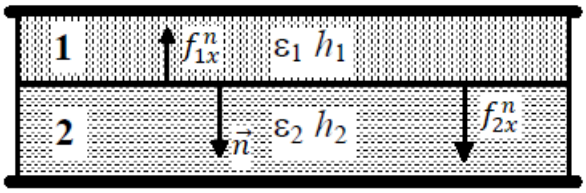


Рис.9.1. К определению максвелловских сил.

Получается, что силы как бы растягивают границу в свою сторону.

$$f_{1x}^n = -w_1^n = -\frac{D_{1n}E_{1n}}{2}$$

$$f_{2x}^n = w_2^n = \frac{D_{2n}E_{2n}}{2}$$

Причем сохраняется $D_{1n} = D_{2n}$, а вектор $E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$, тогда получаем

$$f_x^n = \frac{D_n^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

Теперь рассмотрим максвелловские силы давления. Для этого также рассмотрим две среды с границей раздела, но теперь компонента электрического поля является тангенциальной к границе раздела сред. То есть вычисления будут выглядеть следующим образом:

$$f_{1x}^{\tau} = w_1^{\tau} = \frac{D_{1\tau}E_{1\tau}}{2}$$

$$f_{2x}^{\tau} = -w_2^{\tau} = \frac{D_{2\tau}E_{2\tau}}{2}$$

Причем сохраняется $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, а вектор $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, тогда получаем

$$f_x^{\tau} = \frac{\varepsilon_0 E_\tau^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Задача 9.1

Имеется плоский конденсатор, который подсоединен к источнику тока. В этом конденсаторе имеется пластина из диэлектрика с ε. Толщина пластины d_1, а воздушных зазоров d_2 (Рис.9.2). Нужно найти силу, действующую на каждую из пластин конденсатора.

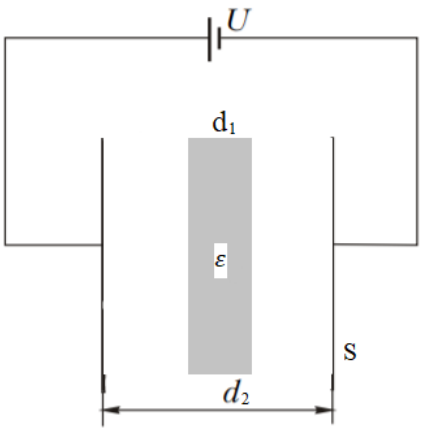


Рис.9.2. К определению силы, действующей на пластины конденсатора.

Решение:

На пластинах есть некоторый заряд q. Пластина находится в электрическом поле и, следовательно, на заряд будет действовать сила

$$F_1 = qE_1$$

Рассмотрим напряженности полей, созданных поляризационными зарядами в воздушных зазорах

$$|E_{+\sigma'}| = |E_{-\sigma'}| = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$$

Тогда имеем, что

$$U = Ed_2 + \frac{E}{\varepsilon}d_1 \to E = \frac{\varepsilon U}{d_1 + \varepsilon d_2}$$

$$E_1 = \frac{E}{2}$$

Чтобы теперь найти силу, действующую на пластину, вычислим заряд

$$q = CU, \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \to C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d_2 + d_1}$$

И сила, действующая на одну из пластин равна

$$F_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d_2 + d_1} \cdot \frac{\varepsilon U}{2(\varepsilon d_2 + d_1)} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\varepsilon U}{\varepsilon d_2 + d_1}\right)^2$$

Задача 9.2

Имеется плоский конденсатор, расстояние между обкладками d, а сами они представляют собой квадрат со стороной a. Он подсоединен к источнику постоянного напряжения (Рис.9.3). Какую силу нужно приложить к пластине конденсатора, чтобы сдвинуть эту пластину параллельно второй обкладки, не изменяя расстояние до обкладки?

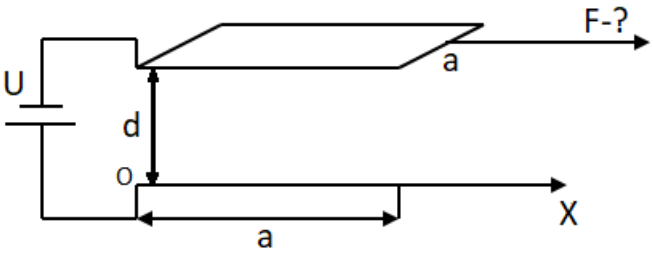


Рис.9.3. К определении силы, которую нужно приложить к пластине конденсатора.

Решение:

Введем ось X в направлении движения пластины. Когда мы сдвигаем пластину на расстояние x получаем, что в части, где нет пластины, там нет и конденсатора. И емкость стала:

$$C = \frac{\varepsilon_0(a - x)a}{d}$$

Энергия такой системы будет равна:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0(a - x)aU^2}{2d}$$

Найдем силу по направлению X:

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = -\frac{\varepsilon_0 aU^2}{2d}$$

Понятно, что сила направлена против оси X, то есть электрическое поле препятствует движению пластины. И чтобы ее сдвинуть, внешняя сила должна быть равна:

$$F_{\text{внеш}} = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2d}$$

Задача 9.3

Имеется конденсатор, также подсоединенный к источнику постоянного напряжения. Пластины конденсатора имеют вид прямоугольника сторонами a и b. Частично внутрь конденсатора вдвинута пластина диэлектрика с ε. Нужно определить силу, с которой диэлектрик втягивается в конденсатор.

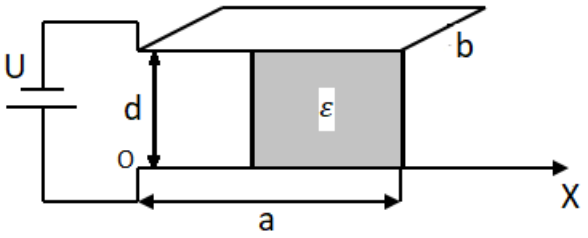


Рис.9.4. К определению силы, с которой диэлектрик втягивается в конденсатор.

Решение:

Пусть диэлектрик сдвинут на расстояние x по отношению к началу координат. Тогда найдем емкости данных конденсаторов: воздушного и заполненного диэлектриком.

$$C_{\text{возд}} = \frac{\varepsilon_0 b x}{d}, \qquad C_{\text{диэл}} = \frac{\varepsilon_0 b \varepsilon (a - x)}{d}$$

И общая емкость будет равна

$$C = C_{\text{возд}} + C_{\text{диэл}} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}[x + \varepsilon(a - x)] = \frac{\varepsilon_0 b}{d}[\varepsilon a - (\varepsilon - 1)x]$$

Теперь определим силу, действующую на пластину

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \left| W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 b U^2}{2d}[\varepsilon a - (\varepsilon - 1)x] \right| = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b U^2}{2d}$$

Получается, что наша пластина втягивается внутрь конденсатора с данной силой.

Задача 9.4

Имеется плоский конденсатор, нижнюю пластину которого поместили в диэлектрическую жидкость с ε и ρ (Рис.9.5). После зарядки конденсатора источник тока отключают. За счет краевых эффектов на границе раздела воздух-жидкость возникает неоднородное поле. Происходит возникновение максвелловских сил натяжения. Поэтому жидкость будет втягиваться внутрь конденсатора. Нужно найти на какую высоту h поднимется жидкость в конденсаторе.

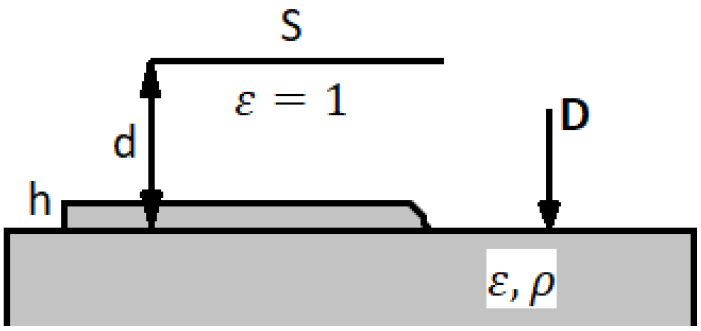


Рис.9.5. К определению высоты поднятия жидкости в конденсаторе.

Решение:

Задачу можно решить двумя способами.

<u>I способ.</u>

Направим ось X вверх перпендикулярно пластинам конденсатора. В данном случае, когда жидкость частично втянулась в конденсатор, то образовалось два конденсатора. Один воздушный, а другой диэлектрический. Первоначальная емкость была равна:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

А теперь найдем общую емкость при поднятии жидкости внутрь конденсатора.

$$C_{\text{возд}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-x}, \qquad C_{\text{диэл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{\text{возд}}} + \frac{1}{C_{\text{диэл}}} = \frac{\varepsilon(d-x)+x}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \to C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)x} > C_0$$

Далее найдем энергию при условии, что $q = const$.

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 S^2 \left[d - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)x\right]}{2\varepsilon_0 S}$$

Теперь вычислим силу, которая действует на жидкость в конденсаторе

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\sigma^2 S^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}[\varepsilon - 1] = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon - 1)$$

Так как сила получилась положительной, то происходит втягивание жидкости. До каких пор происходит втягивание жидкости? Пока данная сила не будет уравновешена весом жидкости в конденсаторе.

$$mg = \rho h S g$$

$$\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon - 1) = \rho h S g \to h = \frac{\sigma^2}{2\rho g \varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon - 1)$$

<u>II способ.</u>

Можно решить данную задачу с помощью максвелловских сил. Так как вектор $\vec{D}$ имеет нормальную компоненту по отношению к границе раздела диэлектрика и воздуха.

Значит на границу раздела действуют максвелловские силы натяжения и мы можем использовать формулу:

$$f_x^n = \frac{1}{2\varepsilon_0} D^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon - 1)$$

Так как $D = \sigma$ в конденсаторе, то

$$f_x^n = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon - 1)$$

Жидкость будем подниматься до тех пор, пока плотность поверхностного натяжения не уравновесится силой гидростатического давления.

$$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon - 1) = \rho g h \to h = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 g\rho}(\varepsilon - 1)$$

Задача 9.5

Плоский конденсатор подключен к источнику напряжения. Концы конденсатора погружены в диэлектрическую жидкость с ε и ρ (Рис.9.6). На какую высоту поднимется жидкость?

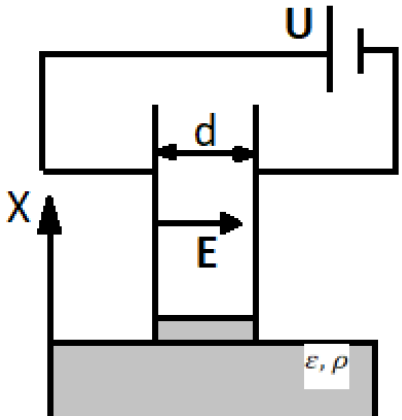


Рис.9.6. К определению высоты поднятия жидкости в вертикальном конденсаторе.

Решение:

На границу раздела будут действовать силы максвелловского давления. Для плотности сил давления запишем:

$$f_x^\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\varepsilon - 1)$$

$$E = \frac{U}{d}, \qquad f_x^\tau = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}(\varepsilon - 1)$$

И в случае уравновешивания плотности силы гидростатическим давлением, имеем

$$\frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}(\varepsilon - 1) = \rho g h \to h = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2g\rho d^2}(\varepsilon - 1)$$

Задача 9.6

Имеется длинный провод, который заряжен с линейной плотностью τ. На расстоянии d от этого провода находится электрический диполь с $\vec{p}$ и составляет с проводом угол θ (Рис.9.7). Нужно найти силу, которая действует на диполь и момент сил.

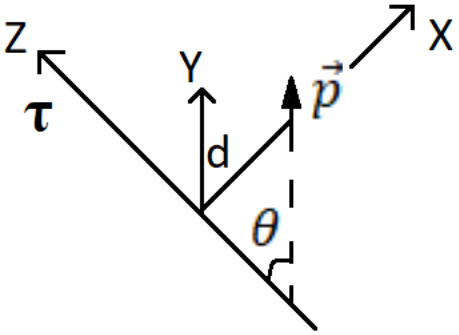


Рис.9.7. К вычислению силы, действующей на диполь и момента сил.

Решение:

Электрическое поле заряженной нити мы уже знаем

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\vec{r}}{r}$$

Введем оси, как показано на Рис.9.7. Используем формулу для силы, действующей на диполь

$$\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$$

$$p_x = p\sin\theta, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = p\cos\theta$$

$$\vec{E} = \left\{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}, 0, 0\right\}$$

Тогда сила имеет только компоненту по X.

$$\vec{F} = \left\{p\sin\theta\left(-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x^2}, 0, 0\right)\right\}$$

Диполь всегда втягивается в область более сильного поля.

А для нахождения момента используем известную формулу.

$$\vec{M} = [\vec{p}\,\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ p_x & 0 & p_z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath}p_z E_x = p\cos\theta\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{\jmath}$$

Поле нити поворачивает диполь так, чтобы он оказался перпендикулярным нити. Тогда вектора $\vec{p}$ и $\vec{E}$ оказываются со направленными и момент сил перестает действовать.

Семинар 10. Токи в сплошных проводящих средах.

Электрический ток – направленное движение заряженных частиц.

Для характеристики тока вводят понятие плотности объемного тока

$$\vec{j} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i q_i}{\Delta V} = \rho \vec{v}$$

Также вводят понятие силы тока

$$I = \int_S \vec{j} \overrightarrow{dS}, \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

Для того, чтобы вычислять сопротивление среды применим закон Ома в интегральной и дифференциальной формах

$$U = IR \to R = \frac{U}{I}, \qquad \vec{j} = \lambda \vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E} \to \vec{E} = \rho \vec{j}$$

Для цилиндрического проводника, длина которого L, а площадь поперечного сечения S, сопротивление можно выразить как

$$R = \frac{\rho L}{S}$$

Также стоит знать, что при последовательном соединений сопротивлений имеем общее значение

$$R = \sum_i R_i$$

И в случае параллельных соединений

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Когда ток течет по сопротивлению происходит выделение тепла в среду, которое может быть подсчитано по закону Ома

$$\Delta Q = UI\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2 R \Delta t$$

Это закон Джоуля-Ленца, записанный в интегральной форме. Его также можно записать и в дифференциальной форме

$$q = \rho j^2,$$

где q – количество тепла, которое выделяется в единицу объема за единицу времени.

Задача 10.1

Имеется плоский конденсатор, который заполнен двумя слоями несовершенного диэлектрика. Диэлектрик по отдельности обладает ε_1 и удельным сопротивлением ρ_1 (Рис.10.1). Конденсатор подсоединен к источнику с U. Нужно найти сопротивление среды между обкладками конденсатора и заряды на обкладках.

Решение:

Так как в установившемся режиме ток является постоянной величиной, площади пластин вдоль всего конденсатора одинаковы, поэтому можно сказать, что $j_1 = j_2 = j$

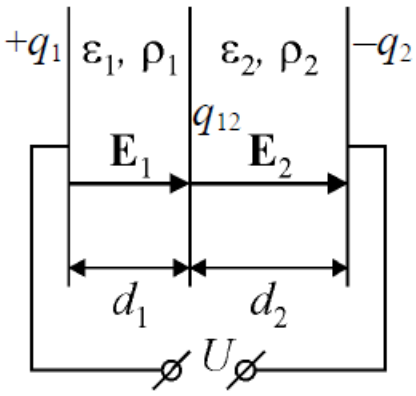


Рис.10.1. К определению сопротивления среды между обкладками конденсатора.

Запишем значения напряженностей в конденсаторе.

$$E_1 = \rho_1 j, \qquad E_2 = \rho_2 j$$

Разность потенциалов складывается из падения напряжения в первом слое и падения напряжения во втором слое

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = j(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2) \rightarrow j = \frac{U}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}$$

Полный ток в цепи будет равен

$$I = jS = \frac{US}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}$$

И для значения сопротивления имеем

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{US}(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2) = \frac{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}{S}$$

На границе раздела двух сред имеем

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

На обкладках получим соответственно

$$\sigma_1 = D_1, \qquad \sigma_2 = -D_2$$

С учетом материального уравнения $E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$ запишем выражения для напряженности полей

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0}, \qquad E_2 = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0}$$

Теперь приравниваем получившиеся значения и выражаем поверхностные плотности зарядов

$$E_1 = \rho_1 j = \frac{\rho_1 U}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0\rho_1 U}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}$$

$$E_2 = \rho_2 j = \frac{\rho_2 U}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)} = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_2 = -\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0\rho_2 U}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}$$

И заряды получаются равны

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0\rho_1 US}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}, \qquad q_2 = -\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0\rho_2 US}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}$$

Почему заряды не равны по модулю? Во время зарядки конденсатора часть свободного заряда скапливается на границе раздела двух этих сред. Там возникает заряд с поверхностной плотностью σ_{12}

$$\sigma_{12} = D_2 - D_1 = \sigma_2 - \sigma_1 = -\frac{(\rho_1\varepsilon_1 - \varepsilon_2\rho_2)\varepsilon_0 U}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}$$

Тогда модуль заряда q_{12} будет равен разнице модулей зарядов q_1 и q_2.

$$q = max(|q_1|, |q_2|)$$

Задача 10.2

Имеется сферический конденсатор, радиусы обкладок которого r_1 и r_2. Между обкладками находится диэлектрик с ε и ρ (Рис.10.2). Между внутренней и внешней обкладками подключен источник постоянного напряжения. Нужно найти сопротивление R среды между обкладками.

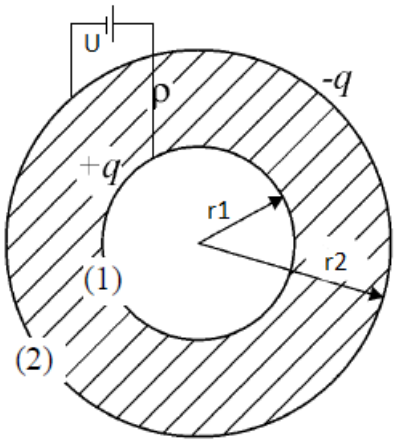


Рис.10.2. К определению сопротивления среды между обкладками сферического конденсатора.

Решение:

<u>I способ.</u>

Мы полагаем, что на внутренней обкладке находится заряд q. На расстоянии r от центра этих обкладок напряженность будет равна

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

Далее используем закон Ома в дифференциальной форме.

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{q}{4\pi\rho\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

Теперь вычислим разность потенциалов между обкладками

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Для нахождения полного тока имеем

$$I = \int_S jdS = \frac{q}{4\pi\rho\varepsilon_0\varepsilon r^2}\int_S dS = \frac{q4\pi r^2}{4\pi\rho\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q}{\rho\varepsilon_0\varepsilon}$$

И, наконец, сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{q\rho\varepsilon_0\varepsilon}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon q}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

<u>II способ.</u>

Напряжение будет равно

$$U = \frac{q}{C}$$

Используя граничные условия для вектора $\vec{D}$, имеем, что в конденсаторе $\sigma = D$

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E, \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Полный ток равен

$$I = \int jdS = \frac{1}{\rho\varepsilon\varepsilon_0}\oint \sigma dS$$

И сопротивление по закону Ома равно

$$R = \frac{q}{I} = \frac{q\rho\varepsilon\varepsilon_0}{Cq} = \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_0}{C}$$

$$RC = \rho\varepsilon\varepsilon_0$$

Данное соотношение верно для всех идеально проводящих тел, между которыми находится однородная проводящая среда с удельным сопротивлением ρ.

Теперь вспомним, что ёмкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}$$

Тогда в итоге получим

$$R = \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Эту формулу можно использовать для того, чтобы найти сопротивление бесконечной среды, в которую помещен заряженный металлический шарик радиуса a.

Используем полученный результат положив, $r_2 \to \infty$, тогда

$$R = \frac{\rho}{4\pi a} = \left|\lambda = \frac{1}{\rho}\right| = \frac{1}{4\pi\lambda a}$$

Задача 10.2*

Имеется цилиндрический конденсатор, у которого радиусы обкладок R_1 и R_2. Он заполнен диэлектрической средой с ε и ρ (Рис.10.3). Токи текут радиально. Нужно найти сопротивление, приходящееся на единицу длины такого цилиндра.

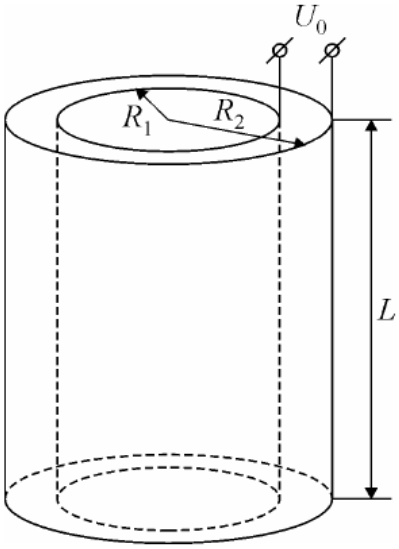


Рис.10.3. К нахождению сопротивления среды в цилиндрическом конденсаторе.

Решение:

Для решения используем выше выведенную формулу

$$RC = \rho\varepsilon\varepsilon_0$$

$$R = \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_0}{C} = \frac{\rho}{2\pi} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Задача 10.3

Имеется цилиндр (Рис.10.4). У него $\rho = \alpha r$. Нужно найти сопротивление единицы длины такого цилиндра при условии, что ток протекает вдоль оси цилиндра.

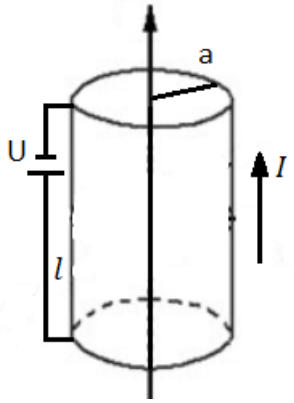


Рис.10.4. К нахождению сопротивления единицы длины.

Решение:

I способ.

Разобьем этот цилиндр на маленькие цилиндрические трубки, радиус одной из трубок r и толщина dr. Внутри каждой такой трубки можно считать, что $\rho = const$. Тогда плотность тока вдоль одной трубки будет равна

$$j = \frac{E}{\rho(r)} = \frac{U}{l\rho(r)}$$

Если на внутренней обкладке находится заряд с линейной плотностью τ, то тогда между обкладками создается электрическое поле

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$j = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho(r)r}$$

И полный ток, протекающий по трубке получится

$$dI = jdS = j\,2\pi r dr = \frac{U}{l\alpha r}2\pi r dr = \frac{U}{l\alpha}2\pi dr$$

$$I = \int_0^a dI = \frac{U}{l\alpha}2\pi a$$

Тогда сопротивление находится путем

$$R = \frac{U}{I} = \frac{Ul\alpha}{U2\pi a}, \qquad \text{при } l = 1 \to R = \frac{\alpha}{2\pi a}$$

II способ.

Также разобьем весь цилиндр на малые трубочки. И каждая из трубочек будет обладать малым сопротивлением. Все они соединены параллельно. Тогда общее сопротивление равно

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}, \qquad \Lambda = \frac{1}{R}$$

Сопротивление отдельной трубочки вычисляем как

$$R_{\text{цилиндр}} = \frac{\rho l}{S}, \qquad d\Lambda = \frac{dS}{\rho l} = \frac{2\pi r dr}{\rho l} = \frac{2\pi dr}{\alpha l}$$

И общая проводимость всего цилиндра равна

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\alpha l}\int_0^a dr = \frac{2\pi a}{\alpha l}$$

$$R = |l = 1| = \frac{\alpha}{2\pi a}$$

Задача 10.4

Имеется цилиндрический конденсатор (Рис.10.5). Между обкладками этого цилиндра находится среда с $\varepsilon = 1$ и $\rho = const$. Нужно найти сопротивление единицы длины такого цилиндра при радиальном растекании тока.

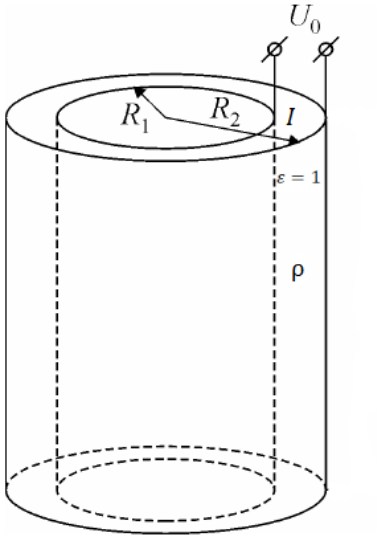


Рис.10.5. К определению единицы длины сопротивления цилиндра.

Решение:

Разобьем пространство между цилиндрами на маленькие цилиндрические трубки. Получается, что данные трубки имеют какие-то сопротивления и соединены они последовательно. Тогда общее сопротивление находим как

$$R = \sum_i R_i$$

Сопротивление отдельной трубки равно

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r l}$$

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} ln \frac{R_2}{R_1}, \text{при } l = 1 \rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi} ln \frac{R_2}{R_1}$$

Задача 10.5

Пусть имеется сферический конденсатор с радиусами обкладок r_1 и r_2. Нужно найти мощность тепловых потерь при протекании тока между обкладками, если источник напряжения подключен как показано на Рис.10.6.

Решение:

<u>I способ.</u>

Основан на применении закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. А именно

$$q = \rho j^2$$

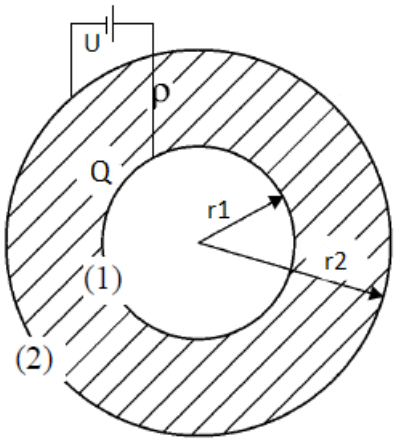


Рис.10.6. К определению мощности тепловых потерь сферического конденсатора.

Пусть на внутренней обкладке находится заряд Q. Тогда на расстоянии r от центра сфер, напряженность электрического поля будет равна

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \rho r^2}$$

Плотность тока зависит от расстояния до центра сфер. Поэтому для того чтобы найти полную мощность нужно разбить эти сферы на сферические слои, радиусом r и толщиной dr.

$$dP = qdV = \rho\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\rho^2 r^4}4\pi r^2 dr = \frac{Q^2 dr}{4\pi{\varepsilon_0}^2\rho r^2}$$

$$P = \int_{r_1}^{r_2}\frac{Q^2 dr}{4\pi{\varepsilon_0}^2\rho r^2} = \frac{Q^2}{4\pi{\varepsilon_0}^2\rho}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Найдем заряд Q, для этого используем формулу

$$Q = CU, \qquad C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

И, наконец, имеем

$$P = \frac{4\pi U^2}{\rho\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{4\pi U^2 r_1 r_2}{\rho(r_2 - r_1)}$$

<u>II способ.</u>

Используем формулу мощности тепловых потерь в интегральной форме.

$$P = \frac{U^2}{R}, \qquad R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$P = \frac{4\pi U^2 r_1 r_2}{\rho(r_2 - r_1)}$$

<u>III способ.</u>

Применяем формулу $RC = \rho\varepsilon\varepsilon_0$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 C}{\rho\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{4\pi U^2 r_1 r_2}{\rho(r_2 - r_1)}, \qquad R = \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_0}{C}$$

Задача 10.6

Имеется металлический шар радиусом a, на который помещен заряд q_0. Этот шар находится в безграничной среде с проводимостью λ (Рис.10.7). Нужно найти через какое время Δt заряд шара уменьшится в 2 раза и какое количество теплоты Q выделится в проводящей среды пока шар полностью не разрядится.

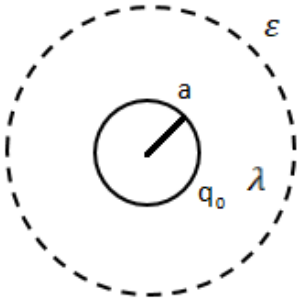


Рис.10.7. К определению количества теплоты, выделенного в среду.

Решение:

Если шар находится в проводящей среде, то мы можем написать, что

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad j = \lambda E$$

$$I = \int j dS = \int \lambda E dS = \lambda \oint_S E dS = \lambda \oint \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} dS = \frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} \oint D\, dS = \frac{\lambda q}{\varepsilon\varepsilon_0} = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} dt \to ln\frac{q}{q_0} = -\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} t$$

$$t = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda} ln\frac{q}{q_0}$$

Тогда заряд шара уменьшится в два раза через

$$t_{1/2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda} \ln 2$$

Для ответа на второй вопрос выразим заряд

$$q = q_0\, e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} t}$$

Чтобы посчитать количество теплоты воспользуемся формулой

$$\delta Q = I^2 R \delta t$$

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0}t}$$

И полное количество теплоты равно

$$Q = \int_0^\infty {q_0}^2\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)^2 e^{-\frac{2\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0}t}\frac{1}{4\pi\lambda a}dt = \frac{{q_0}^2\lambda}{4\pi a(\varepsilon\varepsilon_0)^2}\left(-\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2\lambda}e^{-\frac{2\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0}t}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{{q_0}^2}{8\pi a\varepsilon\varepsilon_0}$$

Семинар 11. Расчет цепей постоянного тока.

Сторонние силы – силы не электростатического происхождения, которые действуют на заряды в цепях.

Вводится понятие напряженности поля сторонних сил.

$$\vec{E}^{\text{ст}} = \frac{\vec{F}^{\text{ст}}}{q}$$

Кроме того, **напряжение сторонних сил** или **ЭДС** равно

$$\varepsilon = \int \vec{E}^{\text{ст}}\, \overrightarrow{dl}$$

Для неразветвленной цепи запишем закон Ома

$$IR = \varepsilon$$

Также существует обобщенный закон Ома для участка цепи

$$IR_{12} = U_{12} + \varepsilon, \qquad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Первое правило Кирхгофа.

В точке разветвления токов алгебраическая сумма этих токов равна нулю.

$$\sum_i I_i = 0$$

Второе правило Кирхгофа.

Если мы выделим в нашей цепи замкнутый контур, то сумма падения напряжения равна сумме ЭДС, которые входят в этот замкнутый контур.

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \varepsilon_i$$

Подробное описание применения правил находится в лекции на портале teach-in.

Простой контур – такой контур, внутри которого нет других контуров.

Метод контурных токов.

Вся разветвленная схема разбивается на систему простых контуров. В каждом из таких контуров изображается как идет ток единый по всему контуру. И затем записываются уравнения по второму правилу Кирхгофа.

Метод узловых потенциалов.

Он основан на вычислении потенциалов всех узлов, приняв потенциал какого-то одного узла равным нулю.

Закон Джоуля-Ленца.

$$N = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

Задача 11.1

Имеется схема, изображенная на Рис.11.1. Необходимо определить ток через резистор R_3.

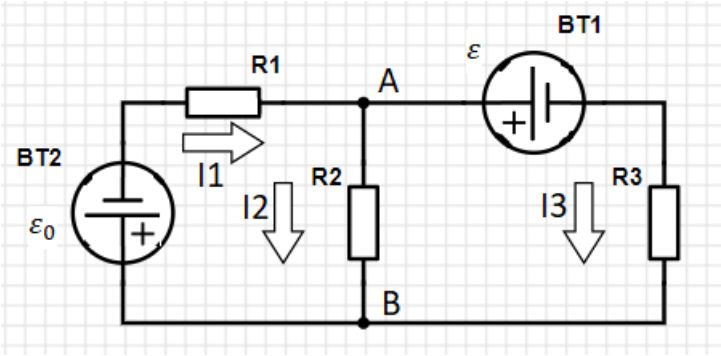


Рис.11.1. Схема цепи. К определению силы тока через резистор R_3

Решение:

Начинаем с расстановки токов как показано на Рис.11.1. У нас имеются два узла A и B. Для узла A напишем первое правило Кирхгофа.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Теперь выберем контуры для записи второго правила Кирхгофа. Обход будет по часовой стрелки $\varepsilon_0 \to A \to B$:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = -\varepsilon_0$$

Для контура $A \to \varepsilon \to B$ также запишем второе правило Кирхгофа, обход также проводим по часовой стрелке:

$$I_3 R_3 - I_2 R_2 = -\varepsilon$$

Получилась система трех уравнений. Неизвестных тоже три величины. Решаем эту систему и получаем

$$I_2 R_2 = I_3 R_3 + \varepsilon$$
$$I_1 R_1 + I_3 R_3 + \varepsilon = -\varepsilon_0$$

Далее выразим по отдельности токи I_1 и I_2

$$I_1 = \frac{-\varepsilon_0 - \varepsilon}{R_1} - I_3 \frac{R_3}{R_1}$$
$$I_2 = I_3 \frac{R_3}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_2}$$

Теперь подставляем все в одно уравнение первого правила Кирхгофа

$$\frac{-\varepsilon_0 - \varepsilon}{R_1} - I_3 \frac{R_3}{R_1} - I_3 \frac{R_3}{R_2} - \frac{\varepsilon}{R_2} - I_3 = 0$$

И, наконец, получим

$$I_3 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) = -(\varepsilon_0 + \varepsilon) R_2 - \varepsilon R_1$$
$$I_3 = -\frac{\varepsilon R_2 + \varepsilon_0 R_2 + \varepsilon R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = -\frac{\varepsilon_0 R_2 + \varepsilon (R_2 + R_1)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Так как все значения сопротивления величины положительные, то ток I_3 получился отрицательным, что говорит нам о неправильно выбранном направлении протекания тока на Рис.11.1.

Задача 11.2

Имеется следующее соединений резисторов (Рис.11.2). Необходимо найти значение сопротивления этой схемы. R_{AB}−?

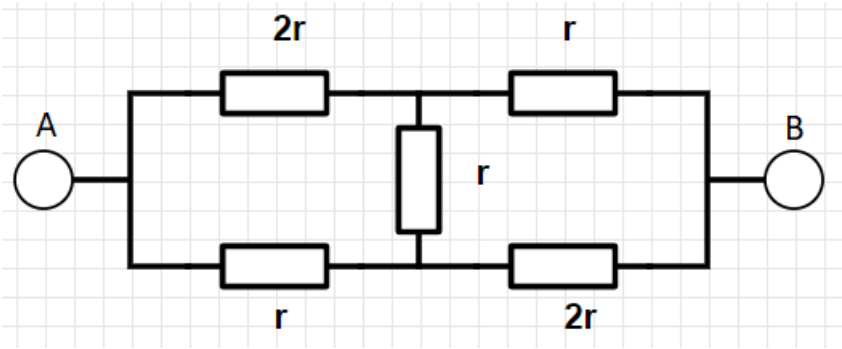


Рис.11.2. К определению сопротивления между точками цепи A и B.

Решение:

Данная цепь эквивалентна схеме, когда к точкам A и B подключена ЭДС (Рис.11.3). То есть если все сопротивление обозначить за R_{AB}, то получается еще легче. Ток будет протекать через источник ЭДС и наше общее сопротивление R_{AB} и для его нахождения используем формулу

$$R_{AB} = \frac{\varepsilon}{I}$$

Если решать задачу с применением правил Кирхгофа, то пришлось бы вводить пять токов через каждый резистор и получить пять уравнений. Однако, данная схема распадается на простые контуры. Поэтому задачу решим методом контурных токов.

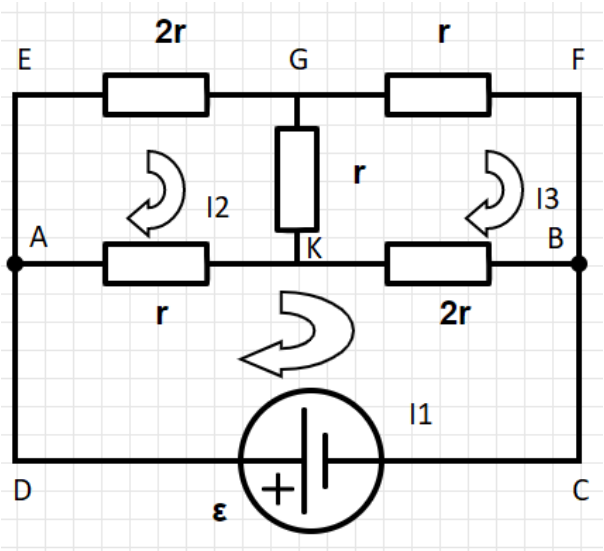


Рис.11.3. Эквивалентная схема к задаче 11.2 с учетом ЭДС.

Выберем контур $ABCD$ и направление обхода по часовой стрелке.

$$2r(I_1 - I_3) + r(I_1 - I_2) = \varepsilon$$

Теперь возьмем контур $DEFC$:

$$2rI_2 + rI_3 = \varepsilon$$

И для контура $AEGK$ имеем

$$2rI_2 + r(I_2 - I_3) + r(I_2 - I_1) = 0$$

Снова получена система трех линейный уравнений относительно трех токов. Решать мы ее не будем, так как задача тривиальна.

Выпишем получившийся ответ:

$$I_1 = \frac{5\varepsilon}{7r} \to R_{AB} = \frac{\varepsilon}{I_1} = \frac{7}{5}r$$

Задача 11.3

Имеется схема, изображенная на Рис.11.4. При каком сопротивлении R второй источник будет скомпенсирован, то есть ток через него течь не будет.

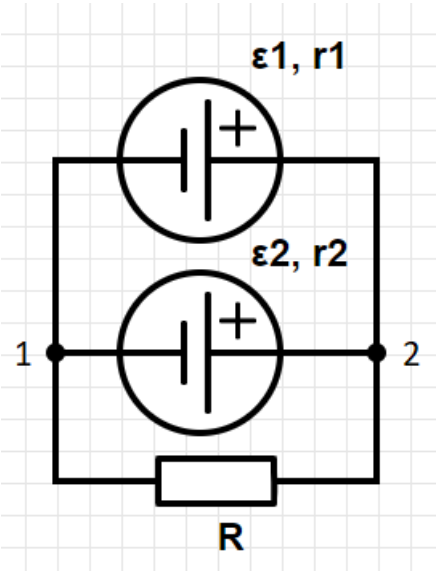


Рис.11.4. К определению сопротивления R, которое скомпенсирует второй источник напряжения.

Решение:

Запишем обобщенный закон Ома для участка $1-2$.

$$I_1 r_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$$

Если ток $I_2 = 0$, тогда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_2$$

Получаем при подстановке

$$I_1 r_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1}$$

И само значения тока равно

$$I_1 = I_R = \frac{\varepsilon_1}{r_1 + R}$$

Приравниваем два выражения и получаем

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{r_1 + R}$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)r_1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R = \varepsilon_1 r_1$$

$$R = \frac{r_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

Задача 11.4

Имеется схема, изображенная на Рис.11.5. Необходимо найти общее сопротивление R_{AB}–?

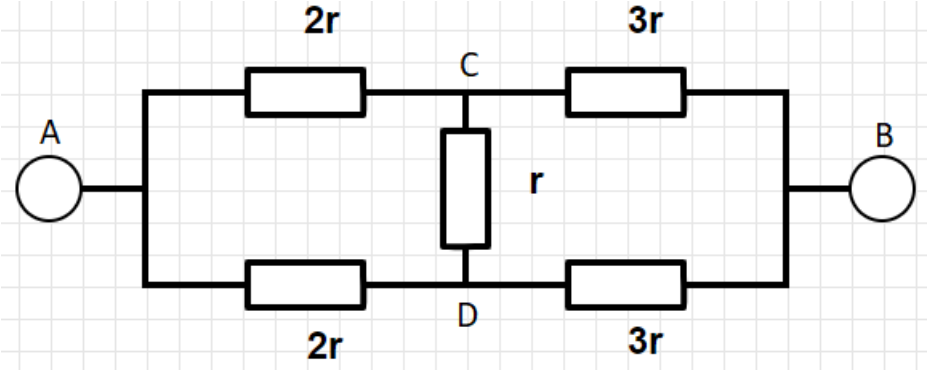


Рис.11.5. К определению общего сопротивления участка цепи к задаче 11.4.

Решение:

Данная схема является симметричной. Поэтому мы можем сказать, что

$$\varphi_C = \varphi_D$$

Тогда поступим следующим образом.

<u>I способ.</u>

Убираем резистор между точками C и D, так как ток по нему не течет. В данном случае имеем два параллельно соединенных сопротивления по $5r$. Тогда общее значение будет равно

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{5r} + \frac{1}{5r} \rightarrow R_{AB} = \frac{5}{2}r$$

<u>II способ.</u>

Так как потенциал точек C и D одинаковый, мы соединим эти точки. Получилось два последовательных соединенных сопротивления с общим сопротивлением r и $\frac{3}{2}r$. И общее также равно

$$R_{AB} = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r$$

Задача 11.5

Имеется схема, изображенная на Рис.11.6. Необходимо найти ток I, который течет через резистор r_2.

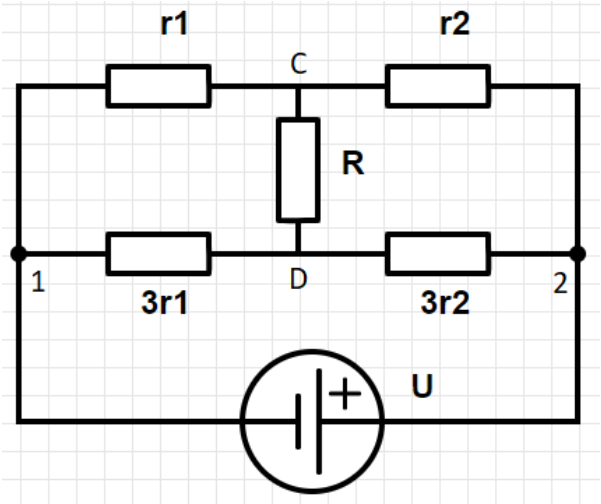


Рис.11.6. К определению тока через резистор r_2 задачи 11.5

Решение:

К точкам 1 и 2 подается напряжение, которое делится между резисторами r_1, r_2 и $3r_1, 3r_2$. Можно сказать, что

$$\varphi_C = \varphi_D$$

Поэтому можно просто убрать резистор R. Тогда проведем следующие вычисления

$$I_{r_2} = \frac{U}{r_1 + r_2}$$

$$U_{r_2} = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2}$$

Давайте узнаем какой ток будет протекать через резистор $3r_2$

$$I_{3r_2} = \frac{U}{3r_1 + 3r_2}$$

$$U_{3r_2} = I_{3r_2}\, 3r_2 = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2}$$

Задача 11.6.а

Имеется схема, изображенная на Рис.11.7. Необходимо найти сопротивление сетки между точками A и B.

Решение:

Сначала преобразуем схему как показано на Рис.11.7. Схема приобретает вид, где центр схемы разъединен на две точки O_1 и O_2. Потенциалы этих точек одинаковы, так как схема симметрична.

$$\varphi_{O_1} = \varphi_{O_2}$$

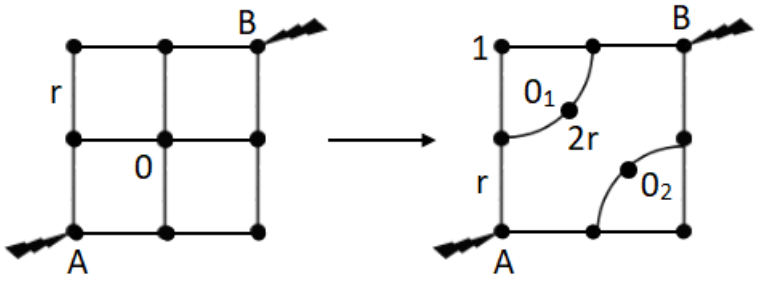


Рис.11.7. Сетка к задаче 11.6.а. К нахождению сопротивления между точками A и B.

И рассчитать сопротивление преобразованной схемы достаточно просто.

В углах сетки сопротивления соединены параллельно и их общее сопротивление равно

$$R_{||} = r$$

В итоге получаем три последовательных соединения

$$R_{A1B} = r + r + r = 3r$$

Сопротивление нижней части такое же. Поэтому искомое сопротивление равно

$$R_{AB} = \frac{3}{2}r$$

Задача 11.6.б

Теперь изменим геометрию схемы (Рис.11.8). Необходимо найти сопротивление схемы между точками A и B.

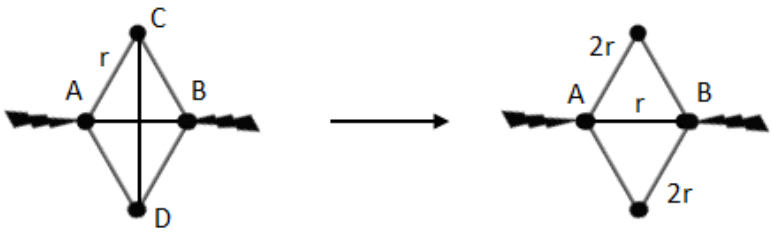


Рис.11.8. Схема к задаче 11.6.б. К нахождению сопротивления между точками A и B.

Решение:

Потенциалы точек C и D равны в силу симметрии схемы. Поэтому можно убрать вертикальный провод внутри ромба.

Тогда сопротивление полученной конструкции равно

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \rightarrow R_{AB} = \frac{r}{2}$$

Задача 11.7

Бесконечные цепи образуются путем повторения одно и того же звена бесконечное число раз (Рис.11.9). Необходимо найти сопротивление цепи R_{AB}−?

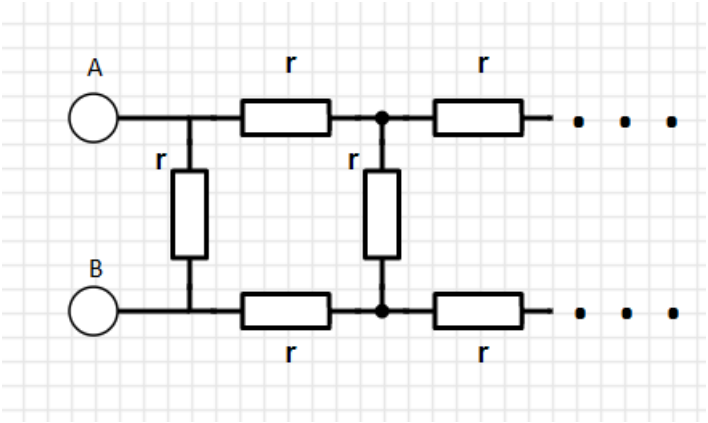


Рис.11.9. К нахождению сопротивления цепи задачи 11.7

Решение:

Рассуждаем следующим образом. Вся цепочка эквивалентна одному резистору с R_{AB}. Так как цепочка бесконечная, то добавление еще одного звена в цепочку не изменит ее сопротивления. Поэтому преобразуем эту цепь в следующую:

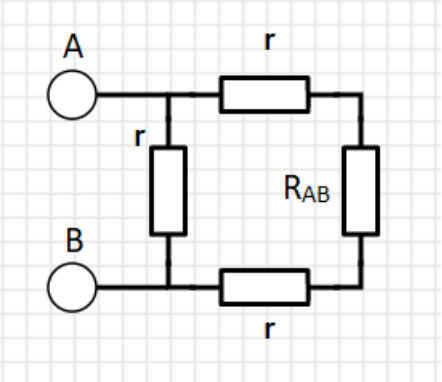


Рис.11.10. Эквивалентная цепь к задаче 11.7.

Получаем два параллельных соединенных сопротивлений. Причем три последовательных соединенных сопротивления равны:

$$r + r + R_{AB} = 2r + R_{AB}$$

А для параллельных соединений имеем:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + R_{AB}}$$

$$2r^2 + rR_{AB} = 2R_{AB}r + {R_{AB}}^2 + rR_{AB}$$

$${R_{AB}}^2 + 2rR_{AB} - 2r^2 = 0$$

И, наконец, ответ получается равным

$$R_{AB} = -r + \sqrt{r^2 + 2r} = r(\sqrt{3} - 1)$$

Задача 11.8

Пусть имеется аккумулятор с ε и внутренним сопротивлением r, который замкнут на нагрузку R (Рис.11.11). Какую максимальную мощность можно получить от такого аккумулятора, меняя нагрузку? Какого должно быть при этом сопротивление? Чему равен КПД аккумулятора?

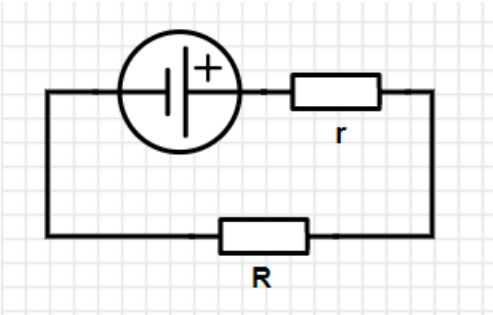


Рис.11.11. К определению мощности, сопротивления и КПД аккумулятора.

Решение:

Запишем определение мощности:

$$N = UI, \qquad U = \varepsilon - Ir \to I = \frac{\varepsilon - U}{r}$$

$$N = \frac{\varepsilon U - U^2}{r}$$

Получили параболу с ветвями вниз. У нее, очевидно, есть максимум. Найдем его:

$$\frac{dN}{dU} = 0 = \frac{\varepsilon - 2U}{r} \to U = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_{N_{max}} = \frac{\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}}{r} = \frac{\varepsilon}{2r}$$

Тогда максимальная возможная мощность равна:

$$N_{max} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

Через формулу силы тока находим:

$$I = \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{r + R} \to R_{N_{max}} = r$$

И, наконец, найдем КПД аккумулятора:

$$\eta = \frac{N_{\text{полезн}}}{N_{\text{полн}}} = \frac{UI}{\varepsilon I} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{IR}{I(r + R)} = \frac{R}{r + R}$$

А при максимальной нагрузке КПД равен

$$\eta_{N_{max}} = \frac{r}{r + r} = \frac{1}{2}$$

Семинар 12. Магнитные поля проводников с током.

Линии тока – такие линии, касательные к которым будут совпадать с направлением вектора плотности тока в каждой точке этой линии. Трубка, боковая поверхность которой состоит из линей тока, называется **трубкой тока**.

Линейный проводник – такой проводник, у которого линейные размеры трубки тока значительно меньше, чем расстояние до точки исследования магнитного поля или меньше характерных размеров неоднородностей магнитного поля.

Элемент линейного тока.

$$d\vec{\imath} = Id\vec{l}$$

Прямой ток – постоянный линейный ток, который протекает по физически бесконечному проводнику. Вокруг проводника создается магнитное поле и для ее характеристики вводится **индукция магнитного поля**.

Закон Био-Савара-Лапласа.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\vec{r}\right]}{r^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}\,\frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$$

Ток может протекать по замкнутому контуру. Тогда вводится понятие магнитного момента для плоского витка

$$\overrightarrow{p_m} = IS\vec{n}$$

Причем направление вектора магнитного момента определяется по правилу буравчика.

Для точечного **магнитного диполя** индукция магнитного поля равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overrightarrow{p_m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{p_m}}{r^3}\right]$$

Для магнитной индукции справедлив принцип суперпозиции, то есть суммарная индукция равна сумме отдельных источников.

Задача 12.1

Имеется ограниченного размера проводник с током I. Нужно найти индукцию магнитного поля на расстоянии a от провода (Рис.12.1).

Решение:

На расстоянии z выделим небольшой кусок провода. И его размер будет равен dz. Этот кусок рассматриваем как элемент тока. Тогда индукция магнитного поля этого элемента равна:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\vec{r}\right]}{r^3}$$

Чтобы определить куда направленно векторное произведение воспользуемся правилом буравчика. В данном случае вклад $d\vec{B}$ направлен на нас (Рис.12.1).

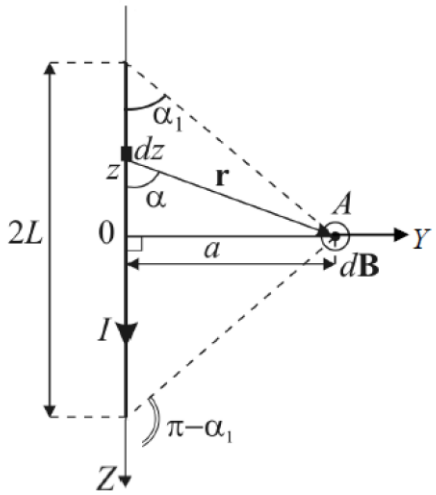


Рис.12.1. К определению индукции магнитного поля задачи 12.1.

Теперь запишем важные соотношения:

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}, \qquad z = a\,ctg\alpha, \qquad dz = -\frac{a}{sin^2\alpha}d\alpha$$

Тогда для магнитной индукции элемента тока имеем:

$$dB = dB_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sin\alpha\frac{a}{sin^2\alpha}\frac{sin^2\alpha}{a^2}d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\alpha\, d\alpha$$

И для суммарного значения магнитной индукции возьмем интеграл

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Частные случаи.

Бесконечный провод.

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \pi$$

$$B_\infty = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Полубесконечный провод.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_2 = \pi$$

$$B_{1/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

Точка А находится посередине провода.

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \pi - \alpha$$

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}2\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

Задача 12.2

Имеется виток, обтекаемый током с радиусом R (Рис.12.2). Нужно определить индукцию магнитного поля в точке A на оси витка.

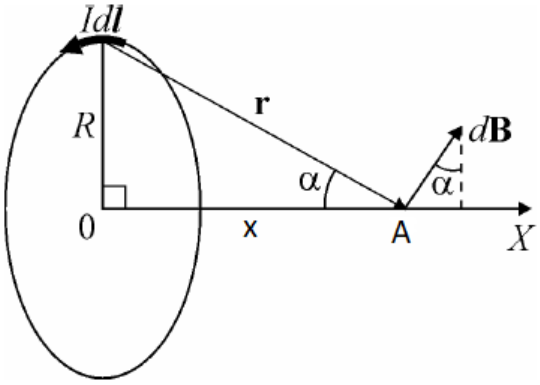


Рис.12.2. К определению индукции магнитного поля на оси витка задачи 12.2.

Решение:

Выберем как показано на Рис.12.2 кусок витка длиной dl. И используем для вычисления формулу закона Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}$$

По правилу буравчика находим направление вектора $d\vec{B}$. Аналогично можно найти направление вектора $d\vec{B}$ при рассмотрении участка витка диаметрально противоположного участку dl. А сейчас найдем проекцию $d\vec{B}$ на ось X:

$$dB_x = dB\sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{(R^2+x^2)}\sin\alpha\,, \qquad \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

И полное значение величины индукции магнитного поля будет равно

$$B = B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(R^2+x^2)^{3/2}}\oint dl = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Частные случаи.

Точка в центре кольца.

$$x = 0$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Магнитное поле создается только дугой окружности с углом φ

$$B_0 = \frac{\mu_0 I R^2\varphi}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 I\varphi}{4\pi R}$$

Случай, когда расстояние $x \gg R$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 I\pi R^2}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi x^3}$$

Сравним получившиеся результаты. Помним, что для дипольного момента имеем:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overrightarrow{p_m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{p_m}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\overrightarrow{p_m}rr}{r^5} - \frac{\overrightarrow{p_m}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0 2\overrightarrow{p_m}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0\overrightarrow{p_m}}{2\pi r^3}$$

Получили одинаковые результаты с предельным случаем.

Задача 12.3

Имеется цилиндрический соленоид, ограниченной длины (Рис.12.3). По виткам соленоида протекает ток I. Плотность намотки n. Необходимо найти индукцию на оси соленоида.

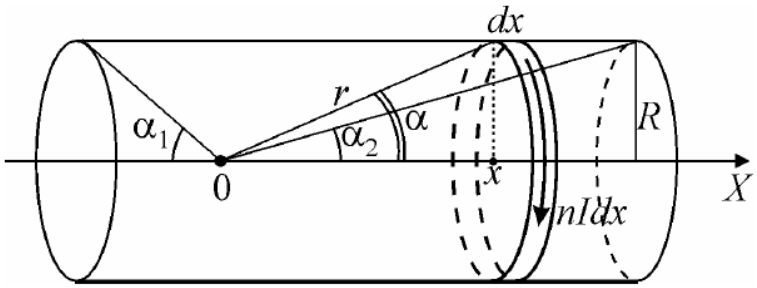


Рис.12.3. К определению индукции магнитного поля на оси соленоида.

Решение:

Выберем маленький участок длины dx этого соленоида. На этом участке находится число витков ndx, причем по каждому ветку протекает ток I, а суммарный ток по такому кольцу равен $dI = Indx$. Воспользуемся формулой для индукции на оси кольца с током:

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{dIR}{(R^2+x^2)}\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{dIR}{(R^2+x^2)}\sin\alpha$$

Через данный угол α удобно также выразить следующие величины:

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}, \qquad \frac{x}{R} = ctg\,\alpha \to x = R\,ctg\,\alpha, \qquad dx = -\frac{R}{sin^2\alpha}d\alpha$$

И так как для всех колец вдоль оси соленоида величины dB направлены одинаково, то запишем результат магнитной индукции для каждой из них

$$dB = -\frac{\mu_0}{2}\frac{R\sin\alpha\, sin^2\alpha\, InR}{R^2 sin^2\alpha}d\alpha = -\frac{\mu_0 In\sin\alpha}{2}d\alpha$$

А для полной величины индукции магнитного поля проведем интегрирование по углу наблюдения α

$$B = -\frac{\mu_0 In}{2}\int_{\pi-\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 In}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

Частные случаи.

Бесконечно длинный соленоид.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \to \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 2$$

$$B = \mu_0 In$$

В центре торца соленоида.

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \to \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 1$$

$$B = \frac{\mu_0 In}{2}$$

Точка наблюдения на оси, но вне соленоида.

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \pi \to \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 0$$

$$B = 0$$

Задача 12.4

Пусть имеется бесконечный провод, который изогнут как показано на Рис.12.4. Необходимо определить индукцию B_o –?

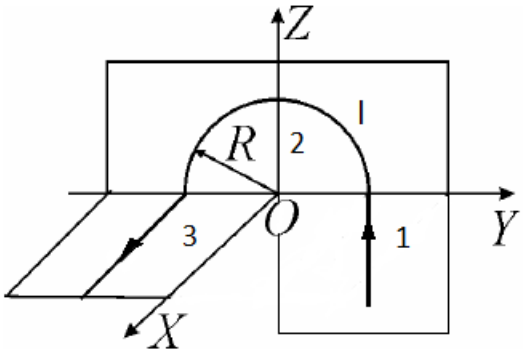


Рис.12.4. К определению индукции магнитного поля в точке О.

Решение:

Каждый провод в точке О создает индукцию поля и по принципу суперпозиции находим:

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3}$$

Определяем направление вектора $\vec{B}$ по знакомому правилу буравчика. Тогда получаем, что от первого и второго участка провода вектора магнитной индукции направлены вдоль оси X, а от третьего участка вдоль оси Z (Рис.12.5).

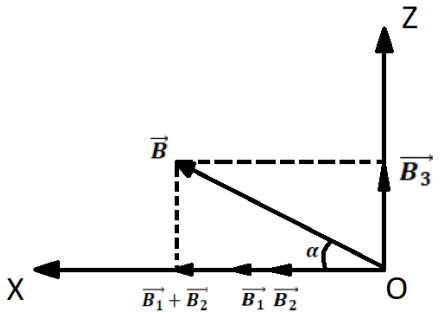


Рис.12.5. Направление векторов магнитной индукции задачи 12.4.

Для каждого из участков запишем значения магнитных индукций:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I\varphi}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I\pi}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R}, \qquad B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

Можно записать, что

$$B = \sqrt{(B_1 + B_2)^2 + {B_3}^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}\sqrt{\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sqrt{2 + 2\pi + \pi^2}$$

А направление можно определить следующим образом:

$$tg\ \alpha = \frac{B_3}{B_1 + B_2} = \frac{1}{\pi + 1}$$

Задача 12.5

Имеется шар, который заряжен по поверхности с σ. Этот шар вращается вокруг оси, проходящей через его центр с угловой скоростью ω (Рис.12.6). Нужно найти индукцию в центре шара.

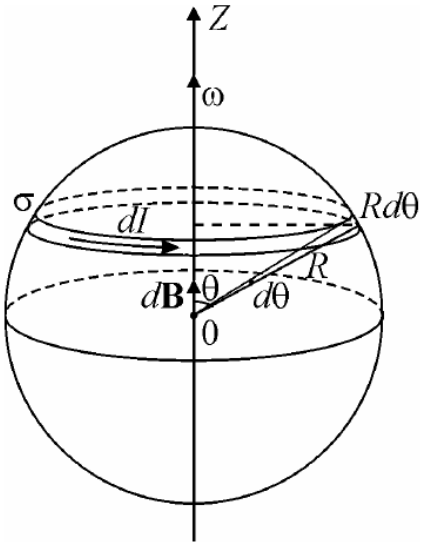


Рис.12.6. К определению индукции в центре вращающегося шара.

Решение:

Выделим кольцо на шаре. Также введем угол θ между центром кольца и направлением на край кольца. Ширина данного кольца равна $Rd\theta$, где R – радиус шара. А радиус кольца обозначим как $r = R\sin\theta$. При вращении кольца пройдет заряд

$$dq = \sigma S = \sigma\ 2\pi r\ Rd\theta$$

Мы знаем выражение для тока

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\omega\sigma\ 2\pi r\ Rd\theta}{2\pi} = \sigma\omega R^2 \sin\theta\ d\theta$$

Вклад в индукцию в центре кольца можно найти так

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2\,(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 sin^2\theta}{R^3}\sigma\omega R^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega R sin^3\theta d\theta$$

Производим интегрирование по всей поверхности шара и получаем:

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}\int_0^{\pi} sin^3\theta\, d\theta = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}\frac{4}{3} = \frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3}$$

Теорема о циркуляции вектора *B*

$$\oint \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_\Sigma$$

Задача 12.6

Имеется бесконечный провод с током (Рис.12.7). Нам нужно определить индукцию на расстоянии r от провода.

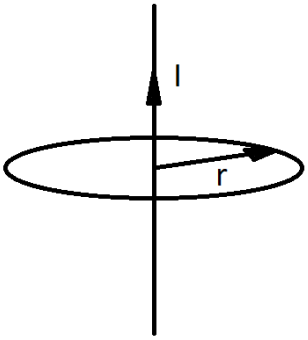


Рис.12.7. Определение индукции на расстоянии от провода.

Решение:

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора B.

$$B2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Задача 12.7

Имеется бесконечная плоскость, по которой протекает ток с поверхностной плотностью i (Рис.12.8). Нужно определить магнитную индукцию в пространстве над и под плоскостью.

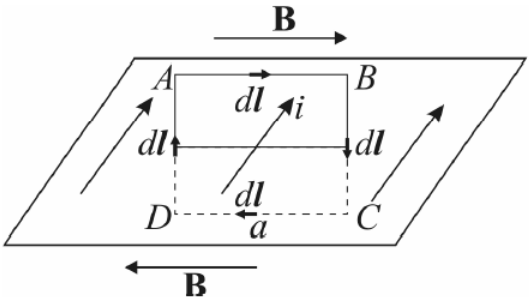


Рис.12.8. К определению индукции плоскости.

Решение:

Поверхностная плотность тока находится с помощью выражения

$$\vec{\imath} = \frac{d\vec{I}}{dl}$$

Индукция в данном случае направлена как показано на Рис.12.8. Применим теорему о циркуляции вектора B и получим:

$$2Bl = \mu_0 il \rightarrow \ B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

Задача 12.8

Имеется провод, по которому течет ток (Рис.12.9). Нужно найти индукцию в зависимости от расстояния до оси провода.

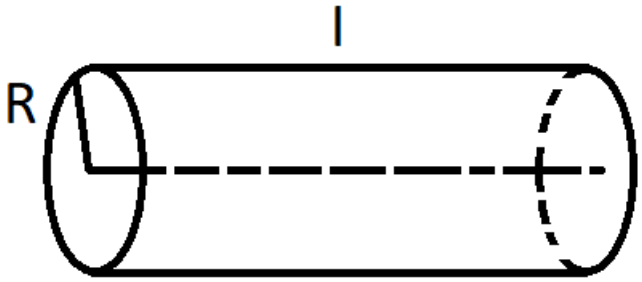


Рис.12.9. К определению индукции провода.

Решение:

Мы можем рассмотреть два случая:

1) $r < R$

$$B2\pi R = \ \mu_0 j\pi R^2 \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{\pi R^2}, \qquad j = \frac{I}{\pi R^2}$$

2) $r > R$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Семинар 13. Сила Ампера. Сила Лоренца.

Сила Ампера для элемента линейного того dl записывается следующим образом:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\cdot\vec{B}\right]$$

Сила Лоренца действует на заряженные частицы, находящиеся в электромагнитом поле и равна

$$\overrightarrow{F_Л} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\cdot\vec{B}\right]$$

Если имеется контур, по которому течет ток I, то можно вести понятие **магнитного момента**, который равен

$$\overrightarrow{p_m} = IS\vec{n}$$

В случае, если такой контур находится в магнитном поле, то на него будет действовать **момент силы**

$$\vec{M} = \left[\overrightarrow{p_m}\cdot\vec{B}\right]$$

Задача 13.1.а

Имеются два параллельных, бесконечно длинных провода, находящихся на расстоянии d друг от друга (Рис.13.1). По этим проводам текут токи I_1 и I_2 соответственно. Нужно определить силу, действующую на единицу длины каждого из проводов.

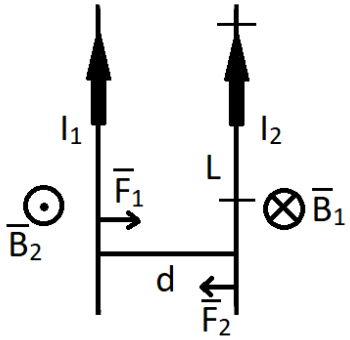


Рис.13.1. К определению силы, действующей на единицу длины проводов.

Решение:

Ток, который протекает по первому проводу созадет в месте нахождения второго провода магнитное поле, индукция которого равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

И направлена как показано на Рис.13.1. И используем формулу для силы Ампера:

$$\overrightarrow{F_2} = I_2\left[\vec{l}\cdot\overrightarrow{B_1}\right]$$

Направление силы также показано выше. Также можно записать это выражение по модулю для второй силы, которая действует на единицу длины второго провода.

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

И если мы проделаем такие же выкладки для первого провода, получим

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

То есть два провода, по которым текут токи в одинаковом направлении, притягиваются к друг другу.

Задача 13.1.б

Условие тоже, но теперь направление токов противоположно направлено.

Решение:

Тогда индукция магнитного поля, создаваемого первым проводом также направлено в плоскость рисунка, а направление силы изменится. Аналогично произойдет и с первым проводом.

То есть два провода, по которым текут токи в противоположных направлениях, отталкиваются друг от друга.

Задача 13.2

Имеется половина кольца из провода с радиусом R, по проводу протекает ток I. Эта половина кольца находится в магнитном поле, индукция которого направлена в плоскость рисунка (Рис.13.2). Нужно определить силу, действующую на половину кольца.

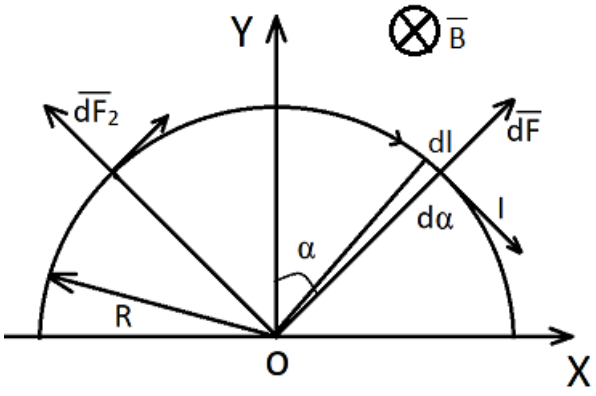


Рис.13.2. К определению силы, действующей на половину кольца.

Решение:

Вдоль диаметра направим ось X и перпендикулярно ось Y. Для того, чтобы посмотреть какая сила будет действовать на полукольцо, разобьем его на маленькие участки. Выделим участок длины dl. Положение участка характеризуем углом α. Причем если соединить два конца участка с точкой O, то маленький угол будет равен $d\alpha$. Тогда длина участка будет равна

$$dl = rd\alpha$$

Сила, действующая на этот участок равна

$$\overrightarrow{dF} = I\left[\overrightarrow{dl} \cdot \vec{B}\right]$$

И направление будет силы лежит в плоскости рисунка, перпендикулярно $\vec{B}$ (Рис.13.2). Далее разложим силу на две составляющие

$$dF_x = dF \sin\alpha$$
$$dF_y = dF \cos\alpha$$

Теперь возьмем точно такой же участок кольца, который симметричен относительно оси Y на этом кольце. И определим силу, которая действует по этому участку

$$dF_2 = dF = IRd\alpha B$$

Мы замечаем, что компоненты вдоль оси X взаимно компенсируют друг друга, значит вся сила будет направлена вдоль оси Y.

$$F = \int_l dF_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} IRB\cos\alpha\, d\alpha = IBR\sin\alpha\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2IBR$$

Теперь давайте растянем полукольцо в прямую линию. Тогда длина линии равна длине полукольца и равна πR. Теперь на всю проволоку будет действовать сила одного направления.

$$F' = I\pi RB > F$$

Такой результат получился, так как существуют участки на полукольце, на которых частично компенсировались компоненты вектора F.

Задача 13.3

Имеется две плоскости, по которым протекают токи с поверхностной плотностью i такие, что между плоскостями создано магнитное поле с $\vec{B}$, а в остальном пространстве магнитного поля нет (Рис.13.3). Нужно определить силу, действующую на участок единичной площади каждой из пластины.

Решение:

Пусть ток по верхней плоскости направлен данным образом, как показано на Рис.13.3. Для нахождения магнитного поля нужно выбрать контур, перпендикулярный плоскости. И используя правило буравчика, мы находим направление индукции магнитного поля. Тогда если выбрать обход контура по часовой стрелке, мы запишем, что

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = 2Bl = \mu_0 il$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

И для того, чтобы в пространстве между плоскостями индукция магнитного поля не была равна 0, направление тока должно быть равно как показано на Рис.13.3. Поэтому индукция поля между плоскостями равна

$$B = 2\frac{\mu_0 i}{2} = \mu_0 i \rightarrow\ i = \frac{B}{\mu_0}$$

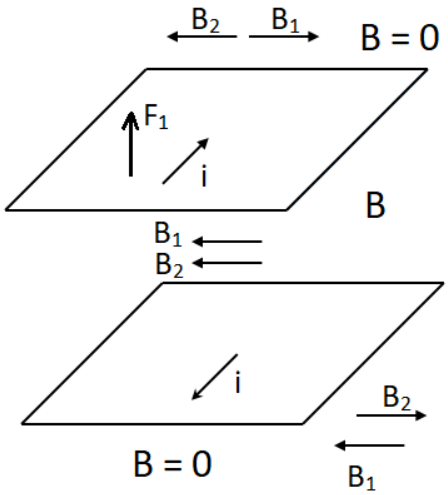


Рис.13.3. К определению силы, действующей на участок площади пластин.

Теперь выберем какой-нибудь участок на плоскости. С поперечным размером Δx и длиной l_1. Тогда на такую площадку будет действовать сила

$$\Delta\vec{F} = \left[\vec{\imath}\Delta x l_1 \cdot \overrightarrow{B_2}\right]$$

А сила, действующая на верхнюю площадку, направлена вверх. По величине ΔF равна

$$\Delta F = iB\Delta S, \qquad \Delta S = \Delta x l_1$$

Тогда сила, действующая на единичную площадь, будет равна

$$F_s = \frac{\Delta F}{\Delta S} = iB_2 = \frac{B}{\mu_0}\frac{B}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Получили две пластины, по которым текут токи одинаковой поверхностной плотности, но в противоположных направлениях. И эти пластины отталкиваются друг от друга.

Задача 13.4

Имеется бесконечный прямой провод, по которому протекает ток I_0. Параллельно плоскости этого провода расположена рамка со сторонами a и b, по которой течет ток I (Рис.13.4). Нужно определить силу, действующую на рамку с током.

Решение:

Рассмотрим силу, которая действует на каждую из сторон рамки. В месте, где находится сторона AB рамки, индукция магнитное поле тока, созданного прямым током равна

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d}$$

А сила, действующая на эту сторону, равна

$$F_{AB} = Ib\frac{\mu_0 I_0}{2\pi d}$$

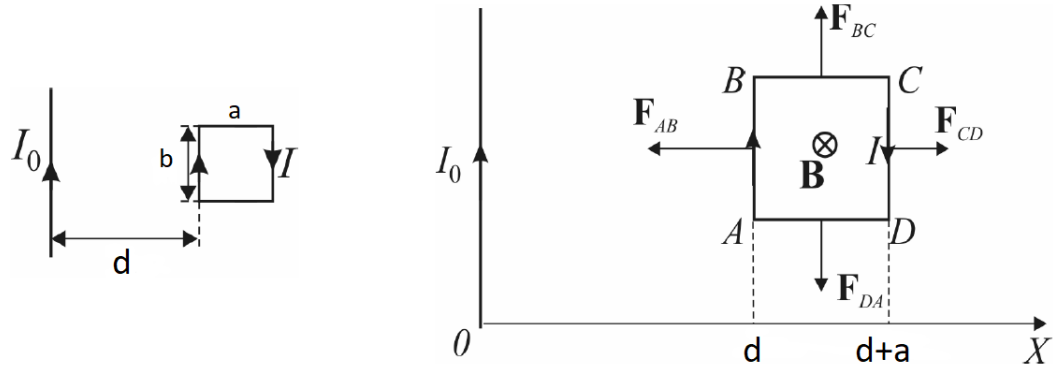


Рис.13.4. К определению силы, действующей на рамку с током в задаче 13.4.

На стороне BC в каждой точке поле $\vec{B}$ разное.

$$B(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}$$

Поэтому чтобы вычислить полную силу выделим участок ширины dx. И сила будет равна

$$dF = I\frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}dx$$

И величина силы стороны BC равна

$$F_{BC} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}ln\frac{d+a}{d} = -F_{AD}$$

И осталось вычислить силу, действующую на сторону CD

$$F_{CD} = \frac{Ib\mu_0 I_0}{2\pi(a+d)}$$

Все направления сил, приложенных к сторонам пластинки, можно видеть на Рис.13.4.

Силы, действующие на стороны BC и AD уравновешивают друг друга. А вот силы, которые действуют вдоль оси X разные по величине, поэтому суммарная сила

$$F = F_{AB} + F_{CD} = \frac{\mu_0 I_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a+d}\right)$$

Можно сказать, что рамка втягивается в область более сильного магнитного поля. Или другое, эквивалентное объяснение. Рамку обтекает ток, значит у нее есть какой-то магнитный момент. И этот магнитный момент втягивается в область более сильного магнитного поля.

Задача 13.5

Имеется бесконечная плоскость, по которой течет ток с поверхностной плотностью i. Над этой плоскостью расположено параллельно плоскости кольцо (Рис.13.5). По кольцу течет ток I. Нужно определить механический момент, который действует на это кольцо с током, в магнитном поле плоскости.

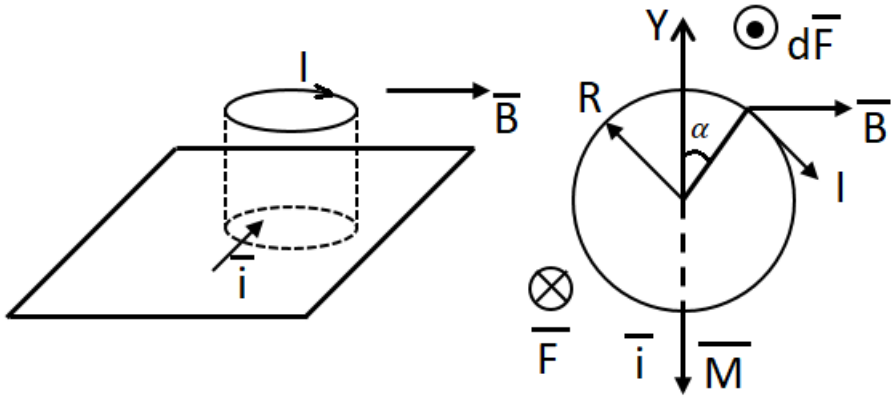


Рис.13.5. К определению механического момента задачи 13.5.

Решение:

Почему возникает механический момент? Для этого рассмотрим вид кольца сверху (справа на Рис.13.5). Магнитное поле $\vec{B}$ параллельно плоскости. Радиус нашего кольца R. Далее выберем маленький участок этого кольца, который образует с осью Y угол α. И сила ампера $d\vec{F}$ будет равна

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l} \cdot \vec{B}\right] \rightarrow dF = IdlB\sin\alpha\,, \qquad dl = Rd\alpha$$

Чтобы подсчитать всю силу, действующую на половину кольца, нужно суммировать все силы

$$F_{\frac{1}{2}\text{кольца}} = \int_0^{\pi} I\,BR\sin\alpha\,d\alpha = -IBR\cos\alpha\,|_0^{\pi} = 2IBR, \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

$$F_{\frac{1}{2}\text{кольца}} = \mu_0 iIBR$$

По второму полукольцу ток течет в противоположную сторону. Поэтому если мы вычислим силу, которая будет действовать на вторую половину кольца, то мы увидим, что эта сила направлена в противоположную сторону.

То есть силы стремятся повернуть кольцо вокруг диаметра. И для вычисления механического момента применим следующую формулу:

$$\vec{M} = \left[\overrightarrow{p_m} \cdot \vec{B}\right]$$

Для такого кольца, по которому течет ток I, вектор

$$\overrightarrow{p_m} = IS\vec{n} = I\pi R^2\vec{n}$$

И механический момент равен

$$\vec{M} = \frac{\mu_0 I\pi R^2 i}{2}$$

Задача 13.6

Пусть протон с зарядом $q > 0$ влетает в область магнитного поля (Рис.13.6). У протона скорость v и движется он под углом α к направлению $\vec{B}$. Нужно определить характер движения протона и его координаты через время t.

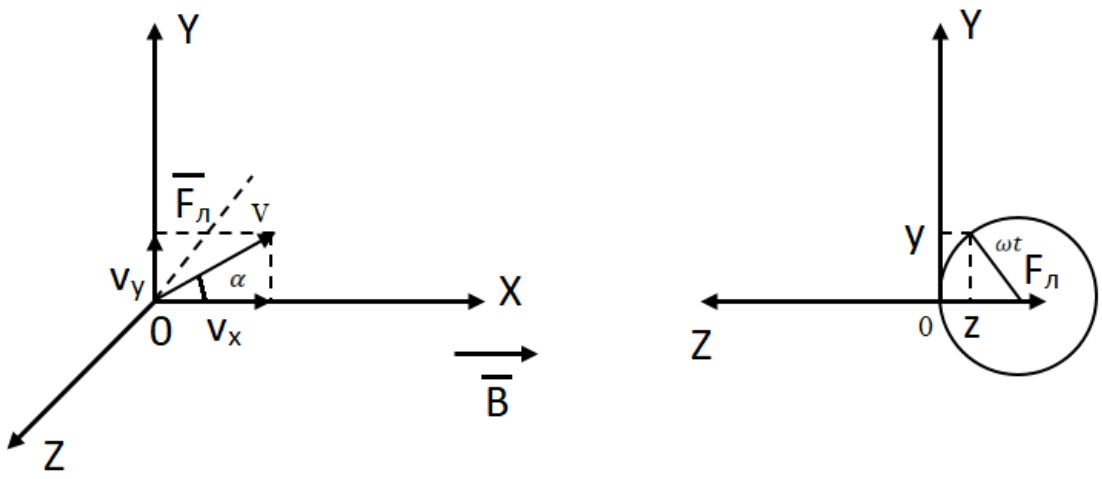


Рис.13.6. К определению характера движения протона в области магнитного поля.

Решение:

Когда протон влетел в магнитное поле, на него будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F_л} = q[\vec{v} \cdot \vec{B}] = q[(\vec{v_x} + \vec{v_y}) \cdot \vec{B}] = q[\vec{v_y} \cdot \vec{B}]$$

Разложим скорость на две составляющие

$$v_x = v \sin \alpha$$
$$v_y = v \cos \alpha$$

Когда есть сила, которая всегда действует перпендикулярно скорости, то движение происходит по окружности. И для определения радиуса воспользуемся следующим выражением:

$$m\frac{v_y^2}{R} = qBv_y \rightarrow R = \frac{mv_y}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$$

Вдоль оси X никакие силы на протон не действуют, но начальная скорость у него была. Поэтому он будет двигаться равномерно, а координата будет равна

$$x = v_x t = v \cos \alpha \, t$$

Таким образом, движение протона следующее, он вращается в плоскости YOZ, но при этом смещается вдоль оси X. Его траектория движения – спираль.

Определим период обращения протона по окружности.

$$T = \frac{2\pi R}{v_y} = \frac{2\pi m}{qB} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

За один оборот вдоль оси X протон пролетает расстояние h, которое называют шагом спирали

$$h = v_x T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}$$

Теперь запишем координаты протона через время t. Если протон пролетел по окружности за какое-то время t, то он повернулся на угол ωt. Поэтому координата y будет равна

$$y = R\sin(\omega t)$$
$$z = R\cos(\omega t) + z_0$$

При $t = 0$ было $x = y = z = 0$, тогда получаем

$$z = 0 = R + z_0 \to z_0 = -R$$

И окончательно для координаты z, имеем

$$z = -R + R\cos(\omega t)$$

А полный путь будет равен

$$S = vt$$

Если мы возьмем время $\omega t = 2\pi n$, то мы попадаем в точку, у которой

$$y = z = 0$$

Задача 13.7

Все пространство разделено плоскостью XOY на две области. В одной области создано магнитное поле с индукцией B_1, а в другой с индукцией $B_2 < B_1$. В эту область влетает частица со скоростью v, которая перпендикулярна границе раздела сред (Рис.13.7). Чему равна скорость дрейфа частицы?

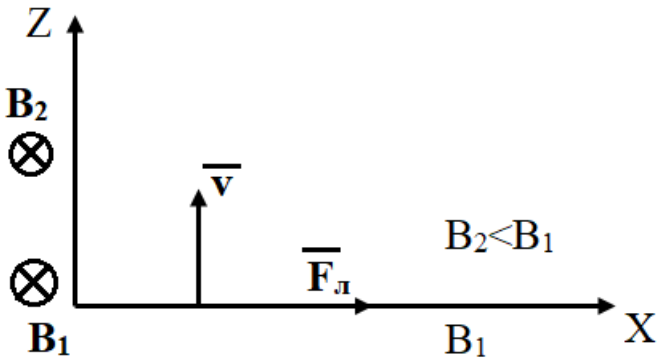


Рис.13.7. К определению скорости дрейфа частицы.

Решение:

На этот электрон будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F_л} = e\left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right]$$

Под действием этой силы электрон начнет двигаться по дуге окружности, пролетит половину окружности с радиусом R_2.

$$R_2 = \frac{mv}{eB_2}$$

Далее он попадает в магнитное поле с индукцией B_1. Его радиус, по которому он движется, будет меньше

$$R_1 = \frac{mv}{eB_1}$$

И так далее. Происходит смещение вдоль оси X. Это будет называться дрейфом электрона.

За один оборот он смещается вдоль оси X на величину

$$\Delta x = 2(R_2 - R_1) = \frac{2mv}{e}\left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1}\right)$$

Время, которое он затратил на это движение, равно

$$\tau = \frac{T_2}{2} + \frac{T_1}{2} = \frac{\pi m}{e}\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right)$$

И тогда скорость дрейфа имеет следующий вид

$$v_{\text{дрейфа}} = \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{2mv}{e}\frac{e}{\pi m}\frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2}\frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} = \frac{2v}{\pi}\frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2}$$

Семинар 14. Электромагнитная индукция.

Электромагнитная индукция – возникновение электродвижущей силы в контуре, находящимся в переменном магнитном поле или движущимся магнитном поле.

Величина ЭДС определяется **законом Фарадея**.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad d\Phi = \left(\vec{B}d\vec{S}\right) = \vec{B}dS\vec{n}$$

Полный поток **вектора магнитной индукции** равен

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$$

Если контур замкнут, то возникшее ЭДС вызывает течение тока, который называется индукционным, и направление его определяется **правилом Ленца:**

Создаваемое индукционным током магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, который его вызвал.

Или можно сказать так: ***последствие противодействует причине.***

Источником возникновения ЭДС могут быть два фактора:

1. Если **проводник движется в магнитном поле**, то вместе с ним движутся электроны и на них действует сила Лоренца, которая приводит к разделению зарядов в проводнике.
2. **Переменное магнитное поле** вызывает электрическое магнитное поле и циркуляция вектора напряженности этого поля по контуру определяется также законом Фарадея.

Задача 14.1

В магнитном поле имеется контур (Рис.14.1). Потом происходит изменение конфигурации контура на квадрат. В какую сторону потечет индукционный ток?

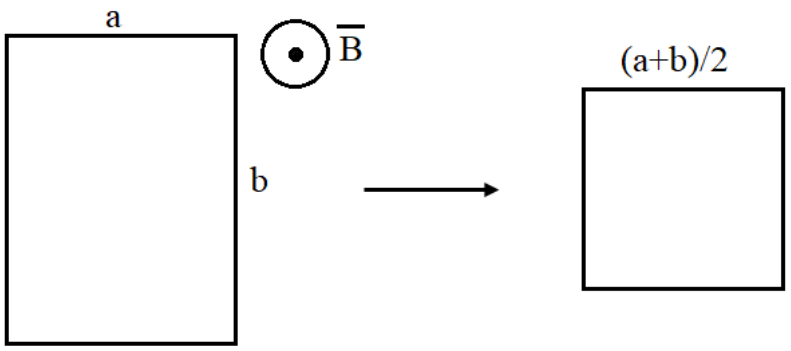


Рис.14.1. К определению направления индукционного тока.

Решение:

Из-за чего здесь возникает индукционный ток? Вероятно из-за изменения потока

$$\Delta\Phi = B\Delta S$$

Изменение площади контура равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} > 0$$

То есть площадь квадрата больше площади прямоугольника. Следовательно поток $\Delta\Phi$ через контур увеличился. То есть ток индукционный должен так обтекать контур, чтобы его магнитное поле уменьшило это увеличение потока, то есть направление вектора $\vec{B}$ должно быть противоположно направлению вектора индукции внешнего поля.

Значит направление индукционного тока в квадратном контуре будет по часовой стрелке.

Задача 14.2

Имеется контур в виде прямоугольника и на нем есть перемычка длиной l. Сопротивление перемычки R. Все это находится в магнитном поле индукции B (Рис.14.2). Перемычку передвигают со скоростью v. Какую силу нужно приложить к перемычке, чтобы она двигалась с постоянной скоростью?

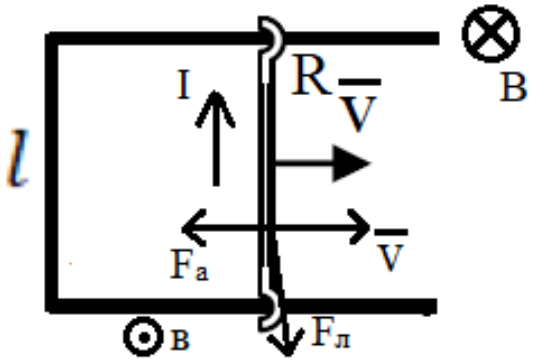


Рис.14.2. К определению силы, приложенной к перемычке контура.

Решение:

В перемычке много электронов, один из них выделен. Он движется со скоростью v со всей перемычкой. На этот электрон действует сила Лоренца

$$\vec{F_л} = e\left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right]$$

За направление тока принимается движение положительных зарядов, значит направление тока по перемычке будет вверх. То есть ток течет против часовой стрелки по контуру с перемычкой. На перемычку будет действовать сила Ампера

$$\vec{F_а} = I\left[\vec{l} \cdot \vec{B}\right]$$

Она препятствует движению перемычки. Поэтому мы должны приложить внешнюю силу

$$\vec{F} = -\vec{F_а}$$

Найдем ЭДС

$$\varepsilon = \frac{1}{e}\int \vec{F_л}\, d\vec{l} = \int_l \left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right] d\vec{l} = \int vB\, dl = vBl$$

И получаем силу тока

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vBl}{R}$$

И для получения ответа найдем также силу Ампера

$$F_{\text{а}} = \frac{vBl}{R} lB = \frac{(Bl)^2}{R} v$$

А внешняя сила, как мы уже сказали, будет равна

$$\vec{F} = \frac{(Bl)^2}{R} \vec{v}$$

Задача 14.3

Имеется вертикальный контур с перемычкой (Рис.14.3). Изначально перемычка находилась в поле сил тяжести. Когда ее отпустили, перемычка движется под действием силы тяжести с ускорением. Нужно найти как меняется скорость перемычки с течением времени.

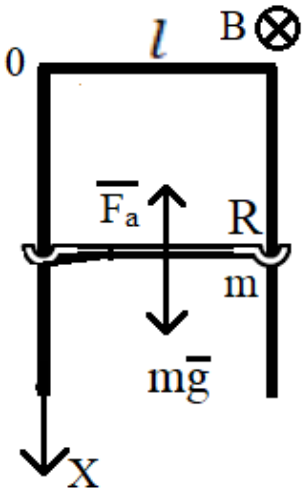


Рис.14.3. К определению изменении скорости перемычки.

Решение:

Что происходит в магнитном поле? На электроны снова действует сила Лоренца. И ЭДС будет равна

$$\varepsilon = \frac{1}{e} \int \vec{F_{\text{л}}}\, d\vec{l} = \int_l \left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right] d\vec{l} = \int vB\, dl = vBl$$

Тогда индукционный ток и сила Ампера

$$I_{\text{инд}} = \frac{\varepsilon}{R}, \qquad \vec{F_{\text{а}}} = I\left[\vec{l} \cdot \vec{B}\right], \qquad F_{\text{а}} = \frac{(Bl)^2}{R} v$$

И индукционный ток будет течь против часовой стрелки по контуру с перемычкой. А сила Ампера снова препятствует движению перемычки, что согласуется с правилом Ленца.

Теперь запишем уравнение движения перемычки

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_{\text{а}}}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Далее запишем уравнение в проекции на ось X

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{(Bl)^2}{R}v$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{(Bl)^2}{R}\left[v - \frac{mgR}{(Bl)^2}\right]$$

Разделим переменные и получим

$$\frac{dv}{v - \frac{mgR}{(Bl)^2}} = -\frac{(Bl)^2}{mR}dt$$

И интегрируем это равенство

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{mgR}{(Bl)^2}} = -\frac{(Bl)^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$ln\frac{v - \frac{mgR}{(Bl)^2}}{-\frac{mgR}{(Bl)^2}} = -\frac{(Bl)^2}{mR}t$$

И после потенцирования получим

$$1 - \frac{(Bl)^2}{mgR}v = e^{-\frac{(Bl)^2}{mR}t}$$

А выражение для скорости отсюда будет равно

$$v(t) = \frac{mgR}{(Bl)^2}\left(1 - e^{-\frac{(Bl)^2}{mR}t}\right)$$

Когда $t \to \infty$, скорость $v = \frac{mgR}{(Bl)^2}$

Тогда сила Ампера при такой скорости будет равна

$$F_{\text{а}} = \frac{(Bl)^2}{R}v = \frac{(Bl)^2}{R}\frac{mgR}{(Bl)^2} = mg$$

$$\vec{F_{\text{а}}} + m\vec{g} = 0$$

То есть физический смысл этой установившейся скорости в том, что это такая скорость, при которой сила Ампера полностью компенсирует вес перемычки.

Далее можно провести некоторую оценку.

Пусть перемычка сделана из меди. Плотность материала и удельное сопротивление материала

$$d = \frac{dm}{dV}, \qquad \rho$$

Тогда установившиеся скорость будет равна

$$v = \frac{d\,l\,S\,g\,\rho\,l}{S(Bl)^2} = \frac{dg\rho}{B^2}$$

Для меди

$$d = 9 \cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м}$$

$$B = 1\ \text{Тл}$$

$$v = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1.7 \cdot 10^{-8}}{1} \approx 1.5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Данные оценки совпадают с экспериментальными результатами.

Задача 14.4

Имеется горизонтальный стержень длиной l. Он вращается вокруг вертикальной оси со скоростью ω (Рис.14.4). Нужно определить разность потенциалов между концами стержня.

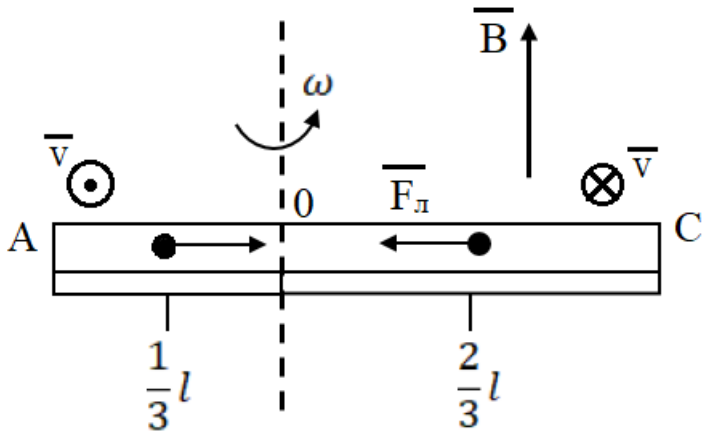


Рис.14.4. К определению разности потенциалов между концами стержня.

Решение:

Посмотрим что происходит при вращении стержня. Скорость электрона вместе с палочкой будет равна

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

На электрон действует сила Лоренца равная

$$\overrightarrow{F_л} = e\left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right]$$

То есть электроны перемещаются к оси вращения. Из-за разделения зарядов возникает электрическое поле, где положительные заряды будут на концах стержня, а область электронов – отрицательные заряды в месте оси вращения. А напряженность направлена как обычно от «плюса» к «минусу».

И уравнение движения электрона будет иметь вид

$$m\vec{a} = e\vec{E} + \vec{F_л} \to \vec{E} = \frac{m}{e}\vec{a} - \frac{\vec{F_л}}{e}$$

Сравним два этих слагаемых.

$$a = \omega^2 r, \qquad v = \omega r$$

$$\frac{ma}{F_л} = \frac{m\omega^2 r}{e\omega r B} = \frac{\omega}{\frac{e}{m}B}, \qquad \frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$$

$$B = 10^{-2}\ \text{Тл}$$

$$\omega = 10^4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Тогда с учетом этих данных получим

$$\frac{ma}{F_л} = \frac{10^4}{1.76 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-2}} \sim 10^{-5}$$

Получается, что мы смело можем пренебречь первым слагаемым.

$$\vec{E} = -\frac{\vec{F_л}}{e}$$

А для определения разности потенциалов помним, что

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \qquad \vec{E} = -\left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right]$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E}(\vec{r})d\vec{l} = -\int_2^1 \left[\vec{v} \cdot \vec{B}\right] d\vec{l} = \int_1^2 vBdr = \int_1^2 \omega Br\, dr$$

Отдельно найдём разность потенциалов

$$\varphi_C - \varphi_O = \int_0^{\frac{2}{3}l} \omega Br\, dr = \frac{2}{9}\omega B l^2$$

$$\varphi_O - \varphi_A = \int_{\frac{1}{3}l}^{0} \omega Br\, dr = -\frac{1}{18}\omega B l^2$$

Складываем полученные результаты

$$\varphi_C - \varphi_A = \omega B l^2 \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{6}\omega B l^2$$

Задача 14.5

Имеется бесконечный провод, по которому течет ток I. Рядом с проводом находится квадратная рамка со стороной a (Рис.14.5). Потом эту рамку поворачивают вокруг дальней стороны от провода. Какой заряд протечет по рамке за время ее поворота?

Решение:

Провод с током создает вокруг себя магнитное поле.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

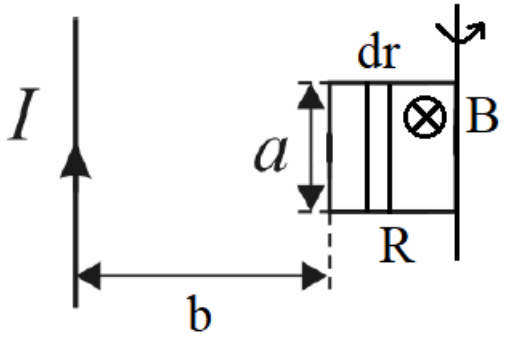


Рис.14.5. К определению величины заряда во время поворота рамки.

А r – это расстояние от провода до точки, где мы изучаем индукцию. Рамка находится в магнитном поле. Когда рамка повернется, нужно найти изменение потока индукции. Тогда у нас возникнет ЭДС, которая равна

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \to dq = -\frac{1}{R}d\Phi$$

$$q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}$$

Разобьем рамку на полоски толщиной dr. Тогда в месте, где находится точка полоски индукция направлена в плоскость рисунка. Направление обхода по часовой стрелки. Тогда направление нормали тоже направлено в плоскость рисунка.

$$d\Phi = \vec{B}ds\vec{n} = BdS\cos\alpha$$

В **начальном положении** имеем

$$\alpha = 0, \qquad d\Phi = B(r)\,adr = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi r}dr \to \Phi_1 = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{b-a}^{b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\,ln\frac{b}{b-a}$$

Рамка повернулась

$$\alpha = \pi, \qquad \Phi_2 = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{b}^{b+a}\frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\,ln\frac{b+a}{b}$$

И теперь найдем заряд, прошедший по рамке

$$q = \frac{1}{R}|\Phi_1 - \Phi_2| = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(ln\frac{b}{b-a} + ln\frac{b+a}{b}\right) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}ln\frac{b+a}{b-a}$$

Задача 14.6

Имеется длинный соленоид радиуса a. Плотность намотки соленоида n. По нему течет ток, который меняется со временем $\frac{dI}{dt} = \alpha = const$. Нужно определить напряженность электрического поля E во всем пространстве.

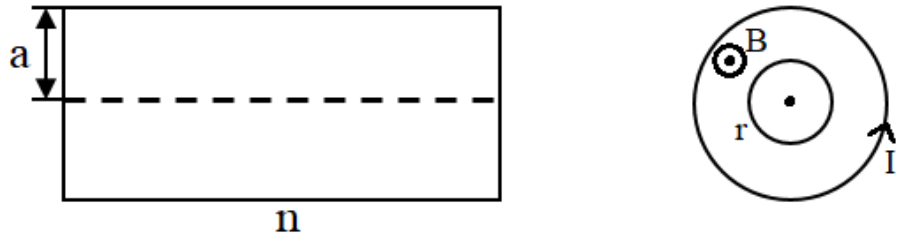


Рис.14.6. К определению напряженности электрического поля в пространстве соленоида.

Решение:

Пусть ток по соленоиду течет как показано на правой части Рис.14.6. Тогда индукция направлена на нас. В силу симметрии задачи понятно, что силовые линии электрического поля представляют собой окружности. Поэтому выберем контур также в виде окружности.

Радиус $r < a$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad B = \mu_0 nI, \qquad \Phi = BS(r) = \mu_0 nI\pi r^2$$

Тогда изменение потока будет иметь вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n\pi r^2 \frac{dI}{dt} = \mu_0 n\pi\alpha r^2 = -\varepsilon$$

Выберем направление обхода против часовой стрелки, тогда нормаль к нему будет совпадать с направлением вектора B.

$$\varepsilon = \int_l \vec{E}\overrightarrow{dl} = E2\pi r = -\mu_0 n\pi\alpha r^2 \to E(r) = -\frac{\mu_0}{2} n\alpha r$$

Теперь рассмотрим вторую область $r > a$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = B\pi a^2 = \mu_0 nI\pi a^2$$

$$\varepsilon = -\mu_0 n\pi\alpha a^2$$

Также выбираем направление обхода против часовой стрелки и получаем

$$\varepsilon = E2\pi r = -\mu_0 n\pi\alpha a^2 \to E(r) = -\frac{\mu_0}{2r} n\alpha a^2$$

Семинар 15. Самоиндукция и взаимная индукция. Энергия магнитного поля.

Плотность энергии магнитного поля.

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}, \qquad W = \int_V w\, dV$$

Самоиндукция – электромагнитная индукция в контуре при изменении потока индукции магнитного поля, созданного током самого контура.

$$\Phi = LI,$$

где L – коэффициент самоиндукции или индуктивность контура.

Взаимная индукция – электромагнитная индукция, возникающая в контуре при изменении через него потока индукции магнитного поля, который создается другими контурами.

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j\,, \qquad L_{ij} = L_{ji}$$

Энергия тока, протекающего в контуре. Собственная энергия.

$$W = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} LI^2$$

А энергия системы контуров равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij}\, I_i I_j$$

В случае **последовательного соединения** катушек индуктивности общая индуктивность равна

$$L = \sum_i L_i$$

И в случае **параллельного соединения** имеем

$$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

Задача 15.1

Имеется длинный цилиндр радиуса R. По цилиндру протекает ток I, который равномерно распределен по сечения проводника (Рис.15.1). Нужно найти энергию магнитного поля, которая заключена в цилиндре.

Решение:

Для нахождения энергии воспользуемся формулой

$$W = \int_V w\, dV$$

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Возьмем контур, с центром на оси цилиндра радиусом r.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

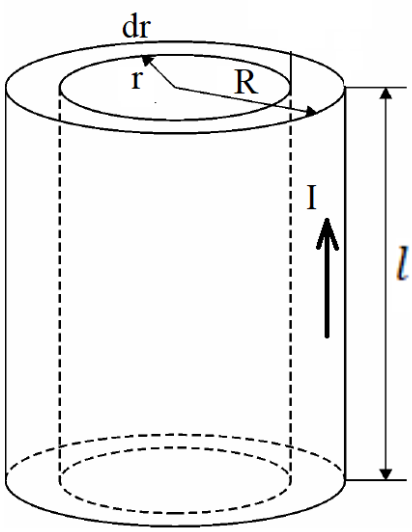


Рис.15.1. К определению энергии магнитного поля цилиндра.

В силу симметрии цилиндра ясно, что вектор индукции будет направлен по касательной к этому контуру. А направление обхода против часовой стрелки. Поэтому

$$\oint \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = B2\pi r = \mu_0 j\pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Разобьем цилиндр на трубки толщиной dr. Будем считать, что внутри этой трубки B постоянная. Найдем плотность энергии в трубке

$$w = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} r^2$$

Тогда энергия, заключенная в трубке равна

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} r^2\, 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4}\int_0^R r^3\,dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

А энергия на единицу длины цилиндра будет равна

$$W_1 = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Вычисление индуктивности можно проводить двумя способами:

1. $\Phi = LI$
2. $W = \frac{1}{2}LI^2$

Задача 15.2

Имеется длинный соленоид с плотностью витков намотки n. Площадь его сечения S, длина l (Рис.15.2). Нужно найти индуктивность такого соленоида.

Решение:

I способ.

Пусть по соленоиду протекает некоторый ток I, тогда

$$B = \mu_0 n I$$

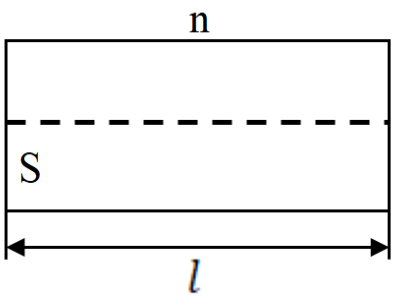


Рис.15.2. К определению индуктивности соленоида.

Значение потока будет равно

$$\Phi_1 = BS$$

И полный поток, пронизывающий все витки соленоида равен

$$\Phi = NBS = \mu_0 NnSI = \mu_0 n^2 lSI = \mu_0 n^2 VI, \qquad n = \frac{N}{l}$$

$$\Phi = LI \to L = \mu_0 n^2 V$$

II способ.

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$$

Полная энергия, заключенная внутри соленоида будет равна

$$W = wV = \frac{\mu_0 n^2 V I^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \to L = \mu_0 n^2 V$$

Как и было получено в I способе.

Задача 15.3

Тор с внутренним и внешним радиусами a и b. Его сечение представляет прямоугольник (Рис.15.3). На этот тор намотана проволока с количеством витков N. Когда по проволоке протекает ток, то внутри тора создается магнитное поле. Нужно вычислить индуктивность L.

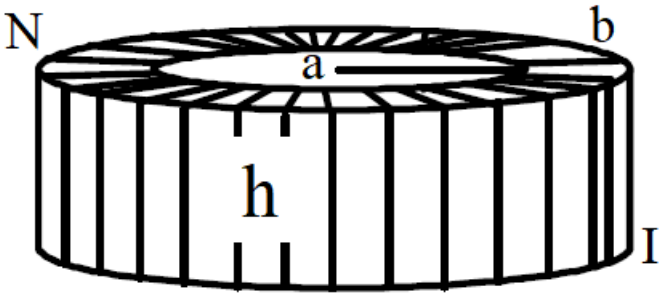


Рис.15.3. К определению индуктивности тороидальной катушки.

Решение:

Сначала проведем вычисления с помощью **второго способа**.

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Определим для этого индукцию магнитного поля внутри тора. На расстоянии r выберем контур в виде окружности, центр которого совпадает с осью тора. И применим теорему о циркуляции

$$\oint \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = B2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \qquad w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

Также разбиваем тор на трубочки радиуса r и толщиной dr. Тогда объем такой трубочки равен $dV = 2\pi rh\,dr$

$$dW = wdV = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi rh\,dr = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi r} dr$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{2\pi} ln\frac{b}{a} \to L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} ln\frac{b}{a}$$

Теперь **первый способ**.

$$\Phi = LI$$

Для этого вычислим поток, который пронизывает все витки.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Проведем точно такое же разделение сечения тора на полоски. Тогда поток

$$d\Phi = B(r)hdr$$

$$\Phi_1 = \int d\Phi = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Nh}{2\pi} ln\frac{b}{a} I$$

Тогда поток через все витки N равен

$$\Phi = \Phi_1 N = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} ln\frac{b}{a} I = LI \to L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} ln\frac{b}{a}$$

Задача 15.4

Имеется двухпроводная линия. То есть два параллельных друг другу провода, радиусом a. Расстояние между ними d (Рис.15.4). Причем $a \ll d, \frac{d}{a} = \eta$. Они подсоединены к источнику ЭДС. По проводам текут токи I, который одинаковы по величине, но имеют противоположное направление. Нужно вычислить индуктивность, приходящуюся на единицу такой двухпроводной линии.

Решение:

Выберем контур, как показано на Рис.15.4. За счет скин-эффекта токи высокой частоты идут по поверхности проводов, и внутри токов нет.

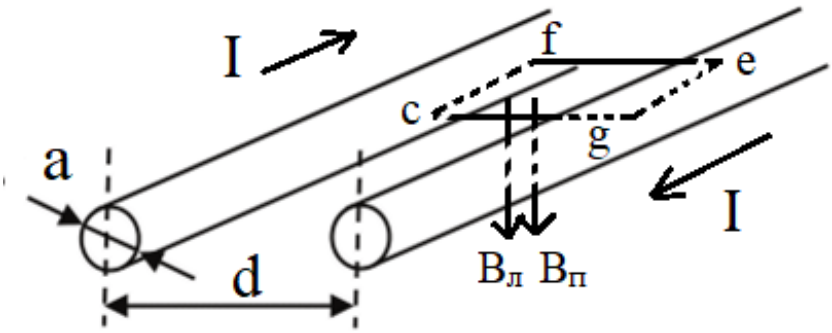


Рис.15.4. К определению индуктивности двухпроводной линии.

На Рис.15.4 показан исследуемый контур $cfeg$. Вычислим поток от левого провода через наш контур. Для этого снова разделяем площадку контура на полоски. И получаем

$$d\Phi_л = B(r)ldr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr$$

$$\Phi_л = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}ln\frac{d-a}{a}$$

Очевидно, что такой же поток будет от правого провода. Поэтому полный поток, пронизывающий контур равен

$$\Phi = 2\Phi_л = \frac{\mu_0 Il}{\pi}ln\frac{d-a}{a} = LI \to L = \frac{\mu_0 l}{\pi}ln\left(\frac{d}{a}-1\right) = \frac{\mu_0}{\pi}ln\eta, \qquad l = 1$$

Задача 15.5

Имеется тор с сечением формы квадрата (Рис.15.5). На него намотаны две обмотки. Первая имеет N_1 витков, вторая – N_2. Нужно найти коэффициент взаимной индукции этих обмоток.

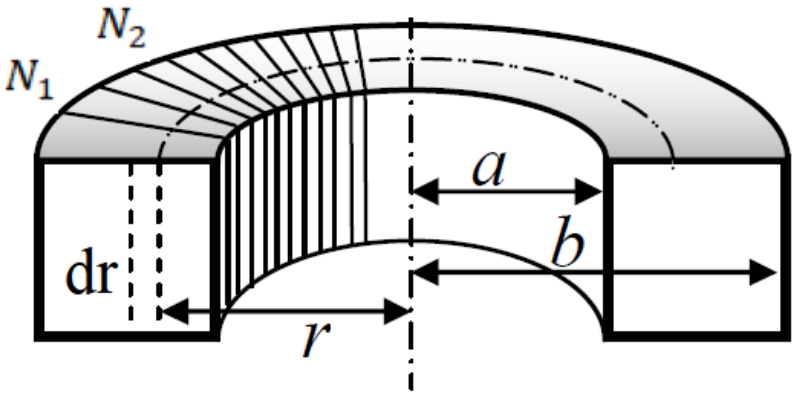


Рис.15.5. К определению коэффициента взаимной индукции обмоток тора.

Решение:

Будем исходить из формулы, что поток, пронизывающий все витки второй катушки равен

$$\Phi_2 = L_{12} I_1$$

Пусть по первой катушки течет ток I_1. Тогда создается магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r}$$

Чтобы вычислить поток снова выбираем полоску на расстоянии r толщиной dr. И поток, пронизывающий один виток второй катушки равен

$$\Phi_1^{(2)} = \int B\, dS = \frac{(b-a)\mu_0 N_1 I_1}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{(b-a)\mu_0 N_1 I_1}{2\pi} ln\frac{b}{a}, \qquad b - a - \text{высота сечения}$$

А поток, пронизывающий вторую катушку равен

$$\Phi_2 = \frac{(b-a)\mu_0 N_1 N_2 I_1}{2\pi} ln\frac{b}{a} = L_{12} I_1 \to L_{12} = \frac{(b-a)\mu_0 N_1 N_2}{2\pi} ln\frac{b}{a}$$

Задача 15.6

Имеются два маленьких витка с током. Эти катушки находятся на расстоянии d друг от друга. Их радиусы r_1 и r_2 (Рис.15.6). Причем $d \gg r_1, r_2$. Нужно найти коэффициент взаимной индукции катушек.

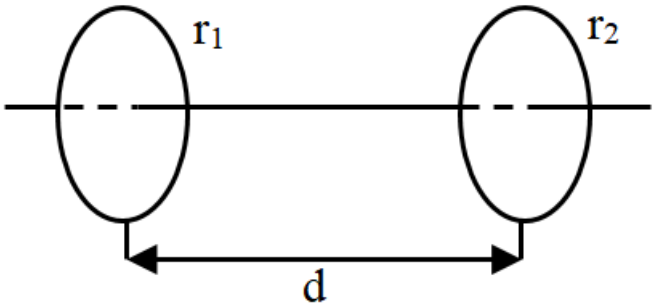


Рис.15.6. К определению коэффициента взаимной индукции двух катушек.

Решение:

Пусть по первой катушки течет ток I_1, тогда индукция магнитного поля в месте нахождения второй катушки может быть найдена

$$B_2^{(1)} = \frac{\mu_0 I_1 r_1^2}{2d^3}$$

Можно также найти индукции отсюда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overrightarrow{p_m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{p_m}}{r^3}\right], \qquad \overrightarrow{p_m} = I_1 \pi r_1^2 \vec{n}$$

И теперь учтем, что нормаль совпадает с r, то как раз получится та же формула.

Можно считать, что магнитное поле в месте нахождения второй катушки примерно одинаково и однородно.

Магнитный поток будет равен

$$\Phi_2 = B_2^{(1)} \pi r_2^2 = \frac{\pi \mu_0 r_1^2 r_2^2}{2d^3} I_1 = L_{12} I_1 \to L_{12} = \frac{\pi \mu_0 r_1^2 r_2^2}{2d^3}$$

Задача 15.7

Имеется тороид прямоугольного сечения (Рис.15.7). На него намотано N витков провода. Сквозь тороид продето кольцо, в котором источником переменной ЭДС создан ток $I = I_0 \cos \omega t$. Нужно найти ЭДС индукции, наводимый в тороиде магнитным полем, созданным током в кольце.

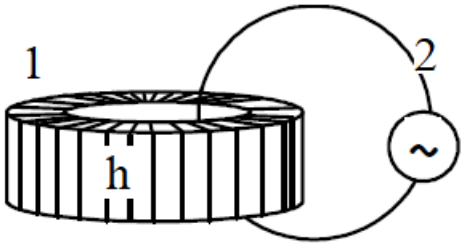


Рис.15.7. К определению ЭДС индукции в тороиде.

Решение:

Как можно найти ЭДС индукции? По правилу закона Фарадея.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \qquad \Phi_1 = L_{12} I_2$$

Воспользуемся тем, что

$$L_{12} = L_{21}$$

Пусть ток I_1 течет по обмотке тороида. Тогда создается магнитное поле с индукцией

$$B_1 = \frac{\mu_0 N I_1}{2\pi r}$$

И поток, пронизывающий сечение тороида равен

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 N I_1 h}{2\pi} ln \frac{b}{a} = L_{21} I_1$$

$$L_{21} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} ln \frac{b}{a} = L_{12}$$

Тогда подставляем данное значение в формулу для ЭДС и получаем

$$\varepsilon = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} ln \frac{b}{a} I_0 \sin \omega t$$

Задача 15.8

Имеется две катушки (Рис.15.8). По этим катушкам протекает ток I одного направления, поэтому индукции, созданные этими катушками имеют одинаковые направления. Потом эти катушки соединили по-другому. Нужно найти индуктивность системы двух катушек.

Решение:

Посмотрим как определяется индуктивность данной системы.

$$\Phi = LI$$

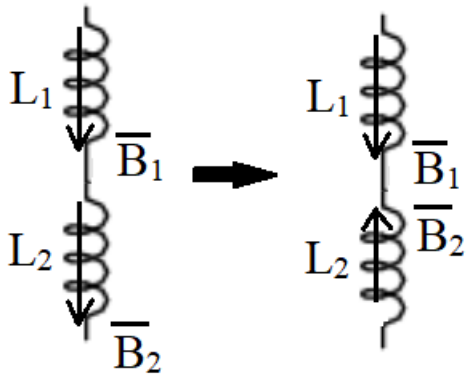


Рис.15.8. К определению индуктивности двух катушек.

Очевидно, что полный поток складывается из

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

Здесь Φ_{11} и Φ_{22} собственные потоки катушек, причем

$$\Phi_{11} = L_1 I_1 > 0, \qquad \Phi_{22} = L_2 I_2 > 0$$

А потоки Φ_{12} и Φ_{21} назовем сторонними потоками. Они имеют одинаковый знак, но не обязательно положительные.

Если одновременно изменилось и направление dS и B, поток остался без изменений.

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2, \qquad \Phi_{21} = L_{21} I_1, \qquad L_{12} = L_{21}$$

Для нашего **первого случая** токи $I_1 = I_2 = I$. И получим

$$L = L_1 + L_2 + 2L_{12} \rightarrow L_{12} = \frac{L - (L_1 + L_2)}{2}$$

А для **второго случая** будем иметь

$$L' = L_1 + L_2 - 2L_{12} = L_1 + L_2 - \big(L - (L_1 + L_2)\big) = 2(L_1 + L_2) - L$$

Что и является ответом к задаче.

Семинар 16. Магнетики в магнитном поле. Метод молекулярных токов.

Магнетиками называются вещества, которые во внешним магнитном поле или без него являются источниками магнитного поля. Выделяют несколько классов магнетиков.

Диамагнетики.

В этих материалах без внешнего магнитного поля у атомов и молекул отсутствуют магнитные моменты, но в магнитном поле они приобретают индуцированный магнитный момент, направленный против внешнего магнитного поля.

Парамагнетики.

Такие вещества, у молекул и атомов которых имеется магнитный момент, но эти магнитные моменты расположены хаотично и без внешнего магнитного поля у парамагнетика нет намагниченности. Во внешнем магнитном поле происходит упорядоченное выстраивание магнитных моментов и парамагнетик становится намагниченным.

Ферромагнетики.

Такие материалы, у которых без магнитного поля существуют области спонтанной намагниченности, называемые доменами. Во внешнем магнитном поле изменяется размер, расположение и ориентация этих доменов. В результате материал приобретает намагниченность, которая сложным образом зависит от напряженности внешнего магнитного поля.

Если магнетик помещен во внешнее поле, то свободные электроны начинают двигаться в магнитном поле по орбитам (Рис.16.1). И каждый из атомов приобретает магнитный момент $\overrightarrow{p_m}$.

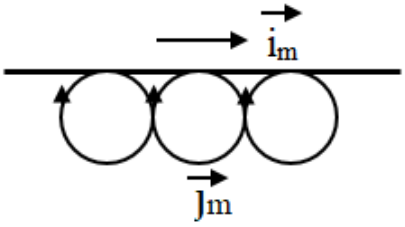


Рис.16.1. Определение молекулярных токов.

На поверхности токи являются сонаправленными (Рис.16.1) и возникает поверхностный ток $\overrightarrow{i_m}$. Также вводится понятие молекулярных токов.

Молекулярные токи – движения заряженных частиц в магнитном поле. Они замкнуты внутри своих атомов, то есть являются токами связанных зарядов. Плотность молекулярных токов обозначим как $\overrightarrow{J_m}$.

А для получения тока проводимости проведем усреднение молекулярных токов

$$\overrightarrow{J_m} = <\overrightarrow{J_{\text{мол}}}> = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} \overrightarrow{J_{\text{мол}}}\, dV$$

В объеме ΔV содержится много частиц, однако его размеры намного меньше характерных размеров областей неоднородностей магнитного поля в магнетике.

Можно вести понятие **микроскопического магнитного поля**, которое является суперпозицией полей, образованных движением свободных и связанных зарядов.

Если усреднить эти микроскопические магнитные поля по некоторому объему, то получится **макроскопическое магнитное поле**.

Для индукции такого поля справедлива теорема о том, что поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую площадку равен нулю.

$$\oint_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

Можно сделать вывод, что не существует магнитных зарядов.

В дифференциальной форме эта теорема будет иметь вид:

$$div\vec{B} = 0$$

И граничные условия на границе двух магнетиков выглядят следующим образом

$$B_{1n} = B_{2n}$$

Можно ввести характеристику намагниченности – **вектор намагниченности $\vec{M}$.** И он является магнитным моментом единицы объема.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i(\Delta V)} \overrightarrow{p_{mi}}$$

Существует связь этого вектора с поверхностным током намагниченности

$$\overrightarrow{\iota_m} = \left[\vec{M} \cdot \vec{n}\right]$$

По аналогии с вектором индукции на границе двух магнетиков можно записать

$$\overrightarrow{M_{\tau 2}} - \overrightarrow{M_{\tau 1}} = -[\vec{n} \cdot \overrightarrow{\iota_m}]$$

А циркуляция вектора намагниченности по контуру равна суммарному току намагниченности.

$$\oint_L \vec{M}\,\overrightarrow{dl} = I_m$$

$$rot\vec{M} = \overrightarrow{j_m}$$

Введем удобную характеристику напряженности магнитного поля $\vec{H}$.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \to \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Для этого вектора также справедлива теорема о циркуляции и значения на границе двух сред.

$$\oint_L \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = I, \qquad rot\vec{H} = \vec{j}$$

$$\overrightarrow{H_{\tau 2}} - \overrightarrow{H_{\tau 1}} = -[\vec{n} \cdot \vec{\iota}]$$

Далее рассмотрим случай линейных изотропных магнетиков. В них вектор намагниченности линейно зависит от напряженности магнитного поля.

$$\vec{M} = \chi\vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость материала.

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H}, \qquad (1+\chi) = \mu \to \chi = \mu - 1,$$

где μ – относительная магнитная проницаемость среды.

$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

Последнее уравнение носит название материального уравнения. Тогда можно понять физический смысл μ. То есть магнитная проницаемость показывает во сколько раз отличается индукция магнитного поля в веществе от индукции магнитного поля в вакууме.

Для диамагнетиков: $\chi < 0, \mu < 1$

Для парамагнетиков: $\chi > 0, \mu > 1$

Для ферромагнетиков: $\mu \gg 1$

Задача 16.1

Имеется два магнетика с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Эти магнетика разделены плоской границей. В среде 1 создано магнитное поле с $\overrightarrow{B_1}$. При переходе во 2 среду будет вектор $\overrightarrow{B_2}$ (Рис.16.2). Нужно найти значения индукции, напряжённости и намагниченности во второй среде.

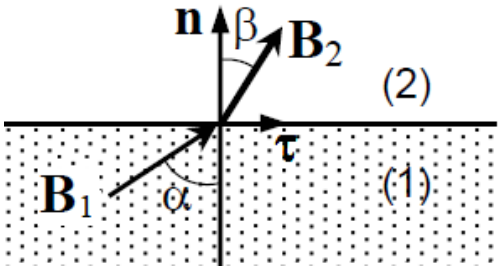


Рис.16.2. К определению значений индукции, напряженности и намагниченности во 2 среде.

Решение:

Можно воспользоваться двумя граничными условиями.

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}$$

Теперь подробнее запишем значения компонент на границе среды

$$B_{2n} = B_{1n} = B_1 \cos\alpha, \qquad H = \frac{B}{\mu\mu_0}$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1\mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2\mu_0} \to B_{2\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1}B_{1\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1}B_1 \sin\alpha$$

$$B_2 = \sqrt{B_{2\tau}^2 + B_{2n}^2} = B_1\sqrt{cos^2\alpha + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 sin^2\alpha} = \frac{B_1}{\mu_1}\sqrt{(\mu_1\cos\alpha)^2 + (\mu_2\sin\alpha)^2}$$

Далее воспользуемся материальным уравнением

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_2\mu_0} = \frac{B_1}{\mu_2\mu_0\mu_1}\sqrt{(\mu_1\cos\alpha)^2 + (\mu_2\sin\alpha)^2}$$

А для значения вектора намагниченности во второй среде запишем

$$M_2 = (\mu_2 - 1)H_2 = \frac{(\mu_2 - 1)B_1}{\mu_2\mu_0\mu_1}\sqrt{(\mu_1\cos\alpha)^2 + (\mu_2\sin\alpha)^2}$$

Когда материалы являются изотропными и линейным, то вектор $\vec{B} \upuparrows \vec{H} \upuparrows \vec{M}$.

И для нахождения направления вектора $\overrightarrow{B_2}$ запишем следующее выражение

$$tg\beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{B_1\sin\alpha}{B_1\cos\alpha} = \frac{\mu_2}{\mu_1}tg\alpha$$

В случае, когда $\mu_2 < \mu_1 \rightarrow \ \beta < \alpha$

Также следует отметить, что в пара- и диамагнетиках магнитная проницаемость мало отличается от единицы. Так, например

$$W: \mu - 1 = 176 \cdot 10^{-6}$$
$$Al: \mu - 1 = 23 \cdot 10^{-6}$$
$$H_2O: \mu - 1 = -9 \cdot 10^{-6}$$

Поэтому изменение направления векторов $\vec{B}$, $\vec{H}$ и $\vec{M}$ при переходе границы практически незаметны. Однако если один из материалов ферромагнетик, то наблюдаются значительные отклонения.

Задача 16.2

Имеется бесконечная плоскость, по которой текут поверхностные токи с плотностью i. Непосредственно под плоскостью находится магнетик конечной толщины с проницаемостью μ (Рис.16.3). Нужно определить величины индукции, напряженности, намагниченности, а также поверхностных и объемных токов намагниченности.

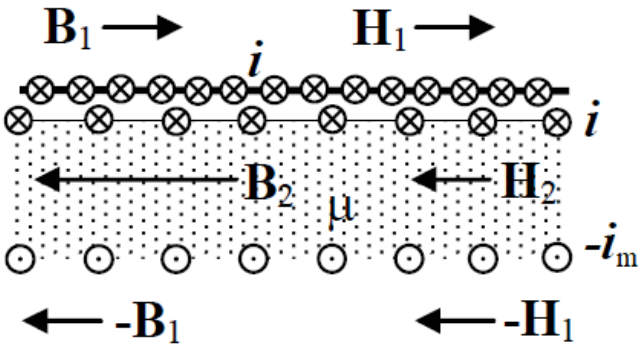


Рис.16.3. К определению намагниченности, напряженности и индукции во всем пространстве вблизи магнетика.

Решение:

Если есть бесконечная плоскость, по которой текут токи, то индукция равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2}$$

В магнетике возникают токи намагничения, но так как нет поверхностных токов проводимости, то тангенциальная компонента вектора напряженности сохраняется

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \qquad H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{i}{2}$$

Из материального уравнения получаем

$$B_2 = \mu_0 \mu H_2 = \mu_0 \mu \frac{i}{2}$$

Модуль вектора намагниченности находим из уравнения

$$M_2 = (\mu - 1) H_2 = (\mu - 1) \frac{i}{2}$$

Что касается объемной и поверхностной плотности токов намагничения, то вспомним дифференциальные уравнения

$$\overrightarrow{j_m} = rot\vec{M} = 0$$

То есть в изотропном материале отсутствуют объемные токи намагничения.

А поверхностная плотность тока будет равна

$$i_m = M_2 = (\mu - 1) \frac{i}{2}$$

Чтобы найти направления этого тока воспользуемся формулой

$$\overrightarrow{i_m} = [\vec{M} \cdot \vec{n}]$$

На Рис.16.3 показаны направления этих токов на разных границах магнетика. Так как токи намагничения одинаковы по величине и направлены в разные стороны, то суммарный ток намагничения равен нулю. Поэтому под пластиной индукция и напряженность магнитного поля определяются только токами проводимости, которые текут по поверхности пластины.

Задача 16.3

Имеется тонкий провод цилиндрической формы радиусом a. По нему течет ток I. Провод находится в магнитной среде с проницаемостью μ (Рис.16.4). Нужно определить значения индукции, напряженности, намагниченности, объемных и поверхностных токов.

Решение:

В силу симметрии задачи понятно, что линии индукции будут представлять собой окружности. Выберем какую-нибудь одну линию как показано на Рис.16.4. И применим теорему о циркуляции вектора напряженности по контуру радиусом r.

$$\oint_L \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = H 2\pi r = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

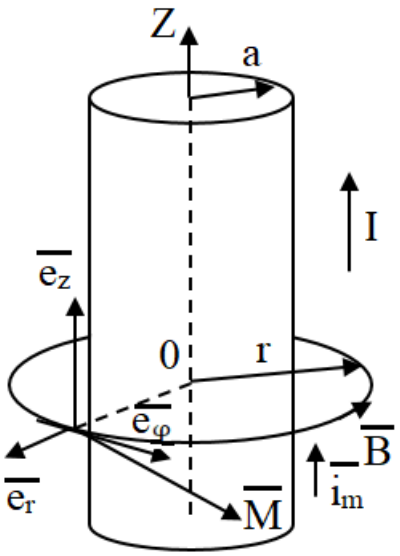


Рис.16.4. Провод цилиндрической формы в магнитной среде задачи 16.3.

Используя материальные уравнения, получим

$$B(r) = \mu_0 \mu H(r) = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$$

А для модуля вектора намагниченности имеем

$$M(r) = (\mu - 1)H(r) = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi r}$$

Для объемных токов намагничения удобно ввести цилиндрическую систему координат и тогда выражение примет вид

$$\overrightarrow{j_m} = rot\vec{M}, \qquad j_m = \left(rot\vec{M}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rM_\varphi)}{\partial r} = 0$$

На границе провода имеется скачек вектора намагниченности. Поэтому поверхностный ток намагничения будет равен

$$i_m = M(a) = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi a}$$

Теперь вычислим полный ток намагничения, который течет по поверхности

$$I_m = i_m 2\pi a = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi a} 2\pi a = (\mu - 1)I$$

По проводу будет течь суммарный ток, который равен

$$I_\Sigma = I + I_m = I + (\mu - 1)I = \mu I$$

То есть с учетом влияния магнетика на магнитное поле можно считать, что провод находится в вакууме и по нему течет ток I_Σ. Тогда, например, индукцию можно определить, применив теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$

$$\oint \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = B2\pi r = \mu_0 I_\Sigma = \mu_0 \mu I \rightarrow B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$$

Задача 16.4

Имеется длинный цилиндрический провод радиусом R. Сам провод сделан из магнитного материала с проницаемостью μ. По нему течет ток I, который равномерно распределен по сечению провода (Рис.16.5). Нужно определить индукцию, напряженность, намагниченность, поверхностную и объемную плотности токов намагничения.

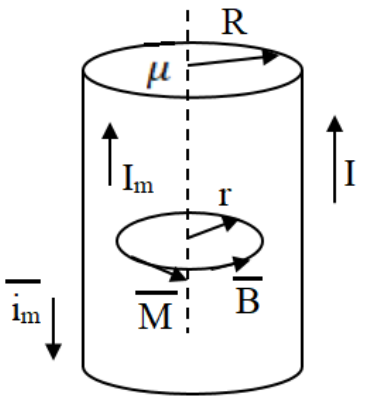


Рис.16.5. Магнитный провод в немагнитной среде задачи 16.4.

Решение:

Так как ток распределен по сечению проводника равномерно, то объемная плотность токов проводимости равна

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

В силу симметрии задачи линии индукции будут со направлены и имеют вид окружностей. Мы выбираем контур радиусом r, как показано на Рис.16.5. Применим теорему о циркуляции вектора напряженности по данному контуру.

$$\oint_L \vec{H}\,\vec{dl} = H2\pi r = j\pi r^2 = \frac{I\pi r^2}{\pi R^2} \to H = \frac{I}{2\pi R^2} r$$

Используя материальное уравнение, получаем

$$B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R^2} r$$

$$M = (\mu - 1)H = (\mu - 1)\frac{I}{2\pi R^2} r$$

Для объемной плотности токов намагничения имеем:

$$\overrightarrow{j_m} = rot\vec{M}, \qquad j_m = \left(rot\vec{M}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rM_\varphi)}{\partial r} = \frac{(\mu-1)I}{2\pi R^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{(\mu-1)I}{\pi R^2} = const$$

Полный ток будет равен

$$I_{m\,об} = j_m \pi R^2 = (\mu - 1)I$$

На границе есть скачок намагниченности. Поэтому мы можем найти поверхностный ток намагниченности как

$$i_m = M(R) = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi R}$$

$$\overrightarrow{i_m} = [\vec{M} \cdot \vec{n}]$$

И полный ток намагничения, который течет по поверхности равен

$$I_{m\ \text{пов}} = i_m\, 2\pi R = (\mu - 1)I$$

$$\overrightarrow{I_{m\ \text{пов}}} + \overrightarrow{I_{m\ \text{об}}} = 0$$

То есть суммарный ток намагничения будет равен нулю.

Задача 16.5

Имеется длинный соленоид. По обмотке течет ток I, в результате чего внутри соленоида существует магнитное поле и на оси соленоида индукция магнитного поля равна B_0 (Рис.16.6). Этот соленоид заполнен магнетиком с неоднородной магнитной проницаемостью $\mu(r) = 1 + \alpha r, \alpha = const$. Нужно найти величины напряженности, индукции, намагниченности, поверхностную и объемную плотности токов намагниченности в материале внутри соленоида.

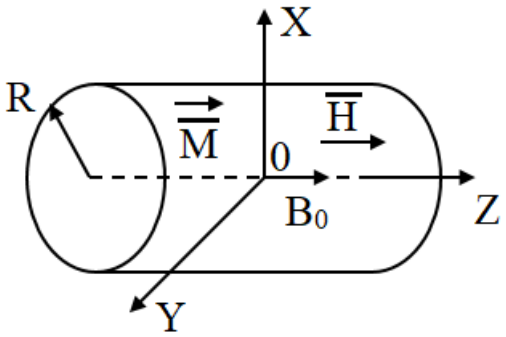


Рис.16.6. Соленоид с магнетиком внутри к задаче 16.5.

Решение:

Внутри соленоида вектор напряженности магнитного поля со направлен с осью соленоида. Поэтому можно считать, что

$$H(x) = H(0) = \frac{B_0}{\mu\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0} = H$$

$$B(r) = \mu(r)\mu_0 H = \mu_0(1 + \alpha r)\frac{B_0}{\mu_0} = (1 + \alpha r)B_0$$

$$M(r) = (\mu - 1)H = \alpha r \frac{B_0}{\mu_0}$$

$$i_m = M(R) = \alpha R \frac{B_0}{\mu_0}, \qquad \overrightarrow{i_m} = [\vec{M} \cdot \vec{n}]$$

$$\overrightarrow{j_m} = rot\vec{M}, \qquad j_m = \left(rot\vec{M}\right)_\varphi = \frac{\partial M_z}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} = -\alpha \frac{B_0}{\mu_0}$$

Семинар 17. Поле постоянных магнитов. Метод «магнитных зарядов».

Постоянные магниты изготавливаются как правило из ферримагнитных материалов.

Напомним, что для ферромагнетиков характеры значения $\mu \gg 1$ и максимальные значения могут достигать $\mu_{max} \sim 10^4 \div 10^6$. Это объясняется тем, что атомы в ферримагнитных материалов обладают магнитным моментов в силу своего строения. У каждого из доменов есть магнитные моменты.

Магнетики обладают свойством гистерезиса. То есть зависимость магнитного момента M от внешнего магнитного поля H выглядит следующим образом (Рис.17.1):

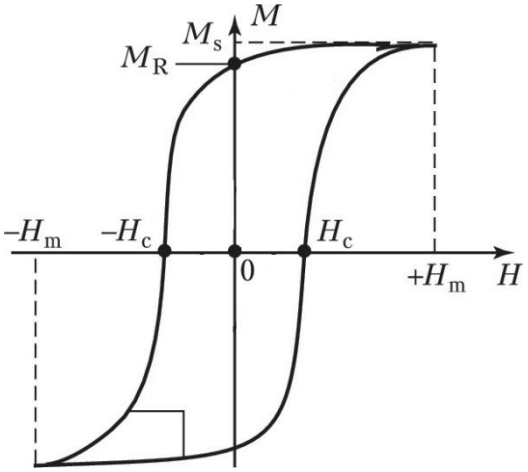


Рис.17.1. Петля гистерезиса ферромагнетика.

Площадь данной петли равна работе по перемагничиванию магнетика. Магнитное поле практически полностью сосредоточено в самом ферромагнетике. И напряженность поля внутри магнетика можно вычислить как

$$H_\alpha = H_{0\alpha} - N_\alpha M_\alpha, \qquad \alpha = x, y, z$$

где N_α – фактор формы магнетика.

Только в случае тел эллипсоидальной формы намагничивание является однородным. Коэффициенты в сумме равны единицы.

$$N_x + N_y + N_z = 1$$

Тогда для частных случаев тел эллипсоидальной формы мы можем записать следующее:

Шар.

$$N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$$

Тонкий стержень (намагниченный вдоль оси Z).

$$N_x = N_y = \frac{1}{2}, \qquad N_z = 0$$

Диск (где ось Z перпендикулярна плоскости).

$$N_z = 1, \qquad N_x = N_y = 0$$

Для тел других форм индукция и напряженность внешнего поля не совпадают с индукцией и напряженностью поля в самом магнетике.

Далее познакомимся с **методом «магнитных зарядов»**. Он удобен когда отсутствуют токи проводимости, то есть

$$\vec{j} = 0$$

Запишем следующее условие

$$div\vec{B} = 0, \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Введем формально понятие плотности «магнитных зарядов» и обозначим ее как

$$\rho_m = -div\vec{M}$$

$$div\vec{B} = \mu_0\left(div\vec{H} + div\vec{M}\right) = 0 \rightarrow \ div\vec{H} = -div\vec{M} = \rho_m$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} = 0$$

Эти два полученных уравнения можно сравнить с уравнениями электростатики.

$$\begin{cases} div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ rot\vec{E} = 0 \end{cases}$$

Существует полная аналогия этих двух систем уравнений, если мы будет применять понятие плотности «магнитных зарядов». То есть можно заменить задачу магнитостатики на эквивалентную задачу электростатики, затем найти ее решение и сделать следующие замены

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho_m$$

Можно также отметить поверхностные магнитные заряды с плотностью

$$\sigma_m = -\left(\vec{n}\left(\overrightarrow{M_2} - \overrightarrow{M_1}\right)\right)$$

И тогда можно сделать еще следующие формальные замены:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_m$$

$$\frac{\vec{p}}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{M}$$

Задача 17.1

Имеется постоянных магнит в форме длинного цилиндра с длиной $2l$ и радиусом R, причем $R \ll l$. Он имеет вектор намагничения $\vec{M}$, направленный как показано на Рис.17.2. Нужно найти индукцию и напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндра.

Решение:

Задачу решим двумя способами.

I способ (метод молекулярных токов).

$$\overrightarrow{J_m} = rot\vec{M} = 0$$

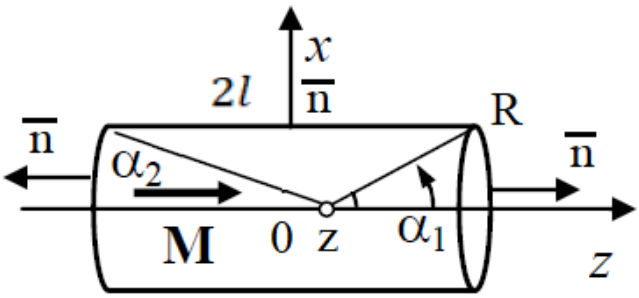


Рис.17.2. Определение индукции и напряженности поля внутри и вне цилиндра.

Существуют поверхностные токи намагничения с плотностью

$$\overrightarrow{i_m} = [\vec{M} \cdot \vec{n}]$$

На торцах цилиндра направления нормалей показаны на Рис.17.2, причем мы видим, что угол между векторами равен нулю и поверхностных молекулярных токов нет. А на боковой поверхности получаем, что будет протекать ток с поверхностной плотностью

$$i_m = M$$

То есть мы можем заменить данный цилиндр соленоидом, который обтекается током, причем поверхностная плотность токов будет равна

$$nI = i_m = M$$

На оси соленоида индукция поля $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{M}$ и по величине равна

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

Теперь введем ось Z вдоль оси соленоида и запишем получившееся выражение для индукции магнитного поля внутри соленоида

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 M\left(\frac{l-z}{\sqrt{R^2+(l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2+(l+z)^2}}\right)$$

А для напряженности поля имеем

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = M\left(\frac{1}{2}\left(\frac{l-z}{\sqrt{R^2+(l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2+(l+z)^2}}\right) - 1\right)$$

Теперь найдем значения вне цилиндра.

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{2}M\left(\frac{l-z}{\sqrt{R^2+(l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2+(l+z)^2}}\right)$$

II способ (метод «магнитных зарядов»).

Наш цилиндр имеет намагниченность $\vec{M}$

$$\rho_m = -div\vec{M} = 0$$

А поверхностная плотность существует и равна

$$\sigma_m = -\left(\vec{n}\left(\overrightarrow{M_2} - \overrightarrow{M_1}\right)\right)$$

На боковой поверхности вектор нормали направлен перпендикулярно $\vec{M}$, то есть «магнитных зарядов» нет. На торцах получаем следующее значение

$$\sigma_m = |M|$$

То есть наша первоначальная задача свелась к задаче о поле двух дисков. Они заряжены с поверхностными плотностями $\pm\sigma_m$. Воспользуемся результатом решения этой задачи.

Напряженность поля, направленная вдоль перпендикуляра к плоскости диска равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + {z_0}^2}}\right)$$

Тогда суммарная напряженность между дисками будет равна

$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{l - z}{\sqrt{R^2 + (l - z)^2}} + 1 - \frac{l + z}{\sqrt{R^2 + (l + z)^2}}\right)$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{l - z}{\sqrt{R^2 + (l - z)^2}} + \frac{l + z}{\sqrt{R^2 + (l + z)^2}} - 2\right)$$

И теперь сделаем замену

$$\vec{E} \to \vec{H}, \qquad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to \sigma_m$$

У нас получится точно такая же формула, полученная первым способом.

Индукцию магнитного поля найдем отсюда

$$B = \mu_0(H + M)$$

Теперь вне цилиндра найдем значения напряженности следующим образом

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z - l}{\sqrt{R^2 + (z - l)^2}} - 1 + \frac{z + l}{\sqrt{R^2 + (z + l)^2}}\right)$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z + l}{\sqrt{R^2 + (z + l)^2}} + \frac{l - z}{\sqrt{R^2 + (z - l)^2}}\right)$$

Давайте проанализируем полученный результат и для этого изобразим график, показывающий зависимости $M(z)$ и $B(z)$ (Рис.17.3).

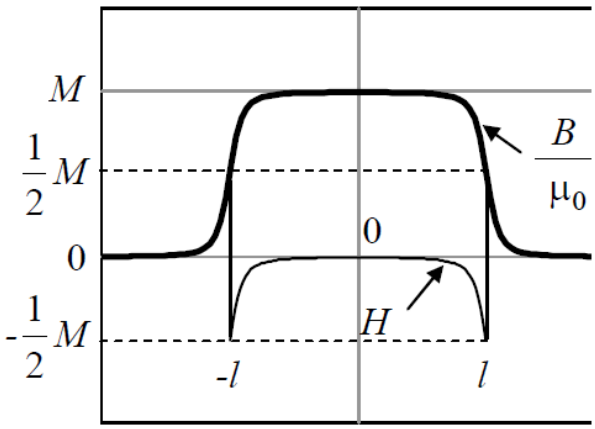


Рис.17.3. Графики зависимости M(z) и B(z).

Если $R \ll l$, то значение напряженности в самом центре

$$H(0) = \frac{1}{2}M\left(\frac{2l}{\sqrt{R^2+l^2}} - 2\right) \approx 0$$

А в области, которая находится на расстоянии l, получим

$$H(z=l) = \frac{1}{2}M\left(\frac{2l}{\sqrt{R^2+4l^2}} - 2\right) \approx -\frac{1}{2}M$$

Задача 17.2

Имеется длинный цилиндр с намагниченностью M. Он разрезан так, что его половинки разделены на некоторое расстояние между собой (Рис.17.4). Нужно найти индукцию и напряженность магнитного поля в зазоре и в самом цилиндре.

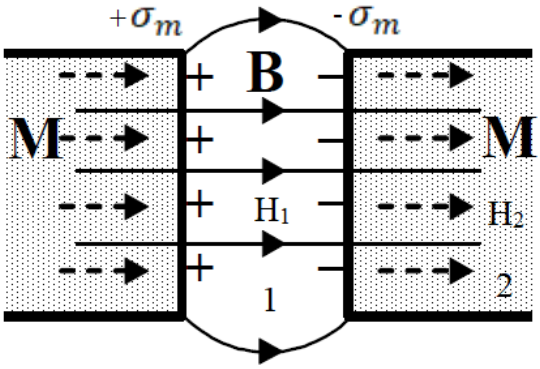


Рис.17.4. Разрезанный на две половинки цилиндр задачи 17.2.

Решение:

I способ (метод «магнитных зарядов»).

Согласно этому методу $M = const, \rho_m = 0$. Но существует поверхностный «магнитный заряд» равный

$$\sigma_m = -(\vec{n} \cdot \vec{M})$$

Вектор нормали направлен из первой среды во вторую. И заряды на границах половин цилиндра определены как показано на Рис.17.4.

По величине $\sigma_m = M$.

То есть у нас получается, что заряженными будут только торцы, близко находящиеся друг к другу. Эта задача имеет аналог с электростатической задачей, где есть две пластины, заряженные $\pm\sigma$. Мы знаем, что напряженность поля в конденсаторе равно

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to \sigma_m, \qquad \vec{E} \to \vec{H}$$

И тогда напряженность поля в зазоре будет равна

$$H_1 = \sigma_m = M$$

А индукция магнитного поля находится из уравнения

$$B_1 = \mu_0(H_1 + M_1) = \mu_0 M$$

Значения напряженности и индукции магнитного поля в магните получаются следующего вида

$$B_2 = B_1 = \mu_0 M$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - M = 0$$

II способ (метод молекулярных токов).

Объемных токов нет $j_m = 0$. А поверхностные токи найдем из уже знакомой нам формулы

$$\overrightarrow{\iota_m} = [\vec{M} \cdot \vec{n}]$$

На торцах поверхностная плотность равна нулю. Но существуют токи, обтекающие цилиндры с плотностью

$$\overrightarrow{\iota_m} = M$$

Тогда внутри цилиндра индукция поля будет равна

$$B = \mu_0 In = \mu_0 M$$

И в зазоре получается такое же значение. Для нахождения напряженности магнитного поля применим формулу

$$H_2 = \frac{B}{\mu_0} - M = 0$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = M$$

Задача 17.3

Имеется шар из магнитного материала, который намагничен однородно (Рис.17.5). Нужно найти значение напряженности магнитного поля.

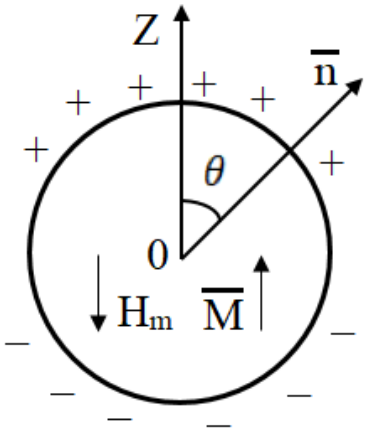


Рис.17.5. Намагниченный шар задачи 17.3.

Решение:

Задачу решим с помощью метода «магнитных зарядов». Так как вектор намагниченности константа, то объемных зарядов нет

$$\rho_m = 0$$

$$\sigma_m = \vec{n}\vec{M} = M\cos\theta$$

Данная задача напоминает задачу о диэлектрическом шаре. Напомним, что величина деполяризующего поля была равна

$$\vec{E} = -\frac{1}{3}\frac{\vec{p}}{\varepsilon_0}$$

Теперь сделаем замены

$$\vec{E} \to \vec{H}$$
$$\frac{\vec{p}}{\varepsilon_0} \to \vec{M}$$

Тогда получаем, что напряженность поля равна

$$\vec{H} = -\frac{1}{3}\vec{M}$$

В качестве продолжения рассмотрим следующую задачу. Имеется ненамагниченный шар с радиусом R, который изготовлен из линейного изотропного однородного материала с магнитной проницаемостью μ. Он внесен во внешнее поле с индукцией $\overrightarrow{B_0}$. Происходит намагничение шара и он приобретает магнитный момент $\vec{M}$. Нужно определить индукцию внутри и вне шара.

Решение:

Напряженность и индукция магнитного поля внутри шара, когда $r \leq R$ складывается из

$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} + \overrightarrow{H_m} = \overrightarrow{H_0} - \frac{1}{3}\vec{M}$$
$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}$$
$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} - \frac{1}{3}(\mu - 1)\vec{H} \to \vec{H} = \frac{3\overrightarrow{H_0}}{\mu + 2} = \frac{3\overrightarrow{B_0}}{\mu_0(\mu + 2)}$$
$$\vec{B} = \mu\mu_0\frac{3\overrightarrow{H_0}}{\mu + 2} = \frac{3\mu\overrightarrow{B_0}}{\mu + 2}$$

Теперь найдем значения вне шара $r > R$. Представим шар как диполь. Тогда шар приобретет магнитный момент

$$\overrightarrow{P_m} = \vec{M}\frac{4}{3}\pi R^3$$

И индукция поля будет равна

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_0} + \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\overrightarrow{P_m}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\overrightarrow{P_m}}{r^3}\right]$$

Следуя логике этой задачи, мы можем вычислить напряженность и индукцию магнитного поля, скажем, в стержне. Величина размагничивающего поля равна

$$H_m = -\frac{1}{2}\vec{M}$$

Задача 17.4

Имеется тороид из магнитного материала, на который навито определенное число проволоки и создается магнитное поле внутри обмотки. И есть второй тороид, точно такой же, но в сердечнике магнита имеется узкий зазор толщиной l_1 (Рис.17.6). Какой ток I_2 надо пропустить по обмотке второго магнита с зазором, чтобы $B_2 = B_1$ при токе $I_1 = 0.2$ А.

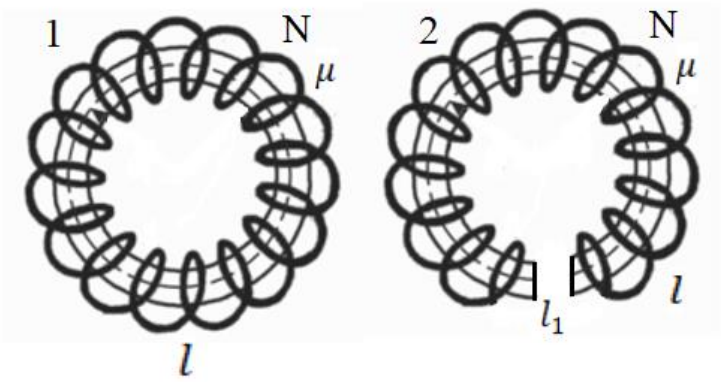


Рис.17.6. Два тороидальных магнита, один из которых имеет зазор.

Решение:

Давайте конкретизируем, что у нас

$$l = 15 \text{ см}$$
$$l_1 = 1 \text{ мм}$$
$$\mu = 3000$$

Рассмотрим первую катушку. Выберем контур, совпадающий со средней линией тора. И применим теорему о циркуляции вектора напряженности

$$H_1 l = NI_1 \to H_1 = \frac{NI_1}{l}$$
$$B_1 = \mu\mu_0 H_1 = \mu\mu_0 \frac{NI_1}{l}$$

Во второй катушке в области зазора нормальная составляющая вектора индукции внутри материала и зазора остается низменной.

$$B_2 = B_{\text{заз}} = B$$

Циркуляция вектора напряженности будет равна

$$\oint \vec{H}\vec{dl} = H_2(l - l_1) + H_{\text{зазор}} l_1 = NI_2$$
$$H_2 = \frac{B}{\mu\mu_0}, \qquad H_{\text{зазор}} = \frac{B}{\mu_0}$$
$$\frac{B}{\mu\mu_0}(l - l_1) + \frac{B}{\mu_0} l_1 = NI_2$$
$$B_2 = B = \frac{\mu\mu_0 NI_2}{l - l_1 + \mu l_1} = B_1 = \mu\mu_0 \frac{NI_1}{l} \to I_2 = 1 + (\mu - 1)\frac{l_1}{l}$$

Семинар 18. Энергия, работа и пондермоторные силы в магнитном поле.

Если под действием пондермоторных сил произошло перемещение тела вдоль одной из обобщённых координат на некоторое расстояние, то работа равна

$$\delta A = F_{x_i} dx_i \to F_{x_i} = \frac{\partial A}{\partial x_i}$$

Значение пондермоторной силы можно определить из энергии магнитного поля по формулам

$$F_{x_j} = \left(-\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)_{\Phi=const}$$

$$F_{x_k} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{I=const}$$

Эти утверждения следуют из закона изменения энергии

$$\delta A + \delta W = \sum I_i d\Phi_i$$

Энергия вычисляется через объемную плотность, которая равна

$$w = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}, \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \qquad w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2$$

И полная энергия в объеме вычисляется как

$$W = \int_V w\, dV$$

Если дипольный момент находится в магнитном поле, которое неоднородно, то на него будет действовать сила, равная

$$\vec{F} = \vec{\imath}\left(\overrightarrow{p_m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\right) + \vec{\jmath}\left(\overrightarrow{p_m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\overrightarrow{p_m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right)$$

Если $\overrightarrow{p_m} = const$, то получаем

$$\vec{F} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial(\overrightarrow{p_m}\vec{B})}{\partial x}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial(\overrightarrow{p_m}\vec{B})}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(\overrightarrow{p_m}\vec{B})}{\partial z}\right)$$

В случае, когда магнитный момент находится вдали от токов, создающих магнитное поле, эта же формула приобретает вид

$$\vec{F} = (\overrightarrow{p_m}\nabla)\vec{B}$$

На единицу объема магнетика в неоднородном магнитном поле будет действовать сила с объемной плотностью

$$\vec{f} = \vec{\imath}\left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\right) + \vec{\jmath}\left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right)$$

В любом поле действует механический момент сил, равный

$$\vec{M}_{\text{мех}} = \left[\overrightarrow{p_m} \cdot \vec{B}\right]$$

Существует еще один способ расчета пондермоторных сил, который связан с введением максвелловских сил натяжения и отталкивания.

Есть две среды с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Существует компонента вектора индукции, которая перпендикулярна границе раздела сред. Тогда на границу раздела со стороны каждой из сред будет направлена сила с поверхностной плоскостью

$$f^n = w^n$$

А полная сила вдоль перпендикуляра к среде

$$f_x^n = w_2 - w_1 = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)$$

Тангенциальная компонента вектора индукции вдоль границы равна

$$f_x^\tau = w_1^\tau - w_2^\tau = \frac{1}{2}\mu_0 H^2(\mu_1 - \mu_2)$$

Суммарная сила будет направлена в сторону магнетика с меньшей магнитной проницаемостью.

Задача 18.1

Имеется бесконечная плоскость, по которой течет ток I. Слева и справа от плоскости имеются две среды, в которых вектор индукции направлен так, как показано на Рис.18.1. Нужно определить давление на проводящую плоскость.

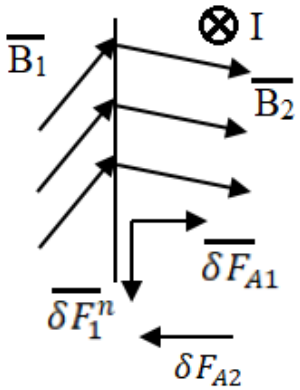


Рис.18.1. Плоскость, разделяющая две среды.

Решение:

Разложим вектор $\overrightarrow{B_1}$ на две составляющие. Компоненты $\overrightarrow{B_1^n}$ и $\overrightarrow{B_1^\tau}$. Выделим на плоскости вдоль тока полоску ширины δl, по которой будет протекать ток. Тогда в магнитном поле с индукцией $\overrightarrow{B_1}$ на эту полоску будет действовать сила Ампера, равная

$$\delta\overrightarrow{F_A} = I\left[\vec{l}\cdot\overrightarrow{B_1}\right] = I\left[\vec{l}\cdot(\overrightarrow{B_1^n} + \overrightarrow{B_1^\tau})\right]$$

Во второй области также раскладываем вектор магнитной индукции на компоненты. Тогда нас будут интересовать только те силы, которые перпендикулярны нашей плоскости (Рис.18.1). Эти силы направлены противоположно относительно друг друга. Поэтому нужно вычесть одну из другой.

Теперь произведем виртуальное смещение границы на малую величину dx. При этом будет совершена работа, равная

$$\delta A = Fdx = pSdx = pdV = \delta W = (w_1 - w_2)dV$$

Индукция поля $\overrightarrow{B_1}$ по модулю больше, чем индукция поля $\overrightarrow{B_2}$. Так как больше линий проходит через площадку единичной площади в первой области.

Тогда понятно, что давление будет равно

$$p = (w_1 - w_2) = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0\mu}$$

Задача 18.2

Имеется длинный соленоид радиуса R, длиной l с плотностью витков n. По обмотке протекает ток I (Рис.18.2). Нужно определить давление на боковую поверхность соленоида.

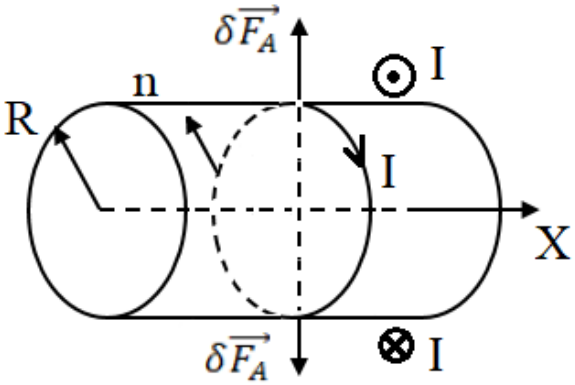


Рис.18.2. К определению давления на боковую поверхность соленоида.

Решение:

Рассмотрим один из витков соленоида. Пусть по нему течет ток как показано на Рис.18.2. Тогда внутри соленоида создается однородное магнитное поле. На верхний участок будет действовать сила Ампера, равная

$$\delta\overrightarrow{F_A} = I\left[\, d\vec{l} \cdot \vec{B}\right]$$

На нижнем участке сила Ампера будет действовать вниз от соленоида. То есть можно видеть, что силы Ампера растягивают данный виток и стремятся увеличить его радиус.

Пусть под действием этих сил радиус изменился на dR. При этом силы совершили работу, равную

$$\delta A = FdR = \delta W \rightarrow F = \left(\frac{\partial W}{\partial R}\right)_{I=const}$$

$$F = p_r 2\pi Rl, \qquad W = \frac{1}{2}LI^2, \qquad L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

$$F = p_r 2\pi Rl = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi l I^2 2R$$

Тогда давление на боковую поверхность будет равно

$$p_r = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = w$$

Соленоид делит все пространство на две области. Одна заключена внутри соленоида и в ней есть магнитное поле, а во второй, вне соленоида, магнитного поля нет.

Это давление не позволяет получить магнитные поля больше определенной величины. А сильные магнитные поля создаются импульсными методами. Реально можно создать поле с индукцией $B < 50$ Тл.

Задача 18.3

Тот же соленоид из задачи 18.2. Но теперь нужно определить давление, которое оказывается на торцы соленоида.

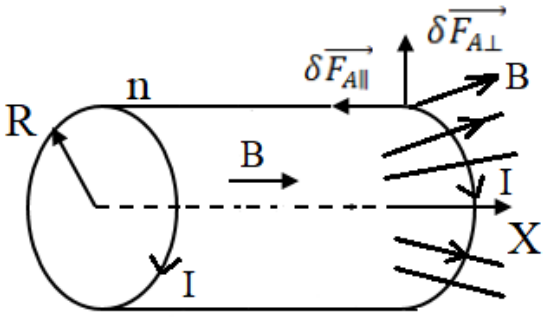


Рис.18.3. К определению давления на торцах соленоида.

Решение:

Поле вблизи торца неоднородно. Рассмотрим область вблизи торца. Здесь поле направлено как показано на Рис.18.3. Тогда сила Ампера, действующая на виток с током, равная

$$\delta\overrightarrow{F_A} = I\left[d\vec{l}\cdot\vec{B}\right]$$

Разложим силу Ампера на две составляющие $\delta\overrightarrow{F_{A\perp}}$ и $\delta\overrightarrow{F_{A\parallel}}$. Пусть под действием силы длина соленоида увеличилась на dl. Тогда была совершена работа, равная

$$\delta A = Fdl = \delta W_{I=const} \rightarrow F = \frac{\partial W}{\partial l}_{I=const}$$

$$F = p_l \pi R^2, \qquad W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{N}{l}\right)^2 \pi l I^2 R^2 = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2\pi R^2 I^2}{l}$$

$$p_l \pi R^2 = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 \pi R^2 I^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\right)$$

$$p_l = -\frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{N}{l}\right)^2 I^2$$

То есть на самом деле сила препятствует увеличению длины соленоида, то есть она его сжимает.

Задача 18.4

Имеется длинный соленоид. В центре создано магнитное поле с индукцией B_0. Вдоль оси расположен парамагнитный стержень с площадью сечения S (Рис.18.4). Нужно определить силу, которая действует на стержень.

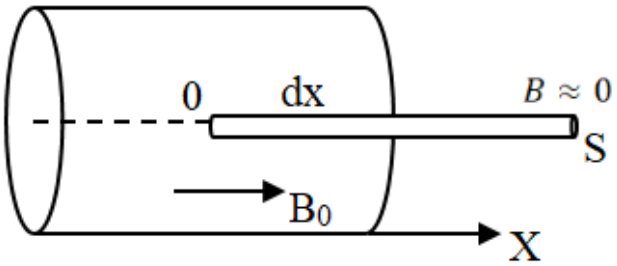


Рис.18.4. К определению силы, действующей на стержень в соленоиде.

Решение:

В магнитном поле стержень намагничивается и приобретает вектор намагниченности, который равен

$$M = (\mu - 1)H_\mu$$

Вдоль оси соленоида магнитное поле меняется. Тогда объемная плотность сил, действующая на стержень, равна

$$\vec{f} = \vec{M}\frac{d\overrightarrow{B_\mu}}{dx}\overrightarrow{e_x} = (\mu - 1)\frac{B_\mu}{\mu_0\mu}\frac{dB_\mu}{dx}\overrightarrow{e_x}$$

Участок стержня, у которого длина dx, имеет магнитный момент, равный

$$d\overrightarrow{p_m} = \vec{M}Sdx$$

Тогда сила, действующая на выделенный участок, равна

$$d\vec{F} = \vec{f}Sdx = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0\mu}B_\mu dB_\mu$$

И для нахождения полной силы проведем интегрирование

$$\vec{F} = \frac{(\mu - 1)}{2\mu_0\mu}\int_{B_0}^{0} d\left(B_\mu^2\right)\overrightarrow{e_x} = -\frac{(\mu - 1)}{2\mu_0\mu}B_0^2\overrightarrow{e_x}$$

То есть сила направлена противоположно выбранного направления оси X, то есть парамагнитный стержень будет втягиваться в область более сильного магнитного поля.

Задача 18.5

Имеется длинный соленоид. В центре создано магнитное поле с индукцией B_0. В этой точке находится маленький парамагнитный шарик объемом V (Рис.18.5). Какую работу должны совершить внешние силы, чтобы перенести шар из центра соленоида к центру торца соленоида?

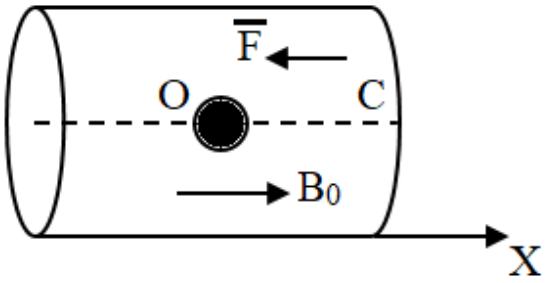


Рис.18.5. Парамагнитный шар в центре соленоида.

Решение:

В магнитном поле шар намагничивается и приобретает намагниченность

$$M = (\mu - 1)H_{ш}$$

Определим намагниченность шарика с учетом факторов формы.

$$H_{ш} = H - \frac{1}{3}M = H - \frac{1}{3}(\mu - 1)H_{ш}$$

$$H_{ш} = \frac{3H}{\mu + 2} = \frac{3B}{\mu_0(\mu + 2)}, \qquad M = \frac{3(\mu - 1)B}{\mu_0(\mu + 2)}$$

Шар весь приобретает магнитный момент

$$p_m = MV$$

На шар будет действовать сила, равная

$$\vec{F} = p_m \frac{d\vec{B}}{dx} = MV\frac{d\vec{B}}{dx}$$

Она препятствует движению шарика. Поэтому нужно приложить внешнюю силу

$$\overrightarrow{F_{вн}} = -\vec{F}$$

И работа по перемещению шара на маленькое расстояние будет равна

$$\delta A = Fdx = MVdB$$

Тогда полная работа внешних сил по перемещению шарика из точки O в точку C равна

$$A = \int_{B_o}^{B_C} \frac{3(\mu - 1)V}{\mu_0(\mu + 2)} BdB = \frac{3(\mu - 1)V}{\mu_0(\mu + 2)}\frac{3}{8}B_0^2 = \frac{9}{8}\frac{(\mu - 1)V}{\mu_0(\mu + 2)}B_0^2$$

Задача 18.6

Имеется электромагнит, сделанный из ферромагнетика. На него намотана катушка из N витков, по которой протекает ток I (Рис.18.6). Снизу есть пластина – якорь магнита. Пусть длина электромагнита внутри ярма и якоря когда нет зазора, равна l. Толщина зазора x. Нужно определить силу, с которой якорь притягивается к электромагниту.

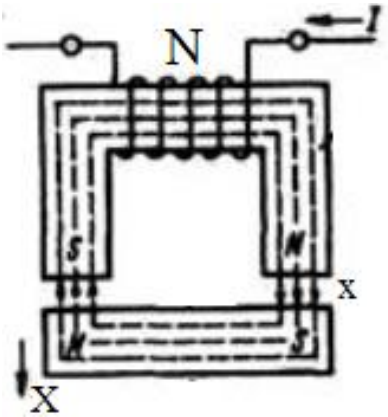


Рис.18.6. Электромагнит и якорь.

Решение:

В месте стыка образуются две области. Одно область заполнена воздухом, а вторая ферромагнетиком. Поэтому плотность энергии магнитного поля в зазоре и самом материале разная. То есть там возникают силы максвелловского натяжения. Вычислим их следующем способом

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{I=const}$$

Происходит перемещение якоря под действием силы на величину dx. При этом была совершена работа, равная

$$\delta A = Fdx = \delta W$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi, \qquad \Phi = LI$$

$$F = \frac{1}{2}I\frac{d\Phi}{dx}$$

$$\Phi = BSN$$

То есть нужно определить индукцию в электромагните. Для этого воспользуемся теоремой о циркуляции

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = H_c l + H_з 2x = NI$$

Если пренебрежём рассеянием поля в узком зазоре, то можно сказать, что

$$B_c = B_з = B$$

$$B_c = \mu_0\mu H_c, \qquad B_з = \mu_0\mu H_з$$

$$\frac{B}{\mu_0\mu}l + \frac{B}{\mu_0}2x = NI \rightarrow B = \frac{\mu_0\mu NI}{l + 2\mu x}$$

Находим поток, пронизывающий все витки катушки

$$\Phi = BSN = \frac{\mu_0\mu N^2 SI}{l + 2\mu x}$$

И сила будет равна

$$F = \frac{1}{2}\mu_0 \mu N^2 S I^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{l + 2\mu x}\right)$$

$$F = -\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 S I^2}{(l + 2\mu x)^2}$$

То есть наша пластинка притягивается к ярму электромагнита. Если мы посмотрим на величину магнитного поля, то сила будет выражаться следующим образом

$$F = -\frac{B^2 S}{\mu_0} = -\frac{B^2}{2\mu_0} 2S = -w2S$$

Через максвелловские силы натяжения можно получить следующее выражение силы

$$f_x^n = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{B^2}{2\mu_0}\frac{\mu - 1}{\mu}$$

Семинар 19. Переходные процессы в электрических цепях.

Будем рассматривать **квазистационарные электромагнитные процессы** – такие процессы, в которых система переходит из одного состояния в другое настолько медленно, что время изменения электромагнитных параметров системы значительно превышает время установления равновесного состояния в системе.

Переходной процесс – такой процесс перехода системы из одного состояния в другое с изменением параметров цепи. Часто такие процессы возникают при переключении ключа в системе.

Стационарное состояние – такое состояние системы, в котором электромагнитные параметры цепи не зависят от времени.

Расчет цепей, в которых происходят переходные процессы, производится с помощью закона Ома и правил Кирхгофа.

Если по цепи протекает переменный ток и в ней содержится индуктивность, то возникает ЭДС в цепи, равная

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Задача 19.1

Цепь состоит из резистора с сопротивлением R и конденсатора емкостью C (Рис.19.1). Имеется также ключ K цепи и вначале напряжение на конденсаторе равно U_0. После ключ замыкается. Нужно найти зависимость напряжения конденсатора от времени.

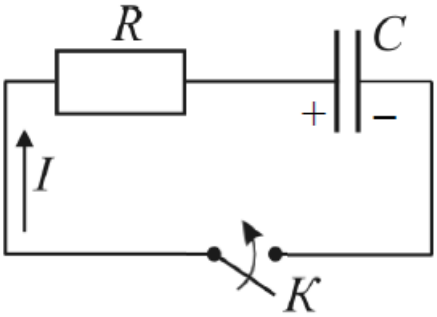


Рис.19.1. К нахождению напряжения в конденсаторе в RC-цепи.

Решение:

Применим к цепи закон Ома:

$$U_R + U_C = 0$$

$$U_R = IR, \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

Так как для конденсатора заряд равен

$$q = CU_C$$

Тогда ток также выражается как

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$$

$$C\frac{dU_C}{dt}R + U_C = 0$$

Перепишем это уравнение в следующем виде

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{RC}U_C$$

$$\int_{U_0}^{U_C}\frac{dU_C}{U_C} = -\int_0^t\frac{dt}{RC} \to ln\frac{U_C}{U_0} = -\frac{1}{RC}t$$

$$U_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Здесь величина $\tau = RC$ – время релаксации. То есть оно показывает время, за которое некоторый параметр изменяется в e раз.

Тогда наш график зависимости напряжения на конденсаторе от времени будет выглядеть как показано на Рис.19.2.

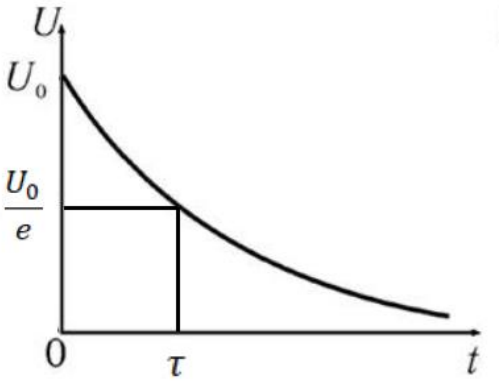


Рис.19.2. График зависимости U(t) на конденсаторе.

Задача 19.2

Цепь как и в задаче 19.1, но теперь в ней также есть источник ЭДС (Рис.19.3). В начальный момент времени конденсатор не заряжен, то есть $U_C(0) = 0$. Потом происходит замыкание ключа. Нужно найти $U_C(t)$.

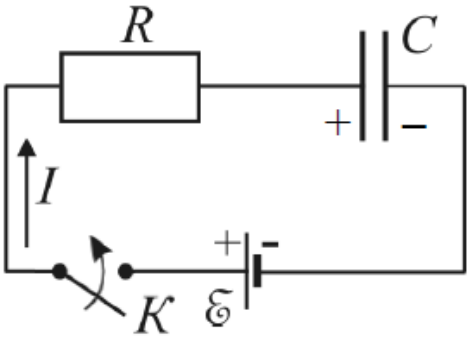


Рис.19.3. Зарядка конденсатора в RC-цепи.

Решение:

Запишем также уравнения, соответствующие закону Ома в цепи

$$U_R + U_C = \varepsilon$$

$$U_R = IR = \frac{dq}{dt}R, \qquad U_C = \frac{q}{C}$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

Сначала найдем зависимость заряда от времени, а потом, используя соотношение выше, найдем зависимость напряжения на конденсаторе от времени.

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{RC}(q - C\varepsilon)$$

Разделим переменные данного уравнения

$$\int_0^q \frac{d(q - C\varepsilon)}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \to ln\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}t$$

$$1 - \frac{q}{C\varepsilon} = e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Тогда зависимость заряда на конденсаторе равна

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

И искомое напряжение равно

$$U_C(t) = \frac{q}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

А график данной зависимости показан на Рис.19.4.

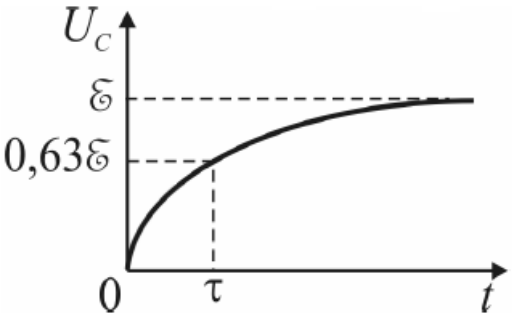


Рис.19.4. График зависимости $U_C(t)$ при зарядке конденсатора.

Для того, чтобы определить физический смысл времени релаксации вычислим ток, в зависимости от времени

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = C\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}\frac{1}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

То есть здесь время релаксации равно времени, за которое ток в цепи уменьшается в e раз.

Задача 19.3

Имеется схема, которая показана на Рис.19.5. Ключ K замыкают в момент времени $t = 0$. Нужно найти зависимость тока в цепи от времени.

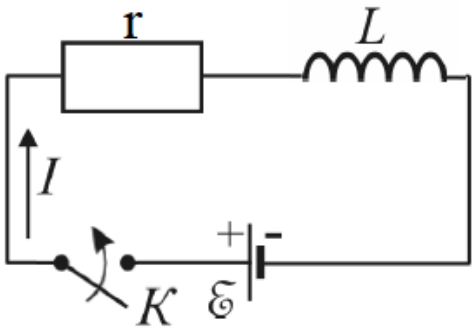


Рис.19.5. Цепь с катушкой индуктивности.

Решение:

По цепи начинает течь ток. Мы можем записать для нее закон Ома. Однако, нужно учесть, что при протекании переменного тока по катушке с индуктивностью L возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Поэтому запишем следующее

$$Ir = \varepsilon + \varepsilon_{\text{инд}} = \varepsilon - L\frac{dI}{dt}$$

$$Ir + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

Перепишем полученный уравнения в виде

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{Ir}{L} + \frac{\varepsilon}{L} = -\frac{r}{L}\left(I - \frac{\varepsilon}{r}\right)$$

Разделяем переменные в этом уравнении

$$\int_0^I \frac{dI}{I - \frac{\varepsilon}{r}} = -\frac{r}{L}\int_0^t dt \to ln\frac{I - \frac{\varepsilon}{r}}{-\frac{\varepsilon}{r}} = -\frac{r}{L}t$$

$$1 - \frac{Ir}{\varepsilon} = e^{-\frac{r}{L}t}$$

Тогда ток зависит от времени как

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) = \frac{\varepsilon}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Время релаксации в подобных процессах довольно небольшое. Можно провести оценку следующим образом

$$L = 3\ \text{Гн}$$

$$r = 240\ \text{Ом}$$

Тогда время релаксации равно

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{3}{240} = 0.0125 \text{ с}$$

Задача 19.4

Рассмотрим цепь, которая показана на Рис.19.6. Изначально конденсаторы не заряжены. Нужно найти какой заряд будет на конденсаторе C_1 в зависимости от времени после замыкания ключа K.

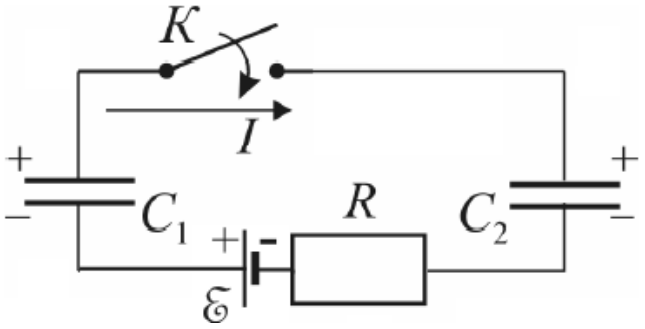


Рис.19.6. Схема соединения резистора и конденсаторов к задаче 19.4.

Решение:

Когда мы замкнем ключ, то у нас получатся два конденсатора, соединенные последовательно. Мы можем их заменить на один конденсатор с емкостью

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Тогда мы получаем следующее выражение для заряда из прошлой задачи

$$q(t) = C_0 \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC_0}}\right)$$

Заряд на обкладках общего конденсатора такой же как и заряды на двух конденсаторах C_1 и C_2.

Тогда итоговое выражения для заряда имеет вид

$$q(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{R\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}\right)$$

Мы можем сказать, что время релаксации будет равно

$$\tau = \frac{C_1 C_2 R}{C_1 + C_2}$$

Задача 19.5

Рассмотрим цепь, изображенную на Рис.19.7. Она является разветвленной. Нужно найти как будет меняться ток через катушку индуктивности после замыкания ключа K.

Решение:

Для решения воспользуемся правилами Кирхгофа. Обозначим на схеме направления токов, которые текут через катушку и резисторы. Теперь выберем узел A и запишем для него первое правило Кирхгофа

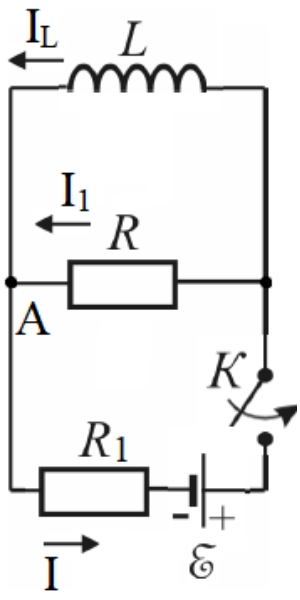


Рис.19.7. Схема задачи 19.5.

$$I = I_L + I_1$$

Теперь запишем второе правило Кирхгофа для нижнего контура, причем направление обхода будет против часовой стрелки

$$I_1 R + I R_1 = \varepsilon$$

По верхнему контуру получим следующее выражение

$$L\frac{dI_L}{dt} - I_1 R = 0$$

И далее решим систему данных трех уравнений.

$$I_1 R + I_L R_1 + I_1 R_1 = \varepsilon$$

$$I_1(R + R_1) + I_L R_1 = \varepsilon \rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon}{(R + R_1)} - \frac{I_L R_1}{(R + R_1)}$$

Подставляем выраженный ток в последнее уравнение системы

$$L\frac{dI_L}{dt} - \frac{\varepsilon R}{(R + R_1)} + \frac{I_L R_1 R}{(R + R_1)} = 0$$

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{I_L R_1 R}{L(R + R_1)} + \frac{\varepsilon R}{L(R + R_1)} - \frac{R_1 R}{L(R + R_1)}\left(I_L - \frac{\varepsilon}{R_1}\right)$$

Потом проведем разделение переменных и получим

$$\int_0^{I_L} \frac{dI_L}{I_L - \frac{\varepsilon}{R_1}} = -\frac{R_1 R}{L(R + R_1)}\int_0^t dt\,, \qquad \frac{R_1 R}{L(R + R_1)} = \frac{1}{\tau}$$

Тогад после интегрирования выражение для силы тока равно

$$ln\frac{I_L - \frac{\varepsilon}{R_1}}{-\frac{\varepsilon}{R_1}} = -\frac{t}{\tau}$$

$$1 - \frac{I_L}{\varepsilon} R_1 = e^{-\frac{t}{\tau}} \to I_L(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Задача 19.6

Имеется схема, изображенная на Рис.19.8. Изначально ключ K находится в положении 1 и затем переводится в положение 2. Нужно найти изменение напряжения на конденсаторе от времени.

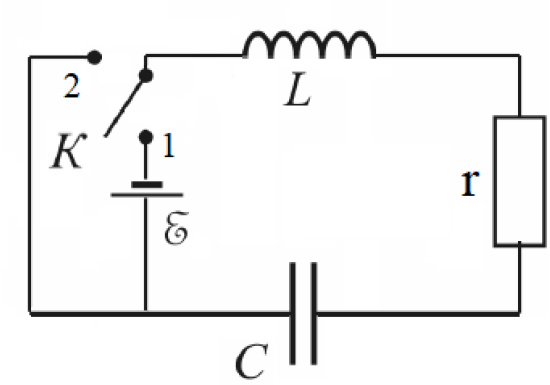


Рис.19.8. RLC-контур для задачи 19.6.

Решение:

Изначально напряжение на конденсаторе равно

$$U_c(t = 0) = \varepsilon$$

А после отключения запишем для цепи закон Ома

$$U_r + U_L + U_c = 0, \qquad U_c = \frac{q}{C}, \qquad I = \frac{dq}{dt}, \qquad U_r = Ir = r\dot{q}$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2} = L\ddot{q}$$

Тогда наше уравнение принимает следующий вид

$$L\ddot{q} + r\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{r}{L}\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0$$

$$2\beta = \frac{r}{L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{RC}$$

То есть мы имеем классическое уравнение затухающих колебаний. Будем искать его решение в расчете, что заряд может быть комплексной величиной. То есть ищем решение в виде

$$\hat{q} = \widehat{q_0}e^{kt}$$

Тогда выразим все наши производные заряда через комплексные выражения

$$\dot{q} = \widehat{q_0}ke^{kt}$$

$$\ddot{q} = \widehat{q_0}k^2e^{kt}$$

Подставляем их в исходное уравнение и получаем

$$k^2 + 2\beta k + \omega_0^2 = 0$$

$$k_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Тогда в общем случае решение уравнения будет суперпозиция двух решений с произвольными коэффициентами.

$$\hat{q} = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t} = e^{-\beta t}\left(Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + Be^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right)$$

Далее рассмотрим несколько случаев.

$\boldsymbol{\beta > \omega_0}$:

Тогда решение имеет следующий вид

$$q(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + Be^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right)$$

$\boldsymbol{\beta < \omega_0}$:

Тогда под корнем уже стоит отрицательная величина

$$\hat{q}(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t} + B_1 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t}\right)$$

Обозначим величину $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega$ – частотой затухающих колебаний.

Теперь берем действительную часть этого выражения и получим

$$q(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad C = \sqrt{A^2+B^2}$$

$\boldsymbol{\beta = \omega_0}$ **(критическое затухание)**:

$$q(t) = e^{-\beta t}(A + Bt)$$

Далее найдем константы уравнений на примере малого затухания. Мы можем перейти от заряда к напряжению на конденсаторе, то есть

$$U_c = \frac{q}{C} \to q = CU_c$$

Так как константы две, то кроме заряда нужно еще одно уравнение, в данном случае получим его для тока.

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = e^{-\beta t}(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) - \beta e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Используем начальные условия:

$$I(0) = 0$$

Далее выразим все через константы A и B

$$q(0) = A = \varepsilon C$$

$$I(0) = B\omega - \beta A \to B = \frac{\beta}{\omega}A = \frac{\beta}{\omega}\varepsilon C$$

То есть теперь мы можем получить окончательное решение

$$q(t) = \varepsilon C e^{-\beta t}\left(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)$$

Другие случаи решаются аналогино.

Задача 19.7

Имеется цепь, изображенная на Рис.19.9. Ключ замыкают в какой-то момент времени. Нужно найти как меняется заряд на конденсаторе.

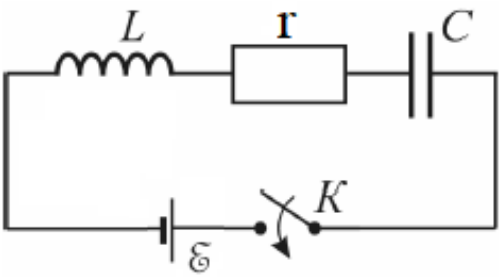


Рис.19.9 RLC-цепь к задаче 19.7.

Решение:

Записываем уравнения для данной цепи

$$U_r + U_L + U_c = \varepsilon$$

Проведем аналогичные замены, как мы делали в прошлой задаче.

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}$$

Решение ищется путем сложения общего и частного решений.

$$q = q_1 + q_2$$

Общее решение известно, а частное получаем следующим образом. Если $q_2 = const$, то

$$\omega_0^2 q_2 = \frac{\varepsilon}{L} \rightarrow q_2 = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 L} = C\varepsilon$$

А начальные условия имеют следующий вид

$$t = 0: \qquad q = 0, \qquad I = 0$$

Задача 19.8

Имеется схема, которая показана на Рис.19.10. Ключ может находится в положении 1 или 2. В момент времени $t = 0$ ключ переводят в положение 1. Потом через время Δt ключ переводят в положение 2. Какое количество теплоты выделится в системе за это время.

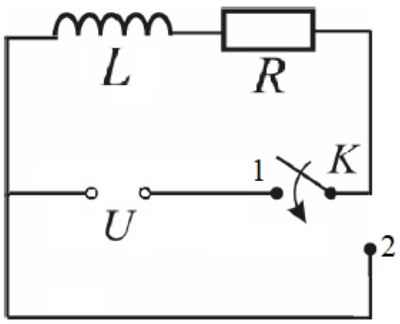


Рис.19.10. Схема к задаче 19.8.

Решение:

Когда ключ находится в положении 1 по цепи течет ток, равный

$$I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

Источник совершает работу, равную

$$\delta A = UIdt \to Q$$

Тогда количество тепла равно

$$Q = U\int_0^{\Delta t} Idt = \frac{U^2}{R}\int_0^{\Delta t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt = \frac{U^2}{R}\left[\Delta t + \tau\left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

Теперь найдем количество теплоты, которое выделилось за время Δt по закону Джоуля-Ленца

$$Q_1 = \int_0^{\Delta t} I^2 R\, dt = \frac{U^2}{R}\int_0^{\Delta t}\left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)dt = \frac{U^2}{R}\left[\Delta t + 2\tau\left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 1\right) - \frac{\tau}{2}\left(e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

Разница между этими энергиями запасается в катушке индуктивности в виде энергии магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2} = Q - Q_1$$

Семинар 20. Расчет цепей переменного тока.

Данный расчет можно провести двумя способами. Первый метод называется **методом комплексных амплитуд**. В этом методе, меняющаяся по гармоническому закону некоторая физическая величина, равная

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

заменяется комплексной величиной

$$\hat{A}(t) = A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A_0 \cos(\omega t + \varphi) + iA_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad A_0 e^{i\varphi} = \widehat{A_0}$$

Тогда искомая величина может быть определена как

$$A(t) = Re\hat{A}(t)$$

Для того, чтобы проводить расчеты этих величин вводят понятие **комплексного сопротивления** или **импеданса** цепи.

$$\hat{Z} = \frac{\widehat{U}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{\widehat{U_0}}{\widehat{I_0}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\varphi_U - \varphi_I)}$$

$$\widehat{U}(t) = U_0 e^{i\varphi_U} e^{i\omega t}, \qquad \hat{I}(t) = I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$$

Также импеданс может быть записан в виде

$$Z = X + iY = |Z| e^{i\varphi} = |Z| \cos\varphi + i|Z| \sin\varphi, \qquad |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Если элементы, имеющие комплексные сопротивления, соединены последовательно, то общее значение равно

$$\hat{Z} = \sum_i \widehat{Z_i}$$

А при параллельном соединении, имеем

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \sum_i \frac{1}{\widehat{Z_i}}$$

Для резистора с сопротивление R импеданс будет равен

$$Z_R = R$$

Для конденсатора емкостью C импеданс равен

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Для катушки индуктивности импеданс будет равен

$$Z_L = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Теперь рассмотрим второй метод расчета цепей, а именно **метод векторных диаграмм.** Происхводим такую же замену гармонической величины.

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{A}(t) = A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

То есть нужно ввести комплексную плоскость, на которой каждая из величин сопостовляется с вектором, длина которого будет равна A_0. И угол, который составляет данный вектор с осью X, равен $\omega t + \varphi$.

Если в цепи есть резистор с сопротивлением R, то напряжение на резисторе по фазе совпадает с током.

Если есть конденсатор с емкостью C, то напряжения будет отсвавать от тока на угол $-\frac{\pi}{2}$.

А в случае с катушкой индуктивности, через которую проходит ток, наоборот напряжение будет опережать ток на угол $\frac{\pi}{2}$.

При расчете мощности вводят понятие **действующих** или **эффективных значений** силы тока и напряжения. То есть это такие значения постоянного тока, который проихводит такую же работу, как и переменный ток.

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \qquad U_{\text{эфф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$< P(t) > = I_{\text{эфф}} U_{\text{эфф}} \cos\varphi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{X}{|Z|}$$

Задача 20.1

Пусть имеется цепь, изображенная на Рис.20.1. Нужно найти модуль импеданса в данной цепи.

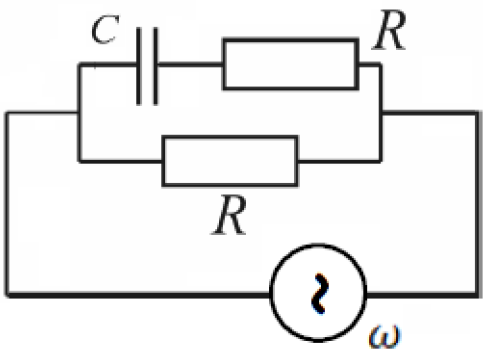


Рис.20.1. Цепь переменного тока задачи 20.1.

Решение:

Сначала рассомтрим верхнюю часть. Там последовательно соединены два элемента с

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \qquad Z_R = R$$

Поэтому импеданс верхней ветви равен

$$Z_{RC} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Верхняя и нижняя части соединены параллельно, то есть для них импеданс будет равен

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{RC}} = \frac{1}{R} + \frac{\omega C}{R\omega C - i} = \frac{R\omega C - i + R\omega C}{R(R\omega C - i)}$$

$$Z = \frac{R(R\omega C - i)}{2R\omega C - i}$$

Теперь найдем модуль этой величины.

$$Z = X + iY$$

Здесь воспользуемся следующим свойством.

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$|Z| = R\sqrt{\frac{(R\omega C)^2 + 1}{(2R\omega C)^2 + 1}}$$

Задача 20.2

Имеется схема, изображенная на Рис.20.2. Требуется построить векторную диаграмму этой схемы.

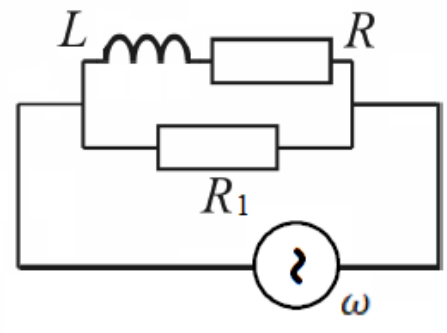


Рис.20.2. Схема к задаче 20.2.

Решение:

Данное решение проведем графически (Рис.20.3). Общим элементом является ток, который протекает в верхней части цепи

$$I_L = I_R$$

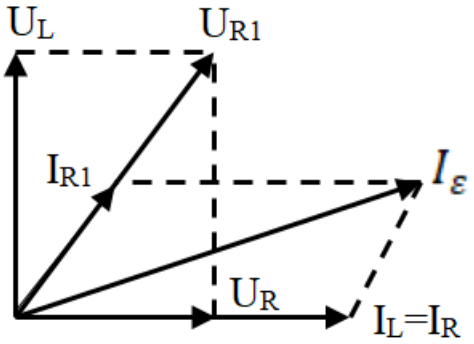


Рис.20.3. Графическое решение задачи 20.2.

Задача 20.3

Рассмотрим простую схему, изображенную на Рис.20.4. Нужно найти ток, который течет в цепи, напряжение на активном сопротивлении и на катушке.

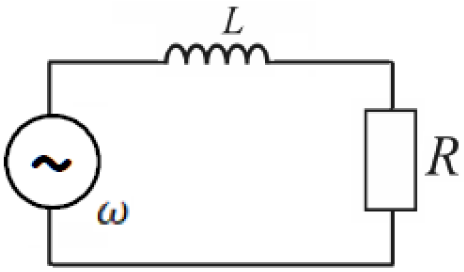


Рис.20.4. Схема для задачи 20.3.

Решение:

Задачу можно решить двумя способами. Сначала решим методом комплексных амплетуд.

Заменим реальное ЭДС его комплексным представлением.

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \qquad I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

Для данного контура запишем закон Ома

$$\hat{\varepsilon} = \widehat{U_L} + \widehat{U_R}, \qquad \widehat{U_L} = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_0 e^{i\omega t}\right) = \widehat{I_0} L i\omega e^{i\omega t}$$

$$\widehat{U_R} = I(t)R = I_0 e^{i\omega t} R$$

Подставляем их в первое уравнение.

$$\varepsilon_0 e^{i\omega t} = \widehat{I_0} L i\omega e^{i\omega t} + \widehat{I_0} e^{i\omega t} R$$

$$\varepsilon_0 = (R + i\omega L)\widehat{I_0}$$

$$\widehat{I_0} = \frac{\varepsilon_0}{R + i\omega L} = \frac{\varepsilon_0 (R - i\omega L)}{(R + i\omega L)(R - i\omega L)} = \frac{\varepsilon_0 (R - i\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Найдем модуль импеданса

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \qquad I_0 = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$tg\varphi_I = -\frac{\omega L}{R}$$

Минус показывает нам, что ток отстает по фазе от ЭДС.

И итоговое выражение для тока имеет вид

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{-i|\varphi_I|} e^{i\omega t}$$

$$I(t) = Re\hat{I}(t) = I_0 \cos(\omega t - |\varphi_I|)$$

Далее расчитаем напряжение на активном сопротивлении.

$$\widehat{U_R} = \hat{I}R$$

$$U_R(t) = I_0 R \cos(\omega t - |\varphi_I|)$$

И на катушке индуктивности найдем

$$U_{L0} = |Z_L| I_0 = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$U_L(t) = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - |\varphi_I| + \frac{\pi}{2})$$

Теперь приведем решение по методу векторных диаграмм (Рис.20.5). Общим параметром является ток.

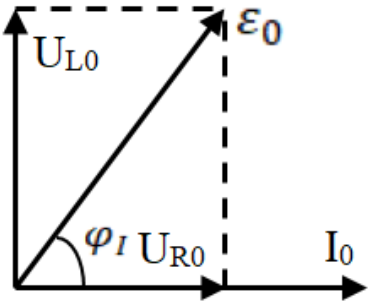


Рис.20.5. Метод векторных диаграмм для задачи 20.3.

Из этой картинки видно, что

$$\varepsilon_0^2 = U_{R0}^2 + U_{L0}^2 = I_0^2[R^2 + (\omega L)^2]$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Угол определяем как

$$tg\varphi_I = -\frac{U_{L0}}{U_{R0}} = -\frac{\omega L I_0}{R I_0} = -\frac{\omega L}{R}$$

Можно далее найти амплитудные значения напряжений

$$U_{R0} = RI_0 = \frac{R\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$U_{L0} = \omega L I_0 = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Задача 20.4

Имеется мостовая схема, которая показана на Рис.20.6. Нужно найти напряжение цепи на выходе.

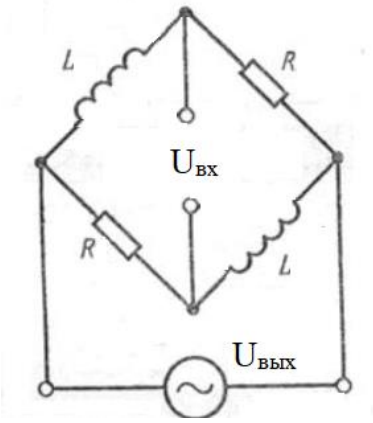


Рис.20.6. Мостовая схема.

По левой части ветви течет ток I_1, а по правой ток I_2. Тогда для левого участка запишем

$$\widehat{U}_{\text{вх}} = I_1\hat{Z}_{\text{лев}} = I_2\hat{Z}_{\text{прав}} \to \hat{I}_{10} = \hat{I}_{20} = \frac{\varepsilon_0}{R + i\omega L} = \hat{I}$$

$$\hat{Z}_{\text{лев}} = \hat{Z}_{\text{прав}} = R + i\omega L$$

$$\widehat{U}_{\text{вых}} = \hat{I}_2 R - \hat{I}_1 i\omega L = \hat{I}(R - i\omega L) = \frac{\varepsilon_0(R - i\omega L)}{R + i\omega L}$$

$$\left|\widehat{U}_{\text{вых}}\right| = \varepsilon_0 \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \varepsilon_0 = U_{\text{вх}}$$

По модулю напряжения равны, но у них разная фаза.

$$\widehat{U}_{\text{вых}} = \varepsilon_0 \frac{R^2 - (\omega L)^2 - 2iR\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$tg\varphi = \frac{2R\omega L}{(\omega L)^2 - R^2}$$

Задача 20.5

Имеется схема, которая изображена на Рис.20.7. Какой должна быть индуктивность катушки L, чтобы амплитуда выходного напряжения была в 10 раз больше амплитуды входного.

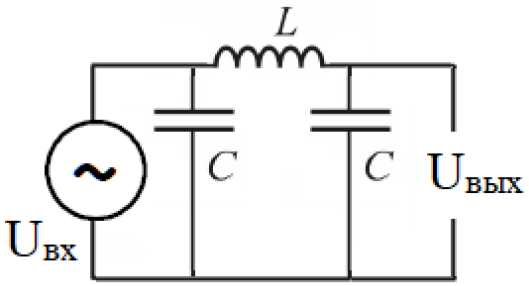


Рис.20.7. Схема для задачи 20.5.

Решение:

Цепь разветвленная. Токи I_1 и I_2 текут по конденсаторам 1 и 2 соответственно. Тогда мы можем записать, что

$$U_{\text{вх}} = \hat{I}_1 Z_{LC} = \hat{I}_1 \frac{i(\omega^2 LC - 1)}{\omega C} \to \hat{I}_1 = \frac{U_{\text{вх}}\omega C}{i(\omega^2 LC - 1)}$$

$$Z_{LC} = i\omega L - \frac{i}{\omega C} = \frac{i(\omega^2 LC - 1)}{\omega C}$$

$$\widehat{U}_{\text{вых}} = \widehat{U}_C = \hat{I}_1 Z_C = \frac{U_{\text{вх}}\omega C}{i(\omega^2 LC - 1)}\frac{1}{i\omega C} = \frac{U_{\text{вх}}}{1 - \omega^2 LC}$$

Тогда используем условие задачи и получаем

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC} = 10 \to L = \frac{9}{10\omega^2 C}$$

Задача 20.6

Имеется следующая схема (Рис.20.8). Нужно найти мощность, которая выделяется на активном сопротивлении и катушке индуктивности.

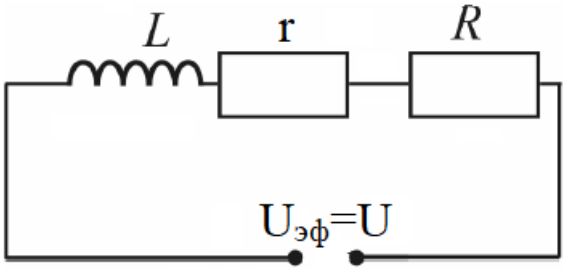


Рис.20.8. Схема для расчета мощности в цепи.

Решение:

Падение напряжения на катушке равно U_2, на активном сопротивлении равно U_1. Так как под всеми напряжениями подразумеваются эффективные напряжения, то запишем

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R}, \qquad P_2 = IU_2\cos\varphi = \frac{U_1}{R}U_2\cos\varphi$$

Для нахождения угла построим векторную диаграмму (Рис.20.9).

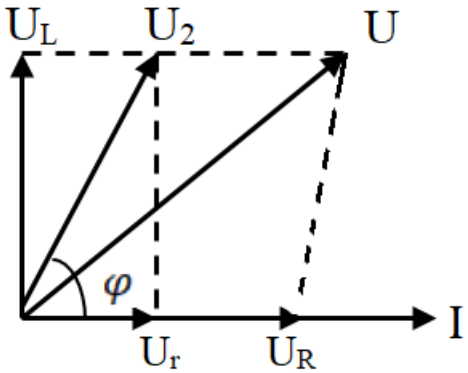


Рис.20.9. Векторная диаграмма задачи 20.6

Рассмотрим нижний треугольник, применяем теорему косинусов и оттуда получаем

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos(\pi - \varphi) = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi$$

$$U_2\cos\varphi = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1}$$

И искомая мощность будет равна

$$P_2 = \frac{U_2}{2R}(U^2 - U_1^2 - U_2^2)$$

Задача 20.7

Рассмотрим схему, которая представлена на Рис.20.10. Требуется определить КПД цепи.

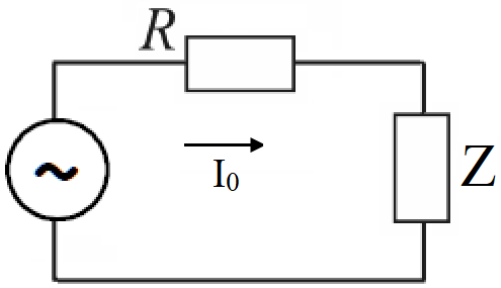


Рис.20.10. К определению КПД цепи.

Решение:

По определению, КПД цепи есть

$$\eta = \frac{P_{\text{нагр}}}{P_0}$$

Известно, что на нагрузке сдвиг фаз между током и напряжением определяется углом $\varphi = 60°$. Тогда запишем значение мощности на нагрузке

$$P_{\text{нагр}} = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi$$

$$P_0 = \frac{I_0^2 R_0}{2} + \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi$$

И искомое значения КПД будет иметь вид

$$\eta = \frac{\frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi}{\frac{I_0^2 R_0}{2} + \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi} = \frac{I_0 U_0 \cos\varphi}{I_0^2 R_0 + I_0 U_0 \cos\varphi} = \frac{U_0 \cos\varphi}{I_0 R_0 + U_0 \cos\varphi}$$

Семинар 21. Колебания в электрических контурах.

Колебательный контур – замкнутый электрический контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора.

Собственные колебания – колебания в изолированном контуре, который предоставлен самому себе.

Собственные колебания могут быть с затуханием и без затухания.

Сначала рассмотрим пример колебаний без затухания (Рис.21.1).

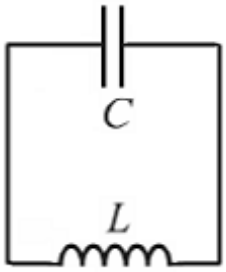


Рис.21.1. Контур с незатухающими колебаниями.

Если конденсатор изначально заряжен, то в таком контуре начинаются колебания. Запишем уравнение этих колебаний

$$U_C + U_L = 0$$

$$U_C = \frac{q}{C}, \qquad U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Тогда решением данного уравнения будет зависимость

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Посмотрим что будет с энергией в таком контуре.

$$W_q = \frac{q^2}{2C} = \frac{A^2}{2C}cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LA^2\omega_0^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

И полная энергия в контуре равна

$$W = W_q + W_L = \frac{A^2}{2C}[cos^2(\omega_0 t + \varphi) + sin^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{A^2}{2C} = W_0$$

Далее рассмотрим контур, у которого еще будет резистор (Рис.21.2). И посмотрим какие колебания будут возникать в таком контуре. Запишем уравнение для цепи

$$U_C + U_L + U_R = 0$$

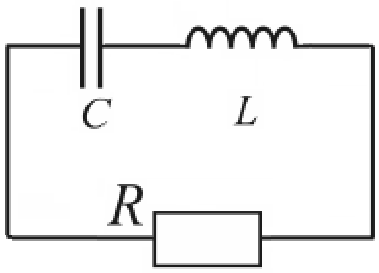


Рис.21.2. RLC-контур.

Теперь запишем уравнение с учетом значений напряжений

$$\frac{q}{C} + L\ddot{q} + R\dot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \qquad \beta = \frac{R}{2L} - \text{коэффициент затухания}$$

И уравнение принимает традиционный вид, который мы покажем в общем случае

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

Затухание в контуре должно быть достаточно мало для того, чтобы возникали колебания $\beta < \omega_0$.

$$\xi(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

А усредненная энергия может быть выражена следующим образом

$$< W_q >_T \sim q^2 \sim e^{-2\beta t}$$

$$< W_L >_T \sim I^2 \sim e^{-2\beta t}$$

$$< W >_T = < W_q >_T + < W_L >_T = W_0 e^{-2\beta t}$$

Также вводят величину потерь энергии за период

$$< P >_T = -\frac{d < W >_T}{dt} = 2\beta W_0 e^{-2\beta t}$$

Для характеристики затухающих колебаний вводят понятие **логарифмического декремента затухания**

$$\theta = ln\frac{\xi(t)}{\xi(t+T)} = ln\frac{W_0 e^{-2\beta t}}{W_0 e^{-2\beta(t+T)}} = \beta T$$

Выясним его физический смысл, для этого найдем логарифм отношения

$$ln\frac{\xi(t)}{\xi(t+NT)} = \beta NT = \theta N, \qquad \theta = \frac{1}{N}$$

Если это отношение равно e, тогда число колебаний обозначим как N_e. То есть по физическому смыслу это величина обратная числу колебаний, за который период уменьшается в e раз.

Теперь можно еще вести понятие **добротности**.

$$Q = 2\pi\frac{< W >_T}{< P >_T T} = 2\pi\frac{W_0 e^{-2\beta t}}{2\beta W_0 e^{-2\beta t} T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega}{2\beta}$$

Задача 21.1

Рассмотрим контур, который представлен на Рис.21.3. Нужно найти частоту колебаний и добротность контура.

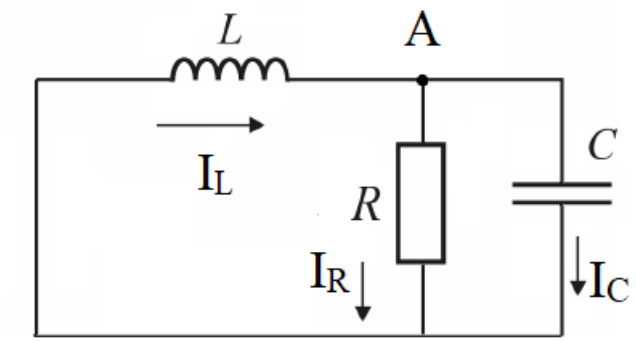


Рис.21.3. Контур к задаче 21.1.

Решение:

Решим задачу с помощью правил Кирхгофа. На Рис.21.3 проставлены направления токов в цепи. Тогда по первому правилу имеем

$$I_L = I_R + I_C$$

$$I_C = \frac{dq}{dt}, \qquad I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_C}{R} = \frac{q}{CR}$$

Следующие уравнением запишем как

$$U_L + U_C = 0$$

$$L\frac{dI_L}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow q = -CL\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_L = \frac{q}{CR} + \frac{dq}{dt} = -\frac{L}{R}\frac{dI_L}{dt} - CL\frac{d^2I_L}{dt^2}$$

$$\frac{d^2I_L}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{CL}I_L = 0$$

И получили традиционное уравнение затухающих колебаний. Решение такого уравнение есть

$$I_L = I_{L0}e^{-\beta t}\sin\omega t\,, \qquad I_L(0) = 0$$

Частоту колебаний найдем из условия, что

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{(2CR)^2}}$$

Теперь найдем добротность контура по формуле

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = CR\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{(2CR)^2}}$$

Вынужденные колебания – ситуация, когда в цепи присутствует источник переменного напряжения.

Задача 21.2

Имеется контур, который показан на Рис.21.4. Проведем полное исследование вынужденных колебаний контура.

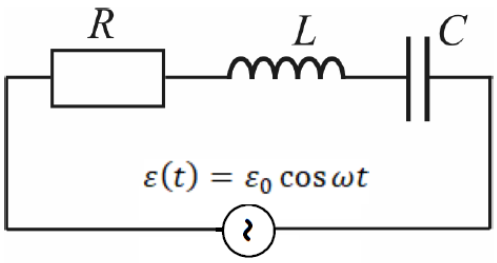


Рис.21.4. Контур с источником переменного напряжения.

Решение:

Запишем для заряда на конденсаторе следующие уравнения

$$U_C + U_L + U_R = \varepsilon_0 \cos\omega t$$

$$\frac{q}{C} + L\ddot{q} + R\dot{q} = \varepsilon_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{CL}q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t$$

Далее перейдем к комплексным амплитудам.

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\hat{q} = \hat{q}_0 e^{i\omega t}$$

И подставляем всё в уравнение выше

$$\hat{q}_0(-\omega^2 + i \cdot 2\beta\omega + \omega_0^2) = \varepsilon_0$$

Тогда решением этого уравнения будет

$$\hat{q}_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \cdot 2\beta\omega}$$

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

И тангенс угла между напряжением равен

$$tg\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Тепер решим эту задачу с помощью метода комплексных амплитуд.

$$\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \qquad tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Далее найдем ток, который протекает по всем элементам цепи

$$\hat{I}_0 = \frac{\varepsilon_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\left|\hat{I}_0\right| = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad tg\varphi_I = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} = -\,tg\varphi$$

Ток достигает макисмального значения при

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Отсюда мы находим резонансную частоту

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

При резонансе напряжение на резисторе равно

$$U_R = RI_0 = \varepsilon_0$$

Теперь посмотрим чему равны напряжения при собственной частоте

$$\widehat{U}_C = \hat{I}_0 \frac{1}{i\omega C} = \frac{I_0}{\omega C} e^{i\left(\varphi_I - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$U_{C0}(\omega_0) = \frac{\varepsilon_0}{R\omega_0 C} = \frac{\varepsilon_0}{R\frac{1}{\sqrt{LC}}C} = \varepsilon_0 \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 Q$$

Полученная величина является добротностью данного контура на частоте ω_0

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Теперь найдем падение напряжение на катушке индуктивности

$$\widehat{U}_{L0} = \hat{I}_0 i\omega L = I_0 e^{i\left(\varphi_I + \frac{\pi}{2}\right)}\omega L$$

$$U_{L0} = \frac{\varepsilon_0}{R}\omega_0 L = \varepsilon_0 \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 Q$$

То есть падения напряжения на катушке и конденсаторе по величне равны друг другу, но по фазе имеют сдвиг фаз на π.

Давайте рассмотрим напряжение на конденсаторе.

$$\widehat{U}_C = \hat{I}_0 \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i\omega C}\frac{\varepsilon_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Преобразуем это выражение

$$i\omega C\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = 1 - \omega^2 LC + i\omega RC = \frac{1}{\omega_0^2}\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega RC}{LC}\right]$$
$$= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega}{\omega_0^2}$$

Тогда выражение для напряжения будет равно

$$\widehat{U}_C = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega}$$

$$U_{C0} = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Теперь определим, когда эта величина напряжения достигает макисмального значения. Очевидно тогда, когда величина под корнем достигает минимума. Поэтому исследуем ее на экстремум.

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2\omega = 0$$

$$\omega_{RC} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Если затухание мало, то $\omega_{RC} \approx \omega_0$.

Вычислим какое напряжение будет при резонансной частоте.

$$U_{C0R} = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{\sqrt{(2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Для катушки индуктивности проделаем аналогичные вычисления

$$\widehat{U}_{L0} = \hat{I}_0 i\omega L = i\omega L \frac{\varepsilon_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$U_{L0} = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Чтобы исследовать эту величину на максимум удобно переписать ее в следующем виде

$$U_{L0} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{R^2}{(\omega L)^2} + \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{(\omega L)^2}}}$$

Далее запишем только результаты.

$$U_{L0} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{4\frac{\beta^2}{\omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}}$$

$$\omega_{RL} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

И снова при малых затуханиях получаем $\omega_{RL} \approx \omega_0$.

Задача 21.3

Схема из прошлой задачи 21.2 (Рис.21.4). Нужно определить добротность контура.

Решение:

Воспользуемся формулой для добротности

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}$$

Ранее мы получили, что отношение напряжения на конденсаторе при резонансной частоте к ЭДС равно

$$\frac{U_{C0}(\omega_0)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = n$$

Тогда для добротности имеем

$$Q = \sqrt{\frac{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}{\frac{R^2}{L^2}}} = \sqrt{\frac{L}{R^2C} - \frac{1}{4}} = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

Задача 21.4

Цепь стандартная, из задачи 21.2 (Рис.21.4). Известно, что $I_0(\omega_1) = I_0(\omega_2)$. Нужно найти ω_0.

Решение:

Запишем выражения для тока на заданных частотах

$$I_0(\omega_1) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}}$$

Мы видим, что это равенство выполняется если

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2$$

$$\omega_1 < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} < \omega_2$$

Тогда получаем следующее равенство

$$-\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right) = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \to (\omega_1 + \omega_2)L = \frac{1}{\omega_1 C} + \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{C\omega_1\omega_2}$$

И частота собственных колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

Задача 21.5

Имеется схема, которая показана на Рис.21.5. Причем $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Нужно исследовать явление резонанса токов.

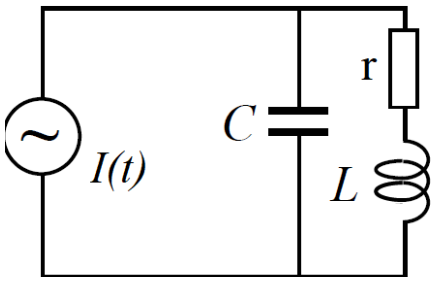


Рис.21.5. Резонанс токов в задаче 21.5.

Решение:

Для того, чтобы исследовать явление резонанса, сначала найдем импеданс цепи

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{r + i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC + i\omega rC}{r + i\omega L}$$

Тогда комплексное сопротивление есть

$$\hat{Z} = \frac{r + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega rC} = \frac{(r + i\omega L)(1 - \omega^2 LC - i\omega rC)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega rC)^2} = \frac{r + i(\omega L - \omega^3 L^2 C - r^2 \omega C)}{\dots}$$

Мы видим, что величина импеданса комплексная, но она может стать действительной если мнимая часть обратится в ноль. Тогда весь контур будет обладать чисто активным сопротивлением. Это и есть явление резонанса токов. Поэтому давайте найжем частоту, на которой это произойдет

$$\omega(L - \omega^2 L^2 C - r^2 C) = 0$$

$$\omega_{RI} = \sqrt{\frac{L - r^2 C}{L^2 C}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}$$

Теперь найдем модуль импеданса

$$|\hat{Z}| = \frac{r}{\frac{1}{LC} r^2 C^2} = r \frac{1}{r^2} \frac{L}{C} = rQ^2$$

То есть весь контур представляет собой при резонансе очень большое сопротивление.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ