



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ПОЛЯКОВ
ПЕТР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МЕДВЕДЕВУ ЕЛЕНУ ВЛАДИМИРОВНУ



Содержание

Лекция 1.....	9
1.1. Электромагнитное взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе.....	9
1.2. Электроскопы и электрометры.	10
1.3. Закон сохранения электрического заряда.	10
1.4. Электростатика. Закон Кулона.	13
Лекция 2.....	16
2.1. Полевая трактовка закона Кулона. Электрическое поле.	16
2.2. Линии напряженности электрического поля.	18
2.3. Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса.	19
2.4. Потенциальность электростатического поля. Потенциал.	22
Лекция 3.....	23
3.1. Работа сил электростатического поля.	23
3.1. Ротор векторной функции.	24
3.2. Электрический диполь.	25
3.3. Пример решения задач электростатики с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.	27
Лекция 4.....	29
4.1. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция.	29
4.2. Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроёмкость.	31
4.3. Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.	31
Лекция 5.....	35
5.1. Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации. Связь вектора поляризации со связанными зарядами.	35
5.2. Материальное уравнение для векторов электрического поля.	36
5.3. Система полевых уравнений электростатики в бесконечной изотропной диэлектрической среде.....	37
5.4. Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.	38
Лекция 6.....	41
6.1. Энергия системы электрических зарядов.....	41
6.2. Энергия взаимодействия и собственная энергия.....	42
6.3. Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Силы, действующие на диполь.	43



6.4. Объемная плотность силы, действующая на диэлектрик.	44
6.5. Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов.	44
Лекция 7.....	46
7.1. Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле.....	46
7.2. Формула Клаузиуса-Моссотти.	47
7.3. Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена.	48
7.4. Поляризация ионных кристаллов. Электрические свойства кристаллов... ..	50
7.5. Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектриков.	51
7.6. Пондеромоторные силы, действующие на диэлектрик в конденсаторе.	
Давление и натяжение Фарадея-Максвелла.....	52
Лекция 8.....	54
8.1. Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока.....	54
8.2. Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи.	
Электросопротивление.....	55
8.3. Стационарные токи и электрическое поле в сплошных средах.....	57
8.4. Токи в сплошных средах. Заземление.	58
Лекция 9.....	59
9.1. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля-Ленца и его	
дифференциальная форма.....	59
9.2. Сторонние силы. ЭДС.	59
9.3. Правила Кирхгофа. Примеры их применения.	61
9.4. Примеры источников тока (ЭДС).	62
9.5. Топливный элемент.	66
Лекция 10.....	68
10.1. Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока.....	68
10.2. Закон Био-Савара-Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции	
магнитного поля.	69
10.3. Векторный потенциал магнитного поля тока.	71
10.3. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в	
дифференциальной и интегральной форме.....	72
Лекция 11.....	76
11.1. Элементарный ток и его магнитный момент. Векторный потенциал	
элементарного тока.	76
11.2. Поле элементарного тока.	77
11.3. Магнитное поле движущегося заряда.....	80
11.4. Силы, действующие на токи в магнитном поле. Сила Лоренца.	80



11.6. Определение единицы силы тока — Ампера.....	81
11.5. Движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.....	84
Лекция 12.....	86
12.1. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.....	86
12.2. Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.....	87
12.3. Коэффициент взаимной индукции двух контуров.....	88
12.4. Взаимодействие двух контуров с током.....	89
12.5. Индуктивность двухпроводной линии из пустотелых проводников.....	91
Лекция 13.....	92
13.1. Электромагнитная индукция.....	92
13.2. Правило Ленца.....	93
13.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в интегральной форме и дифференциальной форме.....	94
13.4. Векторный и скалярный потенциал нестационарного электромагнитного поля.....	97
13.5. Индукционные методы измерения магнитных полей.....	97
13.6. Энергия магнитного поля. Её объемная плотность.....	99
Лекция 14.....	101
14.1. Магнетики.....	101
14.2. Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами.....	102
14.3. Материальное уравнение для векторов магнитного поля. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества.....	104
14.4. Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.....	105
14.5. Преломление линий магнитной индукции магнитного поля на границе двух магнетиков. Магнитная защита.....	105
14.6. Аналогия с электростатикой диэлектриков.....	106
Лекция 15.....	109
15.1. Силы, действующие на магнетики в магнитном поле. Классификация магнетиков.....	109
15.2. Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия. Диамагнитная восприимчивость.....	109
15.3. Парамагнетизм. Теория Ланжевена.....	112

15.4. Магнитомеханический опыт Эйнштейна-де-Гааза. Механомагнитный опыт Барнетта.	113
15.5. Микроскопические носители магнетизма. Гиромагнитное отношение.	114
15.6. Энергия магнитного поля (тока) в бесконечной изотропной магнитной среде.	115
Лекция 16.	116
16.1. Ферромагнетики.	116
16.2. Гистерезис намагничивания. Остаточная индукция и коэрцитивная сила.	117
16.3. Работа при намагничивании ферромагнетика.	119
16.4. Спонтанная намагниченность и температура Кюри.	120
16.5. Антиферромагнетики. Ферриты. Суперпарамагнетики.	123
16.6. Анизотропный магниторезистивный эффект. (ГМР) эффект. Спинтроника.	124
Лекция 17.	126
17.1. Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности. Уравнение колебательного контура в квазистационарном приближении.	126
17.2. Переходные процессы в RC- и RL-цепях.	127
17.3. Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.	128
17.4. Затухающие колебания в контуре и их уравнение.	130
17.5. Показатель затухания (декремент затухания). Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.	131
17.6. Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.	132
Лекция 18.	133
18.1. Метод векторных диаграмм. Метод комплексных амплитуд. Комплексная частота.	133
18.2. Вынужденные колебания в контуре.	134
18.3. Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе.	135
18.4. Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления.	135
18.5. Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока.	138
Лекция 19.	139
19.1. Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе.	139
19.2. Ширина резонансной кривой.	140
19.3. Токи при резонансе.	141

19.4. Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.....	142
19.5. Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения.....	144
19.6. Применение резонанса напряжений в радиотехнике. Применение резонанса токов.....	145
Лекция 20.....	147
20.1. Генераторы и электродвигатели. Электродвигатель постоянного тока.....	147
20.2. Двухфазный ток.....	149
20.3. Трехфазный ток.....	150
20.4. Соединение обмоток генератора и нагрузки «звездой» и «треугольником». Фазное и линейное напряжения.....	150
20.5. Получение и использование вращающегося магнитного поля.....	152
20.6. Трансформатор. Принцип действия, устройство, применение. Коэффициент трансформации. Роль сердечника.....	153
Лекция 21.....	155
21.1. Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения.....	155
21.2. Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя.....	157
21.3. Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.....	159
21.4. Вектор Умова-Пойтинга.....	161
21.5. Излучение электромагнитных волн элементарным диполем.....	162
21.6. Поле стоячей электромагнитной волны.....	164
Лекция 22.....	165
22.1. Опыты Толмена и Стюарта (1916г.). Основные положения классической электронной теории проводимости Друде-Лоренца.....	165
22.2. Законы Ома и Джоуля-Ленца. Закон Видемана-Франца в классической теории.....	166
22.3. Трудности классической электронной теории.....	167
22.4. Понятие о зонной теории твердых тел. Энергетические уровни и формирование энергетических зон.....	169
22.5. Особенности зонной структуры диэлектриков, полупроводников и металлов. Объяснение проводимости твердых тел с помощью зонной теории.....	171
Лекция 23.....	173
23.1. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников.....	173
23.2. Контактные явления. Контактная разность потенциалов.....	175

23.3. Термоэлектричество (явление Зеебека 1821г.). Термодвижущая сила. .	176
23.4. Эффект Пельтье. Явление Томсона.	177
23.5. Сверхпроводимость. Основные свойства сверхпроводников. Высокотемпературная сверхпроводимость.	179
23.6. Магнитная индукция внутри сверхпроводника. Эффект Мейсснера. Критическое поле.	180



Лекция 1.

1.1. Электромагнитное взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе.

Фундаментальные взаимодействия (силы) в природе

Вид взаимодействия (силы)	Скорость процесса t при энергии $W=1$ ГэВ, с	Относительная величина силы	Радиус действия, см
Сильные	10^{-24}	1	10^{-13}
Электромагнитные	10^{-21}	10^{-2}	∞
Слабые	10^{-10}	10^{-10}	10^{-16}
Гравитационные	10^{+23}	10^{-38}	∞

Электромагнитным взаимодействием называется взаимодействие между электрически заряженными телами или электрически заряженными телами и электромагнитным полем.

Если тело электрически заряжено, то говорят, что оно имеет электрический заряд. То есть, электрический заряд - это физическая величина, являющаяся источником электромагнитных взаимодействий.

Взаимодействие между покоящимися заряженными телами (или кратко зарядами) называют электрическими или, точнее, электростатическими взаимодействиями.

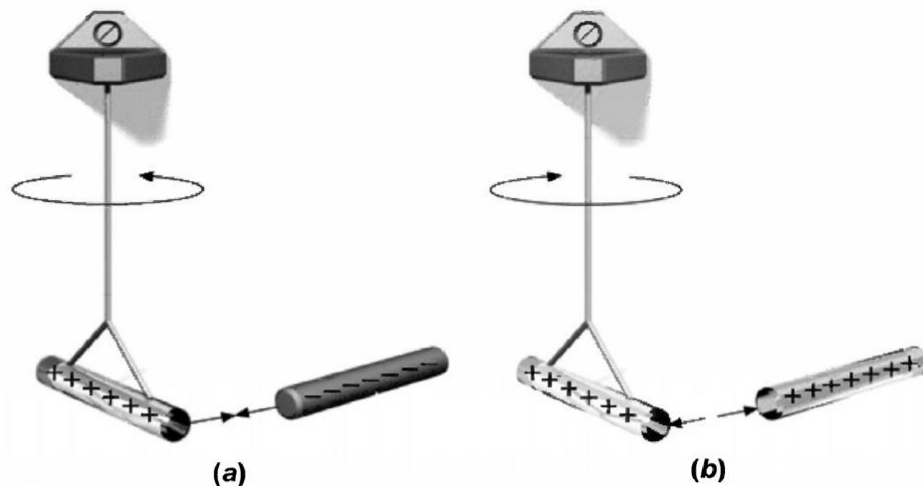


Рисунок 1.1. Два вида электрических зарядов (положительные и отрицательные).

1.2. Электроскопы и электрометры.

Исходя из свойств взаимодействия электрических зарядов были придуманы способы фиксации и измерения электрического заряда. Простейший прибор – электроскоп или электрометр.

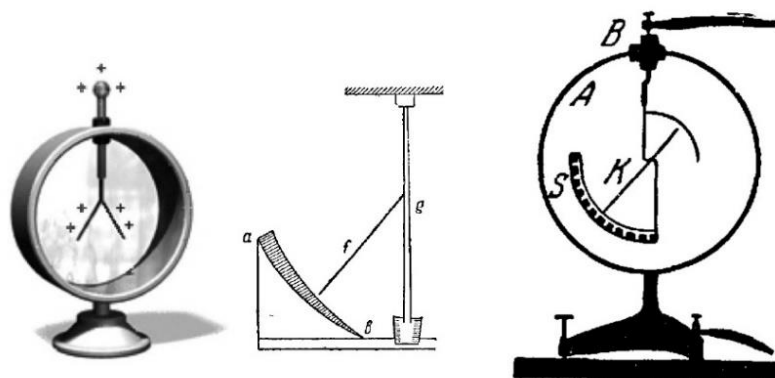


Рисунок 1.2. Электрометр Г.В.Рихмана (1745)

Имеется механический стержень, который завершается шариком или металлическим диском, на конце которого два легких лепестка.

Электростатическая индукция. Электризация проводника через влияние.

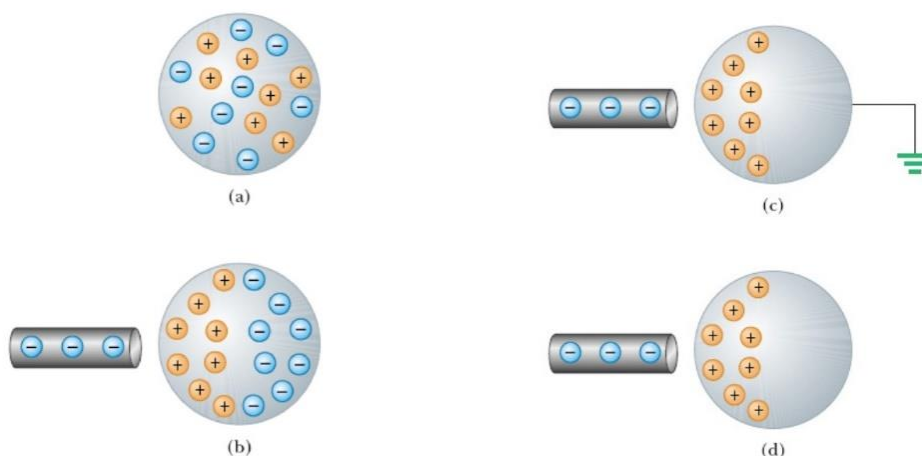


Рисунок 1.3. Проводник.

Если поднести к заряженному шарiku наэлектризованную стеклянную палочку, то положительные заряды будут притягиваться, а отрицательные – отдаляться.

1.3. Закон сохранения электрического заряда.

Алгебраическая сумма зарядов в изолированной системе сохраняется неизменной при любых электрических взаимодействиях и превращениях веществ внутри этой системы.

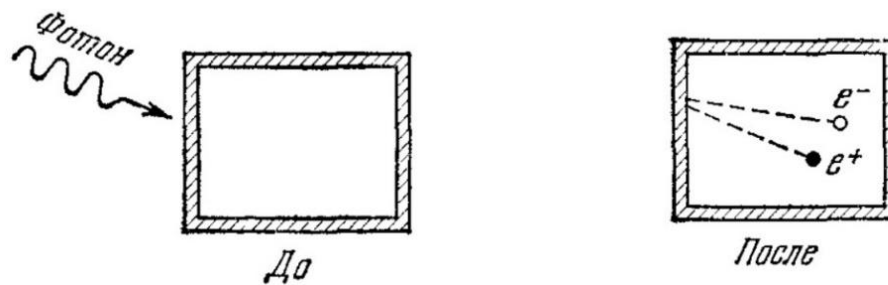


Рисунок 1.4. Иллюстрация закона сохранения электрического заряда.

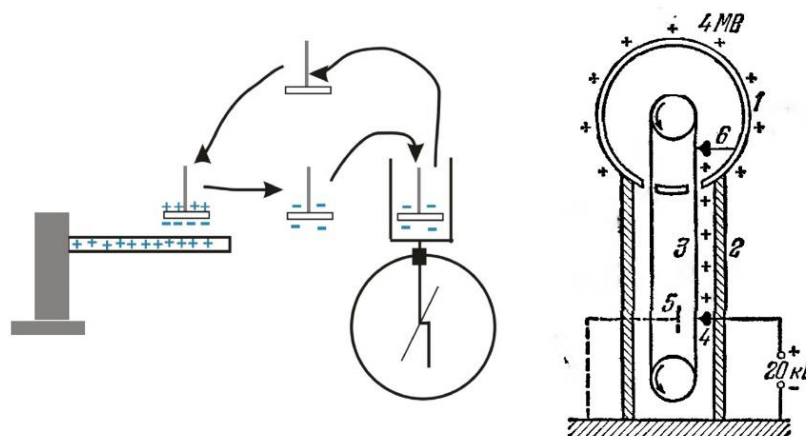


Рисунок 1.5. Принцип работы электрофорной машины. Генератор Ван-де-Граафа.

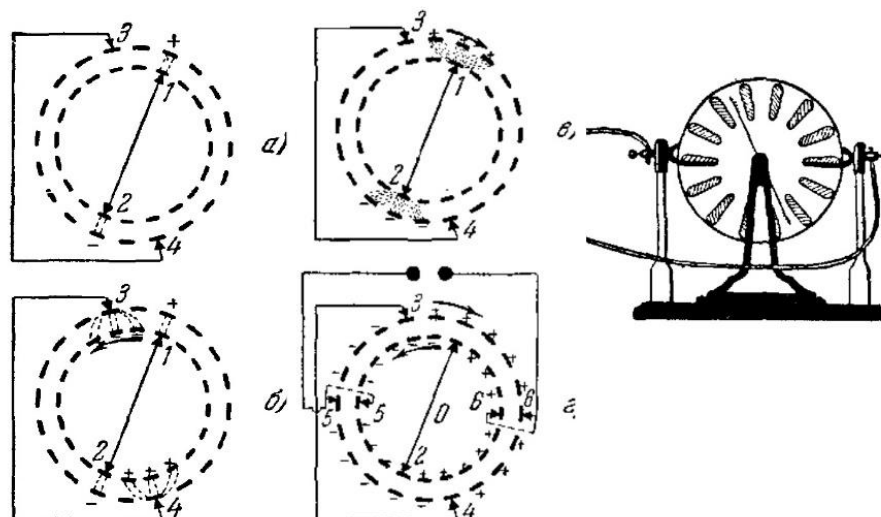


Рисунок 1.6. Принцип работы электростатической машины Гольца.

Микроскопические носители заряда. Опыты Милликаена (1908-1916гг.).

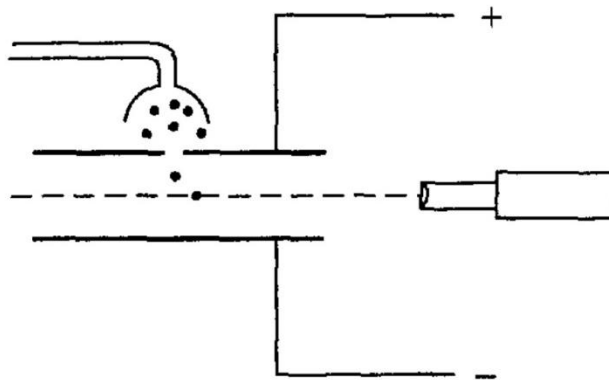


Рисунок 1.7. Схема опыта Милликаена.

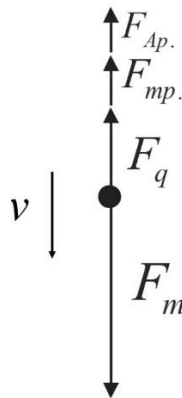


Рисунок 1.8. Капелька, которая движется вниз.

$$F_m = F_q + F_{mp.} + F_{Ar.}$$

$$mg = qE + 6\pi\eta\alpha v + m_{\text{воздуха}}g$$

$$(q_1 - q_0), (q_2 - q_0), (q_3 - q_0), \dots$$

$$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Молекулярно-кинетическое учение М.В.Ломоносова – М.В.Ломоносов в работе «Опыт теории упругости воздуха Михаила Ломоносова» объяснил упругие свойства атмосферного воздуха механизмом отталкивания атомов воздуха друг от друга. Он пишет: «...отдельные атомы воздуха, в беспорядочном чередовании, сталкиваются с ближайшими через нечувствительные промежутки времени, ... таким образом, непрерывно отталкиваемые друг от друга частыми взаимными толчками, они стремятся рассеяться во все стороны.».

Закон сохранения материи – В письме к Леонарду Эйлеру от 5 июля 1748 года в следующей формулировке: «Но все встречающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так,

сколько материи прибавляется какому-либо телу, столько же теряется у другого, сколько часов я затрачиваю на сон, столько же отнимаю от бодрствования, и т. д. Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому, им двинутому.»

Природа атмосферного электричества – В работе « Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих, предложенное от Михаила Ломоносова» (1753 год) написано: « В сем состоянии, по незыблемым естества законам, верхней части атмосферы должно опуститься в нижнюю и столь глубоко погрузиться, поколе, перемешавшись с теплым воздухом, в равновесии остановится. ... Уже довольно явствует, какие движения воздуха, кроме дыхания ветров, электрическое трение произвести могут;»

Громоотвод Франклина, изготовленный Далибаром во Франции 10 марта 1752 года, представлял собой заостренный вертикальный железный штырь, 40 футов в высоту, установленный на деревянной подставке, не являющейся проводником электричества.

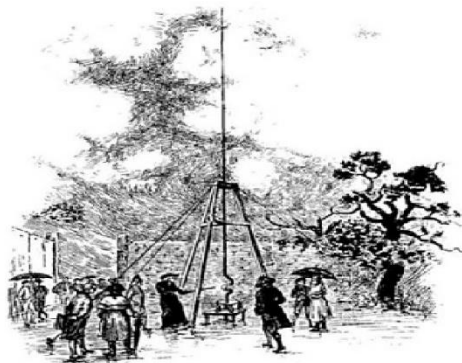


Рисунок 1.9. Громоотвод.

1.4. Электростатика. Закон Кулона.

Электростатика – раздел электромагнетизма, в котором изучается взаимодействие неподвижных зарядов.

Закон взаимодействия неподвижных заряженных тел был открыт в 1785 году Кулоном с помощью изобретенных им крутильных весов

Закон Кулона – Величина силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$|\vec{F}| \sim \frac{|q_1||q_2|}{R^2} \quad |\vec{F}| = k \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

Силы взаимодействия между точечными зарядами направлены вдоль линии, соединяющей эти заряды, и по модулю равны. Одного знака заряды отталкиваются, разного знака – притягиваются.

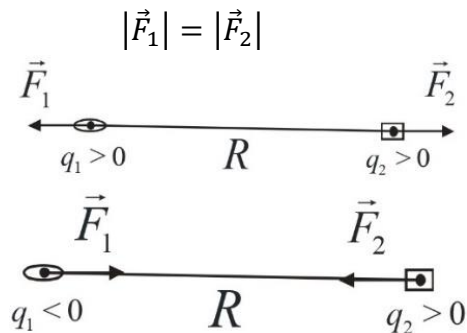


Рисунок 1.10. Иллюстрация закона Кулона.

Единица заряда.

$$1\text{Кл} = 1\text{А} * 1\text{с} = 1\text{А} * \text{с} \quad 1\text{Кл} = 0,1\text{С} * 1\text{СГСЭ}_q$$

$$k = \text{С}^2 * 10^{-11} \frac{\text{Н} * \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \approx 9 * 10 \frac{\text{Н} * \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 * 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

Векторная форма записи закона Кулона.

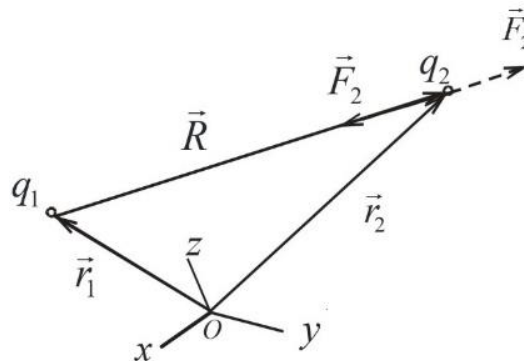


Рисунок 1.11. Два точечных заряда.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} = k \frac{q_2 q_1}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = k \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}$$

Принцип суперпозиции для сил взаимодействия точечных зарядов.

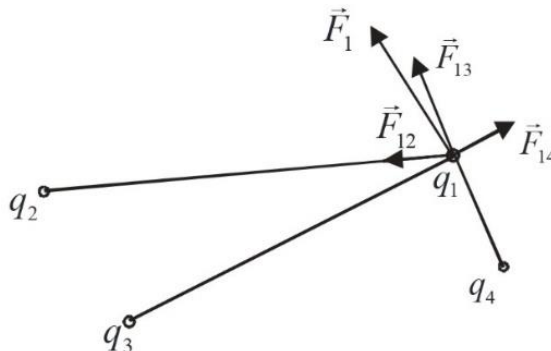


Рисунок 1.12. Несколько точечных зарядов.

Из опыта следует

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \sum_i \vec{F}_{1i}$$

Лекция 2.

2.1. Полевая трактовка закона Кулона. Электрическое поле.

$$\vec{F}_1 = \sum_i \vec{F}_{1i} = \sum_i k \frac{q_1 q_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|}$$

Введем величину вектора напряженности электрического поля в точке нахождения пробного заряда по формуле

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_1}{q_1} = \sum_i k \frac{q_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|}$$

$$\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}(\vec{r}_1)$$

Измерение напряженности. Пробный заряд.

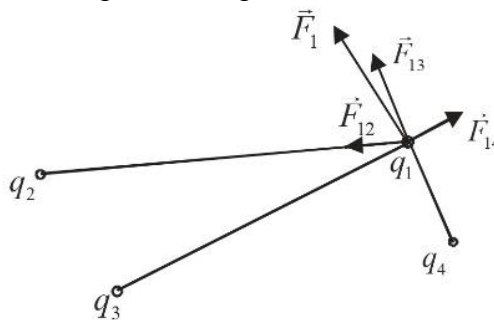


Рисунок 2.1. Пробный заряд.

$$q_1 = q_{np}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{np}}{q_{np}}$$

$$\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}(\vec{r}_1)$$

Напряженность электрического поля точечного заряда:



Рисунок 2.2. Точечный заряд и пробный заряд.

$$\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qqnp}}{q_{np}} = \frac{1}{q_{np}} \frac{q q_{np}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

Модуль вектора напряженности равен

$$|\vec{E}_q| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{R^2}$$

Полевая трактовка принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции электрических полей.

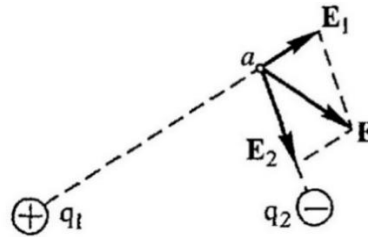


Рисунок 2.3. Электрическое поле, созданное двумя зарядами.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

Объемная, поверхностная и линейная плотности электрического заряда:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \gamma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}.$$

Напряженность электрического поля, создаваемая непрерывным распределением зарядов:

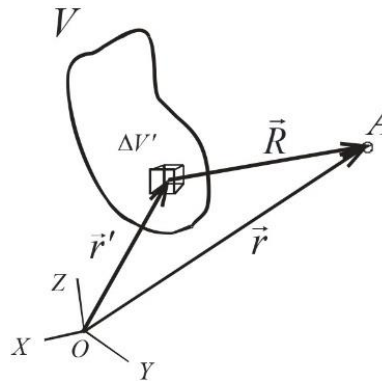


Рисунок 2.4. Объемное тело.

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $\Delta q = \rho(\vec{r}')\Delta V'$.

$$\Delta \vec{E}_{\Delta q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q * \vec{R}}{R^3} = \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\Delta q} \Delta \vec{E}_{\Delta q} = \sum_{\Delta q} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Delta V' \text{ при } \Delta V' \rightarrow 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

В случае распределения зарядов на поверхности S и на участке линии L для напряженности электрического поля имеем

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}') dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \gamma(\vec{r}') dl'$$

2.2. Линии напряженности электрического поля.

Линии напряженности электрического поля – это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой же точке.

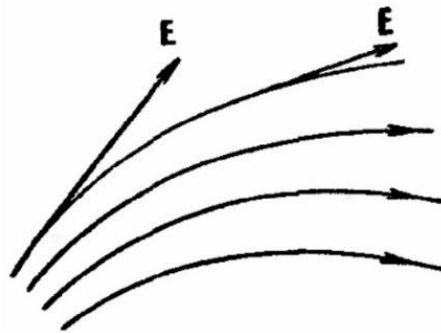


Рисунок 2.5. Линии напряженности электрического поля.

Поток вектора напряженности электрического поля.

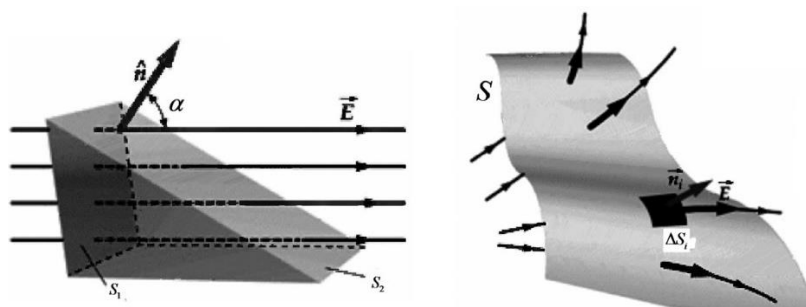


Рисунок 2.6. Электрическое поле.

$$\Phi = E * S_2 * \cos \alpha = \vec{E} * \vec{n} S_2 = E_n S_2 = E * S_1,$$

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

$$\Phi \sim N - \text{количество линий } \vec{E},$$

$$N_1 = N_2.$$

$$S_1 = S_2 \cos \alpha;$$

$$\Delta\Phi_i = |\vec{E}_i| \Delta S_i \cos \alpha_i = \vec{E}_i * \underbrace{\Delta S_i \vec{n}_i}_{\Delta \vec{S}_i} = \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i$$

$$\Phi_s = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i;$$

$$\text{При } i \rightarrow \infty \quad \Phi_s = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

Поток вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд q .

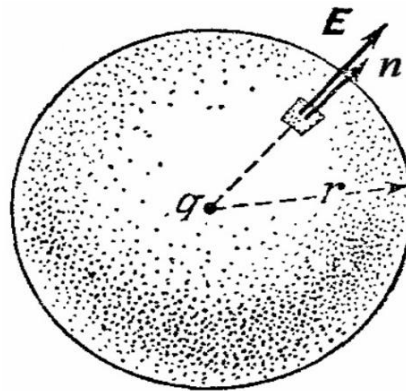


Рисунок 2.7. Сферическая поверхность.

$$\Phi = \oint_{S=4\pi r^2} \vec{E} d\vec{S} = \sum_i \vec{E} * \Delta S_i * 1 = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} * 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

2.3. Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса.

$$\int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

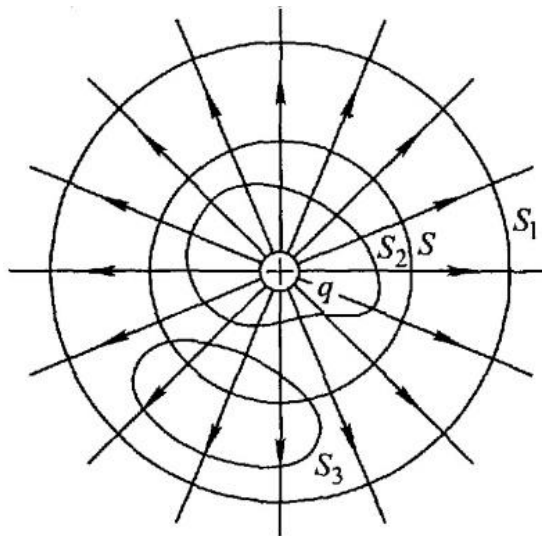


Рисунок 2.8. Произвольная поверхность, внутри которой заряд q .

Доказательство теоремы Остроградского–Гаусса в общем случае.

а) используя свойства силовых линий

$$\Phi \sim N_S$$

$$N_S = N_{S_1} N_{S_2},$$

$$N_{S_3} = 0.$$

б) непосредственное вычисление потока.

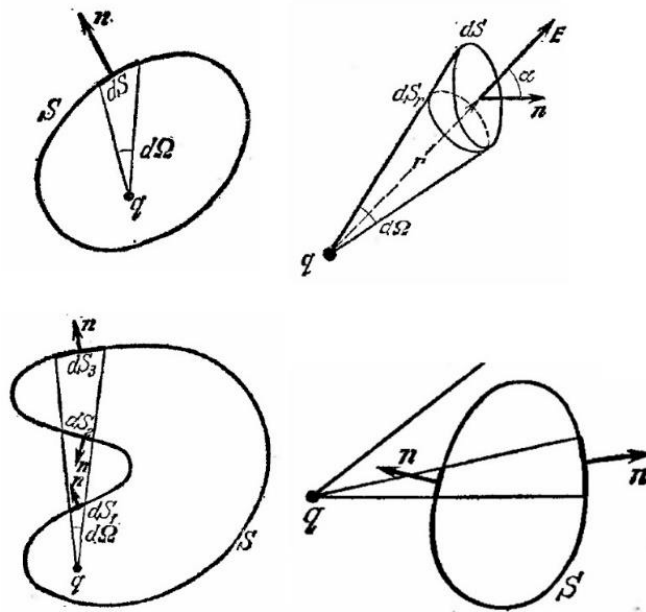


Рисунок 2.9. Выпуклая поверхность произвольной формы.

$$d\Phi = E dS \cos \alpha = E dS_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

$$\oint d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

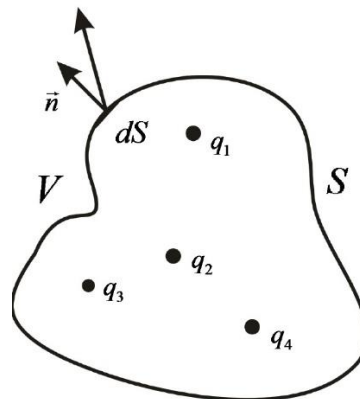


Рисунок 2.10. Совокупность точечных зарядов.

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$ Согласно принципу суперпозиции

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \dots}{\epsilon_0} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

Для непрерывного распределения зарядов имеем

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}.$$

Примеры использования теоремы Остроградского–Гаусса:

- Теорема Ирншоу. Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов неустойчива, если на них действуют только электрические силы.
- Поле однородно заряженной сферы.
- Поле однородно заряженной бесконечной плоскости.
- Поле однородно заряженного бесконечного цилиндра.

Дифференциальная форма электростатической теоремы Остроградского–Гаусса.

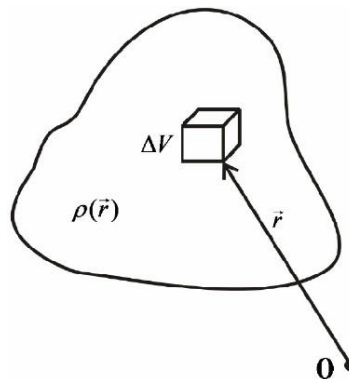


Рисунок 2.11. Непрерывное распределение заряда.

$$\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S} \simeq \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0};$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V}}_{\text{div } \vec{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

В декартовой системе координат

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Формула Гаусса-Остроградского.

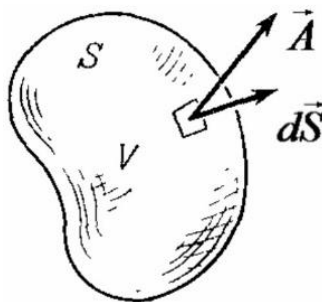


Рисунок 2.12. Произвольная поверхность.

$$\oint_{S_V} \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV$$

С помощью этой формулы несложно из интегральной электростатической теоремы Остроградского-Гаусса получить ее дифференциальную формулу и наоборот.

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}; \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

2.4. Потенциальность электростатического поля. Потенциал.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi,$$

Где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенциал.

Замечание. Потенциал определен с точностью до константы, то есть $\varphi' = \varphi + C$ потенциал. Для однозначности потенциал нормируют, задавая ему определенное значение в некоторой точке пространства. Обычно выбирают нулевое значение потенциала на бесконечности или поверхности Земли.

Потенциал электрического поля точечного заряда.

$$\vec{E} = k \frac{q}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla_{\vec{r}} \left(k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C \right),$$

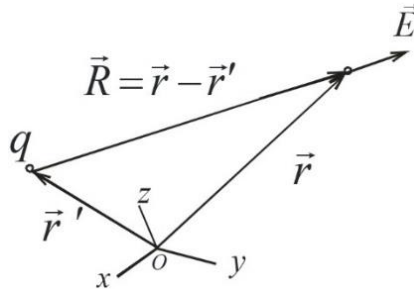


Рисунок 2.13. Точечный заряд.

$$\varphi = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Если $\varphi(\infty) = 0$, то $C = 0$

$$\varphi = k \frac{q}{R}$$

Потенциал поля системы зарядов.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = -\sum_i \nabla \varphi_i(\vec{r}) = -\nabla \left(\sum_i \varphi_i(\vec{r}) \right), \\ \varphi(\vec{r}) &= \sum_i \varphi_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \end{aligned}$$

В случае непрерывного распределения зарядов $q_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i$

$$\varphi(\vec{r}) \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}_i) \Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Лекция 3.

3.1. Работа сил электростатического поля.

Рассмотрим перемещение заряда.

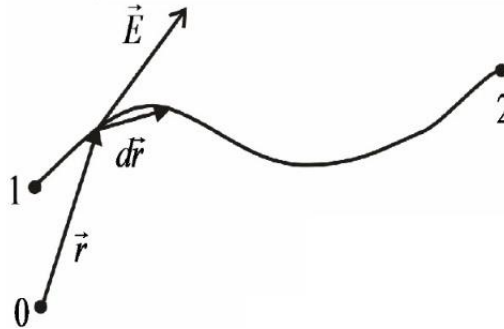


Рисунок 3.1. Перемещение заряда.

$$A_{12} = \int_1^2 \underbrace{q\vec{E}}_{\vec{F}_q} d\vec{r} = -q \int_1^2 \nabla\varphi d\vec{r},$$

$$\nabla\varphi d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = d\varphi(x, y, z),$$

$$A_{12} = -q \int_1^2 \nabla\varphi d\vec{r} = -q \int_1^2 d\varphi = \underbrace{q\varphi_1}_{\Pi_1} - \underbrace{q\varphi_2}_{\Pi_2}.$$

$\Pi = q\varphi$ – потенциальная энергия заряда в поле \vec{E} .

Единицы измерения φ и E .

$$\varphi = \frac{\Pi}{q} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}; \quad \vec{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow [E] = \frac{[\varphi]}{[L]} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

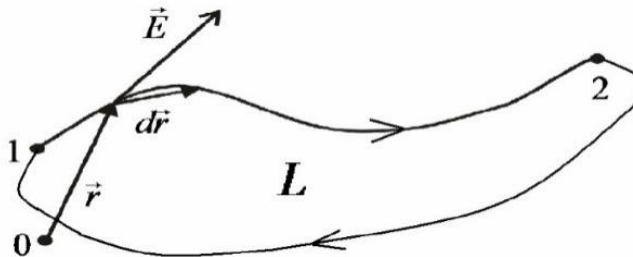


Рисунок 3.2. Замкнутый контур.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_2^1 \vec{E} d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \text{ то есть } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Формула Стокса. Теорема о циркуляции, её представление в дифференциальной форме.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{S_L} \text{rot } \vec{E} * d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0.$$

Потенциал системы точечных зарядов и непрерывного распределения зарядов.

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\varphi(r) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV.$$

3.1. Ротор векторной функции.

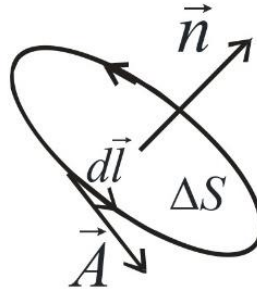


Рисунок 3.3. Элемент поверхности.

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} = (\text{rot } \vec{A} * \vec{n})$$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla * \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Физический смысл ротора в рамках гидродинамической аналогии.

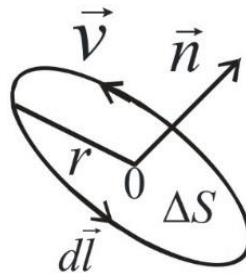


Рисунок 3.4. Твердое тело, вращающееся вокруг оси.

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{v} d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{v 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega$$

Система полевых уравнений электростатики в вакууме в интегральной и дифференциальной форме.

$$\int_{S_v} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Уравнения Лапласа и Пуассона.

Если $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то тождественно $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$.

Тогда $\frac{\rho}{\epsilon_0} = \operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \nabla\varphi = -\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

Уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$,

Уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

3.2. Электрический диполь.

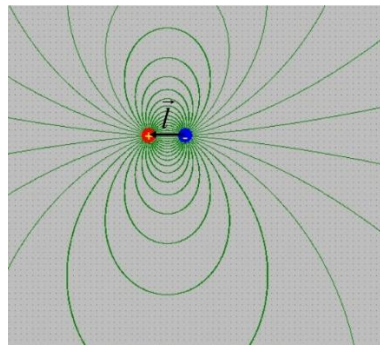


Рисунок 3.5. Диполь. Линии напряженности.

Потенциал диполя.

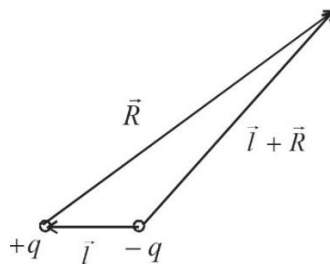


Рисунок 3.6. Электрический диполь.

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} - \frac{q}{|\vec{R} + \vec{l}|} \right), \text{ где } q > 0.$$

$$\frac{1}{|\vec{R} + \vec{l}|} = \frac{1}{[(\vec{R} + \vec{l})^2]^{1/2}} = \frac{1}{(R^2 + 2\vec{R}\vec{l} + l^2)^{1/2}} = \frac{1}{R \left(1 + 2\frac{\vec{R}\vec{l}}{R^2} + \frac{l^2}{R^2} \right)^{1/2}} \approx \frac{1}{R} - \frac{\vec{l}\vec{R}}{R^3};$$

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

$\vec{p} = q\vec{l}$ – электрический момент диполя или дипольный момент

Поле диполя.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi, \\ E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{p_x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -k(\vec{p}\vec{R})\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{R^5} - k\frac{p_x}{R^3} = \\ &= k\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})x}{R^5} - \frac{p_x}{R^3}\right), \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right). \end{aligned}$$

Потенциал и поле диполя (общий случай).

$$\begin{aligned} \vec{R}_+ &= \vec{a} + \vec{R} \\ \vec{R}_- &= \vec{l} + \vec{a} + \vec{R} \end{aligned}$$

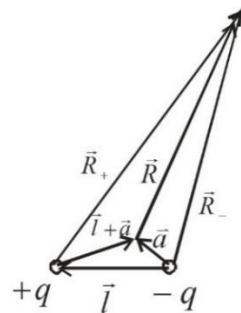


Рисунок 3.7. Поле диполя.

Если $|\vec{l}|$ и $|\vec{a}| \ll R$, то потенциал и поле будут равны

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}. \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right). \end{aligned}$$

Потенциал и поле системы диполей

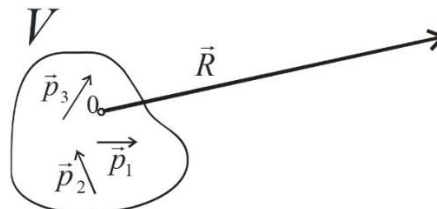


Рисунок 3.8. Система диполей.

Если $d \sim \sqrt[3]{V} \ll R$, то

$$\varphi_d = \sum_{i=1}^N \varphi_d^i = \sum_{i=1}^N k \frac{\vec{p}_i \vec{R}}{R^3} = k \frac{(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i) \vec{R}}{R^3} = k \frac{\vec{P} \vec{R}}{R^3},$$

Где $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{P} \vec{R}) \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{P}}{R^3} \right).$$

3.3. Пример решения задач электростатики с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.

Определить потенциал однородно заряженного шара, если радиус шара R , а его плотность заряда ρ .

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

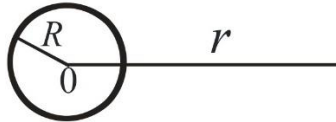


Рисунок 3.9. Однородно заряженный шар.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

$$\text{При } r > R, \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

Общее решение этого уравнения равно $\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$

Граничные условия

- 1) Если $r \rightarrow \infty$, то $\varphi \rightarrow 0$. Отсюда $C_2 = 0$
- 2) Условие точечности заряда. Если $r \gg R$, то $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$. Отсюда $C_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$.

$$\text{При } r \leq R, \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Общее решение этого уравнения равно

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Граничные условия

- 1) Если $r \rightarrow 0$, то φ – ограничено. Отсюда $C_3 = 0$.
- 2) Условие непрерывности потенциала $\varphi(R-0) = \varphi(R+0)$.

$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R} = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0}.$$

$$\text{Находим } C_4 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \text{ и } \varphi = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}.$$

В частности, для вектора напряженности

$$\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{имеем:}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}, \quad \text{при } r \leq R;$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{при } r > R$$



Лекция 4.

4.1. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция.

Явление перераспределения зарядов на проводнике при наличии внешнего стационарного электрического поля называется электростатической индукцией.

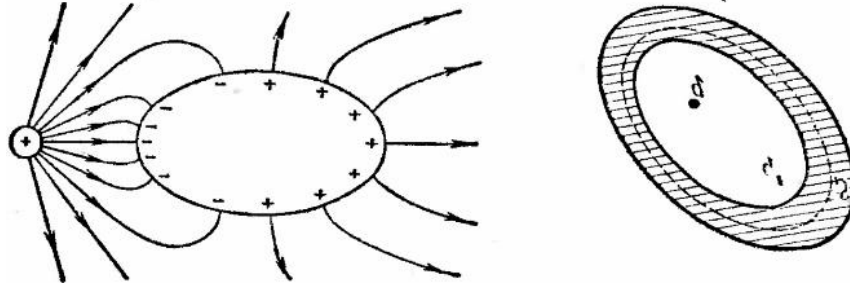


Рисунок 4.1. Иллюстрация электростатической индукции.

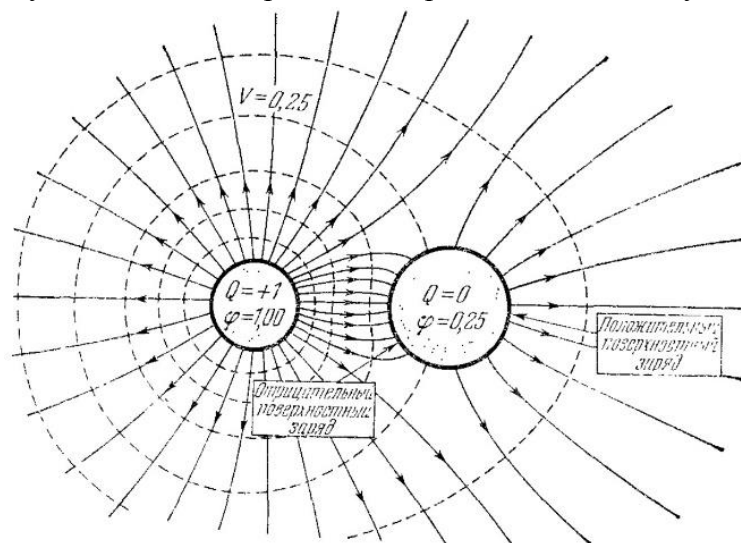


Рисунок 4.2. Электрическое поле около двух сферических проводников.

Один проводник имеет заряд равный +1, а другой – равный нулю. Штриховые кривые являются пересечениями эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. Нулевой потенциал находится в бесконечности.

Поверхностная плотность заряда пропорциональна кривизне поверхности

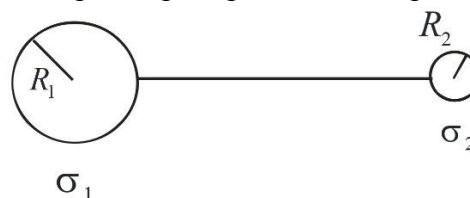


Рисунок 4.4. Два шарика, соединенные проволокой.

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2},$$

$$\sigma_1 * R_1 = \sigma_2 * R_2.$$

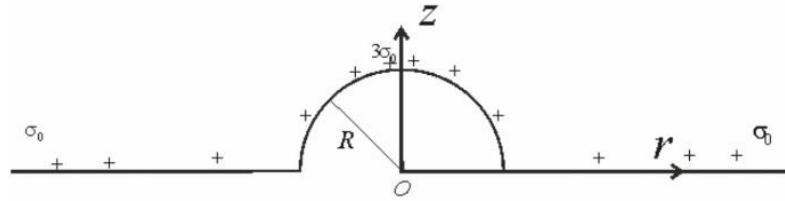


Рисунок 4.5. Бесконечная пластинка с выпуклостью.

$$\sigma = 3\sigma_0 \frac{z}{R},$$

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right).$$

Напряженность поля у поверхности проводника.

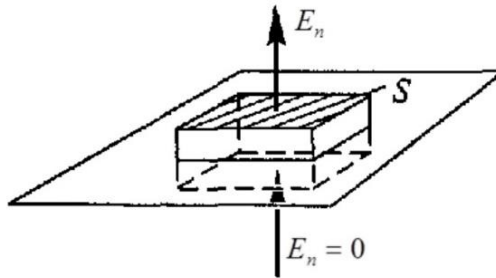


Рисунок 4.6. Поверхность проводника.

$$E_n S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_\tau = 0.$$

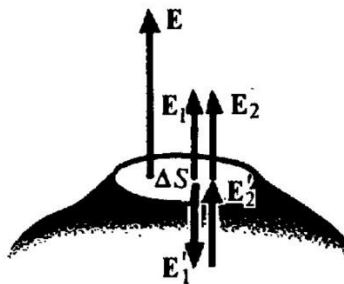


Рисунок 4.7. Механизм образования поля вблизи поверхности проводника.

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E$$

Метод Кавендиша проверки закона Кулона.

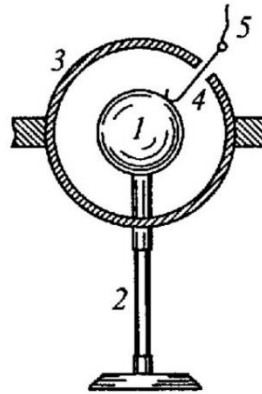


Рисунок 4.8. Две металлические полусферы и шарик.

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{R^{2 \pm \delta}}$$

$$\delta < 1/21600$$

4.2. Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроёмкость.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_s K \frac{\sigma(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad q = \int_s \sigma(r') dS'$$

$$\varphi = \frac{1}{c} q$$

Электроёмкость шара

$$c = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{k \frac{q}{R}} = \frac{R}{k}, \quad C_{\text{земли}} = \frac{6,4 * 10^6}{9 * 10^9} \approx 0,7 * 10^{-3} \text{Ф}$$

4.3. Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

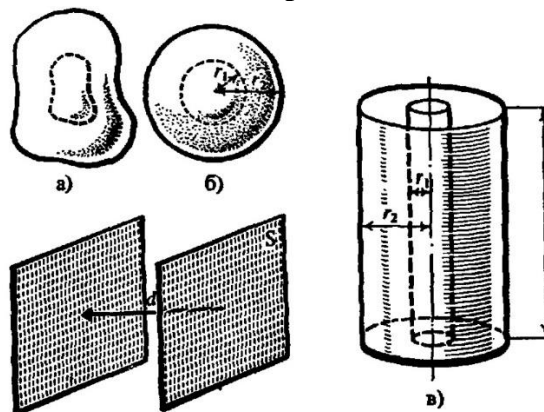


Рисунок 4.9. Конденсаторы.

$$\text{Ёмкость конденсатора } c = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

Плоский конденсатор $c = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$

Сферический конденсатор $c = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right)} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$

Цилиндрический конденсатор $U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad c = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

Потенциальные и емкостные коэффициенты:

$\varphi_i = \sum_j V_{ij} q_j,$ где $V_{ij} = V_{ji}$ – Потенциальные коэффициенты.

$q_j = \sum_i C_{ji} \varphi_i,$ где $C_{ji} = C_{ij}$ – Емкостные коэффициенты.

$$V_{ij} > 0; V_{ii} > V_{ij}.$$

$$C_{ii} > 0; C_{ij} < 0; \sum_j C_{ij} > 0.$$

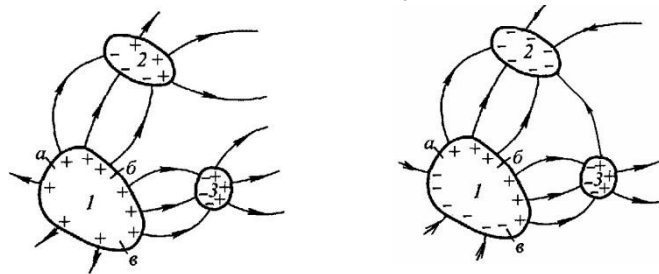


Рисунок 4.10. Некоторые тела.

$$\varphi_1 \sim q_1,$$

$$\varphi_2 \sim q_2,$$

$$\varphi_2 \sim q_1, \quad \varphi_3 \sim q_1; \quad \varphi_1 \sim q_2, \quad \varphi_3 \sim q_2;$$

$$\varphi_i = \alpha_{i1} q_1, \quad \varphi_i = \alpha_{i2} q_2,$$

$$\varphi_i = \alpha_{i1} q_1 + \alpha_{i2} q_2 = \sum_j V_{ij} q_j$$

Метод изображений

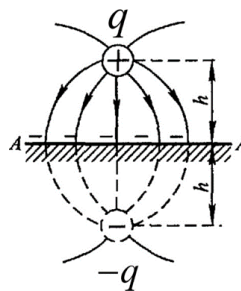


Рисунок 4.11. Заряды.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi = const, \\ \varphi_{r \rightarrow h} \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{h}. \end{cases}$$

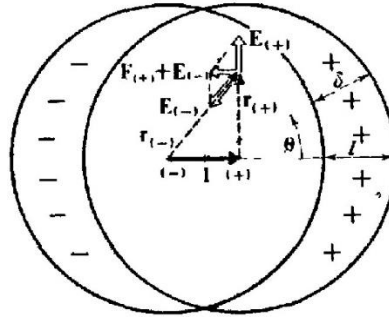


Рисунок 4.15. Проводящий шар в однородном поле.

$$E(+)= [|p|/(3\varepsilon_0)]r_{(+)},$$

$$E(-)=- [|p|/(3\varepsilon_0)]r_{(-)},$$

$$E=E_{(+)}+E_{(-)}= [|p|/(3\varepsilon_0)](r_{(+)}-r_{(-)})=- [|p|/(3\varepsilon_0)]l$$

$$\rho \vec{l}=-3\varepsilon_0\vec{E}=3\varepsilon_0\vec{E}_0, \quad \sigma \Delta S=\rho \Delta S \delta,$$

$$\sigma=p \delta=p l \cos \theta=3 \varepsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

$$\text{где } \delta=l \cos \theta \quad E_n=\sigma / \varepsilon_0=3 E_0 \cos \theta,$$

Поле вне шара – это поле диполя с дипольным моментом

$$\vec{p}=q \vec{l}=\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{l}=\frac{4}{3} \pi R^3 3 \varepsilon_0 \vec{E}_0,$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p} \vec{r}) \vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right)+\vec{E}_0=\left(1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right) \vec{E}_0+\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{3\left(\vec{E}_0 \vec{r}\right) \vec{r}}{r^2}$$

Лекция 5.

5.1. Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации.

Связь вектора поляризации со связанными зарядами.

Для характеристики поляризации диэлектрика вводят вектор поляризации.

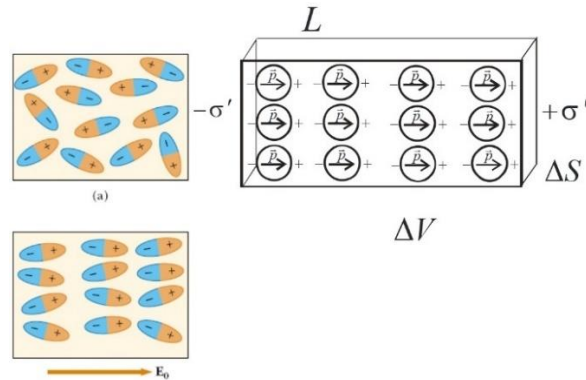


Рисунок 5.1. Диэлектрики.

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V}$$

σ' — связанные заряды.

Из рисунка видно, что $P_n \Delta V = \sigma \Delta S L$, то есть $P_n = \sigma'$

Связь вектора поляризации с поверхностными связанными зарядами.

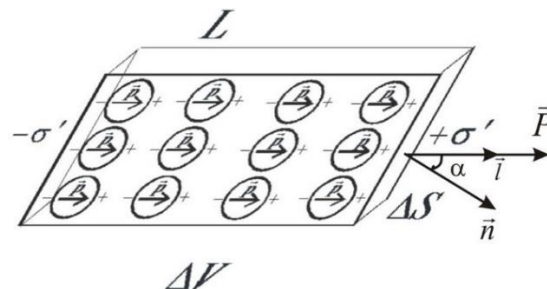


Рисунок 5.2. Диполь.

$$\vec{p} = q' L \vec{l} = \sigma' \Delta S L \vec{l};$$

$$\vec{p} = \vec{P} \Delta V = \vec{P} \Delta S L \cos \alpha = \underbrace{(\vec{P} \vec{n})}_{P_n} \vec{l} \Delta S L; \Rightarrow \sigma' = (\vec{P} \vec{n}) = P_n;$$

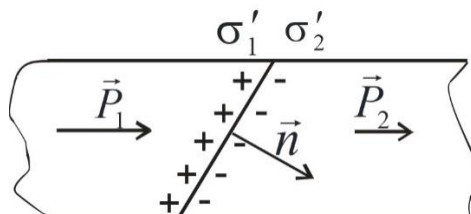


Рисунок 5.3. Граница двух диэлектриков.

Для границы двух диэлектриков имеем

$$\sigma' = \sigma'_1 - \sigma'_2 = P_{1n} - P_{2n} - \vec{n}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

Связь вектора поляризации с объемными связанными зарядами.

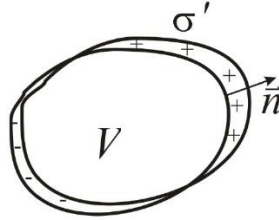


Рисунок 5.4. Некоторая среда.

$$\oint_{S_V} \sigma' dS = -Q'_V = - \int_V \rho' dV;$$

$$\oint_{S_V} \sigma' dS = \oint_{S_V} \vec{P} \vec{n} dS = \oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV;$$

$$\oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = -Q'_V, \quad \operatorname{div} \vec{P} = -\rho'.$$

Для объемной плотности связанных зарядов справедливы соотношения

$$\oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = - \int_V \rho' dV,$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'.$$

Вектор электрической индукции (смещения) в диэлектрике определяется равенством

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

5.2. Материальное уравнение для векторов электрического поля.

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \quad \text{или} \quad \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}).$$

Для многих сред эту связь можно представить в виде

$$P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j + \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{ijk} E_j E_k,$$

Где α_{ij} — тензор линейной восприимчивости,

α_{ijk} — тензор нелинейной восприимчивости.

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость вещества.

Для изотропного диэлектрика $\alpha_{ij} = \delta_{ij}\alpha$, тогда имеем

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \alpha \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

где по определению $\varepsilon = 1 + \alpha$, – относительная диэлектрическая проницаемость вещества.

Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков в дифференциальной и интегральной форме.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}} + \underbrace{\operatorname{div} \vec{P}}_{-\rho'} = \rho;$$

Дифференциальная форма – $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

Интегральная форма – $\int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$.

5.3. Система полевых уравнений электростатики в бесконечной изотропной диэлектрической среде.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

Для изотропной среды $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, тогда

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

Из приведенных выше уравнений следует, что в изотропном бесконечном диэлектрике напряженность электрического поля, создаваемая свободными зарядами будет меньше в ε раз по сравнению с напряженностью поля создаваемыми этими же зарядами в вакууме ε_0 .

Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.

$$\begin{cases} D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma. \\ E_{\tau_2} - E_{\tau_1} = 0. \end{cases}$$

Где σ – плотность свободных поверхностных зарядов на грани диэлектриков.

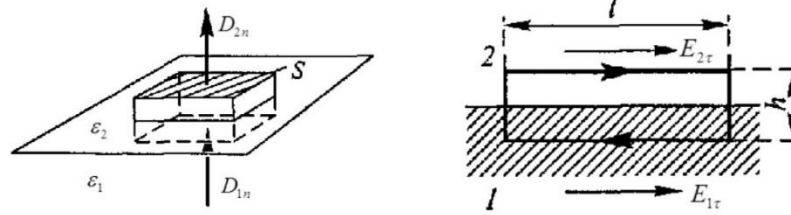


Рисунок 5.5. Некоторая среда.

$$\begin{aligned} D_{2n} * S - D_{1n} * S &= \sigma * S, & E_{2\tau} * l - E_{1\tau} * l &= 0, \\ D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, & E_{2\tau} - E_{1\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Преломление линий E и D

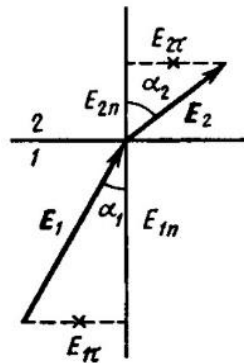


Рисунок. 5.6. Два диэлектрика.

$$\begin{aligned} E_{2\tau} &= E_{1\tau}, \quad \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}. \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} &= \frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то $\alpha_2 > \alpha_1$

5.4. Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.

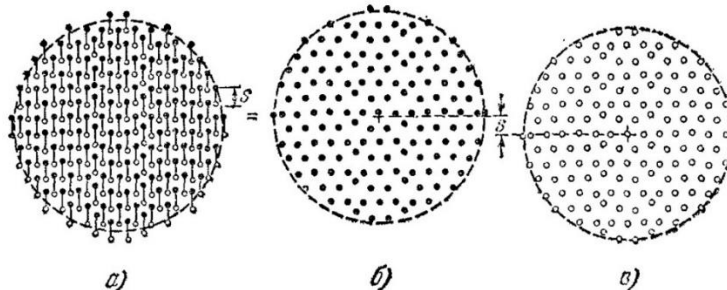


Рисунок 5.7. Сфера с ориентированными молекулярными диполями (а) эквивалентна двум наложенным друг на друга несколько смещенным сферам, с положительными (б) и с отрицательными зарядами (в).

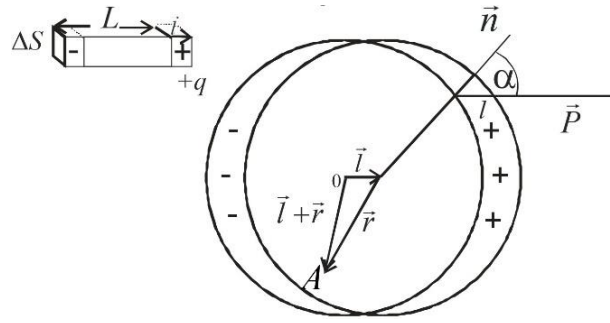


Рисунок 5.8. Сфера.

$$p = -qL = p\Delta S|\vec{l}|L = p|\vec{l}|\Delta SL = |\vec{P}|\Delta V. \Rightarrow \vec{P} = \rho\vec{l}$$

Поле внутри шара

$$\vec{E}'_A = \frac{1}{3\epsilon_0} = \rho\vec{r} - \frac{1}{3\epsilon_0}\rho(\vec{r} + \vec{l}) = -\frac{1}{3\epsilon_0}\rho\vec{l} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P},$$

Поле вне шара совпадает с полем диполя

$$\vec{p} = V_{\text{шара}}\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3_{\text{шара}}\rho\vec{l}, \text{ то есть } \vec{E}' = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

$$\vec{E}'_A = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho\vec{r} - \frac{1}{3\epsilon_0}\rho(\vec{r} + \vec{l}) = -\frac{1}{3\epsilon_0}\rho\vec{l} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P},$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \underbrace{\alpha}_{\epsilon-1} \underbrace{(\vec{E}_0 + \vec{E}')}_{\vec{E}}, \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \alpha \left(\vec{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P} \right),$$

$$\vec{P} = 3\epsilon_0 \frac{\alpha}{3 + \alpha} \vec{E}_0 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0.$$

$$\sigma'^{P_n} = P \cos \alpha.$$

Дипольный момент шара:

$$\vec{p} = \vec{P} * \frac{4}{3} \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \vec{E}_0, \text{ где } R - \text{ радиус шара.}$$

При $\epsilon \rightarrow \infty$ – проводящий шар.

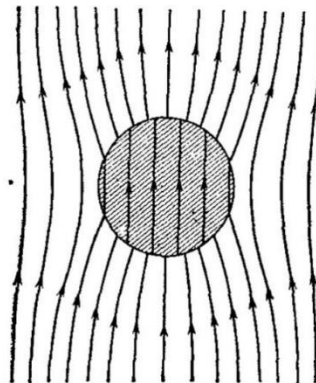
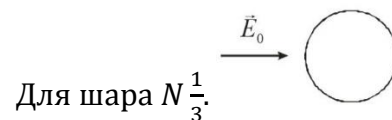


Рисунок. Полное поле E внутри и снаружи шара из диэлектрика.

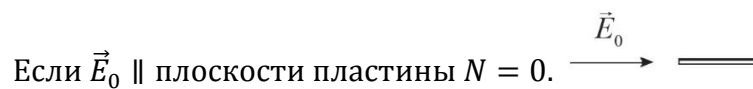
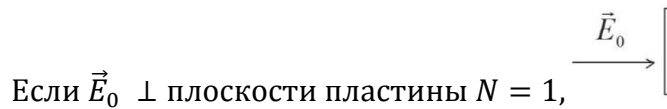
Фактор формы.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \frac{N}{\varepsilon_0} \vec{P},$$

где N – Фактор формы



Для бесконечной пластины:



Лекция 6.

6.1. Энергия системы электрических зарядов.

Рассмотрим систему электрических зарядов.

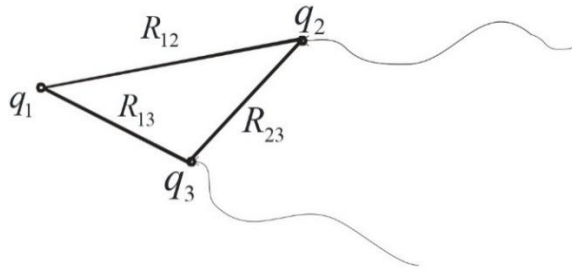


Рисунок 6.1. Заряд.

$$W_2 = q_2 \varphi_2 = k \frac{q_2 q_1}{R_{12}},$$

$$W_3 = q_3 \varphi_3 = k \frac{q_3 q_1}{R_{13}} + \frac{q_3 q_2}{R_{23}},$$

$$W = W_2 + W_3 = k \left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} \right),$$

$$W = k \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \text{ где } \varphi_i = k \sum_j \frac{q_j}{R_{ij}},$$

Энергия взаимодействия зарядов при наличии диэлектриков.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \text{ но } \varphi_i \neq k \sum_j \frac{q_j}{R_{ij}}.$$

Энергия взаимодействия зарядов при непрерывном распределении зарядов.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV.$$

Пример. Энергия конденсатора.

$$W = \frac{1}{2} q_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_1 = \frac{1}{2} q_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q_1 U = \frac{c U^2}{2}.$$

Энергия системы заряженных проводников.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} q_i q_j.$$

Энергия электростатического поля и её объемная плотность.

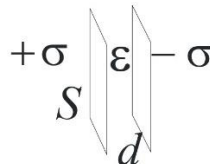


Рисунок 6.2. Конденсатор.

$$W = -\frac{1}{2}cU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon E}_{\vec{D}} * E * \underbrace{Sd}_V = \frac{DE}{2}V.$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}.$$

Строгий вывод формулы для плотности энергии электростатического поля.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho\varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\operatorname{div} \vec{D}) \varphi dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial(D_i\varphi)}{\partial x_i}}_{\operatorname{div}(\varphi\vec{D})} - \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}_{-\vec{D}\vec{E}} \right) dV = \\ &\underbrace{\frac{1}{2} \int_{S_{R \rightarrow \infty}} \varphi \vec{D} d\vec{S}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{D}\vec{E} dV = \int_{\infty} w dV, \text{ где } w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}. \end{aligned}$$

6.2. Энергия взаимодействия и собственная энергия.

Собственная энергия заряженного тела это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом.

Энергия взаимодействия двух заряженных тел - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела.

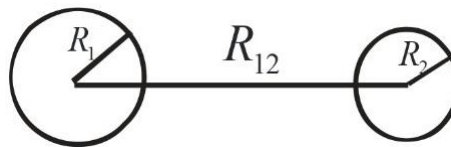


Рисунок 6.3. Два заряженных проводящих шара

Для уединенных шаров

$$\begin{aligned} W_1^{\text{собст.}} &= \frac{q_1\varphi_1}{2}, \\ W_2^{\text{собст.}} &= \frac{q_2\varphi_2}{2}. \end{aligned}$$

Для взаимодействующих шаров

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1^{q_1} + \varphi_1^{q_2}, \varphi_2 = \varphi_2^{q_1} + \varphi_2^{q_2}. \\ W &= \frac{1}{2}q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}q_2\varphi_2 = \underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_1}}_{W_1^{\text{собст.}}} + \underbrace{\frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_2}}_{W_2^{\text{собст.}}} + \underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_2} + \frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_1}}_{W_{\text{взаимодействия}}}. \end{aligned}$$

В рамках полевого формализма

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$W = \int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} dV = \underbrace{\int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_1^2}{2} dV}_{W_1^{\text{собст.}}} + \underbrace{\int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_2^2}{2} dV}_{W_2^{\text{собст.}}} + \underbrace{\int_{\infty} \varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV}_{U^{\text{взаимод.}}}$$

При $R_{1,2} \rightarrow 0$, $W_{1,2}^{\text{собст.}} \rightarrow \infty$; $U^{\text{взаимод.}} \leq$ или > 0 .

Энергия электрического диполя во внешнем поле.

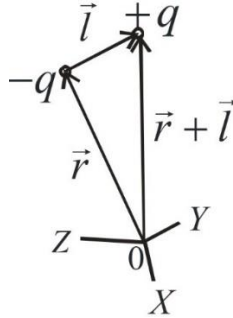


Рисунок 6.4. Два точечных заряда.

$$W = q\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - q\varphi(\vec{r}),$$

$$\varphi(\vec{r} + \vec{l}) = \varphi(x + l_x, y + l_y, z + l_z) = \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + \dots,$$

$$W = q \underbrace{\vec{l}}_{\vec{p}} * \underbrace{\nabla \varphi}_{-\vec{E}} = -\vec{p} \vec{E}.$$

6.3. Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Силы, действующие на диполь.

$$\vec{F} = -\nabla W;$$

$$F_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{p} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 p_j E_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 p_j \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \left(p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right); \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{p} \nabla) * \vec{E};$$

Момент силы, действующей на диполь

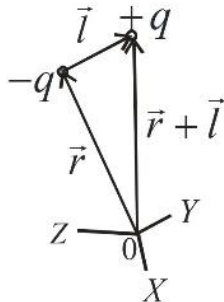


Рисунок 6.5. Два точечных заряда.

$$\vec{M} = [\vec{r} + \vec{l}, q\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})] - [\vec{r}, q\vec{E}(\vec{r})],$$

В однородном поле

$$\vec{E} = const, \text{ тогда } \vec{M} = [\vec{l}, q\vec{E}] = [q\vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}].$$

6.4. Объемная плотность силы, действующая на диэлектрик.

Дипольный момент объема диэлектрика $\vec{P}_{\Delta V}$ выражается через вектор поляризации \vec{P} .

$$\vec{P}_{\Delta V} = \vec{P} \Delta V,$$

Тогда плотность силы

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \frac{(\vec{P}_{\Delta V} * \nabla) \vec{E}}{\Delta V} = \left(\vec{P} * \nabla \right) \vec{E} = \varepsilon_0 \alpha (\vec{E} * \nabla) \vec{E};$$

$$f_i = \varepsilon_0 \alpha \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^3 \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} = \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{E_j^2}{2} = \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\vec{E}^2}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \alpha * \nabla \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) * \nabla \frac{E^2}{2}.$$

6.5. Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов.

Если в системе поддерживается $T = const$, деформация среды не меняется и

$$\varepsilon = const, \text{ то } dW = dW_{\text{энергия поступивших от внешних источников}} + dA'_{\text{внешних сил}}.$$

Для квазистатических перемещений

$$dA'_{\text{внешних сил}} = -dA_{\text{электрического поля}} = - \sum_{i=1}^n F_i d\xi_i,$$

где ξ_i , - обобщенные координаты, F_i – обобщенные силы.

$$dW_{\text{энергия поступивших от внешних источников}} = \sum_j \varphi_j dq_j - \sum_{i=1}^n F_i d\xi_i.$$

$$dW = \sum_j \varphi_j dq_j - \sum_{i=1}^n F_i d\xi_i.$$

1) Если $q_j = const$, то

$$\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i = -dW(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = - \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{q_j=const} d\xi_i.$$

$$F_i = - \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{q_j=const}.$$

2) Если $\varphi_j dq_j$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n F_i d \xi_i = dW(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{\varphi_j = \text{const}} d \xi_i.$$

$$F_i = \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{\varphi_j = \text{const}}$$

Пример. Вычислить силу притяжения пластин плоского конденсатора, помещенного в жидкий диэлектрик, если $q = \text{const}$.

$$W = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S'}$$

d – Обобщенная координата.

$$F_d = - \left. \frac{\partial W}{\partial d} \right|_{q = \text{const}} = - \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = - \frac{q}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = - \frac{q}{2} E.$$

В диэлектрике сила взаимодействия пластин уменьшилась в ε раз, то есть $F_d = F_d^{\text{бак.}} / \varepsilon$.

Лекция 7.

7.1. Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле.

Поляризационные свойства диэлектриков определяются поляризационными особенностями отдельных молекул вещества.

Все молекулы можно разделить на полярные и неполярные молекулы.

У неполярных молекул в отсутствии внешнего электрического поля дипольный момент равен нулю. Полярные молекулы обладают собственным дипольным моментом.

Поляризация неполярных молекул.

$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}_0$, где β - поляризуемость молекулы.

Для оценки можно рассматривать молекулу как проводящий шар с $R \sim 10^{-8}$ см, тогда $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$,

$$\beta = 4\pi R^3 \sim 4\pi 10^{-24} \text{ см}^3.$$

Элемент	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
$\beta \cdot \frac{1}{4\pi} 10^{-24} \text{ см}^3$	0,66	0,21	12	9,3	1,5	0,4	27	1,6	34

Микроскопическое и макроскопическое поле в веществе.

$$\vec{E}_{\text{макро.}} = \langle \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{микро.}} \rangle_{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{микро.}} dV.$$

Поле в диэлектрике это $\vec{E} = \vec{E}_{\text{макро.}}$

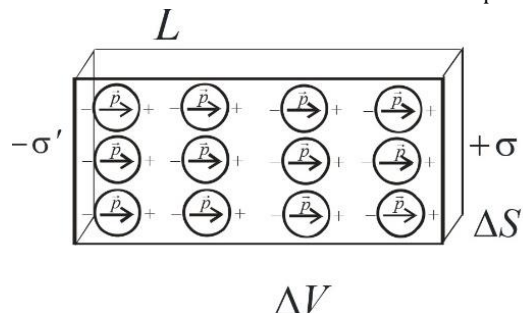


Рисунок 7.1. Диэлектрик.

Локальное поле.

Локальное поле, действующее на молекулу отличается, от макроскопического поля в диэлектрике на поле самой молекулы

$$\vec{E}_{\text{лок.}} = \vec{E} - \vec{E}_{\text{мол.}} \approx \vec{E}.$$

Поляризуемость разреженных газов.

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V} = \frac{N_{\Delta V}}{\Delta V} \vec{p}_1 = n * \vec{p}_1 = n * \epsilon_0 \beta \vec{E}_0 = \epsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec{E}$$

Таким образом имеем $\alpha = \epsilon - 1 = n\beta$.

7.2. Формула Клаузиуса-Моссотти.

Рассмотрим сферу.

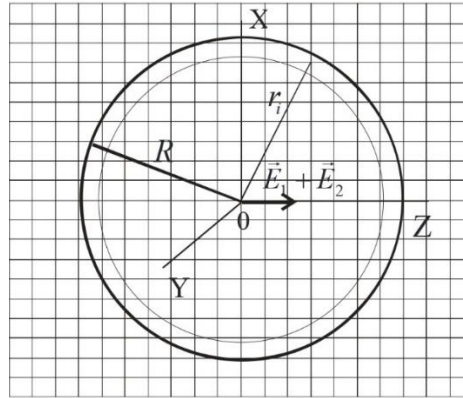


Рисунок 7.2. Сфера.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \text{ где } \vec{E}_1 = \sum_i \vec{E}_{r_i > R}, \quad \vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_{r_i \leq R},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{3(\vec{p}\vec{r}_i)\vec{r}_i}{r_i^5} - \frac{\vec{p}}{r_i^3} \right),$$

$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3(p_x x_i + p_y y_i + p_z z_i)x_i - p_x r_i^2}{r_i^5} = 0.$$

Так как для кубической симметрии при суммировании по сферическому слою

$$\sum_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i r_i^2,$$

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2,$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i z_i x_i = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$E_{2y} = E_{2z} = 0.$$

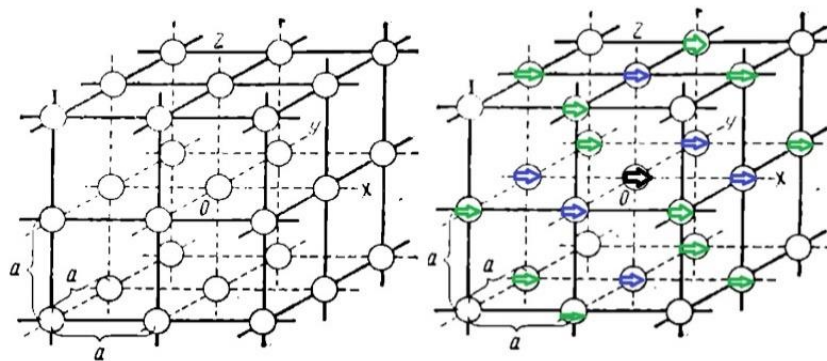


Рисунок 7.3. Кубическая решетка и диполь.

$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{3(p_x x_i)}{r_i^5} - \frac{p_x}{r_i^3} \right),$$

$$1) E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-4 \frac{p}{a^3} + 2 * 2 \frac{p}{a^3} \right) = 0,$$

$$2) E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -4 \frac{p}{(\sqrt{2}a)^3} + 2 \left[4 \frac{3pa^2}{(\sqrt{2}a)^5} - 4 \frac{p}{(\sqrt{2}a)^3} \right] \right\} = 0,$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

Таким образом, вектор поляризации равен

$$\vec{P} = n * \epsilon_0 \beta \left(\vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right) \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \underbrace{\left(\frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta} \right)}_{\alpha} \vec{E}; \Rightarrow \alpha = \frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta}.$$

Из этой формулы имеем $n\beta = 3 \frac{\alpha}{3+\alpha} = 3 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}$ — **Формула Клаузиуса Моссотти**.

Так как $n = \frac{\rho_m}{\mu} N_A$, то $\beta N_A = \frac{\mu}{\rho_m} 3 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}$ — в широких пределах для неполярных диэлектриков не зависит от физических параметров (например для CO_2 вплоть до 100 Мпа при 100°C).

7.3. Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена.

Рассмотрим соединения веществ.

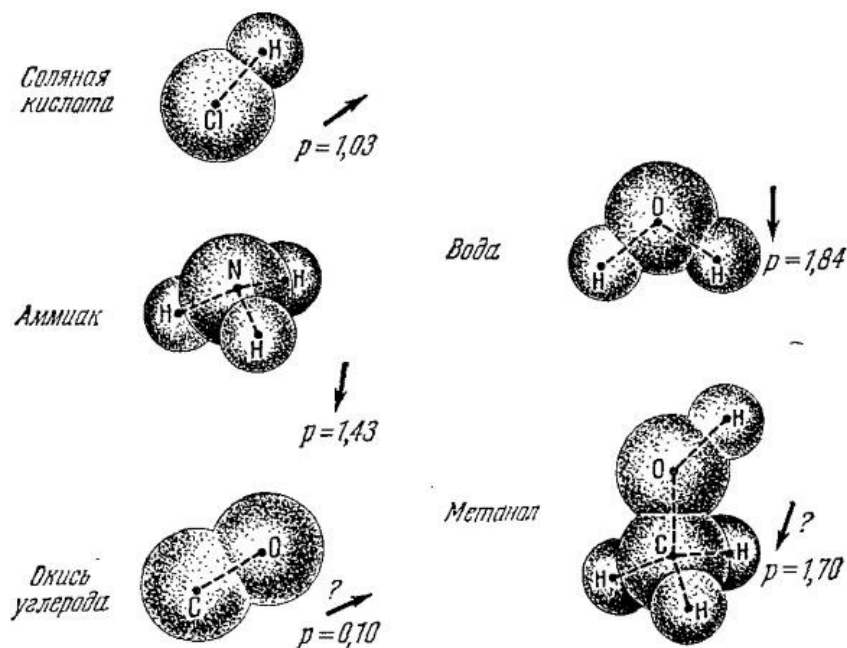


Рисунок 7.4. Соединения веществ.

Поляризация газообразного полярного диэлектрика.

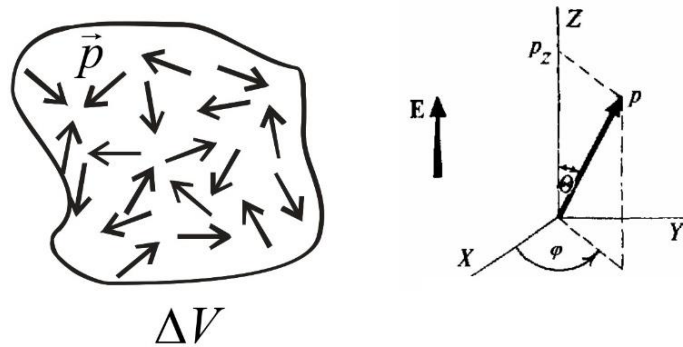


Рисунок 7.5. Ориентировка диполя в сферической системе координат.

В соответствии с распределением Больцмана

$$dN = A e^{-\frac{W}{k_B T}} * do, \text{ где } do = \sin \theta * d\varphi * d\theta,$$

$$W = -\vec{p} \vec{E} = -pE \cos \theta.$$

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dN}{\int dN} = \frac{\int_0^\pi p \cos \theta * A e^{\frac{pE}{k_B T} \cos \theta} * 2\pi * \sin \theta * d\theta}{\int_0^\pi A e^{\frac{pE}{k_B T} \cos \theta} * 2\pi * \sin \theta * d\theta}.$$

$$I = \int_0^\pi e^{\zeta \cos \theta} * \sin \theta * d\theta = - \int_1^{-1} e^{\zeta x} * dx = \frac{2}{\zeta} \text{sh} \zeta,$$

$$\frac{dI}{d\zeta} = \int_0^\pi \cos \theta * e^{\zeta \cos \theta} * \sin \theta * d\theta = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{2}{\zeta} \text{sh} \zeta \right) = \frac{2}{\zeta} \left(\text{ch} \zeta - \frac{\text{sh} \zeta}{\zeta} \right);$$

В результате имеем

$$\langle p_z \rangle \geq p \frac{\text{ch} \zeta - \frac{\text{sh} \zeta}{\zeta}}{\text{sh} \zeta} = p * L(\zeta),$$

Где

$L(\zeta) = \text{cth} \zeta - \frac{1}{\zeta}$ — функция Ланжевена.

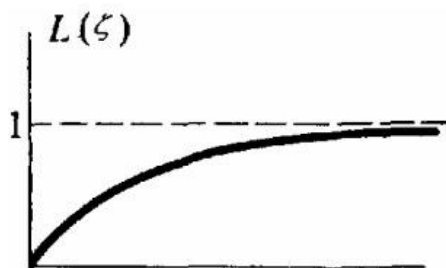


Рисунок 7.6. Функция Ланжевена.

При $\zeta \ll 1$,

$$L(\zeta) = \frac{1}{3}\zeta + \dots,$$

$$\langle p_z \rangle \geq p \frac{\zeta}{3} = \varepsilon_0 \frac{1}{3\varepsilon_0 K_B T} p^2 E = \varepsilon_0 \beta E,$$

Где β - эффективная поляризуемость молекулы. Для разреженных газов вектор поляризации равен

$$\vec{P} = n \langle \vec{p}_1 \rangle = \varepsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec{E} \approx \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_0.$$

$$\text{Здесь } \alpha = \varepsilon - 1 = n\beta = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 K_B T} = n\beta_0 + \frac{np^2}{3\varepsilon_0 K_B T},$$

$n\beta_0$ – неполярная составляющая восприимчивости

7.4. Поляризация ионных кристаллов. Электрические свойства кристаллов.

Рассмотрим ячейку кристалла хлористого цезия.

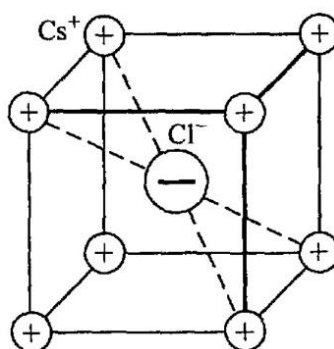


Рисунок 7.7. Элементарная ячейка кристалла хлористого цезия CsCl.

В кристаллических веществах возможно смещение положительной и отрицательной ионных подрешоток относительно друг друга под действием внешнего электрического поля. Такая поляризация называется ионной поляризацией.

Пирозлектрики – У некоторых кристаллов в состоянии термодинамического равновесия решетки положительных и отрицательных ионов смещены, то есть они имеют спонтанную поляризацию, например, кристалл турмалина.

Пьезоэлектрики – У ряда кристаллов при деформациях возникает электрическая поляризация (прямой пьезоэффект) и наоборот при наложении электрического поля происходит деформация (обратный пьезоэффект). К таким веществам относятся кристаллы кварца, турмалина, сегнетовой соли, титаната бария и многие другие.

Сегнетоэлектрики – Некоторые кристаллические вещества (сегнетовая соль $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, титанат бария BaTiO_3 и др.) в определенном диапазоне температур находятся в состоянии спонтанной поляризации. В отличие от пирозлектриков вектор спонтанной поляризации может легко ориентирован относительно слабым электрическим полем. Эти вещества (сегнетоэлектрики) в данном диапазоне температур имеют гигантские значения диэл. проницаемости $\varepsilon \sim 10000$.

Зависимость $\vec{P}(\vec{E})$ является нелинейной, то есть восприимчивость $\alpha(\vec{E})$. Процесс поляризации имеет гистерезис

7.5. Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектриков.

Рассмотрим петлю гистерезиса.

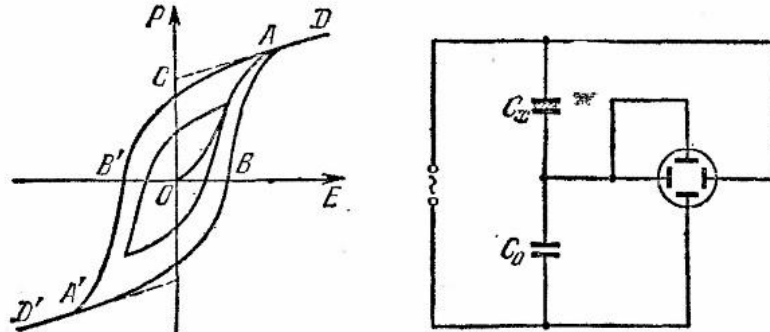


Рисунок 7.8. Петля гистерезиса и конденсаторы.

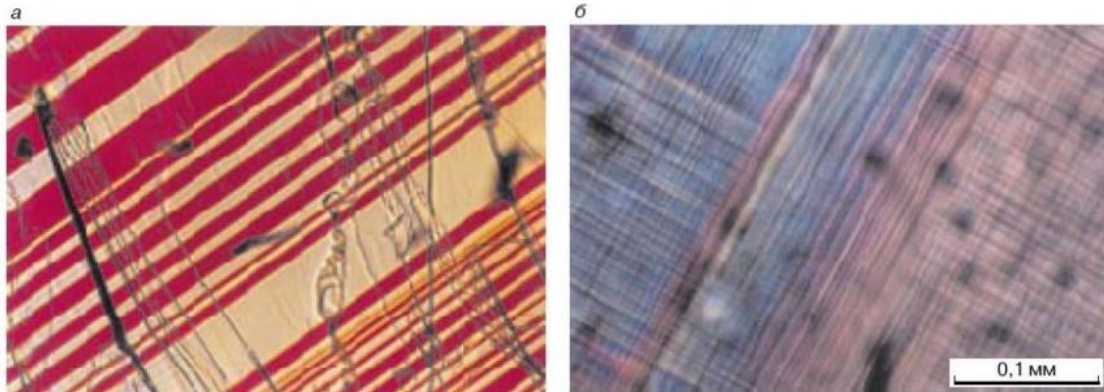


Рисунок 7.9. Изображение доменной структуры монокристаллов титана и бария (а) и сегнетовой соли (б) в поляризованном свете.

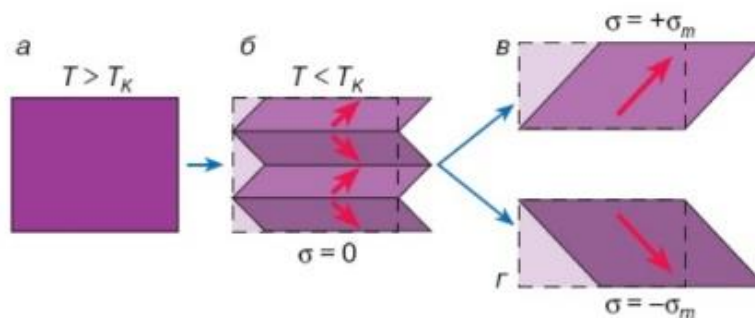


Рисунок 7.10. Схематическое изображение возникновения (а,б,) и перестройки (б-в; б-г) доменной структуры в сегнетоэластическом кристалле.

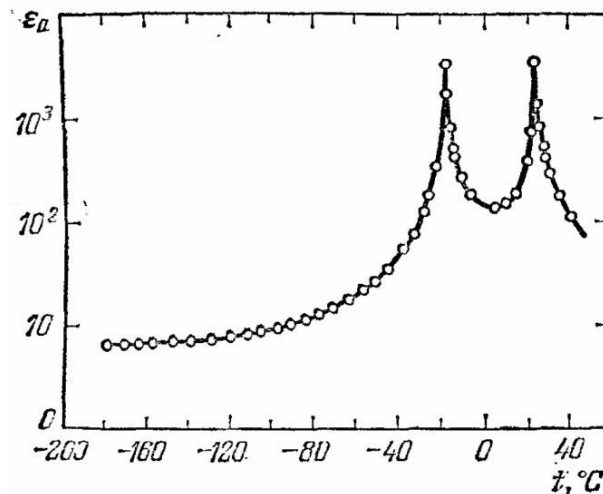


Рисунок 7.11. Закон Кюри-Вейса вблизи точек Кюри.

$$\alpha = \frac{C}{T_K - T'} \quad \alpha = \frac{C}{T - T_K}.$$

Для сегнетовой соли $T'_K = -18^\circ\text{C}$, $T_K = 24^\circ\text{C}$.

Применение сегнетоэлектриков.

Сегнетоэлектрики находят широкое применение при изготовлении малогабаритных конденсаторов в качестве нелинейных элементов радиотехнических устройств, в технике ультразвука. Во внешнем электрическом поле изменяются преломляющие свойства сегнетоэлектрических кристаллов (компоненты тензора показателя преломления): это явление используется для управления световыми пучками (оптические затворы, модуляторы и умножители частоты лазерного излучения и т.д.).

7.6. Пондеромоторные силы, действующие на диэлектрик в конденсаторе.

Давление и натяжение Фарадея-Максвелла.

Рассмотрим конденсатор.

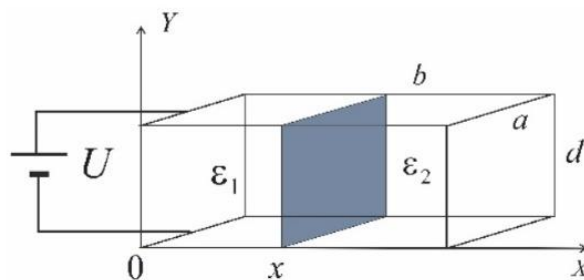


Рисунок 7.12. Конденсатор.

$$W = \frac{cU^2}{2}, \text{ где } c = \frac{\epsilon_0\epsilon_1xa}{d} + \frac{\epsilon_0\epsilon_2(b-x)a}{d}.$$

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{\epsilon_0\epsilon_1a}{d} - \frac{\epsilon_0\epsilon_2a}{d} \right) \frac{U^2}{2},$$

$$U = Ed; \Rightarrow F_x = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E^2 ad}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E^2 ad}{2} = \left(\frac{D_1 E}{2} - \frac{D_2 E}{2} \right) ad.$$

$$f_x = \frac{F_x}{ad} = w_1 - w_2, \text{ где } w = \frac{DE}{2}.$$

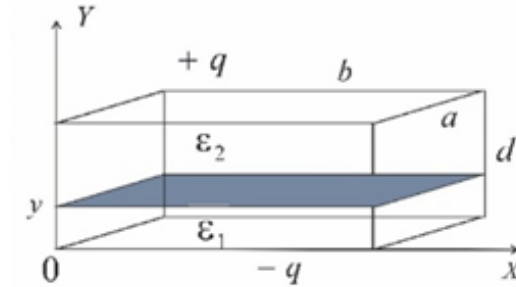


Рисунок 7.12. Конденсатор.

$$W = \frac{q^2}{2c}, \text{ где } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{y}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 ab} + \frac{d-y}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 ab}$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 ab} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 ab} \right) \frac{q^2}{2},$$

$$\text{так как } q = \sigma * ab, D = \sigma, E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}.$$

$$f_y = \frac{F_y}{ab} = \frac{DE_2}{2} - \frac{DE_1}{2} = w_2 - w_1.$$

Электрические пондеромоторные силы имеют такую же величину, как если бы линии напряженности имели продольное натяжение и боковое давление, каждое из которых равно объемной плотности энергии поля $w=DE/2$.

Лекция 8.

8.1. Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока.

Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов.

Сила электрического тока через заданную поверхность определяется величиной заряда, проходящего через эту поверхность за единицу времени.

Плотность тока - это векторная величина, проекция которой на нормаль к элементарной поверхности равна величине электрического заряда, проходящего через единицу поверхности за единицу времени.

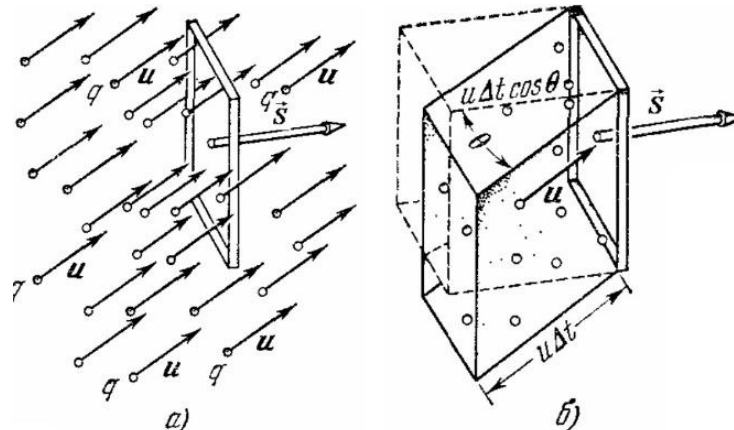


Рисунок 8.1. Поток частиц.

$$I_s = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qn\Delta V}{\Delta t} = \frac{qnus\Delta \cos \theta}{\Delta t} = qn(\vec{u}\vec{S}),$$

$$\vec{J} = qn\vec{u}.$$

Если заряды движутся с разными скоростями

$$I_s = \sum_i qn_i(\vec{u}_i\vec{S}) = \vec{J}\vec{S}, \text{ где } \vec{J} = \sum_i qn_i\vec{u}_i - \text{плотность тока.}$$

$$\vec{J} = q \frac{\sum_i n_i\vec{u}_i}{n} n = qn \langle \vec{u} \rangle, \text{ где } n = \sum_i n_i; \langle \vec{u} \rangle = \frac{\sum_i n_i\vec{u}_i}{n}.$$

Линии тока – это линии, касательные к которым направлены по направлению средней (или дрейфовой) скорости. При стационарных токах вдоль этих линий движутся заряженные частицы.

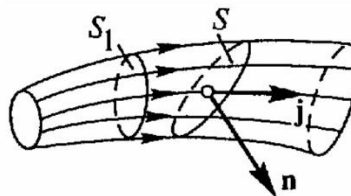


Рисунок 8.2. Трубка тока.

Уравнение непрерывности. Условие стационарности тока.

Согласно закону сохранения заряда уравнение непрерывности.

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_V = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{S_V} \vec{j} d\vec{S} = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 - \text{уравнение непрерывности,}$$

В стационарном случае $\partial \rho / \partial t = 0$, следовательно, $\operatorname{div} \vec{j} = 0$

Электрическое поле в проводнике с током и его источники.

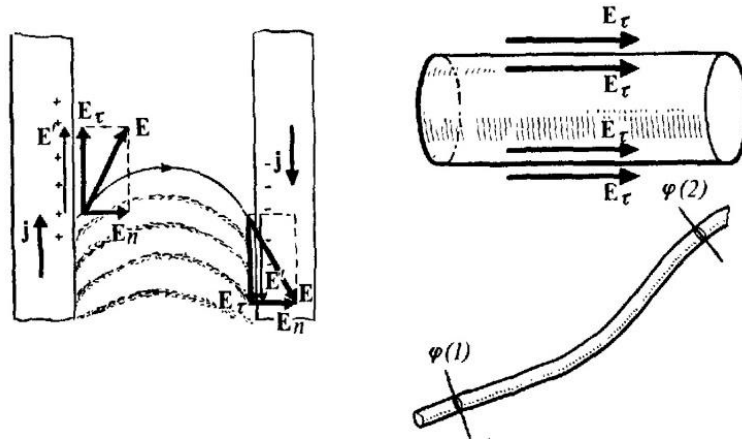


Рисунок 8.3. Демонстрация наличия нормальной составляющей напряженности поля вблизи поверхности проводника.

$$\varphi(2) - \varphi(1) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

8.2. Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи.

Электросопротивление.

Опыт показывает, что между током и напряжением на участке проводника существует однозначная зависимость

$$I = f(U).$$

Для многих проводников эта зависимость линейная

$$I = \Lambda * U \frac{1}{R} * U,$$

Где Λ и R – электрическая проводимость и сопротивление

Единица сопротивления $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} / 1 \text{ А} = 1 \text{ В} / \text{А}.$

Удельное электрическое сопротивление

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Вещество	Удельное сопротивление ρ , Ом м	Вещество	Удельное сопротивление ρ , Ом м
Серебро	$(1,66 - 1,63) \cdot 10^{-8}$	10 %-ный водный раствор NaCl	0,0825
Медь тянутая	$1,78 \cdot 10^{-8}$	Химически чистая вода	$\sim 10^6$
Платина	$11,0 \cdot 10^{-8}$	Стекло натровое	$\sim 10^9$
Константан (сплав 60 % Cu, 40 % Ni)	$49,0 \cdot 10^{-8}$	Фарфор	$\sim 10^{13}$
Нихром (67,5 % Ni, 15 % Cr, 16 % Fe, 1,5 % Mn)	$110 \cdot 10^{-8}$	Янтарь, плавленый кварц	$> 10^{18}$
Графит	$\sim 3 \cdot 10^{-5}$		

Удельное сопротивление зависит от температуры

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha \cdot (t - t_0)],$$

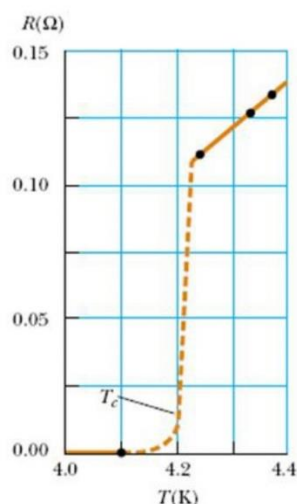
Где α - температурный коэффициент сопротивления.

Для чистых металлов $\alpha \approx 1/273K^{-1} = 0,00367K^{-1}$.

Вещество	Температура, °C	Температурный коэффициент сопротивления α , K ⁻¹
Серебро	0-100	$40 \cdot 10^{-4}$
Медь	18	$43 \cdot 10^{-4}$
Платина	0-100	$38 \cdot 10^{-4}$
Константан	18	(от -0,4 до +0,1) $\cdot 10^{-4}$ *)
10 %-ный водный раствор NaCl	18	-0,021
Графит	18	$-5 \cdot 10^{-4}$
Стекло	100	от -0,1 до -0,2

*) В зависимости от образца.

Сверхпроводимость.



Material	$T_c(K)$
HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	134
Tl-Ba-Ca-Cu-O	125
Bi-Sr-Ca-Cu-O	105
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92
Nb ₃ Ge	23,2
Nb ₃ Sn	18,05
Nb	9,46
Pb	7,18
Hg	4,15
Sn	3,72
Al	1,19
Zn	0,88

Рисунок 8.4. Электрическое сопротивление ртути при низких температурах и критическая температура некоторых проводников.

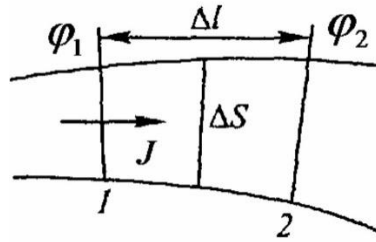


Рисунок 8.5. Трубка с током.

$$I = J \Delta S = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho \frac{\Delta l}{\Delta S}} = \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(-\frac{d\varphi}{dl} \right)}_E \Delta S = \frac{1}{\rho} E \Delta S.$$

$$J = \frac{1}{\rho} E = \lambda E, \text{ где } \lambda = \frac{1}{\rho} - \text{удельная электропроводимость}$$

В векторной форме

$$\vec{J} = \lambda \vec{E} - \text{закон Ома в дифференциальной форме.}$$

Отсутствие в однородном проводнике объемных зарядов.

Для стационарных токов

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 = \operatorname{div}(\lambda \vec{E}) = \lambda * \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{E} * \nabla \lambda).$$

Если $\lambda = \text{const}$, то $\nabla \lambda = 0$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho_q / \varepsilon_0 = 0.$$

8.3. Стационарные токи и электрическое поле в сплошных средах.

а) сопротивление сферического конденсатора с утечкой

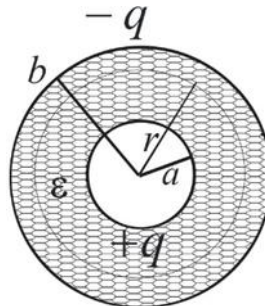


Рисунок 8.6. Сферический конденсатор.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{b} \right),$$

$$\underbrace{\varphi_a - \varphi_b}_U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b} \right), \quad \frac{J}{\lambda} = E, \Rightarrow$$

$$q = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 \frac{J}{\lambda} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda} I, \text{ где } I = 4\pi r^2 J.$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda} I = R * I,$$

где сопротивление

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Заметим, что ёмкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon / \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{ и } CR = \frac{\epsilon_0\epsilon}{\lambda} - \text{универсальное соотношение.}$$

8.4. Токи в сплошных средах. Заземление.

Рассмотрим электролитическую ванну.

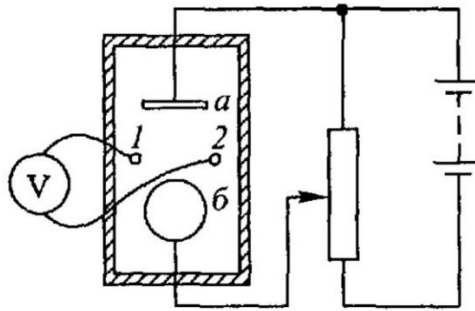


Рисунок 8.7. Электролитическая ванна.

В слабопроводящей среде справедливо соотношение

$$CR = \frac{\epsilon_0\epsilon}{\lambda}.$$

Так как

$$CR = \frac{q}{U} \frac{U}{I}, \text{ то } q = \frac{\epsilon_0\epsilon}{\lambda} I.$$

Заземление в линиях связи. Электросопротивление сплошной среды.

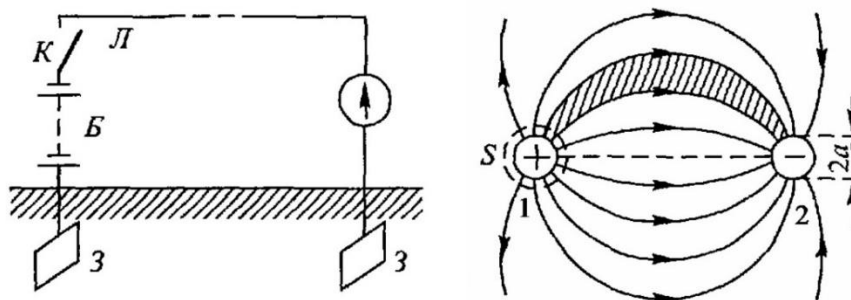


Рисунок 8.8. Замкнутая цепь электрического тока и два электрода сферической формы.

$$U_{12} = \varphi_{1\infty} - \varphi_{2\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{q}{a} - \left(-\frac{q}{a} \right) \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{a},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{a^2} = \frac{U_{12}}{2a};$$

$$I = \int_{\Lambda E} \underbrace{4\pi a^2}_S = \lambda \frac{U_{12}}{2a} 4\pi a^2 = \frac{2\pi a \lambda}{\Lambda=1/R} U_{12};$$

Лекция 9.

9.1. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

Электрический ток в участке цепи совершает работу.

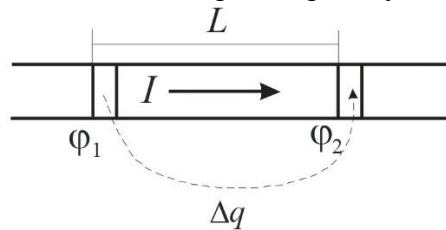


Рисунок 9.1. Участок цепи.

$$\Delta q = I \Delta t,$$

$$\Delta A = \Delta W = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U;$$

$$\Delta W = I * \Delta t * U = \Delta Q;$$

$$Q = I U t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t;$$

Мощность тока

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q}{t} = I U = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

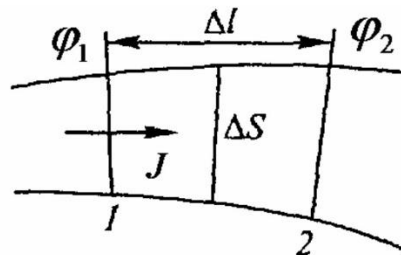


Рисунок 9.2. Трубка тока.

$$\frac{dQ}{dt} = I^2 R = (J \Delta S)^2 \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = J^2 \rho * \underbrace{\Delta S \Delta l}_{\Delta V}.$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{dQ}{dt} = J^2 \rho = J \frac{E}{\rho} = J E = \vec{j} \vec{E}.$$

9.2. Сторонние силы. ЭДС.

Для поддержания электрического тока в замкнутой цепи необходимо устройство (источник тока), совершающее посредством сторонних сил перемещение зарядов против действия электрических сил.

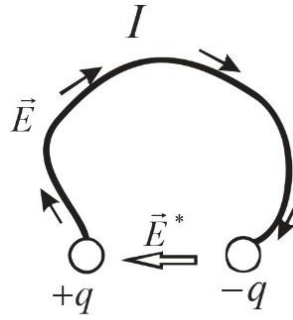


Рисунок 9.3. Простая цепь.

\vec{E}^* – сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд (напряженность сторонних сил), \vec{E} – напряженность электрических сил.

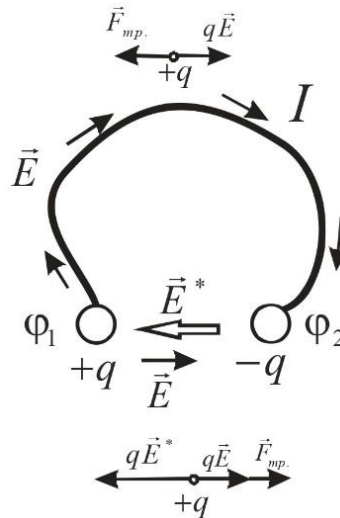


Рисунок 9.4. Простая цепь (подробно).

$$\int_1^2 q \vec{E} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$

$$\int_1^2 q \vec{E} d\vec{l} = - \int_1^2 \vec{F}_{тр.} d\vec{l} = Q_{\text{джоулево, тепло}},$$

$$Q_{\text{джоулево, тепло}} = I^2 R t = qIR,$$

Где R – сопротивление внешней цепи.

$$q \underbrace{\int_2^1 \vec{E} d\vec{l}}_{\varepsilon} = -q \underbrace{\int_2^1 \vec{E} d\vec{l}}_{-U} - \underbrace{\int_2^1 \vec{F}_{тр.} d\vec{l}}_{-Q'_{\text{джоулево, тепло}}},$$

$$Q'_{\text{джоулево, тепло}} = qIr,$$

Где r – внутреннее сопротивление цепи.

Замечание.

$$Ir = I\rho \int_2^1 \frac{dl}{S} = \int_2^1 \rho \frac{I}{S} dl = \int_2^1 \rho \vec{J} d\vec{l} \Rightarrow \rho \vec{J} = \vec{E} + \vec{E}^*.$$

В результате имеем

$\mathcal{E} = U + Ir = IR + Ir$ — закон Ома для замкнутой цепи.

Здесь $\mathcal{E} = \int_2^1 \vec{E} d\vec{l}$ — электродвижущая сила (ЭДС), равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

Закон Ома для участка цепи с ЭДС.

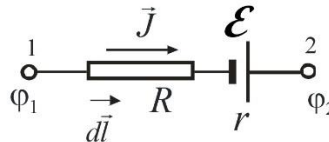


Рисунок 9.15. Участок цепи с ЭДС.

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}^*) \\ \int_1^2 \rho \vec{J} d\vec{l} &= \underbrace{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}_{\phi_1 - \phi_2} + \underbrace{\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}}_{\mathcal{E}} \\ \int_1^2 \rho \vec{J} d\vec{l} &= \int_1^2 \rho \frac{I}{S} dl = I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = I(R + r); \\ I(R + r) &= \underbrace{\phi_1 - \phi_2}_U + \mathcal{E}. \end{aligned}$$

9.3. Правила Кирхгофа. Примеры их применения.

Рассмотрим участок разветвленной цепи.

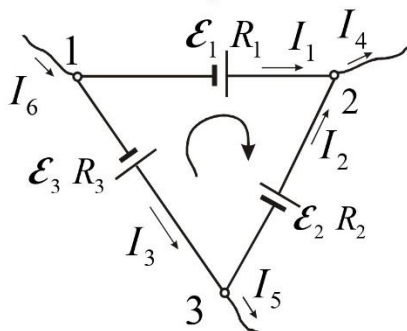


Рисунок 9.6. Участок разветвленной цепи.

- 1) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$I_1 + I_2 - I_4 = 0, \Rightarrow \sum_k I_k = 0.$$

2) Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$+ \begin{cases} I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, \\ -I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 - \mathcal{E}_2, \\ -I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 - \mathcal{E}_3, \end{cases} \Rightarrow \sum_n I_n R_n = \sum_k \mathcal{E}_k$$

Пример применения правил Кирхгофа.

Найти сил у тока проходящего через сопротивление R .

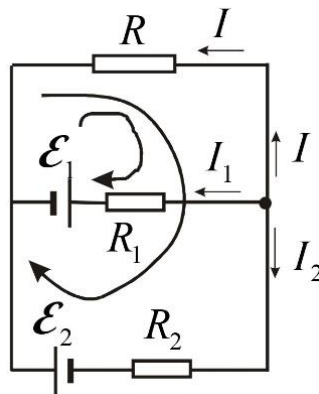


Рисунок 9.7. Цепь.

$$\begin{cases} I + I_1 + I_2 = 0, \\ -IR + I_1 R_1 = -\mathcal{E}_1, * R_2, \\ -IR + I_2 R_2 = -\mathcal{E}_2, * R_1, \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow -IR(R_1 + R_2) + R_1 R_2 (-I) = \mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1, \\ I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2};$$

9.4. Примеры источников тока (ЭДС).

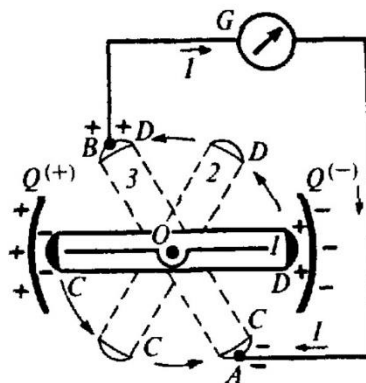


Рисунок 9.8. Схема электростатической машины.

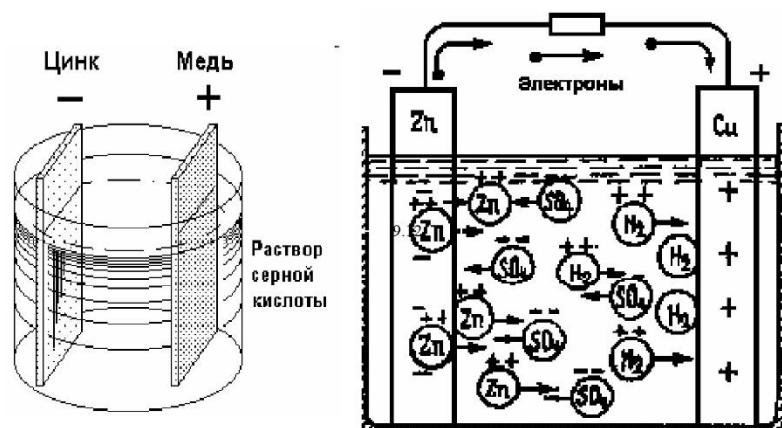


Рисунок 9.9. Гальванический элемент Вольта.

Л. Гальвани (1791) открыл электрический ток в мышцах лягушки. А. Вольт (1792) правильно объяснил происхождение этого тока и создал химический элемент тока.

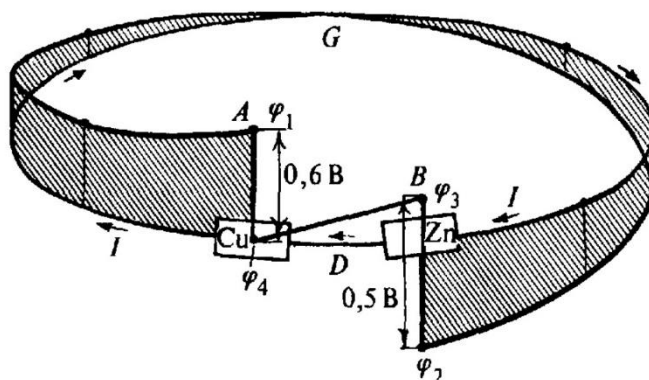


Рисунок 9.10. Изменение потенциала в цепи с гальваническим элементом.

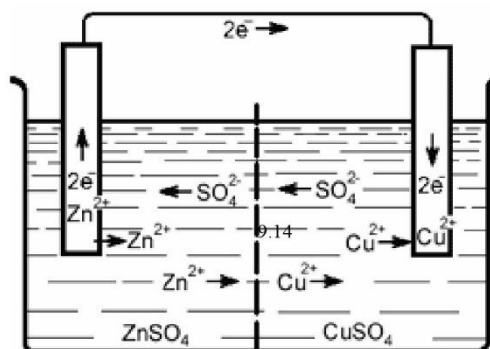


Рисунок 9.11. Элемент Даниэля-Якоби.

Необходимо, чтобы на элементах выделялось химическое вещество, которое не производило бы деполяризацию.

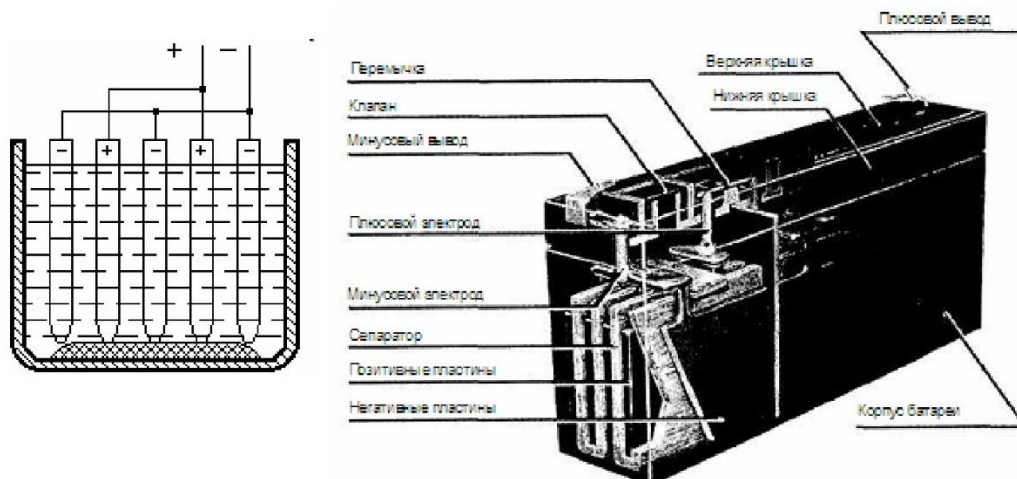
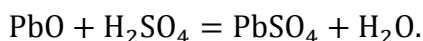


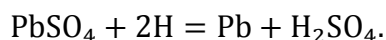
Рисунок 9.12. Свинцово-кислотный аккумулятор.

Решетчатые свинцовые пластины, заполненные пастой PbO , помещаются в 30% раствор H_2SO_4 .

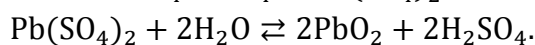
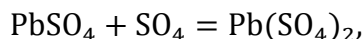
Происходит реакция



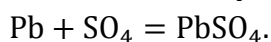
При зарядке ионы H^+ , двигаясь к катоду, приводят к реакции



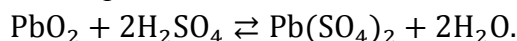
Ионы SO_4^{2-} , достигая анода, вступают в реакцию



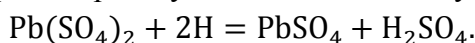
При разрядке на свинцовом катоде ионы SO_4^{2-} из раствора



На аноде идет обратимая реакция



Ионы H^+ из раствора нейтрализуются на аноде и вступают в реакцию



Li-Ion – литий-ионные аккумуляторы.

Литий – наиболее химически активный металл. На его основе работают современные источники питания для ноутбуков. Практически все высокоплотные источники питания используют литий в силу его химических свойств.

Килограмм лития способен хранить 3860 амперчасов. Для сравнения, показатель цинка - 820, свинца - 260.

В литий-ионных элементах ионы лития связаны молекулами графита C_6 и литийкобальтоксида (LiCoO_2)

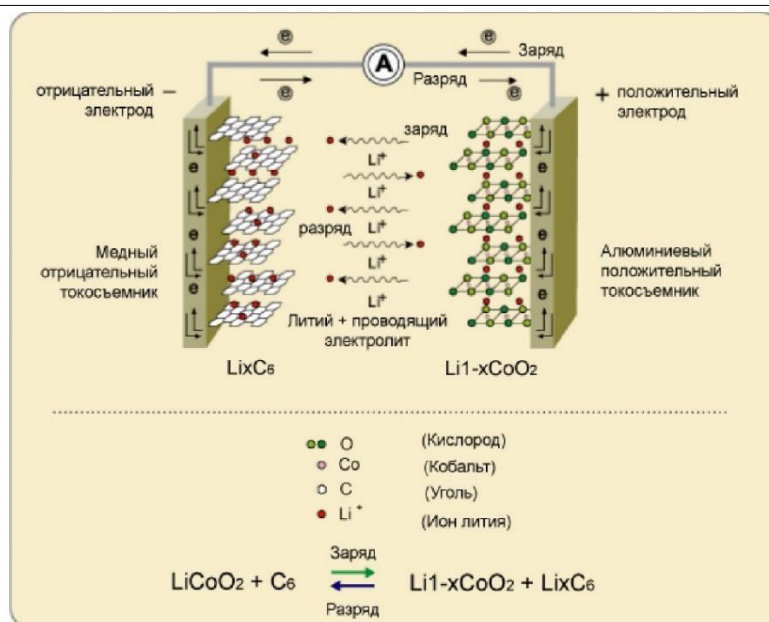


Рисунок 9.13. Принцип зарядки.

Суперконденсаторы (ионистеры).

Ионистеры – это электролитические конденсаторы, на которых имеется электролит и заряжается двойным слоем.

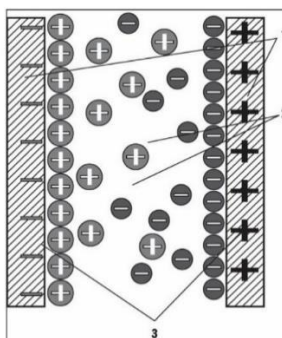


Рисунок 9.14. Двойной электрический слой в суперконденсаторе
1 – электроды; 2 – ионы электролита; 3 – область ДЭС.

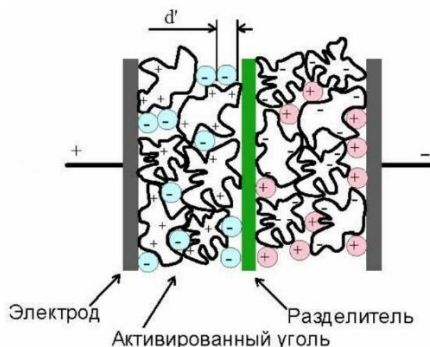


Рисунок 9.15. Ионистер с двойным электрическим слоем.

9.5. Топливный элемент.

Рассмотрим пористые электроды.

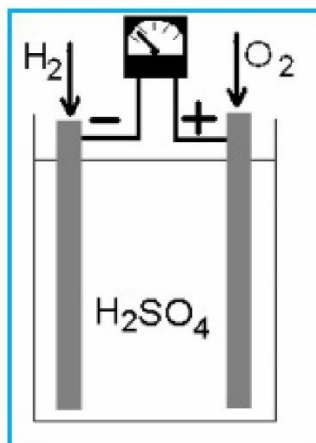


Рисунок 9.16. Пористые электроды.

Два пористых (например, платиновых) электрода погружены в электролит (раствор серной или фосфорной кислоты). Через один из них подается водород. При этом молекулы водорода диссоциируют на атомы, которые отдают свои электроны поверхности: $H_2 = 2H$; $H - e^- = H^+$. Через поры второго электрода подается кислород. Молекула кислорода, принимая электроны, восстанавливается до воды: $O_2 + 4e^- + 4H^+ = 2H_2O$. Если электроды соединить проводником, то между ними потечет ток. Для водородных ТЭ электролитом также может служить раствор щелочи или даже твердый материал. Кроме того, вместо водорода могут использоваться много других видов топлива.

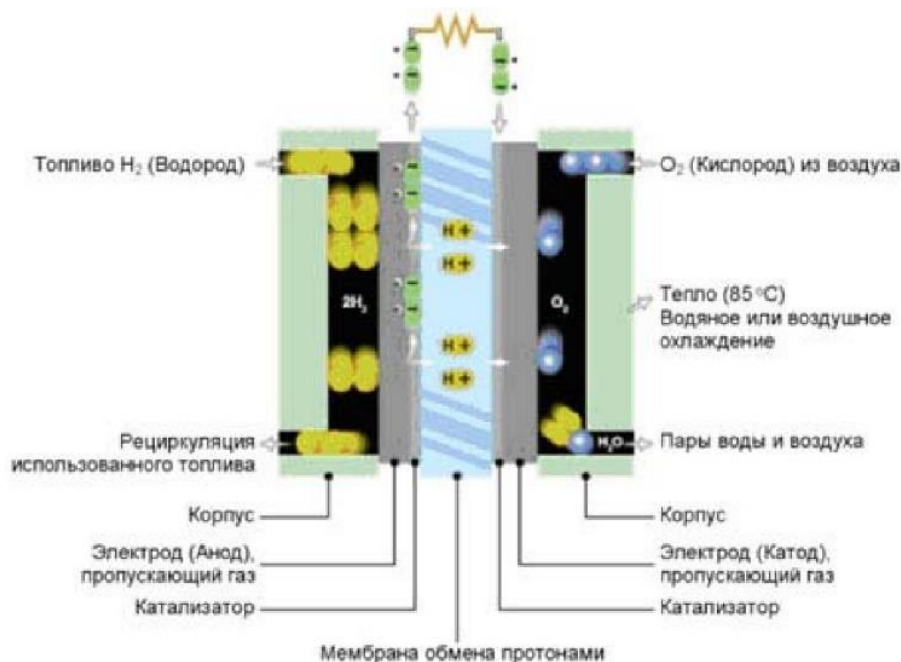


Рисунок 9.22. Принцип работы топливного элемента.

Водородный топливный элемент ТЭ представляет собой электрохимическое устройство, преобразующее энергию реакции соединения водорода с кислородом напрямую в электричество, минуя малоэффективные, идущие с большими потерями, процессы горения. Поэтому у ТЭ энергетический КПД значительно выше, чем у традиционных энергоустановок и может составлять 90%.

Химические реакции в ТЭ идут на пористых электродах (аноде и катоде), активированных катализатором (обычно на основе платины или других металлов платиновой группы), по следующей схеме. Водород поступает на анод топливного элемента, где его атомы разлагаются на электроны и протоны: $H_2 = 2e^- + 2H^+$

Электроны поступают во внешнюю цепь, создавая электрический ток. Протоны, в свою очередь, проходят сквозь протонообменную мембрану на катодную сторону, где с ними соединяется кислород и электроны из внешней электрической цепи с образованием воды: $4H^+ + 4e^- + O_2 = 2H_2O$

Побочными продуктами реакции, таким образом, являются тепло и водяной пар. Напряжение, возникающее при этом на единичном ТЭ, обычно не превышает 1,1 В. Для получения необходимой величины напряжения ТЭ соединяются последовательно в батареи, а для получения необходимого тока батареи ТЭ соединяются параллельно. Такие батареи ТЭ вместе с элементами газораспределения и терморегулирования монтируются в единый конструктивный блок, называемый электрохимическим генератором. Сердцем ТЭ является протонообменная мембрана. Обычно протонообменная мембрана представляет собой пленку из полимера, сочетающего гидрофобную основную цепь и боковые фрагменты, содержащие кислотные группы (гидрофильная часть). Если в мембране присутствует вода, она собирается вблизи кислотных групп и образует гидратную область с линейным размером порядка 1 нм.

Именно в этой области и образуются различные гидратированные формы протона, способные свободно перемещаться. Гидрофобная же часть полимера содержит алифатические, ароматические, фторированные или нефторированные фрагменты и образует прочный каркас, обеспечивающий механическую прочность мембраны. Наибольшее распространение в настоящее время получили перфторированные полимерные мембраны типа Nafion, разработанные компанией DuPont, которые считаются «классическими» мембранами для топливных элементов. Такие мембраны обладают высокой механической прочностью, великолепной химической стойкостью и высокой протонной проводимостью.

Лекция 10.

10.1. Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока.

Магнитостатика изучает законы взаимодействия между неподвижными магнитными телами и проводниками со стационарными токами.

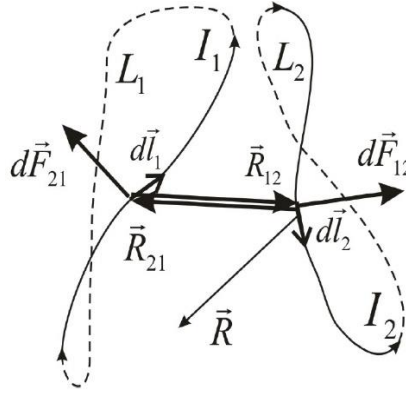


Рисунок 10.1. Постоянный ток.

$Id\vec{l}_1$ — элемент тока.

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{\vec{R}_{21}^3};$$

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, [I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{\vec{R}_{12}^3}.$$

$$\vec{F}_{21} = k \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{\vec{R}_{21}^3};$$

$$\vec{F}_{12} = \int_{L_1} \int_{L_2} k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, [I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{\vec{R}_{12}^3}.$$

Отметим, что $d\vec{F}_{21} \neq -d\vec{F}_{12}$, однако для замкнутых токов $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

В абсолютной магнитной (электромагнитной) системе единиц СГСМ единица силы тока или заряда выбирается из условия $k = 1$ и обозначается 1СГСМ_I. Отношение $\frac{1\text{СГСЭ}_I}{1\text{СГСМ}_I} = c$ — электродинамическая постоянная, равная скорости света $c = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см/с}$.

В системе единиц СИ

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}.$$

$$d\vec{F}_{21} = \left[I_1 d\vec{l}_1, k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{\vec{R}_{21}^3} \right]; \quad d\vec{F}_{12} = \left[I_2 d\vec{l}_2, k \frac{[I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{\vec{R}_{12}^3} \right].$$

10.2. Закон Био-Савара-Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля.

С точки зрения полевой трактовки взаимодействия токов величину

$$d\vec{B}_2 = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]}{\vec{R}_{21}^3}$$

Можно интерпретировать как силовую характеристику магнитного поля, создаваемого элементом тока $I_2 d\vec{l}_2$ в пространственной точке, определяемой \vec{R}_{21} . Эта величина называется вектором индукции магнитного поля элемента тока $I_2 d\vec{l}_2$ в точку \vec{R}_{21} .

Пример расчета индукции магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

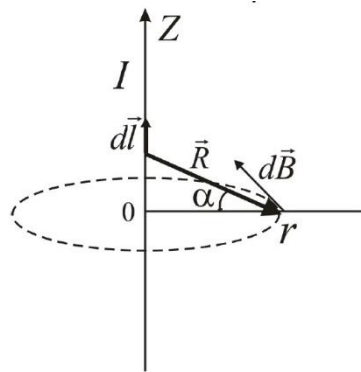


Рисунок 10.2. Бесконечный линейный ток.

$$\begin{aligned} |d\vec{l}| &= dz, \\ d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}; \\ dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz * R * \overbrace{\sin(\alpha + 90^\circ)}^{\cos(\alpha)}}{R^3}. \\ z &= r * \operatorname{tg} \alpha; \\ dz &= r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \\ R \cos \alpha &= r. \\ B &= \int dB = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\infty \frac{R \cos \alpha}{R^3} dz = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{R^2} r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \\ &= 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \end{aligned}$$

Линии индукции магнитного поля.

Линии индукции это касательные линии, которые в каждой точке совпадают с направлением вектора индукции в каждой точке.

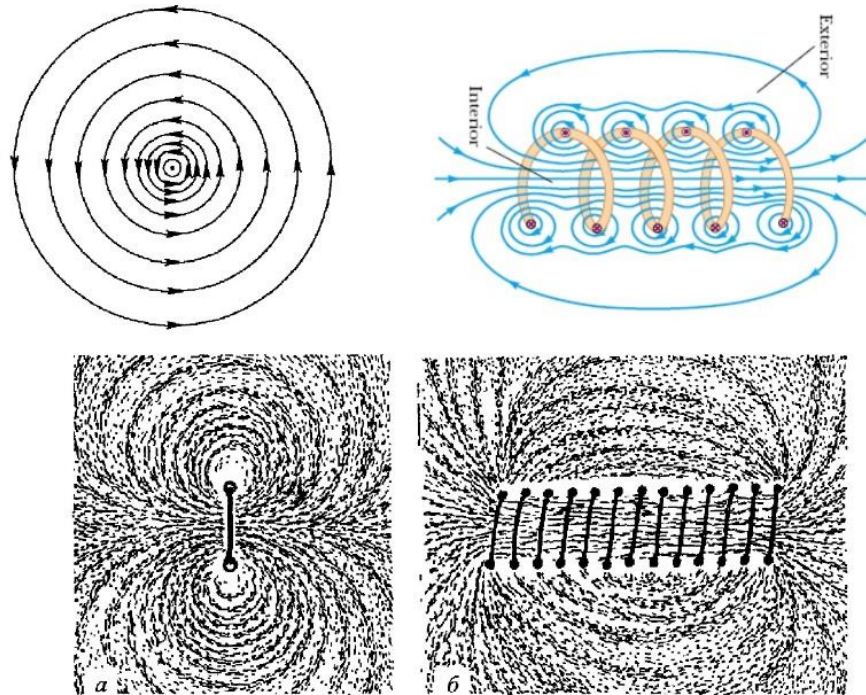


Рисунок 10.3. Визуализация линий индукции магнитного поля.

Закон Био-Савара-Лапласа для элемента объемного тока.

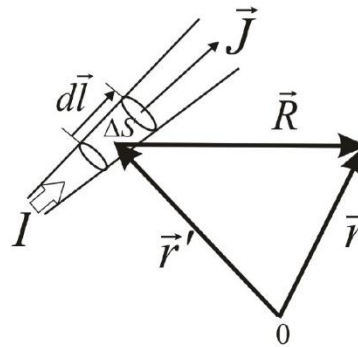


Рисунок 10.4. Трубка тока.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad I d\vec{l} = \vec{j} \underbrace{\Delta S dl}_{\Delta V} = \vec{j} \Delta V.$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} \Delta V;$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

10.3. Векторный потенциал магнитного поля тока.

$$\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3};$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \frac{2(x-x')}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\vec{J}(\vec{r}'), \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R}, \vec{J}(\vec{r}')] dV'$$

$$\left[\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R}, \vec{J}(\vec{r}') \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{J_x}{R} & \frac{J_y}{R} & \frac{J_z}{R} \end{vmatrix} = \left[\nabla, \frac{\vec{J}}{R} \right] = \text{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}}{R};$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}}{R} dV' = \text{rot}_{\vec{r}} \underbrace{\int_V \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi R} dV'}_{\vec{A}(\vec{r})} = \text{rot } \vec{A}.$$

$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi R} dV'$ – векторный потенциал магнитного поля $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

- 1) Представление $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ неоднозначно, $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$, так как $\text{rot}(\text{grad } \varphi) \equiv 0$.

Вихревой характер магнитного поля.

- 2) $\text{div } \vec{B} = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) \equiv 0$, Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \equiv 0,$$

То есть магнитное поле вихревое.

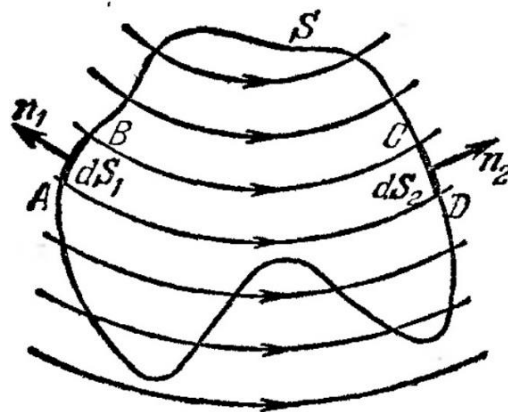


Рисунок 10.5. Линии индукции магнитного поля.

По формуле Гаусса

$$\int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \operatorname{div}_{\vec{r}} \vec{A} &= \operatorname{div}_{\vec{r}} \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\operatorname{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\operatorname{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}')}_{0 \text{ для стационарного тока}} \right) dV' = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + d\vec{S}' \right) = 0, \text{ так как } J_n = 0. \end{aligned}$$

Имеем $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Уравнение для векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет эта функция?

Аналогия с электростатикой

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r})_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ A(\vec{r})_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \Rightarrow \Delta A_x = -\mu_0 J_x; \\ \Delta \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J}. \end{aligned}$$

10.3. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в дифференциальной и интегральной форме.

$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. { Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.

По формуле Стокса

$$\oint_L \vec{B} * d\vec{l} = \int_{S_V} \operatorname{rot} \vec{B} * d\vec{S} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} * d\vec{S} = \mu_0 \sum_{S_L} I;$$

$\oint_L \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} * d\vec{S}$; { Интегральная форма теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.

Система полевых уравнений магнитостатики в вакууме в дифференциальной и интегральной формах.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0, \\ \oint_L \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} * d\vec{S}. \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}, \\ \oint_L \vec{E} * d\vec{l} = 0. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Система полевых уравнений} \\ \text{электростатики в вакууме} \end{array} \right.$$

Пример решения задач магнитостатики с помощью теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

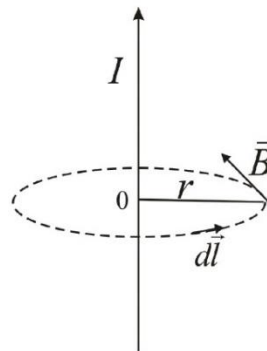


Рисунок 10.6.

$$\oint_L \vec{E} * d\vec{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I;$$

$$B * 2\pi r = \mu_0 I;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Магнитное поле тороида.

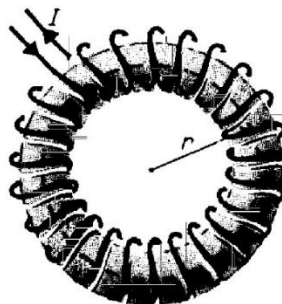


Рисунок 10.8. Тороид.

$$B * 2\pi r = \mu_0 NI;$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 nI.$$

Магнитное поле соленоида.

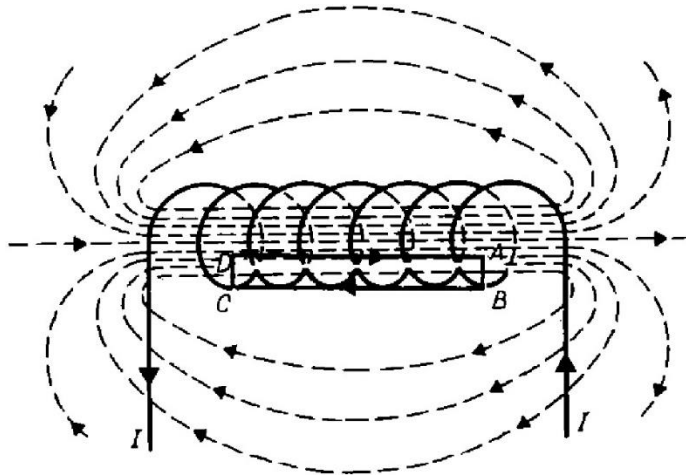


Рисунок 10.7. Соленоид

$$\oint_{ABCL} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI;$$

$$Bl = \mu_0 NI;$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI.$$

Релятивистская природа магнитных взаимодействий на примере взаимодействия двух однородно заряженных тонких бесконечных стержней.

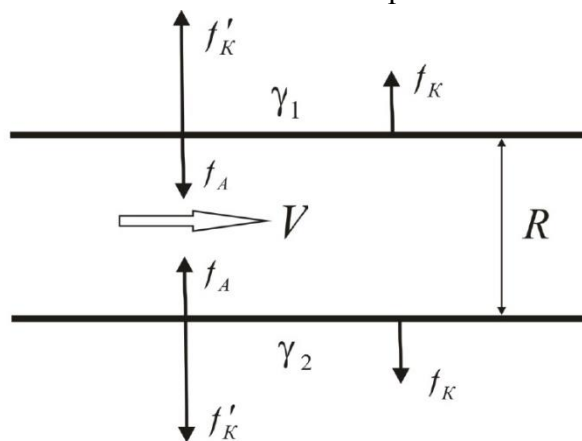


Рисунок 10.8. Два стержня.

$$E = \frac{1}{2\pi R} \frac{\gamma_2}{\epsilon_0};$$

$$f_K = \gamma_1 * E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R};$$

$$I_1 = \gamma_1 V; \quad I_2 = \gamma_2 V;$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi R} \mu_0 I_1; \quad B_2 = \frac{1}{2\pi R} \mu_0 I_2;$$

$$f_A = I_1 B_2 = I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2;$$

$$f = f_K - f_A = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2 = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} (1 - \epsilon_0 \mu_0 V^2) < f_K;$$

На самом деле из-за релятивистских эффектов $f'_K > f_K$, так как

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ то } \gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$f = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} \frac{(1 - \epsilon_0 \mu_0 V^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Если $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, то $f = f'_K - f_A = f_K$.

$$f_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2 = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} V^2 = f_K \frac{V^2}{c^2}.$$

Сила Ампера является релятивистской поправкой $\sim V^2/c^2$ к статической силе Кулона.

Лекция 11.

11.1. Элементарный ток и его магнитный момент. Векторный потенциал элементарного тока.

Элементарный ток - это линейный замкнутый ток, обтекающий поверхность с бесконечно малыми линейными размерами.

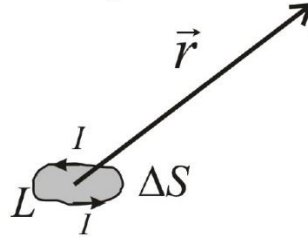


Рисунок 11.1. Замкнутый виток с током.

Учитывая, что для линейного тока

$$\vec{j}dV = Id\vec{l}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

$$A(\vec{r})_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}'_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_L \frac{Id\vec{l}'_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ где } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0};$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\gamma(\vec{r}')d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

Функция $A(\vec{r})_x$ равна $\varphi(\vec{r})$ при $\gamma(\vec{r}')d\vec{l}' = Id\vec{l}'_x/c^2$.

Выберем контур элементарного тока в виде прямоугольника со сторонами a и b .

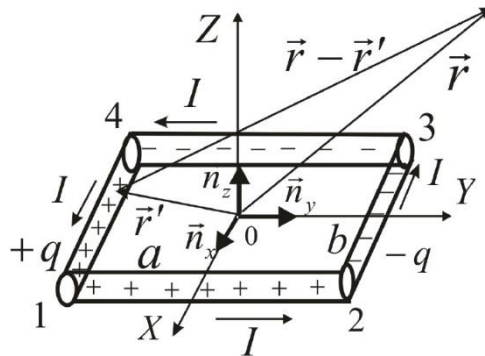


Рисунок 11.2. Элементарный ток в виде прямоугольника.

$$q_{14} = \frac{I}{c^2}b; \quad q_{23} = \frac{I}{c^2}b;$$

$$\vec{p}_q^1 = -q_{14}a\vec{n}_y = -\frac{I}{c^2}\underbrace{ba}_S\vec{n}_y = -\frac{p_m}{c^2}\vec{n}_y,$$

Где $p_m = IS$ – магнитный момент элементарного тока.

$$A_x = \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_q \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m y}{c^2 r^3};$$

Аналогично находим:

$$A_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m x}{c^2 r^3};$$

$$A_z = 0.$$

Если ввести вектор $\vec{p}_m = p_m \vec{n}_z = IS \vec{n}_z$, то $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3}$.

Здесь учтено равенство $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$.

Действительно,

$$\frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ 0 & 0 & p_m \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix}.$$

Элементарный ток произвольной формы можно свести к совокупности прямоугольных элементарных токов.

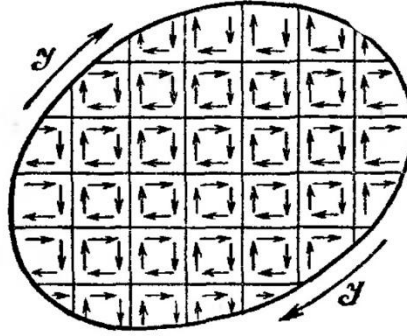


Рисунок 11.3. Совокупность прямоугольных элементарных токов.

$$\vec{p}_m = \sum_n \vec{p}_n = \sum_n IS \vec{n}_n = I \sum_n \vec{S}_n = I \vec{S}.$$

11.2. Поле элементарного тока.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = [\nabla, \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{p}_m \underbrace{(\nabla \frac{\vec{r}}{r^3})}_0 - (\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} \right);$$

$$(\nabla \frac{\vec{r}}{r^3}) = \frac{(\nabla \vec{r})}{r^3} + \left(\vec{r} \nabla \frac{1}{r^3} \right) = \frac{3}{r^3} - \frac{(\vec{r} * 3\vec{r})}{r^5} = 0.$$

$$(\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{(\vec{p}_m \nabla) \vec{r}}{r^3} + \vec{r} (\vec{p}_m \nabla) \frac{1}{r^3} = \frac{\vec{p}_m}{r^3} - \vec{r} \left(\vec{p}_m \frac{3\vec{r}}{r^5} \right);$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right).$$

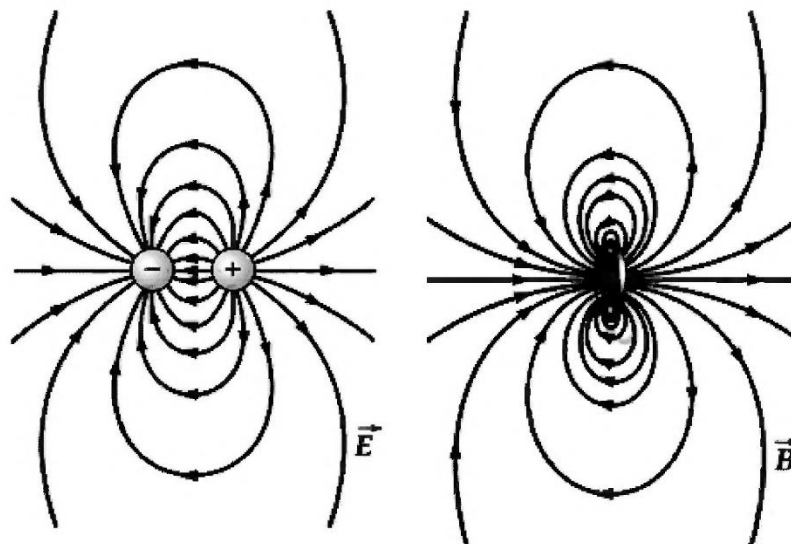


Рисунок 11.4. Электрическое поле диполя и элементарного поля кругового витка с током.

Элементарный ток в магнитном поле.

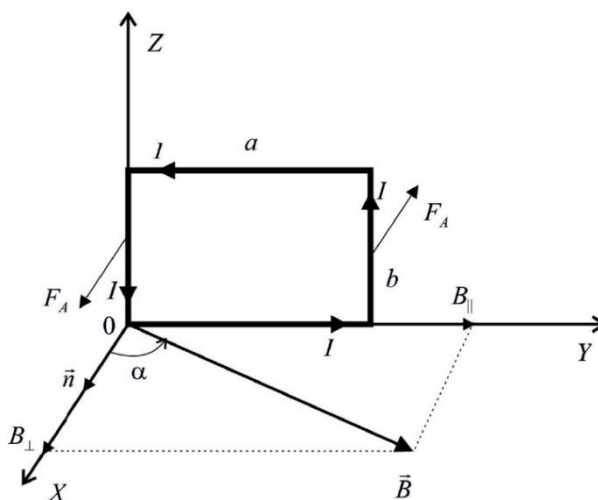


Рисунок 11.5. Прямоугольная рамка.

$$F_A = IbB_{\parallel} = IbB \cos(90 - \alpha),$$

$$F_A = IbB \sin(\alpha).$$

$$M_z = F_A * a = \underbrace{Iab}_{p_m} B \sin(\alpha),$$

$$\vec{p}_m = Iab * \vec{n},$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

Элементарный ток в магнитном поле (общий случай).

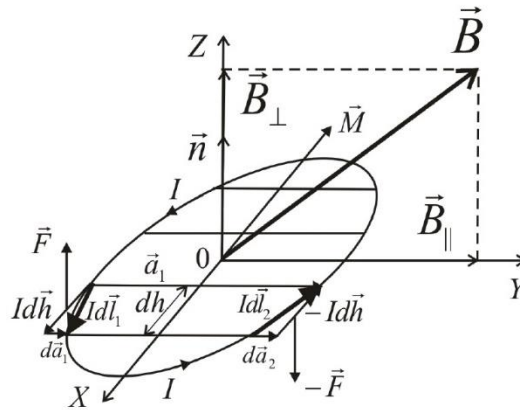


Рисунок 11.6. Произвольный контур.

$$\vec{F} = [Id\vec{l}_1, \vec{B}_{\parallel}] = [(Id\vec{h} + Id\vec{a}_1), \vec{B}_{\parallel}] = [Id\vec{h}, \vec{B}_{\parallel}];$$

$$-\vec{F} = [Id\vec{l}_2, \vec{B}_{\parallel}] = [-Id\vec{h}, \vec{B}_{\parallel}];$$

$$d\vec{M} = [\vec{a}_1, \vec{F}] = [\vec{a}_1, [-Id\vec{h}, \vec{B}_{\parallel}]] = \frac{[\vec{n}, \vec{B}_{\parallel}]}{B_{\parallel}} I \underbrace{dha_1}_{\Delta S} B_{\parallel} = \underbrace{[I\Delta S\vec{n}, \vec{B}_{\parallel}]}_{\Delta\vec{p}_m};$$

$$\vec{M} = \sum d\vec{M} = [I \underbrace{\sum_S \Delta S\vec{n}}_{\vec{p}_m}, \vec{B}_{\parallel}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel}];$$

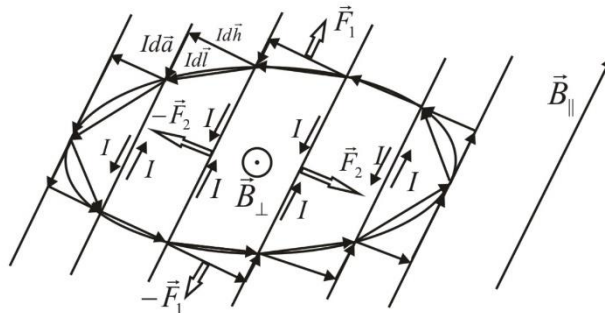


Рисунок 11.7. Произвольный контур.

$$\vec{M} = \sum d\vec{M} = [I \underbrace{\sum_S \Delta S\vec{n}}_{\vec{p}_m}, \vec{B}_{\parallel}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}] = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$

В однородном поле сила, действующая на контур с током, равна

$$\vec{F} = \sum [Id\vec{l}, \vec{B}] = I \left[\sum d\vec{l}, \vec{B} \right] = 0.$$

11.3. Магнитное поле движущегося заряда.

Рассмотрим трубку с током.

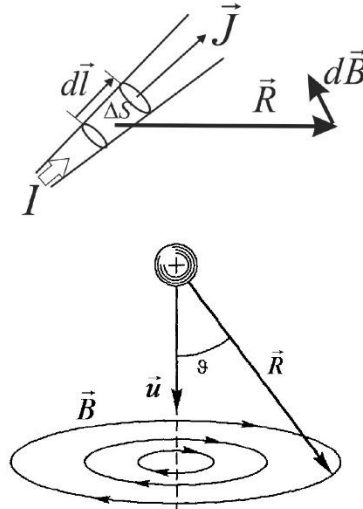


Рисунок 11.8. Трубка с током.

$$\begin{aligned}d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{J}, \vec{R}]}{R^3} dV; \\ \vec{J} &= qn\vec{u}; \\ d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} qn dV; \\ \vec{B} &= \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3}; \\ B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qu \sin \vartheta}{R^2};\end{aligned}$$

Движущийся заряд создает элемент тока $q\vec{u}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{1/c^2}}_{1/c^2} \left[\vec{u}, \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{R}}{R^3}}_{\vec{E}} \right] = \frac{1}{c^2} [\vec{u}, \vec{E}].$$

11.4. Силы, действующие на токи в магнитном поле. Сила Лоренца.

$$\begin{aligned}d\vec{F}_A &= I[d\vec{l}, \vec{B}] = [\vec{J}, \vec{B}]dV; \\ \vec{F}_A &= I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}] = \int_V [\vec{J}, \vec{B}]dV.\end{aligned}$$

Так как элемент тока движущегося заряда $Id\vec{l} = q\vec{u}$, то сила, действующая на движущий заряд в магнитном поле, равна

$$\vec{F} = q[\vec{u}, \vec{B}].$$

Если имеется и электрическое поле, то

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u}, \vec{B}]$ – сила Лоренца.

11.6. Определение единицы силы тока — Ампера.

Рассмотрим два проводника.

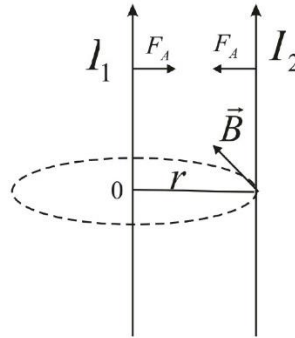


Рисунок 11.9. Два бесконечных линейных проводника.

$$F_A = \mu_0 \frac{I_2 I_1}{2\pi r} L;$$

$$2 * 10^{-7} \frac{H}{A^2} = \mu_0 \frac{1A * 1A}{2\pi * 1m} * 1m; \Rightarrow \mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{H}{A^2} = 4\pi * 10^{-7} \frac{Гн}{м};$$

Эффект Холла.

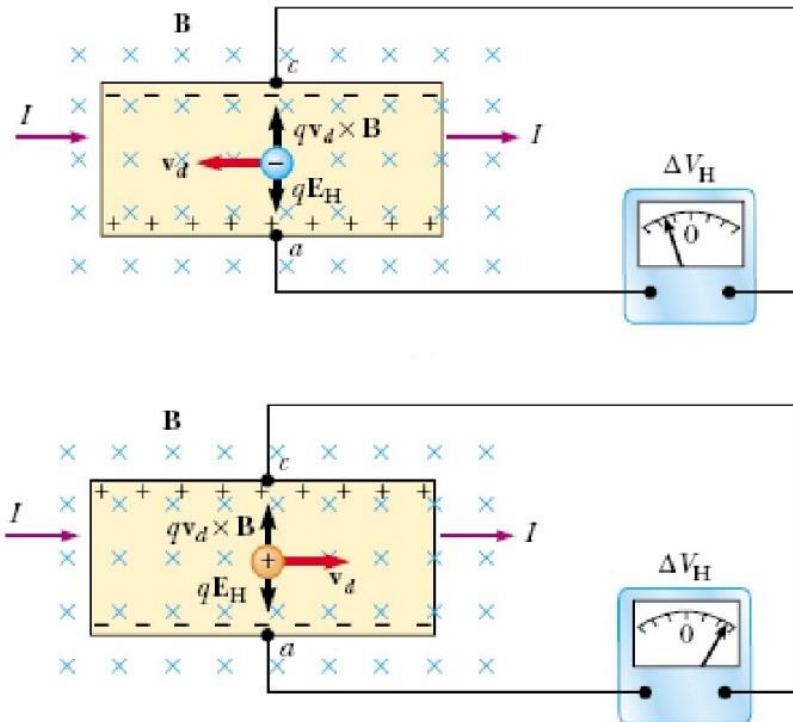


Рисунок 11.10. Пластина.

$$qE_H = q \underbrace{\frac{\Delta V_H}{d}}_j = qv_d B;$$

$$\Delta V_H = \frac{qnv_d}{qn} Bd = \frac{1}{qn} JBd = RJBd, \text{ где } R = \frac{1}{qn} - \text{постоянная Холла.}$$

Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.

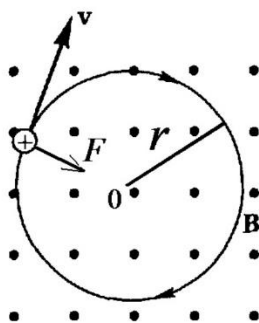


Рисунок 11.12. Частицы в магнитном поле.

$$F = qvB;$$

$$m \frac{v^2}{r} = qvB; \Rightarrow r = \frac{mv}{qB};$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB};$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m} B.$$

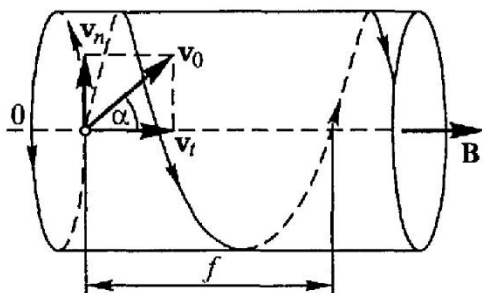


Рисунок 11.13. Движение частицы.

Если частица будет иметь составляющую вдоль магнитного поля, тогда это движение можно представить, как движение составляющей перпендикулярно магнитному полю, что приведет к круговому движению. А параллельная составляющая никак не будет меняться вдоль магнитного поля.

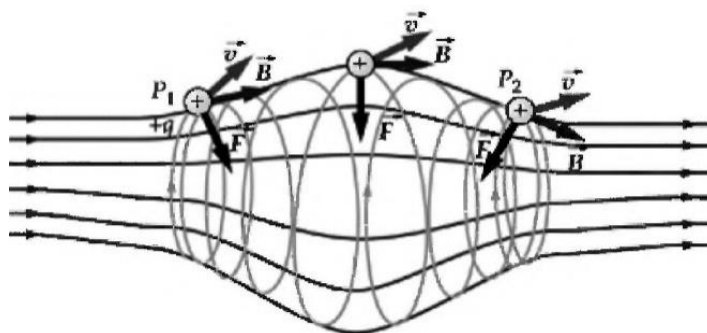


Рисунок 11.14. Магнитная пробка.

Частица может существовать достаточно долго не соприкасаясь со стенкой.

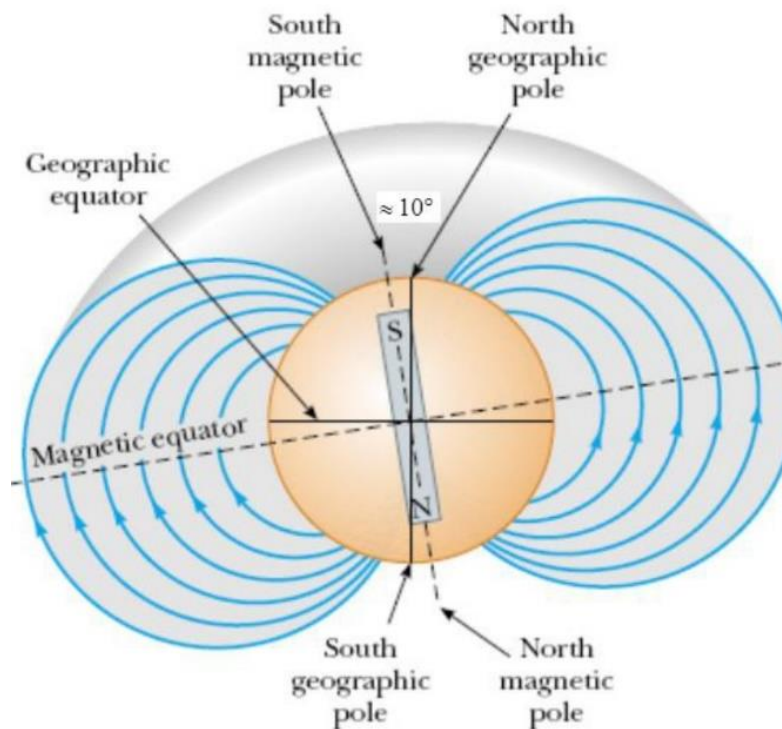


Рисунок 11.15. Модель магнитного поля земли.

Если эту модель сопоставить с магнитом, у которого есть северный и южный полюс, то северный магнитный полюс находится вблизи южного географического полюса, а южный магнитный полюс – вблизи северного географического полюса.

Принцип действия циклотрона.

Циклотрон – это ускоритель элементарных частиц.

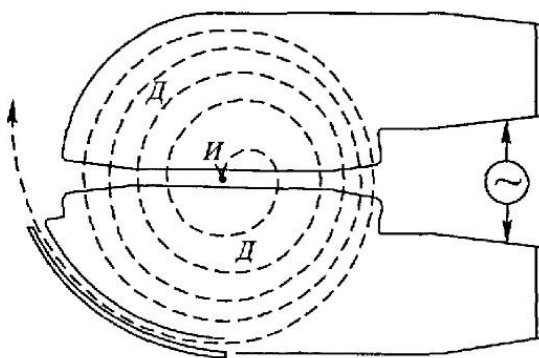


Рисунок 11.16. Циклотрон.

Если излучается протон, то он, попадая в магнитное поле движется по циклотронному радиусу.

11.5. Движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Рассмотрим частицу в скрещенном электрическом магнитном поле.

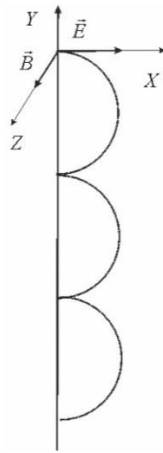


Рисунок 11.17. Частица в скрещенном электрическом магнитном поле.

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] = qE_x\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \vec{i}v_yB - \vec{j}v_xB,$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE + q\dot{y}B, \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B, \end{cases} \Rightarrow m\dot{y} = -qxB + \underbrace{Const}_{=0},$$

$$\ddot{x} = \frac{q}{m}E - \frac{qB}{m} \frac{qB}{m}x, \Rightarrow \ddot{x} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \left(x - \frac{mE}{qB^2}\right),$$

$$x = \frac{mE}{qB^2} + A \sin \omega_c t + D \cos \omega_c t, \text{ при } t = 0, x = \dot{x} = 0.$$

$$D = -\frac{mE}{qB^2}, A = 0;$$

$$x = \frac{mE}{qB^2} (1 - \cos \omega_c t), \dot{y} = -\frac{E}{B} (1 - \cos \omega_c t).$$

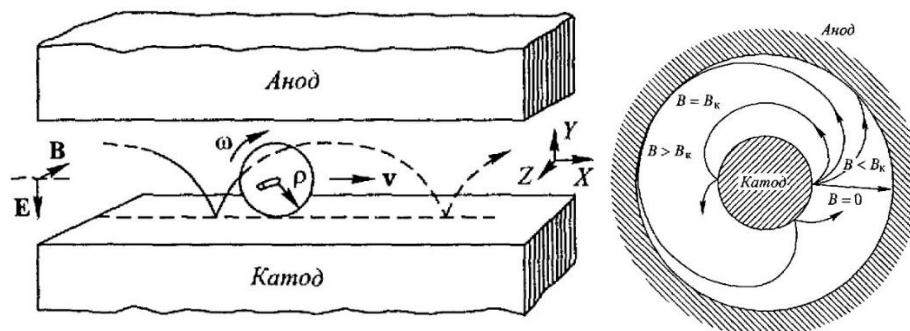


Рисунок 11.17. Магнетрон.

Циклотронный резонанс.

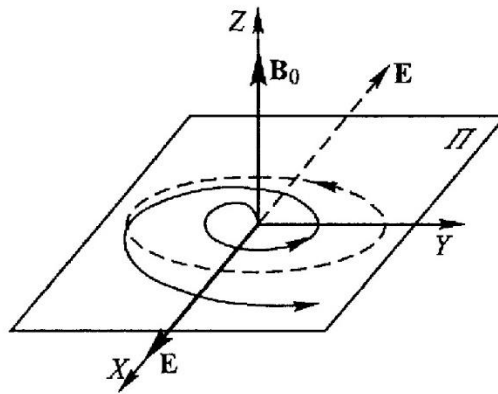


Рисунок 11.18 Металлическая пластинка.

Если взять металлическую пластинку, где имеется носитель электрона и поместить ее в магнитное поле, а перпендикулярно включить высокочастотное поле, и если частота будет равной циклотронной частоте вращения электронов, то она будет раскручиваться.

Лекция 12.

12.1. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.

Рассмотрим элементарную площадку в магнитном поле.

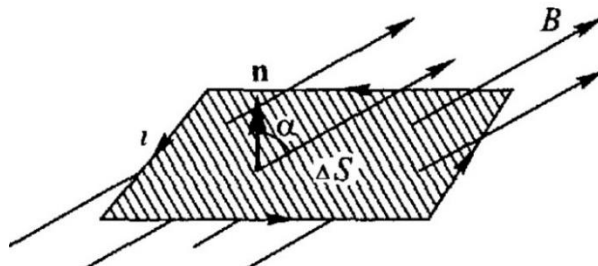


Рисунок 12.1. Элементарная площадка в магнитном поле.

$$\Delta\Phi = B\Delta S \cos \alpha = \vec{B}\vec{\Delta S} = B_n\Delta S;$$

$$\Phi_S = \int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.

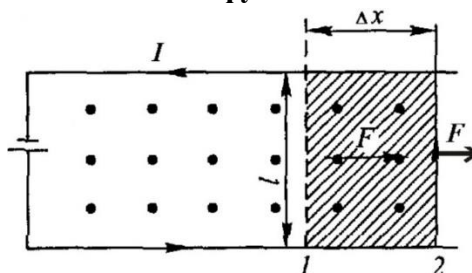


Рисунок 12.2. Рамка с током.

$$F = IlB,$$

$$\Delta A = F\Delta x = IB\Delta x = I \underbrace{B\Delta S}_{BS_2 - BS_1} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi.$$

Определим потенциальную функцию тока

$U = -I\Phi$, тогда

$\Delta A = F\Delta x = -\Delta U$, из этого соотношения имеем

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

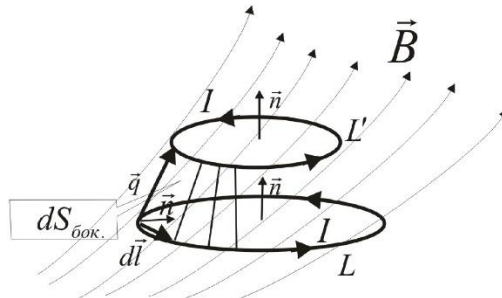


Рисунок 12.3. Произвольный круговой контур.

$$dA = (\vec{q} d\vec{F}) = (\vec{q} * [I d\vec{l}, \vec{B}]) = I(\vec{B} * [\vec{q}, d\vec{l}]) = I(\vec{B} d\vec{S}_{\text{бок.}});$$

$$\Delta A = I \oint_{S_{\text{бок.}}} (\vec{B} d\vec{S}) = I \Delta \Phi_{\text{бок.}}$$

$$\Phi_L = \int_{S_L} \vec{B} d\vec{S}; \quad \Phi_{L'} = \int_{S_{L'}} \vec{B} d\vec{S}$$

$$\Phi_L + \Delta \Phi_{\text{бок.}} = \Phi_{L'}; \Rightarrow \Phi_{L'} - \Phi_L = \Delta \Phi_L = \Delta \Phi_{\text{бок.}}$$

Имеем

$$dA = I d\Phi_L = -dU_{I=\text{const}}, \text{ где } U = -I\Phi_L$$

Используя потенциальную или силовую функцию, можно рассчитать обобщенные силы, действующие на контур с током.

$$dA = \sum_{i=1}^N F_i d\xi_i = -dU(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = - \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right|_{I=\text{const}} d\xi_i;$$

$$F_i = \left. \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right|_{I=\text{const}}.$$

Пример

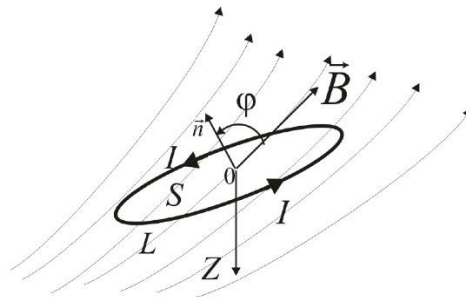


Рисунок 12.4. Элементарный ток.

$$dA = M_z d\varphi = - \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi;$$

$$U = -I\Phi = -IBS \cos \varphi;$$

$$M_z = - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = - \underbrace{IS}_{p_m} B \sin \varphi; \Rightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$

12.2. Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Для элементарного тока, когда $I=\text{const}$ и $S=\text{const}$, потенциальная функция будет равна энергии взаимодействия элементарного тока или магнитного момента с внешним полем

$$W = U = -I\Phi = -ISB \cos \varphi = -p_m B \cos \varphi = -(\vec{p}_m, \vec{B});$$

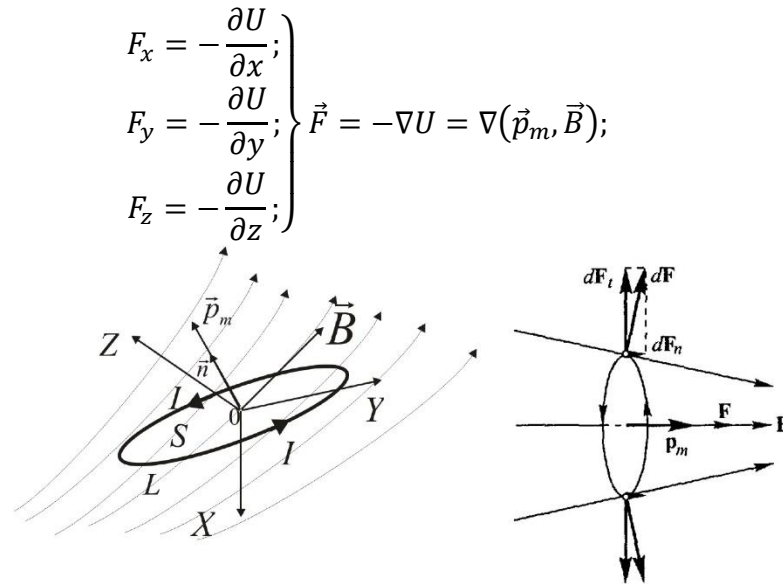


Рисунок 12.5. Контур с током.

$$[\underbrace{\vec{p}_m}_a, [\underbrace{\nabla}_b, \underbrace{\vec{B}}_c]] = \nabla(\vec{p}_m, \vec{B}) - (\vec{p}_m, \nabla)\vec{B};$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_m, \vec{B}) = (\vec{p}_m, \nabla)\vec{B} + \underbrace{[\vec{p}_m, [\nabla, \vec{B}]]}_{\text{rot } \vec{B}};$$

Если $\text{rot } \vec{B} = 0$, то $\vec{F} = (\vec{p}_m, \nabla)\vec{B}$.

12.3. Коэффициент взаимной индукции двух контуров.

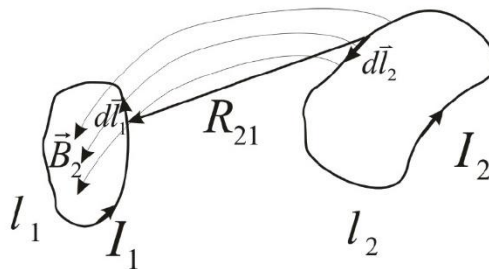


Рисунок 12.6. Два контура с током.

$$\Phi_{12} = \int_{S_{l_1}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{l_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l} = \oint_{l_1} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2}{R_{21}} \right) d\vec{l}_1 = \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{R_{21}} \right)}_{L_{12}} I_2 = L_{12} I_2;$$

Аналогично получим

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \text{ где } L_{21} = L_{12}.$$

Коэффициент самоиндукции (индуктивность).

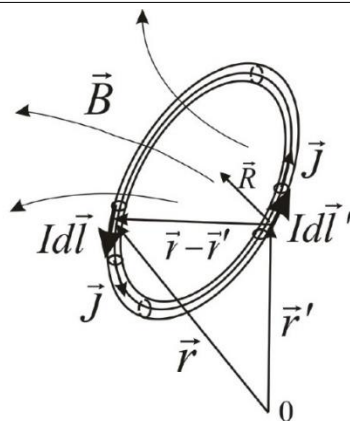


Рисунок 12.7. Контур с током.

$$\Phi = \int_{S_l} \vec{B} d\vec{S} = L * I;$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I[d\vec{l}', \vec{R}]}{R^3};$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3};$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \frac{dV' [\vec{J}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Коэффициенты индуктивности контуров с токами.

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2; \quad \Phi_2 = L_{22}I_2 + L_{21}I_1;$$

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j; \quad L_{ij} = L_{ji};$$

12.4. Взаимодействие двух контуров с током.

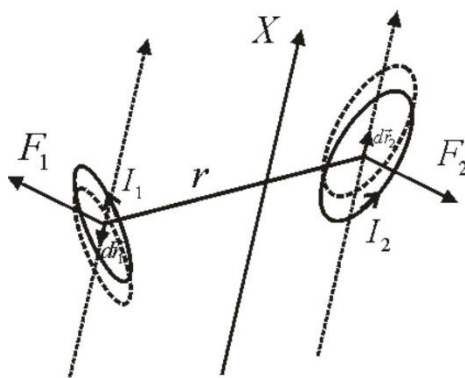


Рисунок 12.8. Два контура с током.

$$F_{2x} = -\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2};$$

$$F_{1x} = -\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1},$$

$$d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} = -\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2},$$

$$F_{1x} = -F_{2x},$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

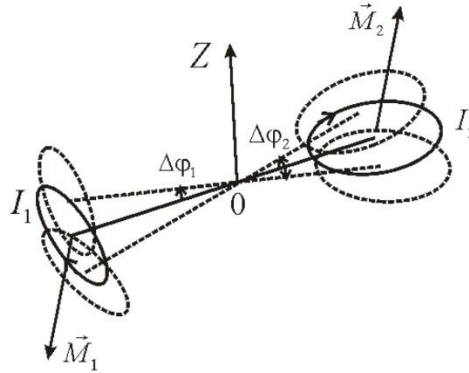


Рисунок 12.9. Взаимодействие двух контуров с током.

$$M_{1z} = -\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_1},$$

$$\Delta \varphi_2 = -\Delta \varphi_1.$$

$$M_{2z} = -\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial \varphi_2},$$

$$M_{1z} = -M_{2z},$$

$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2.$$

Пример задачи на вычисление коэффициентов индуктивности.

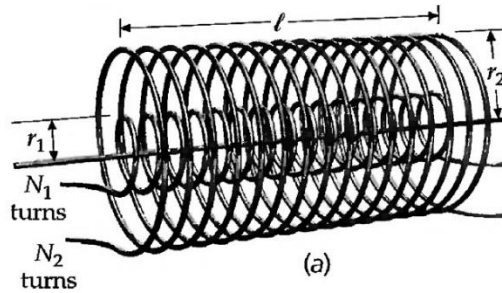


Рисунок 12.10. Две катушки с током.

$$\Phi_2 = B_2 N_2 \pi r_2^2 + B_1 N_2 \pi r_1^2 = \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_2^2 + \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_2 \pi r_1^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_2 \pi r_2^2}{l}}_{L_{22}} I_2 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^2}{l}}_{L_{21}} I_1;$$

$$\Phi_1 = B_1 N_1 \pi r_1^2 + B_2 N_1 \pi r_1^2 = \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_1 \pi r_1^2 + \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_1^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{11}} I_1 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{12}} I_2;$$

$$L_{12} = L_{21};$$

12.5. Индуктивность двухпроводной линии из пустотелых проводников.
Рассмотрим два проводника.

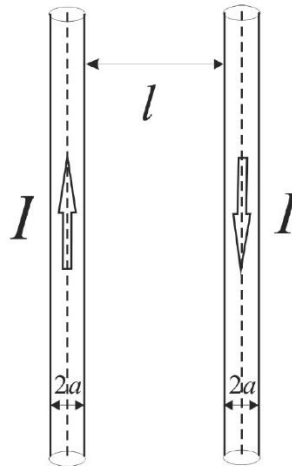


Рисунок 12.11. Два проводника.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I;$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \int_a^{l+a} B dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_a^{l+a} \frac{1}{r} dr = I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right);$$

$$\Phi = 2\Phi_1 = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)}_L I$$

Лекция 13.

13.1. Электромагнитная индукция.

В 1831 году Майкл Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром.

Если взять катушку с током, подсоединить ее к гальванометру и внести туда постоянный магнит, то в момент когда мы вносим магнит в катушке возникает переменный ток, что фиксирует гальванометр. После того, как магнит перестает двигаться, ток прекращается.

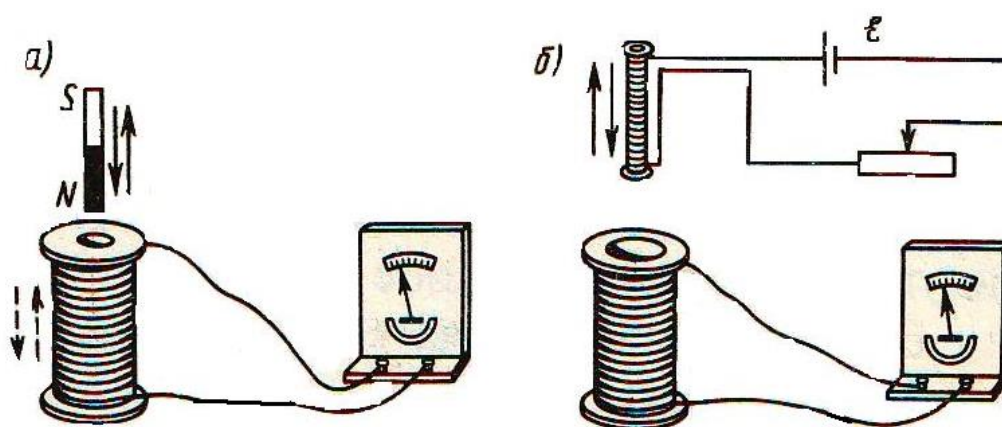


Рисунок 13.1. Электромагнитная индукция.

Явление электромагнитной индукции состоит в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемой этим контуром.

Когда мы вносим магнит (Рисунок 13.2.), изменяется магнитный поток и в витке возникает электрический ток (а). Если остановить магнит, то ток прекращается (б). Если уносить магнит, то возникает ток противоположного направления и виток начинает притягиваться к полюсу магнита (с).

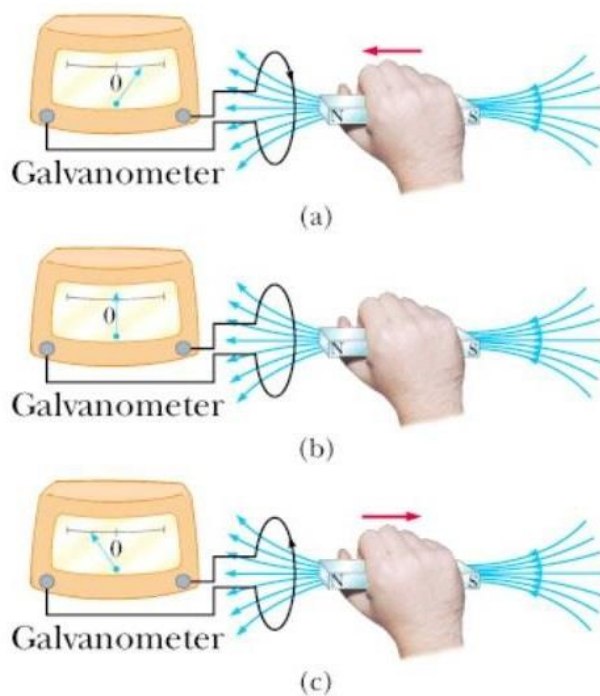


Рисунок 13.2. Закон Фарадея.

13.2. Правило Ленца.

Правило возникновения индукционного тока установил Э.Х. Ленц в 1833 году.

Индукционный ток всегда имеет такое направление, что ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток.

Индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока.

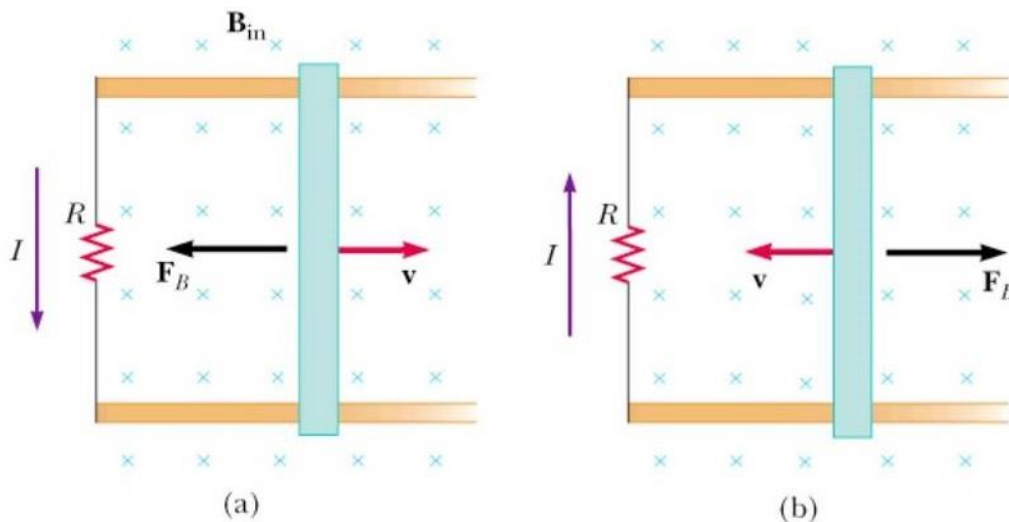


Рисунок 13.3. Правило Ленца.

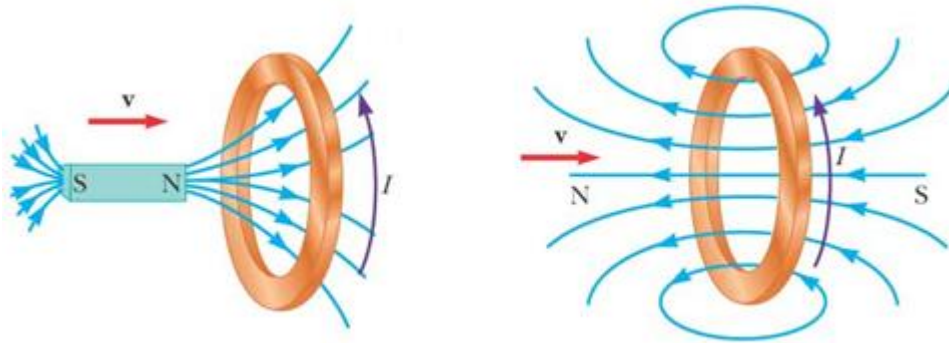


Рисунок 13.4. Направление индукционного тока.

Если двигать полосовой магнит в направлении кольца, то магнитный поток увеличивается через площадь кольца за счет того, что величина индукции будет увеличиваться. Тогда в кольце будет возникать магнитный поток, который будет направлен по направлению поступательного движения правого винта.

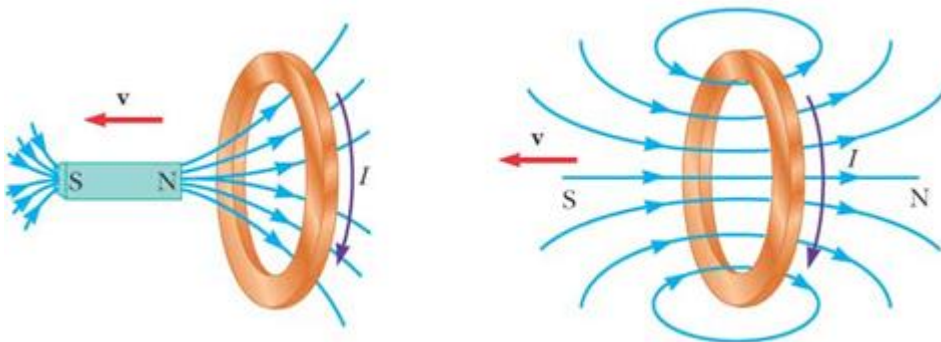


Рисунок 13.5. Направление индукционного тока.

Если наоборот удалять магнит от кольца, то ток поменяет направление и будет двигаться по часовой стрелке. Магнитное поле, которое создается в кольце будет направлено в том же направлении, что и магнитный поток.

13.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в интегральной форме и дифференциальной форме.

Современную математическую форму закона электромагнитной индукции Фарадея предложил в 1845 году Ф.Э. Нейман (1798-1895).

$$\mathcal{E} = f \frac{d\Phi}{dt},$$

Где f – множитель пропорциональности, зависящий от выбора единиц. В системе СИ $f = 1$.

$$\mathcal{E} = -f \frac{d\Phi}{dt},$$

Где знак минус согласует знаки ЭДС индукции и изменения потока магнитной индукции.

Выбор положительной нормали к поверхности контура определяет положительное направление проекции вектора индукции магнитного поля (положительное значение потока магнитного поля) и тока (или ЭДС) индукции. (Рисунок 13.2.) В приведенной записи закон электромагнитной индукции соответствует правилу Ленца.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\Delta t}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$$

1) ЭДС индукции в движущихся проводниках.

Сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ – сторонняя сила, создающая ЭДС.

$$\vec{E}_{\text{ст.}} = \frac{\vec{F}}{q} = [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = \int_G^D \vec{E}_{\text{ст.}} \cdot d\vec{l} = \int_G^D ([\vec{v}, \vec{B}] * d\vec{l}) = vBl = \frac{d(xBl)}{dl} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Знак минус означает, что \vec{n} и \vec{B} противоположны по направлению, то есть $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS \cos 180^\circ = -BS$

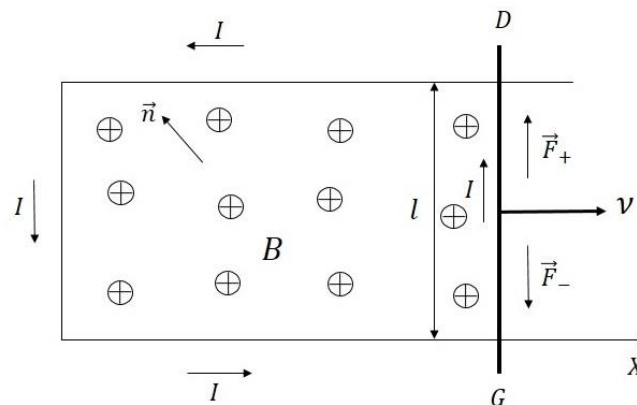


Рисунок 13.6. ЭДС индукции.

2) Вывод формулы ЭДС индукции из закона сохранения энергии (Метод Гельмгольца).

Пусть виток с током движется в стационарном магнитном поле. Тогда амперовы силы совершают работу: $\Delta A = I\Delta\Phi$, и в контуре выделяется джоулево тепло: $\Delta Q = I^2 R \Delta t$. Источником этой работы и тепловой энергии является ЭДС сторонних сил в контуре

$$\mathcal{E} * I \Delta t = \Delta Q + \Delta A = I^2 R \Delta t + I \Delta \Phi, \Rightarrow I = \frac{1}{R} \left(\mathcal{E} - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right);$$

Следовательно, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Максвелловская трактовка электромагнитной индукции.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{инд.}} &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} \\ \Phi &= \oint_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \end{aligned}$$

По формуле Стокса

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} * d\vec{S} \Rightarrow \int_S \text{rot } \vec{E} * d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

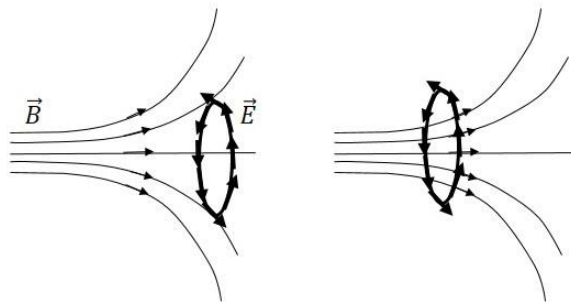


Рисунок 13.7. Электромагнитная индукция.

Непотенциальность индукционного электрического поля:

Так как $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$, то $\text{rot } \vec{E} \neq 0$. Следовательно, $\vec{E} \neq -\text{grad } \varphi$ и $\oint_L \vec{E} d\vec{l} \neq 0$.

13.4. Векторный и скалярный потенциал нестационарного электромагнитного поля.

В нестационарном случае магнитное поле остается вихревым, то есть $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Следовательно, $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Тогда, по закону электромагнитной индукции,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \Rightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0; \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

$$\text{То есть } \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Выбор потенциалов φ и \vec{A} неоднозначен (калибровочные преобразования)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \Delta \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t};$$

$$\vec{E} = -\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

13.5. Индукционные методы измерения магнитных полей.

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}; \quad q = \int I dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R}$$

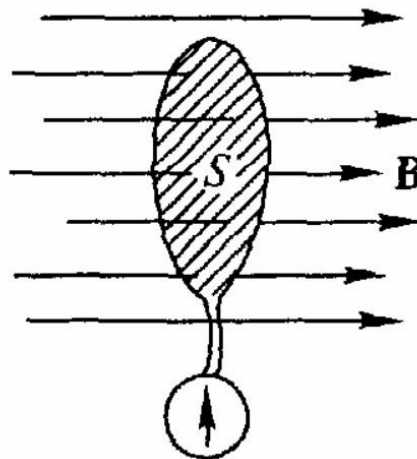


Рисунок 13.8. Принцип флюксметра.

На этом соотношении основано определение единицы магнитного потока в системе СИ:

Вебер – магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл.

Отсюда следует определение единицы СИ для магнитной индукции:

Тесла – магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м^2 равен 1 Вб.

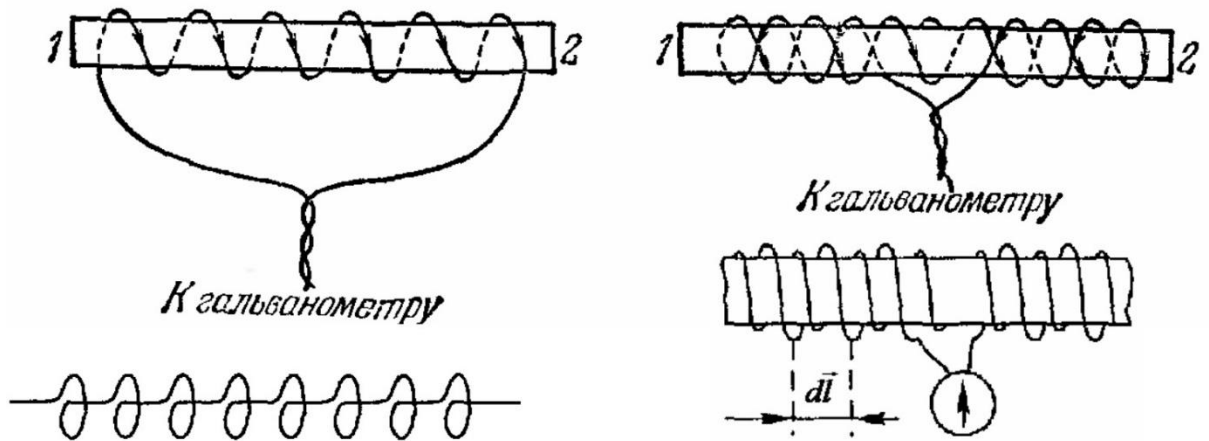


Рисунок 13.8. Пояс Роговского.

$$\Phi = \int_1^2 S n \vec{B} d\vec{l} = S n \int_1^2 \vec{B} d\vec{l}; \Rightarrow \int_1^2 \vec{B} d\vec{l} = \frac{\Phi}{S n} = \frac{R}{S n} q = a q,$$

Где a – постоянная баллистического гальванометра.

Если имеется проводящее тело и происходит изменение магнитного потока через проводящее тело, тогда в них возникают вихревые токи.

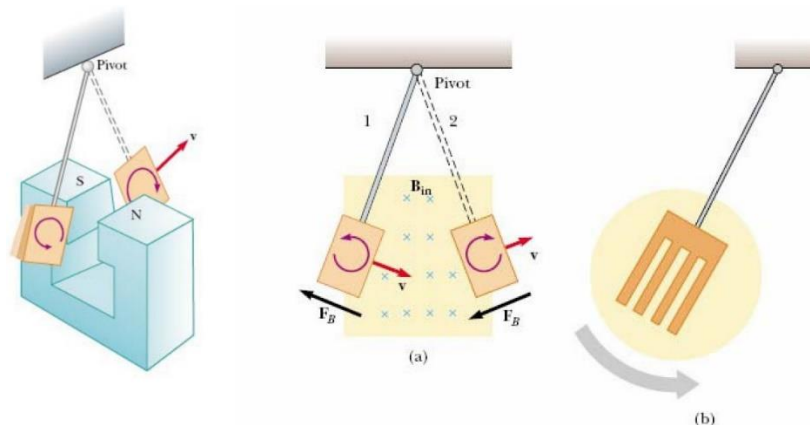


Рисунок 13.10. Токи Фуко.

Магнитная энергия тока

$$dA = -\mathcal{E}_{\text{инд}} I dt = \frac{d\Phi}{dt} I dt = I d\Phi;$$

$$\Phi = LI; \Rightarrow dA = dW = I * L dI = d\left(\frac{LI^2}{2}\right);$$

$$W = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2};$$

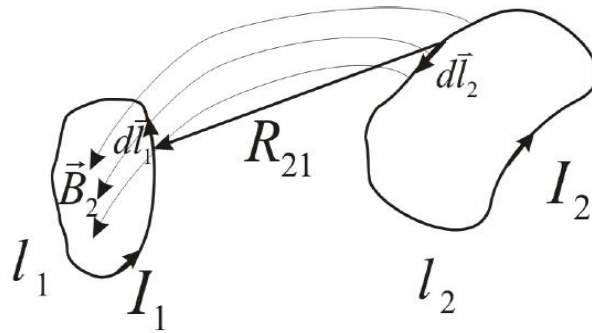


Рисунок 13.11. Магнитная система с двумя контурами.

$$\begin{aligned}
 dW_1 &= I_1 d\Phi_1 = I_1 d(L_{11}I_1 + L_{12}I_2); \\
 dW_2 &= I_2 d\Phi_2 = I_2 d(L_{22}I_2 + L_{21}I_1); \\
 dW &= dW_1 + dW_2 = L_{11}d\left(\frac{I_1^2}{2}\right) + L_{12}I_1dI_2 + L_{22}d\left(\frac{I_2^2}{2}\right) + L_{21}I_2dI_1 = \\
 &= d\left(\frac{L_{11}I_1^2}{2}\right) + \frac{d(L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1)}{2} + d\left(\frac{L_{22}I_2^2}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 L_{ij}I_iI_j\right); \\
 W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 L_{ij}I_iI_j
 \end{aligned}$$

13.6. Энергия магнитного поля. Её объемная плотность.

Рассмотрим соленоид.

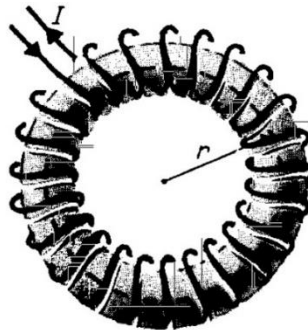


Рисунок 13.12. Соленоид.

$$\begin{aligned}
 B * 2\pi r &= \mu_0 NI; \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 nI. \\
 \Phi &= BSN = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} SN = LI \\
 W &= \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}BSN * I = \frac{1}{2}BSN * \frac{B2\pi r}{\mu_0 N} = \frac{B^2}{2\mu_0} \underbrace{S2\pi r}_V; \\
 w &= \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0};
 \end{aligned}$$

Строгий вывод:

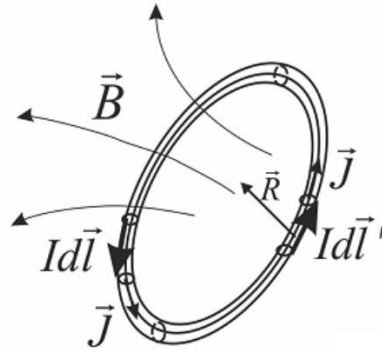


Рисунок 13.13. Виток с током.

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}I \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}I \oint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \oint_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \oint_{\infty} \vec{A} \cdot \frac{\text{rot } \vec{B}}{\mu_0} dV = \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\infty} (\vec{B} * \underbrace{\text{rot } \vec{A}}_{\vec{B}} - \underbrace{\text{div } \vec{B} [\vec{A}, \vec{B}]}_{\oint_{S_{R \rightarrow \infty}} [\vec{A}, \vec{B}] d\vec{S} \rightarrow 0} dV) ; \\
 &\underbrace{(\nabla * [\vec{A}, \vec{B}])}_{\text{div}[\vec{A}, \vec{B}]} = \underbrace{(\vec{B} * [\nabla, \vec{A}])}_{\vec{B} * \text{rot } \vec{A}} - \underbrace{(\vec{A} * [\nabla, \vec{B}])}_{\vec{A} * \text{rot } \vec{B}} ; \\
 W &= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\infty} \vec{B} \vec{B} * dV = \oint_{\infty} w dV, \\
 &\text{где } w = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} ;
 \end{aligned}$$

Лекция 14.

14.1. Магнетики.

Магнетиками называются вещества, которые при внесении их во внешнее магнитное поле сами становятся источниками магнитного поля. В этом случае говорят, что вещество намагничивается. Тогда полная индукция магнитного поля будет равна векторной сумме внешнего магнитного поля и некоторого поля, порожденного магнетиком.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Согласно гипотезе Ампера, внешнее магнитное поле индуцирует в магнетике молекулярные токи, которые и порождают дополнительное магнитное поле \vec{B}' .

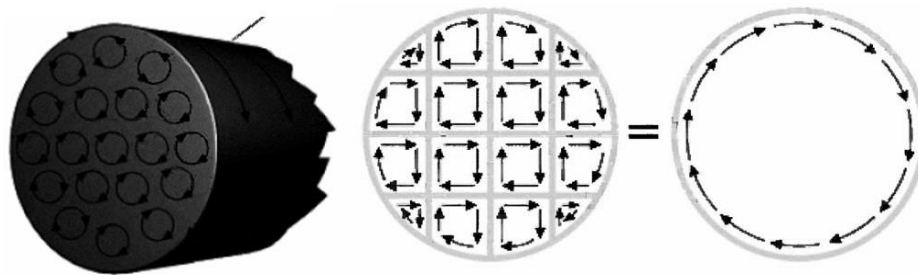


Рисунок 14.1. Процесс намагничивания.

$\Delta V \begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}') \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$ – Уравнения магнитостатики с учетом молекулярных токов.

Для характеристики намагниченности магнетика вводят понятие вектора намагниченности \vec{I} .

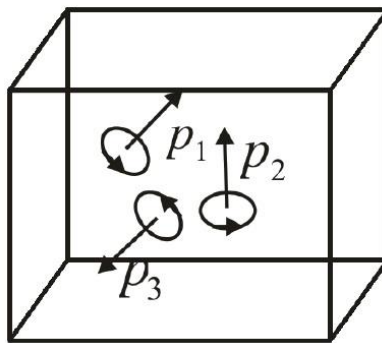


Рисунок 14.2. Молекулярные токи.

$$\vec{p}_1 = I\vec{S}, \quad \vec{p}_2 = I_2\vec{S}_2, \quad \vec{p}_3 = I_3\vec{S}_3, \dots$$

$$\vec{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i$$

14.2. Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами.

Рассмотрим однородно намагниченный цилиндр.

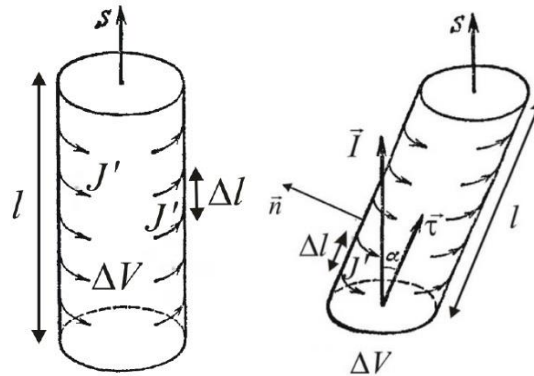


Рисунок 14.3. Однородно намагниченный цилиндр.

$$I' = J' * l$$

Где J' – поверхностная плотность молекулярного тока.

Магнитный момент этого цилиндра равен

$$|\vec{I}| * \Delta V = \sum_{\Delta l} \underbrace{J' \Delta l}_{\Delta I'} * S = J' * \underbrace{l * S}_{\Delta V}; \Rightarrow J' = |\vec{I}|$$

$$\sum_{\Delta l} J' \Delta l * S = J' * l * S = |\vec{I}| * \underbrace{\Delta V}_{\cos \alpha * S}; \Rightarrow J' = |\vec{I}| \cos \alpha = \vec{I} * \vec{\tau} = I_{\tau}.$$

$$\vec{J}' = [\vec{I}, \vec{n}].$$

Где \vec{I} – вектор намагниченности.

Рассмотрим два вещества, которые характеризуются двумя значениями вектора намагниченности.

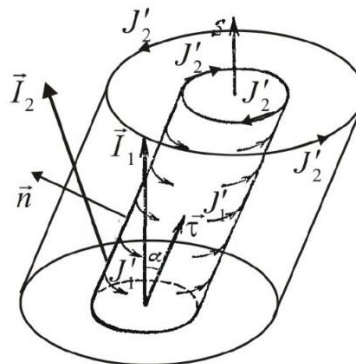


Рисунок 14.4. Два наклонных цилиндра.

Плотность поверхностного молекулярного тока на границе двух магнетиков:

$$\vec{J}' = [(\vec{I}_1 - \vec{I}_2), \vec{n}].$$

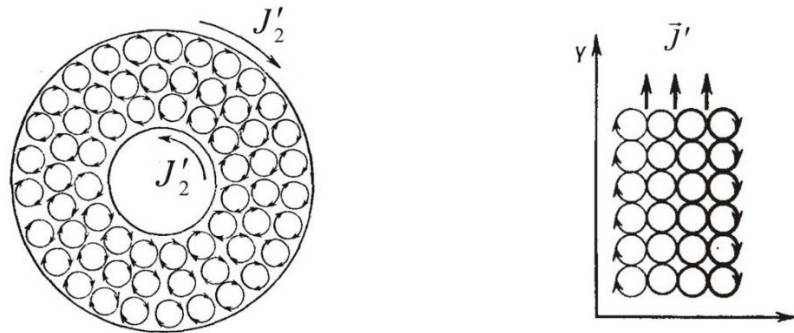


Рисунок 14.4. Молекулярные токи.

Рассмотрим в веществе некоторую площадь.

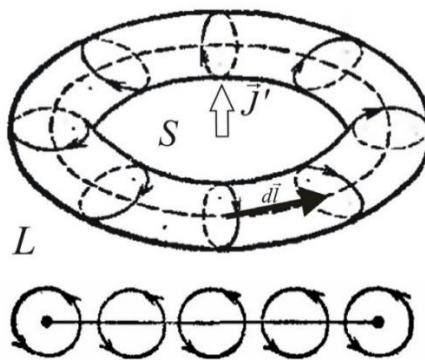


Рисунок 14.5. Площадь намагниченного вещества.

Если вещество намагничено неоднородно, то возникают объемные молекулярные токи.

$$I' = \int_{S_L} \vec{j}' d\vec{l} = \oint_L \underbrace{J'_{\text{пов.}}}_{\vec{i} d\vec{l}} = \oint_L \vec{i} d\vec{l} = \int_{S_L} \text{rot } \vec{I} * d\vec{S};$$

$$dI' = J'_{\text{пов.}} dl = \vec{I} \vec{\tau} dl = \vec{I} d\vec{l};$$

$$\vec{j}' = \text{rot } \vec{I}.$$

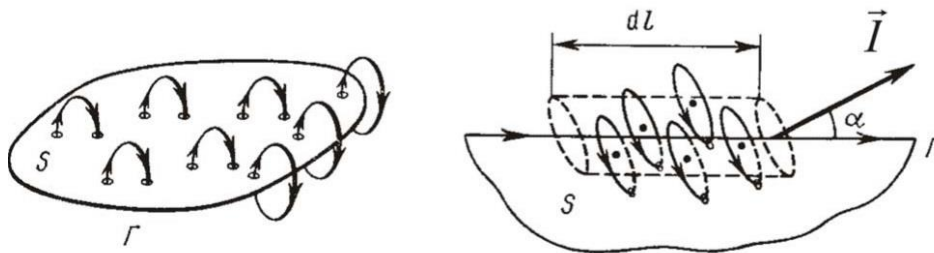


Рисунок 14.6. Молекулярные токи.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}') = \mu_0(\vec{J} + \operatorname{rot} \vec{I}); \Rightarrow \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) = \vec{J}; \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J},$$

Где $\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right)$ – вектор напряженности поля.

14.3. Материальное уравнение для векторов магнитного поля. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества.

$$\vec{I} = \vec{I}(\vec{B}), \text{ но } \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}); \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}(\vec{B}).$$

Имеем $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ или $\vec{I} = \vec{I}(\vec{H})$ – материальные уравнения.

Для изотропных сред $\vec{I} = \chi * \vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\mu} \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \text{ где } \mu = 1 + \chi \quad - \quad \text{магнитная}$$

проницаемость (относительная магнитная проницаемость).

$$I_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} H_j$$

Где χ_{ij} – тензор магнитной восприимчивости.

Индукция магнитного поля в однородном, изотропном и бесконечном магнетике.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \mu_0 \vec{J}, \\ \operatorname{div} \frac{\vec{B}}{\mu} = 0. \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{B}_{\text{вакуум}}$$

Из первого уравнения следует, что \vec{H} в однородном бесконечном магнетике такое же, что и в вакууме.

Система полевых уравнений магнитостатики в магнитных средах:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{S_L} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_{S_L} \vec{J} d\vec{S}, \\ \int_V \operatorname{div} \vec{B} d\vec{V} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{J} d\vec{S}, \\ \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{cases}$$

Дифференциальная форма

Интегральная форма

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), (\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}) - \text{материальные уравнения.}$$

14.4. Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.

Рассмотрим две среды с магнитной проницаемостью.

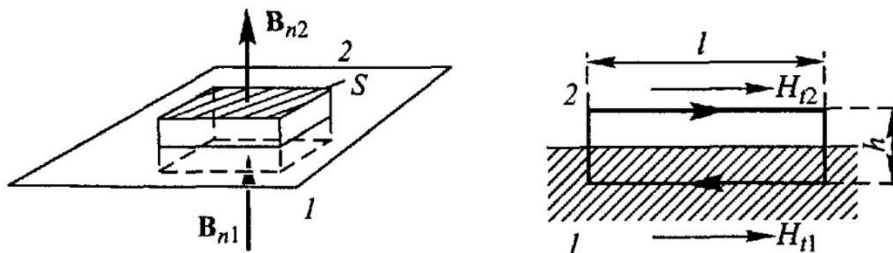


Рисунок 14.7. Две среды с магнитной проницаемостью.

$$B_{n2}S - B_{n1}S = 0,$$

$$B_{n2} = B_{n1}.$$

$$\frac{B_{\tau 2}}{\mu_2} = \frac{B_{\tau 1}}{\mu_1}.$$

$$H_{\tau 2}l - H_{\tau 1}l = J_k l, \text{ где } \vec{k} \perp h * l.$$

$$H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = J_k, \text{ если } J_k = 0, \text{ то } H_{\tau 2} = H_{\tau 1}.$$

14.5. Преломление линий магнитной индукции магнитного поля на границе двух магнетиков. Магнитная защита.

Рассмотрим вектор индукции при переходе из одной среды в другую.

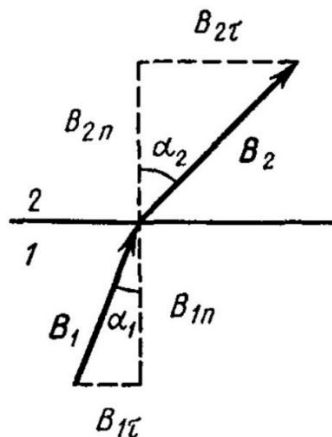


Рисунок 14.8. Вектор индукции при переходе из одной среды в другую.

$$\mu_2 > \mu_1,$$

Вектор намагниченности будет сильнее отклоняться от нормали.

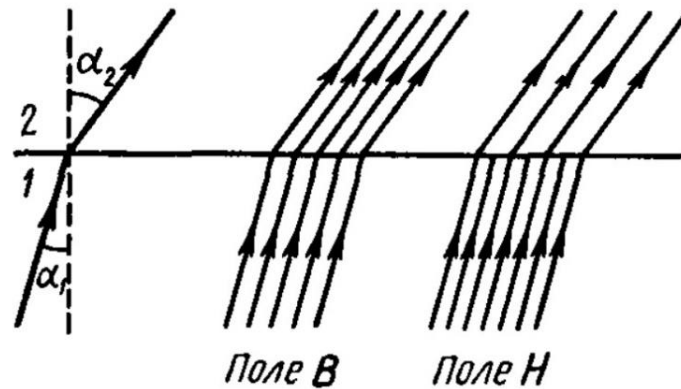


Рисунок 14.9. Силовые линии.

Линии индукции будут наклоняться сильно при переходе в среду с большей магнитной проницаемостью.

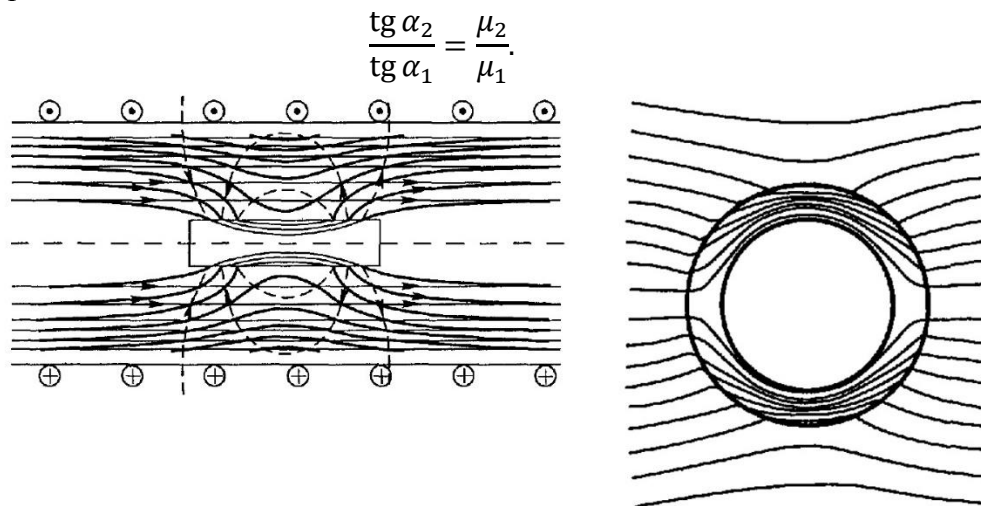


Рисунок 14.10. Сгущение линий индукции внутри магнетика.

Если имеется магнетик с очень большой магнитной проницаемостью, то этот магнетик однородно намагничивается, создает поверхностные токи и вектор намагниченности создает магнитное поле. Если поле в катушке однородно, то результирующее поле будет иметь вид непрерывных линий, а внутри вещества оно будет сильно наклонено к поверхности так, что в центр вещества магнитное поле практически не будет проникать.

14.6. Аналогия с электростатикой диэлектриков.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0, \\ \text{div } \vec{D} = \rho = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad D_{n1} = D_{n1},$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{P}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{I}), \\ \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}; \quad B_{n1} = B_{n1},$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{I}, \end{cases}$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}; \quad \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{I}.$$

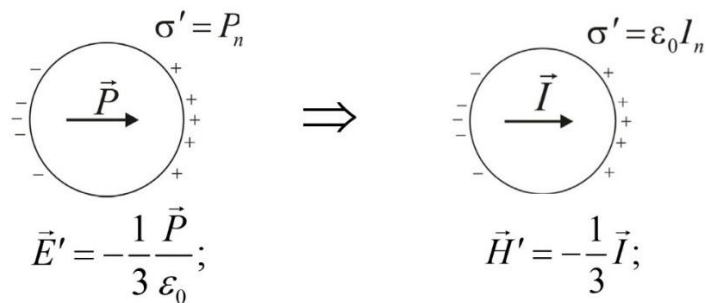


Рисунок 14.11. Диэлектрический шар и однородно намагниченный шар.

Если внешнее магнитное поле \vec{H}_0 , то

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_O = \vec{H}_0 - \frac{1}{3} \vec{I};$$

$\vec{H}_O = \beta \vec{I}$ – размагничивающее поле, где β – размагничивающий фактор формы.

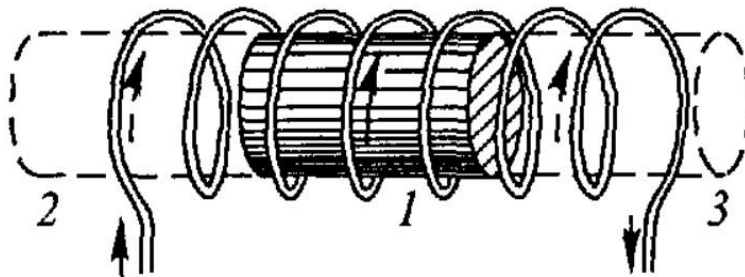


Рисунок 14.12. Бесконечный цилиндр внутри бесконечной катушки с током.

$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_0$; $\vec{H}_0 = \beta \vec{I}$ – строго справедливо только для тел эллипсоидальной формы.

$$0 < \beta < 1;$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0, \quad \beta = 0.$$

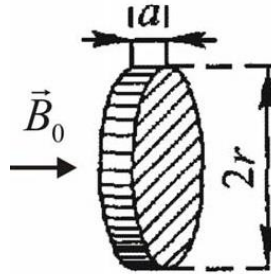


Рисунок 14.13. Тонкий магнитный слой(бесконечный).

Из граничных условий $B_{n0} = B_n$; $\Rightarrow H_{n0} = \mu H_n$.

При $r \rightarrow \infty, B_n = B, H_n = H$.

Тогда $H = H_0/\mu = H_0 - (H_0/\mu)\mu + H_0/\mu = H_0 - \underbrace{(\mu - 1)}_x H = H_0 - \underbrace{1}_\beta I$.

В этом случае $\beta = 1$.

Лекция 15.

15.1. Силы, действующие на магнетики в магнитном поле. Классификация магнетиков.

Пондеромоторные силы – макроскопические силы действующие на макроскопические тела.

$$\vec{F}_{\Delta V} = \nabla(\underbrace{\vec{p}_{\Delta V}}_{\vec{I}_{\Delta V}} \vec{B}); \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \nabla(\vec{I} \vec{B}).$$

$\vec{p}_{\Delta V}$ – магнитный момент.

$$\vec{I} = (\mu - 1) \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu};$$

$$\vec{f} = \nabla(\vec{I} \vec{B}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0 \mu} \nabla(\vec{B} \vec{B}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0 \mu} \frac{1}{2} \nabla(\vec{B} \vec{B});$$

$$\vec{f} = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0 \mu} \frac{1}{2} \nabla \vec{B}^2.$$

Если $\mu > 1$, то магнетик втягивается в область сильного магнитного поля.

Классификация магнетиков:

$\mu < 1$ или $\chi < 0$ – диамагнетики, в отсутствии внешнего поля намагниченность $I = 0$.

$\mu > 1$ или $\chi > 0$ – парамагнетики, в отсутствии внешнего поля намагниченность $I = 0$.

$\mu \gg 1$ или $\chi \gg 1$ – ферромагнетики, в отсутствии внешнего поля в домене $I \neq 0$.

В отдельные классы магнетиков относят антиферромагнетики, ферриты и супермагнетики.

Величина магнитной восприимчивости магнетиков:

Тип магнетика	Магнитная восприимчивость, χ	
Диамагнетик	$-(10^{-9} - 10^{-4})$,	$\mu < 1$
Парамагнетик	$10^{-6} - 10^{-3}$,	$\mu > 1$
Ферромагнетик	$10^3 - 10^5$,	$\mu(H) \gg 1$
Ферримagnetик	$10^1 - 10^3$,	$\mu(H) \gg 1$
Антиферромагнетик	$10^{-4} - 10^{-6}$,	$\mu > 1$

15.2. Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия.

Диамагнитная восприимчивость.

Ланжевен в 1905 году предполагал, что внутри атомов или молекул циркулируют токи, которые создаются движением электрона.

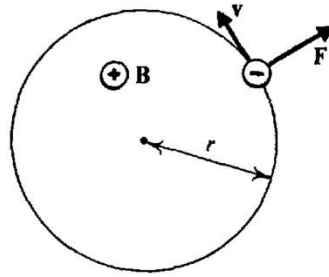


Рисунок 15.1. Атом во внешнем магнитном поле.

$$m\omega_0^2 r = F_{\text{ц}},$$

$$F = |e|\omega r B,$$

$$m\omega^2 r = F_{\text{ц}} \pm |e|\omega r B,$$

$$m\omega^2 r - m\omega_0^2 r = \pm |e|\omega r B.$$

Полагая $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega$ и преобразуя $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega * \omega$, находим $\Delta\omega = \pm |e|B/2m$; $\Rightarrow \omega_L = |e|B/2m$.

Направление $\vec{\omega}_L$ совпадает с \vec{B} , то есть $\vec{\omega}_L = -\frac{eB}{2m}$, где учтено, что заряд электрона $e < 0$.

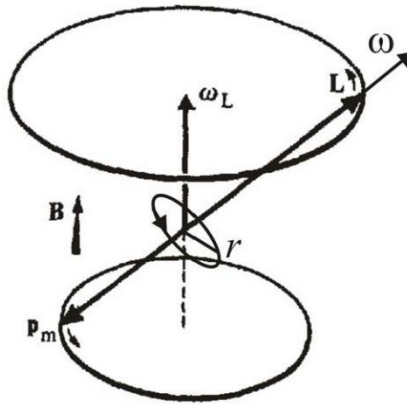


Рисунок 15.2. Жестко вращающийся атом.

Для произвольной ориентации орбиты вращения электрона относительно индукции внешнего магнитного поля \vec{B}

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \text{ где } \vec{L} = mr^2\vec{\omega}, \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = e \frac{\vec{\omega}}{2\pi} \pi r^2 = \frac{e}{2m} \vec{L}$$

$$\text{Получим } \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m} [\vec{L}, \vec{B}] = -\frac{e}{2m} [\vec{B}, \vec{L}].$$

Известно, что для произвольного вектора \vec{A} с $|\vec{A}| = \text{const}$, $d\vec{A}/dt = [\vec{\Omega}, \vec{A}]$.

$$-\frac{e}{2m} \vec{B} = \vec{\Omega} = \vec{\omega}_L$$

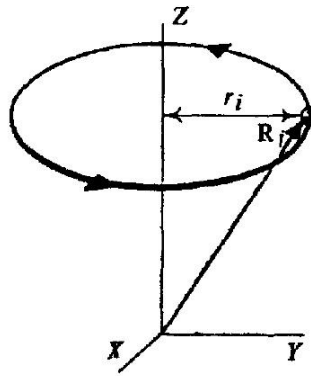


Рисунок 15.3. Вращающийся электрон.

$$\vec{p}_{m,i} = \vec{S}_i I_i = e r_i^2 \vec{\omega}_L / 2,$$

$$\vec{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_{m,i} = \frac{e^2}{4m} \vec{B} * \vec{Z} \underbrace{\frac{N}{\Delta V}}_n \underbrace{\frac{\sum_i r_i^2}{Z * N}}_{r_i^2},$$

Где N – число атомов в ΔV , Z – число электронов в атоме.

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \Rightarrow \langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle R_i^2 \rangle,$$

$$\langle r_i^2 \rangle = \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle = 2 \langle R_i^2 \rangle / 3 = 2 \langle R^2 \rangle / 3.$$

$$\text{Имеем } \vec{I} = - \frac{e^2}{6m} \underbrace{\vec{B} * \vec{Z}}_{\mu_0 \vec{H}} n \langle R^2 \rangle = - \underbrace{\frac{e^2}{6m} Z n \langle R^2 \rangle}_{\chi} \vec{H}.$$

$$\chi = - \frac{e^2}{6m} Z n \langle R^2 \rangle \mu_0.$$

Вещество (диамагнетики)	$\chi = (\mu - 1), 10^{-6}$
вода	-9,0
Медь	-10,3
Стекло	-12,6
Висмут	-176

Ларморово вращение атомов не могут создать магнитные силы, оно создается при включении магнитного поля индукционным электрическим полем.

$$2\pi r E = - \frac{d\Phi}{dt}; \Rightarrow M = reE = - \frac{e}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}; mr^2 \frac{d\omega}{dt} = M = - \frac{e}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$mr^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} d\omega = M = - \frac{e}{2\pi} \int_0^{\Phi} d\Phi; \Rightarrow \Delta\omega = \omega_L = - \frac{e}{2m} \frac{\Phi}{\pi r^2} = - \frac{e}{2m} B.$$

15.3. Парамагнетизм. Теория Ланжевена.

Парамагнетики – такие вещества, у которых атом имеет собственный магнитный момент.

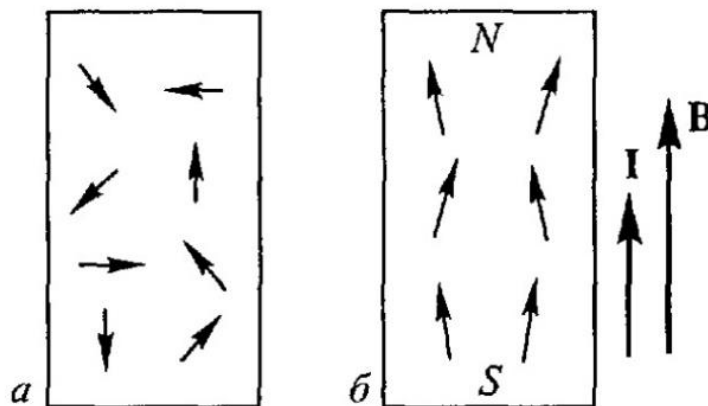


Рисунок 15.4. Иллюстрация магнитного момента.

$$W = -\vec{p}_m \vec{B}; \Rightarrow dn = A * e^{-\frac{W}{k_B T}} d\Omega,$$

Где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла.

$$\langle p_{m,z} \rangle = \int p_{m,z} dn / \int dn.$$

Воспользуемся теорией полярных диэлектриков.

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}_m; \vec{E} \rightarrow \vec{B}; \Rightarrow \langle p_{m,z} \rangle = p_m L(\beta),$$

$$\text{Где } \beta = \frac{p_m B}{k_B T}, \quad L(\beta) = \coth \beta - \frac{1}{\beta}.$$

$$\text{Если } \beta \ll 1, \quad L(\beta) \approx \frac{\beta}{3}, \quad \langle p_{m,z} \rangle = p_m \frac{p_m B}{3k_B T} = \frac{p_m^2 \mu_0 \mu H}{3k_B T}.$$

$$\text{Если } \mu \approx 1, \text{ то } I_z = n \langle p_{m,z} \rangle = \frac{n \mu_0 p_m^2}{3k_B T} H, \quad \vec{I} = \chi \vec{H}.$$

$$\chi = \mu - 1 = \frac{n \mu_0 p_m^2}{3k_B T} = \frac{C}{T} - \text{закон Кюри.}$$

Температурная зависимость $\chi \sim 1/T$ экспериментально обнаружил П. Кюри в 1896 году, в 1905 году Ланжевэн разработал теорию парамагнетизма и диамагнетизма.

Теория Ланжевэна хорошо описывает лишь газы.

Характерные значения парамагнитной восприимчивости $\chi \sim 10^{-3}$, что приблизительно в 100 раз больше характерного значения $\sim 10^{-5}$ восприимчивости диамагнетиков.

Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков:

Парамагнетик	$\mu - 1, 10^{-6}$	Диамагнетик	$\mu - 1, 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	-0,063
Воздух	0,38	Бензил	-7,5
Кислород	1,9	Вода	-9,0
Эбонит	14	Медь	-10,3
Алюминий	23	Стекло	-12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	-12,6
Платина	360	Кварц	-15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	-176

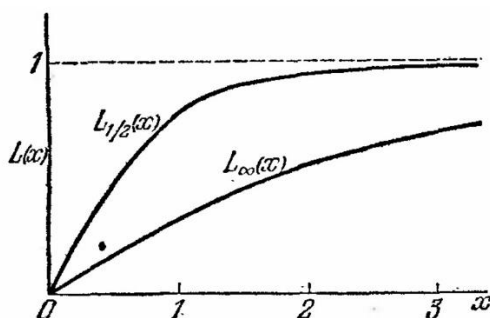


Рисунок 15.5. Выражение для функции Ланжевена.

15.4. Магнитомеханический опыт Эйнштейна-де-Гааза. Механомагнитный опыт Барнетта.

Рассмотрим ферромагнитный цилиндр.

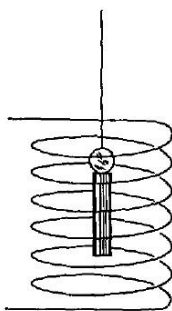


Рисунок 15.6. Ферромагнитный цилиндр.

Магнитомеханическое явление – это возникновение вращения тел при их намагничивании. В 1915 году экспериментально обнаружено в опытах Эйнштейна и Гааза.

$$\sum_V \vec{p}_{m,i} = \vec{I} * V,$$

$$\text{Но } \vec{p}_{m,i} = \Gamma \vec{L}_i, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_V \vec{L}_i = \frac{1}{\Gamma} \vec{I} * V.$$

$$L_z = J_z \omega_z = \frac{1}{\Gamma} \vec{I} * V.$$

Так для железного цилиндра с диаметром 1мм в магнитном поле $H = 10^4$ А/м
 $\omega_z = 10^{-3}$ рад/с.

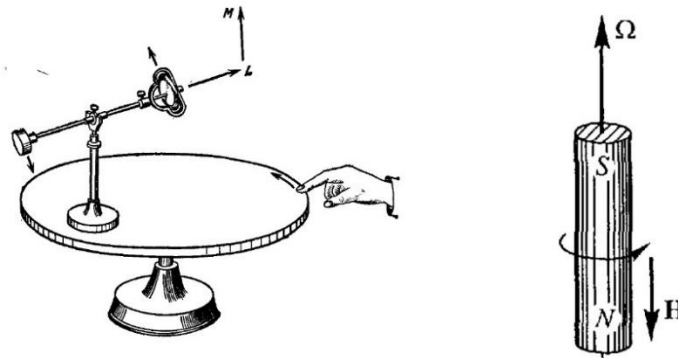


Рисунок 15.7. Раскрученный цилиндр.

Механомагнитное явление – это намагничивание магнетика при его вращении.

В опытах Барнетта при вращении железного цилиндра 6000 об/мин наблюдалось намагничивание, эквивалентное наличию внешнего поля 10^4 А/м.

15.5. Микроскопические носители магнетизма. Гиромагнитное отношение.

Исследование магнитомеханического и механомагнитного явлений показало $\Gamma < 0$, следовательно, магнетизм обусловлен движением электронов.

Для магнетиков $-\frac{e}{m} < \Gamma < -\frac{e}{2m}$.

Для ферромагнетиков (железо, никель, кобальт и др.) $\Gamma = -\frac{e}{m}$, что указывает на то, что магнетизм магнетиков нельзя объяснить только орбитальным движением электронов.

Совокупность имеющихся данных указывает на то, что электрон обладает собственным механическим (спином) и магнитным моментом $\vec{p}_{m,s} = -\frac{e}{m} \vec{S}$.

Спин квантуется, его проекция $S_z = \pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, где $h = 6,62 * 10^{-34}$ Дж * с.

Квантуется и проекция собственного магнитного момента $p_{m,s} = \pm \mu_B = \pm \frac{eh}{4\pi m}$ – магнетон Бора $\mu_B = 9,27 * 10^{-24}$ А * м².

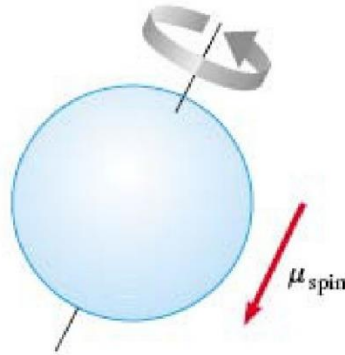


Рисунок 15.8. Классическая модель спина электрона.

15.6. Энергия магнитного поля (тока) в бесконечной изотропной магнитной среде.

Рассмотрим катушку с током.

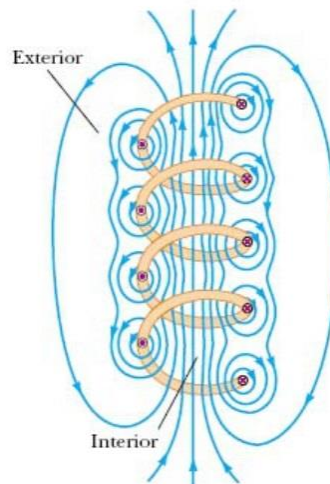


Рисунок 15.9. Катушка с током.

В магнитной среде $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$. Следовательно,

$$\Phi = \mu \Phi_0 = \underbrace{\mu L_0}_L I = LI; \Rightarrow W = \frac{LI^2}{2} = \mu \frac{L_0 I^2}{2} = \mu \frac{1}{2} \int_{\infty} \frac{B_0^2}{\mu_0} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\infty} \frac{\overbrace{\mu \vec{B}_0}^{\vec{B}} \overbrace{\mu \vec{B}_0}^{\vec{B}}}{\mu_0 \mu} dV = \int_{\infty} \frac{\overbrace{\vec{H} \vec{B}}^w}{2} dV.$$

$$w = \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{\vec{H} \mu_0 (\vec{H} + \vec{I})}{2} = \frac{\overbrace{\mu_0 \vec{H}}^{\vec{B}_0} \overbrace{\mu_0 \vec{H}}^{\vec{B}_0}}{2\mu_0} + \frac{\mu_0 \vec{H} \vec{I}}{2},$$

Где $\frac{\mu_0 \vec{H} \vec{I}}{2}$ – плотность энергии намагничивания магнетика.

Лекция 16.

16.1. Ферромагнетики.

Ферромагнетики – это сильномагнитные магнетики, относительная магнитная проницаемость которых может достигать десятков тысяч единиц. Кроме этого, ферромагнетики обладают рядом других отличительных особенностей по сравнению с диамагнетиками и парамагнетиками.

Магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля.

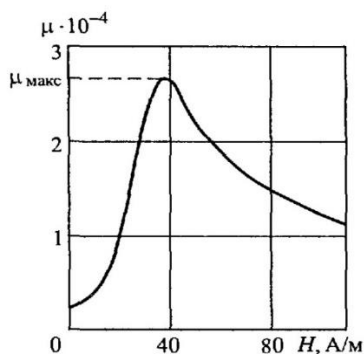


Рисунок 16.1. Кривая Столетова для чистого железа.

Кривая намагничивания:

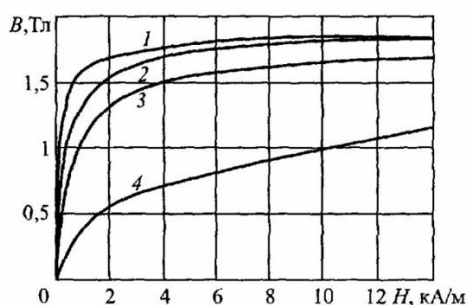


Рисунок 16.2. Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля: 1 – электролитическое железо, 2 – малоуглеродистое железо, 3 – литая сталь, 4 – чугун.

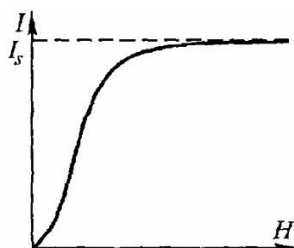


Рисунок 16.3. Кривая намагничивания ферромагнетиков.

Вектор намагниченности зависит нелинейным образом от величины магнитного поля.

Анизотропия намагничивания:

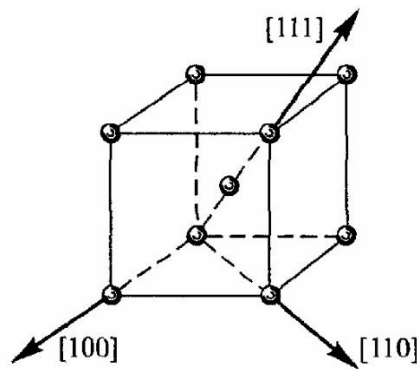


Рисунок 16.4. Элементарная кристаллическая ячейка железа.

Если взять кристаллическое железо и намагничивать его в разных направлениях, тогда направление 100 называется осью легкого намагничивания, а 111 – осью трудного направления. При направлении 110 намагниченность промежуточная.

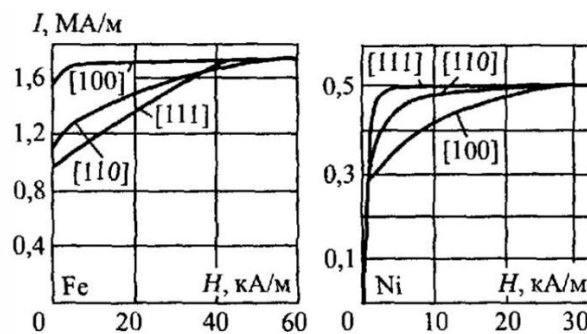


Рисунок 16.5. Кривые намагничивания Fe и Ni в различных направлениях.

16.2. Гистерезис намагничивания. Остаточная индукция и коэрцитивная сила.

Если взять ферромагнетик и начать его намагничивать и размагничивать, то кривая намагничивания и размагничивания вещества не будут совпадать.

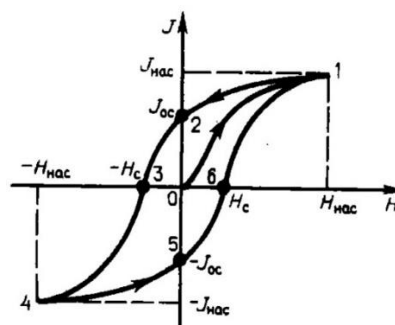


Рисунок 16.6. Гистерезисная кривая (кривая намагничивания ферромагнетика).

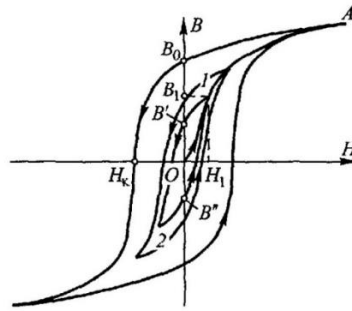


Рисунок 16.7. Зависимость величины индукции от магнитного поля внутри ферромагнетика.

Если намагничивать вещество не до насыщения, то петля гистерезиса будет иметь меньшие размеры и меньшую амплитуду.

Если намагничивать вещество со сложной зависимостью от времени поля намагничивания, то величина намагниченности будет иметь эффект памяти. Зависимость $B(H)$ или $I(H)$ неоднозначна и определяется предысторией намагничивания.

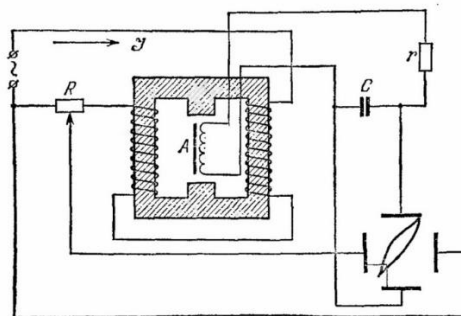


Рисунок 16.8. Схема установки для наблюдения петли гистерезиса.

Напряжение, создаваемое в катушке с ферромагнитным сердечником будет пропорционально кривой намагничивания.

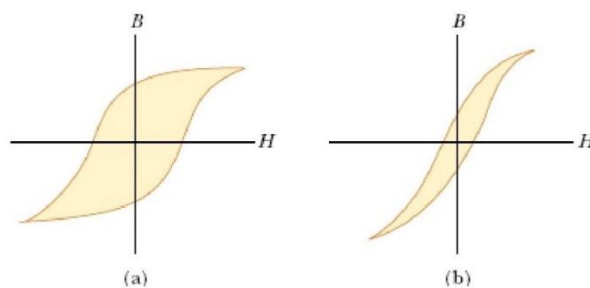


Рисунок 16.9. Жесткий ферромагнетик (a) и мягкий ферромагнетик (b).

Если ферромагнетик жесткий, то $H_K \gg 1 \text{ A/cm}$.

Если ферромагнетик мягкий, то $H_K < 1 \text{ A/cm}$.

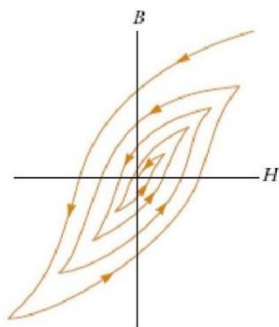
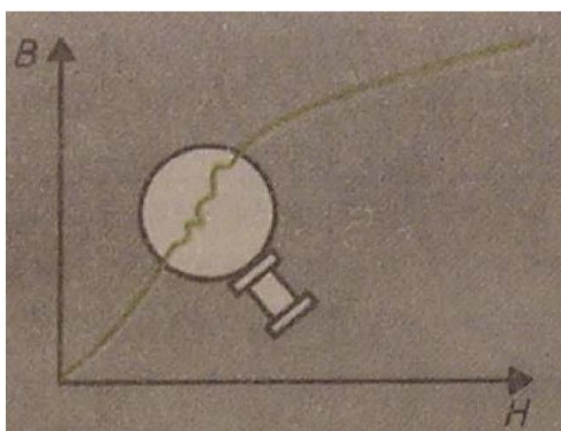


Рисунок 16.10. Способ размагничивания.

Для того, чтобы размагнитить намагниченное вещество, необходимо поместить вещество в катушку и постепенно уменьшать амплитуду переменного тока от максимального до минимального значения.



16.11. Скачки Баркгаузена.

Эффект Баркгаузена (1919) – Кривая намагничивания не представляет собой плавную кривую, а состоит из мелких скачков намагничивания.

16.3. Работа при намагничивании ферромагнетика.

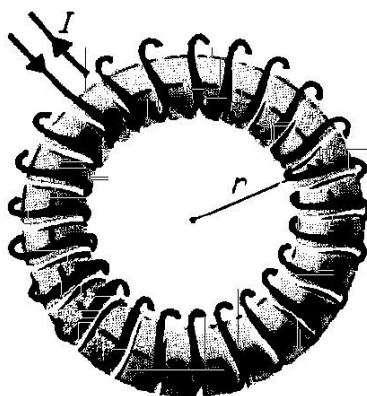


Рисунок 16.11. Торойд.

Пусть тороид заполнен ферромагнетиком. При увеличении тока в обмотке на dI возникает ЭДС самоиндукции, против которой ток совершает работу

$$dA = -Id\varepsilon_{\text{инд.}} = Id\Phi,$$

Где $\Phi = BNS$, N – число витков.

По теореме о циркуляции находим вектор \vec{H} имеем $H2\pi r = NI$.

$$\text{Находим } dW = dA = \frac{H2\pi r}{N} NS dB = HdB \underbrace{2\pi r S}_V.$$

Таким образом, работа dw , необходимая для увеличения индукции на $d\vec{B}$ в единице объема, равна:

$$dw = \vec{H}d\vec{B} = \mu_0 \vec{H}d(\vec{H} + \vec{I}) = \mu_0 \vec{H}d\vec{H} + \mu_0 \vec{H}d\vec{I}.$$

$\mu_0 \vec{H}d\vec{I}$ – Плотность энергии намагничивания.

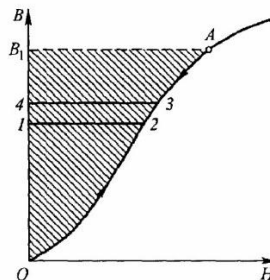


Рисунок 16.12. Работа намагничивания магнетика без гистерезиса.

Для того, чтобы посчитать всю работу при намагничивании величина энергии будет определяться площадью между осью B и кривой намагничивания.

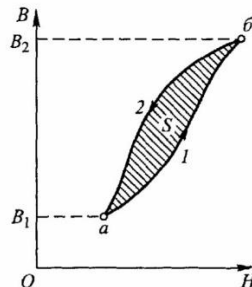


Рисунок 16.13. Работа при циклическом перемагничивании пропорциональна площади петли гистерезиса.

Работа при намагничивании и размагничивании будет разная. Работа будет равна площади гистерезисной кривой. За счет гистерезиса ферромагнетик нагревается.

16.4. Спонтанная намагниченность и температура Кюри.

Исследования показали, что даже в отсутствии внешнего магнитного поля ферромагнетик разбит на микроскопические области (домены), в которых ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения.

Спонтанная намагниченность ферромагнетика обусловлена ориентацией собственных магнитных моментов электронов ($\Gamma = -e/m$).

Ферромагнитное упорядочение существует только при температурах меньшей некоторого критического значения T_K . При $T > T_K$, ферромагнитное упорядочение пропадает и ферромагнетик превращается в парамагнетик.

Зависимость магнитной проницаемости от температуры для таких парамагнетиков подчиняется закону Кюри-Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_K}.$$

Вещество	$T_K, ^\circ\text{C}$	Вещество	$T_K, ^\circ\text{C}$
Кобальт	1150	Никель	360
Железо	770	30 %-ный пермаллой	70
78 %-ный пермаллой (сплав 22 % Fe, 78 % Ni)	550	Гадолиний	17

Рисунок 16.14. Температура Кюри некоторых магнетиков.

Механизм ориентации спинов ферромагнетика объясняет квантовая теория взаимодействия заряженных частиц (электронов) со спином $\hbar/2$ находящихся на незаполненных d -оболочках атомов ферромагнетика

$$W = -A * \vec{S}_1 \vec{S}_2$$

где A - обменная константа (интеграл). Если $A > 0$, то спинам энергетически выгодно ориентироваться параллельно (ферромагнитное упорядочение). Если $A < 0$, то выгодно антипараллельная ориентация (антиферромагнитное упорядочение).

Таким образом, ферромагнитное упорядочение обусловлено сильным обменным взаимодействием электронов атомов с некомпенсированными спинами и имеет немагнитное происхождения. (Дорфман 1927).

Первая теория ферромагнетизма была разработана Вейсом в 1907 году по аналогии с теорией парамагнетизма Ланжевена, в которой дополнительно к микроскопическому полю добавлено гипотетическое "молекулярное поле"

$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \mu_0(\vec{H} + b\vec{I}),$$

Где b - постоянная Вейса. Тогда для формулы Ланжевена получим

$$I = I_S L(\beta), \text{ где } I_S = np_m, \beta = \frac{pmB_{\text{эфф}}}{k_B T}; \Rightarrow I = \frac{K_B T n}{I_S b \mu_0} \beta - \frac{H}{b}.$$

$$I = I_S L(\beta),$$

$$I = \frac{K_B T n}{I_S b \mu_0} \beta - \frac{H}{b}.$$

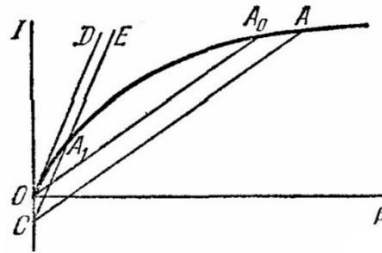


Рисунок 16.15. Кривая Ланжевена.

Наклон кривой OD определяет критическую температуру ферромагнитного упорядочения (фазовый переход 2-го рода).

Намагниченность насыщения ферромагнетика зависит от температуры.

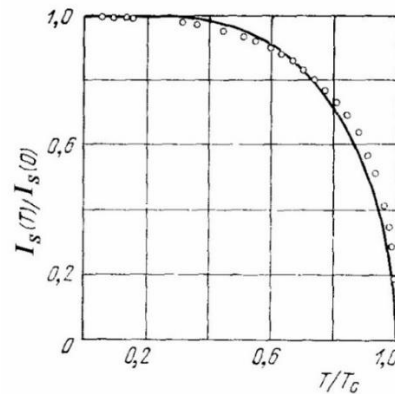


Рисунок 16.16. Намагниченность насыщения никеля как функция температуры. Сплошная кривая - теоретическая, построенная на $L_{1/2}(x)$.

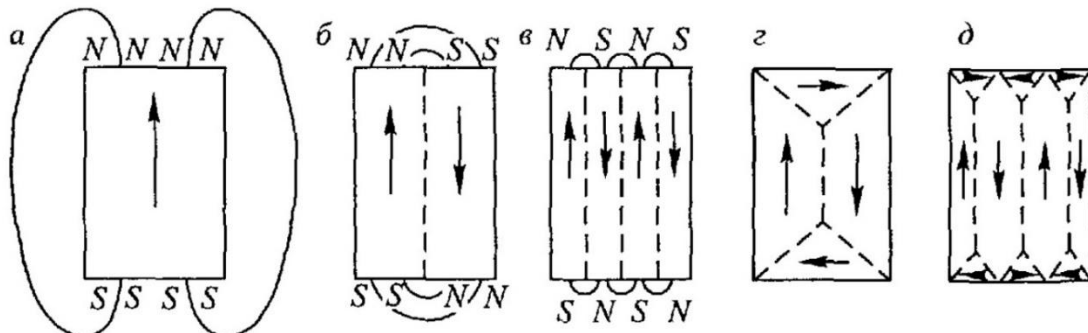


Рисунок 16.17. Механизм возникновения доменов.

Допустим имеется пленка (а), которая намагничена по всему объему, тогда в пространстве возникает магнитное поле, которое имеет дополнительную энергию.

Если намагниченность будет неоднородна (б) и разобьется на две области, то магнитное поле будет меньше.

Если разбивать на большие магнитные домены (в), тогда магнитостатическая энергия будет еще меньше.

При каждом домене возникает граница – доменная стенка. В доменной стенке магнитные моменты направлены в противоположном направлении.

Кубическая анизотропия (г,д).

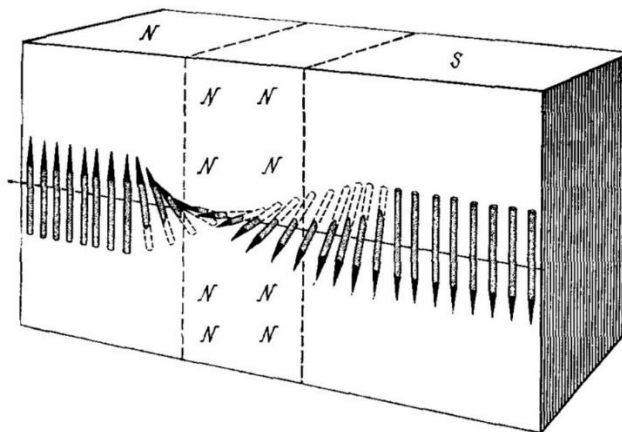


Рисунок 16.18. Доменная граница (стенка) Блоха.

Намагниченность одного домена направлена вверх, а другого направлена вниз. На некотором промежутке производится медленное изменение ориентации намагниченности.

16.5. Антиферромагнетики. Ферриты. Суперпарамагнетики.

Ферриты – обладают большим удельным сопротивлением, то есть являются магнитными полупроводниками. Находят важное применение в радиотехнике СВЧ. Ферриты-гранаты являются магнитными диэлектриками. Прозрачны для света.

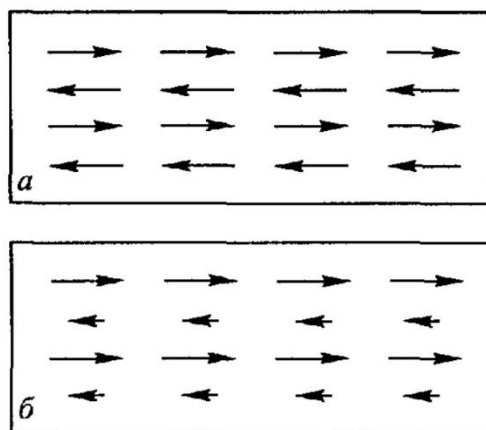


Рисунок 16.19. Антиферромагнитное упорядочивание.

Все ближайшие моменты в пластинке направлены в противоположную сторону.

Магнитные моменты направленные от одной подрешетки к другой не совпадают по величине (б).

Суперпарамагнетики состоят из вещества, состоящего из мелких ферромагнитных частичек, например шариков. Каждая частичка создает магнитный момент очень большой величины, но намагниченность каждой частицы подчиняется законам парамагнетизма и закону Ланжевена.

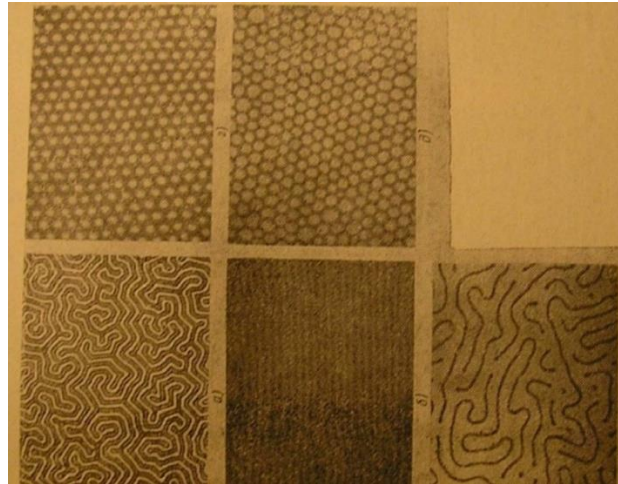


Рисунок 16.20. Доменная структура магнитоодносных пластин ЖИГ с сильной анизотропией.

16.6. Анизотропный магниторезистивный эффект. (ГМР) эффект. Спинтроника.

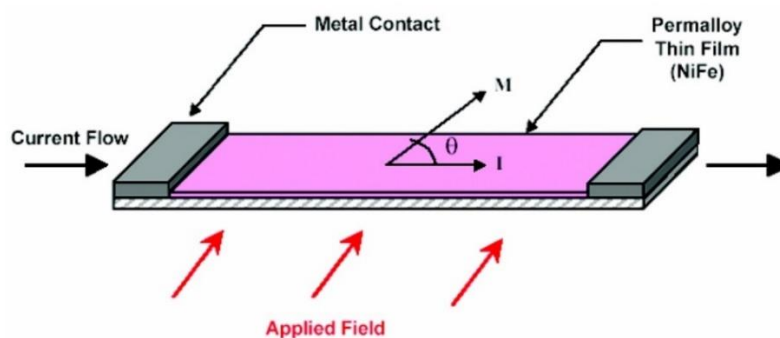


Рисунок 16.21. Пермаллоева пластинка.

Пусть имеется однородно намагниченная пермаллоева пластинка нанотолщины. При присоединении ее к потенциалу, через нее потечет электрический ток. Если пластинку поместить во внешнее магнитное поле, то под его действием вектор намагниченности отклонится на некоторый угол θ . Тогда сопротивление пластинки будет зависеть от угла отклонения вектора намагниченности. Величина этого сопротивления будет определяться:

$$\Delta R = \frac{\Delta \rho}{\rho} R \cos^2 \theta$$

Гигантский магниторезистивный (ГМР) эффект.

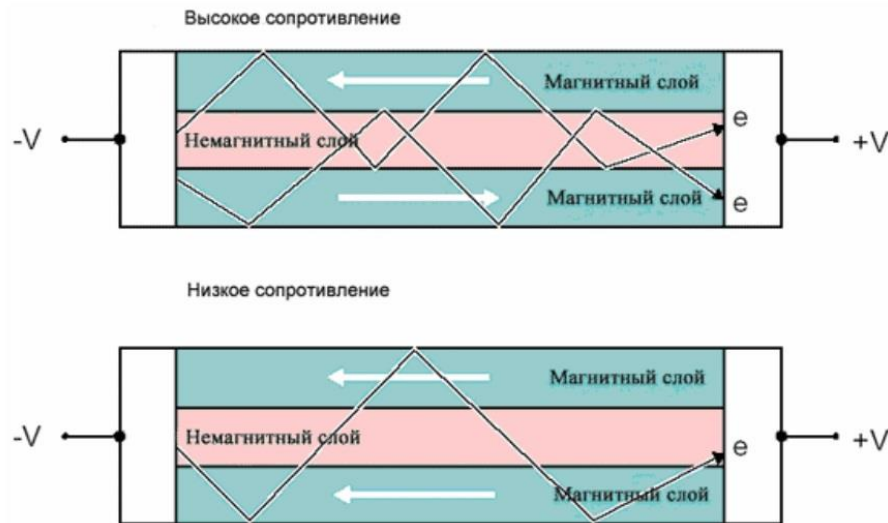


Рисунок 16.22. Магнитная пластинка.

Пусть имеется намагниченная пластинка нанотолщины. Если намагниченность разная, электроны ориентируют свой магнитный момент вдоль момента магнитного слоя и не меняют свою ориентацию. Если магнитные слои намагничены в одну сторону – сопротивление уменьшается.

Авторы открытия ГМР датчика – Альберт Ферт и Петер Грюнберг.

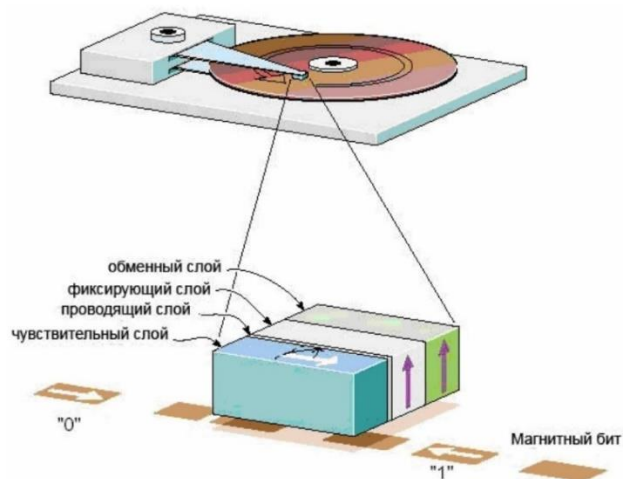


Рисунок 16.26. ГМР Датчик.

Лекция 17.

17.1. Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности. Уравнение колебательного контура в квазистационарном приближении.

В квазистационарном приближении полагается, что в рассматриваемой электродинамической системе все распределенные в пространстве заряды, токи и поля изменяются синхронно и мгновенно. То есть в каждый момент времени нестационарные заряды и токи порождают электрическое и магнитное поле соответствующее эквивалентным стационарным зарядам и токам.

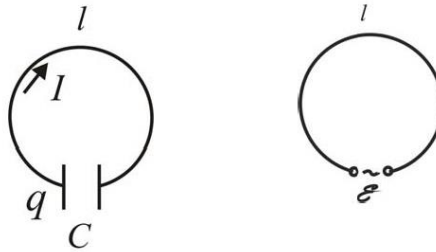


Рисунок 17.1. Конденсатор, замкнутый проводником.

$$\tau \sim \frac{l}{c}; \Rightarrow \tau \ll T \text{ или } l \ll \lambda,$$

Где $\lambda = Tc$ — длина волны.

Если $l = 1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$, то

$$\tau = \frac{10^3 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

$$\nu = \frac{1}{T} \ll 10^5 \text{ Гц} = 100 \text{ кГц}.$$

Если $l = 100 \text{ м}$, то

$$\tau = \frac{10^2 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

$$\nu = \frac{1}{T} \ll 10^6 \text{ Гц} = 1 \text{ МГц}.$$

Микропроцессор $l = 1 \text{ см} \Rightarrow \nu_0 = 1/\tau = c/l \sim 10 \text{ ГГц}$. Близок к пределу квазистационарности.

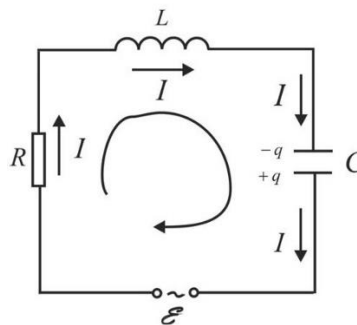


Рисунок 17.2. Электрическая цепь.

Пусть q – заряд первой пластины конденсатора, встречающийся при положительном обходе контура. Тогда напряжение $U_c = q/c$ и ток в контуре $I = dq/dt$ будут иметь правильный знак.

Согласно правилу Кирхгофа, имеем

$$IR + \underbrace{U_c}_{q/c} = \underbrace{\mathcal{E}_{\text{самоинд.}}}_{-LdI/dt} + \mathcal{E},$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}.$$

Механическая аналогия.

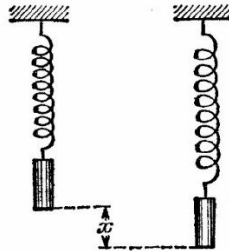


Рисунок 17.3. Грузик.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu v_x + F,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu v_x + kx = F.$$

17.2. Переходные процессы в RC- и RL-цепях.

Рассмотрим RC-цепь и RL-цепь.

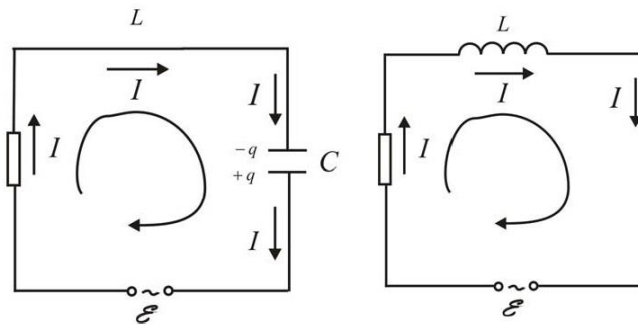


Рисунок 17.4. RC-цепь и RL-цепь.

$$r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}, \Rightarrow Rc \frac{dq}{dt} = c\mathcal{E} - q, \Rightarrow \frac{dq}{c\mathcal{E} - q} = \frac{dt}{Rc}.$$

$$\ln|c\mathcal{E} - q| = \frac{t}{Rc} + \text{const}.$$

При $t = 0, \text{const} = \ln|c\mathcal{E}|,$

$$c\mathcal{E} - q = c\mathcal{E} * e^{-\frac{t}{Rc}}; \Rightarrow q = c\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{Rc}} \right).$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}; \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E};$$

$$c \rightarrow \frac{1}{R}; R \rightarrow L; q \rightarrow I.$$

$$I = \frac{1}{R} \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right).$$

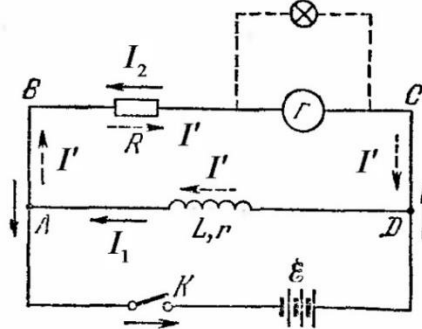


Рисунок 17.5. Электрическая цепь.

После установления тока

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

После размыкания ключа

$$I'r + I'R = -L \frac{dI'}{dt};$$

$$\frac{dI'}{I'} = -\frac{r+R}{L} dt;$$

$$\ln I' = -\frac{r+R}{L} t + C.$$

При $t = 0$ $C = \ln I_0$, где $I_0 = I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}$.

$I' = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \Rightarrow U = I'R = \frac{R}{r} \mathcal{E} * e^{-\frac{t}{\tau}}$ – экстраток размыкания.

17.3. Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.

Рассмотрим цепь.

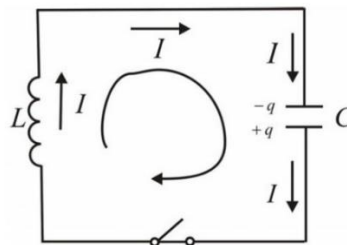


Рисунок 17.6. Цепь, состоящая из индуктивности и емкости.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0; \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{Lc}}_{\omega_0^2} q = 0.$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}.$$

$$q = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$I = \dot{q} = -a \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\text{Где } a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{A}{B}.$$

Начальные условия: при $t = 0, q_0, I_0$.

В частности, если при $t = 0, q = q_0, I = I_0 = 0$, то

$$A = 0, B = q_0; \Rightarrow q = q_0 \cos \omega_0 t, I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t.$$

$$W_c = \frac{q^2}{2c}, W_l = W_L = \frac{LI^2}{2}.$$

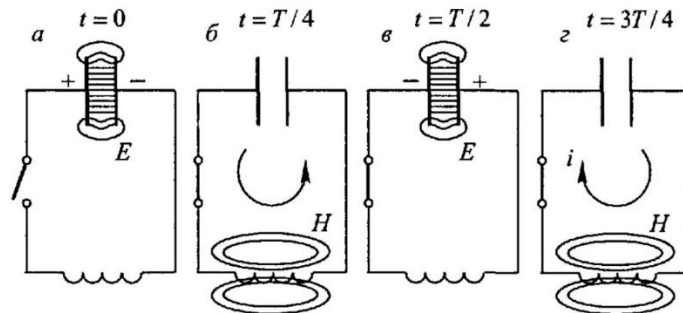


Рисунок 17.7. Изменение колебаний.

$$q = q_0 \cos \omega_0 t,$$

$$I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t.$$

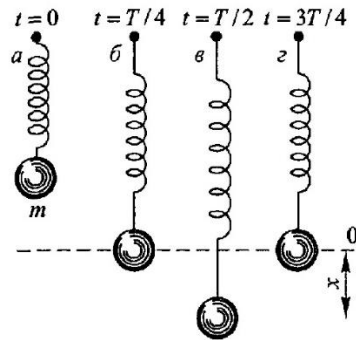


Рисунок 17.8. Механическая аналогия изменения колебаний.

$$x = x_0 \cos \omega_0 t,$$

$$v_x = \dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t.$$

Энергия гармонических колебаний:

$$I * \left| L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{c} = 0, \Rightarrow L \frac{d I^2}{dt} + \frac{dq}{dt} \frac{q}{c} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2c}}_{W_C} \right) = 0. \Rightarrow \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2c}}_{W_C} = const.$$

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{a^2}{2c} \frac{1}{2} (1 - \cos^2[2(\omega_0 t + \varphi_0)]).$$

$$W_C = \frac{q^2}{2c} = \frac{a^2}{2c} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{a^2}{2c} \frac{1}{2} (1 + \cos^2[2(\omega_0 t + \varphi_0)]).$$

$$\langle W_{L,C} \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_{L,C} dt = \frac{a^2}{4c}; \Rightarrow \langle W_L \rangle = \langle W_C \rangle.$$

17.4. Затухающие колебания в контуре и их уравнение.

Рассмотрим электрическую цепь.

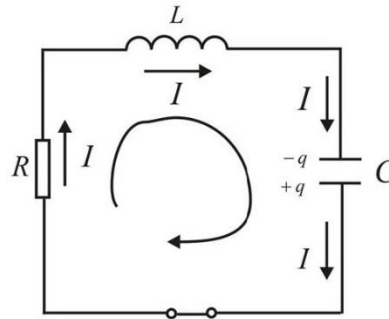


Рисунок 17.9. Электрическая цепь с сопротивлением.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0; \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \underbrace{\frac{R}{2L}}_{\gamma} \frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = 0.$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, q = \xi e^{-\gamma t}.$$

$$(q = uv, \dot{q} = \dot{u}v + u\dot{v}, \ddot{q} = \ddot{u}v + 2\dot{u}\dot{v} + u\ddot{v})$$

$$\ddot{\xi} e^{-\gamma t} - 2\dot{\xi} \gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 \xi e^{-\gamma t} + 2\gamma \xi e^{-\gamma t} - 2\gamma^2 \xi e^{-\gamma t} + \omega_0^2 \xi e^{-\gamma t} = 0,$$

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \gamma^2) \xi = 0,$$

Если $\gamma < \omega_0$, то $\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi = 0$, где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

$$\xi = a_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_0); \Rightarrow q = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0).$$

Если при $t = 0, q = q_0, I = \dot{q} = 0$, то $\varphi_0 = 0, a_0 = q_0$.

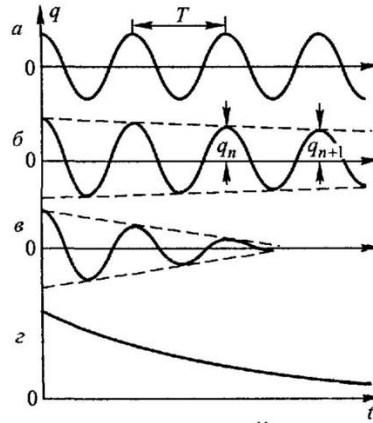


Рисунок 17.10. Вид полученного решения.

$$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t).$$

Если $\gamma > \omega_0$, то $\ddot{\xi} - (\gamma^2 - \omega_0^2)\xi = 0$.

$$\xi = A e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}, \quad q = A e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t} + B e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t}.$$

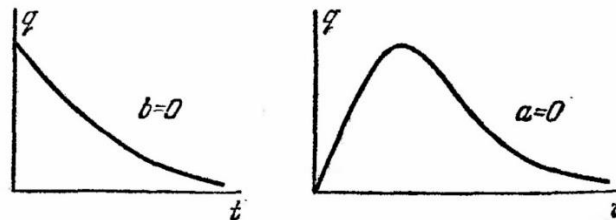


Рисунок 17.11. Вид колебаний в зависимости от констант a и b .

Если $\gamma = \omega_0$, то $\ddot{\xi} = 0$, $\xi = (a + b * t)$,
 $q = (a + b * t) e^{-\gamma t}.$

17.5. Показатель затухания (декремент затухания). Время релаксации.

Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.

$a = a(t) = a_0 e^{-\gamma t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$\gamma = \frac{R}{2L}$ – декремент (показатель) затухания.

$\tau = \frac{1}{\gamma}$ – время релаксации, время за которое амплитуда колебаний уменьшится в $e=2,7$ раз.

$\theta = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \gamma T$ – логарифмический декремент затухания.

$Q = \frac{\pi}{\theta}$ – добротность колебательного контура.

17.6. Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.

Рассмотрим связанный колебательный контур.

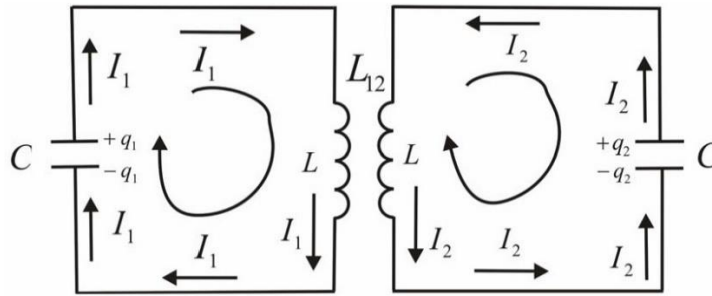


Рисунок 17.12. Связанный колебательный контур.

$$\begin{cases} \frac{q_1}{c} = -L \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \\ \frac{q_2}{c} = -L \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_1}{c} = 0, \\ L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{c} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L + L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{c} (I_1 + I_2) = 0, \\ (L + L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \frac{1}{c} (I_1 - I_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{\underbrace{(L + L_{12})c}_{\omega_1^2}} (I_1 + I_2) = 0, & I_1 + I_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^0), \\ \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \frac{1}{\underbrace{(L - L_{12})c}_{\omega_2^2}} (I_1 - I_2) = 0, & I_1 - I_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2^0). \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) + \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^0),$$

$$I_2 = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) - \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^0),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+L_{12})c}} \text{ и } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-L_{12})c}} - \text{нормальные частоты.}$$

Парциальная частота - это частоты колебаний системы с N степенями свободы при фиксированных $N-1$ степенях. В рассмотренном случае обе парциальные частоты совпадают и равны

$$\omega_{\text{П1}} = \omega_{\text{П2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для нормальных и парциальных частот справедливо неравенство

$$\omega_1 < \omega_{\text{П1}} \leq \omega_{\text{П2}} < \omega_2.$$

Лекция 18.

18.1. Метод векторных диаграмм. Метод комплексных амплитуд.

Комплексная частота.

Рассмотрим вращение векторов при гармонических и затухающих колебаниях.

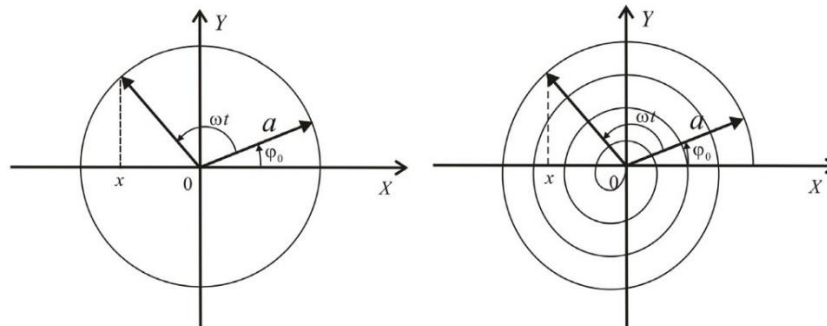


Рисунок 18.1. Иллюстрация вращения векторов при гармонических и затухающих колебаниях.

$$x = a \cos(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\varphi}).$$

$$x = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{a}).$$

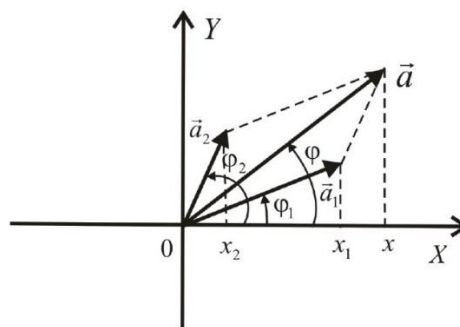


Рисунок 18.2. Геометрическая аналогия.

$$x_1 = a_1 \cos(\varphi_1), \text{ где } \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{1,0};$$

$$x_2 = a_2 \cos(\varphi_2), \text{ где } \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{2,0};$$

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\varphi).$$

Метод комплексных амплитуд.

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \Rightarrow z = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi.$$

Имеем

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[a e^{i(\omega t + \varphi_0)}].$$

$$z = a e^{i(\omega t + \varphi_0)} = a \cos(\omega t + \varphi_0) + i a \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$z = ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = z = ae^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = z_0 e^{i\omega t},$$

Где $z_0 = ae^{i\varphi_0}$ – комплексная амплитуда.

Комплексная частота.

Пусть $\omega = \omega' + i\omega''$, тогда

$$z = z_0 e^{i\omega t} = z_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} = z_0 e^{-\omega''t} * e^{i\omega't},$$

Где $z_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$ – комплексная амплитуда.

Если $\text{Im } \omega = \omega'' = \gamma$ – декремент затухания, то

$x = \text{Re } z = \text{Re}[a_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega't + \varphi_0)}] = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega't + \varphi_0)$ – затухающие колебания.

18.2. Вынужденные колебания в контуре.

Рассмотрим колебательный контур.

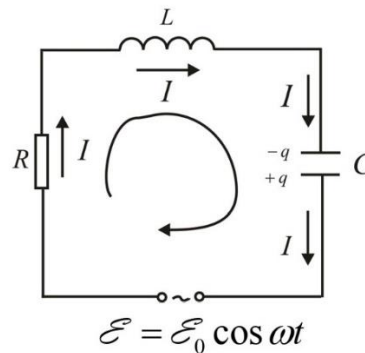


Рисунок 18.3. Колебательный контур.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \underbrace{2 \frac{R}{2L}}_{\gamma} \frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{L}}_{x_0},$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos \omega t.$$

$$q = q_{\text{общ.одн.}} + q_{\text{частн.неодн.}}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0; \Rightarrow q_{\text{общ.одн.}} = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1} t + \varphi_0).$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения вынужденных колебаний воспользуемся комплексным представлением гармонической функции.

$$\ddot{q}_k + 2\gamma \dot{q}_k + \omega_0^2 q_k = x_0 e^{i\omega t},$$

$$q_k = z_0 e^{i\omega t}; \Rightarrow (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t};$$

$$z_0 = z_0(\omega) = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}; \Rightarrow q_k = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}.$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$tg \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \Rightarrow q_k = \frac{x_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)}; q = Re q_k = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi).$$

Общее решение равно

$$q = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi).$$

Структуру этого решения легко понять с помощью метода векторных диаграмм.

В частности, если при $t = 0$ величины $q = 0, \dot{q} = 0$, то

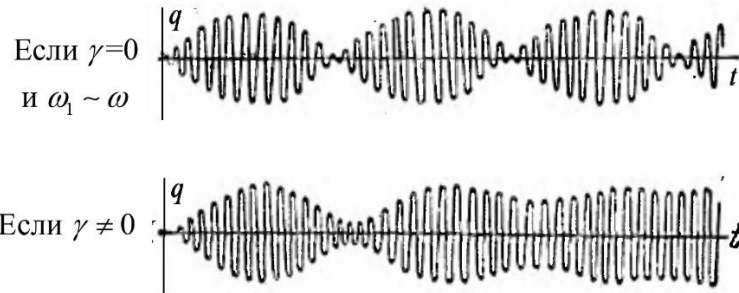


Рисунок 18.4. Амплитуды колебаний.

18.3. Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе.

Пусть при $t = 0, q = 0, \dot{q} = I = 0$, тогда

$$\begin{cases} a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\rho} \cos \varphi = 0, \\ -a_0 \omega_1 \sin \varphi_0 - \gamma a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\rho} \omega \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Если $\gamma \ll \omega_0$ и $\omega = \omega_0$, то $\varphi_0 = -\varphi, a_0 = -x_0/\rho$.

$$q \cong \frac{x_0}{\rho} (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega t - \varphi); \quad t \gg \tau = 1/\gamma.$$

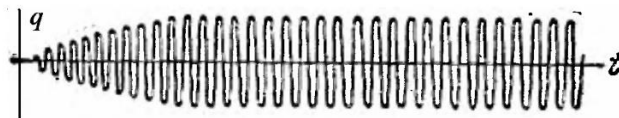


Рисунок 18.5. Амплитуда колебаний.

18.4. Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления.

При $t \gg \tau, q = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi), \Rightarrow$

$$I = \frac{dq}{dt} = \underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0} \sin(\omega t - \underbrace{(\varphi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}}_{\phi}) = I_0 \cos(\omega t - \phi);$$

$$U_c = \frac{q}{c} = \frac{x_0}{c\rho} \cos(\omega t - \varphi) = \underbrace{\frac{1}{\omega c} I_0}_{U_{c,0}} \cos\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \sin(\omega t - \phi) = \underbrace{\omega L I_0}_{U_{L,0}} \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U_R = IR = \underbrace{I_0 R}_{U_{R,0}} \cos(\omega t - \phi);$$

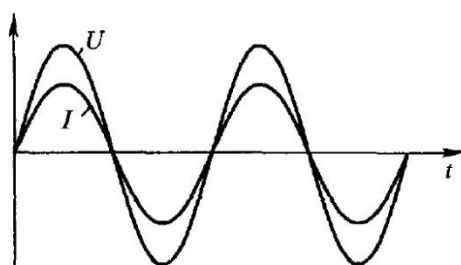


Рисунок 18.6. Колебания тока и напряжения на сопротивлении.

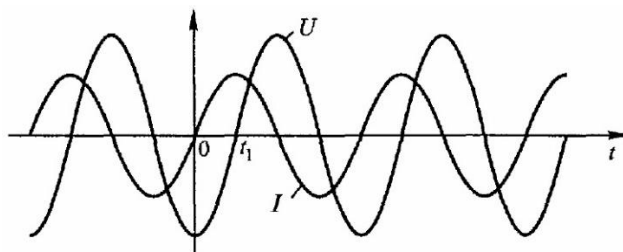


Рисунок 18.7. Колебания тока в цепи напряжения на конденсаторе.

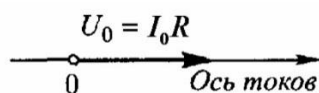


Рисунок 18.8. Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении

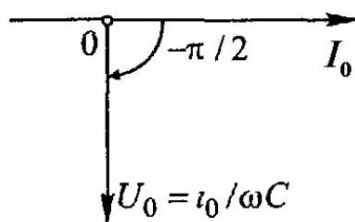


Рисунок 18.9. Векторная диаграмма напряжения на конденсаторе.

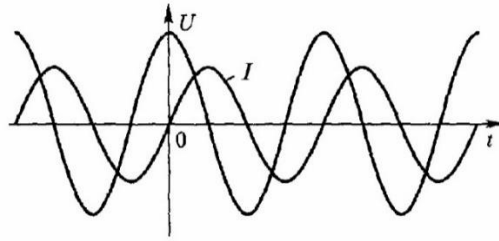


Рисунок 18.10. Колебания тока и напряжения на индуктивности.

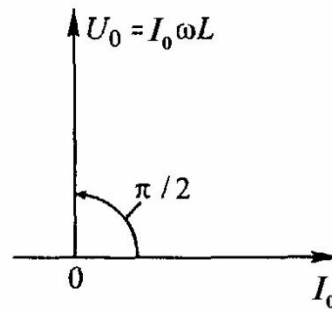


Рисунок 18.11. Векторная диаграмма напряжения на индуктивности.

R – активное сопротивление,

$R_c = \frac{1}{\omega c}$ – емкостное сопротивление,

$R_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление.

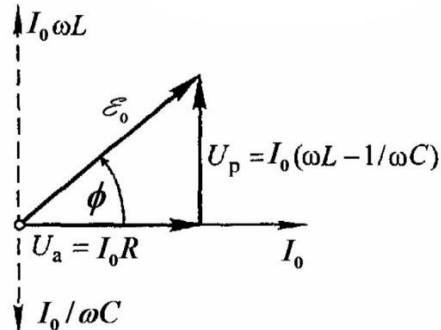


Рисунок 18.2. Векторная диаграмма напряжений для последовательного соединения сопротивления, емкости и индуктивности.

R – активное сопротивление,

$(\omega L - \frac{1}{\omega c})$ – реактивное сопротивление.

$$\mathcal{E}_0 = U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2},$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

18.5. Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока.

$$q_k = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}; \Rightarrow I_k = \frac{dq_k}{dt} = \frac{i\omega * x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t};$$

$$I_k = \frac{i\omega * (\mathcal{E}_0/L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{\underbrace{\frac{1}{i\omega c}}_{Z_c} + \underbrace{i\omega L}_{Z_L} + R} = \frac{\mathcal{E}_k}{Z},$$

Где $Z = \frac{1}{i\omega c} + i\omega L + R$ – комплексное сопротивление или импеданс.

$$I_k = \frac{\mathcal{E}_k}{Z} = \frac{\mathcal{E}_k}{|Z|e^{i\phi}},$$

Где $Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)$, $\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}$.

Так как $|I_k| = I_0$, $|\mathcal{E}_k| = \mathcal{E}_0$, $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}$

$$|I_k| = \frac{|\mathcal{E}_k|}{|Z|}; \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}, \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

закон Ома для переменного тока

R – активное сопротивление,

$\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)$ – реактивное сопротивление.

Лекция 19.

19.1. Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе.

Исследуем зависимость амплитуды $U_{c,0}$ и фазы φ от частоты ω , вынуждающей ЭДС (напряжения) в последовательном RLC контуре.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

$$U_c = \frac{q}{c} = \frac{x_0}{c\rho} \cos(\omega t - \varphi), \text{ где } \rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \text{ tg } \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$U_{c,0} = \frac{x_0}{c\rho} = \frac{\mathcal{E}_0}{Lc\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

При $\omega \rightarrow 0, U_{c,0} \rightarrow \mathcal{E}_0$ – статическое напряжение.

При $\omega \rightarrow \infty, U_{c,0} \rightarrow 0$.

$$\frac{dU_{c,0}}{d\omega} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\rho^3} \left(-\frac{1}{2} \right) [-2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 4\gamma^2 2\omega] = 0;$$

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2;$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

$$U_{c,\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

В частности, если $\gamma \ll \omega_0$, то

$$U_{c,\text{max}} = \mathcal{E}_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \frac{U_{c,\text{max}}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\gamma} = \frac{\pi}{T\gamma} = \frac{\pi}{\theta} = Q \text{ – добротность}$$

контра.

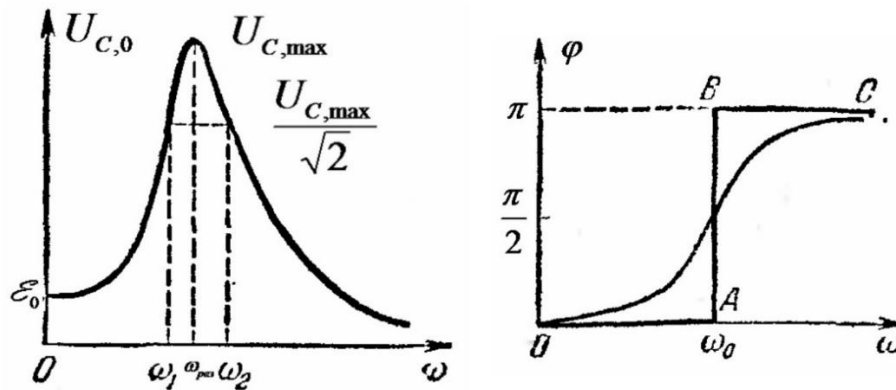


Рисунок 19.1 АЧХ и ФЧХ для последовательного колебательного контура.

$$U_{c,0} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Рассмотрим величину напряжения на индуктивности.

$$U_{L,0} = \omega L I_0 = \omega^2 \underbrace{L C}_{1/\omega_0^2} \underbrace{\frac{1}{\omega C} I_0}_{U_{C,0}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} U_{C,0}.$$

При резонансе $\omega = \omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, если $\gamma \ll \omega_0$, тогда $U_{L,0} = U_{C,0} = \varepsilon_0 Q$.

Фаза отличается на π .

19.2. Ширина резонансной кривой.

$$\begin{aligned} \frac{U_{C,\max}}{\sqrt{2}} &= U_{C,0}(\omega); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_0 \omega_0^2}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{\varepsilon_0 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}; \\ 8\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2; \\ 4\gamma^2 \omega_0^2 - 4\gamma^4 &= \underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}_{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \underbrace{4\gamma^2 \omega^2 - 4\gamma^2 \omega_0^2}_{4\gamma^2(\omega^2 - \omega_0^2)} + 4\gamma^4 = (\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2; \end{aligned}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = \pm 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \Rightarrow$$

$$\omega_{1,2}^2 = \underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} - 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \quad \omega_{2,2}^2 = \underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} + 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2};$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} \pm 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}};$$

Если $\gamma \ll \omega_0$, то $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma\omega_0$; $\omega_{2,2}^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\omega_0$; \Rightarrow

$$\omega_1 = \omega_0 - \gamma; \quad \omega_2 = \omega_0 + \gamma; \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma.$$

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\theta} = Q - \text{добротность контура.}$$

Точные оценки дают $\omega_{\text{рез}} - \omega_1 > \omega_2 - \omega_{\text{рез}}$

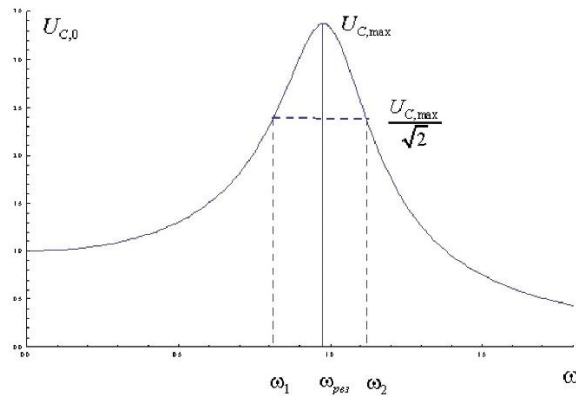


Рисунок 19.2. Точный график АЧХ.

$$\omega_0 = 1, \gamma = 0.15, \varepsilon_0 = 1, \omega_{\text{рез}} = 0.977, \omega_1 = 0.811, \omega_2 = 1.119.$$

$$\omega_{\text{рез}} - \omega_1 = 0.166, \omega_2 - \omega_{\text{рез}} = 0.142.$$

19.3. Токи при резонансе.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\omega x_0}{\rho} \sin(\omega t - \varphi) = \underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0} \cos(\omega t - \underbrace{(\varphi - \frac{\pi}{2})}_{\phi}).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi &= \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} = \\ &= -\frac{\frac{1}{Lc} - \omega^2}{2\frac{R}{2L}\omega} = -\frac{\frac{1}{\omega c} - \omega L}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}. \end{aligned}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0} \cos(\omega t - \phi);$$

$$I_0 = \frac{\omega x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{\omega \mathcal{E}_0}{L\sqrt{(\frac{1}{Lc} - \omega)^2 + 4\left(\frac{R}{2L}\right)^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\frac{1}{\omega c} - L\omega)^2 + R^2}}.$$

$$I = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}}_{I_0} \cos(\omega t - \phi); \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0$$

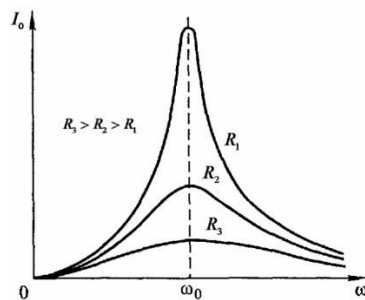


Рисунок 19.3. Резонансные кривые (АЧХ).

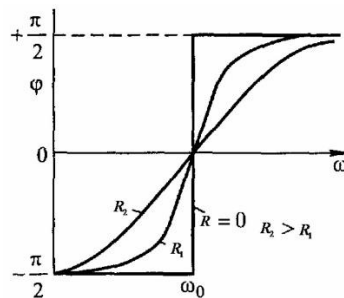


Рисунок 19.4. Изменение сдвига фазы колебаний тока при изменении частоты ЭДС. (ФЧХ).

19.4. Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.

Рассмотрим разветвленную цепь.

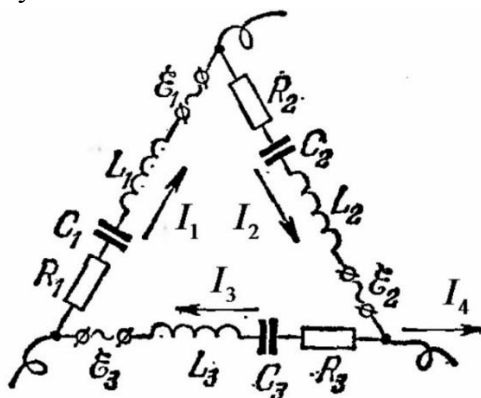


Рисунок 19.5. Разветвленная цепь.

$$I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

$$\sum_n I_n = 0.$$

$$I_{1K}Z_1 = \varepsilon_{1K}, \text{ где } Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L_1,$$

$$I_{2K}Z_2 = \varepsilon_{2K}, \text{ где } Z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega L_2,$$

$$I_{3K}Z_3 = \varepsilon_{3K}, \text{ где } Z_3 = R_3 + \frac{1}{i\omega C_3} + i\omega L_3,$$

$$\sum_n I_{nK}Z_n = \sum_n \varepsilon_{nK}.$$

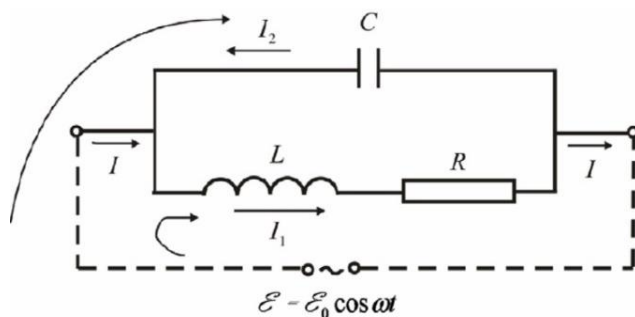


Рисунок 19.6. Параллельный колебательный контур.

$$\begin{cases} I_1(i\omega L + R) = \varepsilon, \\ -I_2 \frac{1}{i\omega C} = \varepsilon, \\ I_1 = I + I_2, \end{cases}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L} + \mathcal{E} * i\omega c = \frac{\mathcal{E}(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} + \mathcal{E} * i\omega c =$$

$$= \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \right] \mathcal{E},$$

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} * \mathcal{E}_0; \quad \text{tg } \phi = \frac{\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}};$$

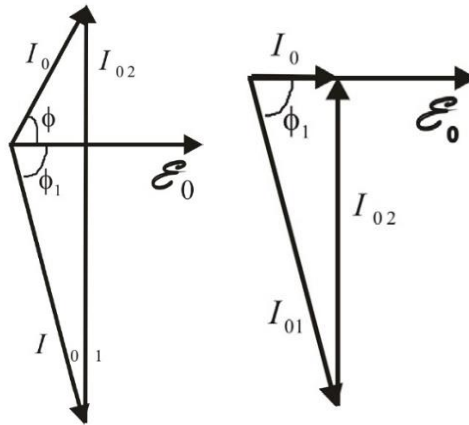


Рисунок 19.7. Векторная диаграмма токов.

$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \text{tg } \phi_1 = -\frac{\omega L}{R};$$

Если $\omega L \gg R$, то $\phi_1 \approx \pi/2$.

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L} \right)^2} * \mathcal{E}_0 = \frac{R}{\omega^2 L^2} \mathcal{E}_0; \Rightarrow$$

$$I_0 = \min, \text{ если } \omega = \omega_0^2 = \frac{1}{Lc}.$$

$$\text{tg } \phi \approx \frac{\omega^2 L^2}{R} \left(\omega c - \frac{1}{\omega L} \right) = 0, \text{ если } \omega = \omega_0^2 = \frac{1}{Lc};$$

$$\frac{I_{01}}{I_0} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L}}{\frac{R}{\omega_0^2 L^2} \mathcal{E}_0} = \frac{\omega_0 L}{R} \frac{2}{2} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{T_0 \gamma} = Q;$$

$$I_{02} = \mathcal{E}_0 \omega_0 c = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L} = I_{01};$$

19.5. Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения.

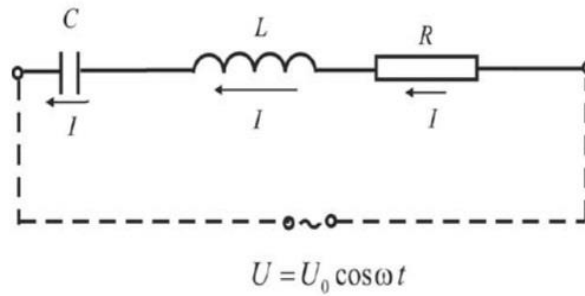


Рисунок 19.9. Участок цепи, на котором действует ЭДС.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\phi}} = \frac{U_0 e^{i\omega t - i\phi}}{|Z|},$$

Где $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.

$$I = \frac{U_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi); \Rightarrow P = UI = U_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= [2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)] = \frac{I_0 U_0}{2} [\cos(2\omega t - \phi) + \cos(\phi)].$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt = \frac{I_0 U_0}{2} \cos(\phi) = \underbrace{[U_0 \cos(\phi) = I_0 R]}_{\text{см. векторную диаграмму}} = \frac{I_0^2 R}{2} = I_e^2 R,$$

$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ – эффективное значение тока,

$U_e = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ – эффективное значение напряжения.

$\cos \phi$ – коэффициент мощности.

$$\phi = \arg\left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right); \Rightarrow \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Если $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \gg R^2$, то $\cos \phi \ll 1$.

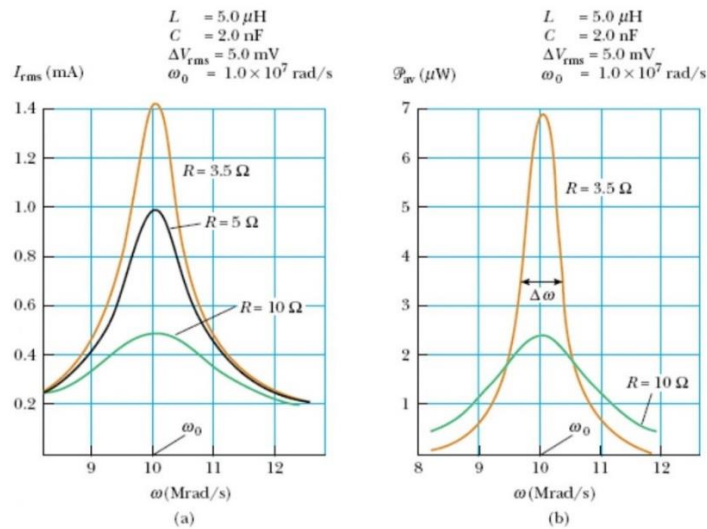


Рисунок 19.10. АЧХ тока и АЧХ мощности.

Зависимость средней мощности переменного тока поглощаемой в контуре от частоты имеет резонансный вид.

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2 R}{2}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

19.6. Применение резонанса напряжений в радиотехнике. Применение резонанса токов.

Рассмотрим напряжение при резонансе.

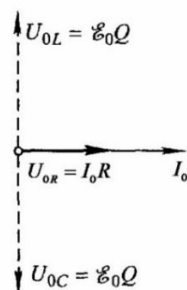


Рисунок 19.11. Векторная диаграмма напряжений при резонансе.

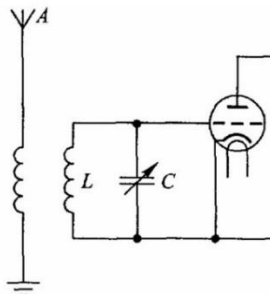


Рисунок 19.12. Входной контур радиоприемника (схематически).

Резонанс напряжений применяется в приемниках. В открытой антенне электромагнитная волна возбуждает колебания. Если есть индуктивная связь с колебательным контуром, то при резонансной частоте на индуктивности и емкости резко возникает напряжение.

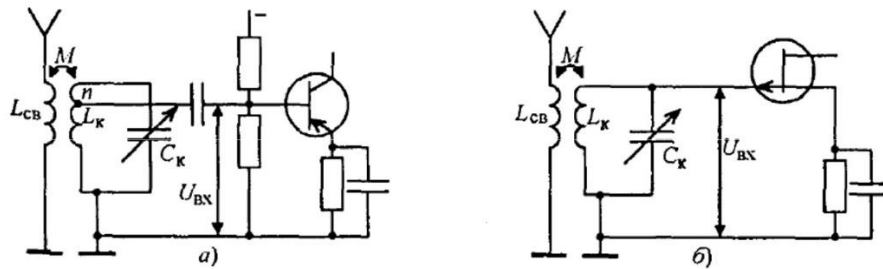


Рисунок 19.13. Схемы с трансформаторной связью одноконтурной входной цепи с антенной.

А – с биполярным транзистором;

Б – с полевым транзистором.

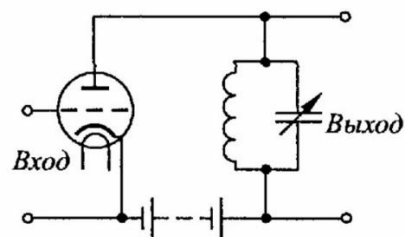


Рисунок 19.13. Резонансный усилитель.

При резонансе резко возрастает сопротивление, общий ток стремится к нулю и его можно использовать для выделения частоты.

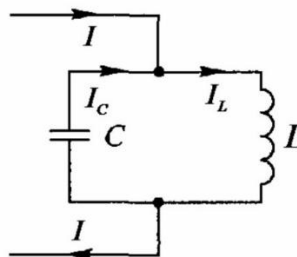


Рисунок 19.14. Схема нагревающего контура индукционной цепи.

При резонансе на индуктивности резко возрастает ток, и следовательно будет более эффективно поглощаться мощность.

Лекция 20.

20.1. Генераторы и электродвигатели. Электродвигатель постоянного тока.

Рассмотрим генератор переменного тока.

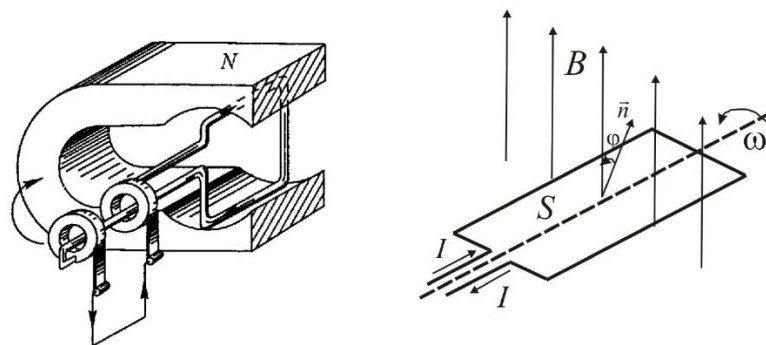


Рисунок 20.1. Принцип действия генератора переменного тока.

$$\Phi = BS \cos \varphi; \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} BS \cos(\omega t + \varphi_0) = \underbrace{BS\omega}_{\mathcal{E}_0} \sin(\omega t + \varphi_0) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t + \varphi_0) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

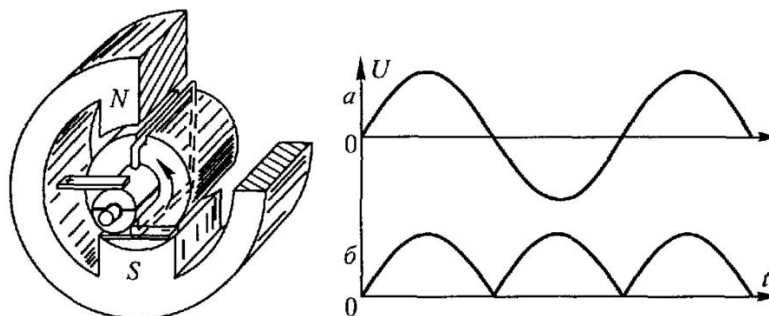


Рисунок 20.2. Принцип действия генератора постоянного (пульсирующего) тока.

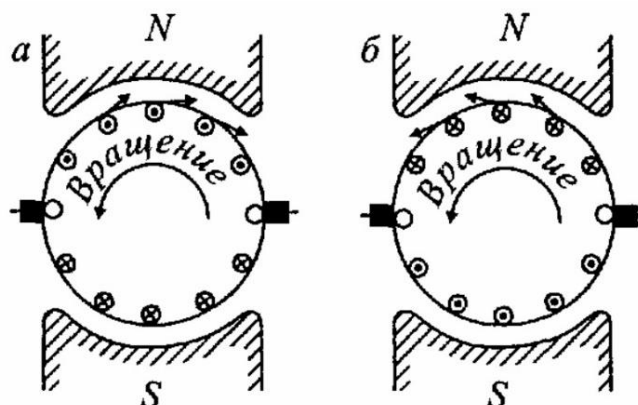


Рисунок 20.3. Электродинамические силы, действующие на якорь генератора (а) и двигателя (б) постоянного тока.

$$I_{\text{я}} = \frac{(U - \mathcal{E}_{\text{инд}})}{r_{\text{я}}}.$$

Для пуска мощных электродвигателей используется реостат, так как при неподвижном якоре ток $I_{\text{я}} = U/r_{\text{я}}$ большой. (Рисунок 20.3.)

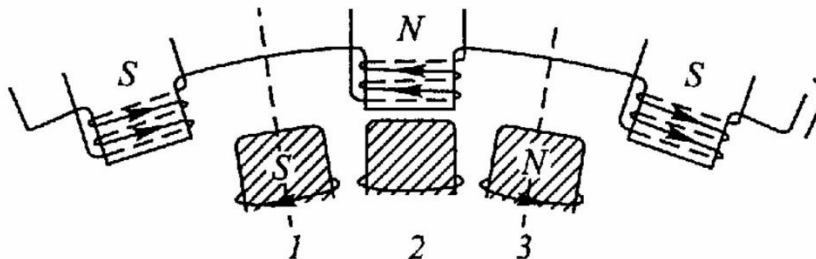


Рисунок 20.4. Принцип синхронного двигателя переменного тока.

Если подавать на статор переменный ток, то в обмотках статора через каждые пол периода будут меняться полюса. Полюса электромагнита якоря должны быть синхронизированы с полюсами электромагнита статора.

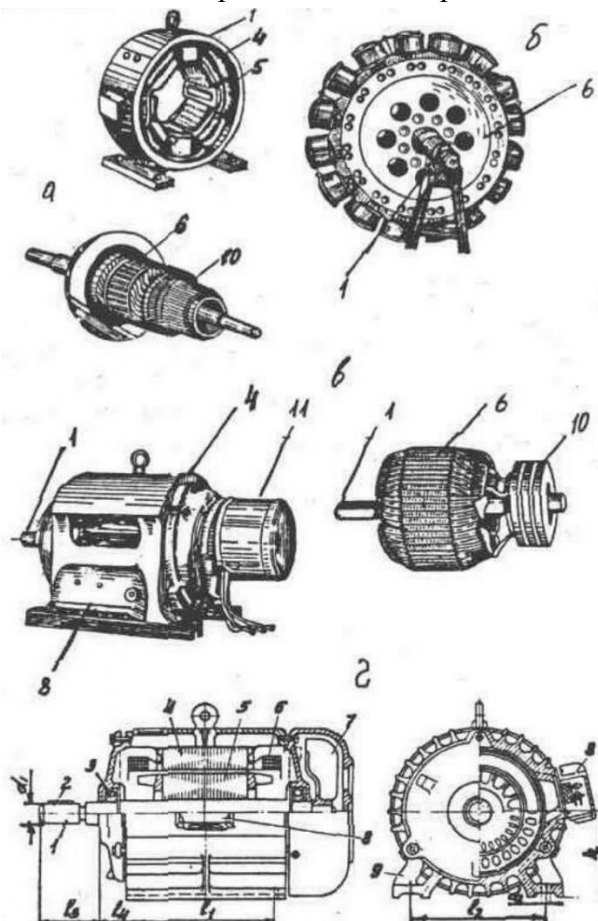


Рисунок 20.5. Электрические двигатели.

А – постоянного тока; Б – синхронные; В – асинхронные с фазным ротором; Г – асинхронные трехфазные с коротко замкнутым ротором серии 4А.

1 – вал; 2 – шпонка; 3 – подшипник; 4 – статор; 5 – обмотка статора; 6 – ротор (якорь); 7 – вентилятор; 8 – коробка выводов; 9 – лапа; 10 – коллектор; 11 – щетки;

11, 12 – продольное и поперечное сечения; 13 – длина выступающего конца вала; 14 – размер выступающей крышки; h – высота оси вращения; d1, d2 – диаметры вала и отверстий в лапах.

20.2. Двухфазный ток.

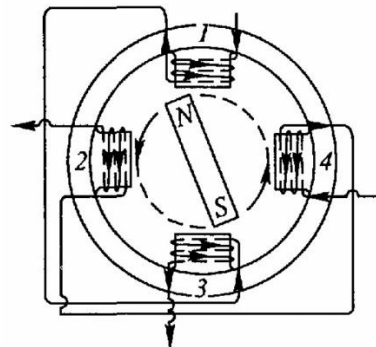


Рисунок 20.6. Получение двухфазного тока.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t), \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ)\end{aligned}$$

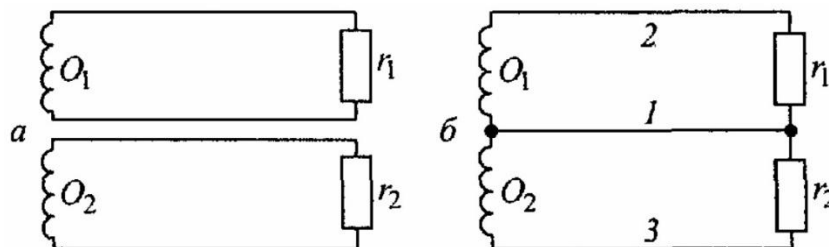


Рисунок 20.7. Схема двухфазной системы токов.

Напряжения между концами обмоток O_1 и O_2 называют фазными напряжениями, токи в O_1 и O_2 – фазными токами. Этими же названиями обозначают напряжения и токи в нагрузочных сопротивлениях r_1 и r_2 . Напряжения между проводами линии 1, 2, и 3 называют линейными напряжениями, а токи в этих проводах – линейными токами.

Если принять потенциал общего провода 1 за нуль, то

$$\begin{aligned}U_{12} &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t), \quad U_{13} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ), \\ U_{23} &= U_{12} - U_{13} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ) = 2\mathcal{E}_0 \sin 45^\circ \cos(\omega t - 45^\circ) = \\ &= \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + 45^\circ).\end{aligned}$$

20.3. Трехфазный ток.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t), \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 120^\circ), \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 240^\circ).\end{aligned}$$

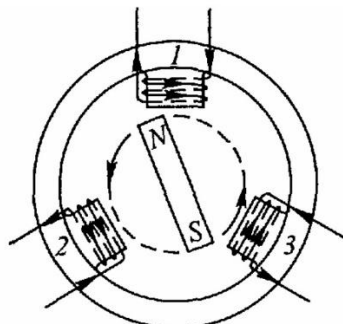


Рисунок 20.8. Получение трехфазного тока.

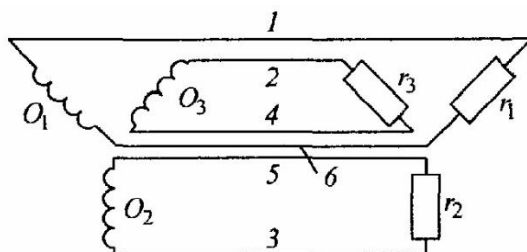


Рисунок 20.9. Трехфазная система токов.

20.4. Соединение обмоток генератора и нагрузки «звездой» и «треугольником». Фазное и линейное напряжения.

Рассмотрим типы соединения.

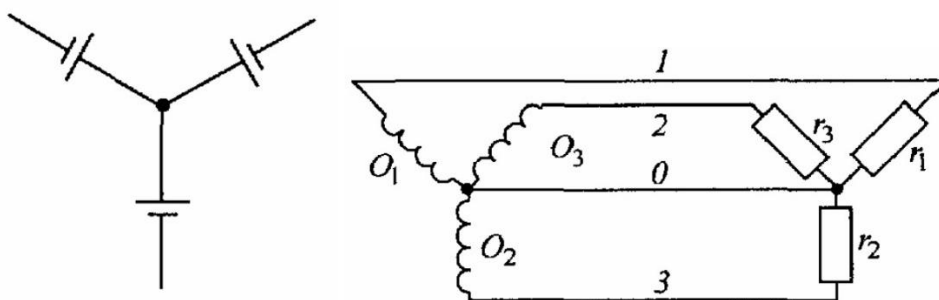


Рисунок 20.10. Соединение трех источников тока звездой.

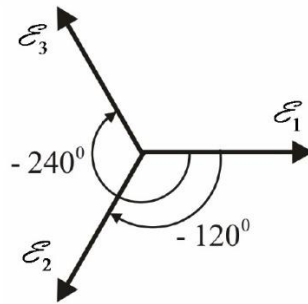


Рисунок 20.11. Векторная диаграмма соединения звездой.

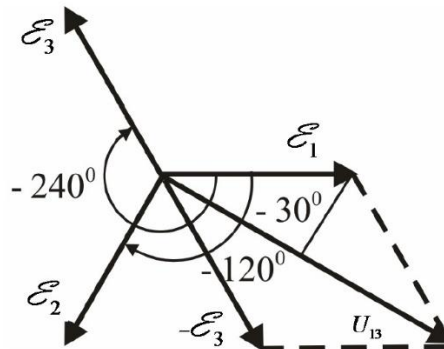


Рисунок 20.12. Вычисление линейного напряжения.

$$U_{13} = E_1 - E_3 = E_0 \sin(\omega t) - E_0 \sin(\omega t - 240^\circ) = 2E_0 \underbrace{\cos(30^\circ)}_{\sqrt{3}/2} \sin(\omega t - 30^\circ) = \\ = \sqrt{3} \sin(\omega t - 30^\circ).$$

Аналогично получим

$$U_{12} = E_1 - E_2 = E_0 \sin(\omega t) - E_0 \sin(\omega t - 120^\circ) = \sqrt{3} \sin(\omega t + 30^\circ).$$

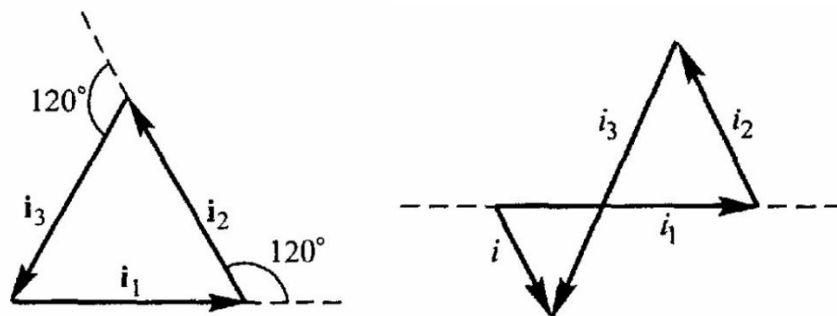


Рисунок 20.13. Векторные диаграммы токов в нулевом проводе. Симметричная и несимметричная нагрузки.

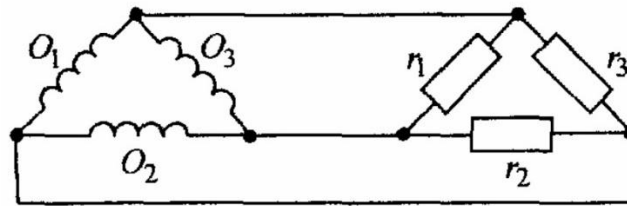


Рисунок 20.14 Соединение треугольником.

Катушки соединятся последовательно друг с другом. Нагрузка на каждое сопротивление называется соединением треугольником.

20.5. Получение и использование вращающегося магнитного поля.

На основе переменного тока можно создать асинхронные двигатели без всяких щеток.

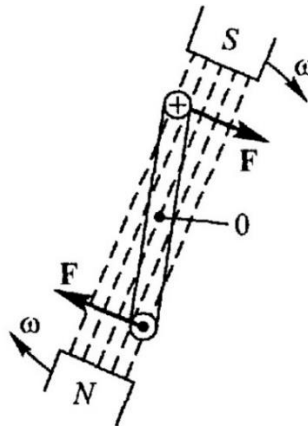


Рисунок 20.15. Действие вращающегося магнитного поля на замкнутый виток проволоки.

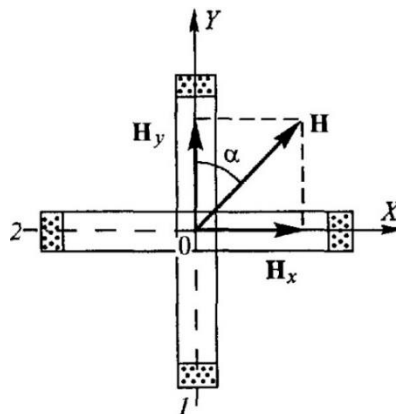


Рисунок 20.16. Возникновение вращающегося магнитного поля двухфазного тока.

$$H_x = H_0 \sin \omega t ; H_y = H_0 \sin(\omega t - 90^\circ) = -H_0 \cos \omega t.$$

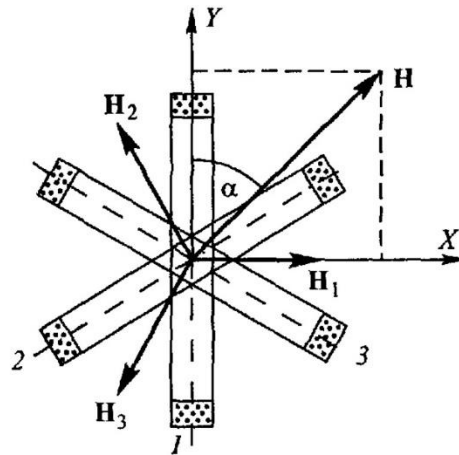


Рисунок 20.17. Возникновение вращающегося магнитного поля трехфазного тока.

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 \sin(\omega t), \\ H_2 &= H_0 \sin(\omega t - 120^\circ), \\ H_3 &= H_0 \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned}$$

20.6. Трансформатор. Принцип действия, устройство, применение. Коэффициент трансформации. Роль сердечника.

Устройство трансформатора: имеется магнитопровод (обычно из железа), в котором имеется две катушки – первичная и вторичная. Если на первичную катушку подается ЭДС индукции, то в первичной катушке возникает переменный ток, который создает магнитный поток. Магнитный поток передается через магнитопровод на вторую катушку. Если замкнуть вторую катушку, то в ней потечет электрический ток.

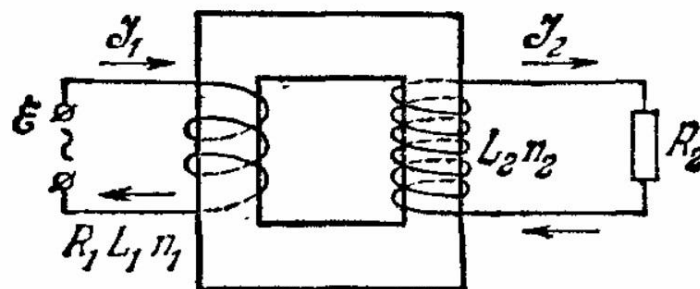


Рисунок 20.18. Трансформатор.

Воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$R_1 I_1 = \underbrace{U_1}_{\varepsilon} - \underbrace{\dot{\Phi}_1}_{i\omega\Phi_1},$$

$$\underbrace{R_2 I_2}_{U_2} = - \underbrace{\dot{\Phi}_2}_{i\omega\Phi_2}.$$

Обычно $I_1 R_1 \ll \mathcal{E} \Rightarrow U_1 = i\omega\Phi_1, U_2 = i\omega\Phi_2$.

$$\Phi_1 = n_1\Phi_0, \Phi_2 = n_2\Phi_0,$$

$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{n_2}{n_1} = K$ – коэффициент трансформации.

$$P_1 = P_2; \Rightarrow I_1 U_1 = I_2 U_2; \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$



Лекция 21.

21.1. Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\ \oint_L \vec{E} * d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} * d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{j} * d\vec{S}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{I}), \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\vec{j}_{\text{см}}}, \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho dV, \\ \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} &= 0 \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \\ \oint_L \vec{H} * d\vec{l} &= \int_{S_L} \vec{j} * d\vec{S} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}}_{\vec{I}_{\text{см}}}. \end{aligned}$$

$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – плотность тока смещения.

$\vec{I}_{\text{см}} = \int_{S_L} \vec{j} * d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ – ток смещения.

Пример 1.

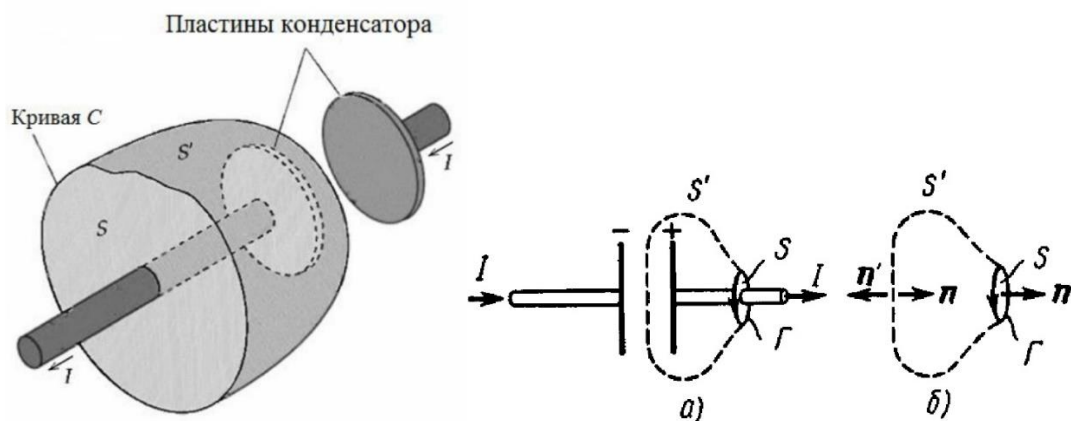


Рисунок 21.1. Конденсатор и пластины конденсатора.

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} * d\vec{l} = \int_S \vec{J} * d\vec{S} = I = -\frac{dq}{dt},$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} * d\vec{l} = \int_S \vec{J} * d\vec{S} = 0, ?$$

$$\oint_{S+S'} \vec{J} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint_{S+S'} \vec{D} d\vec{S} = -\oint_{S+S'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \Rightarrow \oint_{S+S'} \underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)}_{\vec{J}_{\text{пол}}} d\vec{S} = 0.$$

$$0 = \oint_{S+S'} \vec{J}_{\text{пол}} d\vec{S} = \int_S \vec{J}_{\text{пол}} \vec{n} d\vec{S} + \int_{S'} \vec{J}_{\text{пол}} \vec{n}' d\vec{S}; \Rightarrow \int_S \vec{J}_{\text{пол}} \vec{n} d\vec{S} = \int_{S'} \vec{J}_{\text{пол}} \underbrace{\vec{n}' d\vec{S}}_{- \vec{n} d\vec{S}}.$$

$I_{\text{пол}} \qquad I'_{\text{пол}}$

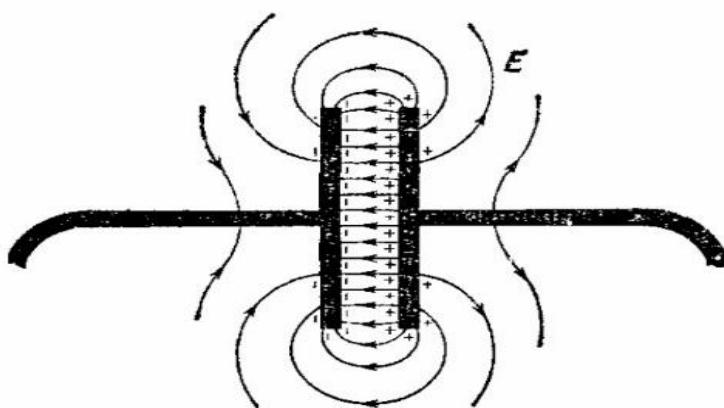


Рисунок 21.2. Электрическое поле в определенный момент времени. Величина поля E всюду уменьшается со временем.

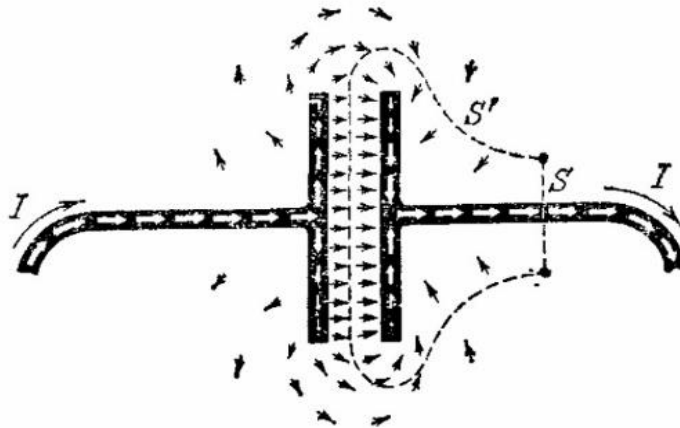


Рисунок 21.3. Ток проводимости (белые стрелки) и ток смещения (черные стрелки).

Пример 2.

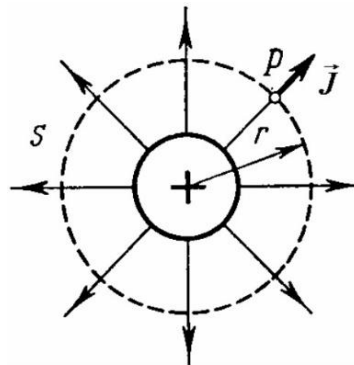


Рисунок 21.4. Сфера, которая находится в слабопроводящей среде.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0;$$

$$D4\pi r^2 = q; \Rightarrow J = -\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial t} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{I}{4\pi r^2};$$

21.2. Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя.

Второе условие квазистационарности:

$$|\vec{J}| \gg \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|.$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$. Тогда, учитывая $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{J} = \vec{E} / \rho$,

Имеем $E_0 / \rho \gg \omega \epsilon \epsilon_0 E_0$.

Или $\omega \ll 1 / (\epsilon \epsilon_0 \rho)$.

Для меди $1 / (\epsilon_0 \rho) = (1 / 8,85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м} \cdot 1,72 \cdot 10^{-8} \text{Ом} \cdot \text{м}) = 6,6 \cdot 10^{18} \text{рад/с}$.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \end{cases}$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E})}_{\operatorname{grad} * \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \operatorname{rot}(\mu \mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t};$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\mu \mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

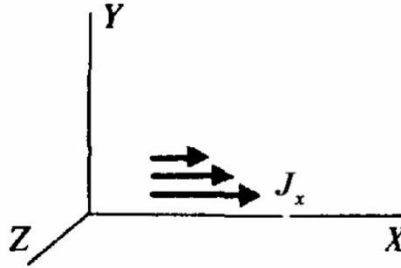


Рисунок 21.6. Скин-эффект в бесконечном проводнике в плоской границей.

$$\frac{\partial^2 E_x(y, t)}{\partial y^2} = \frac{\mu \mu_0}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Полагая $E_x(y, t) = E_0(y)e^{i\omega t}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x(y, t)}{\partial y^2} &= \frac{\mu \mu_0}{\rho} i\omega E_0(y), \\ E_0(y) &= Ae^{-ky} + Be^{ky}, \\ k^2 E_0(y) &= i \frac{\mu \mu_0 \omega}{\rho} E_0(y), \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu \mu_0 \omega}{2\rho}, \\ k &= \frac{\sqrt{2}}{\delta} \sqrt{i} = \sqrt{2} \frac{1+i}{\delta}. \end{aligned}$$

Из граничных условий:

$$|E_0(y)| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty, \Rightarrow B = 0.$$

$$E_x(y, t) = Ae^{-\frac{x}{\delta}(1+i)} e^{i\omega t} = Ae^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}.$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu \mu_0 \omega}} - \text{толщина скин-слоя.}$$

Например, если $\omega = 10^4 \text{ рад/с}^{-1}$, $\rho = 1,72 * 10^{-8} \text{ Ом} * \text{м}$ (медь),

$$\mu = 1, \mu_0 = 1,27 * 10^{-6} \text{ Гн/м}, \delta = 1,65 \text{ мм}.$$

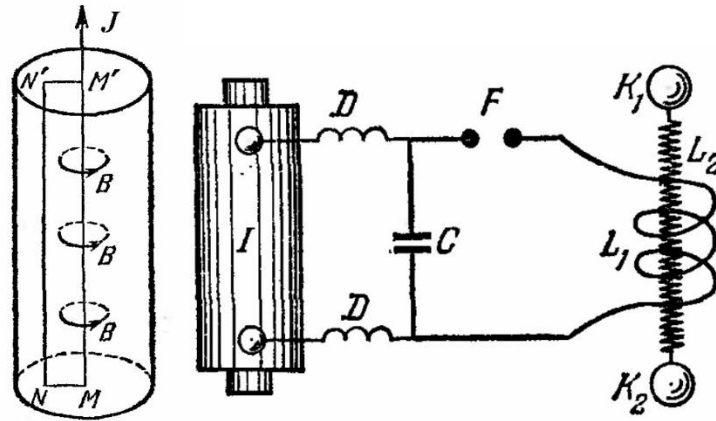


Рисунок 21.7. Высокочастотный резонансный трансформатор Тесла.

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_2 U_2^2}{2} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

21.3. Взаимные превращения электрического и магнитного полей.

Электромагнитные волны. Волновое уравнение.

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной изотропной и бесконечной среде или в вакууме при $\rho = 0$ и $J = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \\ \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, & \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, & \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{H}}_{=0} - \Delta \vec{H} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}), & & & \Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}{1/v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}), & & & \Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}{1/v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{Где } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(z, t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0, \Rightarrow \vec{E} \left(t - \frac{z}{v} \right), \\ \Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0, \Rightarrow \vec{H} \left(t - \frac{z}{v} \right), \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] = \vec{E}_0 \cos \left[\omega t - \frac{\tilde{\omega}}{v} z \right] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - kz],$$

$$\left(\frac{\omega}{k} = v \text{ по определению } k \right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r}] = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

$$\text{Аналогично } \vec{H}_0 \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r}] = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})};$$

$$\text{rot } \vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = -i[\vec{k}, \vec{E}], \text{ div } \vec{E} = \nabla * \vec{E} = -i\vec{k} * \vec{E}.$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [-i\vec{k}, \vec{E}] = -i\omega \vec{B} = -i\omega \mu \mu_0 \vec{H}, \\ [-i\vec{k}, \vec{H}] = -i\omega \vec{D} = -i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \end{cases}$$

$$\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$$

$$\frac{k}{\omega} E_x = \mu \mu_0 H_y, \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0},$$

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_x = \sqrt{\mu \mu_0} H_y,$$

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu \mu_0} H_0,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{\omega} = T v,$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

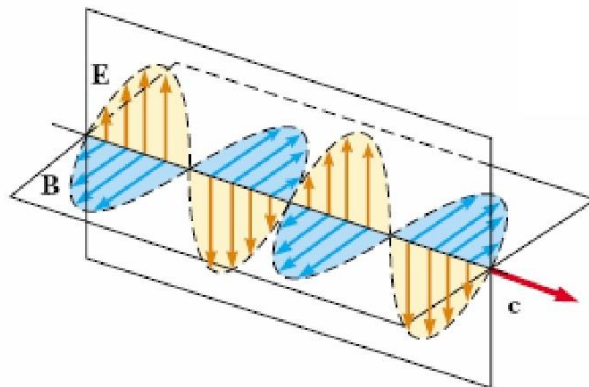


Рисунок 21.8. Электромагнитная волна.

21.4. Вектор Умова-Пойтинга.

$$w = \vec{E}\vec{D}/2 + \vec{H}\vec{B}/2.$$

Учитывая равенства $\vec{D} = -\left[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}\right], \vec{B} = \left[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}\right]$, имеем

$$w = -\vec{E}\left[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}\right]/2 + \vec{H}\left[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}\right]/2 = \vec{H}\left[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}\right] = \frac{\vec{k}}{\omega} [\vec{E}, \vec{H}].$$

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – вектор Умова-Пойтинга, $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$,

$$|\vec{S}| = \frac{\omega}{k} w = v w = |\text{для вакуума}| = c w.$$

Строгий вывод:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\infty} \vec{j} \vec{E} dV = \int_{\infty} (\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \vec{E} dV = |\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = \text{rot } \vec{E} * \vec{H} - \text{rot } \vec{H} * \vec{E}| = \\ &= \int_{\infty} (\underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} * \vec{H} - \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{E}) dV = - \int_{\infty} \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] dV + \int_{\infty} (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{E}) dV = \\ &= |\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}; \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}| = - \int_{S_{R \rightarrow \infty}} \underbrace{[\vec{E}, \vec{H}]}_{\vec{S}} d\vec{\sigma} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty} (\underbrace{\frac{\vec{H}\vec{B}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}}_w) dV; \\ &\frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty} w dV = -P - \int_{S_{R \rightarrow \infty}} \underbrace{[\vec{E}, \vec{H}]}_{\vec{S}} d\vec{\sigma}; \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – поток энергии электромагнитного поля.

Электромагнитные волны обнаружены Генрихом Герцем в 1888 году с помощью вибратора Герца.

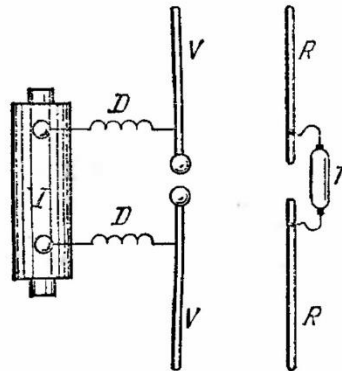


Рисунок 21.9. Индуктор.

21.5. Излучение электромагнитных волн элементарным диполем.

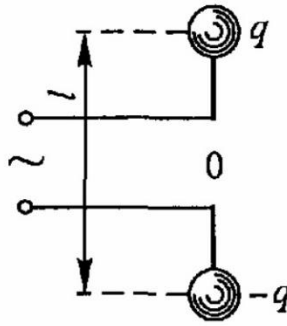


Рисунок 21.10. Элементарный диполь.

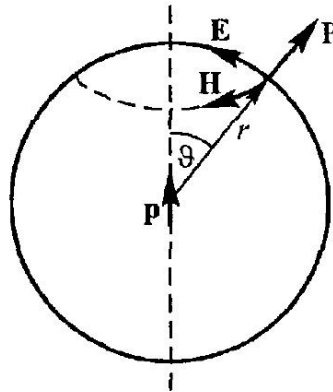


Рисунок 21.11. Векторная диаграмма.

$$p = p_0 \sin \omega t, \text{ где } p_0 = q_0 l;$$

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t, \quad p_0 = I_0 l / \omega.$$

При $r \gg \lambda$ – волновая зона, поле равно

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin \vartheta}{c^2 r},$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E.$$

Для гармонических колебаний

$$\ddot{p}(t - r/c) = -p_0 \omega^2 \sin[\omega(t - r/c)].$$

$$S = EH = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin[\omega(t - r/c)]; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle S \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{1}{2}.$$

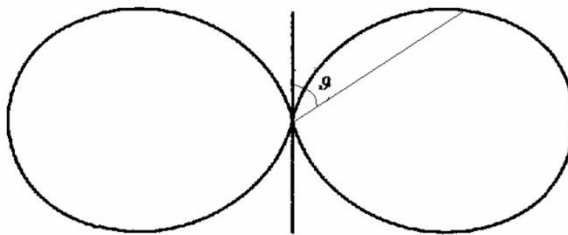


Рисунок 21.12. Диаграмма направленности излучения.

$$dW_{\text{изл}} = \int_{S_r} S d\sigma = \int_{S_r} S 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{12\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{\varepsilon_0 c^3}.$$

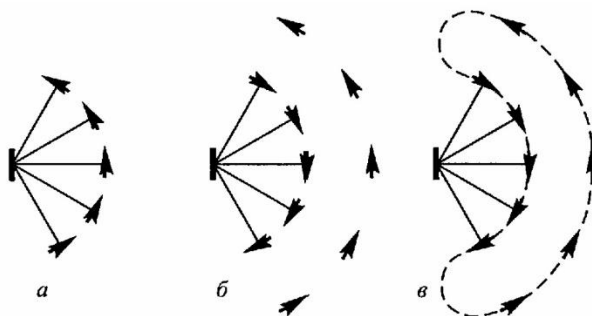


Рисунок 21.13. Форма линий напряженности поля излучающего диполя.

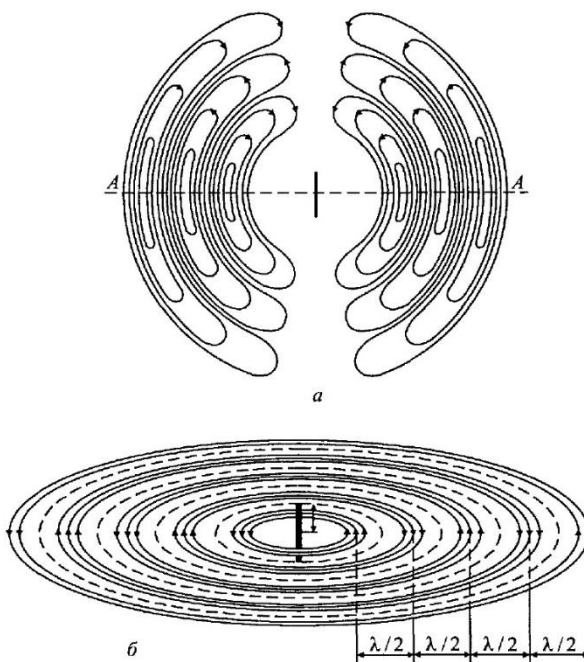


Рисунок 21.14. Линии напряженности (а) и индукции (б) в шаровой электромагнитной волне диполя.

21.6. Поле стоячей электромагнитной волны.

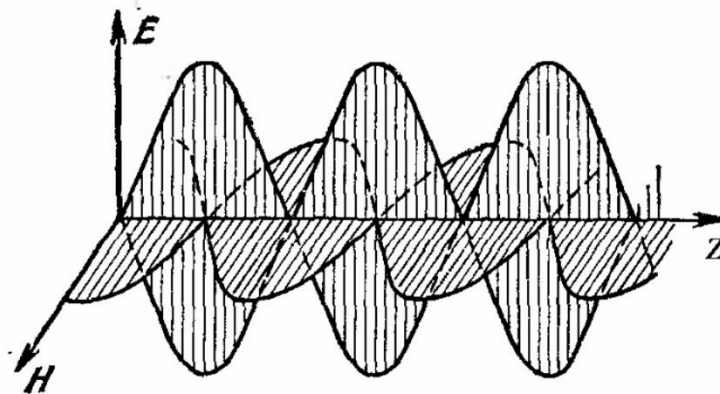


Рисунок 21.15. Электромагнитная волна.

Если электромагнитная волна плоско распространяется вдоль оси Z , отражается и складывается с точно такой же волной, тогда

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - kz), & H_y &= H_0 \cos(\omega t - kz), \\ E_x &= E_0 \cos(\omega t + kz), & H_y &= H_0 \cos(\omega t + kz). \end{aligned} \right| +$$

$$E_x = 2E_0 \cos kz \cos \omega t, \quad H_y = 2H_0 \sin kz \sin \omega t.$$

Лекция 22.

22.1. Опыты Толмена и Стюарта (1916г.). Основные положения классической электронной теории проводимости Друде-Лоренца.

Рассмотрим опыт Толмена и Стюарта.

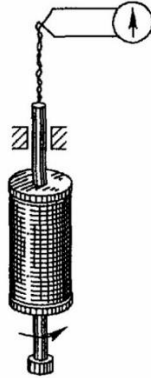


Рисунок 22.1. Схема опыта Толмена и Стюарта.

$$F_{\text{и}} = -m \frac{dv}{dt}; \quad E_{\text{стоп.}} = \frac{F_{\text{и}}}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt},$$

$$\mathcal{E} = \int_L E_{\text{стоп.}} dl = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} L, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} \frac{L}{R}.$$

$$q = \int_{I_0}^0 I dt = \frac{m}{e} \frac{L}{R} v_0.$$

Основные положения классической электронной теории проводимости Друде-Лоренца.

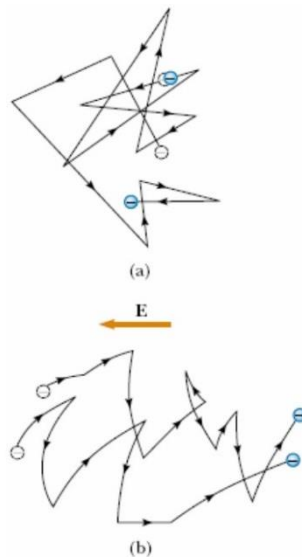


Рисунок 22.2. Хаотическое движение электронов.

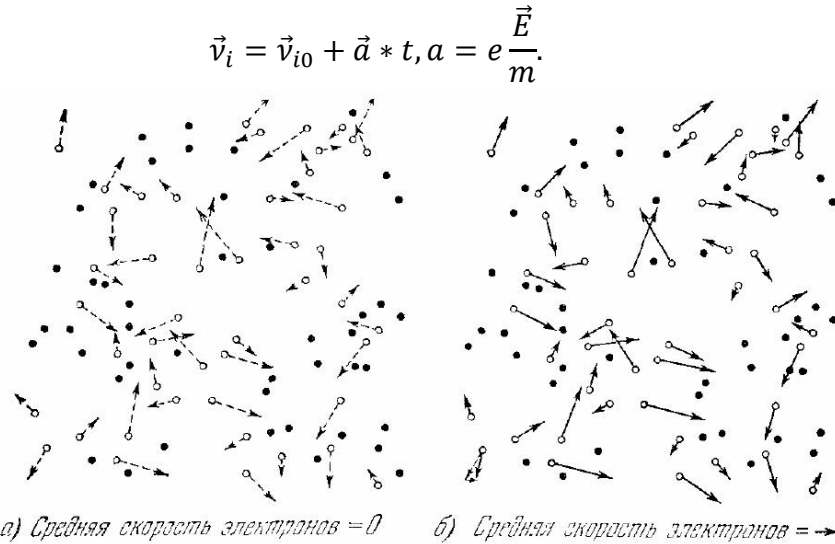


Рисунок 22.3. Движение при выключенном и включённом электронном поле.

$$J = en \langle \vec{v} \rangle, \text{ где } \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(2\vec{v}_{i0} + \frac{e\vec{E}}{m} t_i \right).$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \vec{v}_{i0} = 0, \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{e\vec{E}}{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{e\vec{E}}{2m} \tau.$$

22.2. Законы Ома и Джоуля-Ленца. Закон Видемана-Франца в классической теории.

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i t_i - \text{среднее время между соударениями.}$$

Здесь n_j – число частиц из n , имеющих время между столкновениями t_i .

$$\vec{J} = en \langle \vec{v} \rangle = en \frac{e\vec{E}}{2m} \tau = \frac{ne^2\tau}{2m} \vec{E} = \lambda \vec{E} - \text{закон Ома.}$$

Пусть n_i – число частиц в ед. объема, имеющие время между столкновениями t_i .

Энергия приобретаемая этими частицами за время t_i равна

$$\sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{m(\vec{v}_{i0} + \Delta\vec{v}_i)^2}{2} - \frac{m\vec{v}_{i0}^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{m}{2} \left(\vec{v}_{i0}^2 + \underbrace{2\vec{v}_{i0} * \Delta\vec{v}_i}_{=0} + \Delta\vec{v}_i^2 \right) - \frac{m\vec{v}_{i0}^2}{2} \right) =$$

$$= n_i \frac{m e^2 E^2 t_i^2}{2 m^2}.$$

Эта энергия в результате столкновения с ионами переходит в тепло. За ед. времени число столкновений с ионами таких частиц равно $1/t_i$. Следовательно, энергия приобретенная частицами за 1с равна

$$\frac{n_i m \Delta v_i^2}{t_i} = \frac{m e^2 E^2 n_i t_i}{2 m^2} = \frac{e^2 E^2}{m} n_i t_i.$$

Энергия приобретаемая от электрического поля всеми электронами в единице объема за 1с и переходящая в тепло в результате столкновений с ионами будет равна

$$Q = \sum_i \frac{e^2 E^2}{m} n_i t_i = \frac{n e^2 E^2}{2m} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_i n_i t_i}_{\tau} = \frac{n e^2 E^2}{2m} \tau = \lambda E^2 - \text{закон Джоуля Ленца.}$$

В 1853 году Видеман и Франц установили, что для металлов $\chi/\lambda = aT$, где постоянная a не зависит от рода металла. То есть металлы, имеющие большую электропроводность, имеют и большую теплопроводность. Классическая электронная теория Друде-Лоренца объясняет этот феноменологический закон.

$$\vec{j}_Q = -\chi \nabla T,$$

где $\chi = n c_v v_T < l > / 3$, где $< l > = v_T \tau$, $c_v = 3k_B/2$ – теплоемкость, приходящая на один электрон.

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{n c_v v_T^2 \tau / 3}{n e^2 \tau / 2m} = \frac{2 m v_T^2}{3 e^2} c_v = \left| v_T^2 = \frac{3 k_B T}{m} \right| = 3 \frac{k_B^2}{e^2} T = aT.$$

22.3. Трудности классической электронной теории.

$$1) \rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{n e^2} \frac{1}{\tau} = \frac{2m}{n e^2} \frac{v_T}{< l >} = \frac{2m}{n e^2} \frac{\sqrt{3 k_B T / m}}{\sqrt{2} n \sigma} \sim \sqrt{T}, \text{ а не } \sim T (\rho = \rho_0 (1 + \alpha T)).$$

$$2) U = i \frac{k_B T}{2} N, C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = i \frac{k_B}{2} N, \text{ где } i = n_{\text{пос}} + n_{\text{вр}} + 2n_{\text{кол}}.$$

$$C_v = C_v \text{ ионов} + C_v \text{ электронов} = 2 * 3 \frac{k_B}{2} N + 3 \frac{k_B}{2} N = 4,5 k_B N.$$

Экспериментальное значение: $C_v = 3 k_B N$.

3) Экспериментальные значения для средняя длина свободного пробега $< l >$ составляет десятки периодов кристаллической решетки.

4) Значение эффективной массы электрона проводимости в металле, полученное на основании данных циклотронного резонанса оказалось меньше массы свободного электрона.

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m^*} B,$$

где $m^* = m_e$.

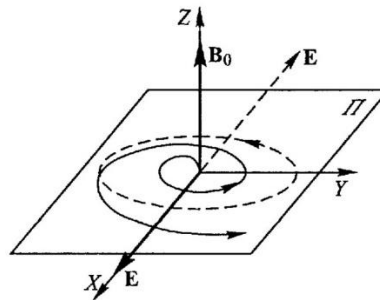


Рисунок 22.4. Металлическая пластинка.

Поведение электронов в металлах подчиняются законам квантовой или волновой механики. Движение электронов подобно волновому движению материи и описывается волновой функцией, определяемой квантовомеханическим уравнением Шредингера. Рассмотрим основные особенности квантовомеханических систем.

Энергетический спектр атома водорода.

W_n , где $n = 1, 2, 3, \dots$

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^2 dV.$$

$$\Psi_n(x, y, z, t) = \Psi_{n,l,m,s}.$$

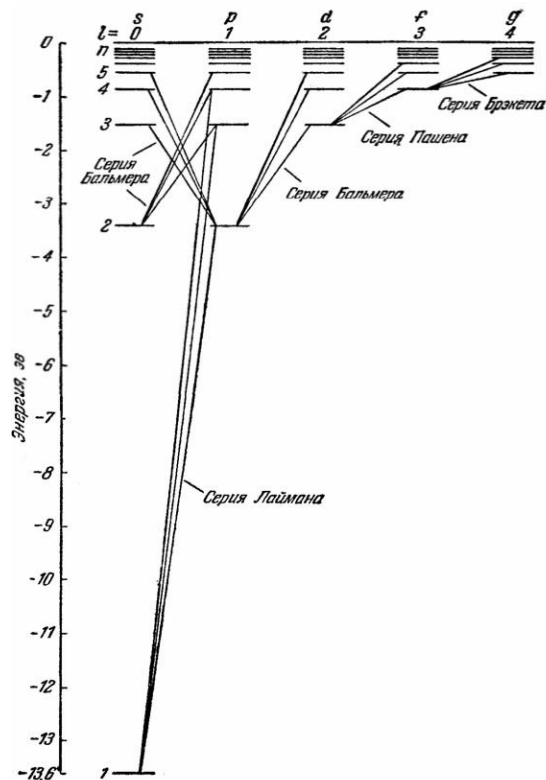


Рисунок 22.5. Энергетический спектр атома водорода.

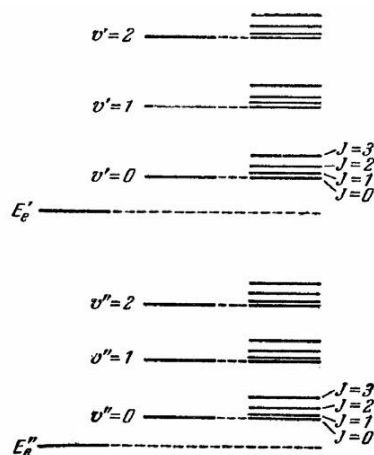


Рисунок 22.6. Энергетический спектр молекул.

22.4. Понятие о зонной теории твердых тел. Энергетические уровни и формирование энергетических зон.

В кристалле взаимодействие молекул приводит к очень большому числу расщепления уровней и образует целую энергетическую зону.

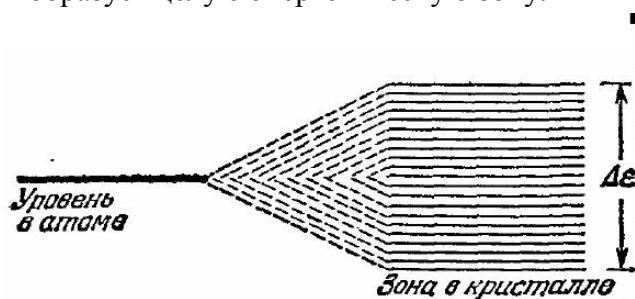


Рисунок 22.7. Энергетическая зона.

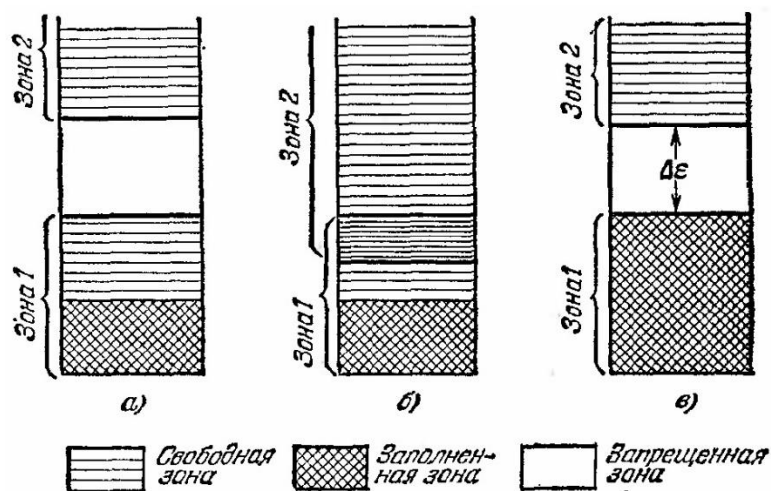


Рисунок 22.8. Зоны.

В рамках зонной теории объясняется проводимость вещества.

Принцип Паули. Статистика Ферми-Дирака.

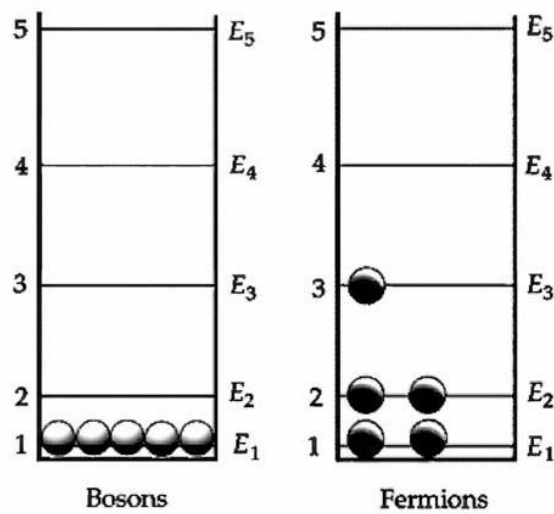


Рисунок 22.9. Фермионы и бозоны.

Число частиц в ед. объема, имеющих импульс в интервале $p_x, p_x + dp_x; p_y, p_y + dp_y; p_z, p_z + dp_z$, равно $dn = f(W)dp_x dp_y dp_z$, где $f(W) = Ae^{-\frac{W}{k_B T}}$ — плотность распределения частиц по импульсам.

В квантовой статистике число микросостояний конечно

$$dZ = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3}; \Rightarrow dn = f(W)dZ,$$

Где для ферми частиц

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp[(W - F)/k_B T]} \text{ — распределение Ферми — Дирака.}$$

Если $\frac{(W-F)}{k_B T} \gg 1$, то $f(W) = \underbrace{e^{\frac{F}{k_B T}}}_A e^{-\frac{W}{k_B T}}$

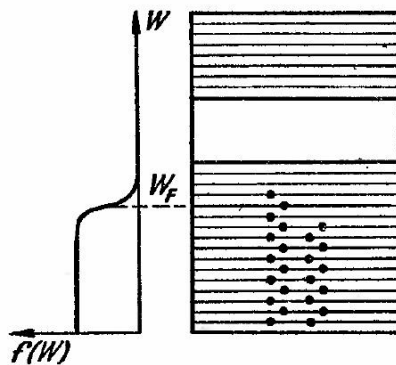


Рисунок 22.10. Энергетические уровни в кристалле.

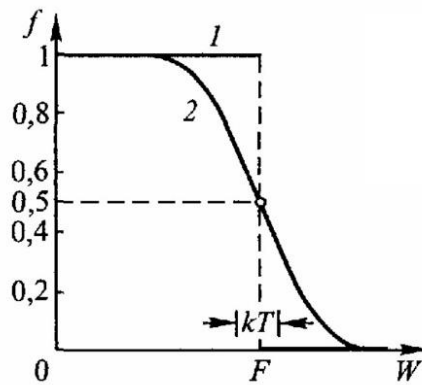


Рисунок 22.11. Функция Ферми-Дирака 1 – $T = 0$, 2 – $T \neq 0$.

Величина называется энергия Ферми. С точки зрения термодинамики имеет смысл химического потенциала

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}$$

В металлах $F = (1 - 6)\text{эВ}$.

При комнатной температуре $k_B T = 0,03\text{эВ}$.

Для меди $\frac{k_B T}{F} = 0,004$.

Число электронов участвующих в тепловом движении мало, поэтому $C_v = 3k_B N$.

$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{ne^2} \frac{v_T}{\langle l \rangle}; \quad v_T = v_F, \text{ где } F = mv_F^2/2, \quad \frac{1}{\langle l \rangle} = \frac{1}{l_{\text{фл}}} + \frac{1}{l_{\text{пр}}};$$

$$\frac{1}{l_{\text{фл}}} \sim T, l_{\text{пр}} = \text{const}; \Rightarrow \rho = \rho_0 + \alpha T.$$

22.5. Особенности зонной структуры диэлектриков, полупроводников и металлов. Объяснение проводимости твердых тел с помощью зонной теории.

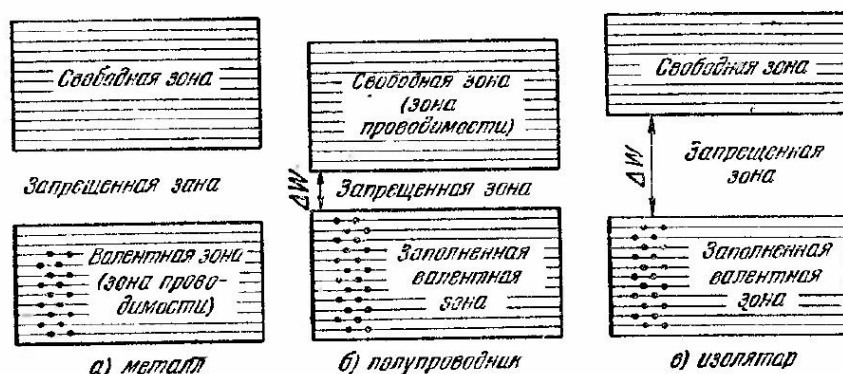


Рисунок 22.13. Запрещенные зоны металла, полупроводника и изолятора.

Происхождение эффективной массы электронов.

$$W = U + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = W(\vec{p}).$$

В металле вблизи дна зоны проводимости (p отсчитывается от p_c)

$$W = W(\vec{p}) = W\left(\vec{p} - \vec{p}_c\right) + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2}}_{1/m_x^*} p_x^2 + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial p_y^2}}_{1/m_y^*} p_y^2 + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial p_z^2}}_{1/m_z^*} p_z^2 + \dots$$

Объяснение закона Видемана-Франца в рамках квантовых представлений.

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{2}{3} \frac{m v_T^2}{e^2} c_V, \text{ где } \frac{m v_T^2}{2} = F, c_V = \frac{12}{5} k_B \frac{k_B T}{F},$$

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{4}{3} \frac{m v_T^2 / 2}{e^2} c_V = \frac{4}{3} \frac{F}{e^2} \frac{12}{5} k_B \frac{k_B T}{F} = \frac{16}{5} \frac{k_B^2}{e^2} T.$$

a

Лекция 23.

23.1. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников.

Рассмотрим зоны проводников.

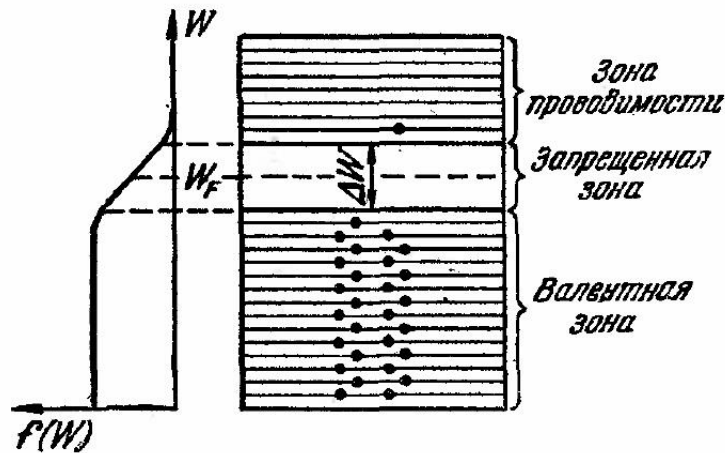


Рисунок 23.1. Зоны проводников.

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp[(W - F)/k_B T]} \approx e^{-\frac{\Delta W}{k_B T}},$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\Delta W}{k_B T}}.$$

Собственная проводимость полупроводников

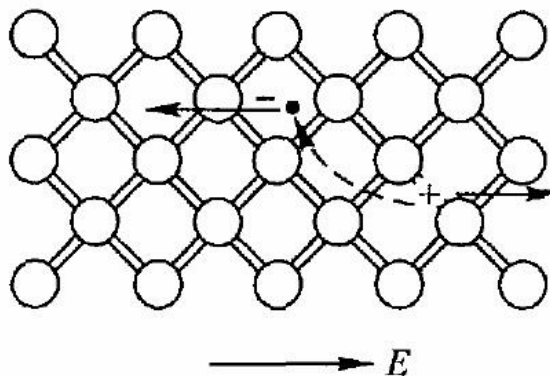


Рисунок 23.2. Возникновение электрона проводимости и дырки в решетке кремния.

В проводнике имеются два типа проводимости, одна – электронная проводимость, обусловленная свободными электронами, а другая – дырками, то есть незанятыми связями отделившегося электрона от соответствующего атома.

Примесная проводимость полупроводников.

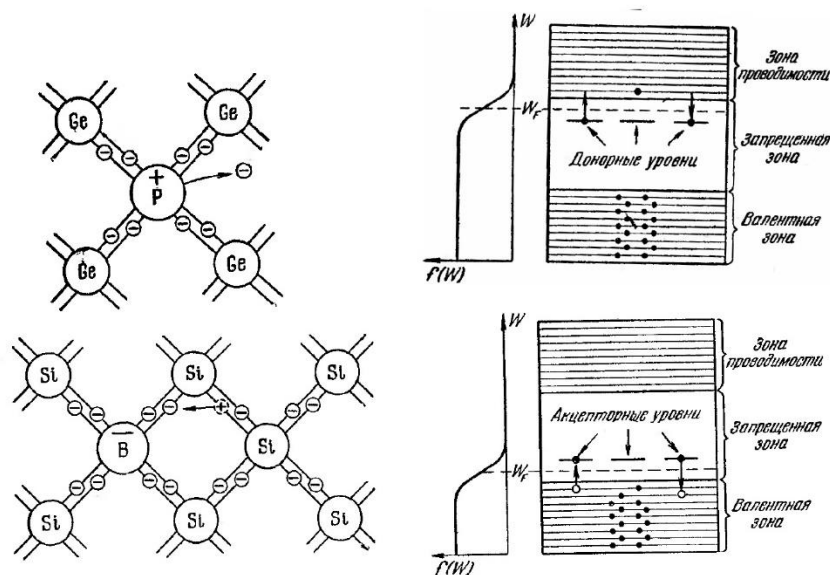


Рисунок 23.3. Проводники p- и n-типа.

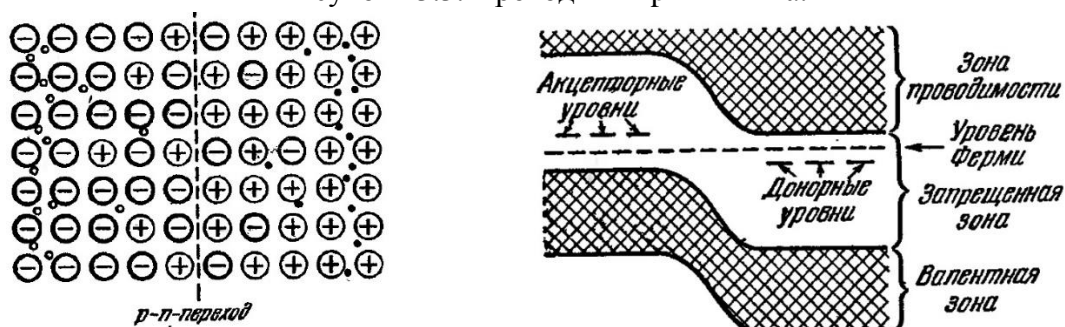


Рисунок 23.4. p-n переход.

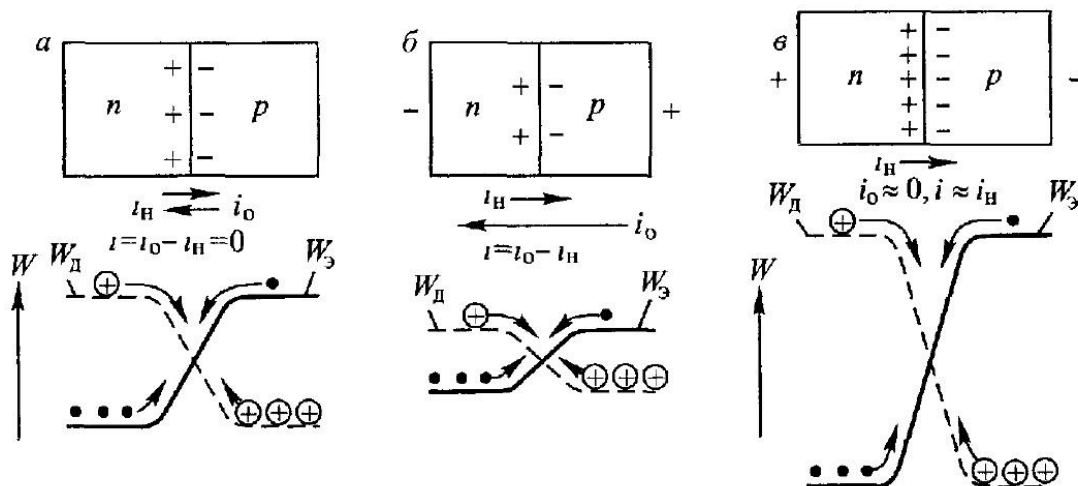


Рисунок 23.5. Электрический ток в p-n переходе.

Применение полупроводников. Полупроводниковый диод.

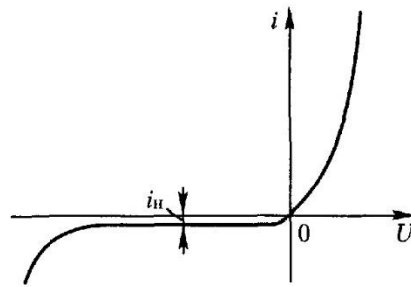


Рисунок 23.6. Вольт-амперная характеристика p-n перехода.

$$i = i_s (e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1)$$

Применение полупроводников. Биполярные и полевые транзисторы.

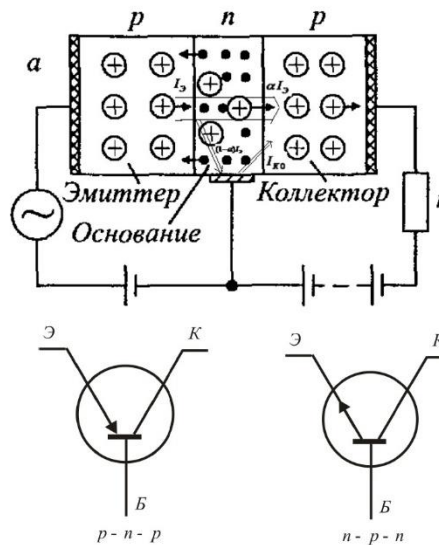


Рисунок 23.7. Биполярный транзистор.

$$I_K = I_{K0} + \alpha I_E \approx \alpha I_E$$

$$\frac{I_K}{I_{ЭБ}} \approx \frac{\alpha}{1-\alpha} - \text{коэффициент усиления по току}$$

$$\alpha = 0,98 - 0,99.$$

23.2. Контактные явления. Контактная разность потенциалов.

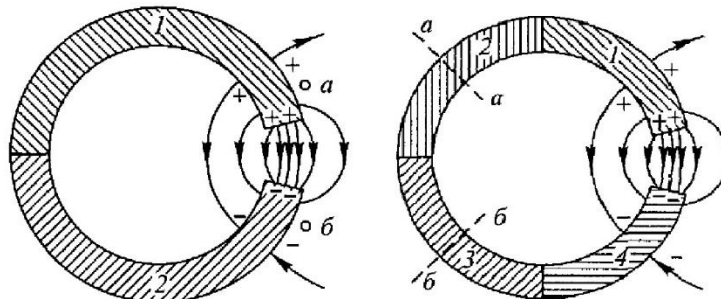


Рисунок 23.8. Соединение двух и четырех проводников.

При соприкосновении двух различных металлов во внешнем пространстве появляется электрическое поле, а на поверхности металлов возникают заряды.

При соединении нескольких проводников (1,2,3,4) электрическое поле между свободными концами цепи определяется только крайними проводниками (1 и 4).

$$U_{12} = U_1 - U_2, \quad eU_{12} = \Phi_1 - \Phi_2,$$

Где Φ_1 и Φ_2 – работы выхода.

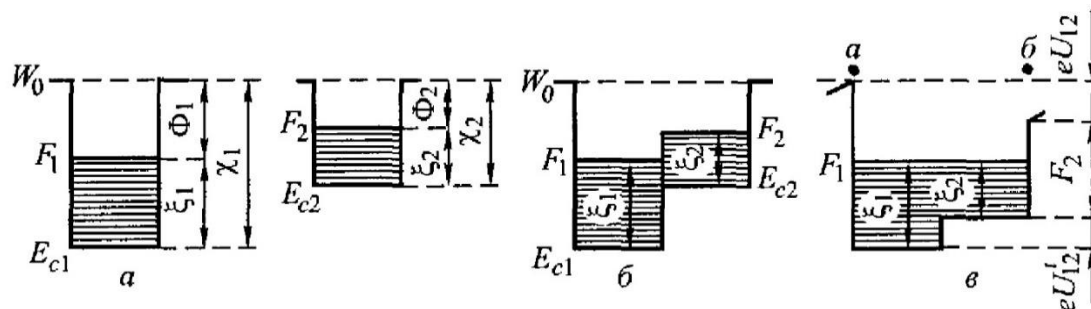


Рисунок 23.9. Энергетическая диаграмма двух металлов.

А – контакта нет; Б – контакт есть, но нет равновесия; В – равновесие.

Здесь W_0 – энергия покоящегося электрона в вакууме,

$\chi_1 = W_0 - E_{c1}$ и $\chi_2 = W_0 - E_{c2}$ – глубина потенциальных ям (электронное сродство данного вещества).

$F - E_c = \xi$ – химический потенциал электронов.

$$\Phi_1 = W_0 - F_1 = \chi_1 - \xi_1, \quad \Phi_2 = W_0 - F_2 = \chi_2 - \xi_2,$$

$$-eU_1 - (-eU_2) = (\chi_1 - \xi_1) - (\chi_2 - \xi_2) = \Phi_1 - \Phi_2.$$

$$eU_{12}^i = e(\varphi_1 - \varphi_2) = \xi_1 - \xi_2.$$

23.3. Термоэлектричество (явление Зеебека 1821г.). Термодвижущая сила.

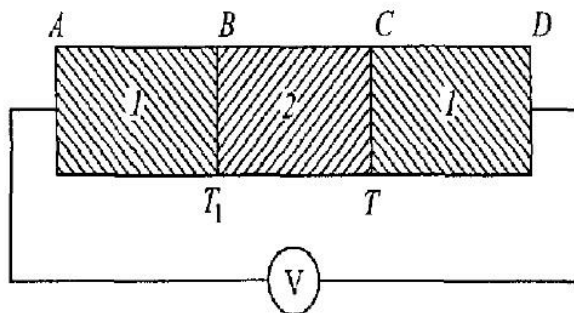


Рисунок 23.10. Два контакта.

$$\Delta \mathcal{E} = (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T.$$

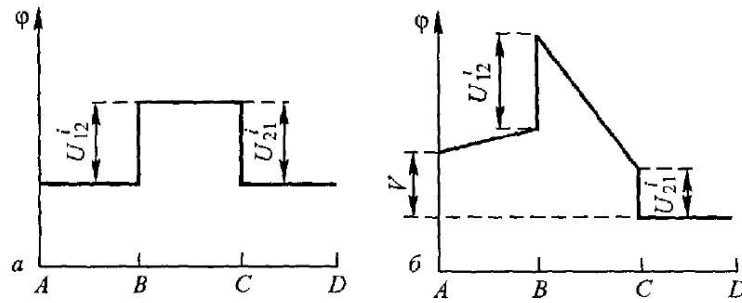


Рисунок 23.11. Распределение потенциала в цепи при $T_1 = T$ (а) и при $T_1 > T$ (б).

$\Delta \mathcal{E}_i = \alpha_i \Delta T$ – термо-ЭДС каждого проводника.

$\alpha = d\mathcal{E}/dT$ – дифференциальная термо-ЭДС, (коэффициент термо-ЭДС).

$$\mathcal{E} = \int_{T_2}^{T_1} (\alpha_1 - \alpha_2) dT; \Rightarrow \mathcal{E}(\alpha_1 - \alpha_2)(T_1 - T_2).$$

Термопары.

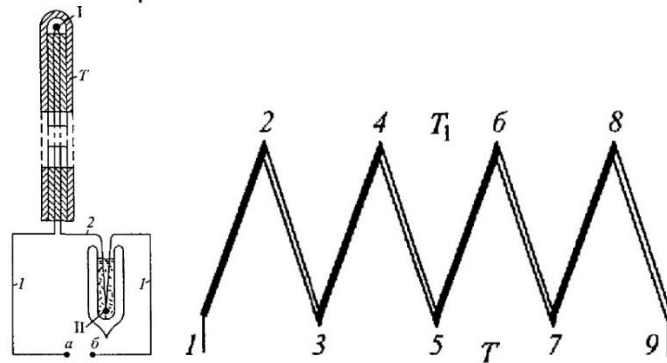


Рисунок 23.12. Схема устройства и включения термопары и схема батареи.

23.4. Эффект Пельтье. Явление Томсона.

Рассмотрим эффект Пельтье.

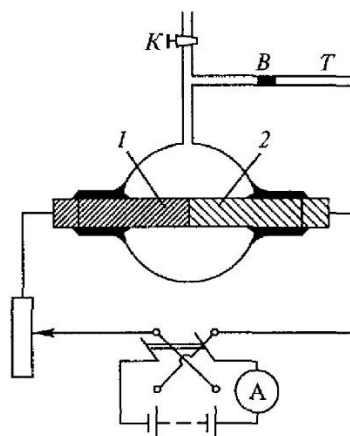


Рисунок 23.13. Наблюдение эффекта Пельтье.

$$Q_{\Pi} = \Pi_q = \Pi it.$$

$$P = -\frac{j}{e}(\bar{W}_k - e\varphi), \text{ где } N = \frac{j}{e};$$

$$Q_{\Pi} = (P_1 - P_2)St = \frac{1}{\rho}[(\bar{W}_{k2} - \bar{W}_{k1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)]it,$$

$$\Pi_{12} = \frac{1}{e}[(\bar{W}_{k2} - \bar{W}_{k1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Для невырожденного электронного газа

$$\bar{W}_{k1} = \bar{W}_{k2}; \Rightarrow \Pi_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) = U_{12}^i.$$

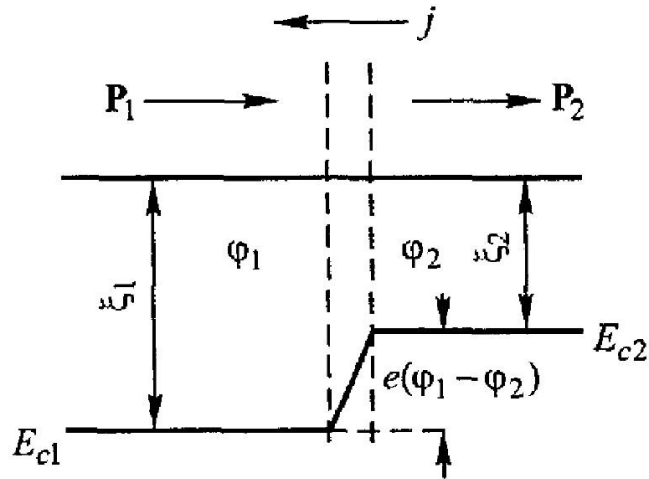


Рисунок 23.14. К определению тепла Пельтье для двух металлов при $T=0$.

Для вырожденного электронного газа при $T = 0$

$$\bar{W}_{k1} = F - E_{c1} = \xi_1,$$

$$\bar{W}_{k2} = F - E_{c2} = \xi_2.$$

Но $e(\varphi_1 - \varphi_2) = \xi_1 - \xi_2$, поэтому $\Pi_{12} = e^{-1}[(\xi_2 - \xi_1) + (\xi_1 - \xi_2)] = 0$.

Если $T \neq 0$, то $\Pi_{12} \neq 0$.

Явление Томсона.

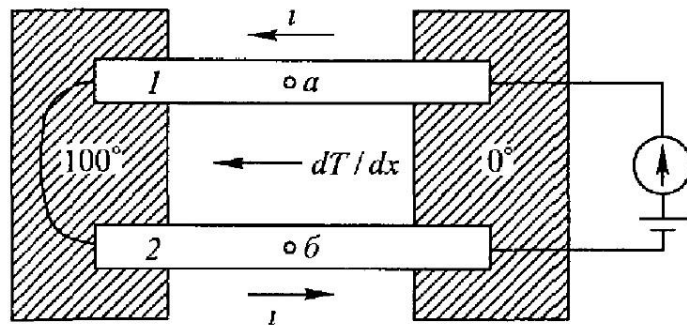


Рисунок 23.15. Наблюдение эффекта Томпсона.

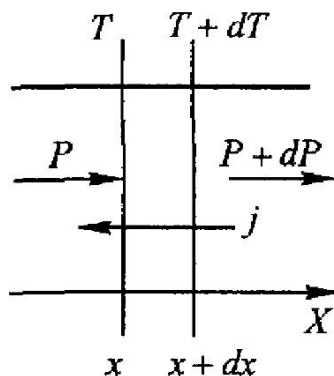


Рисунок 23.16. К объяснению тепла Томпсона.

$\frac{Q_T}{\Delta V t} = \sigma \frac{dT}{dx} J$ – дифференциальная форма закона.

$Q_T = \sigma \Delta T i t$ – интегральная форма закона,

$$\frac{Q_T}{\Delta V t} = \frac{P(x) - P(x - dx)}{dx} = - \frac{dP(x)}{dx} = \frac{J}{e} \frac{d\bar{W}_k}{dx} - J \frac{d\varphi}{dx}.$$

$$\frac{d\bar{W}_k}{dx} = \frac{d\bar{W}_k}{dT} \frac{dT}{dx}; \Rightarrow \frac{Q_T}{\Delta V t} = \frac{J}{e} \frac{d\bar{W}_k}{dT} \frac{dT}{dx} + J E.$$

23.5. Сверхпроводимость. Основные свойства сверхпроводников.

Высокотемпературная сверхпроводимость.

Явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Переход вещества в сверхпроводящее состояние в отсутствии внешнего магнитного поля является фазовым переходом 2-го рода, в присутствии поля – 1-го рода. Наибольшие значения критической температуры (до 1986 года) было у соединений ниобия и германия 23,2 К.

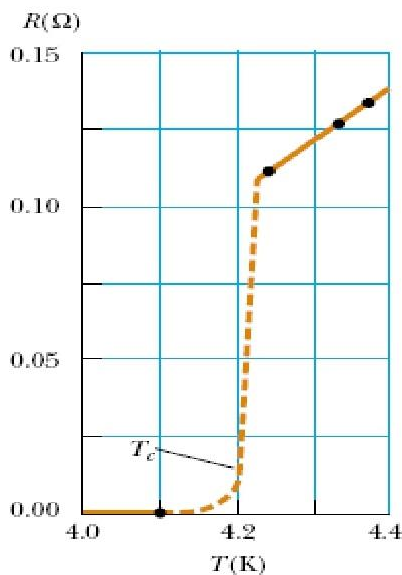


Table 27.3

Critical Temperatures for Various Superconductors	
Material	T_c (K)
HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	134
Tl-Ba-Ca-Cu-O	125
Bi-Sr-Ca-Cu-O	105
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92
Nb ₃ Ge	23.2
Nb ₃ Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

Рисунок 23.17. Критическая температура.

23.6. Магнитная индукция внутри сверхпроводника. Эффект Мейсснера. Критическое поле.

Рассмотрим эффект Мейсснера.

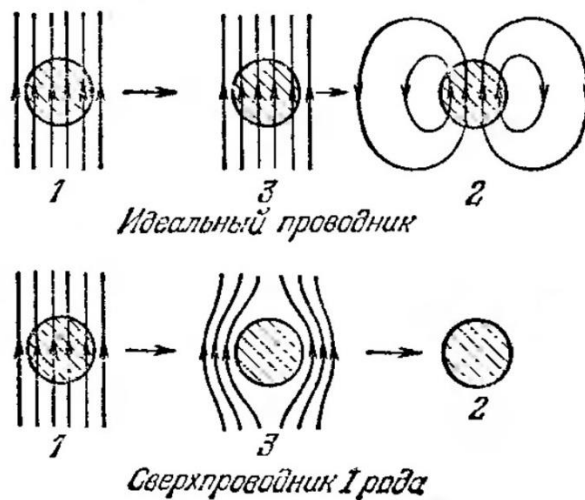


Рисунок 23.18. Эффект Мейсснера.

Сверхпроводник можно было бы рассматривать как идеальный диамагнетик. Тогда если поместить его в вещество и начать охлаждать, когда проводник перейдет в сверхпроводническое состояние магнитный поток должен оставаться тем же самым.

На самом деле при переходе в сверхпроводническое состояние проводник выталкивает магнитное поле. Выталкивание магнитного поля сверхпроводника называется эффектом Мейсснера.

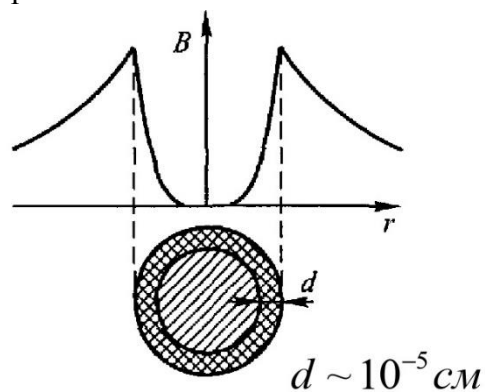


Рисунок 23.19. Магнитная индукция прямого провода в сверхпроводящем состоянии.

Укажем для примера, что у олова при 1 К $H_{кр}$ составляет около $2 \cdot 10^4$ А/м. Поэтому для оловянной проволоки диаметром $2a = 3$ мм критическая сила тока при этой температуре равна

$$i_{кр} = 2\pi a H_{кр} = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 180 \text{ А.}$$

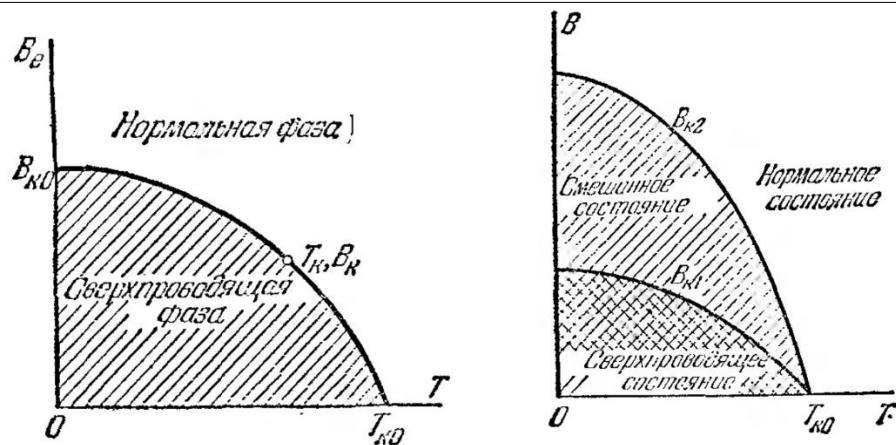


Рисунок 23.20. Сверхпроводники 1 и 2 рода.

Если фактор формы $\beta \neq 0$, то образец сверхпроводника первого рода переходит в нормальное состояние частями (доменами). Сверхпроводники 1-го рода с положительной поверхностной энергией, 2-го рода - с отрицательной.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ