



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

СТЕПАНЬЯНЦ
КОНСТАНТИН ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Степаньянц Константин Викторович

Конспект лекций
Электродинамика

Конспект выполнен студентами физического факультета

Головко Полиной Валерьевной,
Карпачевой Анной Александровной,
Емельяновой Анастасией Романовной,
Ханейчук Олесей

Содержание

1 Лекция 1. Используемая система единиц	9
1.1 Закон Кулона и введение системы единиц СГСЭ	9
1.2 Система единиц СГСМ и гауссова система единиц	11
1.3 Напряженность электрического поля	11
1.4 Закон Био–Савара–Лапласа в системе СИ	12
1.5 Индукция магнитного поля. Закон Био–Савара–Лапласа и сила Лорен- ца в гауссовой системе	15
1.6 Плотность тока	18
1.7 Единицы измерения электрического и магнитного полей в гауссовой системе	19
1.8 Некоторые характерные значения полей \vec{E} и \vec{H} , встречающиеся в природе	20
2 Лекция 2. Уравнения Максвелла и их экспериментальное обосно- вание	23
2.1 Теорема Гаусса для электрического поля	23
2.2 Теорема о циркуляции магнитного поля. Случай бесконечно длинного прямого тонкого провода с постоянным током	29
2.3 Вывод уравнения Максвелла для $rot \vec{H}$ в общем случае. Отсутствие маг- нитных зарядов. Уравнение непрерывности для тока	33
2.4 Закон электромагнитной индукции Фарадея и соответствующее урав- нение Максвелла для $rot \vec{E}$	38
3 Лекция 3. Потенциалы электромагнитного поля. Заряженная ча- стица в электромагнитном поле	42
3.1 Потенциалы электромагнитного поля	42
3.1.1 Введение потенциалов электромагнитного поля.	42
3.1.2 Неоднозначность определения электромагнитных потенциалов .	43
3.1.3 Уравнения Максвелла с источниками в терминах потенциалов \vec{A} и ϕ	44
3.1.4 Калибровка Лоренца и калибровка Кулона	45
3.2 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	46
3.2.1 Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнит- ном поле	47

3.2.2	Обобщенные импульс и энергия заряженной частицы в электромагнитном поле	50
4	Лекция 4. Энергия и импульс электромагнитного поля	52
4.1	Закон сохранения энергии для заряженной частицы в электромагнитном поле	52
4.2	Закон сохранения импульса для заряженной частицы в электромагнитном поле	57
5	Лекция 5. Электростатика. Уравнение Пуассона	63
5.1	Определение $\vec{E}(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$ с помощью теоремы Гаусса для электрического поля в некоторых простейших случаях	63
5.2	Уравнение Пуассона и его решение	72
5.3	Пример задачи на определение $\varphi(\vec{r})$ и $\vec{E}(\vec{r})$ с использованием общего вида потенциала как решения уравнения Пуассона	79
6	Лекция 6. Мультипольное разложение в низших порядках	83
6.1	Мультипольное разложение	83
6.2	Случаи возникновения дипольного момента	85
6.3	Квадрупольное ведущее слагаемое в мультипольном разложении	86
6.4	Выражения для электрического поля	89
6.5	Общий вид мультипольного разложения	90
7	Лекция 7. Общий вид мультипольного разложения	92
7.1	Мультипольное разложение	92
7.2	Теорема сложения сферических функций	94
7.3	Сферические функции	95
7.4	Построение общей формы мультипольного разложения	96
7.5	Вычисление электрического поля по мультипольному разложению потенциала	98
8	Лекция 8. Система зарядов в электрическом поле	99
8.1	Сила, действующая на систему зарядов во внешнем электрическом поле	99
8.2	Момент силы, действующий на систему зарядов во внешнем электрическом поле	100
8.3	Сила и момент силы, действующие на диполь в поле точечного заряда	102

8.4	Энергия электростатического поля	103
9	Лекция 9. Магнитостатика	106
9.1	Теорема о циркуляции	106
9.2	Пример: поле внутри бесконечно длинного соленоида с током	108
9.3	Решение уравнений Максвелла	110
9.4	Пример (круговой ток, текущий по кольцу с радиусом R)	113
9.5	Мультипольное разложение в случае магнитостатики	114
10	Лекция 10. Мультипольное разложение в магнитостатике	116
10.1	Мультипольное разложение в случае магнитостатики (продолжение)	116
10.2	Пример: магнитный момент для тока, расположенного в плоскости	119
10.3	Общая структура мультипольного разложения в магнитостатике	122
11	Лекция 11. Сила и момент сил, действующие на систему токов в магнитном поле	124
11.1	Мультипольное разложение в случае магнитостатики (напоминание)	124
11.2	Мультипольное разложение по сферическим функциям	125
11.3	Сила, момент сил и энергия системы токов в магнитном поле	126
11.4	Энергия взаимодействия токов	130
12	Лекция 12. Ларморовская прецессия. Энергия взаимодействия токов	136
12.1	Ларморовская прецессия	136
12.2	Энергия взаимодействия токов	138
13	Лекция 13. Электромагнитные волны	146
13.1	Электромагнитные волны	146
13.2	Волновое решение уравнения Максвелла в вакууме	146
13.3	Поляризация электромагнитных волн	151
14	Лекция 14. Энергия и импульс электромагнитной волны. Поляризованный и естественный свет	158
14.1	Энергия и импульс электромагнитной волны	158
14.2	Суперпозиция плоских волн	160
14.3	Поляризованный, частично поляризованный и естественный свет	163

15 Лекция 15. Запаздывающие потенциалы	167
15.1 Поле движущихся зарядов	167
15.1.1 Запаздывающие потенциалы	167
16 Лекция 16. Потенциалы Лиенара-Вихерта. Мультипольное разложение	174
16.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта	174
16.2 Излучение	179
16.2.1 Мультипольное разложение и условие его применимости	179
17 Лекция 17. Электрическое дипольное излучение	183
17.1 Электрическое дипольное излучение	183
18 Лекция 18. Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение	196
19 Лекция 19. Излучение в высших порядках мультипольного разложения	203
19.1 Общая структура решений уравнений Максвелла в дальней зоне	211
20 Лекция 20. Тонкая линейная антенна	215
20.1 Тонкая линейная антенна	215
20.2 Полуволновой диполь Герца	221
21 Лекция 21. Излучение движущихся зарядов	224
21.1 Излучение движущегося заряда	224
21.2 Радиационное трение	229

Содержание

Лекция 22. Радиационное трение.....	231
Задача 1	232
Задача 2	234
Лекция 23. Рассеяние электромагнитных волн. Формула Томпсона	237
Рассеяние электромагнитных волн.....	237
Рассеяние электромагнитных волн на свободных зарядах.....	237
Рассеяние электромагнитных волн на свободных зарядах при линейной поляризации	240
Формула Клейна-Нишины.....	243
Лекция 24. Рассеяние на изотропном гармоническом осцилляторе. Цвет неба	244
Задача рассеяния электромагнитных волн.....	244
Физические приложения.....	247
Лекция 25. Инвариантность уравнений Максвелла относительно группы вращений ..251	
Инвариантность уравнений Максвелла относительно пространственных вращений	251
Частный случай (уравнения Максвелла, содержащие операцию дивергенции).....	253
Частный случай (уравнения Максвелла, содержащие операцию ротор)	254
Уравнения электродинамики в четырехмерном виде.....	255
Лекция 26. Уравнения электродинамики в четырехмерном виде	259
Симметрии уравнений Максвелла.....	259
Домашнее задание.....	261
Уравнения Максвелла, содержащие источники.....	261
Уравнения Максвелла, которые не содержат источники	263
Основные уравнения электродинамики в 4-мерном виде	265
Лекция 27. Инвариантность уравнений Максвелла относительно группы Лоренца.....	268
Максвелла относительно преобразования Лоренца.....	268
Симметрии уравнений Максвелла.....	268
Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца.....	270
Лекция 28. Преобразования Лоренца	275
Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразования Лоренца.....	275
Группа Лоренца	277
Преобразования Лоренца.....	277
Домашнее задание.....	282
Преобразования Лоренца (случай, когда скорость направлена произвольным образом)	283
Бесконечно малые преобразования Лоренца	285
Лекция 29. Специальная теория относительности Эйнштейна	286
Преобразования Лоренца.....	286
Пример	289
Преобразование скорости в релятивистском случае	289

Постоянство скорости света	291
Преобразование углов между векторами скоростей под действием преобразований Лоренца	293
Лекция 30. Преобразования Лоренца для полей и потенциалов	295
Преобразования потенциалов.....	295
Преобразования тока	296
Преобразования электрического поля.....	297
Преобразования магнитного поля	299
Инвариантность уравнений Максвелла.....	299
Преобразование частоты и волнового вектора электромагнитной волны. Эффект Доплера.	304
Лекция 31. Релятивистски инвариантная формулировка классической механики.....	307
Преобразование частоты и волнового вектора электромагнитной волны. Эффект Доплера. (продолжение).....	307
4-х векторы скорости и ускорения	309
Релятивистски инвариантная формулировка классической механики	314
Лекция 32. 4-х вектор силы. Сила радиационного трения в четырехмерном виде	318
Аналог второго закона Ньютона в 4-х мерном виде.....	318
Сила радиационного трения в 4-х мерном виде.....	322
Лекция 33. Лагранжева формулировка электродинамики с внешним источником.....	325
Действие для электродинамики.....	325
Уравнения Лагранжа в теории поля	327
Лекция 34. Сохранение тензора энергии-импульса	330

Лекция 1. Используемая система единиц

Закон Кулона и введение системы единиц СГСЭ

Согласно закону Кулона, сила $\vec{F}_{1,2}$, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , в системе единиц СИ записывается как

$$\vec{F}_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (1.1)$$

где константа $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ связана с электрической постоянной $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Кл}^2$ (диэлектрической проницаемостью вакуума) соотношением $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Сила $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , равна соответственно

$$\vec{F}_{2,1} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (1.2)$$

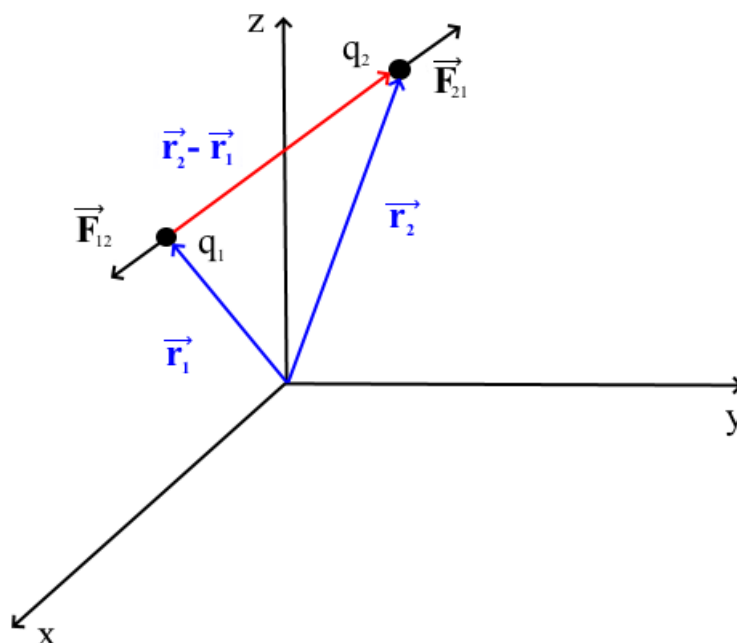


Рис. 1.1. Взаимодействие двух зарядов

Однако удобнее использовать другую систему единиц, в которой формула 1.1 записывалась бы без какого-либо коэффициента, т. е.:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (1.3)$$

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (1.4)$$

Именно так вводится система единиц СГСЭ, или так называемая электростатическая СГС. Аббревиатура СГС означает систему, основными единицами которой являются сантиметр, грамм и секунда, а размерности всех остальных физических величин выражаются как произведения степеней этих основных единиц. Поскольку постоянная k в формуле 1.1 — коэффициент размерный, а в системе СГСЭ на его месте стоит безразмерная единица, то размерности входящих в эту формулу физических величин в этой системе должны отличаться от их размерностей в СИ. Размерности силы и расстояния, как и всех величин, введенных в механике, во всех вариантах СГС совпадают с их размерностями в СИ, хотя единицы измерения могут иметь числовые переводные коэффициенты. Например, сила измеряется в *динах*: $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$. Единица заряда в СГС будет иметь другую размерность, которую легко определить по формуле 1.3, если учесть, что

$$1 \text{ Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{10^3 \cdot \text{г} \cdot 10^2 \cdot \text{см}}{\text{с}^2} = 10^5 \cdot \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{с}^2},$$

т. е.

$$1 \text{ дин} = 1 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{с}^2}.$$

Отсюда

$$1 \text{ СГСЭ-ед. заряда} = 1 \frac{\text{г}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{см}^{\frac{3}{2}}}{\text{с}}. \quad (1.5)$$

Попробуем понять, как перевести в СГСЭ-ед. заряда заряд, выраженный в кулонах. Соотношение 1.1 означает, что два заряда в 1 Кл, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют с силой, равной $9 \cdot 10^9 \text{ Н}$. Пусть $1 \text{ Кл} = x \cdot \text{СГСЭ-ед. заряда}$. Подставим это в соотношение 1.3 :

$$10^5 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ дин} = \frac{x^2 (\text{СГСЭ-ед. заряда})^2}{10^4 \text{ см}^2},$$

откуда

$$x = 3 \cdot 10^9$$

и, соответственно,

$$1\text{Кл} = 3 \cdot 10^9 \cdot \text{СГСЭ-ед. заряда.} \quad (1.6)$$

Соотношение 1.6 показывает, как правильно заменять заряд, выраженный в кулонах, при переходе к формулам, записанным в системе СГСЭ. Подстановка этого соотношения в формулы, записанные в СИ, очевидно, даст неправильные значения и размерности.

Система единиц СГСМ и гауссова система единиц

Существует также электромагнитная система единиц СГС, называемая СГСМ. Она построена так, чтобы без коэффициента записывался закон Био–Савара–Лапласа, определяющий силу взаимодействия между двумя элементами тока. Закон Кулона в ней, напротив, имеет размерный коэффициент. Мы будем использовать третий вариант СГС, систему единиц, которая называется симметричной СГС, или гауссовой СГС в честь немецкого математика и физика Карла Гаусса (1777–1855). В этой системе все электрические величины измеряются в тех же единицах, что и в системе СГСЭ, а магнитные — в тех же единицах, что в системе СГСМ. Для удобства будем называть эту систему просто СГС.

Напряженность электрического поля

Считается, что электрическое взаимодействие зарядов осуществляется посредством создаваемого ими электрического поля. Сила, действующая на заряд q , находящийся в электрическом поле, равна

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad (1.7)$$

где \vec{E} — напряженность внешнего электрического поля. Напряженность электрического поля в некоторой точке, создаваемая зарядом q , помещенным в начало координат, в системе СИ будет равна

$$\vec{E}_{\text{СИ}} = k \cdot \frac{q_{\text{СИ}} \vec{r}}{r^3}, \quad (1.8)$$

где \vec{r} — радиус-вектор рассматриваемой точки. В системе СГС, соответственно,

$$\vec{E}_{\text{СГС}} = \frac{q_{\text{СГС}} \vec{r}}{r^3}. \quad (1.9)$$

Единица измерения напряженности электрического поля в СГС, согласно формуле 1.7, будет выражаться через основные единицы следующим образом:

$$[E] = \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}}{\text{см}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{с}}. \quad (\text{СГС})$$

Закон Био–Савара–Лапласа в системе СИ

Магнитное взаимодействие двух бесконечно малых элементов тока подчиняется закону Био–Савара–Лапласа. Выделим элементы тока $I_1 \cdot d\vec{l}_1$ и $I_2 \cdot d\vec{l}_2$, по которым текут токи I_1 и I_2 , а элементы контуров $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ совпадают по направлению с направлениями текущих по ним токов и их положение определяется радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 соответственно (см. рис. 1.2).

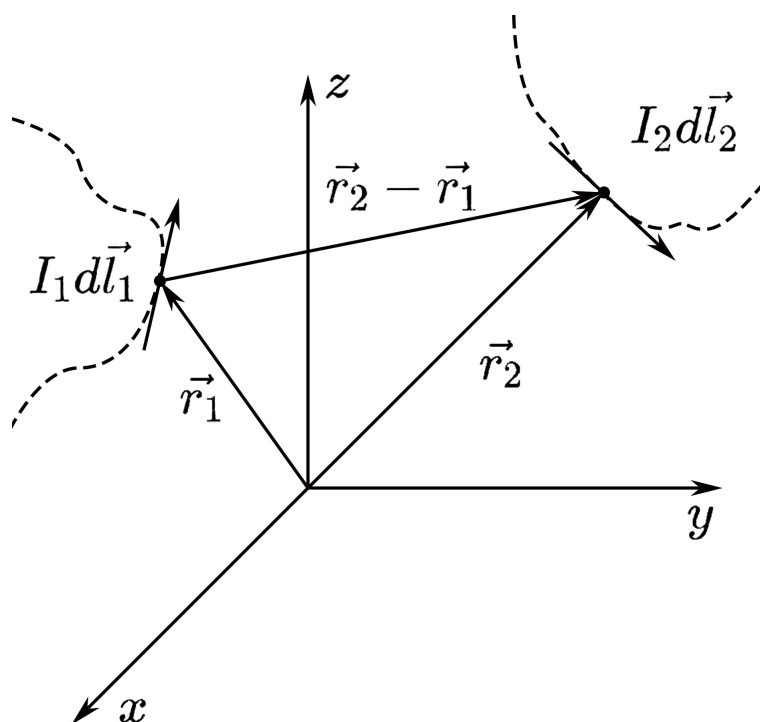


Рис. 1.2. Взаимодействие двух бесконечно малых элементов тока

Сила, действующая со стороны элемента тока $I_2 \cdot d\vec{l}_2$ на элемент тока $I_1 \cdot d\vec{l}_1$ в

системе СИ записывается как

$$d\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} I_1 I_2, \quad (1.10)$$

где $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{M}}$ — магнитная постоянная. Следует отметить, что изменения Международной системы единиц СИ, вступившие в силу в 2019 г., затронули определение ампера, а в связи с этим и значение μ_0 . Раньше ампер определялся на основании силы взаимодействия двух проводников с током, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{M}}$ считалась фиксированной величиной. После изменений 2019 г. фиксированной величиной, на основании которой определяется ампер, стал элементарный заряд

$$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \quad \text{Кл} = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \quad \text{А} \cdot \text{с}. \quad (1.11)$$

Постоянная μ_0 в силу этих изменений стала величиной, определяемой экспериментально и приобрела некоторую малую погрешность:

$$\frac{\mu_0}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1,00000000055(15). \quad (1.12)$$

Размерность магнитной постоянной μ_0 общепринято выражать через единицу индуктивности генри, однако используя, например, закон Био–Савара–Лапласа, можно записать ее как

$$[\mu_0] = \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{M}} = \frac{\text{H} \cdot \text{M}^3}{\text{A}^2 \cdot \text{M}^3} = \frac{\text{H} \cdot \text{с}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Вспоминая, что постоянная $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ имеет размерность $\frac{\text{H} \cdot \text{M}^2}{\text{Кл}^2}$, можно заметить, что отношение $\frac{k}{\mu_0}$ будет иметь размерность квадрата скорости. Действительно, величина

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{\text{H} \cdot \text{M}^2}{\text{Кл}^2} \cdot 10^7 \frac{\text{Кл}^2}{\text{H} \cdot \text{с}^2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{M}}{\text{с}} = c$$

есть ничто иное, как скорость света в вакууме.

Сила, действующая со стороны элемента тока $I_1 \cdot d\vec{l}_1$ на элемент тока $I_2 \cdot d\vec{l}_2$, равна соответственно

$$d\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} I_1 I_2. \quad (1.13)$$

Заметим, что в отличие от случая взаимодействия двух зарядов, для $d\vec{F}_{1,2}$ и $d\vec{F}_{2,1}$ в общем случае не выполняется третий закон Ньютона:

$$d\vec{F}_{1,2} \neq -d\vec{F}_{2,1}.$$

В случае, когда элементы тока параллельны друг другу (см. рис. 1.3), он справедлив, а когда они направлены произвольным образом (см. рис. 1.4) — нет.

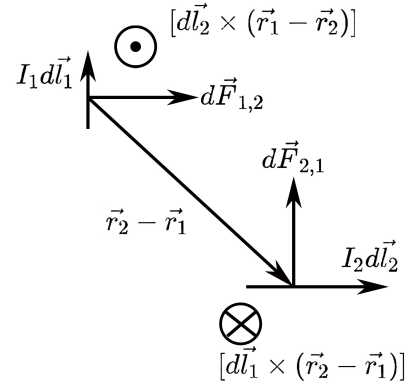
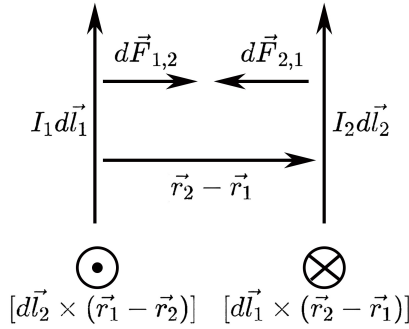


Рис. 1.3. Взаимодействие параллельных элементов тока

Рис. 1.4. Взаимодействие не параллельных элементов тока

Однако в природе отдельные элементы тока не существуют сами по себе, поскольку все токи являются замкнутыми. Пусть ток I_1 течет по контуру K_1 , а ток I_2 — по контуру K_2 . Выполнив интегрирование по обоим контурам для элементов $d\vec{F}_{1,2}$ и $d\vec{F}_{2,1}$, получим силы, с которыми взаимодействуют контура K_1 и K_2 :

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{[d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (1.14)$$

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{[d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (1.15)$$

Можно преобразовать любое из выражений 1.14 или 1.15, воспользовавшись формулой двойного векторного произведения

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}), \quad (1.16)$$

а также равенством

$$\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (1.17)$$

где индекс “1” у оператора $\vec{\nabla}_1$ означает, что производные берутся по компонентам вектора r_1 . Тогда

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_2) - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) (d\vec{l}_1, d\vec{l}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (1.18)$$

Согласно теореме Стокса, первое слагаемое обращается в ноль, как ротор от градиента некоторой функции. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1, \vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_1} \oint_{K_2} d\vec{l}_2 \left(d\vec{l}_1, \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_2} \int_{S_1} d\vec{l}_2 \left(d\vec{S}, \text{rot}_1 \left(\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где S_1 — поверхность, ограничиваемая контуром K_1 . Остается второе слагаемое, которое очевидно изменит знак на противоположный при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$. Поэтому

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) (d\vec{l}_1, d\vec{l}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{2,1}. \quad (1.20)$$

Таким образом, для замкнутых контуров с током третий закон Ньютона справедлив.

Индукция магнитного поля. Закон Био–Савара–Лапласа и сила Лоренца в гауссовой системе

Электрические токи, так же как и электрические заряды, воздействуют друг на друга не напрямую. Согласно современным представлениям, один ток создает магнитное поле, которое действует на другой. Если поместить в начало координат элемент тока $I d\vec{l}$, то в точке с радиус-вектором \vec{r} он создаст магнитное поле

$$d\vec{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (1.21)$$

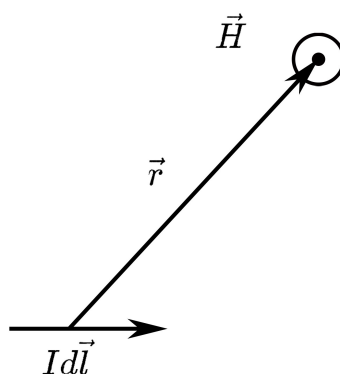


Рис. 1.5. Магнитное поле, создаваемое элементом тока $I\vec{dl}$

Если же элемент тока $I\vec{dl}$ находится во внешнем магнитном поле \vec{H} , то на него действует сила

$$d\vec{F} = I[\vec{dl}, \vec{H}]. \quad (1.22)$$

Очевидно, подстановка магнитного поля 1.21 в уравнение 1.22 в точности воспроизведет закон Био–Савара–Лапласа 1.10. Напомним, что все эти три формулы записаны в системе СИ. Сила, определяемая уравнением 1.22, в каком-то смысле является аналогом электрической силы $\vec{F} = q\vec{E}$. С помощью этих двух формул можно сравнить размерности (в системе СИ) напряженности электрического поля \vec{E} и индукции магнитного поля \vec{H} :

$$[I] \cdot [l] \cdot [\vec{H}] = [q] \cdot [\vec{E}];$$

$$\frac{[q]}{[t]} \cdot [l] \cdot [\vec{H}] = [q] \cdot [\vec{E}];$$

$$[\vec{E}] = [\vec{H}] \cdot \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Видно, что в системе СИ размерности электрического и магнитного полей отличаются на размерность скорости. Однако в дальнейшем мы убедимся, что эти поля имеют общую природу и потому желательно, чтобы их размерность была одинакова.

Вскоре мы сможем увидеть, что в гауссовой системе единиц это так и есть. Как говорилось ранее, все магнитные величины в ней имеют те же единицы измерения, что и в системе единиц СГСМ, а эта система введена так, чтобы взаимодействие двух токов 1.10 записывалось бы с коэффициентом, равным 1. Другими словами, в системе СГСМ за счет другого выбора единиц измерения тока в безразмерную единицу обращен присутствующий в системе СИ множитель $\frac{\mu_0}{4\pi}$. В то же время в системе СГСЭ за счет выбора единиц измерения заряда в безразмерную единицу обращен множитель $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Поскольку $I = \frac{dq}{dt}$ и время одинаково в обеих системах измеряется в секундах, единицы заряда (тока) в системах СГСЭ и СГСМ имеют переводной коэффициент $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{c}$:

$$q_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} \cdot q_{\text{СГСЭ}}. \quad (1.23)$$

Поскольку в гауссовой системе единиц электрические заряды (токи) выражаются в единицах СГСЭ, а величины магнитной природы — в единицах СГСМ, на каждый заряд или ток в этой системе появляется множитель $\frac{1}{c}$ во всех формулах, совмещающих магнитные величины и электрические. Соответственно формулы 1.21 и 1.22 в системе СГС будут выглядеть:

$$d\vec{H} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (1.24)$$

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [\vec{dl}, \vec{H}]. \quad (1.25)$$

Закон Био–Савара–Лапласа при переходе к системе единиц СГС изменится следующим образом:

$$d\vec{F}_{1,2} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \cdot \frac{[d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (1.26)$$

Сила 1.25 возникает потому, что магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы, а электрический ток представляет собой направленное движение заряженных частиц.

Важно знать выражение для силы, с которой магнитное поле \vec{H} действует на отдельную частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью \vec{v} . Из 1.25 легко получить

соответствующую формулу, приняв во внимание, что вектор \vec{dl} совпадает по направлению со скоростью заряженных частиц, а его модуль $|\vec{dl}|$ — это расстояние, которое частицы проходят за время dt , т. е. $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$. Тогда

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} I [\vec{dl}, \vec{H}] = \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} [\vec{dl}, \vec{H}] = \frac{dq}{c} \left[\frac{d\vec{l}}{dt}, \vec{H} \right] = \frac{dq}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (1.27)$$

На частицу с зарядом q , будет, соответственно, действовать сила

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (1.28)$$

Прибавив к ней силу $\vec{F} = q\vec{E}$, действующую со стороны электрического поля, получим

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right). \quad (1.29)$$

Формула 1.29 определяет в системе СГС силу Лоренца, т. е. силу, действующую на заряженную частицу в электромагнитном поле. Из этой формулы легко увидеть, что в системе СГС электрическое и магнитное поле действительно имеют одинаковую размерность, что делает эту систему единиц особенно удобной.

Плотность тока

Полезно ввести также вектор плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$, указывающий направление тока в каждой точке пространства. В общем случае электрический ток I связан с плотностью тока соотношением

$$I = \int_S (\vec{j}, \vec{dS}), \quad (1.30)$$

где интеграл берется по поверхности S , через которую проходит ток. Однако в практических задачах часто требуется рассмотреть участок проводника сечением S , как показано на рис. 1.6. Если ток распределен равномерно и в каждой точке перпендикулярен сечению, можно записать просто $I = jS$, где $j = |\vec{j}|$.

Пусть зараженные частицы движутся по проводнику со скоростью \vec{v} и имеют объемную плотность заряда ρ . Тогда за время dt через сечение S пройдет заряд $dq = \rho \cdot v dt \cdot S$. Приравнявая $\frac{dq}{dt} = jS$, получаем, что

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (1.31)$$

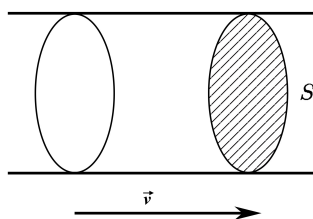


Рис. 1.6. Участок контура с током

Единицы измерения электрического и магнитного полей в гауссовой системе

Единицей измерения магнитного поля \vec{H} в системе СГС является гаусс:

$$1\text{Гс} = [\vec{H}_{\text{СГС}}] = \frac{[\vec{F}]}{[q_{\text{СГС}}]} = \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{Г}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{см}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{Г} \cdot \text{см}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{с}}{\text{Г}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{см}^{\frac{3}{2}}} = \quad (1.32)$$

$$= \frac{\text{Г}^{\frac{1}{2}}}{\text{см}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{с}}. \quad (1.33)$$

Поскольку электрическое и магнитное поля в СГС имеют одинаковую размерность, единицу поля \vec{E} тоже можно выразить в гауссах.

Воспользуемся формулой 1.28, чтобы выразить гаусс через тесла, в которых поле \vec{H} измеряется в СИ. Понятно, что в системе СИ эта формула будет выглядеть так же, только без коэффициента $\frac{1}{c}$ (который, напомним, нужен в СГС для того чтобы перевести единицы заряда $q_{\text{СГС}}$ в единицы заряда $q_{\text{СГСЭ}}$):

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{H}]. \quad (\text{СИ})$$

Это означает, что на частицу, имеющую заряд 1 Кл и скорость $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, магнитное поле величиной 1 Тл будет действовать с силой, равной 1 Н. Пусть $1 \text{ Тл} = x \cdot \text{Гс}$. Подставим эти значения в 1.28, заменив заряд в кулонах на заряд в СГСЭ–ед. заряда согласно соотношению 1.6.

$$10^5 \text{ дин} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед. заряда}}{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}} \cdot 10^2 \frac{\text{см}}{\text{с}} \cdot x \cdot \text{Гс},$$

откуда

$$x = 10^4,$$

что дает

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \cdot \text{Гс}. \quad (1.34)$$

Гаусс можно также выразить через используемую в СИ единицу поля \vec{E} , т. е. $\frac{\text{В}}{\text{м}}$. Для этого достаточно воспользоваться формулой $\vec{F} = q\vec{E}$, которая выглядит одинаково в СГС и в СИ. Она говорит, что электрическое поле величиной $1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ действует на частицу зарядом 1 Кл с силой, равной 1 Н. Пусть $1 \frac{\text{В}}{\text{м}} = x \cdot \text{Гс}$. В системе СГС, с учетом перехода к СГСЭ-ед. заряда по формуле 1.6, будет

$$10^5 \text{ дин} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед. заряда} \cdot x \cdot \text{Гс},$$

то есть

$$x = \frac{1}{3 \cdot 10^4},$$

а значит

$$1 \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ Гс}. \quad (1.35)$$

Некоторые характерные значения полей \vec{E} и \vec{H} , встречающиеся в природе

Для наглядности приведем некоторые характерные величины электрических и магнитных полей, которые встречаются в природе.

- Электрическое поле между облаками во время грозы достигает величин порядка 10^3 – $10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$, что соответствует $\sim 0,1$ – 1 Гс.

- Электрический пробой в воздухе наступает при напряженности $\vec{E} \sim 3 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$, или при ~ 100 Гс.

- Можно приблизительно посчитать напряженность электрического поля протона на расстоянии первого боровского радиуса a_0 . В системе СИ a_0 определяется как $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, где $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ — масса электрона, $\hbar \approx 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ — приведенная постоянная Планка, $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ — элементарный

заряд, или взятый со знаком “+” заряд электрона. Значение поля \vec{E} , однако, удобнее вычислить в системе СГС. Поскольку заряд протона равен e , то

$$E = \frac{e}{a_0^2}.$$

В единицах системы СГС элементарный заряд равен приблизительно $e \approx 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ-ед. заряда. Поэтому

$$E \approx \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ-ед. заряда}}{(0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см})^2} \approx 1,7 \cdot 10^7 \text{ Гс.}$$

- Магнитное поле человеческого мозга составляет $H \approx 10^{-9}$ – 10^{-8} Гс.
- Магнитное поле на поверхности Земли: $H \approx 0,25$ – $0,5$ Гс.
- Магнитное поле в центре Земли: $H \approx 25$ Гс.
- Обыкновенный сувенирный магнит имеет $H \approx 50$ Гс.
- Магнитное поле на поверхности нейтронной звезды: $H \approx 10^{12}$ – 10^{13} Гс.

Из постоянных m_e , \hbar и c можно составить величину

$$m_e^2 \cdot \hbar^{-\frac{3}{2}} \cdot c^{\frac{5}{2}},$$

которая будет иметь размерность магнитного поля. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{г}^2 \cdot (\text{эрг} \cdot \text{с})^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^{\frac{5}{2}} &= \text{г}^2 \cdot (\text{дин} \cdot \text{см} \cdot \text{с})^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^{\frac{5}{2}} = \\ &= \text{г}^2 \cdot \left(\frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{с}}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{\text{г}^{\frac{1}{2}}}{\text{см}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{с}} = \text{Гс}. \end{aligned}$$

Чтобы получить значение этой величины в гауссах, величины m_e , \hbar и c следует перевести в единицы СГС, учтя, что энергия в системе СГС измеряется в *эргах*: 1 эрг = 10^{-7} Дж. Получится:

$$\left(9,1 \cdot 10^{-28}\right)^2 \cdot (1,054 \cdot 10^{-27})^{-\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot 10^{10})^{\frac{5}{2}} \text{ Гс} \approx 4 \cdot 10^{12} \text{ Гс.}$$

Кроме того, можно составить безразмерную величину из фундаментальных постоянных e , \hbar и c . В системе СГС она будет выглядеть следующим образом:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx 7,3 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137}. \quad (1.36)$$

В том, что α — величина безразмерная, легко убедиться, подставив 1 СГСЭ-ед. заряда 1.5:

$$[\alpha] = \left(\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \text{см}^{\frac{3}{2}}}{\text{с}} \right)^2 \cdot \frac{\text{с}}{\text{эрг} \cdot \text{с} \cdot \text{см}} = \left(\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \text{см}^{\frac{3}{2}}}{\text{с}} \right)^2 \cdot \frac{\text{с}^2}{\Gamma \cdot \text{см}^3} = [1].$$

Постоянная α называется постоянной тонкой структуры и имеет важное значение в электродинамике, поскольку является фундаментальной постоянной, характеризующей электромагнитное взаимодействие. В системе СИ она определяется как

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}. \quad (1.37)$$

Лекция 2. Уравнения Максвелла и их экспериментальное обоснование

Как мы убедились ранее, наиболее удобной для описания электродинамики является гауссова система единиц, называемая системой единиц СГС. Далее мы будем работать именно в этой системе.

Основными уравнениями электродинамики являются уравнения Максвелла. Это система из четырех дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая динамику системы с электромагнитным взаимодействием. Эти уравнения были получены Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879) как результат обобщения и осмысления известных на то время экспериментальных законов: закона Кулона, закона Ампера и закона электромагнитной индукции М. Фарадея (1791–1867). Опираясь на известные зависимости, которым подчиняются поля \vec{E} и \vec{H} , приведем вывод уравнений Максвелла в том виде, в каком они записываются сейчас. Начнем с уравнений для напряженности электрического поля.

Теорема Гаусса для электрического поля

Как мы уже знаем, создаваемое зарядом q электрическое поле \vec{E} зависит от расстояния как

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}. \quad (2.1)$$

Определим поток вектора \vec{E}

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

через некоторую замкнутую поверхность S , окружающую заряд q . Пусть для определенности будет $q > 0$. Рассмотрим для начала случай, когда заряд находится в центре сферы произвольного радиуса R .

Поскольку в этом случае вектор нормали к поверхности совпадает по направлению с \vec{E} и модуль вектора \vec{E} не зависит от угловых переменных, по которым ведется интегрирование,

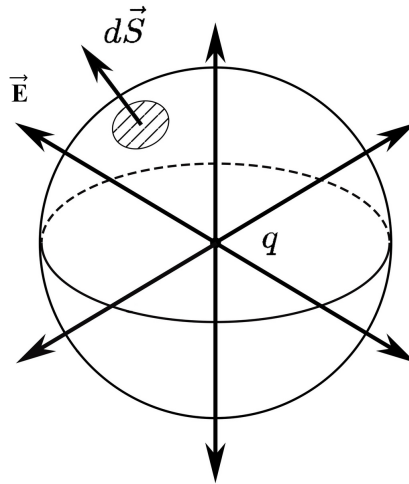


Рис. 2.1. К вычислению потока вектора \vec{E} через сферическую поверхность S , окружающую заряд q

$$\oint_S \vec{E} \vec{dS} = \oint_S dS \frac{q}{R^2} = 4\pi R^2 \cdot \frac{q}{R^2} = 4\pi q.$$

Тот же результат мы получим и в случае замкнутой поверхности S произвольной формы. Действительно, подынтегральное выражение

$$\vec{E} \vec{dS} = E dS \cdot \cos \alpha,$$

где α — угол между вектором \vec{E} и нормалью к элементу поверхности \vec{dS} . При этом, как видно из Рис. 2.2,

$$dS \cdot \cos \alpha = dS',$$

где dS' — элемент поверхности, перпендикулярный \vec{r} . Если он виден из начала координат (где находится заряд q) под телесным углом $d\Omega$, то

$$dS' = r^2 d\Omega.$$

Отсюда

$$\oint_S \vec{E} \vec{dS} = \oint_S r^2 d\Omega \cdot \frac{q}{r^2} = 4\pi q,$$

так как поверхность S замкнута, что означает, что интегрирование по $d\Omega$ выполняется по всему пространству, то есть дает 4π . Как видно из вышесказанного, $\vec{E}d\vec{S} = qd\Omega$ не зависит от радиуса-вектора рассматриваемого элемента dS , а только от телесного угла $d\Omega$. При этом поскольку заряд — величина аддитивная, аналогичная формула будет описывать поток вектора \vec{E} , создаваемого суммой n зарядов q_i , через поверхность, окружающую все эти заряды:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q,$$

где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ — суммарный заряд внутри поверхности S .

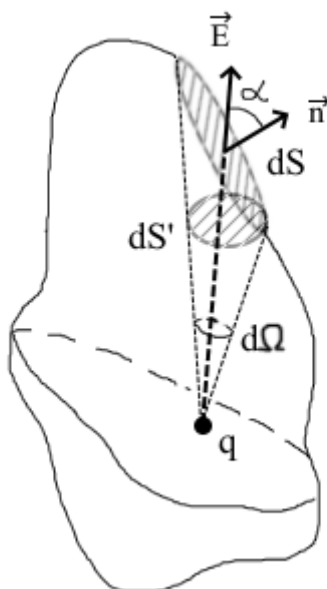


Рис. 2.2. К вычислению потока вектора \vec{E} через произвольную поверхность S , окружающую заряд q

Рассмотрим случай, когда заряд q находится вне замкнутой поверхности, через которую вычисляется поток вектора \vec{E} (Рис. 2.3). В этом случае интеграл $\oint_S \vec{E}d\vec{S}$ будет представлять собой сумму интегралов по поверхностям S_1 и S_2 , которые видны из точки, где находится заряд, под одним и тем же телесным углом Ω . Однако внешняя нормаль \vec{n} к замкнутой поверхности S для S_1 и S_2 имеет противоположное направление, из-за чего скалярное произведение $\vec{E}d\vec{S}$ при интегрировании по этим

поверхностям будет иметь разный знак. Поэтому

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} q d\Omega - \int_{S_2} q d\Omega = q(\Omega - \Omega) = 0.$$

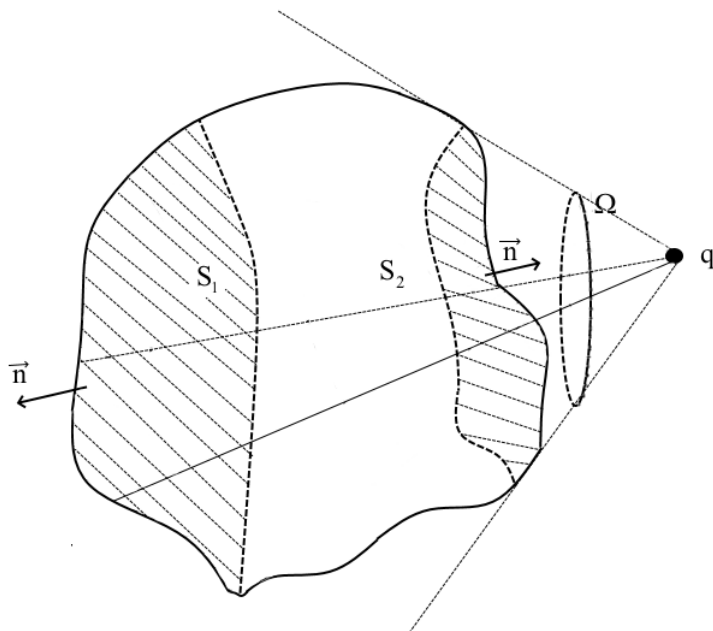


Рис. 2.3. К вычислению потока вектора \vec{E} , когда заряд q находится снаружи поверхности S

Обобщая рассмотренные случаи, получаем, что

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q_{\text{внутр.}}, \quad (2.2)$$

где $q_{\text{внутр.}}$ — суммарный заряд, находящийся внутри рассматриваемой поверхности S . Результат 2.2 можно переписать в дифференциальной форме, воспользовавшись теоремой Гаусса–Остроградского

$$\oint_{S=\partial M} \vec{A} d\vec{S} = \int_M \text{div} \vec{A} \cdot dV, \quad (2.3)$$

где \vec{A} — произвольный вектор, а замкнутая поверхность S является границей трехмерной области пространства M , по которой берется интеграл в правой части. Сум-

марный заряд, содержащийся в области M , можно выразить через плотность заряда как

$$q_{\text{внутр.}} = \int_M \rho dV.$$

Тогда

$$\int_M \text{div } \vec{E} \cdot dV = 4\pi \int_M \rho dV,$$

что должно быть верно для произвольной области M , а значит

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (2.4)$$

Можно убедиться, что уравнение 2.4 дает правильный результат в случае поля точечного заряда q , помещенного в начало координат. Для него объемная плотность заряда определяется как

$$\rho = q\delta^3(\vec{r}), \quad (2.5)$$

где $\delta^3(\vec{r})$ — это дельта-функция Дирака, удовлетворяющая условиям

$$\delta^3(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0; \\ \infty, & \vec{r} = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

причем интегрирование дельта-функции по всему пространству должно давать единицу:

$$\int dV \delta^3(\vec{r}) = 1. \quad (2.7)$$

Благодаря условию 2.7 интегрирование по объему уравнения 2.4 даст правильный результат в правой части, т. е. $4\pi q$. Во всех точках пространства, где $\vec{r} \neq 0$, электрическое поле \vec{E} находится согласно 2.1 и его дивергенция, согласно 2.4 и 2.5, должна быть равной нулю. Действительно, применяя оператор дивергенции к 2.1, получаем

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{q\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{q}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + q\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q\vec{r}}{r^4} \cdot \vec{\nabla}(r) = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^3} = 0,$$

где было учтено, что дивергенция и градиент от радиус-вектора равны соответственно $\vec{\nabla} \vec{r} = 3$ и $\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$. Таким образом, уравнение 2.4 в самом деле справедливо для случая точечного заряда с объемной плотностью 2.5.

Заметим также, что электрическое поле точечного заряда 2.1 можно переписать в следующем виде:

$$\vec{E} = -q\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.8)$$

Поставляя 2.8 и 2.5 в 2.4, получаем

$$-q\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi q\delta^3(\vec{r}),$$

что согласуется с полезным математическим свойством оператора Лапласа

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.9)$$

которое доказывается в курсе функционального анализа. Это так называемое фундаментальное решение оператора Лапласа, т. е. такая функция $\Phi_N(x)$, для которой выполняется

$$\Delta\Phi_N(x) = \delta(x),$$

где N — размерность пространства, а $x = (x_1, \dots, x_N)$ — радиус-вектор в N -мерном пространстве. Для размерности пространства $N \geq 3$ фундаментальное решение оператора Лапласа имеет вид

$$\Phi_N(x) = -\frac{1}{(N-2)\omega_N}|x|^{-N+2}, \quad (2.10)$$

где ω_N — площадь единичной сферы в N -мерном пространстве. В частности, для $N = 3$ имеем $\omega_3 = 4\pi$ и 2.10 дает для трехмерного лапласиана свойство

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\vec{r}), \quad (2.11)$$

которое мы и получили, подставив поле \vec{E} в виде 2.8 и плотность точечного заряда ρ в 2.4.

Уравнение 2.2 (или его дифференциальную форму 2.4) называют теоремой Гаусса для электрического поля. Это уравнение содержит заряды — источники поля. Существует и другое уравнение Максвелла с источниками — для магнитного поля.

Теорема о циркуляции магнитного поля. Случай бесконечно длинного прямого тонкого провода с постоянным током

Уравнение Максвелла с источниками для поля \vec{H} называется теоремой о циркуляции магнитного поля и содержит электрические токи, источники поля \vec{H} . Как говорилось ранее, элемент тока $I\vec{dl}$ создает магнитное поле, определяемое 1.24. Однако в реальности элементов тока не существует и токи являются замкнутыми. Поэтому для того чтобы получить значение поля \vec{H} в некоторой точке, требуется просуммировать вклады, создаваемые в этой точке всеми элементами контура (или контуров) с током. Ограничимся вначале случаем статики, т. е. когда все рассматриваемые величины не зависят от времени. Пусть для простоты поле \vec{H} создается бесконечно длинным прямым проводником, по которому течет постоянный ток I в направлении оси z . Если воспользоваться цилиндрической координатной системой, то магнитное поле будет сонаправлено с ортом \vec{e}_φ , как показано на Рис. 2.4.

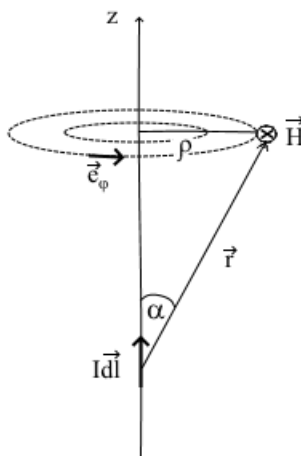


Рис. 2.4. Магнитное поле прямого проводника с током

Найдем магнитное поле на фиксированном расстоянии ρ от проводника. Согласно 1.24, оно должно вычисляться как

$$\vec{H} = \frac{I}{c} \int \frac{[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (2.12)$$

причем \vec{dl} совпадает по направлению с осью z , а $[\vec{dl}, \vec{r}] = dl \cdot r \sin(\alpha)$ и $r = \frac{\rho}{\sin(\alpha)}$. Поэтому

$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{I}{c\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot \sin^3(\alpha).$$

Удобно перейти от интегрирования по z к интегрированию по α :

$$z = -\rho \operatorname{ctg}(\alpha) \Rightarrow dz = \frac{\rho}{\sin^2(\alpha)} d\alpha;$$

$$z = -\infty \Rightarrow \alpha = 0;$$

$$z = \infty \Rightarrow \alpha = \pi.$$

Тогда

$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{I}{c\rho} \int_0^\pi d\alpha \sin(\alpha) = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{I}{c\rho} \cdot (-\cos(\alpha)) \Big|_0^\pi = \frac{2I}{c\rho} \vec{e}_\varphi. \quad (2.13)$$

Вычислим циркуляцию найденного магнитного поля 2.13 по замкнутому контуру C , который представляет собой окружность радиуса ρ вокруг проводника с током (см. Рис. 2.5).

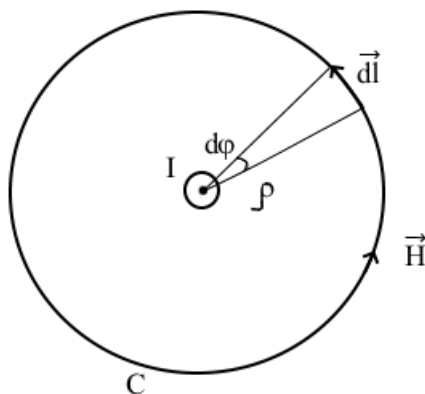


Рис. 2.5. К вычислению циркуляции магнитного поля по окружности радиуса ρ

Как видно из рисунка, вектора \vec{H} и $d\vec{l}$ направлены по \vec{e}_φ , и $dl = \rho d\varphi$, так что

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \oint_C H dl = \int_0^{2\pi} H \rho d\varphi = \frac{2I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi I}{c}.$$

Случай, когда контур C , внутри которого протекает ток I , имеет произвольную форму, проиллюстрирован на Рис. 2.6. Скалярное произведение $\vec{H}d\vec{l} = Hdl \cos(\alpha)$ будет таким же, как и в случае окружности, поскольку, как видно из рисунка, $dl \cos(\alpha) = \rho d\varphi$. Пределы интегрирования по φ будут также от 0 до 2π , так как контур C является замкнутым и ток, создающий поле, находится внутри него. А значит, и в случае контура произвольной формы

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H\rho d\varphi = \frac{4\pi I}{c}.$$

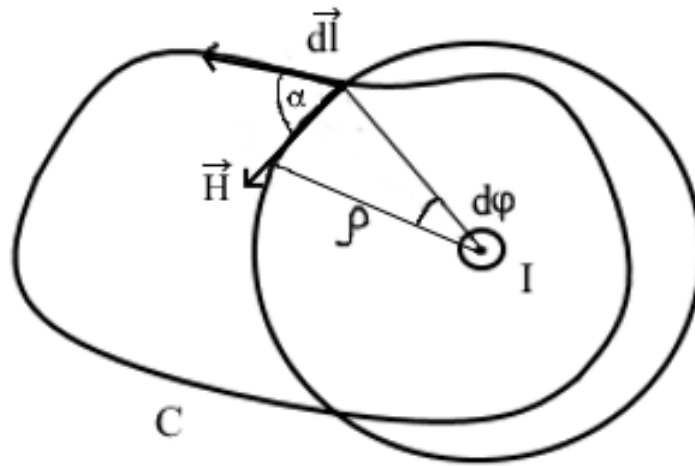


Рис. 2.6. К вычислению циркуляции \vec{H} по контуру произвольной формы

Ток I может протекать и вне контура C , по которому вычисляется циркуляция \vec{H} . Но в этом случае (см. Рис. 2.7) область интегрирования разделится на участки, где $\cos(\alpha) > 0$ и где $\cos(\alpha) < 0$, суммарный вклад от которых будет равен нулю, поскольку они видны из точки, где находится ток, под одним и тем же углом φ .

Таким образом мы установили, что в статическом случае циркуляция по контуру C магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током, определяется по формуле

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi I_{\text{внутри}}}{c}, \quad (2.14)$$

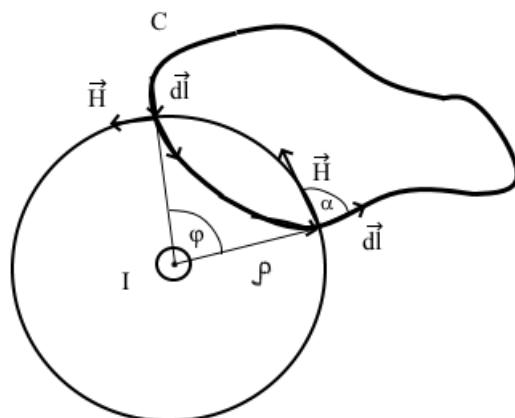


Рис. 2.7. К вычислению циркуляции \vec{H} , когда ток I протекает вне контура C

где $I_{\text{внутр}}$ — суммарный ток, протекающий внутри рассматриваемого контура C (очевидно, результат 2.14 обобщается на случай нескольких токов путем простого суммирования их вкладов). Уравнение 2.14 можно также переписать в дифференциальной форме, воспользовавшись теоремой Стокса:

$$\oint_{C=\partial S} \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{dS}, \quad (2.15)$$

где \vec{A} — произвольный вектор, а контур C является границей поверхности S , причем направление нормали к поверхности связано с направлением обхода контура правилом правой руки, как на Рис. 2.8 .

Если записать также ток $I_{\text{внутр}}$ через его плотность \vec{j} , 2.14 примет вид

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{dS} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \vec{dS},$$

что означает

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.16)$$

в силу произвольности контура C , а, следовательно, и ограниченной им поверхности S . Напомним, что уравнение 2.16 справедливо лишь в статическом случае и на данный момент получено нами лишь для магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником.

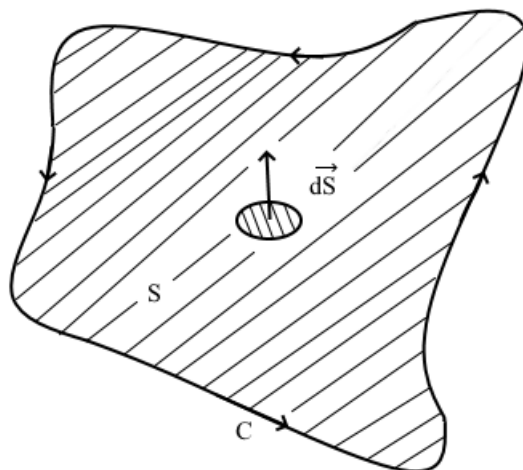


Рис. 2.8. Правило выбора нормали к поверхности S , ограниченной контуром C

Вывод уравнения Максвелла для $\text{rot } \vec{H}$ в общем случае. Отсутствие магнитных зарядов. Уравнение непрерывности для тока

Для того чтобы обобщить уравнение 2.16 на случай поля \vec{H} , создаваемого произвольным замкнутым контуром (контурами) с током, вернемся к формуле 2.12. Теперь мы будем вычислять магнитное поле в точке M , координаты которой определяются радиусом-вектором \vec{r} , суммируя вклады от элементов $I\vec{dl}$, положение которых будет определяться радиусом-вектором \vec{r}' (см. Рис. 2.9). Тогда

$$\vec{H}(\vec{r}) = \oint_C \frac{I}{c} \cdot \frac{[\vec{dl}, \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

где вектор \vec{dl} зависит от \vec{r}' и сонаправлен с плотностью тока $\vec{j}(\vec{r}')$. Это позволяет следующим образом перейти к интегрированию по объёму:

$$\int I\vec{dl} = \int_S \vec{dl} \int \vec{j}(\vec{r}') dS = \int_S (\vec{dl}, d\vec{S}) \vec{j}(\vec{r}') = \int_V d^3r' \vec{j}(\vec{r}'),$$

где $(\vec{dl}, d\vec{S}) = dV = d^3r'$, а интегрирование можно выполнять как по объёму V , внутри которого сосредоточены токи, так и по всему пространству (ненулевой вклад дадут только области, где $\vec{j}(\vec{r}') \neq 0$). Кроме того, воспользуемся равенством

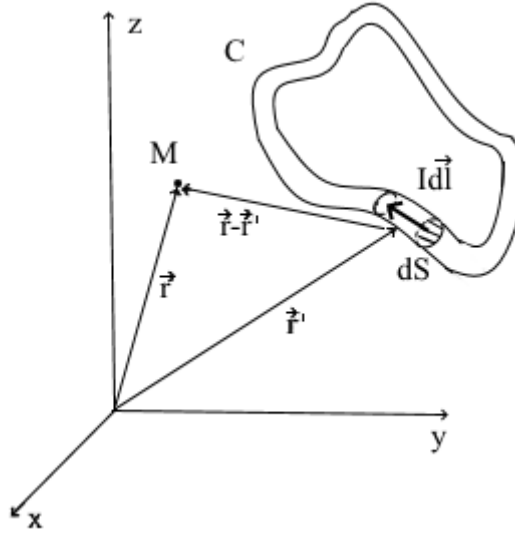


Рис. 2.9. К вычислению магнитного поля, создаваемого произвольным контуром с током

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right), \quad (2.17)$$

в котором производные оператора $\vec{\nabla}$ действуют на \vec{r} . Условимся, что в наших обозначениях все дифференциальные операторы без штриха действуют на компоненты \vec{r} , а дифференциальные операторы со штрихом действуют на компоненты \vec{r}' . Получаем:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V d^3 r' \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{1}{c} \int_V d^3 r' \left[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{c} \int_V d^3 r' \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right), \vec{j}(\vec{r}') \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{j}(\vec{r}')$ не зависит от \vec{r} и $\vec{\nabla}$ на него не действует, можно переписать $\vec{H}(\vec{r})$ в виде

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3 r' \left[\vec{\nabla}, \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] = \frac{1}{c} \text{rot} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.18)$$

Следует заметить, что уравнение 2.18 приводит нас к выводу ещё одного из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (2.19)$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0 \quad \forall \vec{A}. \quad (2.20)$$

Уравнение 2.19 можно с помощью теоремы Гаусса записать в интегральной форме

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (2.21)$$

Уравнение 2.21 говорит о том, что поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, т. е. магнитное поле является соленоидальным. Это означает, что линии поля \vec{H} всегда замкнуты и в природе не существует магнитных монополей (т. е. зарядов, которые могли бы быть источниками или стоками поля \vec{H}). Чтобы вывести для общего (но статического) случая уравнение 2.16, применим теперь операцию ротора к 2.18. Из векторного анализа нам известно полезное равенство

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (2.22)$$

С учетом этого,

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{c} \Delta \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.23)$$

Преобразуем первое слагаемое так, чтобы можно было воспользоваться теоремой Гаусса. Сейчас этого сделать нельзя, потому что для этого нужно, чтобы дивергенция бралась по тем же переменным, по которым выполняется интегрирование. Здесь же оператор $\vec{\nabla}$ действует на \vec{r} , то есть по сути мы имеем

$$\frac{1}{c} \operatorname{grad} \int_V d^3 r' \left(\vec{j}(\vec{r}'), \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right).$$

Легко убедиться, что оператор $\vec{\nabla}$ в этом выражении можно заменить на $\vec{\nabla}'$ с изменением знака:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right).$$

Тогда можно записать первое слагаемое 2.23 как

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3 r' \left(\vec{j}(\vec{r}'), \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3 r' \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \\
 & + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3 r' \cdot \frac{\operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Первое слагаемое в 2.24 с помощью теоремы Гаусса сводится к поверхностному интегралу

$$\int_V d^3 r' \operatorname{div}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \oint_{S=\partial V} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{S} = 0,$$

так как $\vec{j}(\vec{r}') = 0$ на границе области V . (Область интегрирования V должна быть выбрана так, чтобы токи $\vec{j}(\vec{r}')$ были сосредоточены внутри неё, т. е. суммарно ток через границу V не втекает и не вытекает.) Второе слагаемое 2.24 в общем случае не обращается в ноль. Оно будет равным нулю в том случае, если во всех точках области V $\operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}') = 0$. Это действительно так в случае статики, а точнее, если в каждой точке области V объемная плотность заряда не зависит от времени, т. е. $\frac{\partial \rho(\vec{r}')}{\partial t} = 0$. Если это условие выполнено, то в 2.23 ненулевой вклад обеспечен только вторым слагаемым, которое мы преобразуем с помощью свойства оператора Лапласа 2.11 :

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \Delta \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{c} \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}).$$

Итак, мы воспроизвели уравнение 2.16 для произвольного распределения токов в пространстве в случае статики. Постараемся выяснить, как изменится этот результат, если отбросить ограничение неизменности во времени. Изменение заряда внутри произвольной замкнутой поверхности S обусловлено суммарным втекающим через неё током I_{\rightarrow} :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = I_{\rightarrow}. \tag{2.25}$$

При этом втекающий ток I_{\rightarrow} связан с вектором \vec{j} равенством

$$I_{\rightarrow} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S},$$

поскольку когда ток втекает, \vec{j} направлен против внешней нормали к S (см. Рис. 2.10). Правую и левую части уравнения 2.25 можно представить в виде интеграла по объему V , ограниченному поверхностью S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V dV \operatorname{div} \vec{j}. \quad (2.26)$$

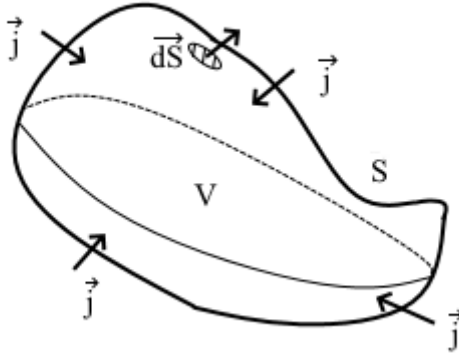


Рис. 2.10. Взаимная ориентация векторов \vec{dS} и \vec{j} , когда ток втекает через поверхность S

Так как область V является произвольной, из этого следует равенство подынтегральных выражений справа и слева:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.27)$$

Уравнение 2.27 называется уравнением непрерывности для плотности электрического тока и имеет аналоги в других областях физики. С учетом 2.27 первое слагаемое в 2.23 уже не обратится в ноль, а примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3 r' \frac{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3 r' \cdot \frac{\partial \rho(\vec{r}')}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Выражение в круглых скобках под производной $\frac{\partial}{\partial t}$ на самом деле является ничем иным, как обобщением формулы 2.8 на случай, когда электрическое поле \vec{E} измеряется в точке с координатами \vec{r} , а создающие его заряды распределены по пространству

с объемной плотностью $\rho(\vec{r}')$. Таким образом, с учетом знака, уравнение 2.23 записывается следующим образом:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Уравнение 2.29 согласуется не только с уравнением непрерывности 2.27, но и со вторым уравнением Максвелла с источниками 2.4. Действительно, если применить оператор дивергенции к 2.29, получим

$$\text{div}(\text{rot } \vec{H}) \equiv 0 = \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \left(\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0.$$

Итак, мы получили пару уравнений Максвелла с источниками (2.4 для $\text{div } \vec{E}$ и 2.29 для $\text{rot } \vec{H}$), а также уравнение Максвелла без источников для магнитного поля $\text{div } \vec{H} = 0$. Осталось записать последнее из уравнений Максвелла, уравнение без источников для $\text{rot } \vec{E}$.

Закон электромагнитной индукции Фарадея и соответствующее уравнение Максвелла для $\text{rot } \vec{E}$

При выводе 2.29 мы использовали

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.30)$$

Если взять справа и слева от этого равенства ротор, получим, что

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (2.31)$$

так как известно, что

$$\text{rot}(\text{grad}(\varphi)) \equiv 0 \quad \forall \quad \varphi. \quad (2.32)$$

Однако уравнение 2.31 (а, следовательно, и 2.30) справедливо только для поля \vec{E} электростатической природы, т. е. создаваемого электрическими зарядами. Но известно, что имеет место закон электромагнитной индукции Фарадея, установленный экспериментально. Этот закон говорит о существовании также вихревого электрического поля \vec{E} , не зависящего от наличия зарядов и порождаемого изменением

магнитного поля во времени. Согласно закону электромагнитной индукции, изменение во времени потока магнитного поля через любой замкнутый проводящий контур порождает в этом контуре ЭДС индукции:

$$E_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.33)$$

Напомним, что в гауссовой системе единиц все формулы, связывающие величины электрической природы и магнитной, содержат по одному множителю $\frac{1}{c}$ на каждую степень заряда или тока, а ЭДС индукции в контуре C является циркуляцией по этому контуру вектора \vec{E} ,

$$E_{\text{инд}} = \oint_C \vec{E} d\vec{l}. \quad (2.34)$$

Поскольку поле \vec{E} пропорционально заряду в первой степени, мы видим, что присутствие множителя $\frac{1}{c}$ в 2.33 действительно обоснованно. Магнитный поток через поверхность S , ограниченную контуром C

$$\Phi = \int_S \vec{H} d\vec{S} = \int_S H dS \cos(\alpha), \quad (2.35)$$

где угол α определяет взаимную ориентацию векторов \vec{H} и $d\vec{S}$, может изменяться во времени по разным причинам. Реальный проводящий контур может перемещаться в неоднородном поле $\vec{H}(\vec{r})$, либо вращаться (тогда будет изменяться $\cos(\alpha)$), а также изменять свою площадь. Также может изменяться во времени магнитное поле. Любая из этих причин приводит к возникновению индукционного тока, что лежит в основе принципа работы различных генераторов. При этом направление индуцированного тока $I_{\text{инд}}$ всегда удовлетворяет правилу Ленца: $I_{\text{инд}}$ направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле $\vec{H}_{\text{инд}}$ ослабляло изменение магнитного потока Φ . Например, на Рис. 2.11 изображено движение проводящего контура C в направлении сгущения линий внешнего поля $\vec{H}_{\text{внешн.}}$. Поскольку согласно рисунку $\cos(\alpha) > 0$, поток магнитного поля Φ возрастает, и поле $\vec{H}_{\text{инд}}$ препятствует этому возрастанию. Сила Ампера, которая при этом начнёт действовать на индуцированный ток $I_{\text{инд}}$ со стороны внешнего поля, будет препятствовать движению контура.

Однако вихревое электрическое поле \vec{E} не зависит от наличия проводящего контура, и его циркуляцию можно рассмотреть и по произвольному вымышленному

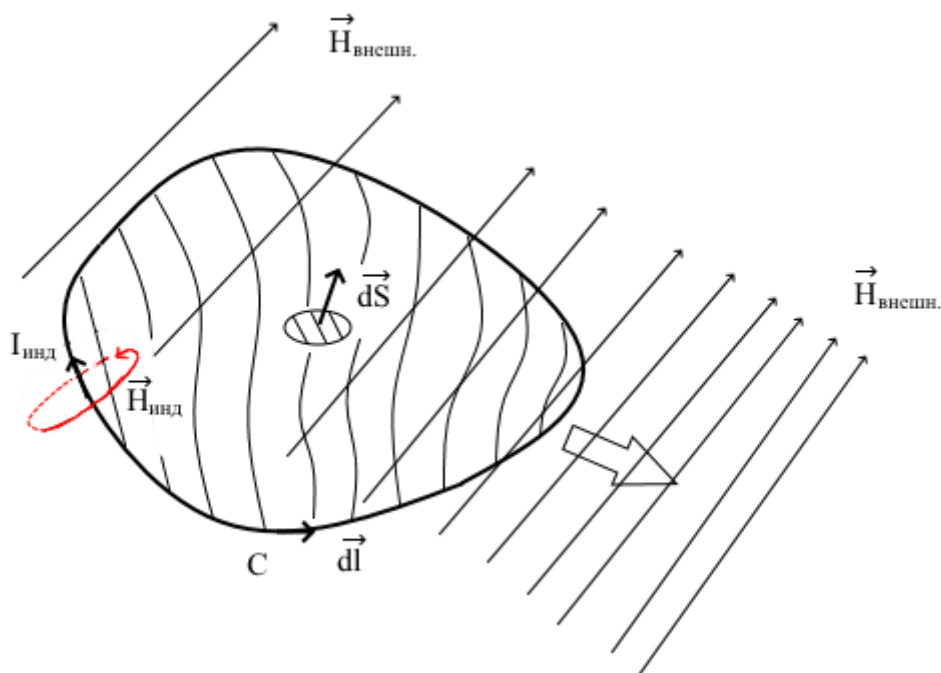


Рис. 2.11. Направление индуцированного тока $I_{\text{инд}}$ в контуре, движущемся в неоднородном магнитном поле

замкнутому контуру, положение и геометрия которого постоянны. Тогда изменение потока Φ может быть обусловлено лишь изменением во времени поля \vec{H} :

$$\oint_{C=\partial S} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (2.36)$$

Преобразуя правую часть уравнения 2.36 по теореме Стокса, получаем

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (2.37)$$

а в силу произвольности контура C можно снять интегрирование и записать

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Уравнение 2.38 является уравнением Максвелла без источников для электрического поля. Как видно из этого уравнения, в общем (нестатическом) случае электрическое поле уже не является потенциальным, т. е. представимым в виде градиента от некоторой скалярной функции φ .

Подводя итоги, выпишем систему уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.39)$$

и напомним, что эта система является совместной благодаря тому что источники ρ и \vec{j} полей \vec{E} и \vec{H} соответственно удовлетворяют уравнению непрерывности 2.27 .

Лекция 3. Потенциалы электромагнитного поля. Заряженная частица в электромагнитном поле

Потенциалы электромагнитного поля

Введение потенциалов электромагнитного поля.

Система уравнений Максвелла 2.39 для напряженности электрического поля \vec{E} и индукции магнитного поля \vec{H} позволяет ввести потенциалы этих полей на основании тождеств векторного анализа 2.20 и 2.32. В плоском трехмерном пространстве без каких-либо полостей или выколотых точек справедливы и обратные к этим равенствам утверждения: вектор \vec{F} можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции f , если $\text{rot } \vec{F} = 0$; вектор \vec{F} можно представить в виде ротора некоего вектора \vec{G} , если $\text{div } \vec{F} = 0$. Поскольку $\text{div } \vec{H} = 0$, поле \vec{H} может быть связано с некоторым вектором \vec{A} , называемым векторным потенциалом магнитного поля, соотношением

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (3.1)$$

И действительно, ранее мы уже получили уравнение 2.18, согласно которому

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.2)$$

Подставляя равенство 3.1 в уравнение Максвелла для $\text{rot } \vec{E}$, получаем

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.3)$$

что позволяет считать выражение в скобках градиентом от некоторой скалярной функции φ , которая называется скалярным потенциалом электрического поля:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (3.4)$$

Отсюда напряженность электрического поля выражается как

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Вспоминая, что уравнение 2.30 справедливо только в случае электростатики, а в общем случае верным является уравнение Максвелла 2.38, мы как раз получим верное равенство для нестатического случая, если принять, что

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.6)$$

в уравнении 3.5. Итак, пара уравнений Максвелла без источников 2.38 и 2.19 остается ненарушенной, если выразить поля \vec{E} и \vec{H} через потенциалы φ и \vec{A} с помощью уравнений 3.1 и 3.5.

Неоднозначность определения электромагнитных потенциалов

Важным свойством потенциалов электромагнитного поля φ и \vec{A} является их неоднозначность. С помощью некоторой произвольной функции координат и времени $\alpha(t, \vec{r})$ над ними можно совершить следующие преобразования:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha, \\ \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.7)$$

которые не изменят полей \vec{E} и \vec{H} . Действительно, после таких преобразований поле \vec{H} изменится следующим образом:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot} (\vec{A} + \vec{\nabla}\alpha) = \text{rot } \vec{A} = \vec{H} \quad (3.8)$$

в силу равенства 2.32. Электрическое поле изменится, соответственно, как

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow -\vec{\nabla} \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla}\alpha) = \\ &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

так как производная $\frac{\partial}{\partial t}$ коммутирует с оператором $\vec{\nabla}$. Преобразования 3.7 называются калибровочными. Инвариантность теории относительно калибровочных преобразований на самом деле играет важнейшую роль не только в электродинамике, но этот вопрос мы оставим для обсуждения в других курсах. Выбором функции $\alpha(t, \vec{r})$ можно ограничить неоднозначность потенциалов электромагнитного поля. Наложить таким

образом ограничения на \vec{A} и φ означает задать калибровку. Выбор калибровки, как правило, обусловлен желанием максимально упростить уравнения, в которые входят эти потенциалы. Во многих случаях наиболее удобной оказывается калибровка Лоренца, с которой мы вскоре познакомимся.

Уравнения Максвелла с источниками в терминах потенциалов \vec{A} и φ

Вводя потенциалы электрического и магнитного полей, мы затронули пару уравнений Максвелла без источников. Для того чтобы вторая пара уравнений Максвелла, с источниками, продолжала выполняться с учетом 3.1 и 3.5, потребуется, чтобы функции $\vec{A}(t, \vec{r})$ и $\varphi(t, \vec{r})$ удовлетворяли определенным уравнениям. Постараемся получить эти уравнения, подставив 3.1 и 3.5 в уравнения 2.4 и 2.29. Начнем с уравнения для $\text{rot } \vec{H}$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Перепишем полученное равенство, объединив слагаемые под градиентом, а слагаемое $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$ перенесем влево:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right). \quad (3.10)$$

Оператор

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (3.11)$$

называется оператором д'Аламбера. С его помощью уравнение, которому подчиняется векторный потенциал \vec{A} , принимает вид

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right). \quad (3.12)$$

Схожее уравнение можно получить также для потенциала φ , если подставить поле \vec{E} в виде 3.5 в уравнение Максвелла 2.4:

$$\text{div } \vec{E} = \text{div} \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho.$$

Прибавим с обеих сторон этого равенства $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ и учтем, что дивергенция от градиента представляет собой оператор Лапласа Δ .

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) = 4\pi\rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем, что φ подчиняется уравнению

$$\square \varphi = 4\pi\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right). \quad (3.13)$$

Легко заметить, что в уравнениях 3.12 и 3.13 в правой части в скобках стоит одинаковое выражение. При калибровочных преобразованиях 3.7 оно меняется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} &\rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\vec{A} + \vec{\nabla} \alpha) = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \Delta \alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} - \square \alpha. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Калибровка Лоренца и калибровка Кулона

Выбор функции $\alpha(t, \vec{r})$, обеспечивающий

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (3.15)$$

называется калибровкой Лоренца. В калибровке Лоренца уравнения 3.12 и 3.13 упрощаются, принимая вид

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad (3.16)$$

$$\square \varphi = 4\pi\rho. \quad (3.17)$$

Следует помнить, что сама калибровка Лоренца также определена неоднозначно, поскольку любые дополнительные преобразования 3.7, в которых параметр $\alpha(t, \vec{r})$ удовлетворяет $\square \alpha = 0$, не нарушают условия 3.15. Другими словами, после применения калибровки Лоренца всегда можно еще раз применить преобразования 3.7 с новым параметром α' , таким что $\square \alpha' = 0$, и калибровка Лоренца при этом не нарушится. Такие преобразования называются остаточными калибровочными преобразованиями в калибровке Лоренца.

Наряду с калибровкой Лоренца одной из самых широко используемых является калибровка Кулона, в которой параметр преобразований $\alpha(t, \vec{r})$ подбирается так, чтобы выполнялось

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (3.18)$$

В калибровке Кулона уравнение 3.12 будет выглядеть как

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi, \quad (3.19)$$

а уравнение 3.13, если записать оператор д'Аламбера \square в явном виде и сократить с обеих сторон $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, примет вид

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho. \quad (3.20)$$

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Введение потенциалов электромагнитного поля \vec{A} и φ имеет важнейшее значение, особенно когда для описания электродинамики используется лагранжев формализм. Функция Лагранжа, описывающая собственную энергию электромагнитного поля и взаимодействие с ним заряженной частицы, записывается именно в терминах потенциалов, а не полей \vec{E} и \vec{H} . При этом уравнения Максвелла выводятся из данной функции Лагранжа как уравнения движения для полевых переменных \vec{A} и φ .

В курсе теоретической механики приводится функция Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ для заряженной частицы в электромагнитном поле и показывается, что соответствующие уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L, \quad (3.21)$$

где сила Лоренца \vec{F}_L определяется выражением 1.29. В релятивистском случае при этом на месте $m\ddot{\vec{r}}$ должна стоять производная по времени от релятивистского импульса $\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}}$, то есть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}_L. \quad (3.22)$$

Используя в качестве обобщенных координат декартовы, т. е.

$$q_i = x_i, \quad i = x, y, z, \quad (3.23)$$

попытаемся выполнить обратную задачу: зная выражение для силы Лоренца 1.29 , попробуем установить, какой вид имеет соответствующий лагранжиан.

Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле

Поскольку, как уже сказано, функция Лагранжа записывается в терминах потенциалов, подставим в уравнение для силы Лоренца поля \vec{E} и \vec{H} в виде 3.5 и 3.1 :

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\dot{\vec{r}}, \vec{H}] = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}[\dot{\vec{r}}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]].$$

Перепишем слагаемое с двойным векторным произведением, воспользовавшись формулой 1.16 . Напомним, что в лагранжевом формализме обобщенные координаты и обобщенные скорости являются независимыми переменными, а значит, оператор $\vec{\nabla}$ не действует на $\dot{\vec{r}}$. Поэтому можно записать

$$\vec{F}_L = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left(\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - (\dot{\vec{r}}, \vec{\nabla})\vec{A}\right).$$

Удобно переписать полученное выражение в компонентной форме

$$F_{Li} = q\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right),$$

где полевые переменные $\vec{A}(t, \vec{r})$ и $\varphi(t, \vec{r})$ должны рассматриваться как функции координат и времени. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, если не оговорено обратного. Такая форма записи позволяет легко заметить, что F_{Li} включает в себя полную производную от i -той компоненты векторного потенциала по времени

$$\frac{d}{dt}A_i(t, \vec{r}) = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\dot{x}_k.$$

Поэтому можно записать

$$F_{Li} = -\frac{q}{c}\frac{d}{dt}A_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{q}{c}(\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi\right).$$

Представим стоящую под производной $\frac{d}{dt}$ компоненту A_i в следующем виде:

$$A_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\dot{x}_k A_k) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}). \quad (3.24)$$

Действительно, 3.24 является верным равенством, поскольку $A_k(t, \vec{r})$ не зависит от скоростей, а $\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_i} = \delta_{ik}$. Более того, верным равенством будет также

$$-\frac{q}{c} \frac{d}{dt} A_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi \right),$$

так как потенциал $\varphi(t, \vec{r})$ не зависит от скоростей \dot{x}_i . Тогда i -тая компонента силы Лоренца может быть представлена как

$$\begin{aligned} F_{Li} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi \right) = \\ &= \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

С другой стороны,

$$F_{Li} = m\ddot{x}_i \quad (3.26)$$

в нерелятивистском случае и

$$F_{Li} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_k \dot{x}_k}{c^2}}} \right) \quad (3.27)$$

в релятивистском. Согласно тем же рассуждениям,

$$m\ddot{x}_i = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{m\dot{x}_j \dot{x}_j}{2} \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{m\dot{x}_j \dot{x}_j}{2} \right),$$

поскольку обобщенные скорости \dot{x}_i и обобщенные координаты x_i являются независимыми переменными. В силу 3.26, для случая $\dot{x}_i \ll c$ мы получаем

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi \right) = 0. \quad (3.28)$$

Для скоростей, близких к скорости света, соответственно, легко убедиться, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_k\dot{x}_k}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_k\dot{x}_k}{c^2}} \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_k\dot{x}_k}{c^2}} \right),$$

и в силу 3.27 получается

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_k\dot{x}_k}{c^2}} + \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi \right) = 0. \quad (3.29)$$

Сравнивая уравнения 3.28 и 3.29 с уравнениями Лагранжа

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0, \quad (3.30)$$

мы видим, что функция Лагранжа, описывающая динамику заряженной частицы в электромагнитном поле, в нерелятивистском приближении имеет вид

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi, \quad (3.31)$$

а в случае релятивистской частицы, соответственно

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi. \quad (3.32)$$

Как показано в курсе теоретической механики, сдвиг потенциалов 3.7 эквивалентен добавлению к функции Лагранжа полной производной по времени от функции $\frac{q}{c} \alpha(\vec{r}, t)$, что, как известно, не меняет уравнений движения. Действительно, при преобразованиях потенциалов 3.7 обе функции Лагранжа 3.31 и 3.32 испытывают одинаковый сдвиг:

$$\begin{aligned} \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi &\rightarrow \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, (\vec{A} + \vec{\nabla} \alpha)) - q \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) = \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}}, \vec{A}) - q\varphi + \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \alpha(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Обобщенные импульс и энергия заряженной частицы в электромагнитном поле

Поскольку мы используем в качестве обобщенных координат декартовы 3.23 , обобщенный импульс находится из функции Лагранжа по формуле

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad (3.34)$$

что для лагранжиана 3.31 дает

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i, \quad (3.35)$$

а для лагранжиана релятивистской заряженной частицы, соответственно,

$$p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A_i. \quad (3.36)$$

Легко заметить, что обобщенные импульсы 3.35 и 3.36 отличаются от обычных (т. е. таких, какими частица обладала бы в отсутствие электромагнитного поля) нерелятивистского и релятивистского импульсов соответственно на одну и ту же величину $\frac{q}{c}\vec{A}$.

Выражение для обобщенной энергии в случае использования декартовых координат в качестве обобщенных имеет следующий вид:

$$E = \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L. \quad (3.37)$$

Подставляя в эту формулу функцию Лагранжа 3.31, получаем обобщенную энергию нерелятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + q\varphi. \quad (3.38)$$

Для релятивистского случая подставляем, соответственно, функцию Лагранжа 3.32 и получаем

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}} + q\varphi. \quad (3.39)$$

Так как кинетическая энергия частицы T в случае $\dot{r} \ll c$ равна

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2}, \quad (3.40)$$

а в случае больших скоростей

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}}, \quad (3.41)$$

можно сделать вывод, что в обоих случаях обобщенная энергия заряженной частицы в электромагнитном поле определяется выражением

$$E = T + q\varphi. \quad (3.42)$$

Лекция 4. Энергия и импульс электромагнитного поля

Закон сохранения энергии для заряженной частицы в электромагнитном поле

Согласно курсу теоретической механики, изменение обобщенной энергии во времени определяется законом

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Поскольку внешнее электромагнитное поле, а соответственно, и его потенциалы $\vec{A}(\vec{r}, t)$ и $\varphi(\vec{r}, t)$ могут явно зависеть от времени, видно, что производная $\frac{\partial L}{\partial t}$ для функций Лагранжа 3.31 и 3.32 будет одинакова и в общем случае не равна нулю. Это означает, что в общем случае обобщенная энергия 3.42 точечной заряженной частицы в электромагнитном поле, релятивистской или нерелятивистской, не сохраняется. Выражение в правой части уравнения 4.1 в рассматриваемом случае представляет собой

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{q}{c} \left(\dot{\vec{r}}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + q \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Выразим присутствующую здесь производную $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ из уравнения 3.5 :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E} - \vec{\nabla} \varphi. \quad (4.3)$$

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = q \left(\dot{\vec{r}}, (\vec{E} + \vec{\nabla} \varphi) \right) + q \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Учитывая, что для любой скалярной функции $f(\vec{r}, t)$, зависящей от координат и времени, полная производная по времени определяется как

$$\frac{df(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\dot{\vec{r}}, \vec{\nabla}) f(\vec{r}, t), \quad (4.5)$$

полученное выражение можно записать как

$$\frac{dE}{dt} = q(\dot{\vec{r}}, \vec{E}) + \frac{d}{dt}(q\varphi). \quad (4.6)$$

С другой стороны, согласно формуле 3.42 ,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + q\varphi). \quad (4.7)$$

Сравнивая выражения 4.6 и 4.7 , мы видим, что

$$\frac{dT}{dt} = q(\dot{\vec{r}}, \vec{E}). \quad (4.8)$$

Для точечной частицы, обладающей зарядом q , положение которой в момент времени t описывается радиусом-вектором $\vec{r}(t)$, объемная плотность заряда равна

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t)), \quad (4.9)$$

а электрический заряд, соответственно,

$$q = \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) = \int_V d^3r q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t)). \quad (4.10)$$

Величины $\dot{\vec{r}}(t)$ и $\vec{E}(\vec{r}(t), t)$ в слагаемом $q(\dot{\vec{r}}, \vec{E})$ при этом также можно внести под знак интеграла, поскольку они не зависят от переменной интегрирования \vec{r} (значение поля \vec{E} интересует нас именно в той точке, где находится частица в момент времени t , так как рассматриваемое слагаемое описывает взаимодействие частицы с электрическим полем). Таким образом,

$$\frac{dT}{dt} = \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) (\dot{\vec{r}}(t), \vec{E}(\vec{r}(t), t)), \quad (4.11)$$

а, вспоминая формулу для плотности тока 1.31 , получаем

$$\frac{dT}{dt} = \int_V d^3r (\vec{j}(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}(t), t)). \quad (4.12)$$

Выразим вектор $\vec{j}(\vec{r}, t)$ с помощью уравнения Максвелла 2.29 :

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (4.13)$$

Тогда полная производная кинетической энергии по времени окажется равной

$$\frac{dT}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \left\{ (\text{rot } \vec{H}, \vec{E}) - \frac{1}{c} \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right\}. \quad (4.14)$$

Для того, чтобы преобразовать первое слагаемое в правой части, рассмотрим величину

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}, \vec{H}], \quad (4.15)$$

которая является смешанным произведением векторов $\vec{\nabla}$, \vec{E} и \vec{H} . Как известно, смешанное произведение не изменяется при циклических перестановках векторов. Но поскольку в данном случае один из векторов — дифференциальный оператор, раскрывать подобное произведение требуется так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ подействовал поочередно на оба сомножителя в соответствии с правилом Лейбница. Чтобы избежать ошибок, удобно вспомнить, что смешанное произведение произвольных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} представляет собой определитель следующей матрицы:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (4.16)$$

Это позволяет записать рассматриваемую дивергенцию как

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}, \vec{H}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix},$$

где мы учли свойство определителя матрицы изменять знак на противоположный при перестановке между собой любых двух его строк. Возвращаясь к прежней, более компактной, форме записи, мы получаем

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{E}] - \vec{E} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}. \quad (4.17)$$

Это равенство позволяет заменить скалярное произведение $\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}$ в выражении 4.14 на

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.18)$$

Тогда

$$\frac{dT}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \left\{ \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] - \frac{1}{c} \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right\}. \quad (4.19)$$

Теперь выразим $\text{rot } \vec{E}$ с помощью уравнения Максвелла 2.38, а слагаемое с дивергенцией превратим в поверхностный интеграл согласно теореме Гаусса:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \oint_{S=\partial V} \vec{dS} \cdot [\vec{E}, \vec{H}] - \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \left\{ (\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) + (\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \right\}. \quad (4.20)$$

Заметим, что после интегрирования по d^3r величина

$$\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \left\{ (\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) + (\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \right\} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \left\{ \vec{E}^2 + \vec{H}^2 \right\}$$

будет зависеть уже только от времени, поэтому частную производную по времени в ней можно заменить на полную:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \oint_{S=\partial V} \vec{dS} \cdot [\vec{E}, \vec{H}] - \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \left\{ \vec{E}^2 + \vec{H}^2 \right\}. \quad (4.21)$$

Объединим слагаемые под производной $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{dt} \left(T + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \right) = -\frac{c}{4\pi} \oint_{S=\partial V} \vec{dS} \cdot [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.22)$$

Из уравнения 4.22 хорошо видно, что интеграл $\frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$ имеет размерность энергии. Поскольку в нем присутствуют только внешние поля \vec{E} и \vec{H} , очевидно, что он описывает энергию электромагнитного поля. Величина

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \quad (4.23)$$

является, соответственно, объемной плотностью энергии электромагнитного поля. Из формулы 4.22 также видно, что изменение энергии внутри некоторой области пространства V определяется потоком через границу этой области некоего вектора

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.24)$$

Вектор \vec{S} называется вектором Умова–Пойнтинга. Он показывает направление, в котором переносится энергия электромагнитного поля, а по величине равен электромагнитной энергии, проходящей через единичную площадку в единицу времени. В терминах только что введенных величин \vec{S} и ω равенство 4.22 будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(T + \int_V d^3r \omega(\vec{r}, t) \right) = - \oint_{S=\partial V} \vec{dS} \cdot \vec{S}. \quad (4.25)$$

Уравнение 4.25 позволяет убедиться в том, что перенос энергии происходит именно в направлении вектора \vec{S} : если энергия втекает внутрь области V , то вектор \vec{S} должен быть направлен против вектора \vec{dS} , который по общепринятой договоренности всегда выбирается направленным по внешней нормали к поверхности S . Это обеспечивает знак “-”, который, вместе с уже имеющимся в правой части равенства 4.25 отрицательным знаком в итоге даст положительное значение. Производная в левой части 4.25 при этом также положительна, как и должно быть, когда энергия прибывает.

Вернувшись к формуле 4.8, можно также убедиться, что изменение кинетической энергии частицы обусловлено работой электрического поля по её перемещению. Действительно, на заряженную частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, со стороны электромагнитного поля действует сила 1.29, скалярное произведение которой на скорость частицы равно

$$(\vec{F}_L, \dot{\vec{r}}) = q(\dot{\vec{r}}, \vec{E}) + \frac{1}{c}(\dot{\vec{r}}, [\dot{\vec{r}}, \vec{H}]) = q(\dot{\vec{r}}, \vec{E}), \quad (4.26)$$

поскольку смешанное произведение $(\dot{\vec{r}}, [\dot{\vec{r}}, \vec{H}])$ равно нулю (в этом можно убедиться, произведя циклическую перестановку и получив векторное произведение скорости на саму себя). Таким образом, уравнение 4.8 эквивалентно уравнению

$$\frac{dT}{dt} = (\vec{F}_L, \dot{\vec{r}}), \quad (4.27)$$

где в правой части стоит работа электрического поля по перемещению заряженной частицы в единицу времени, то есть его мощность. Магнитное поле такой работы не совершает, так как сила, действующая с его стороны на движущийся заряд, перпендикулярна скорости.

Закон сохранения импульса для заряженной частицы в электромагнитном поле

Изменение во времени обобщенного импульса в лагранжевом формализме стандартно определяется непосредственно из уравнений движения, то есть из формулы

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad (4.28)$$

если в качестве обобщенных координат используются декартовы. Однако нам уже известно, что для случая, когда заряженная частица движется в электромагнитном поле, полная производная по времени от обычного, а не обобщенного, импульса равна силе Лоренца. Для нерелятивистского и релятивистского случаев это выражается соответственно формулами 3.21 и 3.22. То же самое будет верным и в том случае, когда во внешнем электромагнитном поле находится система движущихся зарядов с объемной плотностью заряда $\rho(\vec{r})$ и плотностью тока $\vec{j}(\vec{r})$. В левой части равенств 3.21 и 3.22 в таком случае должно стоять изменение импульса, характеризующего движение системы как целого, а не отдельных частиц. Для простоты рассмотрим случай движения точечной нерелятивистской частицы, однако записанный в форме непрерывного распределения с помощью формул 4.9 и 4.10, а также 1.31. Тогда уравнение 3.21 будет выглядеть как

$$m\ddot{\vec{r}} = \int_V d^3r' \left\{ \rho(\vec{r}', t) \vec{E}(\vec{r}', t) + \frac{1}{c} [\vec{j}(\vec{r}', t), \vec{H}(\vec{r}', t)] \right\}, \quad (4.29)$$

где переменную интегрирования мы специально обозначили \vec{r}' , чтобы отличать её от радиуса-вектора частицы $\vec{r}(t)$. Легко убедиться, что, подставляя в равенство 4.29 плотности заряда $\rho(\vec{r}', t) = q\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}(t))$ и тока $\vec{j}(\vec{r}', t) = \rho(\vec{r}', t)\dot{\vec{r}}(t) = q\dot{\vec{r}}(t)\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}(t))$, после интегрирования по d^3r' мы как раз получим силу Лоренца 1.29 в точке с координатами $\vec{r}(t)$, как и должно быть для точечной частицы.

Теперь снова воспользуемся уравнениями Максвелла 2.39 и выразим с их помощью $\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div} \vec{E}$, а также \vec{j} в виде 4.13. Подстановка в 4.29 дает

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \left\{ \vec{E} \text{div} \vec{E} + [\text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{H}] \right\}. \quad (4.30)$$

В полученном равенстве представим в последнем слагаемом $[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{H}]$ как

$$\begin{aligned} [\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{H}] &= \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}, \vec{H}] - [\vec{E}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}, \vec{H}] + c [\vec{E}, \text{rot } \vec{E}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}, \vec{H}] - c [\text{rot } \vec{E}, \vec{E}], \end{aligned}$$

где производная $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ выражена с помощью уравнения Максвелла 2.38 . Тогда

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \left\{ \vec{E} \text{div } \vec{E} + [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] + [\text{rot } \vec{E}, \vec{E}] \right\} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.31)$$

Перенесем интеграл

$$\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}]$$

в правую часть равенства и объединим с $m\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}})$. Частную производную по времени при этом мы заменяем на полную согласно уже использовавшимся ранее рассуждениям: после интегрирования по объему величина $\int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}]$ будет зависеть только от времени. В результате мы получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m\dot{\vec{r}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}] \right) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \left\{ \vec{E} \text{div } \vec{E} + [\text{rot } \vec{E}, \vec{E}] + [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

правую часть которого можно сделать симметричной относительно полей \vec{E} и \vec{H} , добавив к подынтегральному выражению слагаемое $\vec{H} \text{div } \vec{H}$, которое ничего не меняет, поскольку является равным нулю в силу 2.19 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m\dot{\vec{r}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}] \right) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \left\{ \vec{H} \text{div } \vec{H} + [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] + \vec{E} \text{div } \vec{E} + [\text{rot } \vec{E}, \vec{E}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Постараемся теперь преобразовать получившееся в правой части выражение так, чтобы стал понятнее физический смысл всего уравнения 4.33 . Для этого нам понадобится перейти к индексной форме записи и вспомнить некоторые полезные формулы

из векторного анализа. Прежде всего, здесь и в дальнейшем мы часто будем использовать символ Леви-Чивиты ϵ_{ijk} , полностью антисимметричный по всем индексам тензор третьего ранга, нетривиальными компонентами которого являются

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = +1, \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1. \end{cases} \quad (4.34)$$

В силу полной антисимметрии компоненты тензора ϵ_{ijk} с любыми двумя и более совпадающими индексами равны нулю:

$$\epsilon_{ijk} = 0, \quad \forall \quad i = j \quad \vee \quad i = k \quad \vee \quad j = k. \quad (4.35)$$

Для наших дальнейших вычислений потребуется знать формулу для свертки двух эpsilon-символов, имеющих один общий индекс:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \quad (4.36)$$

Напомним, что любой повторяющийся дважды (немой) индекс, как мы ранее договаривались, всегда подразумевает суммирование от 1 до 3. Также обратим внимание, что для того чтобы пользоваться формулой 4.36, сперва необходимо обеспечить, чтобы позиция индекса суммирования в обоих эpsilon-символах была одинаковой, т. е. он стоял бы в каждом из них, например, на первом месте, как в формуле 4.36, или в каждом из них на втором, или в каждом из них на третьем. Выполнения этого условия легко добиться, например, циклической перестановкой. Также иногда используется формула для свертки эpsilon-символов по двум одинаковым индексам, которую нетрудно получить из 4.36, положив, например, $m = j$:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = \begin{vmatrix} \delta_{jj} & \delta_{jn} \\ \delta_{kj} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}, \quad (4.37)$$

где было использовано равенство $\delta_{jj} = 3$. Нам также понадобится формула для векторного произведения двух произвольных векторов \vec{A} и \vec{B}

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (4.38)$$

а, кроме того, приведем также, как в индексной форме записываются операторы *grad*, *div* и *rot*:

$$\mathit{grad} \varphi = \vec{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (4.39)$$

$$\mathit{div} \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \quad (4.40)$$

$$\mathit{rot} \vec{A} = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}. \quad (4.41)$$

Теперь, когда мы вспомнили самое необходимое из векторного анализа, запишем i -тую компоненту содержащегося в уравнении 4.33 вектора $\vec{E} \mathit{div} \vec{E} + [\mathit{rot} \vec{E}, \vec{E}]$:

$$\begin{aligned} \left(\vec{E} \mathit{div} \vec{E} + [\mathit{rot} \vec{E}, \vec{E}] \right)_i &= E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \left(\mathit{rot} \vec{E} \right)_j E_k = E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + \\ &+ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} \frac{\partial E_n}{\partial x_m} E_k = E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jmn} \frac{\partial E_n}{\partial x_m} E_k = E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + \\ &+ (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) \frac{\partial E_n}{\partial x_m} E_k = E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + \frac{\partial E_i}{\partial x_k} E_k - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} E_k. \end{aligned}$$

Можно добиться того, чтобы во всех трех получившихся слагаемых присутствовала одна и та же производная $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Для этого во втором слагаемом достаточно просто поменять индекс суммирования $k \rightarrow j$, а в третьем использовать следующим образом дельта-символ δ_{ij} :

$$-\frac{\partial E_k}{\partial x_i} E_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (E_k E_k) = -\frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{E}^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\vec{E} \mathit{div} \vec{E} + [\mathit{rot} \vec{E}, \vec{E}] \right)_i &= E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + E_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{E}^2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, аналогичное равенство справедливо и для вектора \vec{H} :

$$\left(\vec{H} \mathit{div} \vec{H} + [\mathit{rot} \vec{H}, \vec{H}] \right)_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{H}^2 \right).$$

С учетом этого, запишем теперь полностью для i -той компоненты уравнение 4.33 :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(m\dot{\vec{r}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}] \right)_i = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ E_i E_j + H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Для релятивистской заряженной частицы, если повторить все те же самые вычисления, получится аналогичное уравнение, отличающееся лишь тем, что на месте обычного нерелятивистского импульса $m\dot{\vec{r}}$ будет стоять релятивистский $\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}] \right)_i = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ E_i E_j + H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Обозначим величину в скобках под производной $\frac{\partial}{\partial x_j}$, вместе с коэффициентом $\frac{1}{4\pi}$ перед интегралом, как

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i E_j + H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \right\}. \quad (4.44)$$

Заметим, что любой тензор второго ранга, один из индексов у которого фиксирован, а второй пробегает значения от 1 до 3, может рассматриваться как вектор. Поэтому производная $\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$ при фиксированном i является аналогом дивергенции. Соответственно, объемный интеграл в правой части равенств 4.42 и 4.43 можно превратить с помощью теоремы Гаусса в поверхностный следующим образом:

$$\int_V d^3 r' \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \oint_{S=\partial V} dS_j \sigma_{ij}. \quad (4.45)$$

После этого преобразования мы можем уже окончательно записать закон изменения импульса для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле. В нерелятивистском случае он будет выглядеть как

$$\frac{d}{dt} \left(m\dot{\vec{r}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3 r' [\vec{E}, \vec{H}] \right)_i = \oint_{S=\partial V} dS_j \sigma_{ij}, \quad (4.46)$$

а в релятивистском, соответственно, как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{r}}^2/c^2}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r' [\vec{E}, \vec{H}] \right)_i = \oint_{S=\partial V} dS_j \sigma_{ij}. \quad (4.47)$$

Поскольку интеграл $\frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r' [\vec{E}, \vec{H}]$ очевидно имеет размерность импульса, вектор

$$\vec{g} \equiv \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{H}] \quad (4.48)$$

естественно интерпретировать как импульс электромагнитного поля в единице объема. Таким образом, мы приходим к выводу, что электромагнитное поле обладает своими собственными энергией и импульсом. С вектором Умова–Пойнтинга плотность импульса электромагнитного поля \vec{g} связана простым соотношением

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}. \quad (4.49)$$

Как видно из уравнений 4.46 и 4.47, изменение i -той компоненты суммарного импульса заряженной частицы и электромагнитного поля внутри некоторой области пространства V определяется потоком тензора σ_{ij} через поверхность, ограничивающую V . Величина σ_{ij} называется тензором напряжений Максвелла. Тензор σ_{ij} показывает, насколько изменяется за единицу времени в области V i -тая компонента суммарного импульса (частицы и поля) за счет потока через площадку dS_j . Заметим, что σ_{ij} является симметричным тензором. В том случае, когда собственный импульс электромагнитного поля не изменяется во времени, тензор σ_{ij} определяет i -тую компоненту силы, действующей на заряженные частицы в области V со стороны электромагнитного поля через площадку dS_j .

Лекция 5. Электростатика. Уравнение Пуассона

В предыдущих главах мы получили систему уравнений Максвелла 2.39 для напряженности электрического поля \vec{E} и индукции магнитного поля \vec{H} . Также мы ввели потенциалы этих полей φ и \vec{A} и выяснили, какой вид принимают в их терминах уравнения 2.39. Теперь мы займемся поиском решений уравнений Максвелла 2.4 и 2.38 в предположении, что электрическое и магнитное поля не зависят от времени, то есть приступаем к изучению электростатики. Поскольку в этом приближении $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$, и, соответственно, в силу 3.1, $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, система уравнений Максвелла, описывающая электростатику, сводится к

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

а уравнение 3.5, связывающее электрическое поле \vec{E} с его потенциалом φ , сводится к уравнению

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi. \quad (5.2)$$

Определение $\vec{E}(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$ с помощью теоремы Гаусса для электрического поля в некоторых простейших случаях

Получить решение системы 5.1 для поля \vec{E} и скалярного потенциала φ , т. е. найти их как функции координат, проще всего в тех случаях, когда рассматриваемая система зарядов обладает некоторой симметрией. Наличие симметрии, как правило, позволяет без сложных вычислений применить теорему Гаусса для электрического поля 2.2. Рассмотрим несколько простейших случаев и начнём с задачи о проводящей сфере радиусом R , обладающей электрическим зарядом q , которая проиллюстрирована на Рис. 5.1. Выберем сферическую координатную систему, где поле $\vec{E}(\vec{r})$ направлено по базисному вектору \vec{e}_r и зависит только от одной переменной r по причине имеющейся симметрии:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r. \quad (5.3)$$

Чтобы найти $E(r)$ в произвольной точке пространства, качестве поверхности S , по которой берется интеграл 2.2, будем использовать сферу радиусом r , центр которой совпадает с центром имеющейся равномерно заряженной сферы.

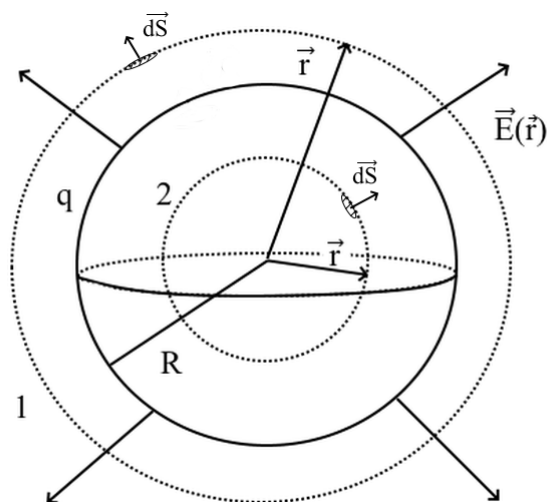


Рис. 5.1. К вычислению поля $\vec{E}(\vec{r})$, создаваемого проводящей заряженной сферой

Поскольку вектор $d\vec{S}$ также сонаправлен с ортом \vec{e}_r , интеграл 2.2 по поверхности сферы радиусом r можно записать как

$$\oint_S \vec{E}(r) d\vec{S} = \int_S E(r) dS. \quad (5.4)$$

Так как на поверхности сферы координата r фиксирована, интегрирование ведется только по угловым переменным, а поле $E(r)$ не зависит от них и может быть вынесено за знак интеграла. Поэтому в результате интегрирования мы получаем поверхность сферы радиуса r , умноженную на $E(r)$:

$$\oint_S \vec{E}(r) d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r). \quad (5.5)$$

Рассматриваемый интеграл можно взять как по сферической поверхности, заключающей заряженную сферу внутри себя (на Рис. 5.1 обозначенной цифрой 1), так и по сфере, заключенной внутри заряженной сферы (обозначенной на Рис. 5.1 цифрой 2). В первом случае, т. е. когда $r > R$, поскольку внутри рассматриваемой поверхности будет находиться весь заряд q , по теореме Гаусса мы получаем

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi q. \quad (5.6)$$

Во втором случае (когда $r < R$) внутри рассматриваемой поверхности не будет находиться никакого заряда, и, соответственно,

$$4\pi r^2 E(r) = 0. \quad (5.7)$$

Обобщая оба результата, можно представить зависимость электрического поля от координат следующим образом:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{r^2}, & r > R, \\ 0, & r < R. \end{cases} \quad (5.8)$$

Зная решение 5.8 для поля $E(r)$, можно воспользоваться формулой 5.2 и найти потенциал электрического поля $\varphi(r)$, который тоже очевидно не будет зависеть от углов из-за сферической симметрии. В сферической системе координат оператор градиента выглядит следующим образом:

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \quad (5.9)$$

где азимутальный угол φ не следует путать с обозначенным одноименно потенциалом электрического поля. В решаемой нами задаче поле \vec{E} направлено по \vec{e}_r , благодаря чему сравнение 5.2 и 5.9 дает

$$E(r) = -\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r}. \quad (5.10)$$

Поэтому в данной задаче можно найти потенциал $\varphi(r)$ путем интегрирования по переменной r уравнения 5.8. С учетом знака мы получаем

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{r} + const_1, & r > R, \\ const_2, & r < R. \end{cases} \quad (5.11)$$

Константы интегрирования $const_1$ и $const_2$ следует выбрать так, чтобы при $r = R$, т. е. на поверхности сферы, оба полученных решения совпадали. Например, удобно выбрать $const_1 = 0$, тогда непрерывность потенциала $\varphi(r)$ потребует выполнения $const_2 = \frac{q}{R}$. При таком выборе констант интегрирования зависимость $\varphi(r)$ примет вид

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{r}, & r > R, \\ \frac{q}{R}, & r < R. \end{cases} \quad (5.12)$$

На Рис. 5.2 и Рис. 5.3 приведены графики, изображающие найденные решения 5.8 и 5.12 для полей $E(r)$ и $\varphi(r)$ соответственно.

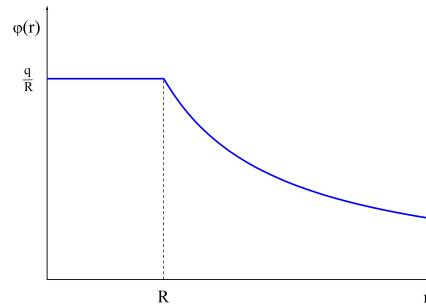
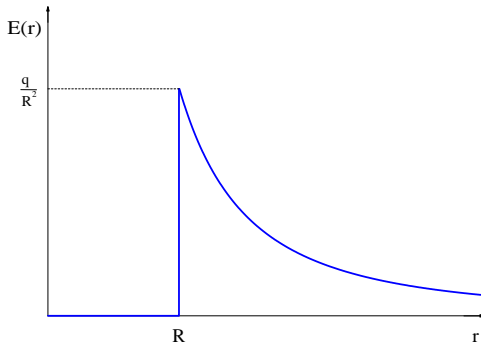


Рис. 5.2. Напряженность электрического поля, создаваемого проводящей заряженной сферой

Рис. 5.3. Потенциал электрического поля, создаваемого проводящей заряженной сферой

Другим примером задачи, в которой имеется симметрия, может быть равномерно заряженный объемный цилиндр с плотностью заряда ρ . В этом случае наиболее удобной будет уже цилиндрическая система координат, поскольку в ней электрическое поле по причине симметрии будет зависеть только от цилиндрического радиуса и направлено по \vec{e}_ρ (см. Рис. 5.4). Пусть радиус цилиндра будет равен R , а его длина равна l . Цилиндрический радиус мы будем обозначать буквой r , чтобы не путать его с плотностью заряда ρ . Для определения поля

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_\rho \quad (5.13)$$

по теореме Гаусса 2.2 нам теперь следует выбрать цилиндрическую поверхность радиуса r и длиной l , как поверхности S_1 и S_2 на Рис. 5.4. Как понятно из рисунка, поток вектора \vec{E} через оба сечения цилиндра будет нулевым, поскольку $\vec{E} \perp d\vec{S}$. На боковой поверхности цилиндра $\vec{E} \uparrow d\vec{S}$, т. е. $\vec{E}d\vec{S} = EdS$. По аналогии с задачей о проводящей сфере, вынесем $E(r)$ за знак интеграла, поскольку на боковой поверхности цилиндра $r = const$, а E зависит только от r . Тогда искомый интеграл $\oint_S E(r)dS$ бу-

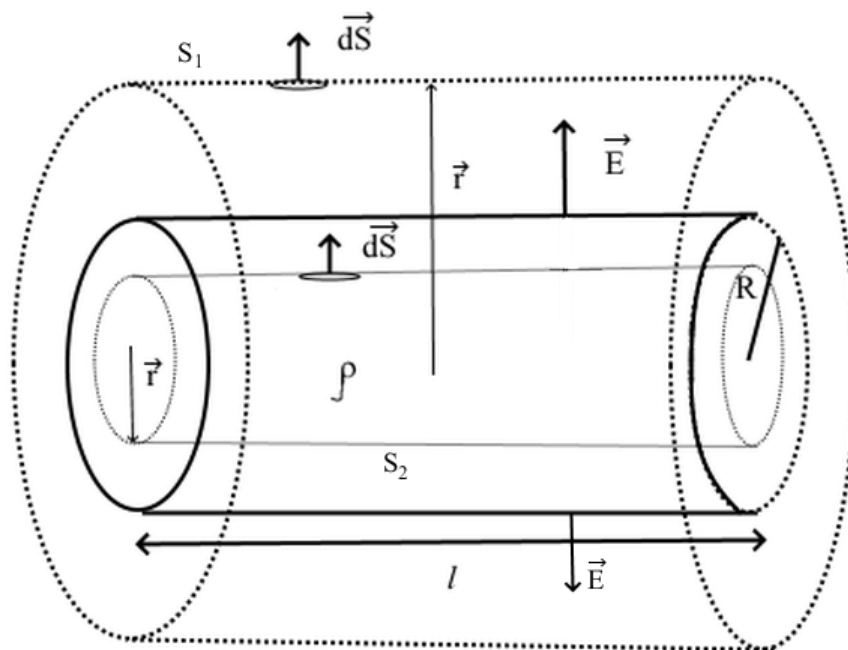


Рис. 5.4. К вычислению поля \vec{E} , создаваемого равномерно заряженным объемным цилиндром

дет равен площади боковой поверхности цилиндра, умноженной на $E(r)$. Поскольку площадь боковой поверхности цилиндра радиуса r равна $2\pi rl$,

$$\oint_S \vec{E}(r) dS = 2\pi rl E(r).$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса поток вектора \vec{E} через поверхность S должен быть равен $4\pi q_{\text{внутр}}$. При интегрировании по поверхности $S = S_1$, т. е. когда $r > R$, заряд $q_{\text{внутр}}$ равен заряду всего цилиндра радиуса R , то есть $\rho \cdot V_{\text{цилиндра}}$, поскольку $\rho = \text{const}$. Учитывая, что объем цилиндра радиуса R равен

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 l,$$

для $r > R$ получаем

$$2\pi rl E(r) = 4\pi \rho \cdot \pi R^2 l,$$

откуда

$$E(r) = 2\pi\rho \frac{R^2}{r}. \quad (5.14)$$

При интегрировании по поверхности $S = S_2$, т. е. когда $r < R$, заряд $q_{\text{внутри}}$ будет равен плотности заряда ρ , умноженной на объем цилиндра радиуса r (см. рисунок), поэтому получится

$$2\pi r l E(r) = 4\pi\rho \cdot \pi r^2 l,$$

что дает для $r < R$ решение для электрического поля

$$E(r) = 2\pi\rho r. \quad (5.15)$$

Объединяя оба полученных результата, запишем напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным цилиндром как

$$E(r) = \begin{cases} 2\pi\rho \frac{R^2}{r}, & r > R, \\ 2\pi\rho r, & r < R. \end{cases} \quad (5.16)$$

Чтобы определить теперь потенциал электрического поля φ , который, как и поле $\vec{E}(r)$, не должен зависеть от цилиндрических координат φ и z в силу симметрии системы, вновь обратимся к формуле 5.2. Теперь нам понадобится вид градиента в цилиндрических координатах

$$\vec{\nabla}f(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (5.17)$$

где цилиндрический радиус ρ в наших обозначениях следует заменить на r . Сравнение с формул 5.13, 5.2 и 5.17 приводит к уравнению

$$E(r) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (5.18)$$

которая позволяет найти потенциал $\varphi(r)$, проинтегрировав решение для поля \vec{E} 5.16 :

$$\varphi(r) = \begin{cases} -2\pi R^2 \rho \ln r + const_1, & r > R, \\ -\pi\rho r^2 + const_2, & r < R. \end{cases} \quad (5.19)$$

Выбор констант $const_1$ и $const_2$ должен удовлетворять требованию непрерывности потенциала на поверхности цилиндра. Выберем $const_1$ так, чтобы в решении при $r > R$ аргумент логарифма был безразмерной величиной, а именно

$$\varphi(r) = -2\pi R^2 \rho \ln \frac{r}{R}, \quad r > R.$$

Это делает потенциал $\varphi(r)$ при $r = R$ равным нулю. Чтобы решение для $\varphi(r)$ при $r < R$ также было нулевым на поверхности цилиндра, константу $const_2$ необходимо выбрать равной $\pi \rho R^2$. При таком выборе констант интегрирования потенциал электрического поля, создаваемого равномерно заряженным цилиндром радиуса R будет равен

$$\varphi(r) = \begin{cases} -2\pi R^2 \rho \ln \frac{r}{R}, & r > R, \\ -\pi \rho r^2 + \pi \rho R^2, & r < R. \end{cases} \quad (5.20)$$

Графики 5.5 и 5.6 иллюстрируют полученные решения 5.16 и 5.20 соответственно для $E(r)$ и $\varphi(r)$.

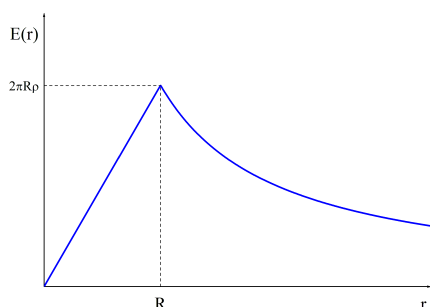


Рис. 5.5. Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным объемным цилиндром

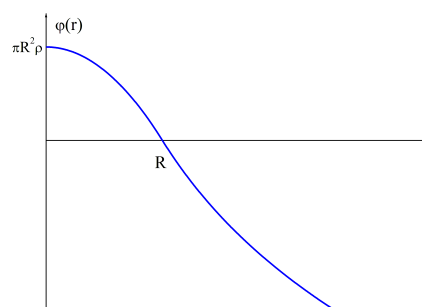


Рис. 5.6. Потенциал электрического поля, создаваемого равномерно заряженным объемным цилиндром

Рассмотрим еще один пример, когда имеющаяся в системе зарядов симметрия позволяет легко найти электрические поле и потенциал с помощью теоремы Гаусса 2.2. Таким примером может быть равномерно заряженная бесконечная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ .

В данном случае удобно выбрать декартову систему координат, плоскость XU которой совмещена с заряженной плоскостью, как показано на Рис. 5.7. В задаче имеется

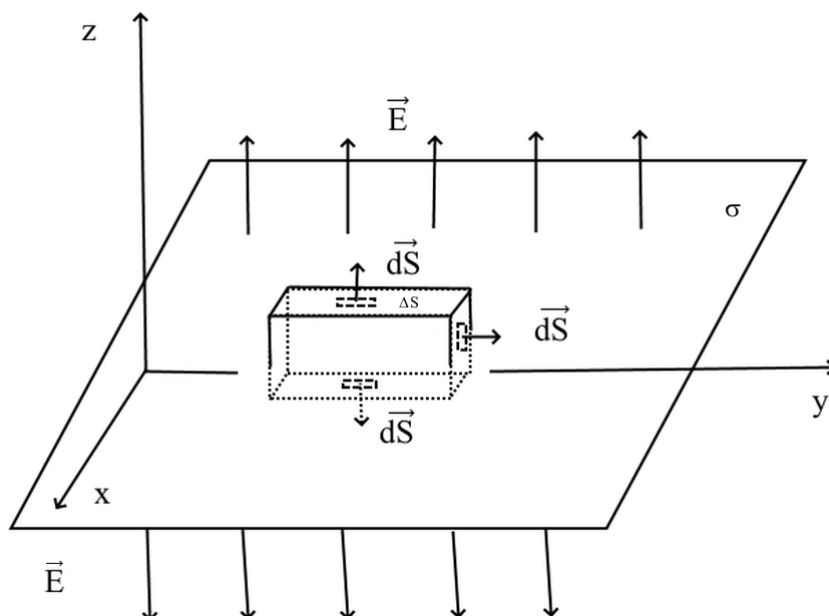


Рис. 5.7. К вычислению поля \vec{E} , создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью

симметрия относительно направлений \vec{e}_x и \vec{e}_y , поэтому логично предположить, что \vec{E} и φ будут функциями только переменной z , причем направление поля \vec{E} будет с одной стороны заряженной плоскости совпадать с направлением вектора \vec{e}_z , а с другой стороны противоположно ему. Запишем предварительно это утверждение в общем виде

$$\vec{E} = \vec{e}_z E(z), \quad (5.21)$$

где функция $E(z)$ должна быть, согласно рисунку, больше нуля выше заряженной плоскости, и отрицательной ниже неё. Соотношение 5.2 при этом очевидно упрощается до

$$E(z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5.22)$$

В качестве замкнутой поверхности S , поток вектора \vec{E} через которую мы будем вычислять по теореме Гаусса 2.2, выберем изображенный на Рис. 5.7 параллелепипед, площадь основания которого равна ΔS . Поток вектора \vec{E} в этом случае будет равен потоку через основания параллелепипеда, поскольку для остальных его граней $\vec{E} \perp \vec{dS}$. Так как для обоих оснований параллелепипеда $\vec{E} \uparrow \vec{dS}$ и на их поверхностях

z фиксировано, т. е. $E(z) = const$, интересующий нас поверхностный интеграл будет равен

$$\oint_S \vec{E}(z) d\vec{S} = 2\Delta S \cdot E(z). \quad (5.23)$$

Заряд $q_{\text{внутр.}}$, заключенный внутри выбранной замкнутой поверхности S , в силу $\sigma = const$ равен $\Delta S \cdot \sigma$. Поэтому применение теоремы Гаусса приводит к равенству

$$2\Delta S \cdot E(z) = 4\pi \cdot \Delta S \sigma,$$

откуда

$$E(z) = 2\pi\sigma.$$

Однако полученное равенство не учитывает изложенных выше соображений относительно знака $E(z)$. Этот недостаток легко исправить, воспользовавшись ступенчатой функцией

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} +1, & z > 0, \\ -1, & z < 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Для того чтобы равенство 5.21 верно отражало направление поля \vec{E} , правильным будет записать решение в виде

$$E(z) = 2\pi\sigma \cdot \text{sgn}(z). \quad (5.25)$$

Проинтегрируем уравнение 5.22, чтобы получить функцию потенциала электрического поля $\varphi(z)$. Интегралом от функции $\text{sgn}(z)$ является функция $|z|$. Поэтому, с учетом знака и полагая константу интегрирования равной нулю, получаем

$$\varphi(z) = -2\pi\sigma \cdot |z|. \quad (5.26)$$

Графики полученных решений $E(z)$ и $\varphi(z)$ изображены соответственно на Рис. 5.8 и 5.9.

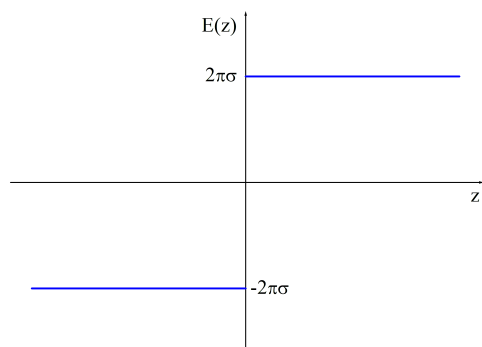


Рис. 5.8. Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью

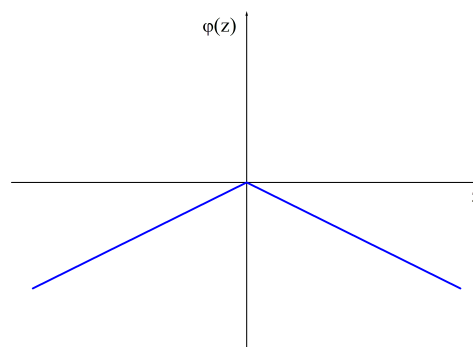


Рис. 5.9. Потенциал электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью

Уравнение Пуассона и его решение

Ранее мы уже приводили общий вид для потенциала электрического поля $\varphi(\vec{r})$ 3.6, полученный на основании общих соображений, основанных на законе Кулона и уравнении 5.2. Покажем теперь, что потенциал 3.6 действительно является решением уравнений Максвелла в случае электростатики, т. е. решением системы уравнений 5.1. Как выглядит система уравнений 5.1 в терминах потенциала φ , легко понять, если подставить в неё электрическое поле в виде 5.2:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) = -\Delta \varphi = 4\pi\rho,$$

или

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (5.27)$$

Уравнение для потенциала электрического поля 5.27 называется уравнением Пуассона. В общем случае для электростатики потенциал $\varphi(\vec{r})$ находится как его решение, а напряженность электрического поля \vec{E} — по формуле 5.2. Решение уравнения Пуассона следует искать как

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_{\text{ч.н.}}(\vec{r}), \quad (5.28)$$

где $\varphi_0(\vec{r})$ является решением однородного уравнения

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 0, \quad (5.29)$$

а $\varphi_{\text{ч.н.}}(\vec{r})$ — частным решением неоднородного уравнения 5.27. Однородное уравнение 5.29 называется уравнением Лапласа. Его решение зависит от конкретных граничных условий. Найдем частное решение неоднородного уравнения $\varphi_{\text{ч.н.}}(\vec{r})$, используя метод функции Грина. Для этого представим правую часть уравнения 5.27 в виде

$$-4\pi\rho(\vec{r}) = -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.30)$$

Уравнение 5.30 является верным равенством, поскольку дельта-функция Дирака обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad (5.31)$$

которое обобщается также и на трехмерный случай, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3r f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) = f(\vec{a}), \quad (5.32)$$

где интегрирование ведется по всему трехмерному пространству. Чтобы использовать это свойство, область интегрирования V в уравнении 5.30 следует считать бесконечной. Решение уравнения 5.27 будем искать в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}'), \quad (5.33)$$

где $G(\vec{r}, \vec{r}')$ — функция Грина, которую нам теперь предстоит искать, а интеграл также берется по всему пространству. Подставим решение в таком виде в уравнение 5.27, в котором правую часть запишем как 5.30:

$$\int_V d^3r' \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') = -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.34)$$

Производные оператора Лапласа в полученном равенстве действуют только на компоненты вектора \vec{r} и не действуют на компоненты вектора \vec{r}' , что соответствует нашей прежней договоренности об обозначениях. Из уравнения 5.34 понятно, что теперь остается найти такую функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$, которая удовлетворяла бы уравнению

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.35)$$

Сделаем предположение, что функция $G(\vec{r}, \vec{r}')$ зависит только от разности векторов \vec{r} и \vec{r}' :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (5.36)$$

то есть можно искать решение уравнения

$$\Delta G(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.37)$$

Сравнение уравнения 5.37 с известным нам свойством оператора Лапласа 2.11 подсказывает готовое решение для функции Грина

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.38)$$

Можно убедиться в его правильности, непосредственно решив уравнение 5.37. Обозначим временно аргумент $\vec{r} - \vec{r}'$ вектором \vec{y} . Нам понадобится применить к искомой функции Грина и к дельта-функции в правой части равенства 5.37 разложение Фурье:

$$G(\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{y}}, \quad (5.39)$$

$$\delta^3(\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{y}}. \quad (5.40)$$

В обоих приведенных разложениях интегрирование ведется по бесконечному трехмерному пространству, координаты в котором определяются радиусом-вектором \vec{k} . Оператор Лапласа в новых обозначениях теперь будет действовать на \vec{y} , поскольку, как уже говорилось, он действует только на \vec{r} и очевидно $\vec{\nabla}(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{r} - \vec{r}')$. Применение этого оператора к функции Грина в виде 5.39 эквивалентно двум последовательным применениям оператора $\vec{\nabla}$, каждый из которых будет действовать только на экспоненту и добавит в результате своего действия коэффициент $i\vec{k}$ к интегралу в уравнении 5.39. Из этого следует, что

$$\Delta G(\vec{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k G(\vec{k}) \cdot k^2 e^{i\vec{k}\vec{y}}, \quad (5.41)$$

где $k = |\vec{k}|$. Подставляя выражения 5.41 и 5.40 в уравнение 5.37, с учетом произведенной замены аргумента на \vec{y} , получаем

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k^2 G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{y}} = -4\pi \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{y}}, \quad (5.42)$$

откуда можно найти Фурье-образ функции Грина $G(\vec{k})$, приравнявая подынтегральные выражения:

$$G(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2}. \quad (5.43)$$

Подставим найденный Фурье-образ в уравнение 5.39 :

$$G(\vec{y}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{y}} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d^3k}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{y}}. \quad (5.44)$$

Для того чтобы взять полученный интеграл, проще всего выбрать в пространстве с координатами \vec{k} сферическую систему координат, направление оси z в которой совпадало бы с направлением вектора \vec{y} . При таком выборе угол между векторами \vec{k} и \vec{y} будет совпадать с полярным углом сферической координатной системы θ . Тогда интеграл 5.44 запишется как

$$\begin{aligned} G(\vec{y}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{iky \cos(\theta)} = \\ &= \frac{2\pi}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{iky \cos(\theta)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{iky \cos(\theta)}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Сделаем замену

$$x = \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = -\sin(\theta) d\theta,$$

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,$$

$$\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(\vec{y}) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_1^{-1} dx e^{iky} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{1}{iky} e^{iky} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{1}{iky} (e^{iky} - e^{-iky}) = \\ &= \frac{2}{\pi y} \int_0^{\infty} dk \frac{\sin(ky)}{k}. \end{aligned}$$

Теперь после простой замены $x = ky$ получаем

$$G(\vec{y}) = \frac{2}{\pi y} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x}. \quad (5.46)$$

Поскольку $\sin(x)$ и x — нечетные функции, а значит, в целом подынтегральная функция является четной, результат можно записать как

$$G(\vec{y}) = \frac{1}{\pi y} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x}. \quad (5.47)$$

В точке $x = 0$ имеется неопределенность, однако предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ существует и конечен. Интеграл $\int_0^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x}$ сходится, а значит сходится и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x}$.

Известно, что если интеграл вида $\int_a^b f(x) dx$ с единственной особой точкой $c \in (a; b)$ сходится, его значение совпадает с его главным значением. Главным значением такого интеграла называется предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right)$, который мы будем

обозначать как *v.p.* $\int_a^b f(x) dx$. Будем вычислять интеграл 5.47 в смысле главного значения, для чего представим функцию $\sin x$ как

$$\sin x = \text{Im} \left(e^{ix} \right), \quad (5.48)$$

а интересующую нас область интегрирования — как участок замкнутого контура C в комплексной плоскости, изображенного на Рис. 5.10. Как видно из рисунка, контур C состоит из интересующей нас области 1, интегрирование по которой даст

искомый интеграл в смысле главного значения, полуокружности 2, радиус которой δ стремится к нулю, и полуокружности 3, радиус которой ε стремится к бесконечности. Таким образом, нам теперь требуется вычислить мнимую часть интеграла $\int_{\text{Обл.1}} \frac{dx}{x} e^{ix}$.

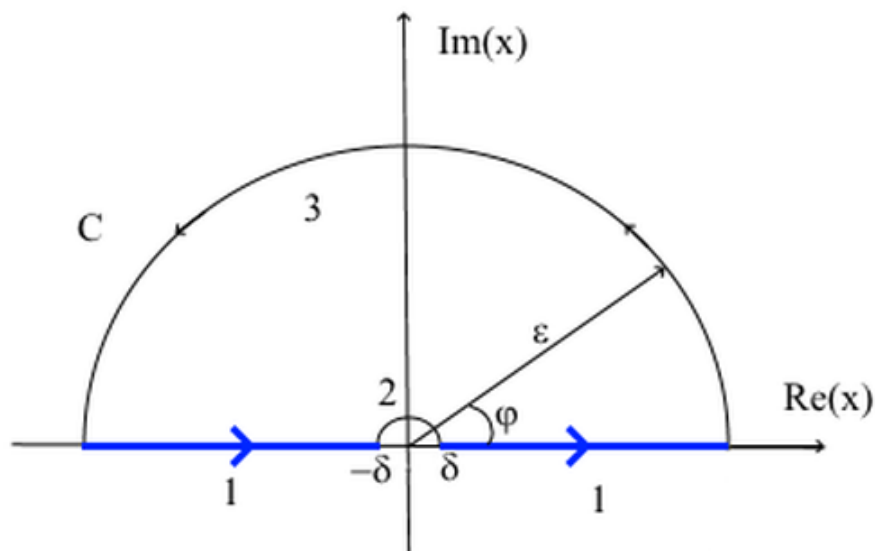


Рис. 5.10. Замкнутый контур интегрирования в комплексной плоскости

Поскольку внутри контура C не содержится никаких особых точек,

$$\oint_C \frac{dx}{x} e^{ix} = 0. \quad (5.49)$$

С другой стороны,

$$\oint_C \frac{dx}{x} e^{ix} = \int_{\text{Обл.1}} \frac{dx}{x} e^{ix} + \int_{\text{Обл.2}} \frac{dx}{x} e^{ix} + \int_{\text{Обл.3}} \frac{dx}{x} e^{ix}. \quad (5.50)$$

Интеграл по области 3 соответствует условиям леммы Жордана, которая говорит о том, что на полуокружности

$$\gamma: x = \varepsilon e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (5.51)$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(x) e^{itx} dx = 0 \quad \forall t > 0, \quad (5.52)$$

если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\max_{x \in \gamma} |f(x)| \right) = 0. \quad (5.53)$$

Поскольку область 3 как раз является такой полуокружностью и в нашем случае $t = 1$, интеграл по этой области обращается в ноль, и поэтому в силу 5.50 справедливо

$$\int_{\text{Обл.1}} \frac{dx}{x} e^{ix} = - \int_{\text{Обл.2}} \frac{dx}{x} e^{ix}. \quad (5.54)$$

При интегрировании по области 2 в силу $x \rightarrow 0$ можно положить $e^{ix} = 1$ и вычислять интеграл $\int_{\text{Обл.2}} \frac{dx}{x}$. Удобно представить x в виде

$$x = \delta e^{i\varphi} \Rightarrow dx = i\delta e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$\begin{cases} x = -\infty & \Rightarrow \varphi = \pi, \\ x = \infty & \Rightarrow \varphi = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\text{Обл.2}} \frac{dx}{x} = \int_{\pi}^0 \frac{i\delta e^{i\varphi} d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = -i \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi. \quad (5.55)$$

Подставляя результат интегрирования по области 2 в 5.54, получаем

$$\int_{\text{Обл.1}} \frac{dx}{x} e^{ix} = i\pi, \quad (5.56)$$

однако следует помнить, что мы ищем не сам интеграл по области 1, а его мнимую часть, поскольку мы воспользовались равенством 5.48. Итак, мы вычислили интеграл

$$\text{Im} \int_{\text{Обл.1}} \frac{dx}{x} e^{ix} = \pi = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x}. \quad (5.57)$$

Теперь осталось подставить результат в выражение для функции Грина 5.47 и получить ответ

$$G(\vec{y}) = \frac{1}{\pi y} \cdot \pi = \frac{1}{y} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.58)$$

где мы вернулись к прежним обозначениям $\vec{y} = \vec{r} - \vec{r}'$. Заметим, что ответ 5.58 полностью совпадает с ответом 5.38, который мы получили из знания свойства оператора Лапласа 2.11. Решение для функции Грина теперь следует подставить в решение для потенциала электрического поля $\varphi(\vec{r})$ в виде 5.33, в результате чего мы получим в точности уравнение 3.6. Таким образом мы показали, что записанное ранее выражение для потенциала 3.6 действительно является решением общего уравнения, которому потенциал $\varphi(\vec{r})$ подчиняется в случае электростатики, то есть уравнения Пуассона 5.27. Потенциал 3.6 можно интерпретировать как суперпозицию потенциалов электрического поля, создаваемого точечными зарядами, положение которых определяется радиус-вектором \vec{r}' , а величина — плотностью $\rho(\vec{r}')$.

Пример задачи на определение $\varphi(\vec{r})$ и $\vec{E}(\vec{r})$ с использованием общего вида потенциала как решения уравнения Пуассона

Проиллюстрируем на примере конкретной задачи, как можно отыскать потенциал $\varphi(\vec{r})$ по формуле 3.6, а напряженность электрического поля соответственно по формуле 5.2. Рассмотрим задачу о равномерно заряженном тонком диске радиуса R . Пусть требуется вычислить \vec{E} и φ на его оси симметрии на произвольном расстоянии от диска. Воспользуемся цилиндрической системой координат, в которой переменные ρ и φ назовем ρ' и φ' , чтобы не путать их с плотностью заряда и потенциалом электрического поля. Начало координат совместим с центром диска, так чтобы его ось симметрии совпадала с осью z (см. Рис. 5.11). По координате φ' , очевидно, имеется симметрия, а поскольку на оси симметрии диска $\rho' = 0$, потенциал φ и напряженность \vec{E} на ней будут зависеть только от z :

$$\varphi \Big|_{\rho'=0} = \varphi(z); \quad \vec{E} \Big|_{\rho'=0} = \vec{e}_z E(z), \quad (5.59)$$

где мы учли что на оси цилиндра поле \vec{E} сонаправлено либо противоположно вектору \vec{e}_z .

Формула 5.2 тогда, с учетом вида градиента в цилиндрических координатах 5.17, сведется к

$$E(z) = -\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}. \quad (5.60)$$

Интегрирование по объему в выражении 3.6 в задаче о тонком диске следует

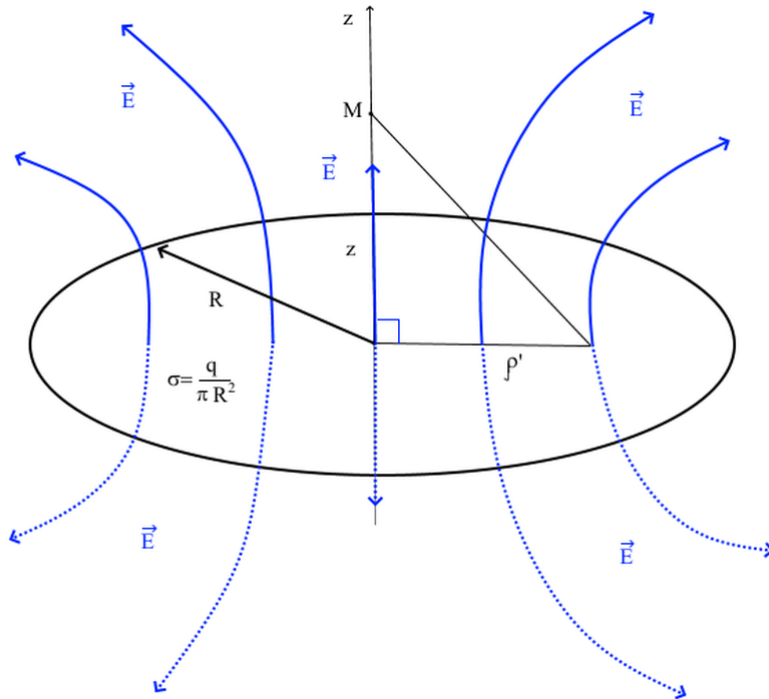


Рис. 5.11. К вычислению φ и \vec{E} равномерно заряженного тонкого диска

заменить на интегрирование по площади диска, т. е. по координатам ρ' и φ' , так как на поверхности диска $z = 0$. Роль объемной плотности заряда $\rho(\vec{r}')$ здесь будет соответственно выполнять поверхностная плотность заряда $\sigma = const = \frac{q}{\pi R^2}$. И наконец, вместо присутствующих в формуле 3.6 векторов \vec{r} и \vec{r}' в рассматриваемой задаче выступают соответственно переменные z и ρ' , а модулю их разности $|\vec{r} - \vec{r}'|$ соответствует расстояние $\sqrt{z^2 + \rho'^2}$, что легко понять из рисунка, используя теорему Пифагора. Таким образом для рассматриваемой задачи выражение 3.6 дает для потенциала на оси диска выражение

$$\begin{aligned} \varphi(z, \rho' = 0) &= \sigma \int_S \frac{dS}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} = \sigma \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi\sigma \cdot \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \frac{dx}{\sqrt{z^2 + x}} = \\ &= \pi\sigma \cdot 2\sqrt{z^2 + x} \Big|_0^{R^2} = 2\pi\sigma \left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2} \right), \end{aligned}$$

или окончательно

$$\varphi(z, \rho' = 0) = 2\pi\sigma \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right). \quad (5.61)$$

Величину $E(z)$ теперь легко найти по формуле 5.60, подставив в неё полученное решение для потенциала 5.61:

$$E(z, \rho' = 0) = -2\pi\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \operatorname{sgn}(z) \right).$$

Вектор электрического поля будет равен, соответственно

$$\vec{E}(z, \rho' = 0) = -2\pi\sigma \vec{e}_z \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \operatorname{sgn}(z) \right). \quad (5.62)$$

Исследуем асимптотики полученных решений при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$. С достаточно большого расстояния заряженный диск будет казаться точечным зарядом, поэтому при $z \rightarrow \infty$ его электрическое поле и потенциал должны выглядеть как $\sim \frac{q}{z^2}$ и $\sim \frac{q}{|z|}$ соответственно. В предположении $z \rightarrow \infty$ разумно воспользоваться разложением в ряд Тейлора по малой величине $\frac{R}{z}$. Для потенциала 5.61 тогда мы получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi(z \rightarrow \infty, \rho' = 0) &= 2\pi\sigma \left(|z| \sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - |z| \right) \simeq 2\pi\sigma |z| \left(1 + \frac{R^2}{2z^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{\pi\sigma R^2}{|z|} = \frac{q}{|z|}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где мы подставили $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ и воспользовались следующим приближенным равенством при $x \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1 + x^2} \simeq 1 + \frac{x^2}{2}. \quad (5.64)$$

Для электрического поля 5.62 соответствующей асимптотикой будет

$$\begin{aligned} \vec{E}(z \rightarrow \infty, \rho' = 0) &= -2\pi\sigma \vec{e}_z \left(\frac{z}{|z|} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} - \operatorname{sgn}(z) \right) = \\ &= -2\pi\sigma \vec{e}_z \operatorname{sgn}(z) \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} - 1 \right) = \vec{e}_z \frac{q}{z^2} \operatorname{sgn}(z), \end{aligned} \quad (5.65)$$

где было учтено, что при $x \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \simeq 1 - \frac{x^2}{2}. \quad (5.66)$$

Таким образом мы убедились, что при $z \rightarrow \infty$ решения 5.61 и 5.62 действительно воспроизводят электрические поле и потенциал точечного заряда с учетом знака

и направления. При $z \rightarrow 0$, напротив, заряженный диск должен казаться бесконечной заряженной плоскостью, а значит, решения 5.61 и 5.62 для $\varphi(z \rightarrow 0)$ и $\vec{E}(z \rightarrow 0)$ должны воспроизводить соответственно полученные ранее решения 5.26 и 5.25. Выражение для потенциала 5.61 при $z \rightarrow 0$ сведется к

$$\varphi(z \rightarrow 0, \rho' = 0) = 2\pi\sigma(R - |z|), \quad (5.67)$$

а выражение 5.62 можно будет записать как

$$\vec{E}(z \rightarrow 0, \rho' = 0) = -2\pi\sigma\vec{e}_z(-\text{sgn}(z)) = 2\pi\sigma\vec{e}_z\text{sgn}(z). \quad (5.68)$$

Поскольку величину $2\pi\sigma R$ в асимптотике для потенциала можно считать произвольной добавочной константой, видно, что при $z \rightarrow 0$ поле \vec{E} и потенциал φ также верно воспроизводят электрические поле 5.25 и потенциал 5.26 бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Лекция 6. Мультипольное разложение в низших порядках

Мультипольное разложение

Ранее рассмотрели решение уравнения Максвелла в частном случае электростатики распределения электрических зарядов. В статическом случае воздействия электрического поля (производная по времени отсутствует в выражении):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases}, \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Подстановка электрического поля в уравнение Максвелла дает уравнение Пуассона.

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

решение которого складывается из решения однородного уравнения, определяемого граничными условиями, и частного решения неоднородного уравнения, вид последнего:

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

где $\rho(\vec{r})$ - плотность заряда.

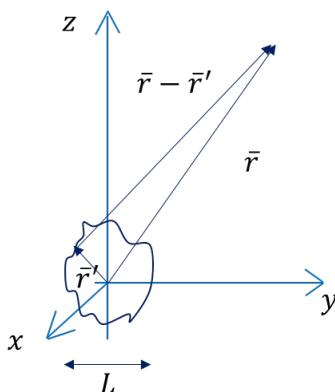


Рис. 6.1 Область зарядов с характерным размером L , рассматриваемая на расстоянии r

Можно строить потенциал с помощью формулы для $\varphi(\vec{r})$ неточно, приближенно для расстояний, на которых заряд можно считать точечным. Используемый метод называется *мультипольным приближением*. Пусть заряд задается вектором \vec{r}' , точка, в которой измеряем поле, задается вектором \vec{r} , а характерный размер системы L .

$$|\vec{r}'| < L, \frac{L}{r} \ll 1$$

Рассмотрим величину $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ в случае, когда заряды сосредоточены в небольшой области, потенциал и электрическое поле системы измеряем на большом расстоянии от неё (рис. 6.1).

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

Используем приближение $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3)$, тогда

$$\frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} \approx \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{3}{8}(-2)^2 \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^4} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \dots \right\}$$

Учёт приближения позволяет переписать потенциал в виде

$$\varphi(\vec{r}) \approx \int dV' \rho(\vec{r}') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{2r^3} + \dots \right\}$$

Интегрирование производится по переменной r' , поэтому некоторые слагаемые можно вынести за скобки. Учитываем также, что

А) заряд q и дипольный момент \vec{p} есть следующие интегралы

$$q = \int dV' \rho(\vec{r}'), \quad \vec{p} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$$

Б) слагаемое $\frac{3}{2} \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5}$ можно записать в индексном виде

$$\frac{3}{2} \frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} = \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{1}{2r^5} [3x_i x_j x'_i x'_j - r^2 r'^2] = |r^2 = r'^2 = x_i x_j = \delta_{ij} x_i x_j| =$$

$$= \frac{x_i x_j}{2r^5} \int dV' \rho(\vec{r}') \left[3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2 \right] = \frac{x_i x_j}{2r^5} Q_{ij}$$

Причём $Q_{ij} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') \left[3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2 \right] = Q_{ji}$ – симметричный тензор квадрупольного момента.

Учёт вышеуказанных замечаний позволяет *переписать потенциал* в виде

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \vec{p}}{r^3} + \frac{x_i x_j}{2r^5} Q_{ij} + \dots$$

Замечание: квадрупольный момент Q_{ii} принимает следующее значение

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = Q_{ii} = \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\underbrace{3 x'_i x'_i}_{r'^2} - \underbrace{\delta_{ii}}_3 r'^2 \right] = 0$$

Таким образом, есть только 5 независимых компонент: $Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}$.

Случай возникновения дипольного момента

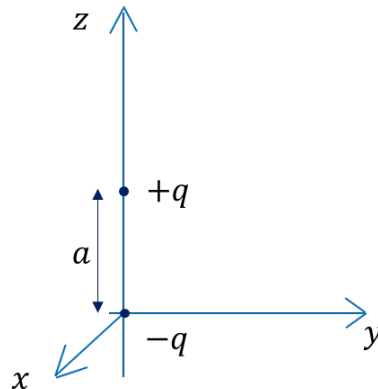


Рис. 6.2 Система разделенных положительных и отрицательных зарядов на расстоянии a друг от друга

Дипольный момент может возникать в системе, где положительные и отрицательные заряды разделены в пространстве. Пусть a – расстояние между такими группами зарядов (рис. 6.2).

Потенциал системы

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2za + a^2}} - \frac{q}{r} = \frac{q}{r\sqrt{1 - \frac{2za}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}}} - \frac{q}{r}$$

Учитываем использованное ранее приближение для корня

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} \left(1 + \frac{za}{r^2}\right) - \frac{q}{r} + \dots = \frac{qaz}{r^3} + \dots = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots,$$

где $\vec{p} = \vec{e}_z qa$. Здесь в мультипольном приближении ведущим слагаемым будет **дипольное**. Используя следующую формулу, можно также рассчитать дипольный момент с учетом перехода от непрерывных зарядов к точечным

$$\vec{p} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \equiv qa \vec{e}_z - q \vec{0} = qa \vec{e}_z$$

Квадрупольное ведущее слагаемое в мультипольном разложении

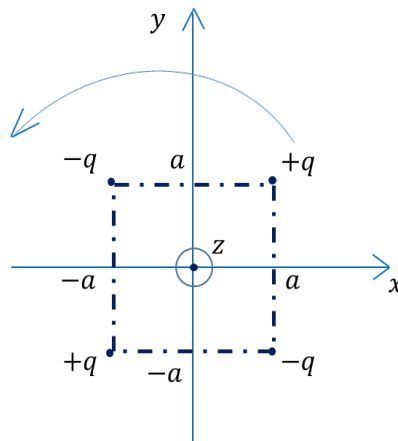


Рис. 6.3 Система разделенных положительных и отрицательных зарядов на расстоянии $2a$ друг от друга

Пусть теперь в мультипольном приближении ведущим слагаемым будет **квадрупольное**. Полный заряд системы и дипольный момент p есть ноль:

$$q - q + q - q = 0, p = 0$$

Расчёт проекций дипольного момента:

$$p_x = qa - q(-a) + q(-a) - qa = 2qa - 2qa = 0$$

$$p_y = 0, p_z = 0$$

Тензор квадрупольного момента по определению

$$Q_{ij} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') \left[3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2 \right]$$

Рассчитаем Q_{xx}

$$Q_{xx} = \int dV' \rho(\vec{r}') [3x'^2 - r'^2] = \int dV' \rho(\vec{r}') [2x'^2 - y'^2 - z'^2] = ?$$

$$q(3a^2 - 2a^2) - q(3a^2 - 2a^2) + q(3a^2 - 2a^2) - q(3a^2 - 2a^2) = 0$$

Аналогично рассчитываем Q_{yy} и Q_{zz} с учётом того, что сумма диагональных компонент тензора есть ноль:

$$Q_{yy} = 0, \quad 0 = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} \Rightarrow Q_{zz} = 0$$

Недиагональные элементы тензора:

$$Q_{xz} = \int dV' \rho(\vec{r}') [3x'z' - 0] = 0, \quad Q_{yz} = 0$$

$$Q_{xy} = \int dV' \rho(\vec{r}') 3x'y' = 3qa^2 + 3qa^2 + 3qa^2 + 3qa^2 = 12qa^2 \neq 0$$

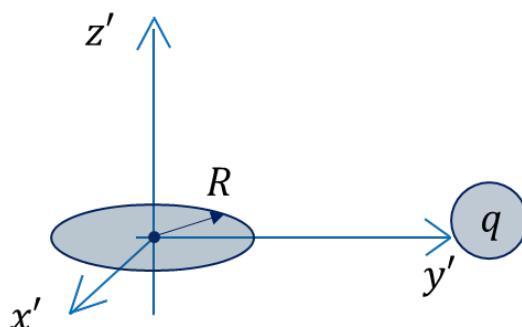


Рис. 6.4 Заряженный диск

Заряженный диск является примером системы, для которой нет дипольного момента, есть квадрупольный. Рассчитаем величины, входящие в разложение с учётом симметрии диска. Дипольный момент:

$$p_z = \int dV' \rho(\vec{r}') z' = 0,$$

$$p_x = \int dV' \rho(\vec{r}') x' = 0, \quad p_y = 0$$

Компоненты квадрупольного момента:

$$Q_{xz} = \int dV' \rho(\vec{r}') 3x'z' = 0, \quad Q_{yz} = 0$$

$$Q_{xy} = \int dV' \rho(\vec{r}') 3x'y' = 0, \quad Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{-1}{2} Q_{zz} = \frac{-1}{2} (-Q_{xx} - Q_{yy})$$

$$Q_{zz} = \int dV' \rho(\vec{r}') (3z'^2 - r'^2) = - \int dV' \rho(\vec{r}') (x'^2 + y'^2) \cong - \int dS' \frac{q}{\pi R^2} \rho'^2 =$$

$$= - \int_0^R d\rho \rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{q}{\pi R^2} \rho'^2 = \frac{2qR^4}{R^2 \cdot 4} (-1) = \frac{-qR^2}{2}$$

причем здесь ρ – плотность диска, ρ' – расстояние от точки диска до начала координат

Таким образом, получаем диагональные компоненты тензора квадрупольного момента

$$Q_{zz} = \frac{-qR^2}{2}, \quad Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{qR^2}{4}$$

Ранее получали потенциал, вычисленный для точек на оси z :

$$\varphi(z, \rho = 0) = \frac{2q}{R^2} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right)$$

Можно переписать в виде

$$\varphi(z, \rho = 0) = \frac{2q}{R^2} \left(|z| \sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - |z| \right)$$

И учитывая разложение $\sqrt{x+1} \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$, получаем

$$\varphi(z, \rho = 0) \cong \frac{2q|z|}{R^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{R^2}{z^2} \right)^2 + \dots - 1 \right) = \frac{2q|z|}{R^2} \left(\frac{R^2}{2z^2} - \frac{1}{8} \frac{R^4}{z^4} + \dots \right)$$

$$\varphi(z, \rho = 0) \cong \frac{q}{|z|} - \frac{qR^2}{4|z|^3} + \dots$$

Сравним данное выражение с выражением для потенциала, представленном в мультипольном разложении

$$\varphi(z, \rho = 0) \approx \frac{q}{|z|} + \frac{z^2}{2|z|^5} Q_{zz} + \dots = \frac{q}{|z|} + \frac{1}{2|z|^3} \left(\frac{-qR^2}{2} \right) + \dots = \frac{q}{|z|} - \frac{qR^2}{4|z|^3} + \dots$$

Итог: Получили одинаковые приближения. Использование мультипольного разложения равносильно использованию точной формулы в разложении по малому параметру.

Выражения для электрического поля

Посчитаем для каждого из слагаемых мультипольного разложения (заряд, диполь, квадруполь) электрическое поле $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

1. Заряд

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{q}{r}\right) = \frac{q}{r^2}\vec{\nabla}r = \vec{l}_r\frac{q}{r^2} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

2. Диполь

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{-\vec{\nabla}(\vec{p}\vec{r})}{r^3} - (\vec{p}\vec{r})\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$$

Учитываем

$$\vec{\nabla}(\vec{p}\vec{r}) = \vec{p}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x$$

тогда

$$\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})}{r^4}\vec{\nabla}r = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{r^5}[3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2]$$

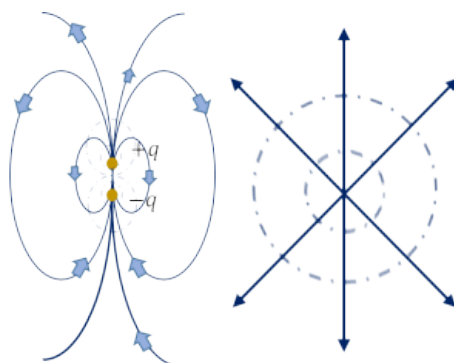


Рисунок 6.5 Слева: ЭП диполя, пунктир – эквипотенциальные поверхности.

Справа: положительный заряд (линии ЭП выходят из него), пунктир – эквипотенциальные сферы.

3. Квадруполь (используем индексное представление)

$$E_i = \frac{-\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{-\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x_i x_j Q_{ij}}{2r^5}\right) = \frac{-1}{2}Q_{jk}\left[\delta_{ij}x_k\frac{1}{r^5} + \delta_{ik}x_j\frac{1}{r^5} - \frac{5x_i x_j}{r^6}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right]$$

Заметим, что

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \left(\vec{\nabla} r \right)_i = \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)_i = \frac{x_i}{r}$$

тогда получаем, что электрическое поле есть

$$E_i = \frac{-1}{2} Q_{ik} \frac{x_k}{r^5} - \frac{1}{2} Q_{ji} \frac{x_j}{r^5} + \frac{5}{2r^7} Q_{jk} x_i x_j x_k = \frac{5}{2r^7} Q_{jk} x_i x_j x_k - Q_{ij} \frac{x_j}{r^5}$$

Общий вид мультипольного разложения

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Разложение функции в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x+a) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) a + \frac{1}{2!} f''(x) a^2 + \dots \quad (1)$$

Аналогичная формула получается для функции нескольких переменных (функция зависит от радиус-вектора \vec{r} и смещается на вектор \vec{a})

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = f(\vec{r}) + \frac{1}{1!} \left(a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \dots$$

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = f(\vec{r}) + \frac{1}{1!} \left(\vec{a} \vec{\nabla} \right) f(\vec{r}) + \frac{1}{2!} \left(\vec{a} \vec{\nabla} \right)^2 f(\vec{r}) \quad (2)$$

Используем формулу для разложения функции $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1!} \left(-\vec{r}' \vec{\nabla} \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \left(-\vec{r}' \vec{\nabla} \right)^2 \frac{1}{r} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\vec{r}' \vec{\nabla} \right)^l \frac{1}{r} = ?$$

$$\left| \left(\vec{r}' \vec{\nabla} \right) \right| = x'_i \frac{\partial}{\partial x^i} = x'_i \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} x'_i x'_j \dots x'_l \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Обозначим симметричный тензор $D_{i_1 i_2 \dots i_l} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$. Для него верно:

$$D_{kk i_3 \dots i_l} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{r} \right) = \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\vec{r}) \equiv 0$$

Вычислим первые три слагаемых

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{x'_i x_i}{r^3} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{-x_j}{r^3} \right) + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\left(\vec{r}' \vec{r}' \right)}{r^3} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \left[\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x_i x_j}{r^5} \right] + \dots$$

Получили похожие на мультипольное разложение слагаемые. Вспомним, что потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \rho(\vec{r}') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\left(\vec{r}' \vec{r}' \right)}{r^3} + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x_i x_j}{r^5} \right]}_{D_{ij}} \left[x'_i x'_j - \underbrace{\frac{1}{3} \delta_{ij} \vec{r}'^2}_0 \right] + \dots \right\} =$$

выделенные слагаемые в произведении дают ноль, поэтому

$$= \int dV' \rho(\vec{r}') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\left(\vec{r}' \vec{r}' \right)}{r^3} + \frac{1}{2r^5} x_i x_j \left[3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2 \right] + \dots \right\} = \frac{q}{r} + \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r^3} + \frac{1}{2r^5} x_i x_j Q_{ij} + \dots$$

Получили мультипольное разложение. Наблюдается закономерность, можем написать формулу для $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ в общем виде

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} x'_1 x'_2 \dots x'_l \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \dots \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{r} \right) = ?$$

производные есть бесследовый тензор

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\underbrace{x'_1 x'_2 \dots x'_l}_{T_{i_1 i_2 \dots i_l}} + \begin{matrix} \text{слагаемые} \\ \text{с } \delta - \text{симв.} \end{matrix} \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Введём симметричную величину $T_{i_1 i_2 \dots i_l}$, свертка которой $T_{kk_1 k_2 \dots k_l} = 0$. Обозначая стрелкой отбрасывание δ симпола, распишем

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_{l-1}}} \left(\frac{-x^{i_l}}{r^3} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_{l-2}}} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{x^{i_l} x^{i_{l-1}}}{r^5}$$

Продолжая дифференцировать, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow (-1)^l (2l-1)!! \frac{x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_l}}{r^{2l+1}}$$

где $(2l-1)!! = (2l-1) \cdot (2l-3) \cdot \dots \cdot 1$.

Лекция 7. Общий вид мультипольного разложения

Мультипольное разложение

В прошлой лекции начали рассматривать мультипольное разложение для системы зарядов, рассматриваемых с больших расстояний, потенциал которого есть

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Мультипольное разложение осуществляется путем разложения в ряд Тейлора функции потенциала:

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) a + \frac{1}{2!} f''(x) a^2 + \dots \\ f(\vec{r} + \vec{a}) &= f(\vec{r}) + \frac{1}{1!} \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\vec{r}) + \dots = \\ &= f(\vec{r}) + \frac{1}{1!} (\vec{a} \vec{\nabla}) f(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\vec{a} \vec{\nabla})^2 f(\vec{r}) \end{aligned}$$

Для множителя $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} - \frac{1}{1!} (\vec{r}' \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} (-\vec{r}' \vec{\nabla})^2 \frac{1}{r} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\vec{r}' \vec{\nabla})^l \frac{1}{r} =? \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} x'_1 x'_2 \dots x'_l \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Вводим симметричный бесследовый тензор

$$\begin{aligned} D_{i_1 i_2 \dots i_l} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) \\ D_{k k i_3 \dots i_l} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{r} \right) = \Delta \frac{1}{r} = 0 (\vec{r} \neq 0) \end{aligned}$$

Перепишем тогда выражение для потенциала в виде:

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left[\int dV' \rho(\vec{r}') x'_1 x'_2 \dots x'_l \right] \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Рассмотрим частный случай, когда $l = 2$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int dV' \rho(\vec{r}') x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{r} \right) &= \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{-x^j}{r^3} \right) = \frac{3x^i x^j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \int dV' \rho(\vec{r}') \left(x'_i x'_j - \underbrace{\frac{1}{3} \delta_{ij} \vec{r}'^2}_{=0} \right) \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int dV' \rho(\vec{r}') \left(3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2 \right) \left(\frac{x_i x_j}{r^5} - \underbrace{\frac{\delta_{ij}}{3r^3}}_{=0} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{\left(3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2 \right)}_{Q_{ij}} \frac{x_i x_j}{r^5} = \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}
 \end{aligned}$$

Q_{ij} – квадрупольный момент, рассматривали в предыдущей лекции.

Рассмотрим симметричный бесследовый тензор

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_{l-1}}} \left(\frac{-x^{i_l}}{r^3} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_{l-2}}} \left(\frac{3x^{i_{l-1}} x^{i_l}}{r^5} + \underbrace{\text{слагаемые}}_{\text{с } \delta - \text{ симв.}} \right) = \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{r^{2l+1}} \left[x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_l} + \underbrace{\text{слагаемые}}_{\text{с } \delta - \text{ симв.}} \right]
 \end{aligned}$$

Здесь $(2l-1)!! = (2l-1)(2l-3) \dots 1$.

С учетом всех формул, перепишем потенциал в виде:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{(2l-1)!! \left[x'_i x'_j \cdots x'_{i_l} + \underbrace{\text{слагаемые}}_{\text{с } \delta - \text{ симв.}} \right]}_{Q_{i_1 i_2 \dots i_l} \text{ } l\text{-й мультипольный момент}} \frac{1}{r^{2l+1}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l}$$

Помним про бесследовость $Q_{kk i_3 \dots i_l} = 0$. Квадрупольные моменты для $l = 2$ и $l = 3$

$$\begin{aligned}
 l = 2 : Q_{ij} &= \int dV' \rho(\vec{r}') \left[3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2 \right] \\
 l = 3 : Q_{ijk} &= \int dV' \rho(\vec{r}') \left[15x'_i x'_j x'_k - 3 \left(\delta_{ij} x'_k + \delta_{ik} x'_j + \delta_{jk} x'_i \right) \vec{r}'^2 \right] \\
 Q_{iik} &= \int dV' \rho(\vec{r}') \left[15x'_i x'_i x'_k - 3 \left(3x'_k + x'_k + x'_k \right) \vec{r}'^2 \right] = 0
 \end{aligned}$$

Вычислим количество независимых компонент тензора с учетом бесследовости тензора

$$N = \frac{3 \times 4 \times \dots \times (l+2)}{l!} - \frac{3 \times 4 \times \dots \times l}{(l-2)!} = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - \frac{1}{2}(l-1)l = ?$$

$$= \frac{1}{2}[l^3 + 3l + 2 - l^2 + l] = \frac{1}{2}[4l + 2] = 2l + 1$$

Для разных случаев количество компонент:

$$l = 0 \text{ (заряд)} \quad 1$$

$$l = 1 \text{ (диполь)} \quad \rightarrow 3$$

$$l = 2 \text{ (квадруполь)} \quad 5$$

Теорема сложения сферических функций

Существует связь сферических функций и мультипольного разложения. **Теорема сложения** имеет вид

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta) - \text{сферические функции}$$

Здесь $P_l^m(\cos \theta)$ – присоединенные ф. Лежандра, $l = \overline{0, \infty}$, $m = \overline{-l, l}$ (кол-во $2l+1$)

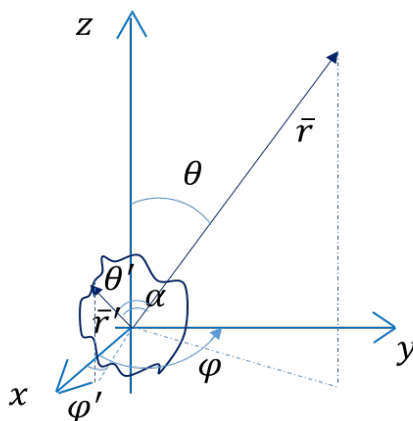


Рис. 7.1 Рассматриваемая система $r > r'$

Углы θ и φ задают положение вектора \vec{r} в пространстве, θ' и φ' задают положение вектора \vec{r}' в пространстве, угол α есть угол между векторами \vec{r} и \vec{r}' (рис 7.1).

Присоединенные функции Лежандра

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} \left[\frac{(-1)^m}{2^l l!} (x^2-1)^l \right]$$

Полиномы Лежандра

$$P_l^0(x) \equiv P_l(x)$$

$$Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi)$$

Запишем выражение для $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2}} = \left| \frac{r > r'}{\vec{r}\vec{r}' = r'r \cos \alpha} \right| = \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \alpha) \end{aligned}$$

Сферические функции

Подставим полиномы Лежандра в выражение для $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r} \right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Данная формула лежит в основе мультипольного разложения. Проверим в низших порядках формулу. Для этого возьмем конкретные значения l и m .

$$l = 0 : Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$l = 1 : Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin \theta, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta$$

$$l = 2 : Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{-2i\varphi} \sin^2 \theta, \quad Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin \theta \cos \theta,$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta, \quad Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2 \theta$$

Так как $L/r \ll 1$, можем записать следующую цепочку для $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, где $l = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \frac{4\pi}{1} Y_{00}(\theta, \varphi) Y_{00}^*(\theta', \varphi') + \frac{1}{r} \frac{r'}{r} \frac{4\pi}{3} [Y_{1,-1}(\theta, \varphi) Y_{1,-1}^*(\theta', \varphi') + \\ &\quad + Y_{10}(\theta, \varphi) Y_{10}^*(\theta', \varphi') + Y_{11}(\theta, \varphi) Y_{11}^*(\theta', \varphi')] + \dots \\ &= \frac{4\pi}{r} \frac{1}{4\pi} + \frac{r'}{r^2} \frac{4\pi}{3} \left[\frac{3}{8\pi} e^{-i(\varphi-\varphi')} \sin \theta \sin \theta' + \frac{3}{4\pi} \cos \theta \cos \theta' + \frac{3}{8\pi} e^{i(\varphi-\varphi')} \sin \theta \sin \theta' \right] + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{r'r}{r^3} \left[\cos \varphi \cos \varphi' \sin \theta \sin \theta' + \sin \varphi \sin \varphi' \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \right] + \dots = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} [xx' + yy' + zz'] + \dots = \frac{1}{r} + \frac{(r'r)}{r^3} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \cos \alpha + \dots \end{aligned}$$

Для самостоятельного рассмотрения рекомендуется предлагается проверка случая $l = 2$.

Построение общей формы мультипольного разложения

Запишем формулу потенциала с учётом теоремы сложения:

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \times \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \underbrace{\int dV' \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')}_{q_{lm}}$$

Интеграл по объему переписывается в сферических координатах как

$$\int dV' = \int_0^{\infty} dr' r'^2 \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

Получаем для потенциала, с учётом обозначения q_{lm}

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \times \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) q_{lm}$$

где $q_{lm} = \int dV' \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$ – мультипольные моменты ($m = \overline{-l, l}$).

Степень малого параметра (порядок мультипольного разложения) определяется числом l . При фиксированном l число m пробегает значения $\overline{-l, l}$. Всего $2l+1$ значений. Мультипольные моменты должны быть связаны с тензорами, написанными выше:

$$l = 0 : m = 0 : q_{00} = \int dV' \rho(\vec{r}') Y_{00}^*(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') = \frac{q}{\sqrt{4\pi}},$$

$$l = 1 : m = 0 : q_{10} = \int dV' \rho(\vec{r}') r' Y_{1,0}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{r' \cos \theta'}_{z'} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$l = 1 : m = -1 : q_{1,-1} = \int dV' \rho(\vec{r}') r' Y_{1,-1}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') r' e^{i\varphi'} \sin \theta' =$$

$$= \left| e^{i\varphi'} = \cos \varphi' + i \sin \varphi' \right| = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') (x' + iy') = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y)$$

$$l = 2 : m = 0 : q_{2,0} = \int dV' \rho(\vec{r}') r'^2 Y_{2,0}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{(3z'^2 - r'^2)}_{Q_{zz}} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}$$

$$l = 2 : m = 1 : q_{2,1} = \int dV' \rho(\vec{r}') r'^2 Y_{2,1}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') r'^2 s \in \theta' \cos \theta' (-1)$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') z' (x' - iy') = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{3} (-Q_{xz} + iQ_{yz})$$

$$l = 2 : m = -2 : q_{2,-2} = \int dV' \rho(\vec{r}') r'^2 Y_{2,-2}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') r'^2 e^{2i\varphi'} s \in \theta'^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') (x' + iy')^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int dV' \rho(\vec{r}') \left(x'^2 - y'^2 + 2x'y'i - \frac{1}{3}r'^2 + \frac{1}{3}r'^2 \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \left(\frac{1}{3}Q_{xx} - \frac{1}{3}Q_{yy} + \frac{2i}{3}Q_{xy} \right)$$

$$l = 2 : m = 2 : q_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{3} (Q_{xx} - Q_{yy} - 2iQ_{xy})$$

Вычисление электрического поля по мультипольному разложению потенциала

Мультипольное разложение потенциала имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) q_{lm}$$

Электрическое поле получаем как

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) q_{lm}$$

Например, для диполя: $\vec{p} = p\vec{e}_z$.

$$\vec{E} = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underbrace{\vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}}_{=0}\right) \left(\frac{p \cos \theta}{r^2}\right) = \vec{e}_r \frac{2p \cos \theta}{r^3} + \vec{e}_\theta \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

Лекция 8. Система зарядов в электрическом поле

Сила, действующая на систему зарядов во внешнем электрическом поле

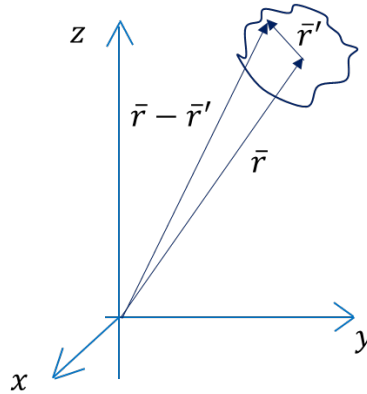


Рис. 8.1 Система зарядов

Рассмотрим точку в системе зарядов на некотором расстоянии \vec{r} от начала координат. Возьмем расстояние между двумя точками в системе зарядов. Сила, действующая на систему зарядов с непрерывным их распределением во внешнем электрическом поле (без учета внутренних сил):

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{E}_{\alpha} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}') = ?$$

и разложим ЭП в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} &= \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{1!} (\vec{r}' \nabla) \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\vec{r}' \nabla)^2 \vec{E}(\vec{r}) + \dots \right] = ? \\ &= \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\vec{E}(\vec{r}) + x'_i \frac{\partial}{\partial x^i} \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \vec{E}(\vec{r}) + \dots \right] = q \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{p} \nabla) \vec{E} \end{aligned}$$

Тензор квадрупольного момента Q_{ij} по определению

$$Q_{ij} = \int dV' \rho(\vec{r}') \left[3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2 \right]$$

Слагаемое с δ_{ij} можно искусственно добавить, поскольку

$$\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} E_k = \Delta E_k = \Delta \left(\frac{-\partial \phi}{\partial x^k} \right) = \frac{-\partial}{\partial x^k} \Delta \phi = 0$$

тогда рассматриваемая сила выражается следующим образом

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\vec{E}(\vec{r}) + x'_i \frac{\partial}{\partial x^i} \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2!} \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r'^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \vec{E}(\vec{r}) + \dots \right] = \\ &= q \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E} + \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \vec{E}(\vec{r}) + \dots\end{aligned}$$

Общее разложение силы можно записать как

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{E}_{\alpha} \rightleftharpoons \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}') = \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r}' \vec{\nabla}) \vec{E} + \frac{1}{2!} (\vec{r}' \vec{\nabla})^2 \vec{E} + \dots \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{1}{l!} x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

Вспомним, что тензор мультипольного момента l порядка вводилось следующим образом

$$Q_{ij} = \int dV' \rho(\vec{r}') \left[(2l-1)!! x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} + \begin{matrix} \text{слагаемые} \\ \delta - \text{симв.} \end{matrix} \right]$$

где $(2l-1)!! = (2l-1) \cdot (2l-3) \cdot \dots \cdot 1$

Тензор не только симметричен, но и бесследовый, то есть $Q_{kk i_3 \dots i_l} = 0$. Знаем, что все слагаемые с δ -символами исчезают при перемножении с $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \vec{E}(\vec{r})$. Результат может быть записан так:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_{l=0}^{\infty} \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{1}{l!} x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{F} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(2l-1)!!} Q_{i_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

Момент силы, действующий на систему зарядов во внешнем электрическом поле

По определению момент силы с номером α (учитываем переход от дискретности к непрерывности):

$$\vec{M} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{E}_{\alpha}] \rightleftharpoons \int dV' \rho(\vec{r}') [(\vec{r} + \vec{r}') \times \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}')] = [\vec{r} \times \vec{F}] + \vec{M}_0$$

причем здесь

$$\vec{M}_0 = \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}') \right] = \int dV' \rho(\vec{r}') \left[\vec{r}' \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^l \vec{E}(\vec{r}) \right]$$

Вспомним формулу для i-компоненты векторного произведения:

$$\left[\vec{A} \times \vec{B} \right]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

где ϵ_{ijk} — антисимметричный символ Леви-Чивиты. Запишем i-ю компоненту момента силы \vec{M}_0

$$M_{0i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \epsilon_{ijk} \int dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{x'_j x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l}}_{l+1 \text{ шт}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} E_k(\vec{r})$$

Как и в случае вычисления силы, осуществляем переход к тензорному виду квадрупольного момента. Свёртка антисимметричного и симметричного тензоров есть ноль, поэтому:

$$\epsilon_{ijk} \delta_{ji_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots E_k \vec{\equiv} -\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi(\vec{r}) = 0$$

Краткое доказательство: $A_{[ij]} S_{(ij)} = -A_{[ji]} S_{ji} = -A_{[ij]} S_{(ij)} = 0$

Тогда получаем

$$M_{0i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \epsilon_{ijk} \frac{1}{(2l+1)!!} Q_{ji_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} E_k(\vec{r})$$

$$M_{0i} = \epsilon_{ijk} \left[p_j E_k(\vec{r}) + \frac{1}{3} Q_{ji_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} E_k(\vec{r}) + \dots \right]$$

Из формулы видно, что для диполя $\vec{M}_0 = \left[\vec{p} \times \vec{E} \right]$.

Сила и момент силы, действующие на диполь в поле точечного заряда

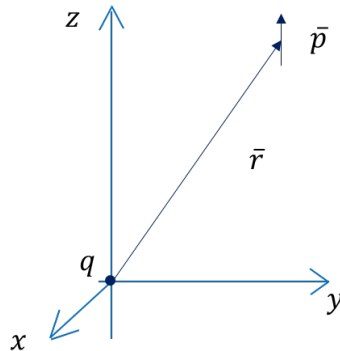


Рис. 8.2 Диполь

Найдем силу и момент силы, действующие на диполь в поле точечного заряда в начале координат.

$$\vec{F} = (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E} = (\vec{p} \vec{\nabla}) \left(\frac{q\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} (\vec{p} \vec{\nabla}) (q\vec{r}) + (q\vec{r}) (\vec{p} \vec{\nabla}) \frac{1}{r^3}$$

Знаем, что

$$(\vec{p} \vec{\nabla}) x = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) x = p_x, \quad (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{p}$$

$$\vec{\nabla} \vec{r} = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Получаем, что искомая сила

$$\vec{F} = \frac{q\vec{p}}{r^3} - \frac{3q\vec{r}}{r^5} (\vec{p}\vec{r})$$

Сила со стороны диполя, действующего на заряд, находящийся в центре координат

$$\vec{F}_{\text{назаряд}} = \frac{3q\vec{r}(\vec{p}\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} = q\vec{E}_{\text{диполя}}$$

Момент сил рассчитывается тривиально согласно полученным формулам выше

$$\vec{M}_0 = [\vec{p} \times \vec{E}] = \left[\vec{p} \times \frac{q\vec{r}}{r^3} \right]$$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] + \vec{M}_0 = \left[\vec{r} \times \frac{q\vec{p}}{r^3} \right] + \left[\vec{p} \times \frac{q\vec{r}}{r^3} \right]$$

Энергия электростатического поля

Энергия электромагнитного поля вычисляется как

$$E_{\text{эл.м}} = \int dV \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \stackrel{\text{безМП}}{=} \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{E}^2 = \left| \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \\ \text{электростат.} \end{array} \right| = \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{E} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi) = ?$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int_M dV [\vec{\nabla} (\vec{E} \varphi) - (\vec{\nabla} \vec{E}) \varphi] = \left| \begin{array}{l} \text{div} \vec{E} = (\vec{\nabla} \vec{E}) \\ \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \end{array} \right| = \frac{-1}{8\pi} \oint_{\partial M} d\vec{S} \vec{E} \varphi + \int_M dV \frac{1}{8\pi} 4\pi\rho\varphi$$

Пусть заряды расположены в некоторой пространственно-ограниченной области, тогда вдали от этой области потенциал φ , электрическое поле \vec{E} и площадка поверхности $d\vec{S}$ ведут себя как

$$\varphi \frac{1}{R}, \quad \vec{E} \frac{1}{R^2}, \quad d\vec{S} R^2$$

$$\oint_{\partial M} d\vec{S} \vec{E} \varphi \frac{1}{R} \frac{1}{R^2} R^2 \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty$$

Поэтому при рассмотрении всего пространства или случая, когда заряды локализованы в небольшой области, интеграл $\frac{-1}{8\pi} \oint_{\partial M} d\vec{S} \vec{E} \varphi = 0$ и не рассматривается. Тогда если введем две далекие друг от друга области 1 и 2, содержащие заряды для энергии электрического поля, получим для энергии поля:

$$E_{\text{эл.м}} = \frac{1}{2} \int_M dV \rho \varphi \stackrel{\Rightarrow}{=} \frac{1}{2} \int_M dV (\rho_1 + \rho_2) (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2} \int_M dV [\rho_1 \varphi_1 + \rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2]$$

Красным выделены слагаемые, отвечающие за энергия самодействия зарядов 1 и 2 системы. Остальные описывают энергию взаимодействия двух систем:

$$E_{\text{вз.}} = \frac{1}{2} \int dV [\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1] = \left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \varphi = -4\pi\rho \\ \varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int dV \rho_1(\vec{r}) \int dV' \frac{\rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{2} \int dV \rho_2(\vec{r}) \int dV' \frac{\rho_1(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$$= \int dV dV' \frac{\rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int dV \rho_1 \varphi_2 = \int dV \rho_2 \varphi_1$$

Пусть система 1 находится вблизи начала координат, а система 2 – на расстоянии \vec{r} , её характерный радиус \vec{r}' . Тогда энергию взаимодействия можно записать как

$$E_{\text{вз.}} = \int dV' \rho_2(\vec{r}') \varphi_1(\vec{r} + \vec{r}') = ?$$

используем мультипольное разложение в окрестности точки \vec{r}

$$\begin{aligned} &= \int dV' \rho_2(\vec{r}') \left[\varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{1!} (\vec{r}' \vec{\nabla}) \varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\vec{r}' \vec{\nabla})^2 \varphi_1(\vec{r}) + \dots \right] = \\ &= q_2 \varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{1!} (\vec{p}_2 \vec{\nabla}) \varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{2!} \int dV' \rho_2(\vec{r}') x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi_1(\vec{r}) + \dots \end{aligned}$$

Вспомним, что диполь и квадруполь выражаются как

$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= \int dV' \rho_2(\vec{r}') \vec{r}' \\ Q_{2ij} &= \int dV' \rho_2(\vec{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \end{aligned}$$

а также узнаем конструкцию

$$\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi_1(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi_1(\vec{r}) = \Delta \varphi_1(\vec{r}) = -4\pi \rho_1(\vec{r}) = 0$$

Получаем, что

$$E_{\text{вз.}} = q_2 \varphi_1(\vec{r}) + \vec{p}_2 \vec{\nabla} \varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{6} Q_{2ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi_1(\vec{r}) + \dots$$

Электрическое поле можно записать через компоненты, т.к.

$$E_k = \frac{-\partial \varphi}{\partial x^k} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Поэтому энергия взаимодействия может быть записана так

$$E_{\text{вз.}} = q_2 \varphi_1(\vec{r}) - \vec{p}_2 \vec{E}_1(\vec{r}) - \frac{1}{6} Q_{2ij} \frac{\partial \vec{E}_{1j}(\vec{r})}{\partial x^i} + \dots$$

Продолжаем исследовать данное выражение, потенциал системы 1 в мультипольном разложении

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{r} + \frac{(\vec{p}_1 \vec{r})}{r^3} + \frac{1}{2r^5} x_i x_j Q_{1ij} + \dots$$

Поставим задачу: найдем энергию взаимодействия систем 1 и 2 с точностью до слагаемых порядка $\frac{1}{r^3}$. С учётом вида $\vec{E}_1(\vec{r})$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{(\vec{p}_1\vec{r})}{r^3} + \dots\right) = \frac{q_1\vec{r}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{p}_1\vec{r}) - \vec{p}_1r^2}{r^5} + \dots$$

получим энергию взаимодействия в виде

$$E_{\text{вз.}} = \frac{q_1q_2}{r} + \frac{q_2(\vec{p}_1\vec{r})}{r^3} - \frac{q_1(\vec{p}_2\vec{r})}{r^3} + \frac{q_2}{2r^5}x_ix_jQ_{1ij} + \frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)r^2 - 3(\vec{r}\vec{p}_1)(\vec{r}\vec{p}_2)}{r^5} - ?$$

$$- \frac{1}{6}Q_{2ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{q_1x^j}{r^3}\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Видим, что производная может быть взята от x^j или $\frac{1}{r^3}$

$$Q_{2ij}\frac{\partial}{\partial x^i}x^j = Q_{2ij}\delta_{ij} = Q_{2ii} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{-3}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{-3x^i}{r^5}$$

Энергия взаимодействия заряда и квадруполья имеет вид:

$$E_{\text{вз.}} = \frac{q_1q_2}{r} + \frac{q_2(\vec{p}_1\vec{r}) - q_1(\vec{p}_2\vec{r})}{r^3} + \frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)r^2 - 3(\vec{r}\vec{p}_1)(\vec{r}\vec{p}_2)}{r^5} + ?$$

$$+ \frac{q_2}{2r^5}x_ix_jQ_{1ij} + \frac{q_1}{2r^5}x_ix_jQ_{2ij} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

В более высоких порядках энергия взаимодействия

$$E_{\text{вз.}} = \int dV' \rho_2(\vec{r}') \varphi_1(\vec{r} + \vec{r}') = \int dV' \rho_2(\vec{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (\vec{r}'\vec{\nabla})^l \varphi_1(\vec{r}) = ?$$

$$= \int dV' \rho_2(\vec{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} x'_1x'_2\dots x'_l \frac{\partial}{\partial x^1} \dots \frac{\partial}{\partial x^l} \varphi_1(\vec{r}) = ?$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(2l-1)!!} Q_{2i_1i_2\dots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \varphi_1(\vec{r})$$

Здесь можно подставить мультипольное разложение $\varphi_1(\vec{r})$ и получить взаимодействие двух произвольных мультиполей.

Лекция 9. Магнитостатика

Теорема о циркуляции

Рассмотрим случай статического распределения токов и зарядов, когда

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

И будем считать магнитное поле в этом случае.

В простейших случаях магнитное поле может быть найдено с помощью теоремы о циркуляции и соображений симметрии.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{вн}}$$

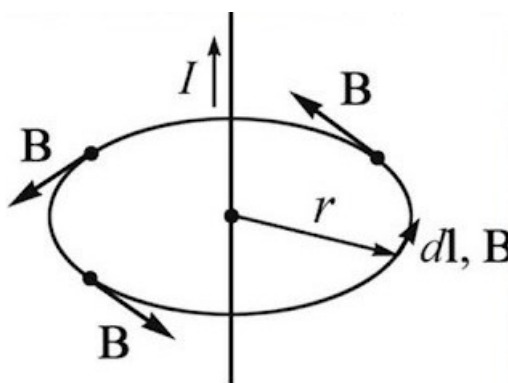


Рис. 9.1. Циркуляция магнитного поля.

Например, для бесконечного прямого провода с током радиуса R (плотность тока везде одинакова) из соображений симметрии получается, что

$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi H$$

Здесь в силу теоремы о циркуляции

$$2\pi r H = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \cdot I & \text{при } r > R \\ \frac{4\pi}{c} \cdot j \cdot \pi r^2 = \frac{4\pi}{c} I \frac{r^2}{R^2} & \text{при } r < R \end{cases}$$

Поэтому

$$H = \begin{cases} \frac{2I}{cR} \vec{e}_\varphi & \text{при } r > R \\ 2I \frac{r}{R^2} \vec{e}_\varphi & \text{при } r < R \end{cases}$$

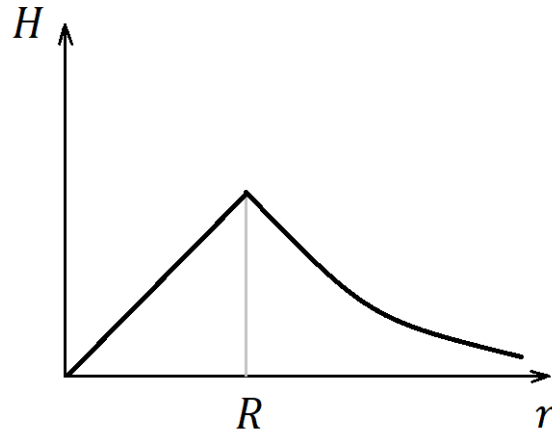


Рис. 9.2. Зависимость $H(r)$.

Векторный потенциал также может быть легко найден:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

Удобно выбрать калибровку, в которой отлично от нуля только

$$A_z = A_z(r)$$

Тогда

$$H_\varphi = \frac{-\partial A_z}{\partial r}$$

Отсюда получаем, что

$$A_z = \begin{cases} \frac{-2I}{c} \ln\left(\frac{r}{R}\right) & \text{при } r > R \\ \frac{I}{c} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r < R \end{cases}$$

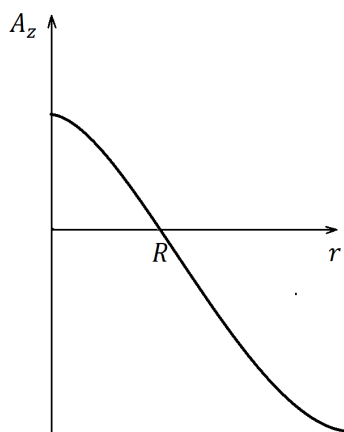


Рис. 9.3. Зависимость $A_z(r)$.

Здесь постоянная определена из требования непрерывности векторного потенциала при $r = R$.

Пример (поле внутри бесконечно длинного соленоида с током)

Еще одним примером, когда можно определить магнитное поле из теоремы о циркуляции и соображений симметрии, является поле соленоида с числом витков на единицу длины

$$n = \frac{N}{L}$$

Учитываем, что

$$\mu = 1$$

Внутри соленоида поле заключено внутри его и постоянно и однородно. Снаружи вблизи соленоида поле приблизительно равно нулю.

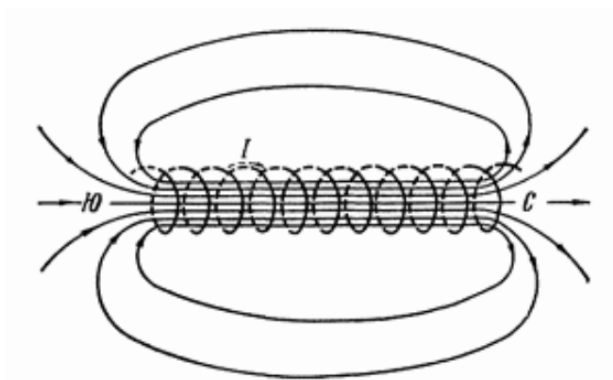


Рис. 9.4. Поле внутри соленоида.

Тогда

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{вн}}$$

дает равенство

$$L \cdot H_z = \frac{4\pi}{c} \cdot nLI$$

Здесь I – ток, текущий в обмотке. Тогда

$$\vec{H} = \frac{4\pi I}{c} n \vec{e}_z$$

Удобно выбрать

$$\vec{A} = \vec{e}_\varphi A_\varphi(r)$$

Так что

$$\vec{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \vec{e}_z \frac{d}{dr} (rA_\varphi)$$

Поэтому

$$\frac{4\pi rIn}{c} = \frac{d}{dr} (rA_\varphi)$$

И следовательно

$$A_\varphi = \frac{2\pi In}{c} \cdot r$$

Так что

$$\vec{H} = \frac{4\pi In}{c} \vec{e}_z$$

$$\vec{A} = \vec{e}_\varphi \frac{2\pi In}{c} r$$

Решение уравнений Максвелла

В рассматриваемом случае уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Применяя ко второму уравнению операцию div , получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{J} \end{aligned}$$

Это согласуется с уравнением непрерывности, которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = \operatorname{div} J$$

Из уравнения

$$\operatorname{div} H = 0$$

следует

$$H = \operatorname{rot} A$$

Подставляя это в уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

получаем, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

причем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= [\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Векторный потенциал \vec{A} определен с точностью до калибровочного преобразования

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha$$

Мы можем выбрать калибровку Кулона, в которой

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0$$

Тогда уравнение для потенциала примет вид

$$\Delta\vec{A} = \frac{-4\pi}{c}\vec{J}$$

И будет очень похоже на уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Поэтому разумно предположить, что

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Поскольку тогда

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \cdot (-4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')) = \frac{-4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Однако при этом необходимо проверить, что выполняется условие

$$0 \stackrel{?}{=} \operatorname{div}\vec{A}$$

Имеем

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{c} \int dV' \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int dV' \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \cdot (-1) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int_{\mu} dV' \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left(\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mu} dS \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{c} \int_{\mu} dV' \left[\operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \end{aligned}$$

Распределение токов конечно, поэтому

$$\frac{1}{c} \int_{\mu} dS \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$$

Из уравнения непрерывности следует:

$$\frac{1}{c} \int_{\mu} dV' \left[\operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$

Поэтому

$$\frac{1}{c} \int_{\mu} dS \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{c} \int_{\mu} dV' \left[\operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = 0$$

Так что

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Таким образом выражение

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

является решением уравнений Максвелла в рассматриваемом случае и удовлетворяет калибровочному условию Кулона

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Соответствующее магнитное поле будет

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

Заметим, что для тонкого провода с током получается выражение

$$\vec{H} = \frac{I}{c} \text{rot} \oint \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Оно уже встречалось ранее и было получено из закона Био-Савара-Лапласа. Действительно, теперь

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{c} \int dV' \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{1}{c} \int dV' \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right] = \\ &= -\frac{1}{c} \int dV' \left[\frac{-\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{J}(\vec{r}') \right] = \frac{1}{c} \int dV' \frac{[\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Это закон Био-Савара-Лапласа.

Пример (круговой ток, текущий по кольцу с радиусом R)

В качестве примера вычислим магнитное поле кругового тока I радиуса R на оси z . Из соображений симметрии оно, очевидно, направлено вдоль оси z .

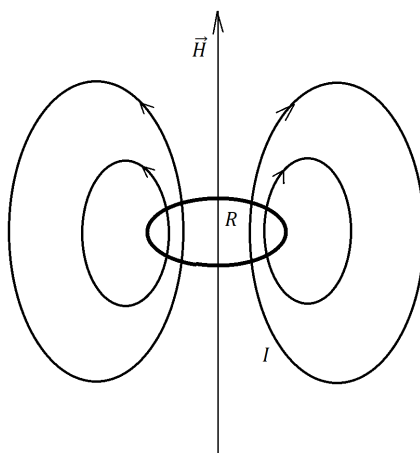


Рис. 9.5. Круговой ток, идущий по кольцу

$$\vec{H} = \frac{I}{c} \oint \frac{[d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{e}_z \frac{I}{c} \sin \alpha \frac{1}{(z^2 + R^2)} \oint dl = \vec{e}_z \frac{2\pi R I}{c} \frac{\sin \alpha}{z^2 + R^2}$$

Здесь

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{Z^2 + R^2}}$$

Поэтому на оси z магнитное поле принимает вид

$$\vec{H} = \vec{e}_z \frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Если $z \gg R$, то эта формула принимает вид

$$\vec{H} \simeq \vec{e}_z \frac{2\pi I R^2}{c z^3}$$

Мультипольное разложение в случае магнитостатики

Если токи локализованы в некоторой области с характерным размером L , а магнитное поле измеряется на расстоянии $r \gg L$, то удобно использовать разложение по малому параметру $\frac{L}{r} \ll 1$.

Как и в электростатике мы берем в качестве исходной точки формулу

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

и раскладываем $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ в ряд по $\frac{r'}{r} \ll 1$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} - (\vec{r}' \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}' \vec{r})}{r^3} + \dots$$

Однако теперь низший порядок разложения дает нулевой вклад в силу замкнутости токов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} &= \frac{I}{c} \oint d\vec{l} \frac{1}{r} \\ \frac{I}{c} \oint d\vec{l} \frac{1}{r} &= \frac{I}{cr} \oint d\vec{l} \\ \frac{I}{cr} \oint d\vec{l} &= 0 \end{aligned}$$

При обходе по контуру сумма $d\vec{l}$ дает ноль. В случае объемного распределения токов мы используем равенство

$$\vec{j}(\vec{r}') = (\vec{J}\vec{\nabla}_{\vec{r}'}) \vec{r}'$$

так как

$$j^j \frac{\partial}{\partial x'^j} x'^i = j^j \delta_j^i = j^i$$

Или эквивалентно

$$\begin{aligned} (\vec{J}\vec{\nabla}_{\vec{r}'}) \vec{r}' &= \left(j_x \frac{\partial}{\partial x'} + j_y \frac{\partial}{\partial y'} + j_z \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\vec{e}_x x' + \vec{e}_y y' + \vec{e}_z z') \\ \left(j_x \frac{\partial}{\partial x'} + j_y \frac{\partial}{\partial y'} + j_z \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\vec{e}_x x' + \vec{e}_y y' + \vec{e}_z z') &= \vec{e}_x j_x + \vec{e}_y j_y + \vec{e}_z j_z \\ \vec{e}_x j_x + \vec{e}_y j_y + \vec{e}_z j_z &= \vec{j} \end{aligned}$$

Поэтому в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \vec{A} &\simeq \frac{1}{cr} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \\ \frac{1}{cr} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') &= \frac{1}{cr} \int dV' (\vec{J}\vec{\nabla}_{\vec{r}'}) \vec{r}' \end{aligned}$$

i -я компонента этого вектора записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{cr} \int dV' j^k(F') \frac{\partial}{\partial x'_k} x'_i &= \frac{1}{cr} \int dV' \left[\frac{\partial}{\partial x'_k} (j^k(\vec{r}') x'_i) - \frac{\partial j^k(\vec{r}')}{\partial x'_k} x'_i \right] \\ \frac{1}{cr} \int dV' \left[\frac{\partial}{\partial x'_k} (j^k(\vec{r}') x'_i) - \frac{\partial j^k(\vec{r}')}{\partial x'_k} x'_i \right] &= \frac{1}{cr} \int_{S_{\infty}^2} dS_k j^k(\vec{r}') x'_i \\ \frac{1}{cr} \int_{S_{\infty}^2} dS_k j^k(\vec{r}') x'_i &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом для векторного потенциала низшее слагаемое в мультипольном разложении оказывается равным нулю.

Лекция 10. Мультипольное разложение в магнитостатике

Лекция 10. Магнитостатика. Часть 2.

Мультипольное разложение в случае магнитостатики (продолжение)

На прошлой лекции рассматривали уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Выяснили, что выражение

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

является решением уравнений Максвелла в рассматриваемом случае и удовлетворяет калибровочному условию Кулона

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Соответствующее магнитное поле будет

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

В нулевом приближении

$$\begin{aligned} \vec{A} &\simeq \frac{1}{cr} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \\ \frac{1}{cr} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') &= \frac{1}{cr} \int dV' (\vec{J} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{r}') \end{aligned}$$

i -я компонента этого вектора записывается в виде

$$\frac{1}{cr} \int dV' j^k(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x'_k} x'_i = \frac{1}{cr} \int dV' \left[\frac{\partial}{\partial x'_k} (j^k(\vec{r}') x'_i) - \frac{\partial j^k(\vec{r}')}{\partial x'_k} x'_i \right]$$

$$\frac{1}{cr} \int dV' \left[\frac{\partial}{\partial x'_k} \left(j^k(\vec{r}') x'_i \right) - \frac{\partial j^k(\vec{r}')}{\partial x'_k} x'_i \right] = \frac{1}{cr} \int_{S_\infty^2} dS_k j^k(\vec{r}') x'_i$$

$$\frac{1}{cr} \int_{S_\infty^2} dS_k j^k(\vec{r}') x'_i = 0$$

Таким образом для векторного потенциала низшее слагаемое в мультипольном разложении оказывается равным нулю.

В следующем порядке

$$\vec{A} \simeq \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \frac{(\vec{r}' \vec{r})}{r^3}$$

Как и ранее, рассмотрим i -ю компоненту этого выражения

$$\frac{1}{c} \int dV' j_i(\vec{r}') \frac{x'_j x_j}{r^3} = \frac{c x_j}{r^3} \int dV' j_i(\vec{r}') x'_j$$

Заметим, что

$$\frac{1}{c} \int dV' \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(j_k x'_i x'_j \right) = \frac{1}{c} \oint_{S_\infty^2} dS_k j_k x'_i x'_j$$

$$\frac{1}{c} \oint_{S_\infty^2} dS_k j_k x'_i x'_j = 0$$

$$\frac{1}{c} \int dV' \left[\frac{\partial j_k}{\partial x'_k} x'_i x'_j + j_k \delta_{ki} x'_j + j_k \delta_{kj} x'_i \right] = \frac{1}{c} \int dV' \left[j_i(\vec{r}') x'_j + j_j(\vec{r}') x'_i \right]$$

Прибавим это выражение к рассматриваемому:

$$A_i(\vec{r}) \simeq \frac{x_j}{cr^3} \int dV' \left[j_i x'_j - \frac{1}{2} (j_i x'_j + j_j x'_i) \right]$$

$$\frac{x_j}{cr^3} \int dV' \left[j_i x'_j - \frac{1}{2} (j_i x'_j + j_j x'_i) \right] = \frac{x_j}{2cr^3} \int dV' (j_i x'_j - j_j x'_i)$$

Или эквивалентно

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{1}{2cr^3} \int dV' \left[(\vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') - (\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}')) \vec{r}' \right]$$

$$\frac{1}{2cr^3} \int dV' \left[(\vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') - (\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}')) \vec{r}' \right] = \frac{1}{2cr^3} \int dV' \left[[\vec{r}' \times \vec{J}] \times \vec{r} \right]$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned} \left[\left[\vec{r}' \times \vec{j} \right] \times \vec{r} \right] &= + \left[\vec{r} \times \left[\vec{j} \times \vec{r}' \right] \right] \\ + \left[\vec{r} \times \left[\vec{j} \times \vec{r}' \right] \right] &= \vec{J}(\vec{r}\vec{r}') - \vec{r}'(\vec{r}\vec{J}) \end{aligned}$$

Определим дипольный магнитный момент:

$$\vec{\mu} \equiv \frac{1}{2c} \int dV' \left[\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \right]$$

Тогда в первом нетривиальном порядке мультипольного разложения мы получим

$$\vec{A} \simeq \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3}$$

Найдем соответствующее магнитное поле:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{rot} \vec{A} \\ \text{rot} \vec{A} &= \text{rot} \left(\frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \right) \\ \text{rot} \left(\frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \right) &= \left[\vec{\nabla} \times \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \right] \\ \left[\vec{\nabla} \times \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \right] &= \frac{1}{r^3} \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\mu} \times \vec{r}] \right] + \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \times [\vec{\mu} \times \vec{r}] \right] \\ \frac{1}{r^3} \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\mu} \times \vec{r}] \right] + \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \times [\vec{\mu} \times \vec{r}] \right] &= \frac{1}{r^3} \left(\vec{\mu} (\vec{\nabla} \vec{r}) - (\vec{\mu} \vec{\nabla}) \vec{r} \right) - \frac{3}{r^5} [\vec{r} \times [\vec{\mu} \times \vec{r}]] \\ \frac{1}{r^3} \left(\vec{\mu} (\vec{\nabla} \vec{r}) - (\vec{\mu} \vec{\nabla}) \vec{r} \right) - \frac{3}{r^5} [\vec{r} \times [\vec{\mu} \times \vec{r}]] &= \frac{1}{r^3} (3\vec{\mu} - \vec{\mu}) - \frac{3}{r^5} (\vec{\mu} r^2 - \vec{r}(\vec{\mu} \vec{r})) \\ \frac{1}{r^3} (3\vec{\mu} - \vec{\mu}) - \frac{3}{r^5} (\vec{\mu} r^2 - \vec{r}(\vec{\mu} \vec{r})) &= \frac{3\vec{r}(\vec{\mu} \vec{r}) - \vec{\mu} r^2}{r^5} \end{aligned}$$

Таким образом для магнитного дипольного момента

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int dV' \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right] \\ \vec{A} &= \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \\ \vec{H} &= \frac{3\vec{r}(\vec{\mu} \vec{r}) - \vec{\mu} r^2}{r^5} \end{aligned}$$

Пример (магнитный момент для тока, расположенного в плоскости)

В качестве примера вычислим магнитный момент плоского тока I :

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \oint [\vec{r}' \times d\vec{l}] I \\ \frac{1}{2c} \oint [\vec{r}' \times d\vec{l}] I &= \vec{e}_z \cdot \frac{1}{c} I \cdot \int dS \\ \vec{e}_z \cdot \frac{1}{c} I \cdot \int dS &= \frac{IS}{c} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Например, для кругового тока (рис.10.1)

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{I}{2c} \cdot 2\pi R \cdot R \vec{e}_z \\ \frac{I}{2c} \cdot 2\pi R \cdot R \vec{e}_z &= \frac{\pi IR^2}{c} \vec{e}_z \\ \frac{\pi IR^2}{c} \vec{e}_z &= \frac{IS}{c} \vec{e}_z\end{aligned}$$

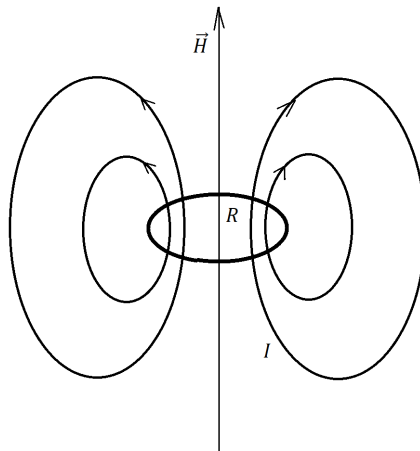


Рис. 10.1. Круговой ток, текущий по кольцу

Тогда магнитное поле на оси z будет равно

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{3\vec{e}_z z^2 \mu - \mu \vec{e}_z z^2}{z^3} \\ \frac{3\vec{e}_z z^2 \mu - \mu \vec{e}_z z^2}{z^3} &= 2 \frac{\vec{\mu}}{z^3}\end{aligned}$$

$$2 \frac{\vec{\mu}}{z^3} = \frac{2\pi IR^2}{cz^3} \vec{e}_z$$

Он совпадает с асимптотикой ранее полученного точного выражения

$$\vec{H} = \frac{2\pi IR^2}{c(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

$$\frac{2\pi IR^2}{c(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \simeq \frac{2\pi IR^2}{cz^3} \vec{e}_z$$

А в остальных точках

$$\vec{H} \simeq \left[\frac{3\vec{e}_r z}{r^4} - \frac{\vec{e}_z}{r^3} \right] \frac{I\pi R^2}{c}$$

Предположим теперь, что ток создается вращением заряженного кольца (заряд q , радиус R , угловая скорость ω). Тогда

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{2\pi R} \cdot \frac{\omega R \Delta t}{\Delta t}$$

$$\frac{q}{2\pi R} \cdot \frac{\omega R \Delta t}{\Delta t} = \frac{q\omega}{2\pi}$$

И магнитный момент окажется равным

$$\vec{\mu} = \frac{q\omega}{2\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{c} \vec{e}_z$$

$$\frac{q\omega}{2\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{c} \vec{e}_z = \frac{q\omega R^2}{2c} \vec{e}_z$$

Сравним это с угловым моментом кольца

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}]$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}] = mR^2 \omega \vec{e}_z$$

Видно, что

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L}$$

Это следует из формулы для магнитного момента:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int dV' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \\ \frac{1}{2c} \int dV' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] = \sum_{\alpha} \frac{1}{2c} [\vec{r}'_{\alpha} \times q_{\alpha} \vec{v}'_{\alpha}] = \frac{q}{2mc} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha} \times \vec{v}'_{\alpha}] = \frac{q}{2mc} \vec{L}$$

если массы и заряды всех частиц одинаковы.

Поэтому вращающееся заряженное тело имеет магнитный момент, пропорциональный его угловому моменту.

Отметим теперь сходство между электрическим полем электрического диполя

$$\varphi = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \\ -\vec{\nabla}\varphi = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

и магнитным полем магнитного диполя

$$\vec{A} = \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \\ \vec{H} = \text{rot}\vec{A} \\ \text{rot}\vec{A} = \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}$$

Однако, очевидно, формально можно записать

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

где

$$\varphi \equiv \frac{(\vec{\mu}\vec{r})}{r^3}$$

φ – псевдопотенциал магнитного поля.

Это возможно, поскольку

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

в той области, которую мы рассматриваем.

Общая структура мультипольного разложения в магнитостатике

В общем случае мультипольное разложение для векторного потенциала можно записать в виде

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{j_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{1}{c} \int dV' \frac{j_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int dV' j_i(\vec{r}') x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Причем

$$0 = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\partial}{\partial x'_k} (j_k x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l})$$

$$\frac{1}{c} \int dV' \frac{\partial}{\partial x'_k} (j_k x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l}) = \frac{1}{c} \oint_{S_{\infty}^2} dS_k j_k x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} x'_i$$

Поэтому с учетом уравнения непрерывности

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

$$0 = \frac{1}{c} \int dV' [j_i x'_{i_1} \dots x'_{i_l} + j_{i_1} x'_{i_2} x'_{i_3} \dots x'_{i_l} x_i + \dots]$$

Умножаем это равенство на

$$\frac{(-1)^l}{e!} \cdot \frac{1}{(l+1)} \cdot (-1)$$

И складываем с l -м слагаемым:

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \frac{l}{(l+1)} \int dV' [j_i(\vec{r}') x'_{i_1} - j_{i_1} x'_i] x'_{i_2} x'_{i_3} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

При этом

$$j_i x'_{i_1} - j_{i_1} x'_i = \underbrace{\varepsilon_{ii_1 k} \varepsilon_{k m n}}_{\delta_{im} \delta_{i_1 n} - \delta_{in} \delta_{i_1 m}} j_m x'_n$$

Поэтому

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!} \int dV' \cdot \epsilon_{ii_1 k} \epsilon_{kmn} j_m x'_n x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Благодаря чему

$$\begin{aligned} H_i &= \epsilon_{ijp} \frac{\partial}{\partial x^j} A_p \\ \epsilon_{ijp} \frac{\partial}{\partial x^j} A_p &= \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!} \int dV' \epsilon_{ijp} \epsilon_{pi_1 k} \epsilon_{kmn} j_m x'_n x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!} \int dV' (\delta_{ii_1} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{j i_1}) \epsilon_{kmnd} j_m x'_n x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!} \int dV' \epsilon_{kmnd} j_m x'_n x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \end{aligned}$$

где псевдопотенциал записывается в виде

$$\varphi = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} l}{(l+1)!} \int dV' \epsilon_{i_1 mn} j_m x'_n x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Вспоминая, что

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \left(\frac{1}{r} \right) = (2l-1)!! \frac{(-1)^l}{r^{2l+1}}.$$

Это симметричный бесследовый тензор. Тогда выражение для псевдопотенциала можно записать в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_l}}{r^{2l+1}} M_{i_1 i_2 \dots i_l}$$

Здесь $M_{i_1 i_2 \dots i_l}$ – симметричная бесследовая часть величины

$$+ \frac{l}{c(l+1)} \int dV' \left[\vec{r}' \times \vec{J}' \right]_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_l} \cdot (2l-1)!!$$

Лекция 11. Сила и момент сил, действующие на систему токов в магнитном поле

Мультипольное разложение в случае магнитостатики (напоминание)

На прошлой лекции рассматривали уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

Выяснили, что выражение

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

является решением уравнений Максвелла в рассматриваемом случае и удовлетворяет калибровочному условию Кулона

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Соответствующее магнитное поле будет

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Для магнитного дипольного момента

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int dV' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \\ \vec{A} &= \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \\ \vec{H} &= \frac{3\vec{r}(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) - \vec{\mu} r^2}{r^5} \end{aligned}$$

Мультипольное разложение по сферическим функциям

В прошлый раз ввели понятие псевдопотенциала магнитного поля

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

где

$$\varphi \equiv \frac{(\vec{\mu} \vec{r})}{r^3}$$

Псевдопотенциал магнитного поля можно разложить по сферическим функциям. Действительно, в рассматриваемой области

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Так как

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0$$

то

$$0 = \operatorname{div}\vec{H} = -\Delta\varphi$$

При этом в сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi}$$

Здесь

$$\Delta_{\theta,\varphi} \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Причем

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Тогда

$$\Delta [R_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)] = \left[R_l''(r) + \frac{2}{r} R_l'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l(r) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\left[R_l''(r) + \frac{2}{r}R_l'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

Если $R_l(r) = r^\alpha$, то

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - l(l + 1) = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - l(l + 1) = 0$$

$$D = 1 + 4l^2 + 4l = (2l + 1)^2$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm (2l + 1)}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = l; \quad \alpha = -l - 1$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{(2l + 1)} \sum_{m=-l}^l m_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{(l+1)}}$$

Как и ранее, коэффициенты m_{lm} – магнитные дипольные моменты – могут быть связаны с тензорами $M_{i_1 i_2 \dots i_l}$ – все полностью аналогично случаю электростатики.

Также аналогичные формулы можно получить для силы, момента сил и энергии.

Сила, момент сил и энергия системы токов в магнитном поле

Рассмотрим систему токов, помещенных во внешнее магнитное поле. Тогда суммарная сила будет равна

$$\vec{F} = \int dV' \frac{1}{c} \left[\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r} + \vec{r}') \right]$$

\vec{r}' нумерует точки системы.

Если $r \gg L$ (где L – характерный размер рассматриваемой системы), то

$$\vec{F} \simeq \frac{1}{c} \int dV' \left[\vec{j}(\vec{r}') \times \left(\vec{H}(\vec{r}) + (\vec{r}' \vec{\nabla}) \vec{H}(\vec{r}) + \dots \right) \right]$$

При этом, как ранее уже доказывалось

$$\int dV' \vec{j}(\vec{r}') = 0$$

И следовательно первое слагаемое равно нулю.

Поэтому в первом нетривиальном приближении

$$F_i \simeq \frac{1}{c} \int dV' \cdot \varepsilon_{ijk} j_j(\vec{r}') \cdot x_l' \frac{\partial H_k(r)}{\partial x^l}$$

Учтем, что

$$\int dV' \frac{\partial}{\partial x'_k} (j_k x'_i x'_j) = 0$$

$$\int dV' \frac{\partial}{\partial x'_k} (j_k x'_i x'_j) = \frac{1}{c} \int dV' [j_i(\vec{r}') x'_j + j_j(\vec{r}') x'_i]$$

Поэтому рассматриваемое выражение представимо в виде

$$F_i \simeq \int dV' \cdot \frac{1}{2c} \varepsilon_{ijk} (j_j(\vec{r}') x'_l - j_l(\vec{r}') x'_j) \frac{\partial H_k(\vec{r})}{\partial x^l}$$

При этом

$$\varepsilon_{jlm} \mu_m = \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{mpq} \frac{1}{2c} \int dV' x'_p j_q$$

$$\varepsilon_{jlm} \varepsilon_{mpq} \frac{1}{2c} \int dV' x'_p j_q = (\delta_{jp} \delta_{lq} - \delta_{jq} \delta_{lp}) \frac{1}{2c} \int dV' x'_p j_q$$

$$(\delta_{jp} \delta_{lq} - \delta_{jq} \delta_{lp}) \frac{1}{2c} \int dV' x'_p j_q = \frac{1}{2c} \int dV' (x'_j j_l - x'_l j_j)$$

Откуда следует, что

$$F_i \simeq -\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \mu_m \frac{\partial H_k}{\partial x^l} = (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) \mu_m \frac{\partial H_k}{\partial x^l} = \mu_k \frac{\partial H_k}{\partial x^i} - \mu_i \frac{\partial H_k}{\partial x^k}$$

Таким образом, в низшем приближении

$$\vec{F} \simeq (\vec{\mu} \vec{\nabla}) \vec{H}$$

Это очень похоже на аналогичную формулу электростатики

$$\vec{F} \simeq q \vec{E} + (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E}$$

В частности, если имеются два магнитных момента $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$, то сила, действующая на первый магнитный момент, будет

$$\vec{F}_{1,2} \simeq (\vec{\mu}_1, \vec{\nabla}_1) \vec{H}$$

Здесь

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) - \vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}$$

Это магнитное поле, создаваемое магнитным моментом $\vec{\mu}_2$ в точке \vec{r}_1 . Дифференцируя, получаем, что

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1,2} &= (\vec{\mu}_1 \vec{\nabla}_1) \left[\frac{3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) - \vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} \right] = \\ &= \frac{3\vec{\mu}_1(\vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + 3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} - \frac{15(\vec{\mu}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^7} = \\ &= \frac{3\vec{\mu}_1(\vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + 3\vec{\mu}_2(\vec{\mu}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + 3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} - \\ &\quad - \frac{15(\vec{\mu}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2))(\vec{\mu}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2))(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^7} = -\vec{F}_{2,1} \\ &\quad -\vec{F}_{2,1} \sim \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5}\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить и общую формулу

$$\vec{F} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!(2l-1)!!} M_{i_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \vec{H}$$

Аналогичным образом вычисляется момент сил

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \int dV' \frac{1}{c} [\vec{r} + \vec{r}' \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r} + \vec{r}')]] \\ \int dV' \frac{1}{c} [\vec{r} + \vec{r}' \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r} + \vec{r}')]] &= [\vec{r} \times \vec{F}] + \frac{1}{c} \int dV' [\vec{r}' \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r} + \vec{r}')]] \\ [\vec{r} \times \vec{F}] + \frac{1}{c} \int dV' [\vec{r}' \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r} + \vec{r}')]] &\equiv [\vec{r} \times \vec{F}] + \vec{M}_0\end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{M}_0 \equiv \frac{1}{c} \int dV' [\vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r} + \vec{r}')]]$$

Вычислим эту величину в первом нетривиальном приближении:

$$\begin{aligned}M_{0i} &\simeq \frac{1}{c} \int dV' \varepsilon_{ijk} x'_j \varepsilon_{kmn} j_m(\vec{r}') H_n(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \int dV' \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} (x'_j j_m - x'_m j_j) H_n(\vec{r}) = \\ &= \varepsilon_{jmp} \mu_p \cdot \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} H_n(\vec{r}) = -(\delta_{mi} \delta_{pk} - \delta_{mk} \delta_{pi}) \mu_p \varepsilon_{kmn} H_n(\vec{r}) = -\mu_k \varepsilon_{kin} H_n(\vec{r}) = \varepsilon_{ikn} \mu_k H_n(\vec{r})\end{aligned}$$

Поэтому

$$\vec{M}_0 \simeq [\vec{\mu} \times \vec{H}(\vec{r})]$$

Вновь формула, аналогичная электростатической

$$\vec{M}_0 \simeq [\vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})]$$

В высших порядках также все будет аналогично:

$$M_{0i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(2l+1)!!} \epsilon_{ijk} M_{j_1 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} H_k$$

Заметим теперь, что на магнитный момент в магнитном поле действует момент сил, а магнитный момент пропорционален угловому моменту:

$$\begin{cases} \vec{\mu} = \frac{g \cdot q}{2mc} \vec{L} \\ \vec{M} = \vec{M}_0 = [\vec{\mu} \times \vec{H}] \end{cases}$$

Причем известно, что

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Поэтому

$$[\vec{\mu} \times \vec{H}] = \frac{2mc}{g \cdot q} \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{d\mu_x}{dt} = \frac{g \cdot q}{2mc} \mu_y H \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -\frac{g \cdot q}{2mc} \mu_x H \\ \frac{d\mu_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_z = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\mu_x + i\mu_y) = \frac{-iq \cdot g}{2mc} (\mu_x + i\mu_y) H$$

$$\mu_x + i\mu_y = \mu_{\perp} \exp\left(\frac{-igqH}{2mc} t\right)$$

$$\begin{cases} \mu_x = \mu_{\perp} \cos(\omega t) \\ \mu_y = -\mu_{\perp} \sin(\omega t) \\ \mu_z = \mu_{\parallel} = \text{const} \end{cases}$$

Здесь $\omega = \frac{gqH}{2mc}$ - ларморовская частота.

С учетом направления получаем ларморовскую прецессию:

$$\vec{\omega} = \frac{gq\vec{H}}{2mc}$$

Оценим частоту ларморовской прецессии протона в атоме водорода в магнитном поле 1 Тл. Для протона

$$m_p \simeq 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$q = e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$\vec{\mu} \simeq 5,6 \cdot \frac{q}{2m_p c} \vec{L}$$

Поэтому

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{5,6e}{2m_p c} \cdot H$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{5,6e}{2m_p c} \cdot H &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{5,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \sqrt{9 \cdot 10^9} \frac{\sqrt{\text{Н} \cdot \text{м}}}{\text{Кл}}}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \cdot \frac{10^4 \text{ кг}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{10} \text{ м}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{с}} = \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{10}} \cdot \frac{5,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \sqrt{9 \cdot 10^9} \cdot 10^4}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-19} \cdot 3} \simeq 4,26 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{с}} = 42,6 \text{ МГц} \end{aligned}$$

Это радиодиапазон.

Ларморовская прецессия важна для ядерного магнитного резонанса.

Энергия взаимодействия токов

Вычислим теперь энергию для случая взаимодействия токов. Теперь

$$\begin{aligned} E_{\text{ЭМ}} &= \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \\ \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) &= \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{H}^2 \\ \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{H}^2 &= \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{div} [\vec{H} \times \vec{A}] &= \vec{\nabla} [\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{\nabla} [\vec{H} \times \vec{A}] + \vec{\nabla} [\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{A} [\vec{\nabla} \times \vec{H}] - \vec{H} [\vec{\nabla} \times \vec{A}] \\ \vec{A} [\vec{\nabla} \times \vec{H}] - \vec{H} [\vec{\nabla} \times \vec{A}] &= \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} \end{aligned}$$

Поэтому

$$E_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{8\pi} \int dV \left\{ -\text{div} [\vec{H} \times \vec{A}] + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} \right\} = \frac{-1}{8\pi} \oint dS [\vec{H} \times \vec{A}] + \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}$$

Учитывая, что

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

получаем, что

$$E_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{2c} \int dV \vec{j} \vec{A}$$

где

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow E_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{2c^2} \int dV dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

В случае, если имеется некоторое число проводов с током, то

$$\vec{j} = \vec{j}_\alpha \sum_\alpha \vec{j}_\alpha$$

$$\vec{j}_\alpha \sim I_\alpha$$

Поэтому энергию можно представить в виде

$$E_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha, \beta} I_\alpha I_\beta L_{\alpha\beta}$$

Здесь коэффициенты индукции:

$$L_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{I_\alpha I_\beta} \int dV dV' \frac{\vec{j}_\alpha(\vec{r}) \vec{j}_\beta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{1}{I_\alpha I_\beta} \int dV dV' \frac{\vec{j}_\alpha(\vec{r}) \vec{j}_\beta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = L_{\beta\alpha}$$

При $\alpha \neq \beta$ это так называемые коэффициенты взаимной индукции, при $\alpha = \beta$ – коэффициенты самоиндукции.

Если $\alpha \neq \beta$, то в пределе тонких проводов

$$L_{\alpha\beta} = \oint_{C_\alpha} \oint_{C_\beta} \frac{d\vec{e}_\alpha d\vec{e}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$$

А при $\alpha = \beta$ это выражение обращается в бесконечность.

При этом видно, что

$$[L_{\alpha\beta}] = \text{м}$$

В качестве примера рассмотрим длинный соленоид длины l , площади S с числом витков N . Тогда

$$\vec{H} = \frac{4\pi I}{c} \cdot \frac{N}{l} \vec{e}_z$$

Благодаря чему

$$\Phi = N \int d\vec{S} \vec{H} = \frac{4\pi IS \cdot N^2}{cl} \equiv \frac{1}{c} LI$$

Поэтому коэффициент самоиндукции (индуктивность) соленоида будет равен

$$L = \frac{4\pi SN^2}{l}$$

А энергия, запасенная в нем:

$$E_{\text{ЭМ}} = \frac{LI^2}{2c^2} = 2\pi S \frac{1}{l} \left(\frac{NI}{c} \right)^2 = \frac{1}{8\pi} S \cdot l \cdot \vec{H}^2$$

Предположим теперь, что рассматриваемая система состоит из двух подсистем 1 и 2:

$$E_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 + \vec{j}_2)$$

$$(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_1 + \vec{j}_2 \vec{A}_2) + \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_2 + \vec{j}_2 \vec{A}_1)$$

$$E_{\text{взаим}} = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_2 + \vec{j}_2 \vec{A}_1) = \frac{1}{c^2} \int dV dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{j}_1(\vec{r}) \vec{j}_2(\vec{r}') = \frac{1}{c} \int dV \vec{j}_1 \vec{A}_2 = \frac{1}{c} \int dV \vec{j}_2 \vec{A}_1$$

Найдем ее в низшем порядке:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{взаим}} &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}_2(\vec{r}') \vec{A}_1(\vec{r} + \vec{r}') = \\
 &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}_2(\vec{r}') \left[\vec{A}_1(\vec{r}) + (\vec{r}' \vec{\nabla}) \vec{A}_1(\vec{r}) + \dots \right] \simeq \frac{1}{c} \int dV' j_{2i}(\vec{r}') x'_j \frac{\partial}{\partial x^j} A_{1i}(\vec{r}) = \\
 &= \frac{1}{2c} \int dV' \left(j_{2i}(\vec{r}') x'_j - j_{2j}(\vec{r}') x'_i \right) \frac{\partial}{\partial x^j} A_{1i}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \varepsilon_{kji} \mu_{2k} \frac{\partial}{\partial x^j} A_{1i}(\vec{r}) \\
 \varepsilon_{jik} \mu_k &= \frac{1}{2c} \varepsilon_{jik} \int dV' \varepsilon_{kmn} x'_m j_n = \frac{1}{2c} \int dV' \left(x'_j j_2 - x'_i j_j \right) \\
 \frac{1}{2c} \varepsilon_{kji} \mu_{2k} \frac{\partial}{\partial x^j} A_{1i}(\vec{r}) &= \vec{\mu}_2 \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \right] \\
 \vec{\mu}_2 \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \right] &= +\vec{\mu}_2 \vec{H}_1
 \end{aligned}$$

Мы получили противоположный знак по сравнению с электростатикой.

При этом поле, создаваемое первой системой в низшем приближении определяется дипольным вкладом

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_1 &= \frac{[\vec{\mu}_1 \times \vec{r}]}{r^3} \\
 \vec{H}_1 = \text{rot} \vec{A}_1 &= \frac{3\vec{r}(\vec{\mu}_1 \vec{r}) - \vec{\mu}_1 r^2}{r^5}
 \end{aligned}$$

Поэтому в низшем приближении

$$E_{\text{взаим}} \simeq \vec{\mu}_2 \vec{H}_1 = \frac{3(\vec{\mu}_1 \vec{r})(\vec{\mu}_2 \vec{r}) - (\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2) r^2}{r^5}$$

Если $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, то

$$\begin{cases} \vec{F}_{1,2} = +\vec{\nabla}_1 E_{\text{взаим}} \\ \vec{F}_{2,1} = +\vec{\nabla}_2 E_{\text{взаим}} \end{cases}$$

В следующих порядках будут возникать уже старшие мультиполи.

Отличия от электростатики:

- 1) Нет зарядов
- 2) Другой знак диполь-дипольного взаимодействия

В случае электростатики

$$T + E_{\text{ЭМ}} = \text{const}$$

Поэтому $E_{\text{ЭМ}}$ можно отождествить с потенциальной энергией взаимодействия систем зарядов.

Но в случае, когда имеются токи, то при перемещениях возникает $\epsilon_{\text{инд}}$, так как

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Возникающее электрическое поле совершает работу

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha} I_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \Delta t \\ \sum_{\alpha} I_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \Delta t &= - \sum_{\alpha} I_{\alpha} \Delta \Phi_{\alpha} \cdot \frac{1}{c} \\ - \sum_{\alpha} I_{\alpha} \Delta \Phi_{\alpha} \cdot \frac{1}{c} &= \frac{-1}{c^2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha} \Delta (L_{\alpha\beta} I_{\beta}) \\ \frac{-1}{c^2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha} \Delta (L_{\alpha\beta} I_{\beta}) &= \frac{-1}{c^2} \sum_{\alpha\beta} (I_{\alpha} \Delta L_{\alpha\beta} I_{\beta} + I_{\alpha} L_{\alpha\beta} \Delta I_{\beta}) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta(T + E_{\text{ЭМ}}) = -A$$

Следовательно

$$\Delta T = -A - \Delta E_{\text{ЭМ}}$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{\text{ЭМ}} &= \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} \\ \Delta T &= \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha\beta} (I_{\alpha} I_{\beta} \Delta L_{\alpha\beta} + I_{\alpha} L_{\alpha\beta} \Delta I_{\beta}) - \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} (\Delta L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} + 2L_{\alpha\beta} I_{\alpha} \Delta I_{\beta}) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta T = \frac{+1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} \Delta L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta}$$

$$\frac{+1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} \Delta L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} = \Delta \left[\frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} \right]_{I = \text{const}} \equiv -\Delta U$$

Здесь U – потенциальная функция:

$$U = - \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} \Big|_{I = \text{const}} = -E_{\text{ЭМ}}$$

Видно, что потенциальная функция отличается знаком от энергии взаимодействия токов.

Поэтому аналогом $E_{\text{ЭМ}}$ в электростатике будет потенциальная функция U , например, в низшем приближении

$$U = \frac{(\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2) r^2 - 3(\vec{\mu}_1 \vec{r})(\vec{\mu}_2 \vec{r})}{r^5} = (-\vec{\mu}_2 \vec{H}_1)$$

Так что будут справедливы равенства

$$\begin{cases} \vec{F}_{1,2} = -\vec{\nabla}_1 U \\ \vec{F}_{2,1} = -\vec{\nabla}_2 U \end{cases} \text{ если } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Лекция 12. Ларморовская прецессия. Энергия взаимодействия токов

На магнитный момент в магнитном поле действует момент сил, это приводит к такому явлению как Ларморовская прецессия.

Ларморовская прецессия

Магнитный момент пропорционален угловому моменту:

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{L} \quad (12.1)$$

g – некоторый числовой коэффициент.

Момент сил:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 = [\vec{\mu} \times \vec{H}] \quad (12.2)$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (12.3)$$

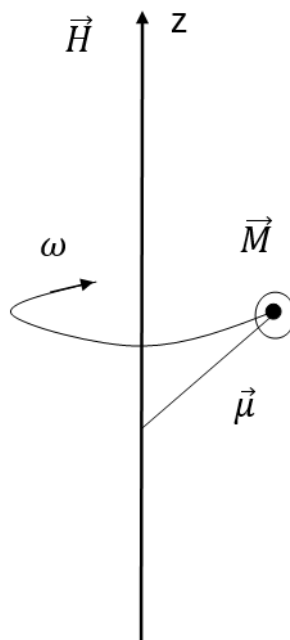


Рис. 12.1. Рассматриваемый случай $q > 0$

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{g \cdot q}{2mc} \right)^{-1} \vec{\mu} \right] = [\vec{\mu} \times \vec{H}] \quad (12.4)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{\mu} = \frac{g \cdot q}{2mc} [\vec{\mu} \times \vec{H}] = \frac{g \cdot q}{2mc} \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \quad (12.5)$$

С учетом того, что

$$\vec{H} = \vec{e}_z H \quad (12.6)$$

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \frac{g \cdot q}{2mc} \mu_y \cdot H \quad (12.7)$$

$$\frac{d\mu_y}{dt} = -\frac{g \cdot q}{2mc} \mu_x \cdot H \quad (12.8)$$

$$\frac{d\mu_z}{dt} = 0 \quad (12.9)$$

Тогда:

$$\mu_z = const = \mu_{||} \quad (12.10)$$

$$\frac{d}{dt} (\mu_x + i\mu_y) = \frac{g \cdot q}{2mc} H (\mu_x - i\mu_y) \quad (12.11)$$

$$\frac{d}{dt} (\mu_x + i\mu_y) = -\frac{g \cdot q \cdot H}{2mc} (\mu_x + i\mu_y) \quad (12.12)$$

$$\mu_x + i\mu_y = \mu_{\perp} \exp\left(-\frac{ig \cdot q}{2mc} H \cdot t\right) \quad (12.13)$$

Будем предполагать, что μ_{\perp} – вещественная величина.

$$\mu_x = \mu_{\perp} \cos(\omega t) \quad (12.14)$$

$$\mu_y = -\mu_{\perp} \sin(\omega t) \quad (12.15)$$

Причем

$$\omega = \frac{g \cdot q \cdot H}{2mc} \quad (12.16)$$

Получилось движение магнитного момента вокруг магнитного поля.

$$\vec{\omega} = -\frac{q \cdot g}{2mc} \vec{H} \quad (12.17)$$

Оценим величину ларморовской частоты ω для характерной ситуации. Рассмотрим протон в атоме водорода, который находится в магнитном поле. Пусть $H = 1$ Тл

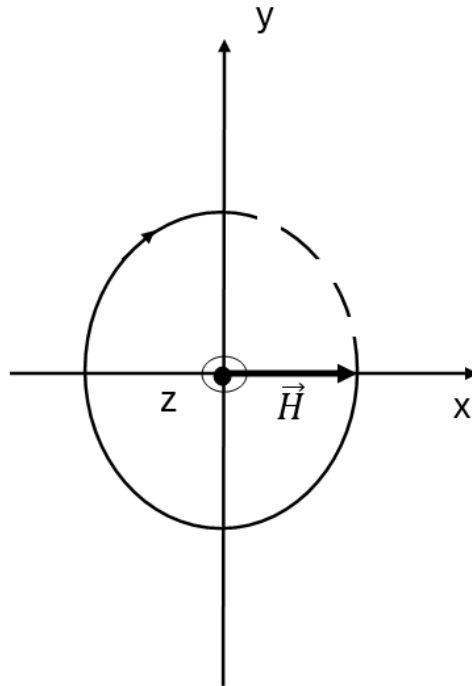


Рис. 12.2. Рассматриваемый случай $q > 0$. Вид сверху

$\sim 10^4$ Гс. В наших единицах измерения магнитное поле: $H = \frac{10^4 \text{ кг}^{1/2}}{\sqrt{10} \text{ м}^{1/2} \text{ с}}$ Заряд протона: $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, $\vec{\mu} = 5.6 \frac{q}{2m_p c} \vec{L}$, $g \simeq 5.6$.

$$\omega = \frac{gqH}{2m_p c} = \frac{5.6eH}{2m_p c} \quad (12.18)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 4.26 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{с}} = 42.6 \text{ МГц} \quad (12.19)$$

Получили частоты, соответствующие примерным частотам телевидения.

Энергия взаимодействия токов

Рассматриваем случай магнитостатики. Плотность энергии электромагнитного поля:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \quad (12.20)$$

$$E_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{H}^2 \quad (12.21)$$

Векторный потенциал магнитного поля вводился следующим образом:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (12.22)$$

$$E_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{8\pi} \int dV -\text{div}[\vec{H} \times \vec{A}] + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} \quad (12.23)$$

$$\text{div}[\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{\nabla}[\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{A}[\vec{\nabla} \vec{H}] - \vec{H}[\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \vec{A} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{A} \quad (12.24)$$

Стоит применить теорему Гаусса.

$$E_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dV -\text{div}[\vec{H} \times \vec{A}] + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_{\infty}^2} d\vec{S}[\vec{H} \times \vec{A}] + \frac{1}{8\pi} \int dV \vec{A} \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (12.25)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{1}{2c} \int dV \vec{A} \vec{j} = \frac{1}{2c} \int dV \vec{A}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) \quad (12.26)$$

Магнитный потенциал диполя при $r = R \rightarrow \infty$:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{\mu} \times \vec{r}]}{r^3} \sim \frac{1}{R^2} \quad (12.27)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.28)$$

В рассматриваемом случае:

$$E_{em} = \frac{1}{2c^2} \int dV \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.29)$$

Магнитное поле создается токами. Пусть например есть набор контуров с токами. Плотность тока будет локализована в контурах.

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} \quad (12.30)$$

$$\vec{j}_{\alpha} \sim I_{\alpha} \quad (12.31)$$

Это выражение можно переписать:

$$E_{em} = \frac{1}{2c^2} \int dV \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2c^2} \int dV dV' \frac{\vec{j}_{\alpha}(\vec{r}) \vec{j}_{\beta}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2c^2} I_{\alpha} I_{\beta} L_{\alpha\beta}, \quad (12.32)$$

где

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{I_{\alpha} I_{\beta}} \int dV dV' \frac{\vec{j}_{\alpha}(\vec{r}) \vec{j}_{\beta}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.33)$$

коэффициенты взаимной индукции.

Если $\alpha \neq \beta$:

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{I_{\alpha} I_{\beta}} \int d\vec{l}_{\alpha} I_{\alpha} \cdot \oint_{c_{\beta}} d\vec{l}_{\beta} I_{\beta} \frac{1}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} = \oint_{c_{\alpha}} \oint_{c_{\beta}} \frac{d\vec{l}_{\alpha} d\vec{l}_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} \quad (12.34)$$

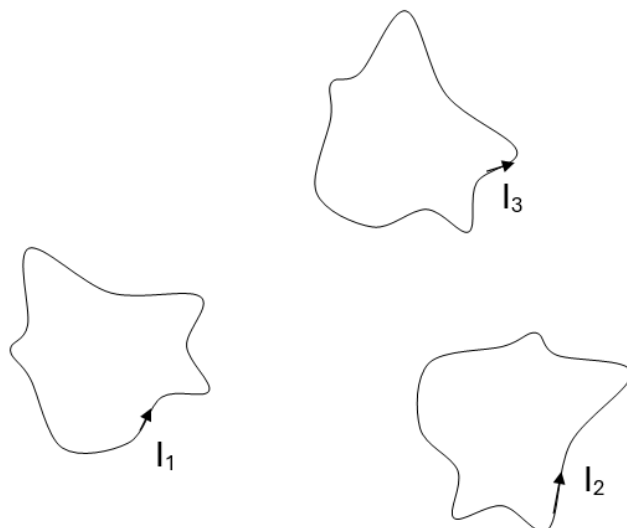


Рис. 12.3. Контур с током

Для перевода в другую систему единиц понадобится:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^7 \frac{\Gamma\text{Н}}{\text{м}} \quad (12.35)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1 \quad (12.36)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = \mu_0\epsilon_0 = c^{-2} \quad (12.37)$$

$$c^{-2} = 10^{-7} \frac{\Gamma\text{Н}}{\text{м}} \quad (12.38)$$

Тогда:

$$1\Gamma\text{Н}c^2 = 10^7\text{м} \quad (12.39)$$

Коэффициенты взаимной индукции симметричны по индексам α и β . Можно увидеть эти коэффициенты в формуле для магнитного потока.

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \int_{S_\alpha} d\vec{S}\vec{H}_\beta = \int_{S_\alpha} d\vec{S}\text{rot}\vec{A}_\beta = \oint_{\partial S_\alpha=C_\alpha} d\vec{l}_\alpha\vec{A}_\beta = \oint_{C_\alpha} d\vec{l}_\alpha \oint_{C_\beta} \frac{1}{c|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|} I_\beta = \frac{1}{c}L_{\alpha\beta}I_\beta, \quad (12.40)$$

где

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{I_\alpha I_\beta} \int dV dV' \frac{\vec{j}_\alpha(\vec{r})\vec{j}_\beta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = L_{\beta\alpha} \quad (12.41)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int dV' \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \oint \frac{1}{c} \frac{d\vec{l}'I}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (12.42)$$

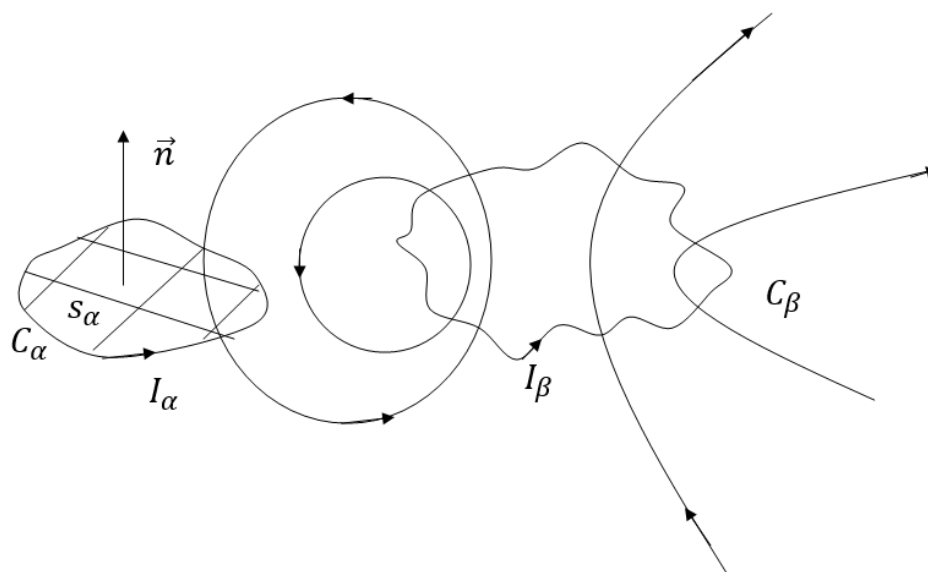


Рис. 12.4. Система контуров с током

Вычислим коэффициент самоиндукции для длинного тонкого соленоида. Длина соленоида составляет l , площадь поперечного сечения S , число витков N . Поле соленоида сосредоточено внутри соленоида, оно является постоянным и однородным.

Используя теорему о циркуляции было вычислено:

$$\vec{H} = \frac{4\pi I}{c} \cdot \frac{N}{l} \vec{e}_z \quad (12.43)$$

Посчитаем сначала полный магнитный поток:

$$\Phi = H \cdot S \cdot N = \frac{4\pi I N^2 S}{c} \frac{1}{l} \equiv \frac{1}{c} LI \quad (12.44)$$

Индуктивность имеет размерность длины:

$$L = \frac{4\pi N^2 S}{l} \quad (12.45)$$

В качестве проверки вычислим энергию, которая заключена в соленоиде:

$$E_{em} = \frac{1}{2c^2} LI^2 = \frac{I^2}{2c^2} \frac{4\pi N^2 S}{l} = 2\pi \frac{S}{L} \left(\frac{IN}{c}\right)^2 \quad (12.46)$$

Энергия соленоида в магнитном поле внутри него. Сравним эту величину с

$$E_{em} = \frac{1}{8\pi} V \cdot \vec{H}^2 = \frac{1}{8\pi} S \cdot l \cdot \frac{16\pi^2 I^2 N^2}{c^2} \frac{1}{l^2} = 2\pi \frac{S}{l} \left(\frac{IN}{c}\right)^2 \quad (12.47)$$

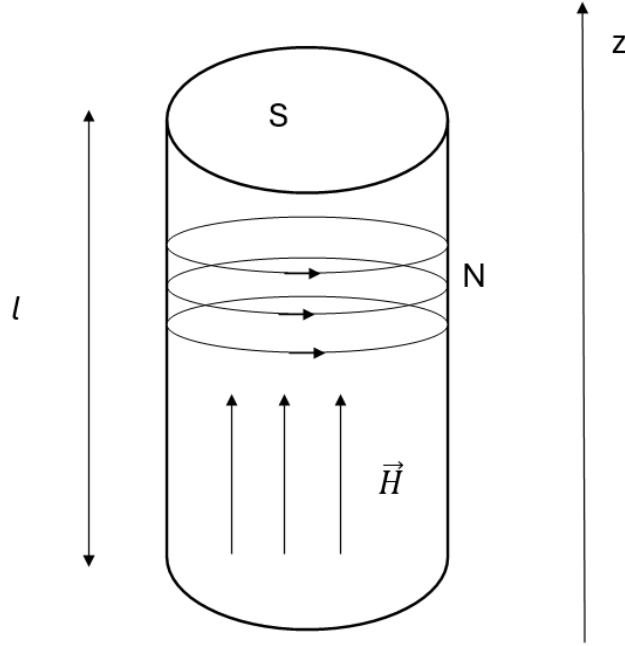


Рис. 12.5. Длинный тонкий соленоид

Выражения в точности совпадают.

Рассмотрим ситуацию, когда система токов состоит из двух подсистем.

$$\begin{aligned} E_{em} &= \frac{1}{2c} \int dV \vec{j} \vec{A} = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 + \vec{j}_2)(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \\ &= \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_1 + \vec{j}_2 \vec{A}_2) + \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_2 + \vec{j}_2 \vec{A}_1), \end{aligned} \quad (12.48)$$

где $\frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_2 + \vec{j}_2 \vec{A}_1)$ – энергия взаимодействия, а $\frac{1}{2c} \int dV (\vec{j}_1 \vec{A}_1 + \vec{j}_2 \vec{A}_2)$ – энергия первой и второй систем по отдельности.

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}_1(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.49)$$

$$E_{\text{взаим}} = \frac{1}{c^2} \int dV dV' \frac{\vec{j}_1(\vec{r}) \vec{j}_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int dV \vec{j}_1 \vec{A}_2 = \frac{1}{c} \int dV \vec{j}_2 \vec{A}_1 \quad (12.50)$$

Предположим, что вблизи начала координат расположена система 1, а система 2 – отодвинута на \vec{r} .

$$E_{\text{взаим}} = \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}_2(\vec{r}') \vec{A}_1(\vec{r} + \vec{r}') = \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}_2(\vec{r}') [\vec{A}_1(\vec{r}) + \frac{1}{1!} (\vec{r} \vec{\nabla}) \vec{A}_1(\vec{r}) + \dots] \quad (12.51)$$

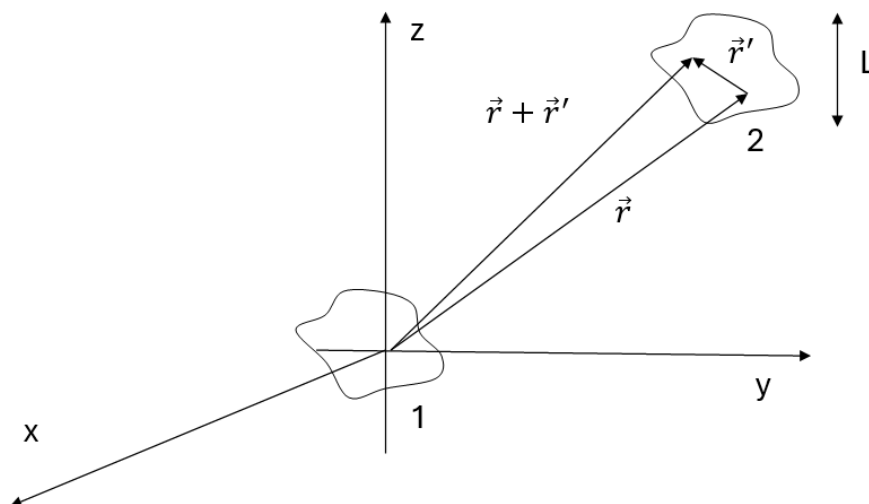


Рис. 12.6. Подсистемы токов

$$\int dV' \vec{j}_2(\vec{r}') = 0 \quad (12.52)$$

Удобно использовать обозначения, которые задействуют индексы.

$$E_{\text{взаим}} \approx \int dV' j_{2i}(\vec{r}') x'_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j} A_{1i}(\vec{r}) \right] \quad (12.53)$$

Учтем, что:

$$-\frac{1}{2} \int dV' (j_{2i}(\vec{r}') x'_j + j_{2j}(\vec{r}') x'_i) = 0 \quad (12.54)$$

Тогда:

$$E_{\text{взаим}} = \int dV' j_{2i}(\vec{r}') x'_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j} A_{1i}(\vec{r}) \right] = \frac{1}{2c} \int dV' (j_{2i}(\vec{r}') x'_j - j_{2j}(\vec{r}') x'_i) \frac{\partial}{\partial x_j} A_{1i}(\vec{r}) \quad (12.55)$$

Магнитный момент:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int dV' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \quad (12.56)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \mu_k &= \epsilon_{jik} \frac{1}{2c} \epsilon_{kmn} \int dV' x'_m j_n(\vec{r}') = (\delta_{jm} \delta_{in} - \delta_{jn} \delta_{im}) \frac{1}{2c} \int dV' x'_m j_m(\vec{r}') = \\ &= \frac{1}{2c} \int dV' (x'_j j_i(\vec{r}') - x'_i j_j(\vec{r}')) \end{aligned} \quad (12.57)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{взаим}} &= \frac{1}{2c} \int dV' (j_{2i}(\vec{r}') x'_j - j_{2j}(\vec{r}') x'_i) \frac{\partial}{\partial x_j} A_{1i}(\vec{r}) = \epsilon_{jik} \mu_{2k} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{1i}(\vec{r}) = \\ &= \mu_{2k} [\vec{\nabla} \times \vec{A}_1]_k = \vec{\mu}_2 [\vec{\nabla} \times \vec{A}_1] = \vec{\mu}_2 \vec{H}_1(\vec{r}) \end{aligned} \quad (12.58)$$

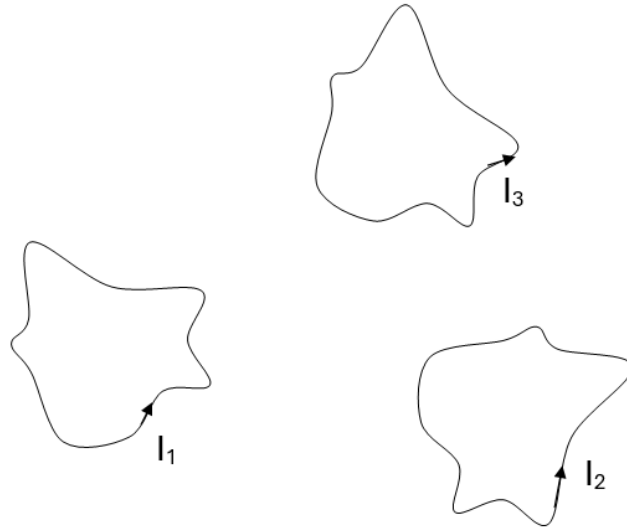


Рис. 12.7. Подсистемы токов

$$\vec{A}_1(\vec{r}) \approx \frac{[\vec{\mu}_1 \times \vec{r}]}{r^3} \quad (12.59)$$

$$\vec{H}_1 = \text{rot} \vec{A}_1 \approx \frac{3\vec{r}(\vec{\mu}_1 \vec{r}) - \vec{\mu}_1 r^2}{r^5} \quad (12.60)$$

$$E_{\text{взаим}} \approx \frac{3(\vec{\mu}_2 \vec{r})(\vec{\mu}_1 \vec{r}) - (\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2 r^2)}{r^5} \quad (12.61)$$

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (12.62)$$

$$\vec{F}_{1,2} = \vec{\nabla}_1 E_{\text{взаим}} \quad (12.63)$$

$$\vec{F}_{2,1} = \vec{\nabla}_2 E_{\text{взаим}} \quad (12.64)$$

Теперь энергия взаимодействия имеет противоположный знак (в отличие от случая электростатики).

Суммарная энергия частицы для электростатики:

$$T + E_{em} = \text{const} \quad (12.65)$$

$$E_{em} = U \quad (12.66)$$

Сила, действующая на заряды:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad (12.67)$$

Случай магнитостатики более интересный. Есть какая-то система токов. Однако сами по себе токи не существуют, ток течет потому, что есть внешние электродвижущее

силы. При течении тока выделяется тепло, то есть еще тепловая энергия, также есть энергия, запасенная в батарее.

Знаем, что механическая энергия при сложении с электромагнитным полем теперь не является постоянной величиной. Геометрия системы меняется, меняется магнитный поток магнитного поля. При его изменении возникает ЭДС индукции.

$$\Delta(T + E_{em}) = -A \quad (12.68)$$

A – работа за счет ЭДС индукции.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha} I_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta t = \sum_{\alpha} I_{\alpha} \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\Delta \Phi_{\alpha}}{\Delta t} \Delta t = -\frac{1}{c^2} \sum_{\alpha} I_{\alpha} \Delta \left(\sum_{\beta} L_{\alpha\beta} I_{\beta}\right) = \\ &= -\frac{1}{c^2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha} (\Delta L_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} \Delta I_{\beta}) \end{aligned} \quad (12.69)$$

$$E_{em} = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} \quad (12.70)$$

$$\Delta E_{em} = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} (\Delta L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} + 2L_{\alpha\beta} I_{\alpha} \Delta I_{\beta}) \quad (12.71)$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha} (\Delta L_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} \Delta I_{\beta}) - \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} (\Delta L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} + 2L_{\alpha\beta} I_{\alpha} \Delta I_{\beta}) = \\ &= \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} \Delta L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} = \Delta \left[\frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} \Big|_{I=\cos t} \right] \equiv -\Delta U, \end{aligned} \quad (12.72)$$

Где U – потенциальная функция, которая выражается:

$$U \equiv -\frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} \Big|_{I=\cos t} \quad (12.73)$$

Это есть некоторый аналог потенциальной энергии.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla} E_{em} \quad (12.74)$$

$$E_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \quad (12.75)$$

То есть, необходимо учитывать электромагнитную индукцию.

Лекция 13. Электромагнитные волны

До сих пор занимались исследованием решений уравнений Максвелла, которые дают поля, создаваемые статическим распределением зарядов или токов. Теперь перейдем к следующему вопросу. Без источников электромагнитное поле может распространяться в вакууме в виде электромагнитных волн.

Электромагнитные волны

Волновое решение уравнения Максвелла в вакууме

Рассматриваем случай отсутствия источников.

$$\rho = 0 \quad (13.1)$$

$$\vec{j} = 0 \quad (13.2)$$

Уравнения Максвелла без источников:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (13.3)$$

Убедимся, что из этих уравнений можно получить волновые уравнения.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (13.4)$$

Применим операцию rot :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (13.5)$$

$$-\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (13.6)$$

Тогда получаем уравнение:

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (13.7)$$

Получаем волновое уравнение для электрического поля:

$$0 = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = \square \vec{E} \quad (13.8)$$

По определению оператор Даламбера:

$$\square = \frac{1}{c^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (13.9)$$

То же самое для магнитного поля:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13.10)$$

Применим операцию rot к обеим частям:

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{H}) = \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{E} \quad (13.11)$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{H}) = \text{grad}(\text{div} \vec{H}) - \Delta \vec{H} \quad (13.12)$$

Волновое уравнение для магнитного поля:

$$-\Delta \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} \quad (13.13)$$

$$0 = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{H} = \square \vec{H} \quad (13.14)$$

Вообще говоря, нужно решать не только два волновых уравнения, но и всю систему уравнений Максвелла. Ищем решение в виде плоской волны:

$$\vec{E} = \text{Re}(E_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}) \quad (13.15)$$

E_0 – некоторый комплексный вектор. Аналогично стоит искать решение для магнитного поля.

$$\vec{H} = \text{Re}(H_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}) \quad (13.16)$$

Действие оператора набла:

$$\vec{\nabla} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} = -i\vec{k} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \quad (13.17)$$

Дифференцирование по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} = i\omega e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \quad (13.18)$$

Подставим и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \text{Re}[\vec{E}_0(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2)e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ 0 = \text{Re}[\vec{H}_0(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2)e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ 0 = \text{Re}[-i\vec{k}\vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ 0 = \text{Re}[-i\vec{k}\vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ \text{Re}[-i[\vec{k} \times \vec{H}_0] e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] = \text{Re}[\frac{i\omega}{c} \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ \text{Re}[-i[\vec{k} \times \vec{E}_0] e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] = \text{Re}[-\frac{i\omega}{c} \vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \end{cases} \quad (13.19)$$

Получаем систему алгебраических уравнений. Во всех уравнениях присутствует вещественная часть. Если в комплексных числах эти уравнения будут решены, то и в рассматриваемом случае получим равенство.

$$\begin{cases} 0 = [\vec{E}_0(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2)e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ 0 = [\vec{H}_0(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2)e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ 0 = [-i\vec{k}\vec{E}_0e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ 0 = [-i\vec{k}\vec{H}_0e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ [-i[\vec{k} \times \vec{H}_0]e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] = [\frac{i\omega}{c}\vec{E}_0e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \\ [-i[\vec{k} \times \vec{E}_0]e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] = [-\frac{i\omega}{c}\vec{H}_0e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] \end{cases} \quad (13.20)$$

Перешли к комплексным уравнениям. Сократим:

$$\begin{cases} 0 = \vec{E}_0(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2) \\ 0 = \vec{H}_0(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2) \\ 0 = -i\vec{k}\vec{E} \\ 0 = -i\vec{k}\vec{H}_0 \\ -i[\vec{k} \times \vec{H}_0] = \frac{i\omega}{c}\vec{E}_0 \\ -i[\vec{k} \times \vec{E}_0] = -\frac{i\omega}{c}\vec{H}_0 \end{cases} \quad (13.21)$$

Уравнения справедливы, если:

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (13.22)$$

$$\vec{k}\vec{E}_0 = 0 \quad (13.23)$$

$$\vec{k}\vec{H}_0 = 0 \quad (13.24)$$

$$-[\vec{k} \times \vec{H}_0] = \frac{\omega}{c}\vec{E}_0 \quad (13.25)$$

$$[\vec{k} \times \vec{E}_0] = \frac{\omega}{c}\vec{H}_0 \quad (13.26)$$

Перейдем к рассмотрению уравнений:

$$\vec{E} = \text{Re}(E_0e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}) \quad (13.27)$$

$$\vec{H} = \text{Re}(H_0e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}) \quad (13.28)$$

Будем считать, что

$$\omega \geq 0 \quad (13.29)$$

Удобно представить:

$$\vec{k} = k\vec{n} \quad (13.30)$$

\vec{n} – единичный вектор:

$$\vec{n}^2 = 1 \quad (13.31)$$

$$k = \sqrt{\vec{k}^2} \quad (13.32)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (13.33)$$

$$\omega = 2\pi\nu \quad (13.34)$$

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad (13.35)$$

Длина волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (13.36)$$

Скорость распространения электромагнитных волн:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (13.37)$$

\vec{n} смотрит по направлению распространения электромагнитной волны.

$$\vec{n}\vec{E}_0 = 0 \quad (13.38)$$

$$\vec{n}\vec{H}_0 = 0 \quad (13.39)$$

Колебания \vec{E} и \vec{H} происходят перпендикулярно \vec{n} , поэтому электромагнитные волны являются поперечными.

Связь амплитуды колебаний:

$$-[\vec{n} \times \vec{H}_0] = \vec{E}_0 \quad (13.40)$$

$$[\vec{n} \times \vec{E}_0] = \vec{H}_0 \quad (13.41)$$

Плоскости колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны.

$$\vec{H}_0 = [\vec{n} \times \vec{E}_0] \quad (13.42)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_0 = [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}_0]] = \vec{n}(\vec{n}\vec{E}_0) - \vec{E}_0(\vec{n}^2) = -\vec{E}_0 \quad (13.43)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси z .

$$\vec{n} = \vec{e}_z \quad (13.44)$$

Пусть

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x e^{i\phi_0}, \quad (13.45)$$

где $E_0 \in \text{Re}$.

Тогда

$$\vec{E} = \text{Re}(E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r} + i\phi_0}) = E_0 \vec{e}_x \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \quad (13.46)$$

$$\vec{k}\vec{r} = k\vec{n}\vec{r} = knz \quad (13.47)$$

$$\vec{H}_0 = [\vec{n} \times \vec{E}_0] = [\vec{e}_z \times E_0 \vec{e}_x e^{i\phi_0}] = E_0 \vec{e}_y e^{i\phi_0} \quad (13.48)$$

$$\vec{H} = \text{Re}(E_0 \vec{e}_y e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r} + i\phi_0}) = \vec{e}_y E_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \quad (13.49)$$

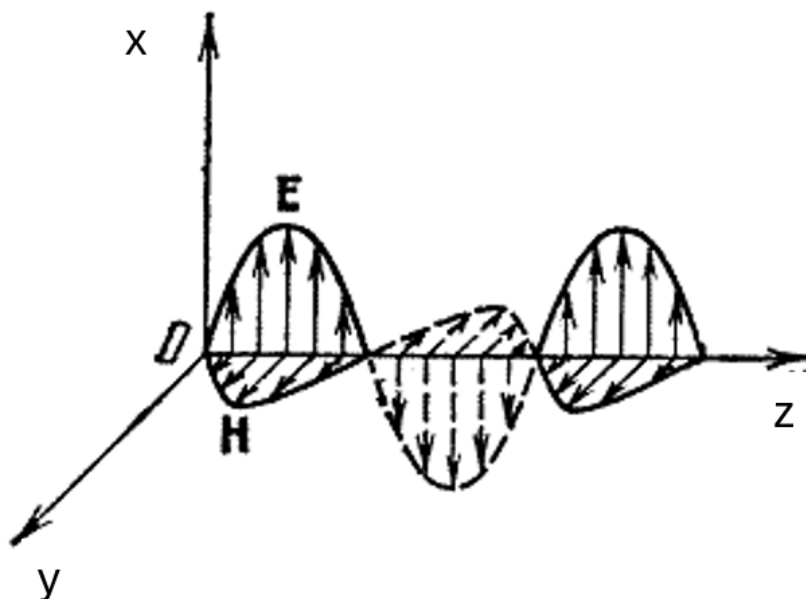


Рис. 13.1. Рассматриваемый случай распространения волны вдоль oz .

Уравнения Максвелла в вакууме имеют волновые решения.

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\omega t - \vec{k}\vec{r}}) \\ \vec{H} = \text{Re}(\vec{H}_0 e^{i\omega t - \vec{k}\vec{r}}) \end{cases} \quad (13.50)$$

Причем:

$$\begin{cases} \vec{n}\vec{E}_0 = 0 \\ \vec{n}\vec{H}_0 = 0 \end{cases} \quad (13.51)$$

$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad (13.52)$$

В общем случае ситуация более хитрая, вопрос о поляризации не тривиален.

Поляризация электромагнитных волн

$$\vec{n} = \vec{e}_z \quad (13.53)$$

Вектор \vec{E}_0 комплексный.

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{0x} e^{i\phi_{0x}} + \vec{e}_y E_{0y} e^{i\phi_{0y}} \quad (13.54)$$

Начнем с частных случаев. Пусть две фазы совпадают.

$$\phi_{0x} = \phi_{0y} = \phi_0 \quad (13.55)$$

Тогда:

$$\vec{E}_0 = (\vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_y E_{0y}) e^{i\phi_0} \quad (13.56)$$

$$\vec{E} = \text{Re}[(\vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_y E_{0y}) e^{i\phi_0 + i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}] = (\vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_y E_{0y}) \cdot \cos(i\phi_0 + i\omega t - i\vec{k}\vec{r}) \quad (13.57)$$

Колебания будут происходить в некоторой плоскости.

$$E = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \quad (13.58)$$

$$\text{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \quad (13.59)$$

$$E_{0x} = E_0 \cos \frac{\varphi}{2} \quad (13.60)$$

$$E_{0y} = E_0 \sin \frac{\varphi}{2} \quad (13.61)$$

Рассмотрим другой частный случай. Пусть теперь

$$\phi_{0x} = \phi_{0y} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (13.62)$$

С учетом

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i \quad (13.63)$$

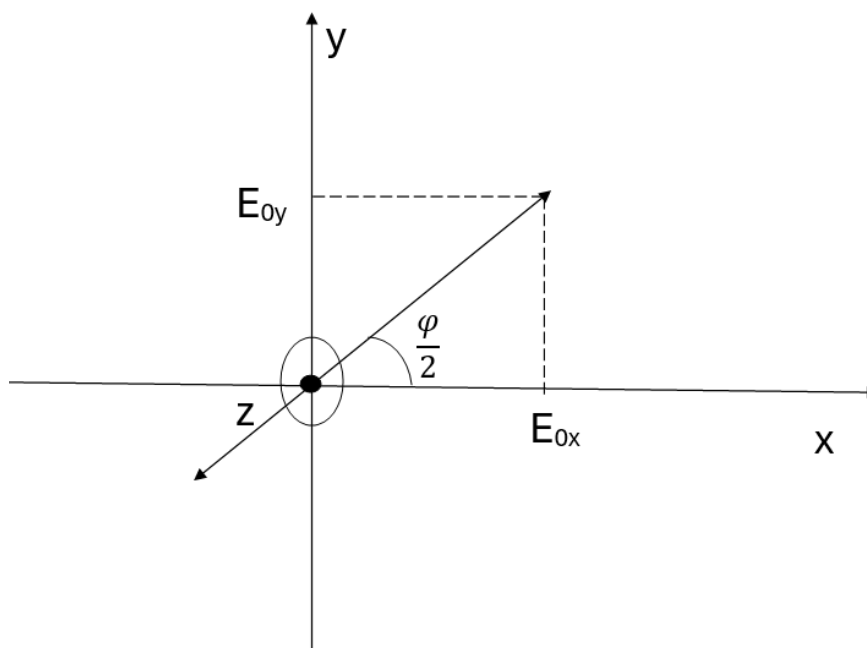


Рис. 13.2. Рассматриваемый частный случай – линейная поляризация

получаем:

$$e^{i\phi_{0x}} = e^{i\phi_{0y}} e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i e^{i\phi_{0y}} = e^{i\phi_0} \quad (13.64)$$

$$e^{i\phi_{0y}} = \mp i e^{i\phi_0} \quad (13.65)$$

$$\vec{E}_0 = (\vec{e}_x E_{0x} \mp i \vec{e}_y E_{0y}) e^{i\phi_0} \quad (13.66)$$

Электрическое поле:

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{e}_x E_{0x} \mp i \vec{e}_y E_{0y}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r} + i\phi_0} = \vec{e}_x E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \pm \vec{e}_y E_{0y} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \quad (13.67)$$

$$1 = \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \quad (13.68)$$

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{0x} e^{i\phi_{0x}} + \vec{e}_y E_{0y} e^{i\phi_{0y}} \quad (13.69)$$

$$\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0|^2 \cdot e^{2i\phi_0} \quad (13.70)$$

$$(\vec{E}_0 e^{-i\phi_0})^2 = |\vec{E}_0|^2 \in \text{Re} \quad (13.71)$$

$$\vec{E}_0 e^{-i\phi_0} = \vec{E}_a + i\vec{E}_b \quad (13.72)$$

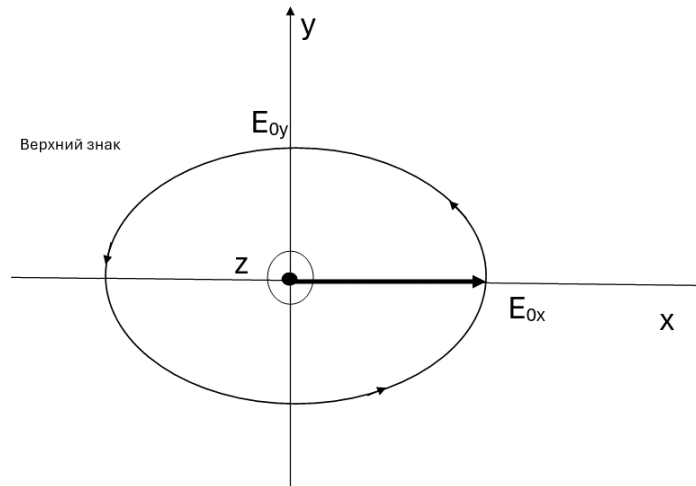


Рис. 13.3. Частный случай. Верхний знак

$$\vec{E}_a, \vec{E}_b \in Re \quad (13.73)$$

$$(\vec{E}_0 e^{i\phi_0})^2 = \vec{E}^2 - \vec{E}_b^2 + 2i(\vec{E}_a \vec{E}_b) \in Re \quad (13.74)$$

$$(\vec{E}_a \vec{E}_b) = 0 \quad (13.75)$$

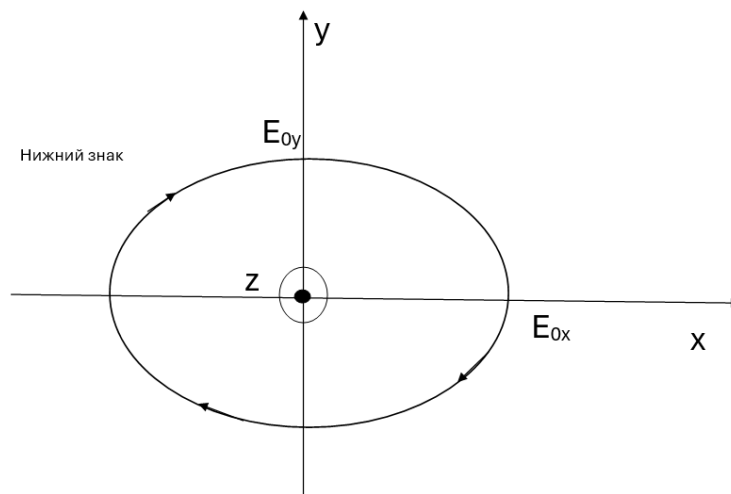


Рис. 13.4. Частный случай. Нижний знак

Значит

$$\vec{E}_a \perp \vec{E}_b \quad (13.76)$$

Можно считать, что

$$|\vec{E}_a| \geq |\vec{E}_b| \quad (13.77)$$

Посчитаем электрическое поле:

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_a + i\vec{E}_b)e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r} + i\phi_0} = \vec{E}_a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0) - \vec{E}_b \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0) \quad (13.78)$$

Эллиптическая поляризация:

$$\frac{(\vec{E}\vec{e}_a)^2}{\vec{E}_a^2} + \frac{(\vec{E}\vec{e}_b)^2}{\vec{E}_b^2} = 1 \quad (13.79)$$

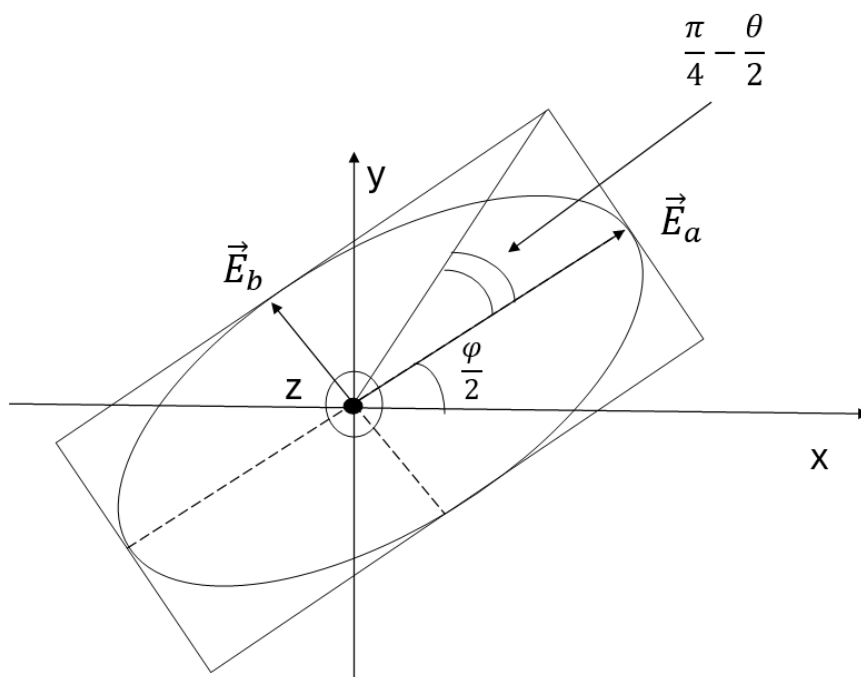


Рис. 13.5. Рассматриваемый частный случай – эллиптическая поляризация

$$|\vec{E}_a| \geq |\vec{E}_b| \quad (13.80)$$

$$\theta \in [0, \pi] \quad (13.81)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi) \quad (13.82)$$

Те же диапазоны приобретают сферические координаты. Можно ориентацию и параметры эллипса, описывающего конец вектора напряженности электрического поля, представить при помощи сферы Пуанкаре (сфера, на которой θ, φ – сферические координаты).

$$\vec{E}_0 = (\vec{E}_a + i\vec{E}_b)e^{i\phi} \quad (13.83)$$

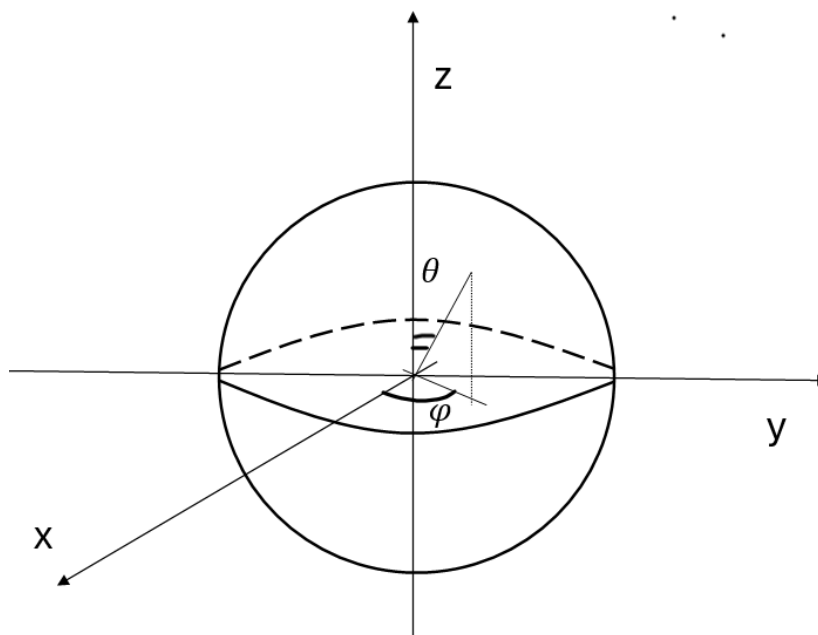


Рис. 13.6. Сфера Пуанкаре

$$E_0 = \sqrt{\vec{E}_a^2 + \vec{E}_b^2} \quad (13.84)$$

$$\begin{cases} E_{0a} = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\ E_{0b} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (13.85)$$

Разложение:

$$\begin{aligned} \vec{E}_a i \vec{E}_b = & [\vec{e}_x E_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e}_y E_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2}] + \\ & + i[-\vec{e}_x E_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2} + \vec{e}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}] \end{aligned} \quad (13.86)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_a + i \vec{E}_b = & E_0 [\vec{e}_x \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2}] + \\ & + \vec{e}_y [\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2} + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}] \end{aligned} \quad (13.87)$$

Многое можно увидеть путем сравнения сферы Пуанкаре и графика для эллиптической поляризации.

Экватор:

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad (13.88)$$

Весь эллипс схлопывается в линию, получается линейная поляризация. Плоскость колебаний \vec{E} определяется углом φ .

Полус $\theta = 0$:

$$\vec{E}_a + i\vec{E}_b = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}) + \vec{e}_y (\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad (13.89)$$

Получили левую поляризацию. Полус $\theta = \pi$:

$$\vec{E}_a + i\vec{E}_b = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}) + \vec{e}_y (\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y) e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad (13.90)$$

Угол θ определяет эксцентриситет.

$$\begin{aligned} \vec{E}_a + i\vec{E}_b &= E_0[\vec{e}_x \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\varphi}{2}] + \\ &+ \vec{e}_y [\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\varphi}{2}] = E_0 \vec{e}_1 \end{aligned} \quad (13.91)$$

Условие:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 * \vec{e}_1 &= \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \\ &+ \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = 1 \end{aligned} \quad (13.92)$$

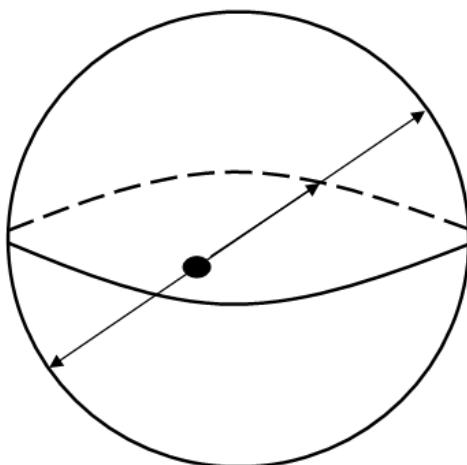


Рис. 13.7. Сфера Пуанкаре. Естественный свет

Рассмотрим противоположную точку на сфере Пуанкаре:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_x (-\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} + i \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\varphi}{2}) +$$

$$+\vec{e}_y(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos\frac{\varphi}{2})_i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\sin\frac{\varphi}{2} \quad (13.93)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 * \vec{e}_2 = & -\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \\ & + \cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (13.94)$$

Получили взаимную ортогональность. Сфера Пуанкаре дает наглядную картину для описания поляризации.

$$\vec{E} = \text{Re}\vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \quad (13.95)$$

$$\vec{H} = \text{Re}\vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} = \text{Re}[\vec{n} \times \vec{E}_0] e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} = [\vec{n} \times \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}})] = [\vec{n} \times \vec{E}] \quad (13.96)$$

$$\vec{H}_0 = [\vec{n} \times \vec{E}_0] \quad (13.97)$$

Магнитное поле всегда перпендикулярно электрическому.

Смешанное произведение, в котором можно совершать циклические перестановки:

$$\vec{H}^2 = [\vec{n} \times \vec{E}]^2 = [\vec{n} \times \vec{E}][\vec{n} \times \vec{E}] = n[\vec{E}] \times [\vec{n} \times \vec{E}] = \vec{n}(\vec{n}(\vec{E}^2) - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})) = \vec{E}^2 \quad (13.98)$$

Есть также естественный свет – смесь состояний с различной поляризацией. Естественный свет удобно описывать с помощью сферы Пуанкаре.

Лекция 14. Энергия и импульс электромагнитной волны. Поляризованный и естественный свет

Электромагнитное поле может распространяться в вакууме в виде электромагнитных волн. Электрическое поле может быть записано в виде:

$$\vec{E} = \text{Re} \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad (14.1)$$

$$\vec{H} = \text{Re} \vec{H}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad (14.2)$$

Причем волновой вектор можно представить как:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (14.3)$$

Вектор, указывающий направление распространения волны:

$$\vec{n}^2 = 1 \quad (14.4)$$

Подставив эти выражения в уравнения Максвелла можно получить:

$$\vec{n} \vec{E}_0 = 0 \quad (14.5)$$

$$\vec{n} \vec{H}_0 = 0 \quad (14.6)$$

Отсюда следуют поперечность волн.

$$\vec{H}_0 = [\vec{n} \times \vec{E}_0] \quad (14.7)$$

Эквивалентно можно записать следующим образом:

$$\vec{E}_0 = -[\vec{n} \times \vec{H}_0] \quad (14.8)$$

Энергия и импульс электромагнитной волны

Было показано, что объемная плотность электромагнитного поля может быть записано следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \quad (14.9)$$

$$\vec{H} = \text{Re} \vec{H}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} = \text{Re} [\vec{n} \times \vec{E}_0] e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} = [\vec{n} \times \text{Re} \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}] = [\vec{n} \times \vec{E}] \quad (14.10)$$

Вычислим квадрат этой величины:

$$\vec{H}^2 = [\vec{n} \times \vec{E}]^2 = [\vec{n}\vec{E}][\vec{n} \times \vec{E}] = \vec{n}[\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \vec{n}\vec{n}(\vec{E}^2) - (\vec{n}\vec{E})\vec{E} = \vec{E}^2 \quad (14.11)$$

Амплитуды колебаний в вакууме для электрических и магнитных полей одинаковы.

Тогда:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2 = \frac{1}{4\pi}[\text{Re}\vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}]^2 = [\text{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)] = \\ &= \frac{1}{16\pi}[\vec{E}_0 e^{-2i\omega t + 2i\vec{k}\vec{r}} + \vec{E}_0^2 * e^{2i\omega t - 2i\vec{k}\vec{r}} + 2\vec{E}_0 \vec{E}_0^*] \end{aligned} \quad (14.12)$$

Получили мгновенное выражение для плотности энергии. Однако для дальнейших вычислений необходимо получить усредненное выражение без быстрых осцилляций:

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{8\pi}\vec{E}_0 \vec{E}_0^* = \frac{1}{8\pi}\vec{E}_0^2 \quad (14.13)$$

$$\vec{E} = \text{Re}\vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad (14.14)$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e} \quad (14.15)$$

\vec{e} – вектор поляризации, причем

$$\vec{e} * \vec{e} = 1 \quad (14.16)$$

Вектор Умова-Пойтинга по определению:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}] \quad (14.17)$$

Выражение для импульса электромагнитной волны:

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{4\pi c}[\vec{E} \times \vec{H}] \quad (14.18)$$

$$\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}] \quad (14.19)$$

Подставляя получим в рассматриваемом случае:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi}(\vec{n}(\vec{E})^2 - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})) = \frac{c}{4\pi}\vec{n}(\vec{E}^2) = c\vec{n}\omega \quad (14.20)$$

Получили аналог выражения для плотности тока:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (14.21)$$

Среднее значение по времени:

$$\langle \vec{S} \rangle = c\vec{n} \langle \omega \rangle = c\vec{n} \frac{\vec{E}_0^2}{8\pi} \quad (14.22)$$

$$\vec{P} = \vec{n} \frac{E_0^2}{8\pi c} \quad (14.23)$$

Суперпозиция плоских волн

До сих пор рассматривались монохроматические волны, то есть некоторая идеализация. Более реалистичный случай – суперпозиция таких волн (волновые пакеты). Рассмотрим простейший пример. Запишем общую формулу для суперпозиции плоских волн:

$$\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{r}) = \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(\vec{k}) e^{-i\omega(k)t + i\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{H}(t, \vec{r}) = \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(\vec{k}) [\vec{n} \times \vec{E}_0(\vec{k})] e^{-i\omega(k)t + i\vec{k}\vec{r}} \end{cases} \quad (14.24)$$

Рассмотрим пример применения таких формул. Пусть электрическое поле направлено по оси x . В начальный момент времени распространялась волна с профилем, изображенным на рис. 14.1. В начальный момент времени:

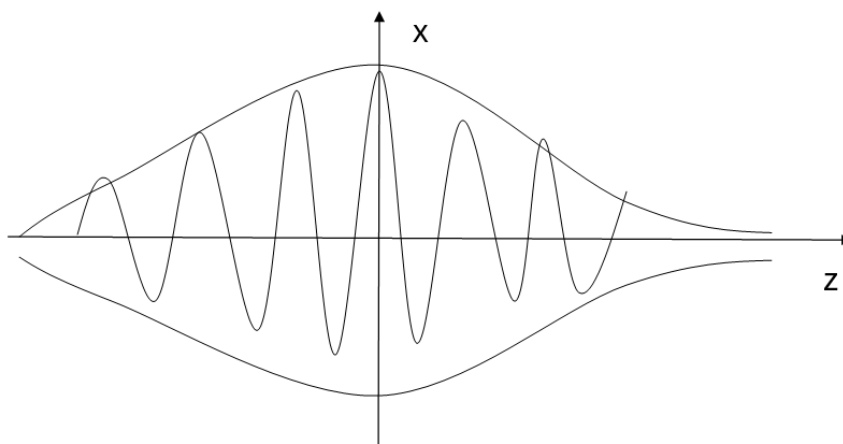


Рис. 14.1. Профиль рассматриваемой волны

$$\vec{E}(0, \vec{r}) = \vec{e}_x \vec{E}_0 e^{-z^2/2L^2} \cos(k_0 z), \quad (14.25)$$

причем

$$\begin{cases} k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda \ll L \end{cases} \quad (14.26)$$

Волна распространяется вдоль оси z : $\vec{n} = \vec{e}_z$. Вычислим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \vec{E}(0, \vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \vec{e}_x E_0 e^{-z^2/2L^2} \cos(k_0 z) e^{-ik_x x - ik_y y - ik_z z} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2L^2} \frac{1}{2} (e^{ik_0 z} + e^{-ik_0 z}) e^{-ik_z z} = \quad (14.27) \\
 &= (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz [e^{-z^2/2L^2} e^{i(k_0 - k_z)z} + e^{-z^2/2L^2} e^{-i(k_0 + k_z)z}]
 \end{aligned}$$

Для подсчета выражения необходимо выделить полный квадрат.

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \vec{E}(0, \vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} = (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{\frac{1}{2L^2}(z - iL^2(k_0 - k_z))^2} e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} + e^{-\frac{1}{2L^2}(z + i(k_0 + k_z)L^2)^2} e^{\frac{L^2}{2}(k_0 + k_z)^2} = \quad (14.28) \\
 &= (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \sqrt{2\pi L^2} [e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} + e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 + k_z)^2}]
 \end{aligned}$$

Получили прямое преобразование Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \vec{E}(0, \vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} = (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \sqrt{2\pi L^2} [e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} + e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 + k_z)^2}] \quad (14.29)$$

Обратное преобразование:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_0(0, \vec{r}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi L^2}} [e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} + e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 + k_z)^2}] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z z} \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \sqrt{2\pi L^2} [e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} + e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 + k_z)^2}] \quad (14.30)
 \end{aligned}$$

Сделаем замену: k_z заменим на $-k_z$, суммарный знак не изменится.

$$\vec{E}_0(0, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z z} \vec{e}_x E_0 \frac{1}{2} \sqrt{2\pi L^2} e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} [e^{ik_z z} + e^{-ik_z z}] \quad (14.31)$$

Вспомним вид функции в начальный момент времени:

$$\vec{E}(0, \vec{r}) = \vec{e}_x \vec{E}_0 e^{-z^2/2L^2} \cos(k_0 z) = \vec{e}_x E_0 \sqrt{2\pi L^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} e^{ik_z z} \quad (14.32)$$

Введем зависимость от времени.

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{e}_x E_0 \sqrt{2\pi L^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} e^{-i\omega t + ik_z z} \quad (14.33)$$

Причем:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z \quad (14.34)$$

$$\omega = k_z c \quad (14.35)$$

Волна имеет конечную длину, также она представима в виде плоских волн.

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= \vec{e}_x E_0 \sqrt{2\pi L^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{-\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} e^{-ick_z t + ik_z z} = \\ &= \vec{e}_x E_0 \sqrt{2\pi L^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{\frac{L^2}{2}(k_0 - k_z)^2} e^{i(k_z - k_0)(z - ct)} e^{ik_0(z - ct)} = \\ &= \vec{e}_x E_0 \sqrt{2\pi L^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \exp\left[-\frac{L^2}{2} \left[(k_0 - k_z) - i(z - ct) \frac{1}{L^2} \right]^2\right] e^{ik_0(z - ct)} e^{-\frac{1}{2L^2}(z - ct)^2} = \\ &= \vec{e}_x E_0 \sqrt{2\pi L^2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{L^2}} e^{-\frac{1}{2L^2}(z - ct)^2} \cos(k_0(z - ct)) = \vec{e}_x E_0 e^{-\frac{1}{2L^2}(z - ct)^2} \cos(k_0(z - ct)) \end{aligned} \quad (14.36)$$

Как и ожидалось, профиль движется вдоль оси z со скоростью света, при этом профиль сохраняет свою форму:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{e}_x E_0 e^{-\frac{1}{2L^2}(z - ct)^2} \cos(k_0(z - ct)) \quad (14.37)$$

Электрическое поле, в силу уравнений Максвелла, удовлетворяет уравнению:

$$\square \vec{E} = 0, \quad (14.38)$$

где $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

Решение:

$$\vec{E} = \vec{E}(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (14.39)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \vec{E}'(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \frac{\omega}{c} \quad (14.40)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}''(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (14.41)$$

$$(\vec{\nabla}^2) \vec{E}(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \Delta \vec{E}(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \vec{E}''(\omega t - \vec{k}\vec{r}) (\vec{k}^2) \quad (14.42)$$

Тогда:

$$\square \vec{E}(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}''(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = 0 \quad (14.43)$$

Поляризованный, частично поляризованный и естественный свет

Плоская монохроматическая бесконечно длинная волна – идеализация, в реальных ситуациях они имеют конечную длину. От различных источников приходят различным образом поляризованные волновые пакеты. Для плоской монохроматической волны имеет место выражение:

$$\vec{E} = \text{Re} \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad (14.44)$$

Пусть теперь есть медленная зависимость от времени:

$$\vec{E} = \text{Re} \vec{E}_0(t) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \quad (14.45)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси z :

$$\vec{n} = \vec{e}_z \quad (14.46)$$

Такой случай удобно описывать матрицей:

$$\rho = \frac{1}{\langle E_0^2 \rangle} = \left\langle \begin{pmatrix} E_{0x} E_{0x}^* & E_{0x} E_{0y}^* \\ E_{0y} E_{0x}^* & E_{0y} E_{0y}^* \end{pmatrix} \right\rangle \quad (14.47)$$

Причем:

$$\vec{E}_0 \vec{E}_0^* = E_0^2 \quad (14.48)$$

Можно обозначить следующим образом:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \quad (14.49)$$

В случае монохроматической волны есть удобное представление для \vec{E}_0 :

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 = E_0 e^{-i\phi_0} \vec{e}_x & \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \\ & + \vec{e}_y \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (14.50)$$

Предположим, что есть поляризованный свет. Вычислим элементы матрицы ρ .

$$\rho_{xx} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin^2\frac{\varphi}{2} = \quad (14.51)$$

$$= \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\theta \cos\varphi = \frac{1}{2} (1 + \sin\theta \cos\varphi) \quad (14.52)$$

$$\begin{aligned} \rho_{xy} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \\ &\quad + i \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \left(-\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2} \sin\varphi - i \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \\ &\quad = \frac{1}{2} \sin\theta \sin\varphi - \frac{i}{2} \cos\theta = \frac{1}{2} (\sin\theta \sin\varphi - i \cos\theta) \end{aligned} \quad (14.53)$$

Компонента ρ_{yx} – комплексно сопряженная:

$$\rho_{yx} = \frac{1}{2} (\sin\theta \sin\varphi + i \cos\theta) \quad (14.54)$$

$$\begin{aligned} \rho_{yy} &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \\ &\quad + \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta \cos\varphi = \frac{1}{2} (1 - \sin\theta \cos\varphi) \end{aligned} \quad (14.55)$$

Окончательно получаем:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + \sin\theta \cos\varphi) & \frac{1}{2} (\sin\theta \sin\varphi - i \cos\theta) \\ \frac{1}{2} (\sin\theta \sin\varphi + i \cos\theta) & \frac{1}{2} (1 - \sin\theta \cos\varphi) \end{pmatrix} \quad (14.56)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi - i \cos\theta \\ \sin\theta \sin\varphi + i \cos\theta & 1 - \sin\theta \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (14.57)$$

Матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.58)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14.59)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.60)$$

Введем новые величины:

$$\xi_1 = \sin\theta \sin\varphi \quad (14.61)$$

$$\xi_2 = \cos\theta \quad (14.62)$$

$$\xi_3 = \sin\theta \cos\varphi \quad (14.63)$$

Тогда можно записать:

$$\rho = \frac{1}{2}(1_2 + \xi_1 \sigma_1 + \xi_2 \sigma_2 + \xi_3 \sigma_3) = \frac{1}{2}(1_2 + \vec{\xi} \vec{\sigma}) \quad (14.64)$$

Параметры Стокса:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \quad (14.65)$$

Противоположная поляризация соответствует противоположной точке на сфере Пуанкаре. Для нее нужно сделать следующее преобразование:

$$\begin{cases} \theta \longrightarrow \pi - \theta \\ \varphi \longrightarrow \varphi + \pi \end{cases} \quad (14.66)$$

Тогда для параметров Стокса можно записать:

$$\begin{cases} \xi_1 \longrightarrow -\xi_1 \\ \xi_2 \longrightarrow -\xi_2 \\ \xi_3 \longrightarrow -\xi_3 \end{cases} \quad (14.67)$$

Тогда:

$$\rho = \frac{1}{2}(1_2 - \vec{\xi} \vec{\sigma}) \quad (14.68)$$

Пусть теперь известны только вероятности того, что поляризация соответствует определенным углам.

$$\omega_1 : (\theta, \varphi) \vec{\xi} \quad (14.69)$$

$$\omega_2 : (\pi - \theta, \varphi + \pi) - \vec{\xi} \quad (14.70)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1 \quad (14.71)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(1_2 + \vec{\xi} \vec{\sigma}) \quad (14.72)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(1_2 - \vec{\xi} \vec{\sigma}) \quad (14.73)$$

Матрица плотности:

$$\rho = \omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2}(1 + \vec{P} \vec{\sigma}) \quad (14.74)$$

Причем:

$$\vec{P} = (\omega_1 - \omega_2) \vec{\xi} \quad (14.75)$$

Степень поляризации:

$$1 \geq |\vec{P}| = P = |\omega_1 - \omega_2| \quad (14.76)$$

Естественный свет наблюдается, если:

$$\omega_1 = \omega_2, P = 0 \quad (14.77)$$

Частично поляризованный свет:

$$0 < P < 1 \quad (14.78)$$

Полностью поляризованный свет:

$$P = 1 \quad (14.79)$$

Точки на сфере Пуанкаре соответствуют различным поляризациям. Состояния с частичной поляризацией также могут быть помещены на сферу, они лежат внутри. Естественный свет лежит в центре сферы Пуанкаре.

Лекция 15. Запаздывающие потенциалы

Поле движущихся зарядов

Запаздывающие потенциалы

Уравнения Максвелла можно разбить на 2 группы: содержащие источники и не содержащие источники.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (15.1)$$

Эти уравнения могут быть решены введением потенциалов. \vec{A} – векторный потенциал, φ – скалярный потенциал:

$$\begin{cases} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \end{cases} \quad (15.2)$$

Уравнения Максвелла, содержащие источники:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (15.3)$$

Были получены уравнения:

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right), \quad (15.4)$$

$$\square \varphi = 4\pi \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right), \quad (15.5)$$

где

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (15.6)$$

Калибровочное условие Лоренца:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (15.7)$$

В калибровке Лоренца уравнения принимают вид:

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (15.8)$$

$$\square \varphi = 4\pi \rho \quad (15.9)$$

Представим потенциалы следующим образом:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dt' dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \rho(t', \vec{r}'), \quad (15.10)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dt' dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \frac{1}{c} \vec{j}(t', \vec{r}'), \quad (15.11)$$

где $G(t-t', \vec{r}-\vec{r}')$ – функция Грина. Она должна удовлетворять условию:

$$\square G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = 4\pi \delta(t-t') \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \quad (15.12)$$

$$\square \varphi(t, \vec{r}) = \square \int dt' dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \rho(t', \vec{r}') = 4\pi \rho(t, \vec{r}) \quad (15.13)$$

Построим такую функцию Грина. Решение будем искать в виде:

$$G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} G(\omega, \vec{k}) \quad (15.14)$$

$$\begin{aligned} \square \varphi(t, \vec{r}) &= \square \int dt' dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \rho(t', \vec{r}') = \\ &= \int dt' dV' \cdot 4\pi \delta(t-t') \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \rho(t', \vec{r}') = 4\pi \rho(t, \vec{r}) \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$\begin{aligned} \square G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right) G(\omega, \vec{k}) \cdot e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} = \\ &= 4\pi \delta(t-t') \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \end{aligned} \quad (15.16)$$

Необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right) G(\omega, \vec{k}) = 4\pi \quad (15.17)$$

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{4\pi}{-\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right)} = -\frac{4\pi c^2}{(\omega^2 - c^2 \vec{k}^2)} \quad (15.18)$$

Для уменьшения числа аргументов рассмотрим величину $G(t, \vec{r})$.

$$G(t, \vec{r}) = -4\pi c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{(\omega^2 - c^2 \vec{k}^2)} \quad (15.19)$$

Если

$$\omega = \pm c\sqrt{\vec{k}^2} = \pm ck, \quad (15.20)$$

то интегралы нуждаются в определении.

$$\begin{cases} \varphi(r, \vec{r}) = \int dt' dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \rho(t', \vec{r}') \\ \vec{A}(r, \vec{r}) = \int dt' dV' G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \frac{1}{c} \vec{j}(t', \vec{r}') \end{cases} \quad (15.21)$$

Потенциалы определяются плотностями заряда и тока в предыдущие моменты времени. Из соображений причинности следует ограничение на функцию Грина.

При $t' > t$:

$$G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = 0 \quad (15.22)$$

Это эквивалентно тому, что при $t < 0$

$$G(t, \vec{r}) = 0 \quad (15.23)$$

Условие позволяет понять, как работать с полюсами на оси интегрирования.

$$G(t, \vec{r}) = G_{ret}(t, \vec{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (-4\pi c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \cdot \frac{1}{\omega^2 - c^2k^2 + 2i\omega\epsilon} \quad (15.24)$$

Для получения полюсов необходимо решить квадратное уравнение.

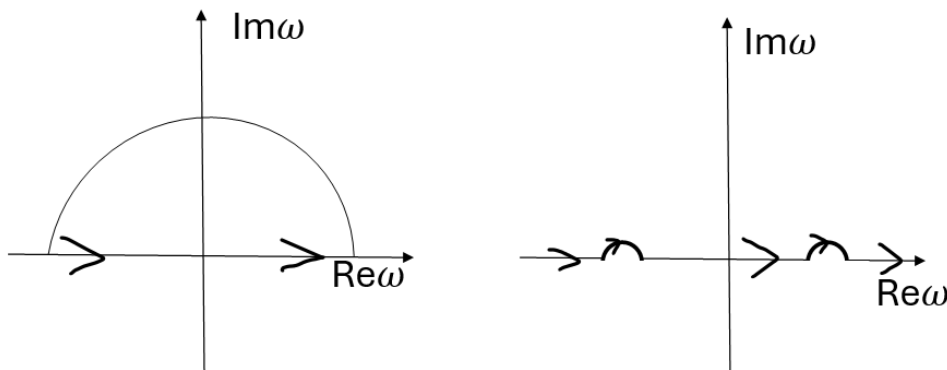


Рис. 15.1. Поясняющий рисунок для $t < 0$

$$\omega^2 - c^2k^2 + 2i\omega\epsilon = 0 \quad (15.25)$$

Дискриминант:

$$D = -4\epsilon^2 + 4\epsilon^2k^2 \quad (15.26)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-2i\epsilon \pm \sqrt{4c^2k^2 - 4\epsilon^2}}{2} = -i\epsilon \pm ck \quad (15.27)$$

Тогда:

$$e^{-i\omega t} = e^{i\omega|t|} \quad (15.28)$$

$t > 0$:

$$G(t, \vec{r}) = G_{ret}(t, \vec{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-4\pi c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \cdot \frac{1}{\omega^2 - c^2k^2 + 2i\omega\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-4\pi c^2) \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot (-1) \cdot 2\pi i [Res[\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2k^2 + 2i\omega\varepsilon}, -i\varepsilon + ck] + \quad (15.29)$$

$$+ Res[\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2k^2 + 2i\omega\varepsilon}, -i\varepsilon - ck]]$$

$$\omega_{1,2} \simeq -i\varepsilon \pm ck \quad (15.30)$$

$$\omega^2 - c^2k^2 + 2i\omega\varepsilon \simeq (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \quad (15.31)$$

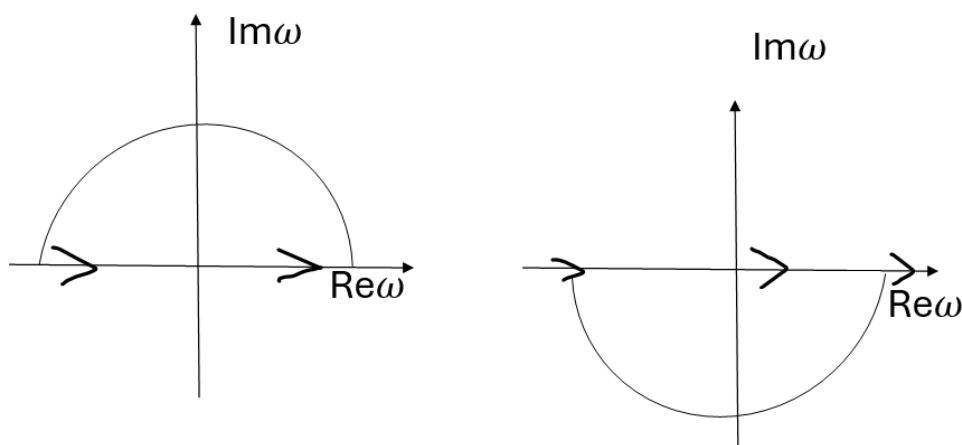


Рис. 15.2. Поясняющий рисунок для $t > 0$

$$G(t, \vec{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (4\pi c^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[\frac{e^{-\varepsilon t} e^{-ickt}}{2ck} + \frac{e^{-\varepsilon t} e^{ickt}}{-2ckt} \right] =$$

$$= 4\pi c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot \frac{1}{k} \left[\frac{e^{ickt} - e^{-ickt}}{2i} \right] = 4\pi c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{k} \sin(ckt) \quad (15.32)$$

Вспомним, что:

$$\int d^3k = \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (15.33)$$

Тогда:

$$G(t, \vec{r}) = 4\pi c \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} \sin\theta d_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{k} e^{ikr\cos\theta} \sin(ckt) \quad (15.34)$$

Учем, что:

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ dx = -\sin\theta \\ x|_{\theta=0} = 1 \\ x|_{\theta=\pi} = -1 \end{cases} \quad (15.35)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} G(t, \vec{r}) &= 4\pi c \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\pi} \sin\theta d \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{k} e^{ikr\cos\theta} \sin(ckt) = \\ &= \frac{c}{\pi} \int_0^{\infty} k dk \int_{-1}^1 dx e^{ikrx} \sin(ckt) = \frac{2c}{\pi} \int_0^{\infty} k dk \sin(ckt) \frac{1}{2ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \\ &= \frac{2c}{\pi r} \int_0^{\infty} dk \sin(ckt) \sin(kr) = \frac{c}{\pi r} \int_0^{\infty} dk [\cos(ckt - kr) - \cos(ckt + kr)] = \frac{1}{2ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \\ &= \frac{c}{2\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [\cos(ckt - kr) - \cos(ckt + kr)] = \frac{c}{2\pi r} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [e^{-i(ckt-kr)} - e^{-i(ckt+kr)}] = \\ &= \frac{1}{2ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \operatorname{Re} \frac{c}{r} [\delta(ct - r) - \delta(ct + r)] \\ G(t, \vec{r}) &= \begin{cases} 0, t < 0 \\ \frac{c}{r} \delta(ct - r), t > 0 \end{cases} = G_{ret}(t, \vec{r}) \end{aligned} \quad (15.37)$$

$$G(t, \vec{r}) \neq 0, ct = r\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (15.38)$$

Функция Грина отлична от нуля на световом конусе.

Получим решение уравнения Максвелла.

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dt' dV' G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \rho(t', \vec{r}') \quad (15.39)$$

Осталось подставить выражение для функции Грина.

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dt' dV' \frac{c}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta[c(t - t') - |\vec{r} - \vec{r}'|] \rho(t', \vec{r}') \rho(t', \vec{r}') \quad (15.40)$$

Сделаем замену: $t' \longrightarrow ct'$.

$$c(t - t') - |\vec{r} - \vec{r}'| = 0 \quad (15.41)$$

$$t - t' = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (15.42)$$

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (15.43)$$

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) \quad (15.44)$$

Получили выражение для скалярного потенциала. То же для векторного:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dt' dV' G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \frac{1}{c} \vec{j}(t', \vec{r}') = \int dV' \frac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (15.45)$$

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (15.46)$$

$$\square \varphi = 4\pi\rho \quad (15.47)$$

Проверим выполнение калибровочного условия Лоренца.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0 \quad (15.48)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int dV' \frac{\rho\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}_r \int dV' \frac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) + \frac{1}{c} \int dV' -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) + \\ &\quad + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (15.49)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r \left(\frac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= -\frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) + \\ &+ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (15.50)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) + \frac{1}{c} \int dV' -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) + \\ &+ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) + \\ &+ \text{div} \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \text{div}' \left(\frac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (15.51)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \quad (15.52)$$

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = \oint_{S_{\infty}^2} d\vec{S}' \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0 \quad (15.53)$$

Запаздывающие потенциалы

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{c|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{cases} \quad (15.54)$$

удовлетворяют калибровке Лоренца и являются решениями уравнений Максвелла.

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (15.55)$$

$$\square \varphi = 4\pi \rho \quad (15.56)$$

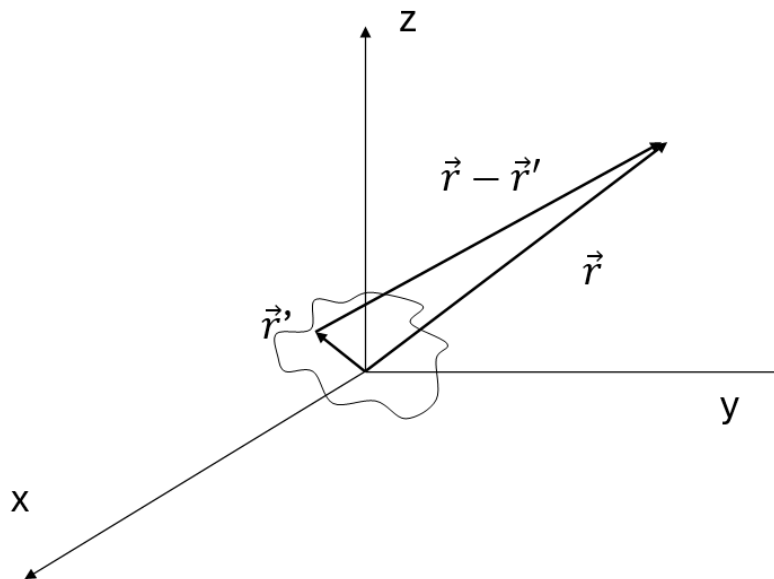


Рис. 15.3. Поясняющий рисунок

Лекция 16. Потенциалы Лиенара-Вихерта.

Мультипольное разложение

Потенциалы Лиенара-Вихерта

Решение в виде запаздывающих потенциалов может быть использовано для нахождения решений для точечного потенциала, который движется по заданной траектории. Такие потенциалы называются потенциалами Лиенара-Вихерта.

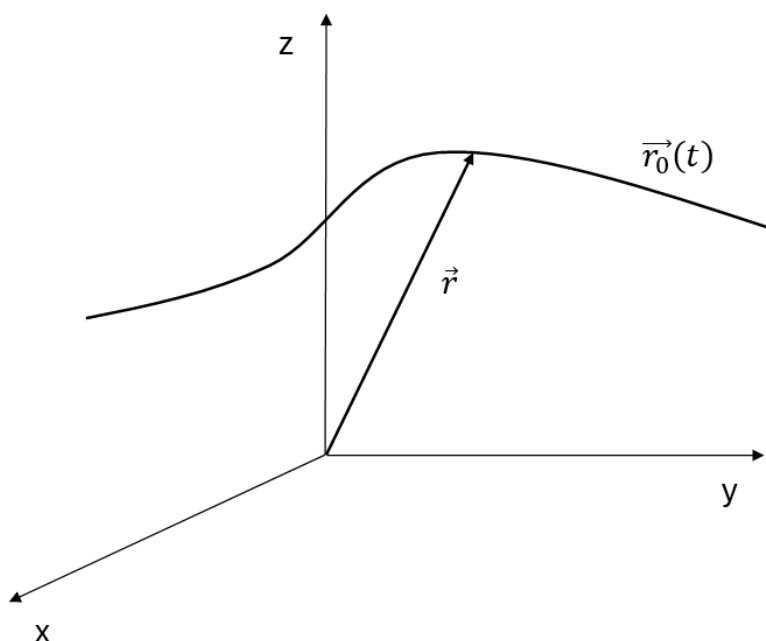


Рис. 16.1. Вид траектории

Пусть потенциал с зарядом q движется по траектории $\vec{r}_0(t)$. Решение в виде запаздывающих потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{cases} \quad (16.1)$$

Выражение для плотности заряда:

$$\rho(t, \vec{r}) = q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad (16.2)$$

В точке, в которой находится заряд, плотность бесконечна.

Плотность тока:

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = q \cdot \dot{\vec{r}}_0 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad (16.3)$$

Удобно вернуться на шаг назад и переписать запаздывающие потенциалы в ином виде:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int dt' dV' \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \frac{\rho(t', \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (16.4)$$

Для векторного потенциала:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int dt' dV' \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \frac{\vec{j}(t', \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (16.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{r}) &= \int dt' dV' \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) q \frac{\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \int dt' \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}) \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \end{aligned} \quad (16.6)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dt' \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}) \frac{q \dot{\vec{r}}_0(t')}{c|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \quad (16.7)$$

Перед вычислением интеграла посмотрим, когда он будет отличен от нуля. Единственная возможность получить нетривиальный вклад – равенство нулю следующего выражения:

$$(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}) = 0 \quad (16.8)$$

Решение у этого уравнения может быть только одно.

Уравнение можно переписать в виде:

$$c(t - t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| \quad (16.9)$$

Видим точку на обратном световом конусе. В этой точке мировая линия заряда пересекает световой конус. В точке пересечения будет выполняться рассматриваемое уравнение, причем такая точка может быть только одна. Скорость заряда должна быть меньше скорости света.

$$(ct, \vec{r}_0(t)) \quad (16.10)$$

При дифференцировании получаем касательный вектор:

$$(c, \dot{\vec{r}}_0(t)) \quad (16.11)$$

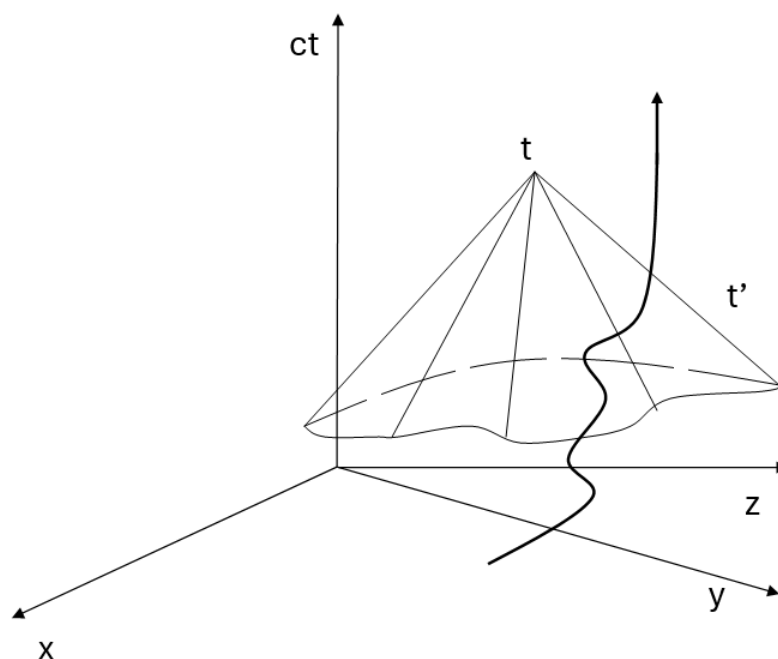


Рис. 16.2. Четырехмерное пространство, обратный световой конус

Проекция мировой линии на горизонтальную плоскость меньше проекции на вертикальную ось. Единственное решение:

$$t' = t_{ret} \quad (16.12)$$

Теперь необходимо снять интегрирование с дельта-функции. Для этого необходимо некоторое математическое равенство. Пусть есть не обычная дельта-функция, а дельта-функция от функции $f(x)$, которая имеет единственный нуль в точке x_0 :

$$\delta[f(x)] \quad (16.13)$$

$$f(x_0) = 0 \quad (16.14)$$

Рассмотрим выражение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot g(x) \cdot \delta[f(x)] = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \cdot g(x) \cdot \delta[f(x)] = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \cdot g(x_0) \delta[f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)] \quad (16.15)$$

Сделаем замену:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (16.16)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \cdot g(x_0) \delta[f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)] &= \int_{-\varepsilon f'(x_0)}^{\varepsilon f'(x_0)} dy \frac{1}{f'(x_0)} g(x_0) \delta(y) = \\ &= \frac{g(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \text{sgn}[f'(x_0)] = \frac{g(x_0)}{|f'(x_0)|} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x)|} \end{aligned} \quad (16.17)$$

При условии единственного решения можно записать:

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x)|} \delta(x-x_0) \quad (16.18)$$

Тогда:

$$x \longrightarrow t' \quad (16.19)$$

$$x_0 \longrightarrow t_{ret} \quad (16.20)$$

$$\delta(x-x_0) \longrightarrow \delta(t'-t_{ret}) \quad (16.21)$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t'} [t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}]|_{t'=t_{ret}} &= 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2}|_{t'=t_{ret}} = \\ &= 1 + \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \cdot (-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \end{aligned} \quad (16.22)$$

Введем обозначения:

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret}) \quad (16.23)$$

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}_0(t_{ret}) \quad (16.24)$$

$$R = |\vec{R}| \quad (16.25)$$

С учетом нововведений:

$$f'(x_0) \longrightarrow 1 - \frac{\vec{R}\vec{v}}{RC} \quad (16.26)$$

Выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{R} \frac{1}{|1 - \frac{\vec{R}\vec{v}}{RC}|} = \frac{q}{R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}} \quad (16.27)$$

Для скалярного потенциала:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{q\vec{v}}{c(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c})} \quad (16.28)$$

Получили потенциалы Лиенара-Вихерта с $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})$:

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}} \\ \vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{q\vec{v}}{c(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c})} \end{cases} \quad (16.29)$$

Причем t_{ret} – единственный корень уравнения

$$t - t_{ret} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})|}{c} = 0 \quad (16.30)$$

Электрическое и магнитное поля:

$$\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \\ \vec{H}(t, \vec{r}) = \text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}] \end{cases} \quad (16.31)$$

Вообще говоря нужно учитывать зависимость:

$$t_{ret} = t_{ret}(t, \vec{r}) \quad (16.32)$$

Вычислим производные, необходимые для вычисления полей. Продифференцируем формулу

$$t - t_{ret} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})|}{c} = 0 \quad (16.33)$$

по времени.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left[t - t_{ret} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})|}{c} \right] = 1 - \frac{\partial t_{ret}}{\partial t} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{R}\vec{v}}{R} \frac{\partial t_{ret}}{\partial t} \quad (16.34)$$

$$\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R}\vec{v}}{RC}} \quad (16.35)$$

Вместо дифференцирования по времени применим оператор $\vec{\nabla}$:

$$0 = \vec{\nabla} \left[t - t_{ret} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})|}{c} \right] = -\vec{\nabla} t_{ret} - \frac{\vec{R}}{RC} + \frac{(\vec{R}\vec{v})}{RC} \vec{\nabla} t_{ret} \quad (16.36)$$

Применили, что

$$\vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}_0| = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (16.37)$$

Тогда:

$$\vec{\nabla} t_{ret} = -\frac{\vec{R}}{RC} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{R}\vec{v}}{RC})} = \frac{-\vec{R}}{c(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c})} \quad (16.38)$$

Теперь можно вычислить поля. Выражение для электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t_{ret}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi|_{t_{ret}=\text{const}} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} t_{ret} = \\ &= \frac{q}{(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c})^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{q}{c^2 (R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c})^3} [\vec{R} \times [(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R) \times \vec{a}]] \end{aligned} \quad (16.39)$$

Аналогично для магнитного поля:

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = [\vec{\nabla} \times \vec{A}]|_{t_{ret}=\text{const}} + [\vec{\nabla} t_{ret} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}] = \frac{1}{R} [\vec{R} \times \vec{E}] \quad (16.40)$$

Излучение

Мультипольное разложение и условие его применимости

Уже было получено решение уравнения Максвелла в виде запаздывающих потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{c|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{cases} \quad (16.41)$$

Для точечного заряда, движущегося по заданной траектории, интегралы могут быть вычислены, однако в общем случае это невозможно. Суть мультипольного разложения – заряды и токи сосредоточены в области L , а потенциалы и поля изучаются в точке, находящейся далеко от рассматриваемой области.

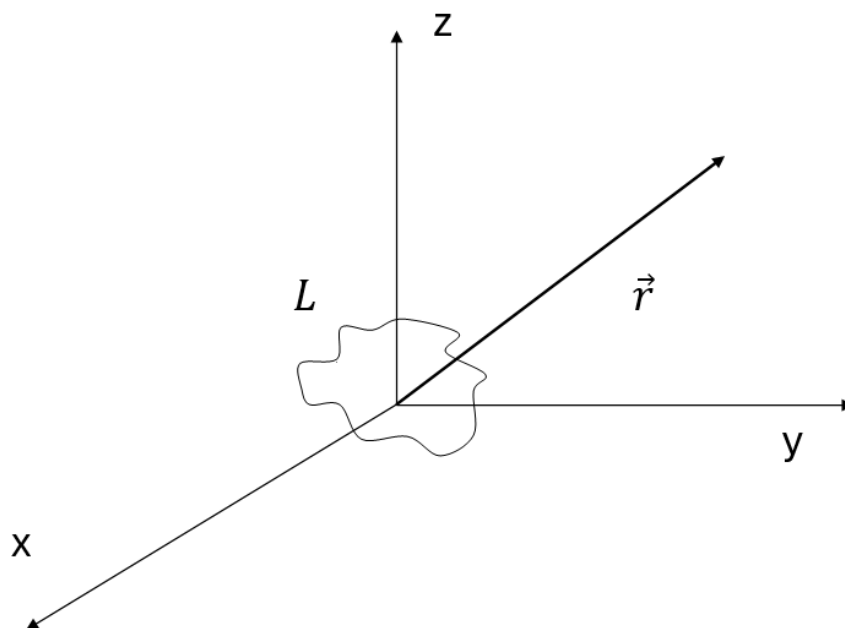


Рис. 16.3. Рассматриваемая область

В этом случае имеем малый параметр:

$$\frac{L}{r} \ll 1 \quad (16.42)$$

Величина $\vec{r}' \sim L \ll r$, поэтому можно сделать приближенный расчет:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{\rho^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2} = r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \simeq r\left(1 - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}\right) = r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \quad (16.43)$$

В низшем порядке:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \quad (16.44)$$

Обратная величина:

Нужно понимать, что есть еще некоторые параметры, по которым происходит разложение. Произведем характерные оценки.

$$\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \sim \frac{L}{c} \quad (16.46)$$

Пусть заряды совершают периодическое движение с частотой ω .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \omega \rho \quad (16.47)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \sim \omega \rho \cdot \frac{L}{c} \ll \rho \quad (16.48)$$

$$\frac{\omega L}{c} \ll 1 \quad (16.49)$$

Порядок ω :

$$\omega \sim \frac{v}{L} \quad (16.50)$$

Тогда:

$$\frac{v}{L} \cdot \frac{L}{c} \ll 1 \quad (16.51)$$

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad (16.52)$$

Тогда каждое следующее слагаемое будет меньше предыдущего, разложение корректно. То есть необходимо выполнение двух условий:

$$\begin{cases} \frac{L}{r} \ll 1 \\ \frac{v}{c} \ll 1 \end{cases} \quad (16.53)$$

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda} \quad (16.54)$$

Тогда размер системы будет много меньше длины волны излучения:

$$\frac{L}{\lambda} \ll 1 \quad (16.55)$$

Запишем соотношения для векторного потенциала в рассматриваемом случае. Для этого рассмотрим точную формулу, которая дается запаздывающим потенциалом:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}')}{c|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16.56)$$

Ограничимся низшим порядком.

$$\vec{A}(t, \vec{r}) \simeq \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}')}{cr} + \dots \quad (16.57)$$

Токи и плотность заряда явно зависят от времени, поэтому это выражение будет отлично от нуля. В отличие от магнитостатики:

$$\begin{aligned} \int dV' j_i(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') &= \int dV' \delta_{ik} j_k(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') = \int dV' \frac{\partial x'_i}{\partial x'_k} j_k(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') = \\ &= \int dV' \frac{\partial}{\partial x'_k} [x'_i j_k(t - \frac{r}{c}, \vec{r}')] - x'_i \frac{\partial}{\partial x'_k} j_k(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') = \oint_{S_\infty^2} dS'_k x'_i j_k(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') - \\ &- \int dV' x'_i \operatorname{div} \vec{j}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') = \frac{\partial}{\partial t} \int dV' x'_i \rho(t - \frac{r}{c}, \vec{r}') = \dot{p}_i(t - \frac{r}{c}) \end{aligned} \quad (16.58)$$

В общем случае:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (16.59)$$

Тогда:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) \simeq \int dV' \frac{\vec{j}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}')}{cr} + \dots = \frac{1}{cr} \vec{p}(t - \frac{r}{c}) + \dots \quad (16.60)$$

Потенциалы в рассматриваемой ситуации (низшее приближение) приобретают вид:

$$\begin{cases} \varphi(t, \vec{r}) \simeq \frac{q}{r} + \frac{\vec{r}\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r^3} + \frac{\vec{r}}{cr^2} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) + \dots \\ \vec{A}(t, \vec{r}) \simeq \frac{1}{cr} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) + \dots \end{cases} \quad (16.61)$$

Можно получить выражения для полей с помощью потенциалов.

Для электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = -\vec{\nabla} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{r}\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r^3} + \frac{\vec{r}}{cr^2} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) + \dots \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{cr} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) + \dots \right) = \\ &= \frac{q\vec{r}}{r^3} - \dot{\vec{p}} \frac{1}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{p}})}{r^5} - \frac{\vec{r}\ddot{\vec{p}}}{r^3} \left(-\frac{1}{c}\right) \cdot \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \frac{2\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}})}{cr^4} - \frac{(\vec{r}\ddot{\vec{p}})}{cr^2} \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{p}} + \dots = \\ &= \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{p}}) - \vec{p}r^2}{r^5} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}r^2}{cr^4} + \frac{1}{c^2 r^3} [\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}r^2] + \dots \end{aligned} \quad (16.62)$$

$$\frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}r^2}{r^5} - \text{«квазистатика»}, \frac{3\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}r^2}{cr^4} - \text{«индукционный вклад»}, \frac{1}{c^2r^3}[\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}r^2] - \text{«излучение»}.$$

Для магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{H} = \text{rot}\vec{A} &\simeq [\vec{\nabla} \times \frac{1}{cr} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] + \dots = \frac{1}{c}[\vec{\nabla} \frac{1}{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] + [\vec{\nabla}(-\frac{r}{c}) \times \frac{1}{cr} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] = \\ &= -\frac{1}{cr^2}[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] - \frac{1}{c^2r^2}[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] \quad (16.63) \\ -\frac{1}{cr^2}[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] &- \text{«индукционный вклад»}, \frac{1}{c^2r^2}[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] - \text{«излучение»}. \end{aligned}$$

Лекция 17. Электрическое дипольное излучение

Применим полученные результаты к излучению.

Электрическое дипольное излучение

Рассматриваем мультипольное разложение. Пусть система сосредоточена в области с размером L , поле далеко от этой системы.

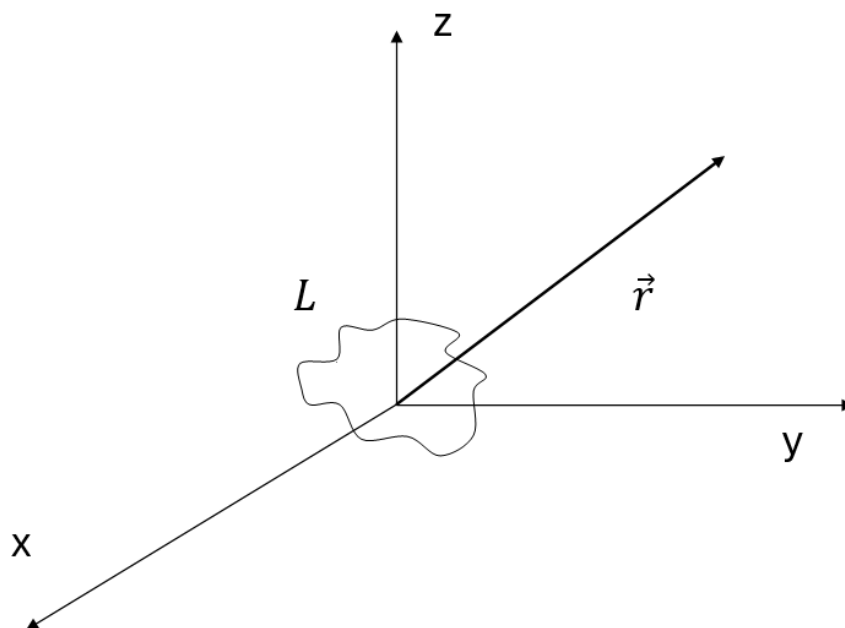


Рис. 17.1. Вид системы

$$\frac{L}{r} \ll 1 \quad (17.1)$$

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad (17.2)$$

Характерная скорость движения зарядов:

$$v \sim \omega \cdot L \quad (17.3)$$

$$\frac{\omega \cdot L}{c} \ll 1 \quad (17.4)$$

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (17.5)$$

В связи с этим возникает равенство:

$$\frac{L}{\lambda} \ll 1 \quad (17.6)$$

Рассмотрим варианты соотношения r и λ .

1. $r \ll \lambda$ – ближнее поле, квазистатическая зона;
2. $r \sim \lambda$ – среднее поле, индукционная зона;
3. $r \gg \lambda$ – дальняя (волновая) зона.

Посмотрим, какие слагаемые будут считаться существенными в определенных зонах.

Электрическое поле:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} + \frac{3\vec{r}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}r^2}{cr^4} + \frac{(\vec{r}\ddot{\vec{p}})\vec{r} - \ddot{\vec{p}}r^2}{c^2r^3} + \dots \quad (17.7)$$

Магнитное поле:

$$\vec{H} = \frac{[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}]}{cr^3} - \frac{1}{c^2r^2}[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}] + \dots \quad (17.8)$$

Причем \vec{p} берется в точке $\vec{p} = \vec{p}(t - \frac{r}{c})$.

Рассмотрим слагаемые, которые содержат дипольный момент.

$$\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} \sim \frac{p}{r^3} \quad (17.9)$$

$$\frac{3\vec{r}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}r^2}{cr^4} \sim \frac{\omega p}{cr^2} \sim \frac{p}{r^3} \frac{r}{\lambda} \quad (17.10)$$

$$\frac{(\vec{r}\ddot{\vec{p}})\vec{r} - \ddot{\vec{p}}r^2}{c^2r^3} \sim \frac{\omega^2 p}{c^2r} \sim \frac{p}{r^3} \frac{r^2}{\lambda^2} \quad (17.11)$$

Перейдем к магнитному полю.

$$\frac{[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}]}{cr^3} \sim \frac{\omega p}{cr^2} \sim \frac{p}{r^3} \frac{r}{\lambda} \quad (17.12)$$

$$\frac{1}{c^2r^2}[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}] \sim \frac{\omega^2 p}{c^2r} \sim \frac{p}{r^3} \frac{r^2}{\lambda^2} \quad (17.13)$$

Если

$$\frac{r}{\lambda} \ll 1, \quad (17.14)$$

то

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} \quad (17.15)$$

$$\vec{H} \simeq 0 \quad (17.16)$$

Если

$$\frac{r}{\lambda} \simeq 1 \quad (17.17)$$

то все слагаемые будут иметь один порядок.

Если

$$\frac{r}{\lambda} \gg 1, \quad (17.18)$$

то

$$\vec{E} \simeq \frac{(\vec{r}\ddot{\vec{p}})\vec{r} - \ddot{\vec{p}}r^2}{c^2r^3} \quad (17.19)$$

$$\vec{H} \simeq -\frac{1}{c^2r^2}[\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}] \quad (17.20)$$

Пусть электрический диполь совершает колебания вдоль оси z . Диполь – достаточно близкие друг к другу отрицательный и положительный заряды. Дипольный момент меняется по гармоническому закону. В ближней зоне будет практически статика. В средней зоне картина немного изменится. В дальнем поле можно увидеть аналогию с электромагнитной волной.

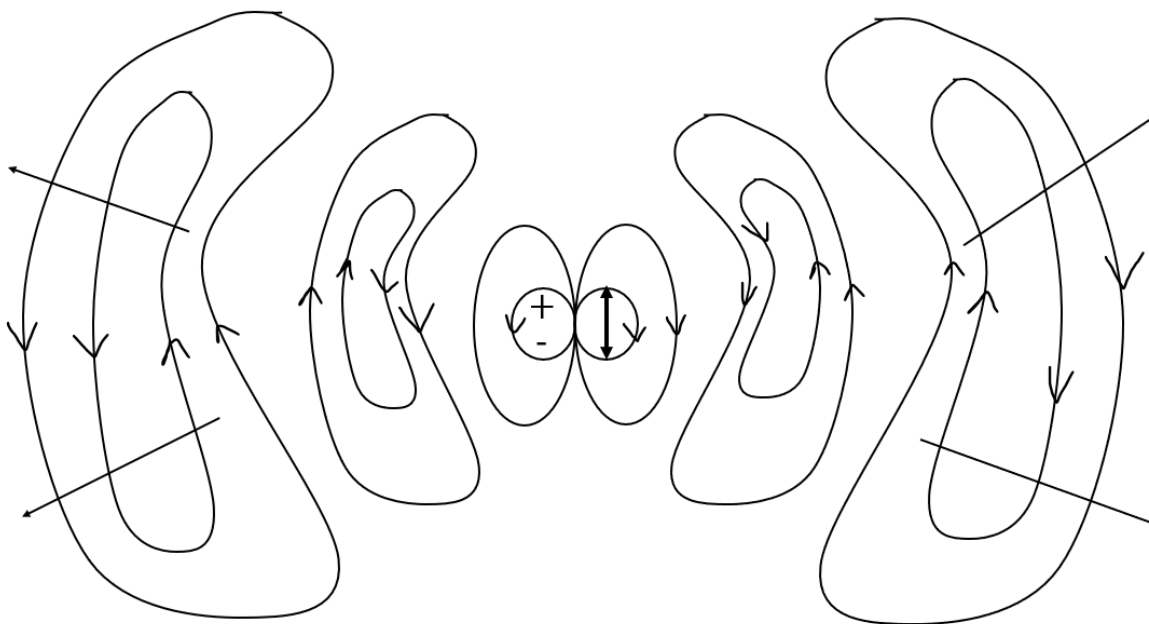


Рис. 17.2. Линии электрического поля

Вектор Умова – Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}] \quad (17.21)$$

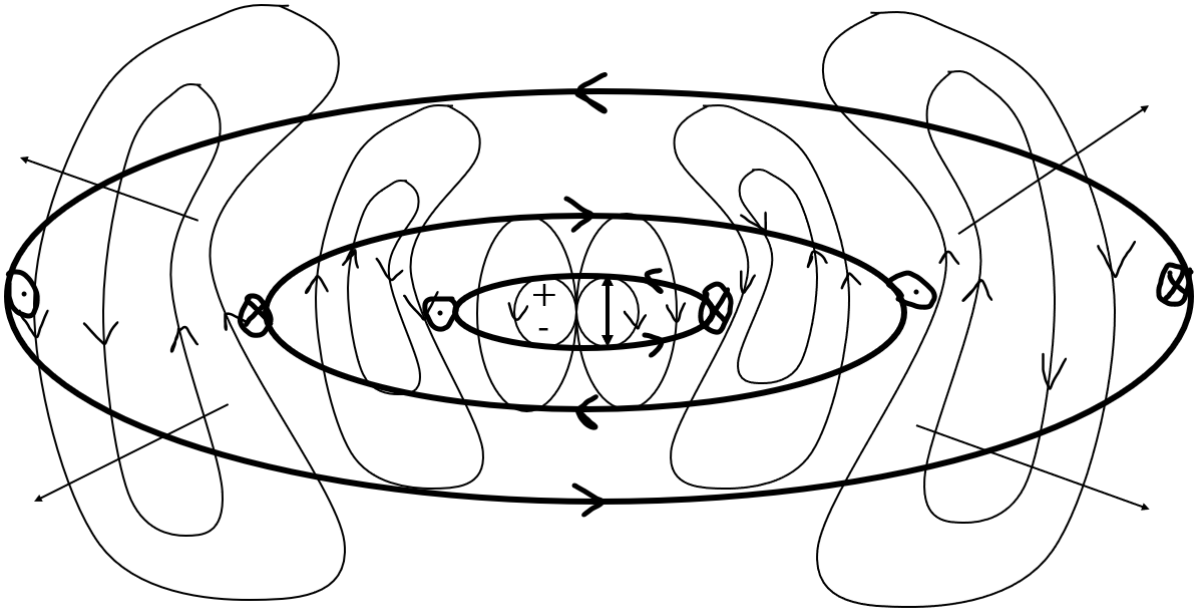


Рис. 17.3. Линии магнитного поля

Вблизи – поле диполя, вдали – электромагнитная волна.

Дальняя зона дает излучение, поскольку электромагнитные волны уносят энергию системы. Величину излучаемой энергии определяет вектор Умова — Пойнтинга (плотность потока энергии). Направление вектора показывает, в каком направлении переносится энергия. Если окружим систему бесконечно большой сферой, то, что волны уносят энергию означает, что поток вектора Умова — Пойнтинга через бесконечную сферу S_∞^2 должен оказаться ненулевым.

Величина

$$\int_{S_\infty^2} r^2 d\Omega (\vec{n} \vec{S}) \quad (17.22)$$

конечна, если

$$(\vec{n} \vec{S}) \sim \frac{1}{r^2} \quad (17.23)$$

Это выполняется в случае, когда электрические и магнитные поля имеют порядок $\frac{1}{r}$ на бесконечности. Большие слагаемые в дальней зоне ведут себя как $\frac{1}{r}$, поэтому вектор Умова — Пойнтинга убывает как $\frac{1}{r^2}$, поток при больших радиусах сферы имеет конечный предел, значит электромагнитные волны уносят определенную энергию.

$$\vec{E} \simeq \frac{(\vec{r} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}))\vec{r} - \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})r^2}{c^2 r^3} \quad (17.24)$$

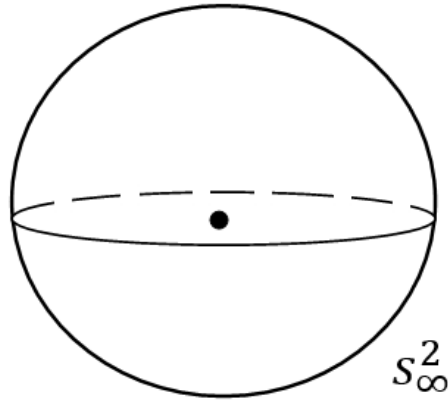


Рис. 17.4. Сфера

$$\vec{H} \simeq -\frac{1}{c^2 r^2} [\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] \quad (17.25)$$

Выражения содержат электрический дипольный момент. Введем вектор, указывающий направление распространения волны:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \quad (17.26)$$

$$\vec{E} \simeq \frac{(\vec{r} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}))\vec{r} - \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})r^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{c^2 t} [\vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}} - \ddot{\vec{p}})] \quad (17.27)$$

$$\vec{H} \simeq -\frac{1}{c^2 r^2} [\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] = -\frac{1}{c^2 r} [\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] \quad (17.28)$$

$$\ddot{\vec{p}}_{||} = \vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}}) \quad (17.29)$$

$$\ddot{\vec{p}}_{\perp} = \ddot{\vec{p}} - \ddot{\vec{p}}_{||} = \ddot{\vec{p}} - \vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}}) \quad (17.30)$$

Тогда:

$$\vec{E} \simeq \frac{(\vec{r} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}))\vec{r} - \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})r^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{c^2 t} [\vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}} - \ddot{\vec{p}})] = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{p}}_{\perp} \quad (17.31)$$

$$\vec{H} \simeq -\frac{1}{c^2 r^2} [\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] = -\frac{1}{c^2 r} [\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] = [\vec{n} \times \vec{E}] \quad (17.32)$$

Напишем, чему равен вектор Умова — Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \vec{n} E^2 - (\vec{n} \vec{E}) \vec{E} \quad (17.33)$$

Скалярное произведение:

$$(\vec{n} \vec{E}) = \frac{1}{c^2 r} [(\vec{n} \ddot{\vec{p}}) - (\vec{n} \ddot{\vec{p}})] = 0 \quad (17.34)$$

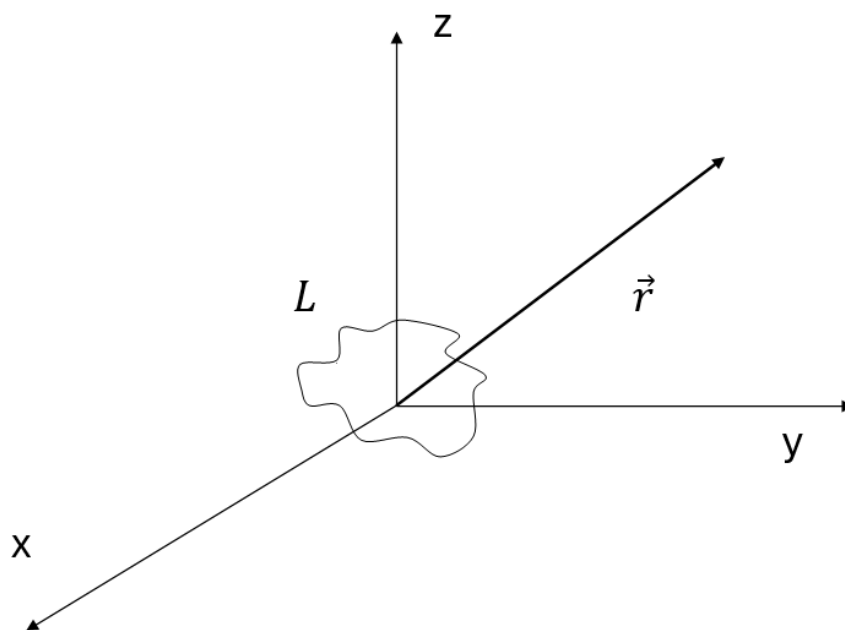


Рис. 17.5. Вид системы

Аналогично:

$$(\vec{n}\vec{H}) = 0 \quad (17.35)$$

Плотность потока энергии:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \vec{n}E^2 - (\vec{n}\vec{E})\vec{E} = \frac{c}{4\pi} \vec{n}E^2 \quad (17.36)$$

Рассмотрим интенсивность (энергия, которая уносится за единицу времени через площадку с величиной телесного угла $d\Omega$):

$$dI = \vec{S}\vec{n}r^2 d\Omega = \frac{c}{4} E^2 r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^4 r^2} (\ddot{\vec{p}}_{\perp})^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\vec{p}}_{\perp})^2 \cdot \sin^2 \theta d\Omega \quad (17.37)$$

Причем θ – это угол между $\ddot{\vec{p}}$ и \vec{r} .

С помощью интегрирования можно получить полную энергию интенсивности излучения (по сути мощность).

$$I = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right) \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \sin^2 \theta = \frac{1}{2c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \quad (17.38)$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ dx = -\sin \theta d\theta \end{cases} \quad (17.39)$$

$$I = \frac{1}{2c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \int_{-1}^1 dx(1-x^2) = \frac{1}{2c^2} \ddot{\vec{p}}^2 \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (17.40)$$

Если \vec{p} меняется по гармоническому закону, то

$$\vec{p} = \text{Re}(\vec{p}_0 e^{-i\omega t}) \quad (17.41)$$

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} = \frac{\omega^2}{c^2 r} \text{Re}[\vec{p}_{0\perp} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}] \quad (17.42)$$

$$\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}] = \frac{\omega^2}{c^2 r} \text{Re}[[\vec{n} \times \vec{p}_{0\perp}] e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}] \quad (17.43)$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{p}}_{\perp}^2 d\Omega = \frac{\omega^4}{4\pi c^3} d\Omega [\text{Re}(\vec{p}_0 e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})})] \quad (17.44)$$

Нужно провести усреднение:

$$\langle dI \rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} \vec{p}_{0\perp} \vec{p}_{0\perp}^* d\Omega = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{p}_{0\perp}|^2 d\Omega \quad (17.45)$$

Таким образом, вычислили интенсивность излучения и соответствующие поля для дипольного излучения.

Теперь рассмотрим некоторые примеры.

1. Самая простая ситуация – есть электрический диполь, который колеблется по гармоническому закону вдоль оси z .

$$\vec{p} = p_0 \vec{e}_z \cos(\omega t) = \text{Re}[p_0 \vec{e}_z e^{-i\omega t}] \quad (17.46)$$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} \\ \vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}] \end{cases} \quad (17.47)$$

$$\vec{p}_{0\perp} = \vec{p}_0 - \vec{n}(\vec{n} \vec{p}_0), \quad (17.48)$$

причем

$$\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z \quad (17.49)$$

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_\rho \sin\theta \quad (17.50)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{0\perp} &= p_0 \vec{e}_z - (\vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_\rho \sin\theta) p_0 \cos\theta = \\ &= p_0 \vec{e}_z (1 - \cos^2\theta) - p_0 \vec{e}_\rho \sin\theta \cos\theta = p_0 \sin\theta (\vec{e}_z \sin\theta - \vec{e}_\rho \cos\theta) = -p_0 \sin\theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (17.51)$$

Таким образом:

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} = \frac{\omega^2}{c^2 r} p_0 (-\sin\theta) \vec{e}_\theta \cos(\omega(t - \frac{r}{c})) \quad (17.52)$$

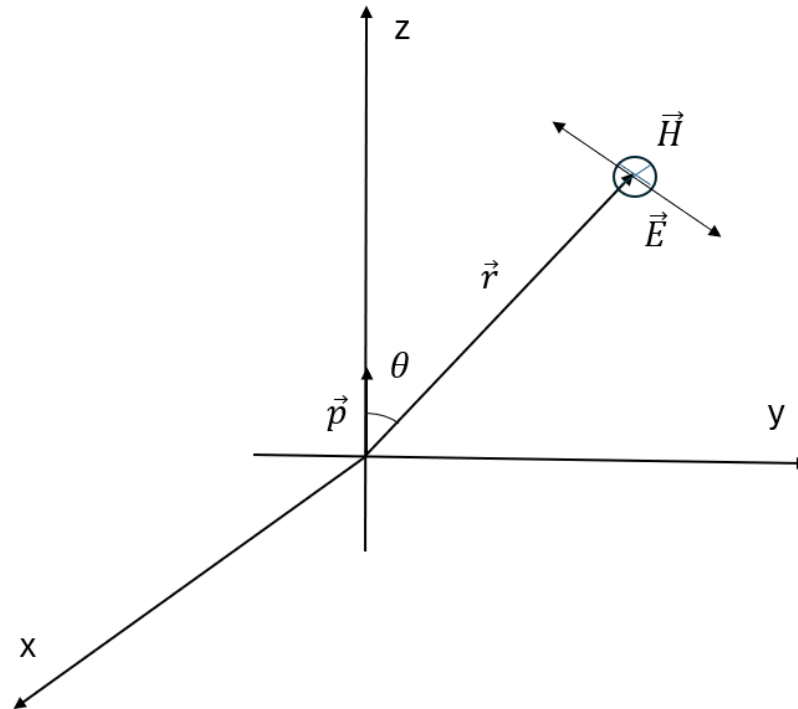


Рис. 17.6. К примеру 1

$$\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}] = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} (-\sin\theta) \vec{e}_\varphi \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (17.53)$$

потому что:

$$[\vec{n} \times \vec{e}_\theta] = [\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta] = \vec{e}_\varphi \quad (17.54)$$

Получили линейную поляризацию. В сфере Пуанкаре:

$$\theta_{\Pi} = \frac{\pi}{2} \quad (17.55)$$

$$\varphi_{\Pi} = \pi \quad (17.56)$$

Необходимо вычислить интенсивность излучения. Для начала запишем вектор Умова — Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{n} E^2 = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} p_0^2 \sin^2\theta \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad (17.57)$$

Средняя интенсивность:

$$\langle dI \rangle = \langle (\vec{S} \vec{n}) r^2 d\Omega \rangle = \frac{1}{4\pi c^3} \omega^4 p_0^2 \sin^2\theta \frac{1}{2} d\Omega = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta d\Omega}{8^3} \quad (17.58)$$

$$\langle I \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3} \int d\Omega \sin^2\theta = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3} \cdot 2\pi \frac{4}{3} = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \quad (17.59)$$

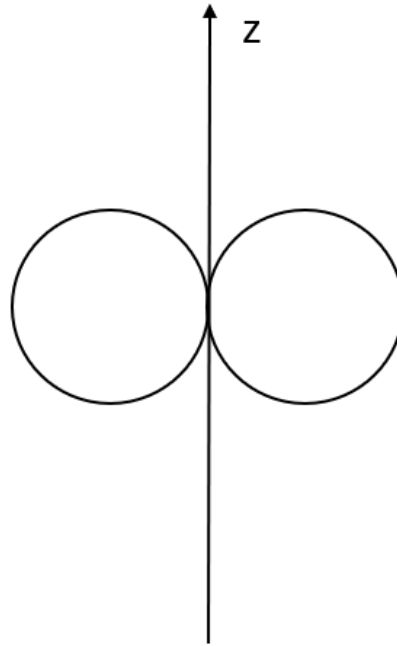


Рис. 17.7. Диаграмма направленности

2. Перейдем ко второму примеру. Теперь происходят не линейные колебания диполя, а происходит кручение в плоскости (xy). Задача – найти электрическое и магнитное поля, определить поляризацию и найти интенсивность и диаграмму направленности.

Зависимость компонент от времени:

$$p_x(t) = p_0 \cos(\omega t) \quad (17.60)$$

$$p_y(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad (17.61)$$

$$\vec{p}(t) = \text{Re} \partial_0 \vec{e}_x e^{-i\omega t} + i p_0 \vec{e}_y e^{-i\omega t} = \text{Re} p_0 (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) e^{-i\omega t} = \text{Re} \vec{p}_0 e^{-i\omega t}, \quad (17.62)$$

где комплексный вектор записывается в виде:

$$\vec{p}_0 \equiv p_0 (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \quad (17.63)$$

Вспомним, что электрическое поле содержит величину $\vec{p}_{0\perp}$:

$$\vec{p}_{0\perp} = \vec{p}_0 - \vec{n}(\vec{n}\vec{p}_0) \quad (17.64)$$

Удобно использовать элементы локального базиса в цилиндрических и сферических координатах.

$$\vec{n} = (\vec{e}_\rho \cos\varphi - \vec{e}_\varphi \sin\varphi) \quad (17.65)$$

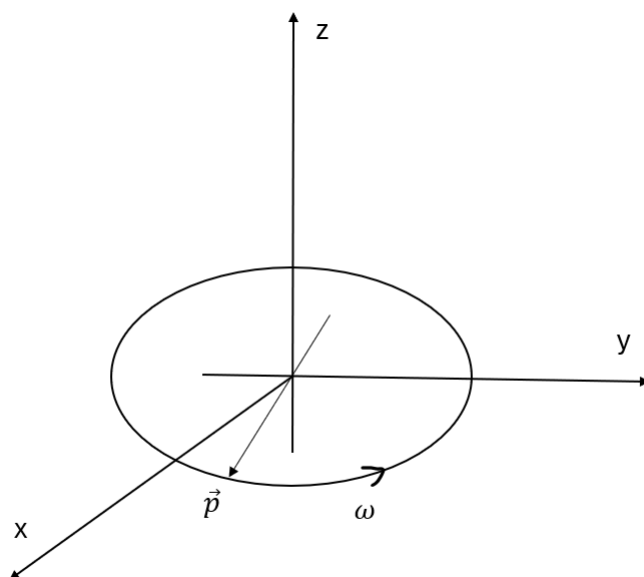


Рис. 17.8. К примеру 2

$$\vec{e}_x + i\vec{e}_y = (\vec{e}_\rho + i\vec{e}_\varphi)e^{i\varphi} \quad (17.66)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{0\perp} &= p_0(\vec{e}_\rho + i\vec{e}_\varphi)e^{i\varphi} - (\vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_\rho \sin\theta)p_0 \cdot \sin\theta e^{i\varphi} = \\ &= p_0 e^{i\varphi} - \vec{e}_z \cos\theta \sin\theta + \vec{e}_\rho \cos^2\theta + i\vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (17.67)$$

Запишем выражение для электрического поля:

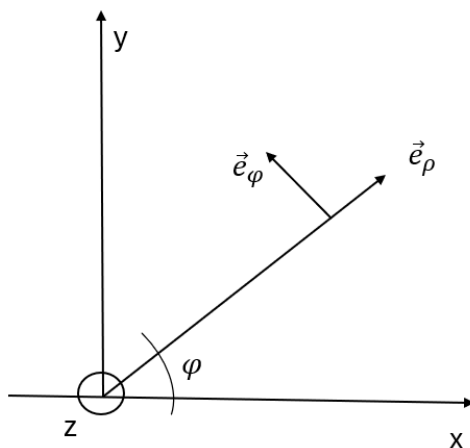


Рис. 17.9. Система координат

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2 t} \text{Re}(\vec{p}_{0\perp} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}) = \frac{\omega^2}{c^2 r} \text{Re} p_0 (\vec{e}_\theta \cos\theta + i\vec{e}_\varphi) e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})+i\varphi} \quad (17.68)$$

Магнитное поле:

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = [\vec{n} \times \vec{E}(t, \vec{r})] \quad (17.69)$$

$$[\vec{n} \times \vec{p}_{0\perp}] = p_0 e^{i\varphi} [\vec{e}_r \times (\vec{e}_\theta \cos\theta + i\vec{e}_\varphi)] = p_0 e^{i\varphi} (\vec{e}_\varphi \cos\theta - i\vec{e}_\theta) \quad (17.70)$$

Тогда:

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = [\vec{n} \times E(t, \vec{r})] = \frac{\omega^2}{c^2 t} \text{Re} p_0 (\vec{e}_\varphi \cos\theta - i\vec{e}_\theta) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c}) + i\varphi} \quad (17.71)$$

Электрические и магнитные поля посчитаны. Теперь очевидно, что поляризация эллиптическая:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2 t} \vec{e}_\theta \cos\theta \cos[\omega(t - \frac{r}{c}) - \varphi] + \vec{e}_\varphi \sin[\omega(t - \frac{r}{c}) - \varphi] \quad (17.72)$$

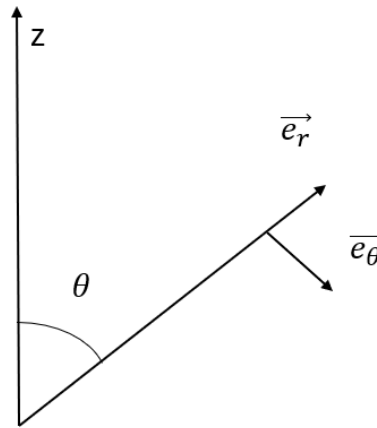


Рис. 17.10. Система координат

Соотношение полуосей эллипса:

$$\frac{b}{a} = \cos\theta \quad (17.73)$$

Если $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то вращение вектора \vec{e} будет против часовой стрелки. Параметры эллипса зависят от угла θ .

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta\Pi}{2}\right) = \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \text{tg}\left(\frac{\theta\Pi}{2}\right)\right)}{1 + \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{tg}\left(\frac{\theta\Pi}{2}\right)} = \frac{1 - \text{tg}\left(\frac{\theta\Pi}{2}\right)}{1 + \text{tg}\left(\frac{\theta\Pi}{2}\right)} \quad (17.74)$$

$$\cos\theta = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \text{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{\theta}{2}} \quad (17.75)$$

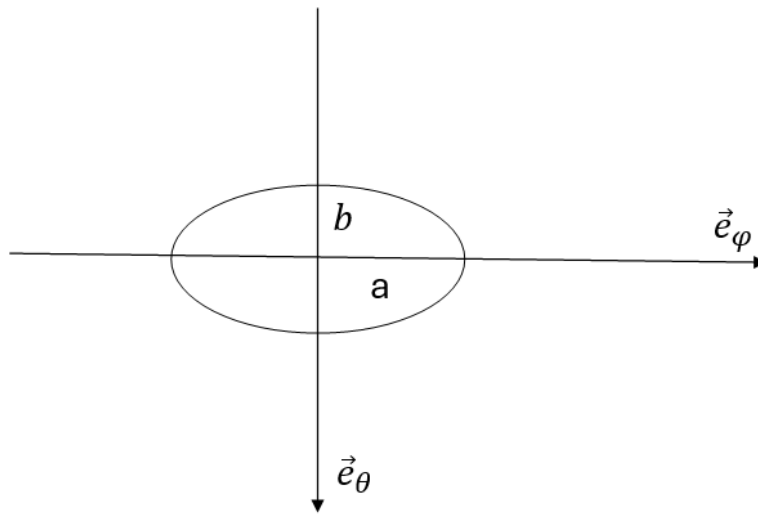


Рис. 17.11. Эллиптическая поляризация

Отсюда видно, что можно связать угол наблюдения с углом на сфере Пуанкаре (определяет поляризацию):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_{\Pi}}{2}\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \quad (17.76)$$

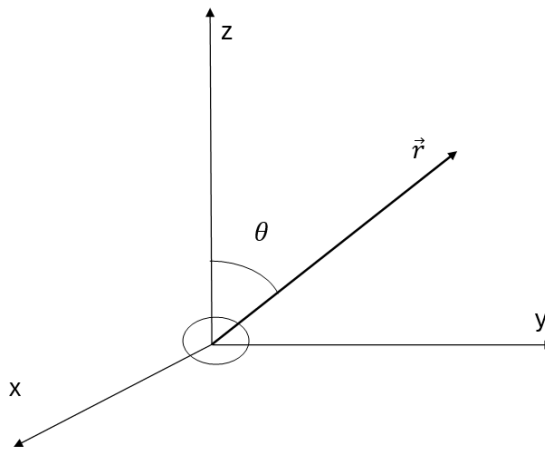


Рис. 17.12. Вид системы

Угол, определяющий наклон:

$$\varphi_{\Pi} = 0 \quad (17.77)$$

Вычислим интенсивность излучения. Для интенсивности возьмем одну из общих

формул:

$$\langle dI \rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{p}_{0\perp}|^2 d\Omega \quad (17.78)$$

В рассматриваемом случае:

$$\vec{p}_{0\perp} = p_0 e^{i\varphi} [\vec{e}_\theta \cos\theta + i\vec{e}_\varphi] \quad (17.79)$$

$$|\vec{p}_{0\perp}|^2 = \vec{p}_{0\perp} \vec{p}_{0\perp}^* = p_0^2 [\cos^2\theta + 1] \quad (17.80)$$

Подставим в общую формулу:

$$\langle dI \rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2\theta) d\Omega \quad (17.81)$$

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 + \cos^2\theta) = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3} 2\pi \int_{-1}^1 dx (1 + x^2) = \\ &= \frac{\omega^4 p_0^2}{4c^3} \left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \end{aligned} \quad (17.82)$$

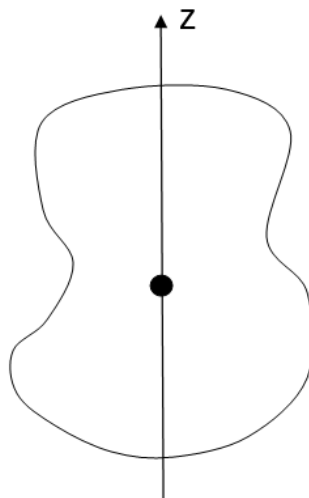


Рис. 17.13. Диаграмма направленности

Лекция 18. Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение

Исходной точкой является выражение для запаздывающих потенциалов (скалярных):

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\rho\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (18.1)$$

Аналогичное выражение можно записать для векторного потенциала. Для начала будем говорить о выше написанном уравнении. Прежде всего интересуют излучение электромагнитных волн, а стало быть интересуют такие слагаемые, которые будут существенными в дальней зоне: $r \gg \lambda$, $r \gg L$.

Интересуемся теми решениями, которые могут уносить энергию. Эти решения соответствуют тому, что электрические и магнитные поля на больших расстояниях убывают как $\frac{1}{r}$. Потенциалы в этом приближении убывают аналогично. Это означает, что при разложении выражения для потенциалов будем действовать не так как на прошлой лекции, когда сохраняли слагаемые и получали слагаемые которые существенны в ближней и средней зоне. Сейчас будем получать слагаемые, которые существенны в волновой зоне. Это означает, что будем сохранять слагаемые, которые пропорциональны $\frac{1}{r}$.

Поэтому:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} + \dots \quad (18.2)$$

Раскладывая выражение 19.24 получаем:

$$\int dV' \left(\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) \rho\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} + O\left(\frac{1}{r}\right), \vec{r}'\right) \quad (18.3)$$

Теперь нас интересует волновая зона. В волновой зоне существенно то, что $\sim \frac{1}{r}$. Таким образом, выражение принимает вид:

$$\int dV' \left(\frac{1}{r} \right) \rho\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}, \vec{r}'\right) \quad (18.4)$$

Примерно равно:

$$\int dV' \frac{1}{r} \left[\rho\left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}'\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}'\right) \cdot \frac{\vec{r}\vec{r}''}{cr} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}'\right) \left(\frac{\vec{r}\vec{r}''}{cr}\right)^2 + \dots \right] \quad (18.5)$$

Что в свою очередь равняется:

$$\frac{q}{r} + \frac{\vec{r}}{cr^2} \int dV' \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) \vec{r}' + \frac{x_i x_j}{2c^2 r^3} \int dV' \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i x'_j + \dots \quad (18.6)$$

$$\vec{p}(t) = \int dV' \rho(t, \vec{r}') \vec{r}' \quad (18.7)$$

Следовательно, выражение для запаздывающих потенциалов примет вид:

$$\varphi(t, \vec{r}) \simeq \frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} \quad (18.8)$$

Построим величину $\tilde{Q}_{ij}(t)$

$$\tilde{Q}_{ij}(t) = 3 \int dV' \rho(t, \vec{r}') x'_i x'_j \quad (18.9)$$

Данная запись напоминает квадрупольный момент, который вводился ранее.

$$Q_{ij}(t) = 3 \int dV' \rho(t, \vec{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \quad (18.10)$$

Вводим величину похожую, она отличается отсутствием δ символа.

Следовательно, слагаемое дает:

$$\varphi(t, \vec{r}) \simeq \frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{x_i x_j}{c^2 r^3} \tilde{Q}_{ij} \left(r - \frac{r}{c} + \dots \right) \quad (18.11)$$

Таким образом, получили выражение для скалярного потенциала электромагнитного поля, в который включены слагаемые убывающие как $\frac{1}{r}$.

Аналогично разложим векторный потенциал электромагнитного поля:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j} \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}' \right)}{c |\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \int dV' \frac{\vec{j} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \vec{r}'}{cr} + O\left(\frac{1}{r}\right), \vec{r}' \right)}{c} \cdot \left(\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) \quad (18.12)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{1}{cr} \int dV' \left[\vec{j} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) \cdot \frac{(\vec{r} \vec{r}')}{cr} + \dots \right] \quad (18.13)$$

$$A_j(t, \vec{r}) = \frac{1}{cr} \int dV' \left[j_i \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) + \frac{\partial j_i}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) \cdot \frac{(x_i x'_j)}{cr} + \dots \right] \quad (18.14)$$

$$A_i(t, \vec{r}) \simeq \frac{1}{cr} \int dV' \left(\frac{\partial}{\partial x'_k} [jk \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i] - \text{div} \vec{j} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_j + \frac{x_j}{cr} \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[\frac{\partial j_k}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) \cdot x'_i x'_j \cdot \frac{1}{2} \right] \right)$$

$$-\frac{x_j}{2cr} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{j} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i x'_j + \frac{x_j}{2cr} \frac{\partial j_i}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_j - \frac{x_j}{2cr} \frac{\partial j_j}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i + \dots \quad (18.15)$$

$$A_i(t, \vec{r}) = \frac{1}{cr} \oint_{S_\infty^2} dS'_k \left(j_k \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i + \frac{x_j}{2cr} \frac{\partial j_k}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i x'_j + \dots \right) \quad (18.16)$$

Есть система, которая включает в себя распределения зарядов, токов и она находится в области с характерным размером L . При этом сфера S_∞^2 колоссального радиуса, которая окружает все рассматриваемое пространство, на этой сфере токов j_k быть не может.

Уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.17)$$

$$+ \frac{1}{cr} \int dV' \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) \cdot x'_i - \frac{x_j}{2cr} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) x'_i x'_j \quad (18.18)$$

Допустим есть величина:

$$\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial j_i}{\partial t} x'_j - \frac{\partial j_j}{\partial t} x'_i \right) = \frac{1}{2c} \varepsilon_{ijk} (-1) \varepsilon_{kmn} x'_m \frac{\partial}{\partial t} j_n \quad (18.19)$$

Для того чтобы равенство 18.19 стало очевидно запишем:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \quad (18.20)$$

Вспомним как определялся магнитный дипольный момент системы:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int dV' [\vec{r}' * \vec{j}(t, \vec{r}')] \quad (18.21)$$

$$\mu_k(t) = \frac{1}{2c} \varepsilon_{kmn} \int dV' x'_m j_n(t, \vec{r}') \quad (18.22)$$

Продолжая 18.16:

$$-\frac{x_j}{r} \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2c} \varepsilon_{kmn} x'_m \frac{\partial}{\partial t} j_n \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) + \dots \quad (18.23)$$

$$A_i(t, \vec{r}) \simeq \frac{1}{cr} \dot{p}_i \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x_j}{6c^2 r^2} \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \varepsilon_{ijk} \frac{x_j}{cr^2} \mu_k \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (18.24)$$

Таким образом, получили выражение для скалярного и векторного потенциала электромагнитного поля в волновой зоне. Выделили слагаемые, пропорциональные $\frac{1}{r}$, при этом в низшем приближении результат такой же, как и ранее. Следующий шаг – написать поля.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (18.25)$$

$$\vec{H} = \text{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla} * \vec{A}] \quad (18.26)$$

Давайте начнем с электрического поля

$$E_i(t, \vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q}{r} + \frac{x_j \dot{p}_j \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{x_j x_k}{6c^2 r^3} \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{cr} \dot{p}_i \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x_j}{6c^2 r^3} \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \varepsilon_{ijk} \frac{x_j}{cr^2} \dot{\mu}_k \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right) \quad (18.27)$$

Интересуют компоненты которые, убывают, как $\frac{1}{r}$.

$$[\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}] \quad (18.28)$$

В итоге получаем:

$$E_i(t, \vec{r}) = \frac{x_j x_i}{c^2 r^3} \ddot{p}_j \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x_j x_i x_k}{6c^3 r^4} \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c^2 r} \ddot{p}_i \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{x_j}{6c^3 r^2} \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x_j}{c^2 r^2} \varepsilon_{ijk} \ddot{\mu}_k \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (18.29)$$

Можно записать компактнее, если ввести следующее обозначение:

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \iff n_i = \frac{x_i}{r} \equiv x_i = r n_i \quad (18.30)$$

Соединим сначала вместе слагаемые, которые содержат вторые производные электрического дипольного момента:

$$E_i(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c^2 r} (\delta_{ij} - n_i n_j) \ddot{p}_j \left(t - \frac{r}{c} \right) - \dots \quad (18.31)$$

Теперь аналогично с квадрупольными слагаемыми:

$$E_i(t, \vec{r}) = \dots - \frac{1}{6c^3 r} (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{n_j}{c^2 r} \ddot{\mu}_k \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (18.32)$$

Упростим выражение для электрического поля. Вспомним:

$$Q_{ik}(t) = \int dV' \rho(t, \vec{r}') (3x'_j x'_k - \delta_{jk} r'^2) \quad (18.33)$$

$$(\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \delta_{jk} = (\delta_{ij} n_i n_j) n_j \quad (18.34)$$

С учетом:

$$1 = \vec{n}^2 = n_j n_j \quad (18.35)$$

Выражение равняется нулю.

$$(\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \delta_{jk} = (\delta_{ij} n_i n_j) n_j = n_i - n_j = 0 \quad (18.36)$$

Таким образом, выражение для электрического поля принимает вид:

$$E_i(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c^2 r} (\delta_{ij} - n_i n_j) \ddot{p}_j \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{6c^3 r} (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{n_j}{c^2 r} \ddot{\mu}_k \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (18.37)$$

Необходимо вычислить магнитное поле:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} * \vec{A}] \Rightarrow H_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \quad (18.38)$$

$$H_i(t, \vec{r}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{cr} \dot{p}_k \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x_l}{6c^2 r^2} \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \varepsilon_{kmn} \frac{x_m}{c^2 r^2} \dot{\mu}_n \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right) \quad (18.39)$$

$$H_i(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c^2 r} \varepsilon_{ijk} \ddot{p}_k \left(t - \frac{r}{c} \right) n_j - \frac{n_i n_j}{6c^3 r} \varepsilon_{ijk} \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{ijk} \frac{n_m n_j}{c^2 r} \ddot{\mu}_n \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (18.40)$$

Свертка симметричного и антисимметричного тензора:

$$n_i n_j \varepsilon_{ijk} \delta_{kl} = n_k n_j \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (18.41)$$

Проведем сравнение выражений для магнитного и электрического поля.

$$H_i(t, \vec{r}) = \varepsilon_{ijk} n_j E_k(t, \vec{r}) \iff \vec{H} = [\vec{n} * \vec{E}] \quad (18.42)$$

$$\vec{n} \vec{E} = 0 \quad (18.43)$$

$$\vec{n} \vec{H} = 0 \quad (18.44)$$

Проверим условие $\vec{n} \vec{E} = 0$:

$$(\delta_{ij} - n_i n_j) n_i = n_j - n_j = 0 \quad (18.45)$$

$$\varepsilon_{ijk} n_i n_j = 0 \quad (18.46)$$

Мы получили выражение для электрического и магнитного поля, то естественно, должны получить выражение для вектора Пойтинга и найти интенсивность излучения:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} * \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} * [\vec{n} * \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \vec{n} E^2 \quad (18.47)$$

$$dI = (\vec{S} \vec{n}) r^2 d\Omega|_{r \rightarrow \infty} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 r^2 d\Omega =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^4 r^2} r^2 d\Omega \left((\delta_{ij} - n_i n_j) \ddot{p}_i \ddot{p}_j + (\delta_{ij} - n_i n_j) \ddot{p}_i \ddot{Q}_{jk} n_k \frac{1}{3c} - 2(\delta_{ij} - n_i n_j) \ddot{p}_j \epsilon_{imn} n_m \ddot{\mu}_n + \right. \\ \left. + \frac{1}{36c^2} (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \ddot{Q}_{ik} n_l \ddot{Q}_{jl} - \frac{1}{3c} (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \ddot{Q}_{jk} \epsilon_{imn} n_m \ddot{\mu}_n + \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} n_j n_m \ddot{\mu}_k \ddot{\mu}_n \right) \quad (18.48)$$

Вычисление полной интенсивности:

$$I = \oint_{s_{\infty}^2} dI \quad (18.49)$$

Заметим некоторые закономерности:

$$\int \Omega \cdot 1 = 4\pi \quad (18.50)$$

$$\int \Omega n_i = 0 \quad (18.51)$$

$$\int \Omega n_i n_j = x_2 \delta_{ij} | \cdot \delta_{ij} \quad (18.52)$$

Получаем:

$$3x^2 = \int d\Omega n_i n_i = \int d\Omega \cdot 1 = 4\pi \Rightarrow x^2 = \frac{4\pi}{3} \quad (18.53)$$

Выражения с нечетным количеством n всегда будут равняться 0.

$$\int d\Omega n_j n_i n_k = 0 \quad (18.54)$$

$$\int d\Omega n_j n_i n_k n_l = x_4 (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) | \cdot \delta_{kl} \quad (18.55)$$

$$\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} = \int d\Omega n_i n_j = x_4 (\delta_{ij} 3 + \delta_{ij} + \delta_{ij}) = 5x_4 \delta_{ij} \quad (18.56)$$

$$x_4 = \frac{4\pi}{15} \quad (18.57)$$

Возвращаемся к полной интенсивности:

$$I = \frac{1}{4\pi c^3} 4\pi \left(\delta_{ij} (1 - \frac{1}{3}) \ddot{p}_i \ddot{p}_j + \frac{1}{36c^2} (\delta_{ij} \frac{1}{3} \delta_{kl} - \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \ddot{Q}_{ik} \ddot{Q}_{jl} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3c} \delta_{ij} \frac{1}{3} \delta_{km} \epsilon_{imn} \ddot{Q}_{jk} \ddot{\mu}_n + \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} \frac{1}{3} \delta_{jm} \ddot{\mu}_k \ddot{\mu}_n \right) \quad (18.58)$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{P}_i^2 + \frac{1}{36c^5} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \right) - \frac{1}{3c^4} \epsilon_{jkn} \ddot{Q}_{jk} \ddot{\mu}_n + \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijn} \ddot{\mu}_k \ddot{\mu}_n \frac{1}{3c^3} + \dots \quad (18.59)$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{P}_i^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{ij}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}_i^2 + \dots \quad (18.60)$$

Оценим по порядку величин вклады в интенсивность.

$$E_1 = \frac{2}{3c^3} \ddot{P}_i^2 \quad (18.61)$$

$$I_{E_1} \sim \frac{(q \cdot L \omega^2)^2}{c^3} = \frac{q^2 L^2 \omega^4}{c^3} \sim c \frac{q^2 L^2}{\lambda^4} \quad (18.62)$$

$$[I] = \frac{\text{м}}{c} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} \cdot (\sqrt{H \cdot \text{м}^2})^2 = \frac{H \text{м}^2}{c \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{c} = \text{Вт} \quad (18.63)$$

$$E_2 = \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{ij}^2 \quad (18.64)$$

$$I_{E_2} \sim \frac{1}{c^5} [q \cdot L^2 \omega^3]^2 = \frac{q^2 L^4 \omega^6}{c^5} = c \frac{q^2 L^4 \omega^6}{c^6} = c \frac{q^2 L^2}{\lambda^4} \cdot \frac{L^2}{\lambda^2} \quad (18.65)$$

$$M_1 = \frac{2}{3c^3} \ddot{u}_i^2 \quad (18.66)$$

$$I_{M_1} \sim \frac{1}{c^3} \cdot \left(\frac{\omega^2}{c} \cdot L \cdot qv\right)^2 = \frac{q^2}{c^5} L^2 v^2 \omega^4 \sim c \frac{q^2 L^2 v^2}{\lambda^4 c^2} \quad (18.67)$$

$$I_{E_2} \sim I_{M_1} \sim I_{E_1} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (18.68)$$

Лекция 19. Излучение в высших порядках мультипольного разложения

На прошлой лекции изучали следующий порядок мультипольного разложения излучения, то есть в низшем порядке излучение определяется дипольным вкладом, а в следующем порядке есть вклад электрический квадрупольный и магнитный дипольный. Эти вклады имеют одинаковый порядок.

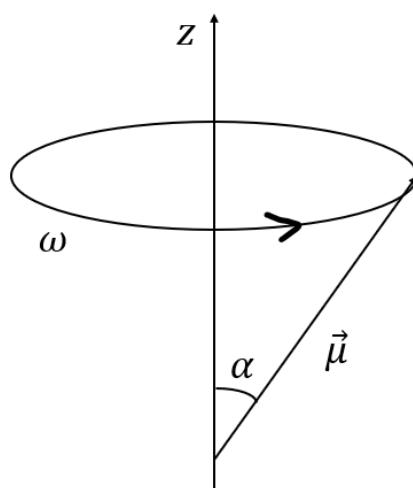


Рис. 19.1. Пример 1

В качестве примера рассмотрим задачу, когда излучение фактически является магнитным дипольным. Для этого мы рассмотрим следующую задачу. Допустим есть некоторый магнитный момент μ , который образует с осью некоторый угол α , и вращается вокруг оси z с некоторой угловой скоростью ω . Очевидно, что в этой задаче меняется магнитный и дипольный момент, поэтому будет происходить магнитное дипольное излучение. Нужно найти поляризацию, интенсивность и угловое распределение излучения в этом случае. Вспомним, какие формулы были получены для электрического и магнитного поля в случае, когда излучение является магнитным дипольным.

Было получено выражение для электрического поля:

$$E_i(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2 r} \epsilon_{ijk} n_j \mu_k \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (19.1)$$

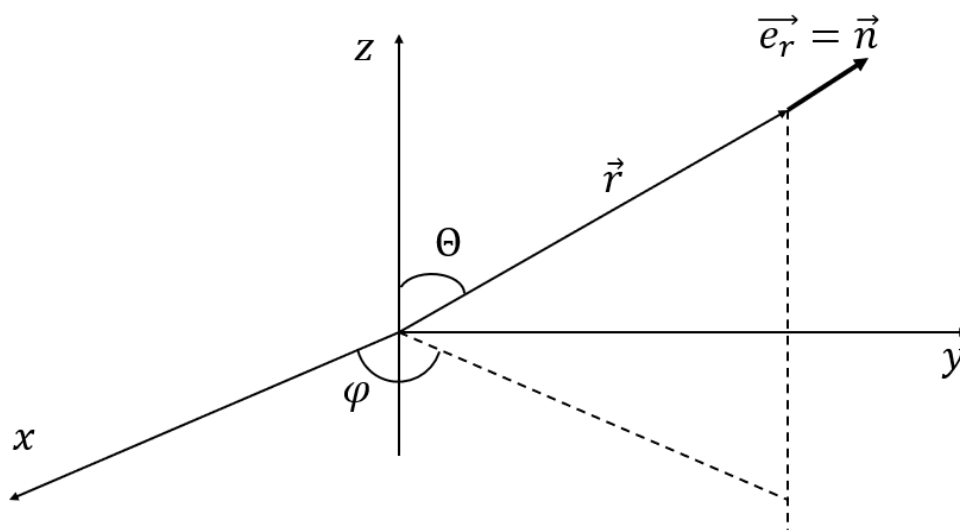


Рис. 19.2. Система координат для примера 1

Для магнитного поля:

$$H_i(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2 r} \varepsilon_{ijk} n_j \varepsilon_{kmn} n_m \mu_n(t - \frac{r}{c}) \quad (19.2)$$

Перепишем в терминах векторов:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n} * \ddot{\vec{r}}(t - \frac{r}{c})] = -[\vec{n} * \vec{H}(t, \vec{r})] \quad (19.3)$$

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n} * [\vec{n} * \ddot{\vec{r}}(t - \frac{r}{c})]] = \frac{1}{c^2 r} \{ \vec{n}(\vec{n} \ddot{\mu}) - \ddot{\mu} \} = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\mu}_{\perp}(t - \frac{r}{c}) \quad (19.4)$$

$$\mu_x(t) = \mu_0 \sin \alpha \cos \omega t \quad (19.5)$$

$$\mu_y(t) = \mu_0 \sin \alpha \sin \omega t \quad (19.6)$$

$$\mu_z(t) = \mu_0 \cos \alpha = const \quad (19.7)$$

Возьмем вторую производную:

$$\ddot{\mu}_x(t) = -\omega^2 \mu_0 \sin \alpha \cos \omega t \quad (19.8)$$

$$\ddot{\mu}_y(t) = -\omega^2 \mu_0 \sin \alpha \sin \omega t \quad (19.9)$$

$$\ddot{\mu}_z(t) = 0 \quad (19.10)$$

Магнитный момент можно выразить через вектора локального базиса.

$$\ddot{\mu} = -\omega^2 \mu_0 \sin \alpha (\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t) = -\omega^2 \mu_0 \sin \alpha \operatorname{Re}[e^{-i\omega t} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)] \quad (19.11)$$

$$(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)_\perp = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) - \vec{n}(\vec{n}, \vec{e}_x + i\vec{e}_y) = e^{i\phi} (\cos \theta \vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi) \quad (19.12)$$

Вычислим выражение для магнитного поля:

$$\vec{H}(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2 r} \omega^2 \mu_0 \sin \alpha \operatorname{Re}[(\cos \theta \vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi) \cdot e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})+i\phi}] \quad (19.13)$$

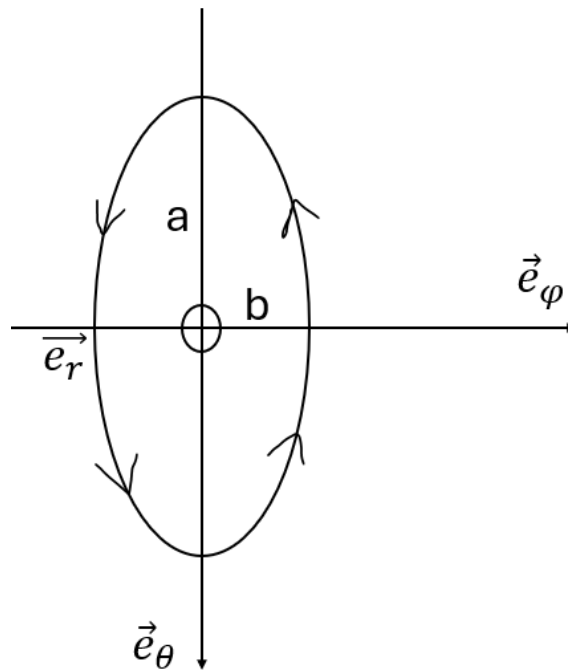


Рис. 19.3.

Электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= -[\vec{n} * \vec{H}(t, \vec{r})] = -\frac{\omega^2 \mu_0 \sin \alpha}{c^2 r} \operatorname{Re}([\vec{e}_r * (\cos \theta \vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi)] \cdot e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})+i\phi}) = \\ &= -\frac{\omega^2 \mu_0 \sin \alpha}{c^2 r} \cdot \operatorname{Re}((\cos \theta \vec{e}_\varphi - i\vec{e}_\theta) e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})+i\phi}) \end{aligned} \quad (19.14)$$

Начнем с вопроса о поляризации. Необходимо рассмотреть вектор электрического поля и вычислить вещественную часть.

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{\omega^2 \mu_0 \sin \alpha}{c^2 r} \cdot (\cos \theta \vec{e}_\varphi \cdot \cos(\omega(t-\frac{r}{c})-\phi) - \vec{e}_\theta \sin(\omega(t-\frac{r}{c})-\phi)) \quad (19.15)$$

Поляризация является эллиптической. Пусть волна распространяется на нас, в этом случае \vec{e}_r направлен на наблюдателя, \vec{e}_θ направлен вниз, а \vec{e}_ϕ параллельно.

При $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ поляризация правая, при $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ поляризация левая. У эллипса есть полуоси a — большая полуось и b — маленькая полуось. Отношение полуосей:

$$\frac{b}{a} = |\cos \theta| \quad (19.16)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ — поляризация линейная.

Следующий шаг – угловое распределение:

$$\langle dI \rangle = \left\langle \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 r^2 d\Omega \right\rangle \quad (19.17)$$

При усреднении по времени квадраты \cos и \sin дадут $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \langle dI \rangle &= \frac{c}{8\pi} \frac{\omega^4 \mu_0^2 \sin^2(\alpha)}{c^4 r^2} (1 + \cos^2(\theta)) r^2 d\Omega = \\ &= \frac{\omega^4 \mu_0^2 \sin^2(\alpha)}{8\pi c^3} (1 + \cos^2(\theta)) d\Omega \end{aligned} \quad (19.18)$$

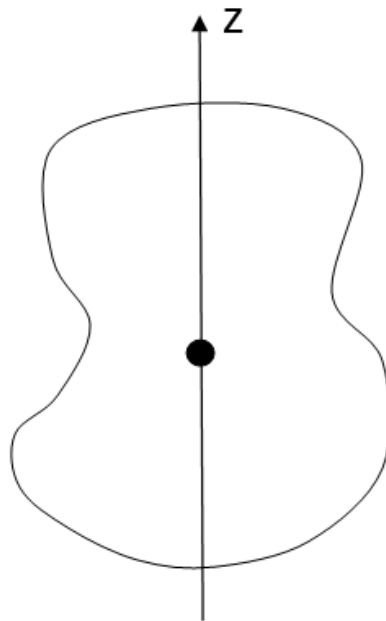


Рис. 19.4. Диаграмма направленности

Осталось посчитать полную интенсивность:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \int \langle dI \rangle = \frac{\omega^4 \mu_0^2 \sin^2(\alpha)}{8\pi c^3} \int (1 + \cos^2(\theta)) d\Omega = \\ &= \frac{\omega^4 \mu_0^2 \sin^2(\alpha)}{8\pi c^3} \cdot 2\pi \int_{-1}^1 dx (1 + x^2) = \frac{2\omega^4 \mu_0^2 \sin^2(\alpha)}{3c^3} \end{aligned} \quad (19.19)$$

Данная задача является примером, когда доминирующий вклад в излучение – это магнитное дипольное излучение.

Теперь рассмотрим пример, где доминирующим вкладом в излучение будет электрическое квадрупольное излучение. Капля равномерно заряжена и форма ее почти сфера/шар. Капля меняет свою форму, т.к. она колеблется. Рассмотрим в этом случае, если известна частота колебаний, какая будет поляризация у получающегося излучения, какое будет его угловое распределение и интенсивность. Необходимо за-

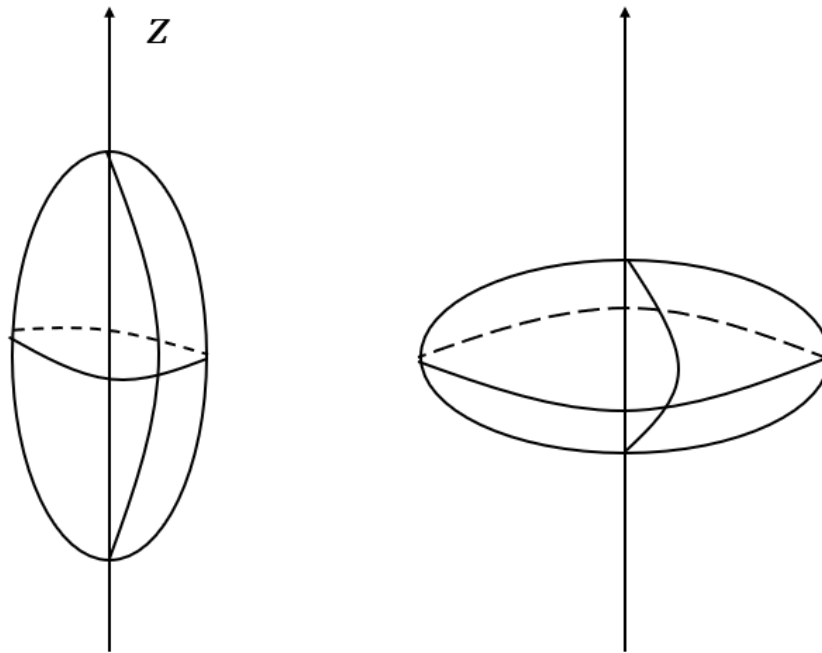


Рис. 19.5.

дать формулы, которые описывают колебания капли:

$$a(t) = R + A \cos(\omega t) \quad (19.20)$$

$$a(t) = R - \frac{A}{2} \cos(\omega t) \quad (19.21)$$

$$V = \frac{4}{3\pi} ab^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (19.22)$$

Тензор квадрупольного момента:

$$Q_{ij} = \int dV' \rho(t, \vec{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2) \quad (19.23)$$

Из соображения симметрии все недиагональные компоненты тензора квадрупольного момента окажутся равными 0. Для сферически-симметричного распределения зарядов — квадрупольный момент будет равен 0.

$$Q_{zz} = \int dV' \rho (3z'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)) = \quad (19.24)$$

Нужно выбрать «удобные координаты». Для шара удобно следующее представление:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (19.25)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (19.26)$$

$$z = r \cos \theta \quad (19.27)$$

Для эллипсоида:

$$x = r \sin \theta \cos \phi b \quad (19.28)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi b \quad (19.29)$$

$$z = r \cos \theta a \quad (19.30)$$

Продолжение 19.24

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 r^2 dr \int d\Omega ab^2 \cdot \frac{q}{4\pi R^3} (2a^2 r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta b^2) = \\ &= \frac{3q}{4\pi R^3} \cdot R^3 \frac{1}{5} \cdot 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cdot (2 \cos^2 \theta (R^2 + 2RA \cos(\omega t)) - \sin^2 \theta (R^2 - RA \cos(\omega t))) \\ Q_{zz} &= \frac{3q}{10} \int_{-1}^1 dx [2x^2 (R^2 + 2RA \cos(\omega t)) - (1 - x^2) (R^2 - RA \cos(\omega t))] = \\ &= \frac{3q}{10} [2 \cdot \frac{2}{3} (R^2 + 2RA \cos(\omega t)) - (2 - \frac{2}{3}) (R^2 - RA \cos(\omega t))] = \end{aligned}$$

Компонента квадрупольного момента:

$$Q_{zz} = \frac{3q}{10} \cdot \frac{4}{3} RA \cos(\omega t) (2 + 1) = \frac{6q}{5} RA \cos(\omega t) \quad (19.31)$$

Известно, что тензор квадрупольного момента является бесследованным.

$$0 = Q_{ii} = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 2Q_{xx} + Q_{zz} \quad (19.32)$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz} = \frac{3q}{5}RA \cos(\omega t) \quad (19.33)$$

$$Q_{ij}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{3q}{5}RA \cos(\omega t) \quad (19.34)$$

Электрическое поле:

$$E_i(t, \vec{r}) = -\frac{1}{6c^3 r} (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \ddot{Q}_{jk} \left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (19.35)$$

$$\begin{aligned} E_x(t, \vec{r}) = E_1 &= -\frac{1}{6c^3 r} (n_k \ddot{Q}_{1k} - n_1 n_j n_k \ddot{Q}_{jk}) = -\frac{1}{6c^3 r} (n_1 \ddot{Q}_{11} - n_1 (n_1^2 \ddot{Q}_{11} + n_2^2 \ddot{Q}_{22} + n_3^2 \ddot{Q}_{33})) = \\ &= -\frac{1}{6c^3 r} \ddot{Q}_{11} (1 - n_1^2 - n_2^2 + 2n_3^2) = -\frac{n_1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} n_3^2 \end{aligned} \quad (19.36)$$

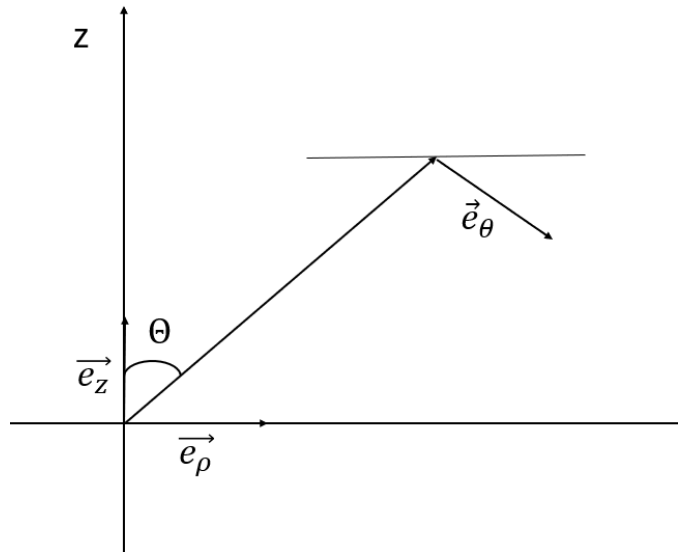


Рис. 19.6.

Компонента E_y вычисляется аналогично:

$$E_y(t, \vec{r}) = -\frac{n_2}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} n_3^2 \quad (19.37)$$

$$\begin{aligned} E_z(t, \vec{r}) = E_3 &= -\frac{1}{6c^3 r} (\delta_{3j} - n_3 n_j) n_k \ddot{Q}_{jk} = \\ &= -\frac{1}{6c^3 r} (n_3 \ddot{Q}_{33} - n_3 (n_1^2 \ddot{Q}_{11} + n_2^2 \ddot{Q}_{22} + n_3^2 \ddot{Q}_{33})) \end{aligned} \quad (19.38)$$

$$E_z(t, \vec{r}) = E_3 = -\frac{1}{6c^3 r} n_3 \ddot{Q}_{11} (-2 - n_1^2 - n_2^2 + 2n_3^2) = \frac{1}{2c^3 r} n_3 \ddot{Q}_{11} (1 - n_3^2) \quad (19.39)$$

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (19.40)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} (\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y) \cdot (-\cos^2 \theta) + \frac{1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} \cos \theta \vec{e}_z \cdot \sin^2 \theta = \\ &= \frac{1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} (-\sin \theta \cos^2 \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \sin^2 \theta \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (19.41)$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta \quad (19.42)$$

$$\vec{E} = \frac{-1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} \cdot \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta \quad (19.43)$$

$$\vec{H} = [\vec{n} * \vec{E}] = -\frac{1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\varphi \quad (19.44)$$

Необходимо получить поляризацию, угловое распределение и интенсивность.

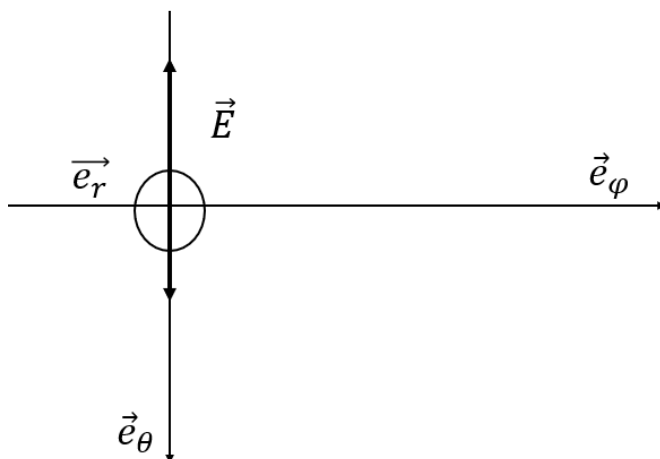


Рис. 19.7.

Линейная поляризация

$$\vec{E} = \frac{-1}{2c^3 r} \ddot{Q}_{11} \cdot \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta \quad (19.45)$$

$$dI = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4c^6 r^2} \sin^2 \theta \left(-\frac{3q}{5} RA (+\omega^3) \sin \omega t\right) r^2 s\Omega \quad (19.46)$$

$$\begin{aligned} \langle dI \rangle &= \left\langle \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 r^2 d\Omega \right\rangle = \left\langle \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4c^6 r^2} \sin^2 \theta \left(-\frac{3q}{5} RA (+\omega^3) \sin \omega t\right) r^2 d\Omega \right\rangle = \\ &= \frac{1}{32^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{9q^2 R^2 A^2 \omega^6}{25} d\Omega = \frac{9q^2 R^2 A^2 \omega^6}{800\pi c^5} d\Omega \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (19.47)$$

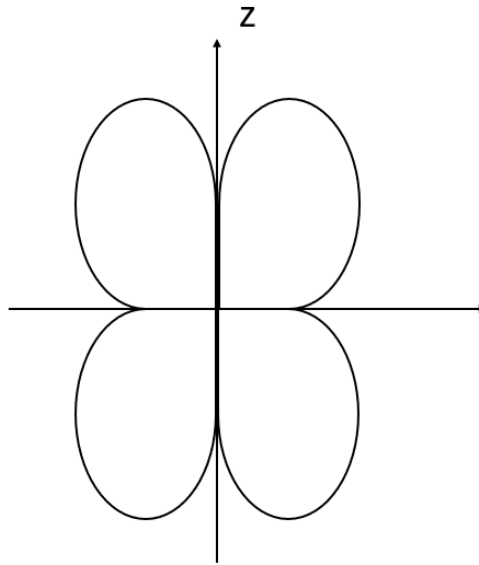


Рис. 19.8. Диаграмма направленности

$$\langle I \rangle = \int \langle dI \rangle = \frac{9q^2 R^2 A^2 \omega^6}{800\pi c^5} \int d\Omega \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{9q^2 R^2 A^2 \omega^6}{800\pi c^5} 2\pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2)x^2$$

$$\langle I \rangle = \frac{3q^2 R^2 A^2 \omega^6}{500c^5} \quad (19.48)$$

Поляризация линейная вертикальная.

Общая структура решений уравнений Максвелла в дальней зоне

Вспомним, как выглядело решение уравнение Максвелла в запаздывающих потенциалах:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\rho\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (19.49)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{c|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (19.50)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (19.51)$$

В дальней зоне выражения упрощаются:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{1}{r} \rho\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}, \vec{r}'\right) \quad (19.52)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int dV' \frac{1}{cr} \vec{j}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}, \vec{r}'\right) \quad (19.53)$$

Источники будут меняться следующим образом:

$$\rho(t, \vec{r}) = \text{Re}(\rho_0(\vec{r})e^{-i\omega t}) \quad (19.54)$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \text{Re}(\vec{j}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}) \quad (19.55)$$

Можно сделать разумное упрощение:

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \vec{n}\vec{r}' + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (19.56)$$

Тогда выражения принимают вид:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \text{Re} \int dV' \frac{1}{r} \rho_0(\vec{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)} \quad (19.57)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \text{Re} \int dV' \frac{1}{r} \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)} \quad (19.58)$$

Вспомним связь между волновым вектором k и ω :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (19.59)$$

В связи с этим выражения можно записать следующим образом:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \text{Re} \left(\frac{1}{r} e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \int dV' \rho_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \right) \quad (19.60)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \text{Re} \left(\frac{1}{cr} e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \right) \quad (19.61)$$

Учтем, что источники должны удовлетворять уравнению непрерывности:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = \text{Re}(e^{-i\omega t} (-i\omega \rho_0(\vec{r}) + \text{div} \vec{j}_0)) \quad (19.62)$$

Следовательно:

$$\rho_0(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega} \text{div} \vec{j}_0 \quad (19.63)$$

Имея потенциалы, можем найти поля, построить вектор Умова-Пойтинга, вычислить интенсивность.

Начнем с полей:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (19.64)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} * \vec{A}] \quad (19.65)$$

Важное замечание заключается в том, что поля вычисляются в дальней зоне, интересны слагаемые, которые убывают как $\frac{1}{r}$.

Электрическое поле:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \text{Re} \left(\frac{1}{r} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \int dV' \rho(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} \left(\frac{1}{cr} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \right) \\ &= \text{Re} \left(\frac{1}{r} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \left(-\frac{i\omega}{c} \vec{n} \int dV' \left(\frac{-i}{\omega} \text{div} \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} - \frac{1}{c^2} (-i\omega) \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (19.66)$$

$$\begin{aligned} &\int dV' \text{div} \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = \int dV' \text{div} (\vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} - \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = \\ &= \oint_{S_{\infty}^2} dS' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} + i\vec{k} \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \end{aligned} \quad (19.67)$$

$$\int dV' \text{div} \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = i\vec{k} \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \equiv i\vec{k} \vec{j}_0(\vec{k}) \quad (19.68)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{cr} \text{Re} \left(e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \left(-\vec{n} i (\vec{k} \vec{j}_0(\vec{k})) + \frac{i\omega}{c} \vec{j}_0(\vec{k}) \right) \right) = \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} \left(e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} i (\vec{j}_0(\vec{k}) - \vec{n} (\vec{n} \vec{j}_0(\vec{k}))) \right) = \\ &= \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} \left(e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} i \vec{j}_{0\perp}(\vec{k}) \right) \end{aligned} \quad (19.69)$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} \left(e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} i \vec{j}_{0\perp}(\vec{k}) \right) \quad (19.70)$$

Магнитное поле:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} * \vec{A}] = \text{Re} \left(\frac{1}{cr} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot \frac{i\omega}{c} [\vec{n} * \vec{j}_0(\vec{k})] \right) = \\ &= \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} \left(i e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} [\vec{n} * \vec{j}_{0\perp}(\vec{k})] \right) = [\vec{n} * \vec{E}] \end{aligned} \quad (19.71)$$

$$\vec{H} = [\vec{n} * \vec{E}(t, \vec{r})] \quad (19.72)$$

Вектор Умова-Пойтинга будет пропорционален $\frac{1}{r^2}$.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{n} (\vec{E}^2) \quad (19.73)$$

Интенсивность равна:

$$dI = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^4 r^2} (\text{Re}(ie^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{j}_{0\perp}(\vec{k})))^2 r^2 d\Omega \quad (19.74)$$

$$\langle dI \rangle = \frac{\omega^2}{8\pi c^3} |\vec{j}_{0\perp}(\vec{k})|^2 d\Omega \quad (19.75)$$



Лекция 20. Тонкая линейная антенна

Изучили решение для потенциалов в дальней зоне. Можно получить некоторые точные выражения. Зная выражения для потенциалов и полей в дальней зоне, можно получить интенсивность.

Тонкая линейная антенна

В качестве примера рассмотрим задачу, имеющую прикладное значение, а именно тонкую линейную антенну. Пусть провод имеет длину d . В центре провода – зазор, к которому подается переменное напряжение. Сферические координаты θ , ϕ изображены на рисунке. Шириной зазора пренебрегаем. Поймем, как распределены заряды и токи по проводам антенны.

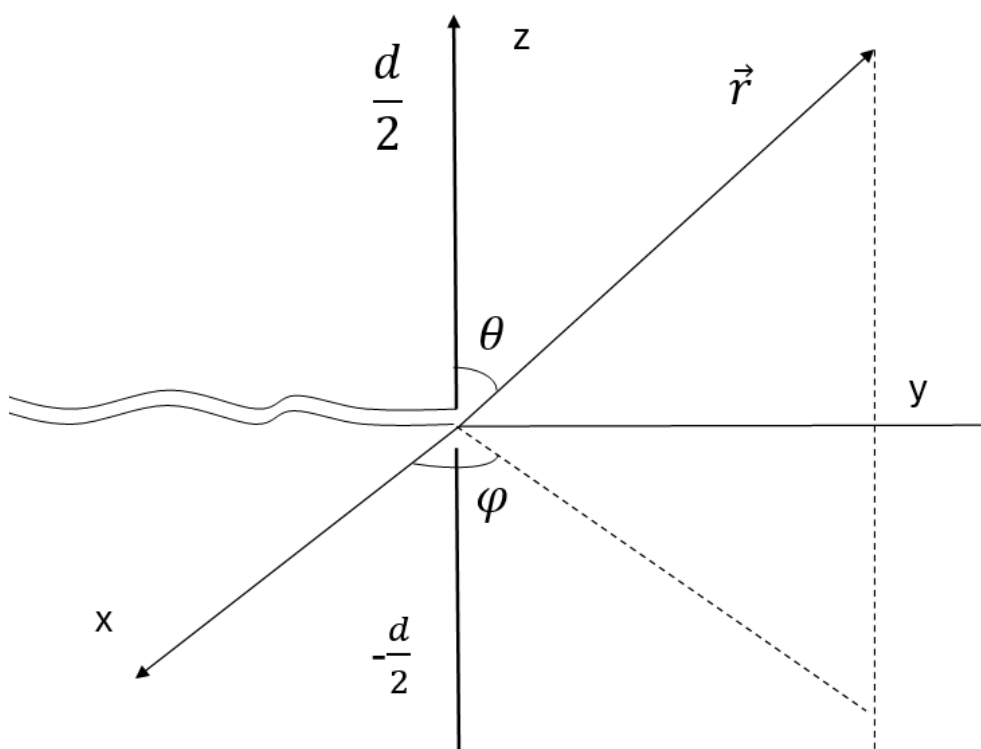


Рис. 20.1. Тонкая линейная антенна

Предположим, что провод виден как некоторый цилиндр. На некотором относительно небольшом участке провода плотность заряда и плотность тока можно считать постоянными. В ближней зоне, рядом с источниками, электрические и магнит-

ные поля, будут такими же, как в квазистатическом случае. Эти результаты можно использовать.

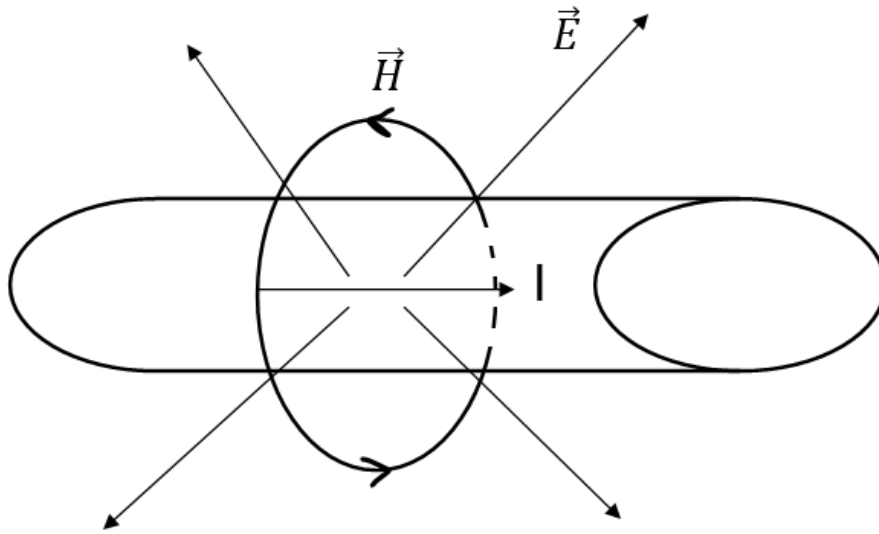


Рис. 20.2. Тонкая линейная антенна. Малый участок

Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) . \vec{e}_r – то, что обычно обозначалось \vec{e}_ρ .
Электрическое поле:

$$\vec{E}(r, \varphi, z, t) = \frac{2\pi R^2}{r} \rho \vec{e}_r \quad (20.1)$$

Площадь поперечного сечения:

$$S = \pi R^2 \quad (20.2)$$

Тогда вблизи провода:

$$\vec{E}(r, \varphi, z, t) \simeq \frac{2}{r} \lambda(z, r) \vec{e}_r \quad (20.3)$$

Для магнитного поля:

$$\vec{H}(r, \varphi, z, t) \simeq \vec{e}_\varphi \frac{2I(z, t)}{cr} = \vec{e}_\varphi \frac{2\pi R^2 j}{cr} \quad (20.4)$$

Очевидно, что плотность заряда и плотность тока связаны:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \quad (20.5)$$

Домножим на $S = \pi R^2$:

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad (20.6)$$

Напряжение переменное, меняется по гармоническому закону, поэтому:

$$\lambda(z, t) = \text{Re}[\lambda_0(z)e^{-i\omega t}] \quad (20.7)$$

$$I(z, t) = \text{Re}[I_0(z)e^{-i\omega t}] \quad (20.8)$$

Тогда:

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} = \text{Re} e^{-i\omega t} \left[-i\omega \lambda_0(z) + \frac{dI_0(z)}{dz} \right] \quad (20.9)$$

Отсюда можно получить связь между λ_0 и I_0 :

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{i\omega} \frac{dI_0(z)}{dz} \quad (20.10)$$

Работаем в области, в которой нет источников. Уравнение Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (20.11)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{2}{rc} \vec{e}_r \cdot \text{Re}[-i\omega \lambda_0(z)e^{-i\omega t}] \quad (20.12)$$

В цилиндрических координатах:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rH_\varphi & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \vec{e}_r \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{2}{c} \text{Re}[I_0(z)e^{-i\omega t}] \quad (20.13)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{2}{rc} \vec{e}_r \cdot \text{Re}[-i\omega \lambda_0(z)e^{-i\omega t}] = \frac{2}{rc} \vec{e}_r \text{Re} \left[-\frac{dI_0(z)}{dz} e^{-i\omega t} \right] \quad (20.14)$$

$$-i\omega \lambda_0(z) = -\frac{dI_0(z)}{dz} \quad (20.15)$$

Нужно найти, как ток распределен по току. Уравнения Максвелла работают, в чем уже убедились. Вне источников в калибровке Лоренца поля удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \square \vec{H} = 0 \\ \square \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (20.16)$$

где оператор $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (20.17)$$

$$0 = \square \vec{H} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e}_\varphi \frac{2}{cr} \text{Re}[I_0(z)e^{-i\omega t}] =$$

$$= \vec{e}_\varphi \frac{z}{c} \text{Re} e^{-i\omega t} \left[-\frac{\omega^2}{rc^2} I_0(z) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right) I_0(z) + \frac{1}{r^3} I_0(z) - \frac{1}{r} \frac{d^2 I_0(z)}{dz^2} \right] \quad (20.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\varphi, \quad (20.19)$$

так как:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos \varphi = -\cos \varphi \quad (20.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sin \varphi = -\sin \varphi \quad (20.21)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \quad (20.22)$$

Тогда:

$$0 = \square \vec{H} = -\vec{e}_\varphi \frac{2}{cr} \text{Re} e^{-i\omega t} \left[\frac{\omega^2}{c^2} I_0(z) + \frac{d^2 I_0(z)}{dz^2} \right] = 0 \quad (20.23)$$

$$0 = \frac{d^2 I_0(z)}{dz^2} + k^2 I_0(z) \quad (20.24)$$

Таким образом ток будет распределен по проводам. Однако нужно учесть граничные условия: ток не течет за конц провода.

$$I_0\left(\pm \frac{d}{2}\right) = 0 \quad (20.25)$$

$$I_0(z) = I_0(-z) \quad (20.26)$$

$$I_0(z) = I_0 \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \quad (20.27)$$

Пусть I_0 – вещественная величина:

$$I(z, t) = I_0 \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \cos(\omega t) \quad (20.28)$$

$$\lambda_0(z) = \frac{i}{\omega} I_0 \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \text{sgn}(z) \quad (20.29)$$

$$\lambda(z, t) = \text{Re} \left[\frac{i}{c} \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \text{sgn}(z) e^{-i\omega t} \right] \quad (20.30)$$

$$\text{Re} [i e^{-i\omega t}] = \sin(\omega t) \quad (20.31)$$

С учетом этого можно записать:

$$\lambda(z, t) = \text{Re} \left[\frac{i}{c} \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \text{sgn}(z) e^{-i\omega t} \right] = \frac{I_0}{c} \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \text{sgn}(z) \sin(\omega t) \quad (20.32)$$

Уравнение для потенциала:

$$\square \varphi = 4\pi \rho \sim \sin(\omega t) \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \text{sgn}(z) \tilde{\rho}(r) \quad (20.33)$$

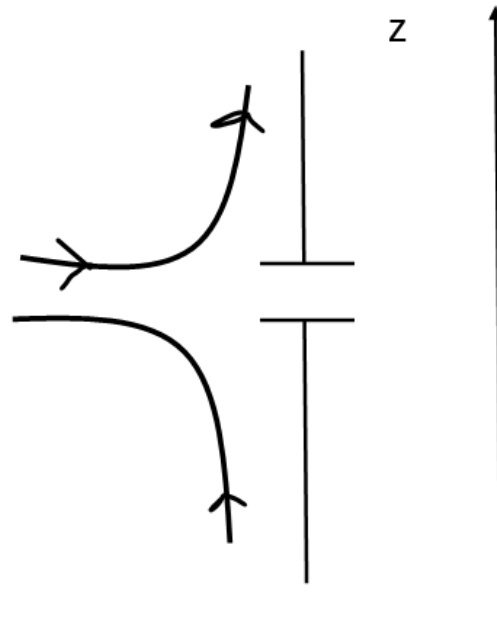


Рис. 20.3. Тонкая линейная антенна

$$\varphi \sim \rho \sim \lambda(z, t) \quad (20.34)$$

Вычислим электрическое поле в дальней зоне.

$$\vec{E} = \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} i e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{j}_{0\perp}(\vec{k}), \quad (20.35)$$

где

$$\vec{j}_{0\perp}(\vec{k}) = \vec{j}_0(\vec{k}) - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{j}_0(\vec{k})) \quad (20.36)$$

$$\vec{j}_0(\vec{k}) = \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \quad (20.37)$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \text{Re} \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (20.38)$$

Очевидно, что необходимо найти выражение для $\vec{j}_0(\vec{r})$. Плотность тока будет пропорциональна дельта-функциям.

$$\vec{j}_0(\vec{r}) = \vec{e}_z I_0 \delta(x) \delta(y) \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right), \quad (20.39)$$

где предполагается, что $|z| \leq \frac{d}{2}$.

$$\vec{j}_0(\vec{k}) = \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = - \int_{-d/2}^{d/2} dz \vec{e}_z I_0 \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) e^{-ikz \cos\theta} \quad (20.40)$$

\vec{r}' нумерует точки системы.

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = k \vec{n} \quad (20.41)$$

Теперь можно посчитать интеграл, разбив его на две части:

$$\begin{aligned} \vec{j}_0(\vec{k}) &= \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = \int_0^{d/2} dz I_0 \vec{e}_z \frac{1}{2i} (e^{i(\frac{kd}{2}-kz)} - e^{-i(\frac{kd}{2}-kz)}) e^{-ikz \cos \theta} + \\ &+ \int_{-d/2}^0 dz I_0 \vec{e}_z \frac{1}{2i} (e^{i(\frac{kd}{2}+kz)} - e^{-i(\frac{kd}{2}+kz)}) e^{-ikz \cos \theta} = \frac{1}{2k} I_0 \vec{e}_z \frac{1}{(1 + \cos \theta)} \cdot \\ &\cdot e^{i(\frac{kd}{2}-kz(1+\cos \theta))} \Big|_0^{d/2} + \frac{1}{(1 - \cos \theta)} e^{-i\frac{kd}{2} + ikz(1-\cos \theta)} \Big|_0^{d/2} - \frac{1}{(1 - \cos \theta)} e^{i\frac{kd}{2}(1-\cos \theta)} \Big|_{-d/2}^0 - \\ &- \frac{1}{(1 + \cos \theta)} e^{-i\frac{kd}{2} - ikz(1+\cos \theta)} \Big|_{-d/2}^0 \end{aligned} \quad (20.42)$$

Постепенно упростим выражение:

$$\begin{aligned} \vec{j}_0(\vec{k}) &= \int dV' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = \frac{I_0}{2k} \vec{e}_z \frac{1}{(1 + \cos \theta)} [e^{-i\frac{kd}{2}} - e^{i\frac{kd}{2}}] + \frac{1}{(1 - \cos \theta)} [e^{-i\frac{kd}{2} \cos \theta} - \\ &- e^{-i\frac{kd}{2}}] - \frac{1}{(1 - \cos \theta)} [e^{i\frac{kd}{2}} - e^{i\frac{kd}{2} \cos \theta}] - \frac{1}{(1 + \cos \theta)} [e^{-i\frac{kd}{2}} - e^{i\frac{kd}{2} \cos \theta}] = \\ &= 2 \frac{2I_0}{2k} \vec{e}_z [\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos(\frac{kd}{2})] + \frac{1}{(1 - \cos \theta)} [\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos(\frac{kd}{2})] = \\ &= \frac{2I_0}{k} \vec{e}_z \frac{1}{\sin^2 \theta} [\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos(\frac{kd}{2})] = \vec{e}_z \frac{2I_0}{k \sin^2 \theta} [\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos(\frac{kd}{2})] \end{aligned} \quad (20.43)$$

Причем:

$$\frac{1}{\cos \theta + 1} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} \quad (20.44)$$

В выражении для электрического поля присутствовало не $Vec j_0(\vec{k})$, а проекция, перпендикулярная \vec{n} . Направление определяется \vec{e}_z .

$$(\vec{e}_z)_\perp = \vec{e}_z - \vec{e}_r(\vec{e}_r \vec{e}_z) = \vec{e}_z - \vec{e}_r \cos \theta \quad (20.45)$$

Через орты в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} (\vec{e}_z)_\perp &= \vec{e}_z - \cos \theta (\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_\rho) = \sin^2 \theta \vec{e}_z - \sin \theta \vec{e}_\rho = \\ &= -\sin \theta (-\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_\rho) = -\sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (20.46)$$

$$\vec{j}_{0\perp}(\vec{k}) = -\frac{2I_0}{k \sin \theta} \vec{e}_\theta [\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos(\frac{kd}{2})] \quad (20.47)$$

Точное выражение в дальней зоне:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} i e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{j}_{0\perp} = \frac{\omega}{c^2 r} \text{Re} i e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \left(-\frac{2I_0}{k \sin\theta} \vec{e}_\theta \right) \cdot \left[\cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2} \right] = -\frac{2I_0}{cr} \frac{\vec{e}_\theta}{\sin\theta} \left[\cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2} \right] \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (20.48)$$

$$\begin{aligned} \langle dI \rangle &= \langle \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 r^2 d\Omega \rangle = \frac{c}{4\pi} r^2 d\Omega \cdot \frac{4I_0^2}{c^2 r^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \left[\cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2} \right]^2 \cdot \langle \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\left[\cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2} \right]^2}{\sin^2\theta} d\Omega \end{aligned} \quad (20.49)$$

Угловое распределение излучения и полная интенсивность будут зависеть от того, как соотносятся между собой длина волны и длина антенны.

Полуволновой диполь Герца

Рассмотрим наиболее интересный частный случай – полуволновой диполь Герца. Пусть $d = \frac{\lambda}{2}$.

$$\frac{kd}{2} = \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (20.50)$$

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} d\Omega \quad (20.51)$$

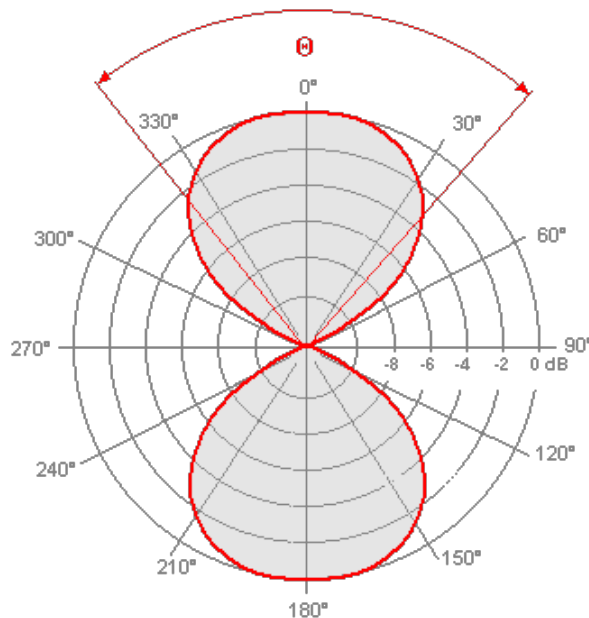


Рис. 20.4. Диаграмма направленности полуволнового диполя Герца

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \int d\Omega \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{I_0^2}{c} \int_0^\pi d\theta \frac{1 + \cos(\pi \cos\theta)}{\sin\theta} \quad (20.52)$$

Сделаем замену:

$$\Xi = \pi \cos\theta + \pi \Big|_\pi^0 \quad (20.53)$$

$$d\Xi = -\theta d\theta \quad (20.54)$$

С учетом замены:

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\pi \sin\theta} \frac{(1 + \cos(\xi - \pi))}{\sin\theta} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{\pi^2(1 - \cos\xi)}{2\pi\xi - \xi^2} \quad (20.55)$$

Промежуточные вычисления:

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{1 - \frac{(\xi - \pi)^2}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{\pi^2 - (\xi - \pi)^2} \quad (20.56)$$

Упростим выражением путем разбиения на простые дроби.

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{\pi^2(1 - \cos\xi)}{2\pi\xi - \xi^2} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \int_0^{2\pi} d\xi (1 - \cos\xi) \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2\pi - \xi} \right) \quad (20.57)$$

Второе слагаемое дает такой же вклад, как и первое. Можно сделать замену $\xi \rightarrow 2\pi - \xi$.

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2c} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{1 - \cos\xi}{\xi} \quad (20.58)$$

С помощью численных методов можно получить:

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2c} \cdot 2.4376... \quad (20.59)$$

Средняя по времени мощность:

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2}{R} \quad (20.60)$$

Сравнивая эти формулы можно представить выражение как:

$$\langle dI \rangle_{d=\frac{\lambda}{2}} = \frac{I_0^2}{2} R_{rad} \quad (20.61)$$

Где

$$R_{rad} = \frac{2.4376}{c} \quad (20.62)$$

Теперь необходимо перевести сопротивление в Омы.

$$1 \text{ Ом} = \frac{1 \text{ В}}{1 \text{ А}} = \frac{1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}}{1 \frac{\text{Кл}}{\text{с}}} = 1 \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \text{ м/с}} \quad (20.63)$$

Тогда:

$$R_{\text{rad}} = \frac{2.4376}{c} = \frac{2.4376}{3 \cdot 10^8} \cdot 9 \cdot 10^9 \simeq 73.1 \text{ Ом} \quad (20.64)$$

В случае $d = \lambda$ $R_{\text{rad}} \simeq 201 \text{ Ом}$.

Лекция 21. Излучение движущихся зарядов

Есть случаи, когда задача об излучении может быть точно решена. Рассмотрим один из таких примеров.

Излучение движущегося заряда

Для точечного заряда с помощью запаздывающих потенциалов было построено выражение для электрического поля. Если заряд движется по заданной траектории $\vec{r}(t)$:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{q(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c})^3} (\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}\vec{R}) + \frac{q[\vec{R} \times [(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}\vec{R}) \times \vec{a}]]}{c^2(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c})^3} \quad (21.1)$$

Выражение для магнитного поля:

$$\vec{H}(r, \vec{r}) = \frac{1}{R} [\vec{R} \times \vec{E}(t, \vec{r})] \quad (21.2)$$

Пояснение к обозначениям:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret}) \quad (21.3)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_0(t_{ret}) \quad (21.4)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}_0(t_{ret}) \quad (21.5)$$

$$R = |\vec{R}| \quad (21.6)$$

$$t - t_{ret} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})|}{c} = 0 \quad (21.7)$$

Слагаемое $\frac{q[\vec{R} \times [(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}\vec{R}) \times \vec{a}]]}{c^2(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c})^3}$ отвечает за излучение, поскольку имеет порядок $\frac{1}{R}$.

$$dI_0 = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \cdot R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2}{c^4} R^2 d\Omega \frac{q[\vec{R} \times [(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}\vec{R}) \times \vec{a}]]^2}{c^2(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c})^6} \quad (21.8)$$

Удобно ввести единичный вектор, который направлен вдоль \vec{R} :

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad (21.9)$$

С учетом этого:

$$dI_0 = \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega \frac{[\vec{n}[(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]}{(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c})^6} = \frac{d^2E}{dt d\Omega} \cdot d\Omega \quad (21.10)$$

Больше будет интересовать другая величина.

$$dI = \frac{d^2E}{dt_{ret}d\Omega}d\Omega = \frac{d^2E}{dtd\Omega} \frac{\partial t}{\partial t_{ret}} = dI_0 \frac{\partial t}{\partial t_{ret}} \quad (21.11)$$

$$\frac{\partial t}{\partial t_{ret}} = 1 - \frac{\vec{R}\vec{v}}{Rc} = 1 - \frac{(\vec{n}\vec{v})}{c} \quad (21.12)$$

Тогда:

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]^2}{(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^5} \quad (21.13)$$

В нерелятивистском случае ($v \ll c$) формула значительно упрощается:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{a}]]^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega (\vec{n}(\vec{n}\vec{a}) - \vec{a})^2 = \\ &= \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega ((\vec{n}\vec{a})^2 - 2(\vec{n}\vec{a})^2 + \vec{a}^2) = \frac{q^2}{4\pi c^3} (a^2 - (\vec{n}\vec{a})^2) d\Omega \end{aligned} \quad (21.14)$$

Обозначим угол между векторами ускорения и \vec{n} через θ .

$$a^2 - (\vec{n}\vec{a})^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta \quad (21.15)$$

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} (a^2 - (\vec{n}\vec{a})^2) d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (21.16)$$

Полная интенсивность получается путем интегрирования по углам:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \sin^2 \theta &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sin^2 \theta = [x = \sin \theta] = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) = \\ &= 2\pi (2 - \frac{2}{3}) = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned} \quad (21.17)$$

$$I = \int dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \frac{8\pi}{3} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{r}_0^2 \quad (21.18)$$

Получили формулу Лармора. Она верна в нерелятивистском случае.

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{p}^2 \quad (21.19)$$

p – дипольный момент системы.

$$\vec{p}(t) = q\vec{r}_0(t) \quad (21.20)$$

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]^2}{(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^5} \quad (21.21)$$

Распишем двойное векторное произведение:

$$[\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]] = (\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c})(\vec{n}\vec{a}) - \vec{a}(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c}) \quad (21.22)$$

$$\begin{aligned} [\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]^2 &= a^2(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^2 + (\vec{n}\vec{a})^2(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2(\vec{n}\vec{v})}{c}) - 2(\vec{n}\vec{a})^2(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c}) + \\ &+ \frac{2(\vec{v}\vec{a})(\vec{n}\vec{a})}{c}(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c}) = a^2(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^2 - (\vec{n}\vec{a})^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + \frac{2(\vec{v}\vec{a})(\vec{n}\vec{a})}{c}(1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c}) \end{aligned} \quad (21.23)$$

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} d\Omega \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]^2}{(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c})^5} = \frac{q^2 d\Omega}{4\pi c^3} \frac{a^2}{(1 - \frac{v\vec{n}}{c})^3} - \frac{(\vec{n}\vec{a})(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{v\vec{n}}{c})^3} + \frac{2(\vec{v}\vec{a})(\vec{n}\vec{a})}{c(1 - \frac{v\vec{n}}{c})^4} \quad (21.24)$$

Получим формулу для полной интенсивности. Нужно задать направление осей и выполнить интегрирование по $d\Omega$. Пусть ось z выберем по скорости:

$$\vec{v} = \vec{e}_z v \quad (21.25)$$

Ось x выберем так, чтобы \vec{a} лежало в плоскости xz :

$$\vec{a} = \vec{e}_z a \cos\alpha + \vec{e}_x a \sin\alpha \quad (21.26)$$

$$\vec{n} = \vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_x \sin\theta \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta \sin\varphi \quad (21.27)$$

Скалярное произведение:

$$(\vec{v}\vec{a}) = v a \cos\alpha \quad (21.28)$$

$$(\vec{n}\vec{a}) = a[\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta \cos\varphi] \quad (21.29)$$

$$(\vec{v}\vec{n}) = v \cos\theta \quad (21.30)$$

Подставим:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{q^2 d\Omega}{4\pi^3} \frac{a^2}{(1 - \frac{v}{c} \cos\theta)^3} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2}) a^2}{(1 - \frac{v}{c} \cos\theta)^5} [\cos^2\alpha \cos^2\theta + \sin^2\alpha \sin^2\theta \cos^2\varphi + \\ &+ 2\cos\alpha \cos\theta \sin\alpha \sin\theta \cos\varphi] + \frac{2va^2 \cos\alpha (\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta \cos\varphi)}{c(1 - \frac{v}{c} \cos\theta)^4} \end{aligned} \quad (21.31)$$

Полная интенсивность – энергия, которая излучается частицей за единицу времени:

$$\begin{aligned} I = \int dI &= \frac{q^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_{-1}^1 dx \frac{a^2}{(1 - \frac{v}{c} x)^3} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2}) a^2}{(1 - \frac{v}{c} x)^5} [\cos^2\alpha \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sin^2\alpha (1 - x^2)] + \frac{2a^2 v \cos^2\alpha \cdot x}{c(1 - \frac{v}{c} x)^4} \end{aligned} \quad (21.32)$$

α – угол между \vec{v} и \vec{a} .

$$[\vec{v} \times \vec{a}] = v \cdot a \cdot \sin \alpha \quad (21.33)$$

Формула Лиенара – обобщение формулы Лармора:

$$I = \frac{a^2 q^2}{2c^3} \frac{4}{3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{\left(\vec{a}^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{a}]^2\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \quad (21.34)$$

Излучают только ускоренно движущиеся частицы.

Уравнение движения в постоянном однородном магнитном поле будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d\vec{p}_o}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \quad (21.35)$$

p_o – обычный импульс, который выражается:

$$\vec{p}_o = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (21.36)$$

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (21.37)$$

Тогда:

$$\vec{p}_o = \frac{\vec{v}T}{c^2} \quad (21.38)$$

Подставляем в уравнение движения:

$$\frac{d\vec{p}_o}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \quad (21.39)$$

уравнение представимо в виде:

$$\frac{T}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \quad (21.40)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qc}{T} [\vec{v} \times \vec{H}] \quad (21.41)$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{|q|c}{T} vH \quad (21.42)$$

$$\omega = \frac{|q|cH}{T} \quad (21.43)$$

Найдем ускорение:

$$a = \frac{qc}{T} vH \quad (21.44)$$

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{vT}{|q|cH} \quad (21.45)$$

Используя формулу Лиенара найдем полную интенсивность излучения. В рассматриваемой задаче ускорение и скорость взаимно перпендикулярны.

$$I = \frac{2q^2 a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{3c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = \frac{2q^2}{3c^3} \cdot \frac{q^2 c^2 v^2 H^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 T^2} = \left[T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{2q^4 v^2 H^2}{3m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \sim \vec{p}_0^2 \quad (21.46)$$

Чем ближе скорость света частицы к скорости света, тем больше интенсивностью.

Выясним, как излучение распределено по углам.

$$1 - \frac{v\vec{n}}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos\theta \simeq [\text{при малых углах}] \simeq 1 - \frac{v}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{c}\right) = 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \quad (21.47)$$

Тогда величина dI будет большой при скоростях, близких к скорости света.

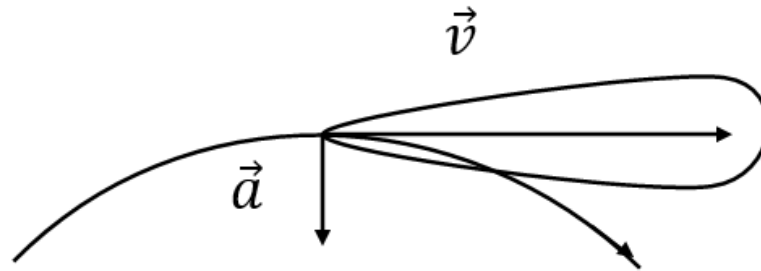


Рис. 21.1. Релятивистский случай

$$\frac{\theta^2}{2} \sim 1 - \frac{v}{c} \quad (21.48)$$

$$\theta^2 \sim \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot 2 \sim 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (21.49)$$

В угле

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (21.50)$$

будет сосредоточено излучение. Синхротронное излучение было предсказано в 1944 году. Спустя три года было обнаружено экспериментально.

Радиационное трение

Рассмотрим радиационное трение. Ускоренные заряды излучают энергию, которая уносится электромагнитными волнами. Некоторая сила должна действовать на заряды со стороны поля. Исходная точка – формула Лармора для нерелятивистского случая, то есть скорости малы по сравнению со скоростью света.

$$I = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}_0^2 \quad (21.51)$$

В силу закона сохранения энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -I \quad (21.52)$$

Работа силы радиационного трения:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dE}{dt} = - \int_{t_1}^{t_2} dt I = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_{rad} \vec{v} \quad (21.53)$$

Излучают ускоренно движущиеся заряды. Пусть в начале движения частица двигалась равномерно и прямолинейно. Затем двигалась равноускоренно при вхождении в некоторые поля. Далее – снова прямолинейна.

$$\begin{cases} \vec{a}(t_1) = 0 \\ \vec{a}(t_2) = 0 \end{cases} \quad (21.54)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v} \vec{F}_{rad} &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2}{3c^3} \vec{a} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{2q^2 \vec{a} \vec{v}}{3c^3} \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2}{3c^3} \vec{v} \frac{d\vec{a}}{dt} = \\ &= - \frac{2q^2 \vec{a} \vec{v}}{3c^3} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \vec{v} \end{aligned} \quad (21.55)$$

Учитывая начальные условия:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v} \vec{F}_{rad} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2}{3c^3} \vec{a} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{2q^2 \vec{a} \vec{v}}{3c^3} \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2}{3c^3} \vec{v} \frac{d\vec{a}}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \vec{v} \quad (21.56)$$

Тогда видно, что

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \quad (21.57)$$

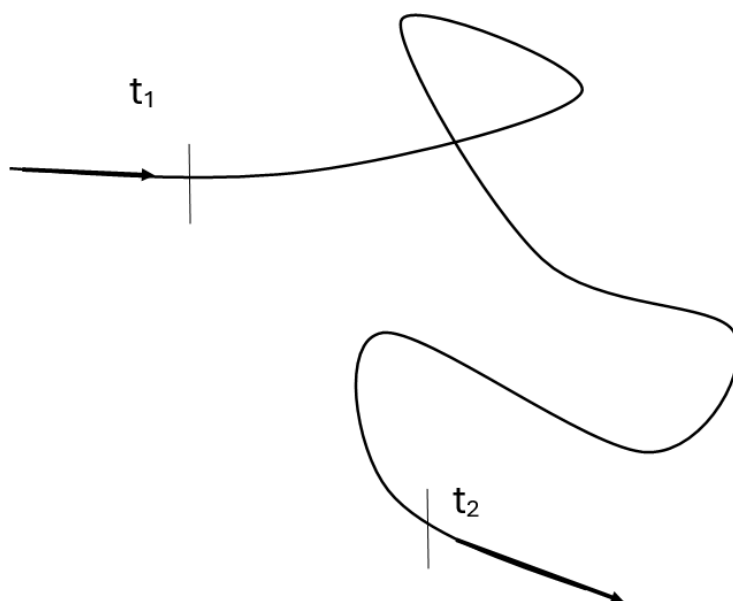


Рис. 21.2. Радиационное трение. Движение частицы

Закон движения частицы при наличии силы радиационного трения:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_\Lambda + \vec{F}_{rad} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\dot{\vec{r}} \times \vec{H}] \right) + \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \quad (21.58)$$

Пусть электрическое и магнитное поля нулевые: $\vec{E} = \vec{H} = 0$. Тогда:

$$m\vec{a} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} \quad (21.59)$$

Это уравнение имеет решение:

$$\vec{a}(t) = a_0 \exp\left(\frac{3mc^3}{2q^2} t\right) \quad (21.60)$$

Произвольным образом нельзя задавать 9 граничных условий, поэтому нужно дополнительно накладывать некоторые физические условия. Так нефизичные решения будут устранены. Ускорение в начальный момент времени нельзя выбирать произвольным образом.

Лекция 22. Радиационное трение

Сила радиационного трения

На прошлой лекции было получено выражение для силы радиационного трения:

$$\vec{F}_{\text{рад}} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Так же было показано, что при учете силы радиационного трения уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле принимает вид

$$m\ddot{\vec{r}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) + \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Физические решения этого уравнения можно получать по теории возмущений, считая, что сила радиационного трения мала по сравнению с внешней силой. Тогда в низшем порядке

$$m\ddot{\vec{r}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)$$

Подставляя $\ddot{\vec{r}}$ отсюда в выражение для $\vec{F}_{\text{рад}}$, получим, что

$$\vec{F}_{\text{рад}} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{F}_{\text{рад}} \approx \frac{2q^2}{3c^3 m} \left(\dot{\vec{E}} + \frac{1}{c} [\dot{\vec{v}} \times \vec{H}] \right)$$

В системе отсчета, где скорость мала:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

$$\vec{F}_{\text{рад}} \approx \frac{2q^2}{3c^3 m} \left(\dot{\vec{E}} + \frac{q}{mc} [\vec{E} \times \vec{H}] \right)$$

При периодическом движении с характерной частотой ω :

$$\dot{\vec{E}} \sim \omega E$$

Тогда первое слагаемое имеет порядок $\frac{q^3 \omega}{mc^3} E$, а второе $\frac{q^4}{m^2 c^4} EH$.

Условия применимости:

- 1) $\frac{q^3 \omega}{mc^3} E \cdot \frac{1}{qE} \ll 1$
- 2) $\frac{q^4}{m^2 c^4} EH \cdot \frac{1}{qE} \ll 1$

Если $\lambda \sim \frac{c}{\omega}$, то первое слагаемое переписывается в виде

$$\lambda \gg \frac{q^2}{mc^2}$$

А второе – в виде

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{q^3}$$

Данные условия фактически являются условиями применимости классической электродинамики. Оценим эти величины:

$$\frac{e^2}{m_e c^2} \approx \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл})^2}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}\right)^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$\frac{m_e^2 c^4}{e^3} = \frac{m_e^2 \hbar^{-\frac{3}{2}} c^{\frac{5}{2}} \hbar^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}}}{e^3} = \frac{m_e^2 \hbar^{-\frac{3}{2}} c^{\frac{5}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = 6.4 \cdot 10^{14} \text{ Гс}$$

Задача 1

Рассмотрим электрон, движущийся вокруг неподвижного ядра заряда e , и выясним за какое время он упадет на ядро, если исходно он двигался по круговой орбите радиуса R .

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \vec{a}$$

Ускорение определяется из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{e^2}{r^3} \vec{r}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{e^2}{mr^2}\right)^2 \\ -\frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{e^2}{mr^2}\right)^2 &= \frac{2e^6}{3m^2 c^3 r^4} \end{aligned}$$

При этом из курса теоретической механики известно, что

$$E = -\frac{e^2}{2r}$$

(при движении по круговой орбите радиуса r).

Действительно,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r}$$

Поэтому

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{e^2}{2r} \right) = -\frac{2e^6}{3m^2 c^3 r^4}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2}{e^2} \left(-\frac{2e^6}{3m^2 c^3 r^4} \right) = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3 r^4}$$

Разделяя переменные, получаем, что

$$r^2 dr = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} dt$$

$$\int_R^0 r^2 dr = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} \int_0^t dt$$

$$\frac{R^3}{3} = \frac{4e^4}{3m^2 c^3} t$$

Откуда получаем, что время, за которое произойдет падение на силовой центр, будет

$$t = \frac{m^2 c^3 R^3}{4e^4}$$

Для оценки этой величины перепишем ее в виде

$$t = \frac{m^2 c^3 R^3}{4\alpha^2 \hbar^2 c^2} = \frac{m^2 c R^3}{4\alpha^2 \hbar^2}$$

Если $R = a_0 = 5.3 \cdot 10^{-11}$ м, то

$$t = 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ с}$$

Задача 2

Заметим, что при движении электрон теряет не только энергию, но и момент импульса.

Действительно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_{\text{рад}}] = \left[\vec{r} \times \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \right] = \frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{r}} \right] - \left[\dot{\vec{r}} \times \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \right]$$

При усреднении по времени первое слагаемое дает 0, так как для (почти) периодического движения

$$\left\langle \frac{df(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{df}{dt} = \frac{f(T) - f(0)}{T} = 0$$

Поэтому

$$\left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3} \langle [\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}] \rangle$$

Используя этот результат, можно усложнить задачу и исследовать, как будут меняться большая полуось и эксцентриситет, если исходно электрон двигался по эллиптической орбите с большой полуосью a_0 и эксцентриситетом ε_0 .

При этом из курса «Теоретическая механика» известно, что энергия и эксцентриситет могут быть найдены как

$$E = -\frac{e^2}{2a}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{me^4}}$$

Потенциал и момент импульса

$$U = -\frac{e^2}{r}, \quad p_\varphi = L = |\vec{L}|$$

Тогда

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^6}{2m^2c^3} \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle = -\frac{2e^6}{3m^2c^3} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{r^4}$$

Причем dt можно выразить через $d\varphi$ из формулы

$$p_\varphi = L = mr^2 \dot{\varphi}$$

Траектория имеет вид

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Причем

$$a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

Поэтому

$$\left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{mr^2}{L} \frac{1}{r^4} = \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{p^2} = \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

Откуда следует, что

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^6}{2m^2c^3} \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

Аналогичным образом

$$\left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3} \left\langle [\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}] \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3} \left\langle \left[\vec{r} \times \left(-\frac{e^2}{mr^3} \right) \vec{r} \right] \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3m^2} \vec{L} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle,$$

где

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{mr^2}{L} \frac{1}{r^3} = \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} = \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

Поэтому

$$\left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3m^2} \vec{L} \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

Итого имеем:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^6}{2m^2c^3} \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \\ \left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3m^2} \vec{L} \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a(1 - \varepsilon^2)} \end{cases}$$

Отбрасывая знак среднего, мы получаем, что

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = -\frac{2e^6}{2m^2c^3} \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3m^2} \vec{L} \frac{m}{TL} \frac{2\pi}{a(1 - \varepsilon^2)} \end{cases}$$

Деля эти уравнения друг на друга, получаем, что

$$\frac{dE}{dL} = \frac{e^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)}{L a(1 - \varepsilon^2)} = -\frac{E(2 + \varepsilon^2)}{L(1 - \varepsilon^2)}$$

$$\frac{d \ln|E|}{d \ln L} = -\frac{(2 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)}$$

При этом

$$E = \frac{e^2}{2a}$$

$$L = \sqrt{(1 - \varepsilon^2) m e^4 \frac{1}{2E}} = \sqrt{(1 - \varepsilon^2) m e^2 a}$$

Поэтому

$$\frac{d \ln \left[\sqrt{(1 - \varepsilon^2) m e^2 a} \right]}{d \ln \left(\frac{e^2}{2a} \right)} = -\frac{(2 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)}$$

$$\frac{d \ln \left[\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln(1 - \varepsilon^2) \right]}{-d \ln(a)} = -\frac{(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{d \ln \xi}{d \ln a} = \frac{\xi}{3 - \xi},$$

где $\xi = 1 - \varepsilon^2$

$$\frac{d \xi}{d \ln a} = \xi \left[-1 + \frac{2\xi}{3 - \xi} \right] = \frac{3\xi(\xi - 1)}{3 - \xi}$$

Видно, что есть решение $\xi = 1$.

$$\int_{a_0}^a d \ln a = \int_{1 - \varepsilon_0^2}^{1 - \varepsilon^2} d\xi \frac{3 - \xi}{3\xi(\xi - 1)} = \int_{1 - \varepsilon_0^2}^{1 - \varepsilon^2} d\xi \left(-\frac{1}{\xi} + \frac{2}{3(\xi - 1)} \right) = \left[-\ln \xi + \frac{2}{3} \ln(1 - \xi) \right] \Big|_{1 - \varepsilon_0^2}^{1 - \varepsilon^2}$$

$$\ln \frac{a}{a_0} = -\ln \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon_0^2} + \frac{4}{3} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

В частности видно, что при $a \rightarrow 0$ эксцентриситет также стремится к 0, то есть орбита начинает приближаться к круговой при приближении электрона к ядру.

Лекция 23. Рассеяние электромагнитных волн. Формула Томпсона

Рассеяние электромагнитных волн

Волна падает на некий рассеиватель, являющийся системой зарядов. Заряды начинают двигаться и излучать во все стороны – происходит рассеяние электромагнитной волны (рис. 23.1).

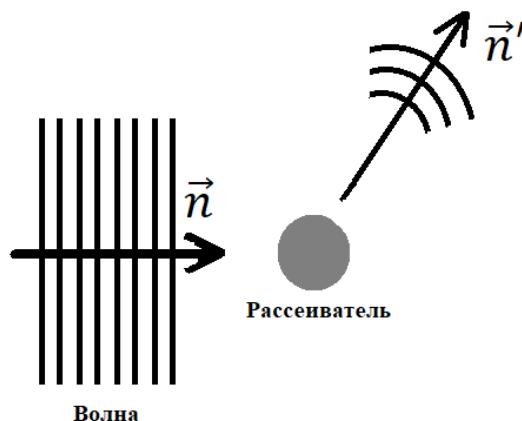


Рис. 23.1. Рассеяние электромагнитной волны

По аналогии с механикой можно определить сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{\langle S \rangle}$$

Здесь скобки означают усреднение по времени, а S – модуль вектора Умова-Пойтинга.

Размерность сечения рассеяния:

$$[d\sigma] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{с}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}} = \text{м}^2$$

Рассеяние электромагнитных волн на свободных зарядах

В качестве первого примера изучим рассеяние электромагнитной волны одним свободным зарядом. Пусть на заряд падает плоская монохроматическая эллиптически поляризованная волна. Ее электрическое поле можно записать в виде

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \right\}$$

Без ограничения общности можно считать, что \vec{n} ($\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$) направлен по оси z , а

$$\vec{E}_0 = (\vec{e}_x E_{0x} + i\vec{e}_y E_{0y}) e^{-i\phi_0}$$

Мы считаем, что скорость, приобретаемая зарядом, мала по сравнению со скоростью света c , так что

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \simeq q\vec{E}$$

Тогда можно также пренебречь и смещением заряда при колебаниях, так что

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= q\vec{E} \\ q\vec{E} &= q \operatorname{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega} \gg \frac{2\pi v}{\omega} \sim d \end{aligned}$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\vec{r} = -\frac{q}{m\omega^2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\} = -\frac{q}{m\omega^2} \{\vec{e}_x E_{0x} \cos(\omega t + \phi_0) - \vec{e}_y E_{0y} \sin(\omega t + \phi_0)\},$$

то есть заряд также будет двигаться по эллипсу.

При этом в соответствии с формулой Лармора

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} (\vec{a}^2 - (\vec{n}' \vec{a})^2) d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} \vec{a}_\perp^2 d\Omega,$$

где

$$\vec{a}_\perp \equiv \vec{a} - \vec{n}'(\vec{n}' \vec{a})$$

Так как

$$\vec{a}_\perp^2 = \vec{a}^2 - 2(\vec{a} \vec{n}')^2 + (\vec{n}' \vec{a})^2 = \vec{a}^2 - (\vec{n}' \vec{a})^2$$

$$[\vec{n}' \times \vec{a}]^2 = [\vec{n}' \times \vec{a}][\vec{n}' \times \vec{a}] = \vec{n}' [\vec{a} \times [\vec{n}' \times \vec{a}]] = \vec{n}' (\vec{n}' \cdot \vec{a}^2 - \vec{a}(\vec{n}' \vec{a})) = \vec{a}^2 - (\vec{n}' \vec{a})^2$$

(Теперь $\vec{n} = \vec{e}_z$ указывает направление исходной волны, а \vec{n}' - рассеянной). При этом мы учли, что $\vec{a}_\perp \perp \vec{n}'$.

$$a_{\perp i}^2 \equiv (a_i - n'_i(n'_j a_j))^2 = a_i^2 - (a_i n'_i)^2 = [\vec{a} \times \vec{n}']^2$$

Поэтому

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3 m^2} (q\vec{E}_\perp)^2 d\Omega$$

$$\langle dI \rangle = \frac{q^4}{4\pi c^3 m^2} \cdot \frac{1}{2} \vec{E}_{0\perp}^* \vec{E}_{0\perp} d\Omega = \frac{q^4}{8\pi c^3 m^2} |\vec{E}_{0\perp}|^2 d\Omega$$

Вспомним, что

$$\vec{E}_0 = (\vec{e}_x E_{0x} + i\vec{e}_y E_{0y}) e^{-i\phi_0}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\vec{E}_{0\perp}|^2 &= |(\vec{e}_x)_\perp E_{0x} + i(\vec{e}_y)_\perp E_{0y}|^2 = [(\vec{e}_x)_\perp]^2 E_{0x}^2 + [(\vec{e}_y)_\perp]^2 E_{0y}^2 \\ &= [\vec{n}' \times \vec{e}_x]^2 E_{0x}^2 + [\vec{n}' \times \vec{e}_y]^2 E_{0y}^2 \end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$\frac{q^4}{8\pi c^3 m^2} |\vec{E}_{0\perp}|^2 d\Omega = \frac{q^4}{8\pi c^3 m^2} (E_{0x}^2 [\vec{e}_x \times \vec{n}']^2 + E_{0y}^2 [\vec{e}_y \times \vec{n}']^2) d\Omega$$

Итого:

$$\langle dI \rangle = \frac{q^4}{8\pi c^3 m^2} (E_{0x}^2 [\vec{e}_x \times \vec{n}']^2 + E_{0y}^2 [\vec{e}_y \times \vec{n}']^2) d\Omega$$

С другой стороны, вектор Умова-Пойтинга падающей волны после усреднения по времени примет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \rangle \vec{n} \\ \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \rangle \vec{n} &= \frac{c}{4\pi} \vec{n} \cdot \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2 \\ \frac{c}{4\pi} \vec{n} \cdot \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2 &= \frac{c}{8\pi} \vec{n} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \end{aligned}$$

Поэтому дифференциальное сечение рассеяния примет вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\langle dI \rangle}{\langle S \rangle} \\ \frac{\langle dI \rangle}{\langle S \rangle} &= \frac{\frac{q^4}{8\pi c^3 m^2} (E_{0x}^2 [\vec{e}_x \times \vec{n}']^2 + E_{0y}^2 [\vec{e}_y \times \vec{n}']^2)}{\frac{c}{8\pi} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)} \\ d\Omega &= \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{(E_{0x}^2 [\vec{e}_x \times \vec{n}']^2 + E_{0y}^2 [\vec{e}_y \times \vec{n}']^2) d\Omega}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \end{aligned}$$

Вычислим теперь полное сечение рассеяния

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\int d\Omega = 4\pi$$

$$\int d\Omega n'_i n'_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$$

Поэтому для единичного вектора \vec{e}

$$\int d\Omega [\vec{e} \cdot x \vec{n}']^2 = \int d\Omega (\vec{e}^2 - (\vec{e} \vec{n}')^2) = \int d\Omega (1 - n'_i n'_j e_i e_j) = 4\pi \left(1 - \frac{1}{3} \delta_{ij} \cdot e_i e_j\right) = \frac{8\pi}{3}$$

Поэтому

$$\sigma = \int d\sigma = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{8\pi (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)}{3 (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2$$

Эта формула называется формулой Томпсона.

Видно, что при рассеянии на свободных зарядах сечение не зависит от частоты.

Оценим эту величину.

$$\frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} \cdot (2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м})^2 \approx 6,6 \cdot 10^{-29} \text{ м}^2$$

$$6,6 \cdot 10^{-29} \text{ м}^2 = 0,6652 \text{ барн}$$

1 барн = 10^{-28} м^2 – величина, используемая в ядерной физике для измерения сечений.

Рассеяние электромагнитных волн на свободных зарядах при линейной поляризации

В случае линейной поляризации падающей волны ($E_{0y} = 0$)

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ E_{0x} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \right\}$$

Тогда

$$d\sigma^{(x)} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \left[\vec{e}_x \times \vec{n}' \right]^2 d\Omega$$

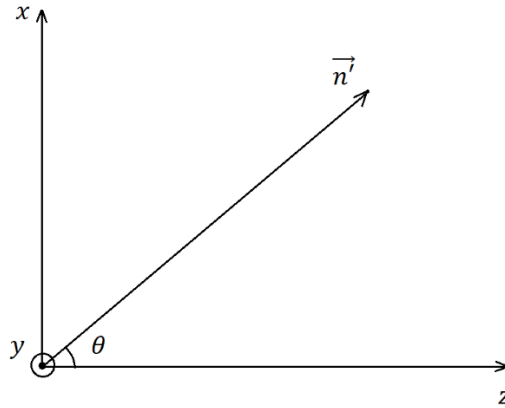


Рис. 23.2. Расположение \vec{n} в декартовых координатах

Запишем \vec{n} в сферических координатах:

$$\vec{n} \equiv \vec{e}_x \sin\theta \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta \sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta$$

$$[\vec{e}_x \times \vec{n}]^2 = (\vec{e}_z \sin\theta \sin\varphi - \vec{e}_y \cos\theta)^2 = \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta$$

Аналогично, если волна поляризована по y , то

$$d\sigma^{(y)} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 [\vec{e}_y \times \vec{n}]^2 d\Omega,$$

где

$$[\vec{e}_y \times \vec{n}]^2 = (-\vec{e}_z \sin\theta \cos\varphi + \vec{e}_x \cos\theta)^2 = \sin^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta$$

Если падающая волна неполяризованная, то

$$w^{(x)} = \frac{1}{2}$$

$$w^{(y)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= w^{(x)} d\sigma^{(x)} + w^{(y)} d\sigma^{(y)} = \frac{1}{2} (d\sigma^{(x)} + d\sigma^{(y)}) = \\ &= \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} [\sin^2\theta (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + 2 \cos^2\theta] d\Omega = \\ &= \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \cos^2\theta\right] d\Omega \end{aligned}$$

$$\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta\right] d\Omega = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) d\Omega$$

Здесь θ – угол рассеяния.

При этом на рассеивающую частицу со стороны электромагнитного поля действует некоторая сила, поскольку падающая волна теряет импульс. Действительно, волна теряет в единицу времени энергию

$$\int \langle dI \rangle = \sigma \langle S \rangle = \sigma \cdot \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}^2 \rangle = \sigma \cdot \langle w \rangle c,$$

где

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle \vec{E}^2 + \vec{H}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \langle \vec{E}^2 \rangle$$

Учтем, что

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{1}{4\pi c} E^2 \vec{n}$$

Поэтому потеря импульса за единицу времени будет равна (в среднем)

$$\frac{1}{c} \cdot \sigma \langle w \rangle \cdot c \cdot \vec{n} = \sigma \langle w \rangle \vec{n} = -\Delta \langle \vec{P} \rangle \frac{1}{\Delta t}$$

Поэтому средняя сила, действующая на частицу, будет равна

$$\vec{F} = \sigma \langle w \rangle \vec{n},$$

где \vec{n} указывает направление падающей волны.

Этот же результат можно получить, усредняя выражение для силы радиационного трения

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{рад}} &\approx \frac{2q^3}{3mc^3} \left(\dot{\vec{E}} + \frac{q}{mc} [\vec{E} \times \vec{H}] \right) \\ \vec{F} = \langle \vec{F}_{\text{рад}} \rangle &= \left\langle \frac{2q^3}{3mc^3} \left(\dot{\vec{E}} + \frac{q}{mc} [\vec{E} \times \vec{H}] \right) \right\rangle = \frac{2q^4}{3m^2c^4} \langle \vec{E}^2 \rangle \cdot \vec{n} \\ \frac{2q^4}{3m^2c^4} \langle \vec{E}^2 \rangle \cdot \vec{n} &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \langle w \rangle \vec{n} = 6 \langle w \rangle \vec{n} \end{aligned}$$

При высоких частотах (рентгеновский и γ -диапазоны) при рассеянии фотонов становятся существенными квантовые эффекты, и оно перестает быть томпсоновским.

Формула Клейна-Нишины

Рассеяние происходит с изменением частоты фотона (эффект Комптона) из-за того, что часть энергии фотона передается электрону. При этом угловое распределение уже не симметрично, а преимущественно вперед.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=0} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2$$

Вместо формулы Томпсона будет формула Клейна-Нишины, которая в предельных случаях дает

$$\sigma_{KN} = \left(\frac{q^2}{m_e c^2} \right)^2 \begin{cases} \frac{8\pi}{3} \left(1 - \frac{2\hbar\omega}{m_e c^2} + \dots \right), & \hbar\omega \ll m_e c^2 \\ \pi \cdot \frac{m_e c^2}{\hbar\omega} \left[\ln \left(\frac{2\hbar\omega}{m_e c^2} \right) + \frac{1}{2} \right], & \hbar\omega \gg m_e c^2 \end{cases}$$

При этом $m_e c^2 \approx 0,511$ МэВ.

Вычислим частоту ν :

$$\frac{m_e c^2}{2\pi\hbar} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}} = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ Гц}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{1,2 \cdot 10^{20} \text{ Гц}} \approx 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Мы получили частоту, лежащую в гамма-диапазоне.

Заметим теперь, что ранее приводимое условие для применимости формулы для силы радиационного трения

$$\lambda \gg \frac{q^2}{m_e c^2}$$

можно переписать в виде

$$\frac{2\pi c}{\omega} \gg \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{\alpha \hbar c}{m_e c^2}$$

Что равносильно

$$\hbar\omega \ll \frac{2\pi}{\alpha} m_e c^2 \approx 860 m_e c^2$$

Поэтому квантовые эффекты в электродинамике существенны когда

$$\hbar\omega \geq m_e c^2$$

Лекция 24. Рассеяние на изотропном гармоническом осцилляторе. Цвет неба

Задача рассеяния электромагнитных волн

На прошлой лекции мы ставили перед собой следующую задачу: волна падает на некий рассеиватель, являющийся системой зарядов. Заряды начинают двигаться и излучать во все стороны – происходит рассеяние электромагнитной волны (рис. 24.1).

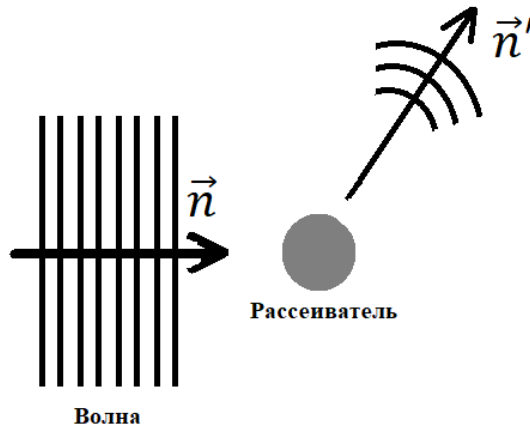


Рис. 24.1. Рассеяние электромагнитной волны

По аналогии с механикой можно определить сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{\langle S \rangle}$$

Здесь скобки означают усреднение по времени, а S – модуль вектора Умова-Пойтинга.

Размерность сечения рассеяния:

$$[d\sigma] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{с}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}} = \text{м}^2$$

На прошлой лекции мы рассматривали рассеяние волны на свободном заряде. В этом случае было получено выражение для сечения рассеяния (формула Томпсона):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2$$

$$\sigma \approx 6,6 \cdot 10^{-29} \text{ м}^2$$

Теперь рассмотрим случай, когда заряд не является свободным. В качестве модели рассмотрим изотропный гармонический осциллятор (с учетом торможения излучением), на который падает плоская волна. Тогда

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} + q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]\right) + \overrightarrow{F}_{\text{рад.трения}},$$

где

$$\vec{E} = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}\} \approx \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{рад}} = \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}}$$

Тогда движение заряда примет вид

$$\ddot{\vec{r}} - \frac{2q^2}{3mc^3}\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\text{Re}(\vec{E}_0 e^{-i\omega t})$$

Его решение можно искать в виде

$$\vec{r} = \text{Re}(\vec{A}e^{-i\omega t}),$$

где комплексная амплитуда \vec{A} удовлетворяет уравнению

$$\left(-\omega^2 - i\frac{2q^2}{3mc^3}\omega^3 + \omega_0^2\right)\vec{A} = \frac{q}{m}\vec{E}_0$$

Положим

$$\gamma \equiv \frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

Тогда амплитуда может быть записана в виде

$$\vec{A} = \frac{q\vec{E}_0}{m\left(-\omega^2 - i\gamma\frac{\omega^3}{\omega_0} + \omega_0^2\right)}$$

Далее мы увидим, что γ – очень малая величина, а сила радиационного трения не может быть велика, так что большие частоты исключаются. Поэтому слагаемое с γ существенно только при $\omega \approx \omega_0$, так что приближенно

$$\vec{r} \approx \text{Re}\left\{\frac{q\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega_0)}\right\}$$

Сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{1}{\frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}^2 \rangle} \cdot \frac{q^2}{4\pi c^3} \langle \vec{a}_\perp^2 \rangle d\Omega = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 d\Omega \cdot \frac{1}{|\vec{E}_0|^2} \frac{\omega^4 |\vec{E}_{0\perp}|^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2]}$$

При этом

$$\int d\Omega = |\vec{E}_{0\perp}|^2 = \int d\Omega |\vec{E}_0 - \vec{n}(\vec{n}\vec{E}_0)|^2 = \int d\Omega E_{0i} E_{0j}^* (\delta_{ij} - n_i n_j) = \frac{8\pi}{3} |\vec{E}_0|^2$$

Поэтому

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2]} = \sigma_T \frac{\omega^4}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2]}$$

где σ_T – томпсоновское сечение рассеяния (на свободных зарядах).

Рассмотрим зависимость сечения рассеяния от частоты (рис. 24.2).

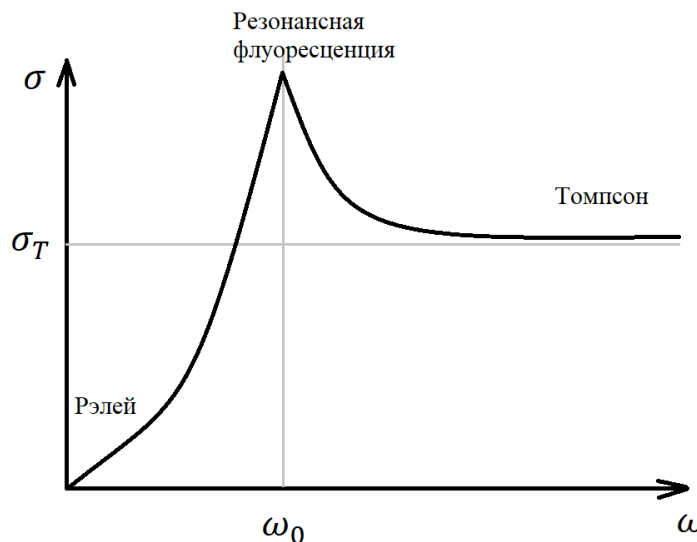


Рис. 24.2. Зависимость сечения рассеяния от частоты

Если $\omega \gg \omega_0$, то $\sigma \approx \sigma_T$ (электроны можно считать свободными).

Если $\omega \ll \omega_0$, то $\sigma \approx \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$ – рэлеевское рассеяние.

Эквивалентно (так как $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$) это можно записать в виде ($\lambda \gg \lambda_0$):

$$\sigma \approx \sigma_T \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

То есть сечение больше для коротких длин волн.

При $\omega \simeq \omega_0$ имеется резонанс – явление резонансной флуоресценции.

Приведем оценку этих величин. Для видимого (зеленого) света с $\lambda \simeq 532$ нм известно, что

$$\sigma_g \simeq 5,1 \cdot 10^{-31} \text{ м}^2 = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ барн}$$

Следовательно мы находимся в рэлеевской области. Тогда

$$5,1 \cdot 10^{-3} \text{ барн} = 0,6652 \text{ барн} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2}$$

$$0,6652 \text{ барн} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2} = 0,6652 \text{ барн} \cdot \frac{\lambda_0^4}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2}$$

Отсюда

$$\lambda_0 \approx 151 \text{ нм}$$

То есть λ_0 лежит в ультрафиолетовой области.

Оценим теперь величину γ :

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{2e^2 \omega_0^2}{3m_e c^3} = \frac{2\alpha \cdot \hbar c \cdot \omega_0}{3m_e c^3} = \frac{2\alpha \cdot \hbar \omega_0}{3m_e c^2} = \frac{4\pi\alpha \cdot \hbar}{3m_e c \cdot \lambda}$$

$$\frac{4\pi\alpha \cdot \hbar}{3m_e c \cdot \lambda} \simeq \frac{4 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{137} \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 151 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 7,8 \cdot 10^{-8}$$

Резонанс является очень узким из-за того, что радиационное трение очень мало.

Физические приложения

Рэлеевское рассеяние позволяет объяснить видимый цвет неба. Для видимого света $\lambda \gg \lambda_0$ и реализуется случай рэлеевского рассеяния (голубые лучи рассеиваются сильнее, а к фиолетовому цвету глаз намного менее чувствителен).

На закате расстояние, проходимое светов в атмосфере, существенно увеличивается. Поэтому увеличивается и количество рассеянного излучения, причем преимущественно рассеиваются фиолетовые и голубые волны. Из-за этого цвет Солнца на закате становится красным.

Попробуем описать это количественно.

Энергия, переносимая за единицу времени через единичную площадь:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$$

$$\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n}$$

При рассеянии на некотором центре за единицу времени теряется энергия $\sigma \langle S \rangle$. Поэтому при прохождении слоя толщиной Δz с N рассеивающими центрами (рис. 24.3)

$$\langle S(z) \rangle \cdot \Delta S = \langle S(z + \Delta z) \rangle \cdot \Delta S + \sigma \langle S \rangle N$$

Причем $N = n \Delta S \Delta z$, где n – концентрация рассеивающих центров.

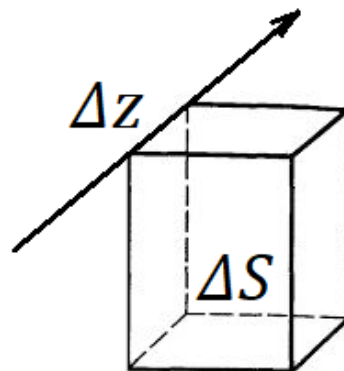


Рис. 24.3. Прохождение волной слоя Δz

Тогда

$$\langle S(z + \Delta z) \rangle - \langle S(z) \rangle = -\sigma \langle S \rangle n \Delta z$$

$$\frac{d}{dz} \langle S(z) \rangle = -\sigma \langle S(z) \rangle n(z)$$

$$\langle S \rangle = S_0 \exp \left(-\sigma \int_0^z n(z) dz \right)$$

Если $n(z) = const$, то

$$\langle S \rangle = S_0 \exp (-\sigma n z)$$

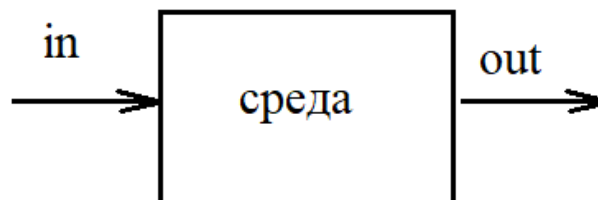


Рис. 24.4. К определению оптической глубины

Определим оптическую глубину τ формулой

$$e^{-\tau} \equiv \frac{\langle S \rangle_{out}}{\langle S \rangle_{in}}$$

τ – это безразмерная величина, показывающая во сколько раз свет ослабляется после прохождения среды.

Если $n(z) \neq const$ (как для атмосферы), то

$$\langle S_{out} \rangle = \langle S_{in} \rangle \exp \left(-\sigma \int_0^{\infty} dz n(z) \right)$$

Следовательно

$$\tau = \sigma \int_0^{\infty} dz n(z)$$

Найдем эту величину:

$$p(z) \cdot \Delta S - p(z + \Delta z) \cdot \Delta S = mg = \rho g \Delta z \Delta S$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{m}{V} g = -\frac{m_0 N}{V} g$$

$$\frac{dp}{dz} = -m_0 n g$$

$$p(z) = - \int_{\infty}^z m_0 g n(z) dz = \int_z^{\infty} m_0 g n(z) dz$$

Поэтому

$$p_0 = \int_0^{\infty} n(z) dz \cdot m_0 g$$

И оптическая глубина оказывается равной

$$\tau = \sigma \cdot \frac{p_0}{m_0 g}$$

Здесь

$$p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$$

$$g \simeq 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$$

$$m \simeq 29 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Сделаем грубую оценку:

Для $\lambda = 532 \text{ нм}$ (зеленый свет):

$$\sigma_g \simeq 53 \cdot 10^{-31} \text{ М}^2$$

Для синего света ($\lambda \simeq 480 \text{ нм}$):

$$\sigma_b \simeq 5,1 \cdot 10^{-31} \text{ М}^2 \cdot \left(\frac{532}{480}\right)^4 \simeq 7,7 \cdot 10^{-31} \text{ М}^2$$

А для красного света ($\lambda \simeq 700 \text{ нм}$)

$$\sigma_r \simeq 5,1 \cdot 10^{-31} \text{ М}^2 \cdot \left(\frac{532}{700}\right)^4 \simeq 1,7 \cdot 10^{-31} \text{ М}^2$$

Если Солнце в зените, то

$$\tau_b \simeq 0,16$$

$$\tau_r \simeq 0,034$$

Для средних широт свет проходит $\sim 1,4$ раза большее расстояние и

$$(\tau_b)_{\text{полдень}} \simeq 0,21$$

$$(\tau_r)_{\text{полдень}} \simeq 4,8 \cdot 10^{-2}$$

$$(\tau_b)_{\text{закат}} \simeq 2,1$$

$$(\tau_r)_{\text{закат}} \simeq 0,48$$

То есть на закате примерно в 10 раз больше.

Свет ослабляется на

$$1 - e^{-\tau} \simeq 1 - (1 - \tau) \simeq \tau$$

Лекция 25. Инвариантность уравнений Максвелла относительно группы вращений

Инвариантность уравнений Максвелла относительно пространственных вращений

Уравнения Максвелла, записанные в виде

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases},$$

явно инвариантны относительно пространственных вращений. Убедимся в этом.

При пространственных вращениях

$$x_i \rightarrow x'_i = A_{ij}x_j,$$

где A_{ij} – элементы матрицы поворота 3×3 .

Так как длины сохраняются, то

$$\vec{r}'^2 \equiv x'_i x'_i = \vec{r}^2 \equiv x_i x_i$$

В матричном виде

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

$$x_i x_i = \vec{r}^2 = \vec{x}'^T \vec{x}'$$

Поэтому

$$\vec{x}'^T \vec{x}' = (A\vec{x})^T (A\vec{x}) = \vec{x}^T A^T A \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x}$$

Поэтому

$$A^T A = 1_3$$

$$(A^T)_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

То есть матрица A является ортогональной.

$$\det(A^T A) = (\det A)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$

Так как повороты непрерывны, то

$$\det A = 1$$

Ортогональные матрицы с единичным определителем образуют группу $SO(3)$.

Группа – множество, на котором задана операция умножения, так что

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$2) \exists 1 \in G: \forall A \in G$$

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$$

$$3) \forall A \in G \exists A^{-1}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1$$

Докажем, что матрицы поворотов

$$A^T A = 1$$

$$\det A = 1$$

образуют группу.

Для начала нужно проверить, что множество таких матриц замкнуто относительно операции умножения:

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = 1$$

$$\det AB = \det A \det B = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$$

$$A^{-1T} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = 1$$

Если элементы группы зависят от какого-то числа параметров, то это – группа Ли.

При пространственных поворотах

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x'_j} = A_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

Умножим это слева на A_{ki} . Тогда

$$A_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} = A_{ki} A_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j} = (AA^T)_{kj} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_k}$$

Итого получаем, что

$$A_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x'_k}$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_i} = A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ — вектор}$$

Мы получили тензорный закон преобразования. В общем случае

$$T_{i_1 \dots i_k} \rightarrow A_{i_j} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k}(x)$$

$$A_{i_j} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k}(x) = T'_{i_1 \dots i_k}(x')$$

При этом если два индекса свернуты, то они не участвуют:

$$T_{mmi_3 \dots i_k} \rightarrow A_{mj_1} A_{mj_2} \dots A_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k}$$

$$A_{mj_1} A_{mj_2} \dots A_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k} = \delta_{j_1, 2} A_{i_3 j_3} \dots A_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k}$$

$$\delta_{j_1, 2} A_{i_3 j_3} \dots A_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k} = A_{i_3 j_3} \dots A_{i_k j_k} T_{mmj_3 \dots j_k}$$

Если все индексы свернуты, то получается скаляр, который при поворотах не меняется.

Частный случай (уравнения Максвелла, содержащие операцию дивергенции)

Уравнения Максвелла

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{div} \vec{H} \\ 4\pi\rho = \operatorname{div} \vec{E} \end{cases}$$

можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial x_i} H_i$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x_i} E_i$$

При пространственных вращениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_i(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_i} H'_i(x') = A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ik} H_k(x)) = [A \neq A(x)] = \underbrace{A_{ij} A_{ik}}_{\delta_{jk}} \frac{\partial}{\partial x_j} H_k(x)$$

$$\delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} H_k(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} H_j(x)$$

Эта величина остается неизменной:

$$\rho(x) \rightarrow \rho'(x') = \rho(x)$$

Следовательно оба уравнения Максвелла, содержащие дивергенции оказываются инвариантными относительно пространственных вращений.

Частный случай (уравнения Максвелла, содержащие операцию ротор)

Рассмотрим теперь уравнения Максвелла, содержащие операцию *rot*:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{rot} \vec{E} = [\vec{\nabla} \times \vec{E}]$$

или эквивалентно

$$(\text{rot} \vec{E})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} E_k$$

При этом ε_{ijk} является так называемым инвариантным тензором (по отношению к группе SO(3)):

$$\varepsilon_{ijk} \rightarrow A_{im} A_{jn} A_{kp} \varepsilon_{mnp} = \det A \cdot \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{E})_i &\rightarrow A_{im} A_{jn} A_{kp} \varepsilon_{mnp} \cdot A_{jr} A_{ks} \frac{\partial}{\partial x_r} E_s = A_{im} \delta_{nr} \delta_{ps} \varepsilon_{mnp} \frac{\partial}{\partial x_r} E_s = A_{im} \varepsilon_{mnp} \frac{\partial}{\partial x_n} E_p = \\ &= A_{im} \varepsilon_{mjk} \frac{\partial}{\partial x_j} E_k \end{aligned}$$

Это вектор как и любое векторное произведение. Поэтому при пространственных вращениях

$$(\text{rot} \vec{E})_i \rightarrow A_{im} (\text{rot} \vec{E})_m$$

$$A_{im} (\text{rot} \vec{E})_m = (\text{rot} \vec{E}')_i$$

С другой стороны

$$(\text{rot}\vec{E})_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_i}{\partial t} \rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A_{im} H_m) = A_{im} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial H_m}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_i}{\partial t}$$

Поэтому если это уравнение было верно исходно, то оно остается верным и после поворота.

Аналогичным образом,

$$(\text{rot}\vec{H})_i \rightarrow A_{im} (\text{rot}\vec{H})_m = (\text{rot}\vec{H}')_i$$

$$\frac{4\pi}{c} j_i \rightarrow A_{im} \frac{4\pi}{c} j_m = \frac{4\pi}{c} j'_i$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t} \rightarrow A_{im} \frac{1}{c} \frac{\partial E_m}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial E'_i}{\partial t}$$

Поэтому

$$(\text{rot}\vec{H}')_i = A_{im} (\text{rot}\vec{H})_m = A_{im} \left[\frac{4\pi}{c} j_m + \frac{1}{c} \frac{\partial E_m}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} j'_i + \frac{1}{c} \frac{\partial E'_i}{\partial t}$$

Это уравнение также инвариантно.

Причина явной (очевидной) инвариантности – использование тензорных обозначений. Из них сразу видны законы преобразования всех величин при пространственных вариациях.

Уравнения электродинамики в четырехмерном виде

Симметрия уравнений Максвелла шире, чем симметрия относительно группы вращений $SO(3)$. На самом деле оказывается, что время и пространственные координаты входят в них симметрично. Попробуем в этом убедиться.

Вначале вспомним, что можно ввести потенциалы электромагнитного поля. Решение уравнений Максвелла без источника

$$\begin{cases} \text{div}\vec{H} = 0 \\ \text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

дается в виде

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot}\vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \end{cases}$$

Эти потенциалы определены с точностью до калибровочного преобразования

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \\ \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \end{cases}$$

Здесь $\alpha = \alpha(t, \vec{r})$ – произвольная функция координат и времени.

Эти формулы очень похожи. Поэтому можно рассмотреть пространство Минковского с координатами

$$(ct, \vec{r}) \equiv x^\mu$$

Важно! С этого момента верхние и нижние индексы различаются.

$$\mu = 0, 1, 2, 3,$$

$$x^0 = ct; x^1 = x; x^2 = y; x^3 = z$$

Если при каких-то преобразованиях

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu$$

$$x'^\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

где Λ^μ_ν – матрица 4×4 , то

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Умножая на матрицу $(\Lambda^{-1})^\mu_\alpha$, получаем

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^0_\mu (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \delta^\nu_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}$$

Другими словами,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Мы получили уже другой закон преобразования.

Верхние индексы – контравариантные.

Нижние индексы – ковариантные.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \vec{\nabla} \alpha \right) \equiv \partial_\mu \alpha - \text{ковариантный вектор}$$

Поэтому φ и \vec{A} можно соединить в ковариантный вектор

$$A_\mu \equiv (\varphi, -\vec{A})$$

и записать калибровочные преобразования в виде

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Действительно, если $\mu = 0$, то

$$\varphi \rightarrow \varphi - \partial_0 \alpha = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \text{верно,}$$

а если $\mu = 1, 2, 3$, то

$$-\vec{A} \rightarrow -\vec{A} - \vec{\nabla} \alpha \Leftrightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha - \text{верно}$$

Оказывается, что электрические и магнитные поля можно определить так, чтобы время и пространственные координаты входили бы симметрично. Действительно, рассмотрим величину

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$$

Имеем:

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A})_i - \partial_i \varphi$$

Причем

$$(\vec{A})_i = -A_i$$

Следовательно

$$F_{0i} = \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \right]_i = E_i = -F_{i0}$$

То есть получилось электрическое поле.

Получаем:

$$F_{12} = +\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{\partial}{\partial x} (-A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (-A_x) = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -H_z$$

$$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z = H_y$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \frac{\partial}{\partial z} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_z = -H_x$$

Поскольку

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Поэтому мы получаем, что

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Мы получили тензор напряженности электромагнитного поля.

При этом при калибровочных преобразованиях

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\alpha)$$

$$\partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Лекция 26. Уравнения электродинамики в четырёхмерном виде

Симметрии уравнений Максвелла

На прошлой лекции мы ввели пространство Минковского с координатами

$$(ct, \vec{r}) \equiv x^\mu$$

Важно! С этого момента верхние и нижние индексы различаются.

$$\mu = 0, 1, 2, 3,$$

$$x^0 = ct; x^1 = x; x^2 = y; x^3 = z$$

Кроме того, мы определили

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

После этого мы заметили следующее:

$$A_\mu \equiv (\varphi, -\vec{A})$$

и записали калибровочные преобразования в виде

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Действительно, если $\mu = 0$, то

$$\varphi \rightarrow \varphi - \partial_0 \alpha = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \text{верно,}$$

а если $\mu = 1, 2, 3$, то

$$-\vec{A} \rightarrow -\vec{A} - \vec{\nabla} \alpha \Leftrightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha - \text{верно}$$

Также мы получили тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

При этом при калибровочных преобразованиях

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \alpha)$$

$$\partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Попытаемся теперь таким же образом записать уравнения Максвелла.

Начнем с уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Рассмотрим его x -компоненту:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{H})_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j_x \end{aligned}$$

Подставим сюда поля как компоненты тензора поля:

$$\frac{\partial}{\partial y} F_{21} + \frac{\partial}{\partial z} F_{31} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F_{01} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

причем $F_{11} = 0$, так что

$$-\partial_0 F_{01} + \partial_1 F_{11} + \partial_2 F_{21} + \partial_3 F_{31} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

Попробуем красиво записать это выражение. Для этого введем метрический тензор Минковского:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \eta_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

И построим величину

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \\ F^{0i} &= \eta^{00} \eta^{ij} F_{0j} = -F_{0i} \\ F^{ij} &= \eta^{ik} \eta^{jl} F_{kl} = +F_{ij} \end{aligned}$$

Получаем

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда рассматриваемое уравнение примет вид

$$\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \partial_\mu F^{\mu 1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{4\pi}{c} j_x \equiv \frac{4\pi}{c} j^1,$$

где

$$j_x = j^1$$

Домашнее задание

Задача: аналогичным образом проверить, что два других уравнения можно записать в виде

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

$$i = \overline{1,3}; j^1 = j_x; j^2 = j_y; j^3 = j_z$$

Уравнения Максвелла, содержащие источники

Рассмотрим теперь уравнение

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

Его можно записать в похожем виде

$$4\pi\rho = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} + \partial_0 F^{00}$$

$$\partial_0 F^{00} \rightarrow 0$$

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_\mu F^{\mu 0}$$

Поэтому, если определить величину

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}),$$

то уравнения Максвелла с источниками

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

можно представить в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$$

где

$$F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\gamma} F_{\alpha\beta}$$

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Попробуем сделать то же самое, но с использованием четырехмерных обозначений:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

где

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu = (\varphi, \vec{A})$$

Тогда

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Учтем, что

$$\partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu^2 - \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \vec{\nabla}^2$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \vec{\nabla}^2 \equiv \square$$

\square - оператор Д'Аламбера.

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A}$$

Напишем эти формулы в трехмерном виде:

$$\begin{cases} \square \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = 4\pi \rho \\ \square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

Также на эти уравнения должна накладываться калибровка Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0$$

Для того, чтобы уравнения Максвелла с источниками были совместными, необходимо, чтобы ток удовлетворял уравнению непрерывности. Вернемся к уравнению

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Применим к этому уравнению операцию ∂_ν :

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu$$

Очевидно, что

$$\partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\nu$$

Так как выражение

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

представляет собой свертку симметричной величины с антисимметричной, то верно

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu$$

Тогда

$$0 = \partial_\nu j^\nu$$

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho) + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}$$

Мы получили уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Уравнения Максвелла, которые не содержат источники

Уравнения Максвелла, не содержащие источники:

$$\begin{cases} \text{div} \vec{H} = 0 \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

Определим так называемый дуальный тензор поля:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ полностью антисимметричный объект, так что

$$\varepsilon^{0123} \equiv +1$$

Тогда

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0123} F_{23} + \frac{1}{2} \varepsilon^{0132} F_{32} = 1 \cdot (-H_x) = -H_x$$

$$\tilde{F}^{02} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0213} F_{13} + \frac{1}{2} \varepsilon^{0231} F_{31} = (-1)H_y = -H_y$$

$$\tilde{F}^{03} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0312} F_{12} + \frac{1}{2} \varepsilon^{0321} F_{21} = 1 \cdot (-H_x) = -H_x$$

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2} \varepsilon^{1203} F_{03} + \frac{1}{2} \varepsilon^{1230} F_{30} = E_z$$

$$\tilde{F}^{13} = \frac{1}{2} \varepsilon^{1302} F_{02} + \frac{1}{2} \varepsilon^{1320} F_{20} = -E_y$$

$$\tilde{F}^{23} = \frac{1}{2} \varepsilon^{2301} F_{01} + \frac{1}{2} \varepsilon^{2310} F_{10} = E_x$$

Итого получаем:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & -E_z & E_y \\ H_y & E_z & 0 & -E_x \\ H_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что электрическое и магнитные поля поменялись местами по сравнению с тензором

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнения Максвелла без источников запишутся в виде так называемого тождества Бьянки:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Действительно, если $\nu = 0$, то

$$0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = \partial_0 \tilde{F}^{00} + \partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{20} + \partial_3 \tilde{F}^{30} = \partial_x H_x + \partial_y H_y + \partial_z H_z$$

$$\partial_x H_x + \partial_y H_y + \partial_z H_z = \operatorname{div} \vec{H}$$

Если $\nu = 1$, то

$$0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 1} = \partial_0 \tilde{F}^{01} + \partial_1 \tilde{F}'' + \partial_2 \tilde{F}^{21} + \partial_3 \tilde{F}^{31} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-H_x) + \frac{\partial}{\partial y} (-E_z) + \frac{\partial}{\partial z} E_y =$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} - (\text{rot} \vec{E})_x$$

Получились верные уравнения Максвелла.

Заметим, что эти уравнения автоматически выполняются при введении потенциалов электромагнитного поля:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta A_\alpha$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta A_\alpha = 0$$

Заметим, что это уравнение можно эквивалентно переписать в виде

$$0 = \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha}$$

Действительно,

$$\partial_\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\nu} + \partial_\beta F_{\nu\alpha} = \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \partial_\alpha (\partial_\beta A_\mu - \partial_\mu A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu)$$

$$\partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \partial_\alpha (\partial_\beta A_\mu - \partial_\mu A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) = 0$$

Очевидна антисимметрия по всем индексам. Проведем аналогию с предыдущими обозначениями:

μ	α	β	ν	b	$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$
0	1	2	3		
0	1	3	2		
0	2	3	1		
1	2	3	0		

Основные уравнения электродинамики в 4-мерном виде

Подведем итог:

Пространство Минковского:

$$x^\mu = (ct, \vec{r})$$

4-х вектор потенциала:

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

Калибровочное преобразование:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha,$$

где

$$\partial_\mu \alpha \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$$

Калибровка Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца:

$$\begin{cases} \square \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = 4\pi \rho \\ \square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

Тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнения Максвелла с источниками:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$$

где

$$j^\nu = (c\rho, \vec{j})$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Уравнения Максвелла без источников:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

где

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$



Лекция 27. Инвариантность уравнений Максвелла относительно группы Лоренца

Максвелла относительно преобразования Лоренца Симметрии уравнений Максвелла

В прошлый раз мы рассмотрели пространство Минковского с координатами

$$(ct, \vec{r}) \equiv x^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Кроме того, мы определили

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

После этого мы заметили следующее:

$$A_\mu \equiv (\varphi, -\vec{A})$$

и записали калибровочные преобразования в виде

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Действительно, если $\mu = 0$, то

$$\varphi \rightarrow \varphi - \partial_0 \alpha$$

$$\varphi - \partial_0 \alpha = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \text{верно,}$$

а если $\mu = 1, 2, 3$, то

$$-\vec{A} \rightarrow -\vec{A} - \vec{\nabla} \alpha$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha - \text{верно}$$

Также мы получили тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Также мы получили уравнения Максвелла с источниками:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

где

$$j^\nu = (c\rho, \vec{j})$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Мы выяснили, что это удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Также мы получили запись для уравнения Максвелла без источников с помощью дуального тензора:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

где

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$\varepsilon^{0123} \equiv +1$$

Также мы получили тождество Бьянки:

$$0 = \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha}$$

Мы можем определить

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

Вспомним также калибровку Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца:

$$\begin{cases} \square \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = 4\pi\rho \\ \square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

Здесь

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \vec{\nabla}^2 \equiv \square$$

\square - оператор Д'Аламбера.

Из такой формы записи следует более широкая симметрия.

Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца

Мы работали в координатах

$$(ct, \vec{r}) \equiv x^\mu$$

Можем совершить следующее преобразование:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

Соответствующее преобразование для производной:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Пусть некоторая величина преобразуется следующим образом:

$$T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}_{\beta_1, \dots, \beta_l} \rightarrow \Lambda^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\alpha_k}_{\mu_k} (\Lambda^{-1})^{\nu_1}_{\beta_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\nu_l}_{\beta_l} T^{\mu_1, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \dots, \nu_l}$$

В общем случае будем называть это тензорным законом преобразования.

Тогда свертка величины с верхним индексом и величины с нижним суммированием:

$$V^\mu W_\mu \rightarrow \Lambda^\mu_{\alpha} V^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_{\mu} W_\beta$$

$$\Lambda^\mu_{\alpha} V^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_{\mu} W_\beta = (\Lambda^{-1} \Lambda)^\beta_{\alpha} V^\alpha W_\beta = \delta^\beta_{\alpha} V^\alpha W_\beta = V^\alpha W_\alpha = V^\mu W_\mu$$

При свертке верхнего и нижнего индексов соответствующие Λ и Λ^{-1} уходят, и число свободных индексов уменьшается на два.

Если все величины являются тензорами, то инвариантность уравнений Максвелла будет очевидна. Но там есть величина

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

которая в общем случае инвариантной не является. Если она – инвариантный тензор, тогда уравнения Максвелла также инвариантны.

Когда метрика $\eta^{\mu\nu}$ будет инвариантной?

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} = (\Lambda \eta \Lambda^T)^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

То есть матрица Λ должна удовлетворять условию ортогональности

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

Такие матрицы образуют группу $O(1,3)$ – так называемую группу Лоренца.

Действительно,

$$\det(\Lambda \eta \Lambda^T) = (\det \Lambda)^T \det \eta = \det \eta$$

Следовательно

$$\det \Lambda = \pm 1$$

Если $\Lambda_1 \eta \Lambda_1^T = \eta$ и $\Lambda_2 \eta \Lambda_2^T = \eta$, то

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \eta (\Lambda_1 \Lambda_2)^T = \Lambda_1 \Lambda_2 \eta \Lambda_2^T \Lambda_1^T = \Lambda_1 \eta \Lambda_1^T = \eta$$

То есть произведение принадлежит рассматриваемому множеству.

Очевидно, что

$$1 \cdot \eta \cdot 1^T = \eta,$$

$$\Lambda^{-1} \eta (\Lambda^{-1})^T = (\Lambda^T \eta \Lambda)^{-1},$$

причем

$$\eta \Lambda^T \eta = 1,$$

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta,$$

так что

$$1 = \Lambda^{-1} \Lambda = \eta \Lambda^T \eta \Lambda,$$

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda,$$

поэтому

$$\Lambda^{-1} \eta (\Lambda^{-1})^T = (\Lambda^T \eta \Lambda)^{-1} = \eta^{-1} = \eta.$$

Заметим также, что

$$1 = \eta^{00}$$

$$\eta^{00} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^0 \eta^{\alpha\beta}$$

$$\Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^0 \eta^{\alpha\beta} = (\Lambda_{\cdot 0}^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_{\cdot i}^0)^2$$

Следовательно,

$$(\Lambda_{\cdot 0}^0)^2 \geq 1$$

С помощью метрики $\eta^{\mu\nu}$ можно поднимать и опускать индексы:

$$A^{\mu} \equiv \eta^{\mu\nu} A_{\nu}$$

$$A_{\nu} \equiv \eta_{\nu\mu} A^{\mu}$$

Тогда, если

$$A_{\mu} = (\varphi, -\vec{A}),$$

то

$$A^{\mu} = (\varphi, +\vec{A})$$

При этом заметим, что

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\cdot\mu} = (\eta \Lambda^{\top} \eta)^{\nu}_{\cdot\mu} = \eta^{\nu\alpha} (\Lambda^{\top})^{\beta}_{\alpha} \eta_{\beta\mu} = \eta^{\nu\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\beta} \eta_{\beta\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu}.$$

Калибровочное преобразование:

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \partial_{\mu} \alpha,$$

где

$$\partial_{\mu} \alpha \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x^{\mu}}$$

$$A_{\mu} \rightarrow (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\cdot\mu} A_{\nu}$$

Убедимся теперь в Лоренц-инвариантности уравнений электродинамики:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta}$$

Мы получили тензор.

$$F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \rightarrow \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Lambda_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{\beta}^{\delta}\delta F_{\gamma\delta}$$

Учтем, что

$$A_{\mu}B^{\mu} = A_{\mu}B_{\nu}\eta^{\mu\nu} = A^{\mu}B_{\mu}$$

Тогда

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Lambda_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{\beta}^{\delta}\delta F_{\gamma\delta} = \Lambda^{\mu\gamma}\Lambda^{\nu\delta}\delta F_{\gamma\delta} = \Lambda_{\gamma}^{\mu}\Lambda_{\delta}^{\nu}F^{\gamma\delta}$$

Получился тензор с двумя верхними индексами. Поэтому

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\gamma}^{\mu}\Lambda_{\delta}^{\nu}\partial_{\alpha}F^{\gamma\delta}$$

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\gamma}^{\mu}\Lambda_{\delta}^{\nu}\partial_{\alpha}F^{\gamma\delta} = \underbrace{\Lambda_{\mu}^{\alpha}\eta^{\mu\nu}\Lambda_{\nu}^{\gamma}}_{\eta^{\alpha\gamma}}\Lambda_{\delta}^{\nu}\partial_{\alpha}F^{\gamma\delta} = \Lambda_{\delta}^{\nu}\delta\eta^{\alpha\gamma}\partial_{\alpha}F^{\gamma\delta} = \Lambda_{\delta}^{\nu}\partial_{\alpha}F^{\alpha\delta} = \Lambda_{\sigma}^{\nu}\partial_{\mu}F^{\mu\sigma}$$

Получили вектор с верхним индексом.

Тогда при преобразованиях Лоренца

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\sigma}^{\nu}\partial_{\mu}F^{\mu\sigma}$$

$$\frac{4\pi}{c}j^0 \rightarrow \Lambda_{\sigma}^0\frac{4\pi}{c}j^{\sigma}$$

И поэтому, если

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^{\nu}$$

то

$$\partial'_{\mu}F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\sigma}^{\nu}\partial_{\mu}F^{\mu\sigma} = \Lambda_{\sigma}^{\nu}\frac{4\pi}{c}j^{\sigma} = \frac{4\pi}{c}j'^{\nu}$$

То есть, уравнения Максвелла с источниками явно инвариантны относительно группы Лоренца.

Аналогично,

$$\partial_{\mu}F_{\alpha\beta} \rightarrow \partial'_{\mu}F'_{\alpha\beta}$$

$$\partial'_{\mu}F'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\sigma}\Lambda_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{\beta}^{\delta}\delta_{\sigma}F_{\gamma\delta}$$

Следовательно, если

$$0 = \partial_{\mu}F_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}F_{\beta\mu} + \partial_{\beta}F_{\mu\alpha}$$

то

$$0 = \Lambda_{\mu}^{\sigma} \Lambda_{\alpha}^{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} (\partial_{\sigma} F_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma} F_{\delta\sigma} + \partial_{\delta} F_{\sigma\gamma}) = \partial'_{\mu} F'_{\alpha\beta} + \partial'_{\alpha} F'_{\beta\mu} + \partial'_{\beta} F'_{\mu\alpha},$$

где

$$\partial'_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$$

То есть тождество Бьянки-Лоренца инвариантно.

Чем является ε -символ по отношению к группе Лоренца?

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} \varepsilon^{\sigma\rho\gamma\delta}$$

$$\Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} \varepsilon^{\sigma\rho\gamma\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \det\Lambda = \pm \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$$

В частности, по отношению к группе $SO(1,3)$, для которой $\det\Lambda = 1$ это – инвариантный тензор. Но если $\det\Lambda = -1$, то он меняет знак. Поэтому иногда его называют псевдотензором.

Заметим также, что

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} \varepsilon^{\sigma\rho\gamma\delta}$$

также полностью антисимметричен, но для него

$$\varepsilon_{0123} = -1$$

Также инвариантными тензорами будут метрика ($\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$) и δ -символ.

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Действительно, при преобразованиях Лоренца

$$\delta_{\nu}^{\mu} \rightarrow \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \eta_{\nu\beta} \Lambda_{\gamma}^{\beta} \eta^{\gamma\alpha} = \eta^{\alpha\gamma} (\Lambda^{\top})_{\gamma}^{\beta} \eta_{\beta\nu} \Lambda_{\alpha}^{\mu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} (\eta \Lambda^{\top} \eta)_{\nu}^{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\gamma} \Lambda_{\delta}^{\gamma} \underbrace{\eta^{\delta\alpha} \eta_{\alpha\beta}}_{\delta_{\beta}^{\delta}} \cdot \eta_{\nu\sigma} \Lambda_{\rho}^{\sigma} \eta^{\rho\beta} = \eta_{\mu\gamma} \Lambda_{\delta}^{\gamma} \eta_{\nu\sigma} \Lambda_{\rho}^{\sigma} \eta^{\rho\delta} = \eta_{\mu\gamma} \Lambda_{\delta}^{\gamma} (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\delta} = \eta_{\mu\gamma} \delta_{\nu}^{\gamma} = \\ &= \eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Лекция 28. Преобразования Лоренца

Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразования Лоренца

В прошлый раз мы рассмотрели пространство Минковского с координатами

$$(ct, \vec{r}) \equiv x^\mu$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3,$$

$$x^0 = ct;$$

$$x^1 = x;$$

$$x^2 = y;$$

$$x^3 = z$$

Кроме того, мы определили

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

После этого мы заметили следующее:

$$A_\mu \equiv (\varphi, -\vec{A})$$

и записали калибровочные преобразования в виде

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Действительно, если $\mu = 0$, то

$$\varphi \rightarrow \varphi - \partial_0 \alpha = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \text{ — верно,}$$

а если $\mu = 1, 2, 3$, то

$$-\vec{A} \rightarrow -\vec{A} - \vec{\nabla} \alpha$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha \text{ — верно}$$

Также мы получили тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Также мы получили уравнения Максвелла с источниками:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

где

$$j^\nu = (c\rho, \vec{j})$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Мы выяснили, что это удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Также мы получили запись для уравнения Максвелла без источников с помощью дуального тензора:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

где

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon^{0123} \equiv +1$$

Также мы получили тождество Бьянки:

$$0 = \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha}$$

Мы ввели следующее преобразование:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

Соответствующее преобразование для производной:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Группа Лоренца

Условие инвариантности метрики $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} = (\Lambda \eta \Lambda^T)^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

То есть матрица Λ должна удовлетворять условию ортогональности

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta$$

Такие матрицы образуют группу $O(1,3)$ – так называемую группу Лоренца.

Мы будем рассматривать группу $SO(1,3)$, для которой $\det \Lambda = 1$.

Преобразования Лоренца

Преобразования

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^m_n \end{pmatrix}$$

будут трехмерными поворотами при

$$\det A = +1,$$

так как условие

$$\eta = \Lambda \eta \Lambda^T$$

дает

$$A A^T = 1$$

$$\det A = 1$$

Но самое интересное будет если преобразовать время. Пусть для простоты y и z не преобразуются, а меняются только x и t . Тогда

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

λ – матрица 2×2 .

Условие ортогональности

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

должно дать

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda^T$$

или, эквивалентно

$$\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем λ , удовлетворяющие этому условию.

Если

$$\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

В случае, если

$$\det \lambda = ad - bc = 1$$

мы получаем, что

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$a = d$$

$$b = c$$

$$1 = ad - bc = a^2 - b^2$$

Поэтому можно взять

$$a \equiv \operatorname{ch} \xi$$

$$b \equiv -\operatorname{sh} \xi$$

Так что

$$\lambda = \begin{pmatrix} \text{ch}\xi & -\text{sh}\xi \\ -\text{sh}\xi & \text{ch}\xi \end{pmatrix}$$

Также есть вариант

$$\lambda = \begin{pmatrix} -\text{ch}\xi & -\text{sh}\xi \\ -\text{sh}\xi & -\text{ch}\xi \end{pmatrix}$$

Эти матрицы λ принадлежат к группе $SO(1,1)$.

Если же

$$\det\lambda = -1,$$

то

$$-\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Так что

$$a = -d$$

$$b = -c$$

$$-1 = ad - bc = -a^2 + b^2$$

В этом случае

$$\lambda = \begin{pmatrix} \text{ch}\xi & -\text{sh}\xi \\ +\text{sh}\xi & -\text{ch}\xi \end{pmatrix}$$

или

$$\lambda = \begin{pmatrix} -\text{ch}\xi & -\text{sh}\xi \\ +\text{sh}\xi & \text{ch}\xi \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что имеется 4 компоненты связности.

Рассмотрим преобразования

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$(ct, \vec{r}) \equiv x^\mu$$

в случае, когда

$$\lambda = \begin{pmatrix} \text{ch}\xi & -\text{sh}\xi \\ -\text{sh}\xi & \text{ch}\xi \end{pmatrix}$$

Под действием этих преобразований

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\xi & -sh\xi \\ -sh\xi & ch\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

или, эквивалентно

$$\begin{cases} t' = ch\xi \cdot t - sh\xi \cdot \frac{x}{c} \\ x' = -sh\xi \cdot ct + ch\xi \cdot x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Если ξ мало, то второе преобразование можно записать в виде

$$x' \approx -\xi \cdot ct + x + O(\xi^2)$$

Так получается, если штрихованная система (рис. 28.1) отсчета движется в направлении оси x со скоростью

$$v \approx \xi \cdot c$$

$$\Rightarrow \xi \approx v/c$$

$$\begin{cases} x = x_1 + vt \\ y = y_1 \\ z = z_1 \\ t = t_1 \end{cases}$$

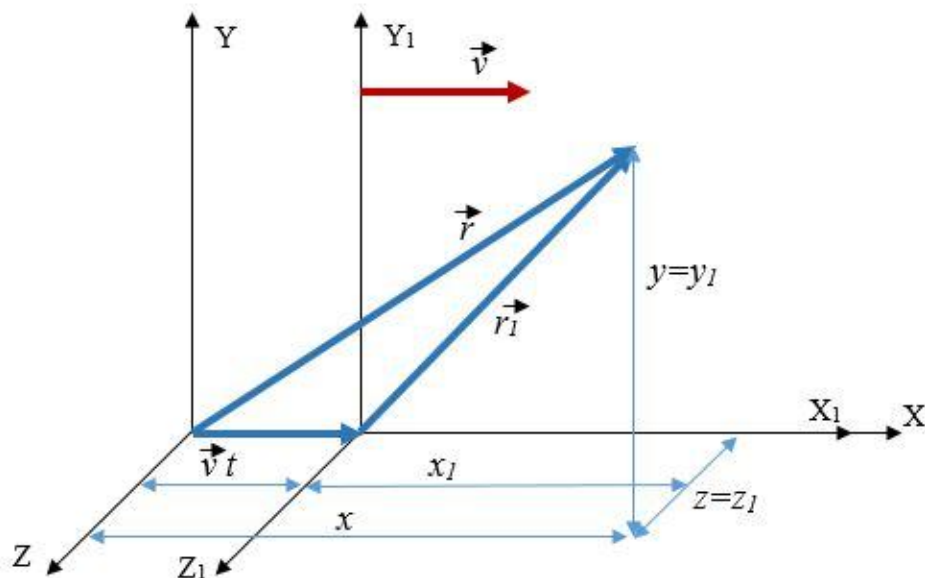


Рис. 28.1. Движение штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

Поэтому рассматриваемые преобразования соответствуют переходу от одной системы отсчета к другой.

При этом, если штрихованная система отсчета движется со скоростью v , то при $x' = const$

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

то есть

$$0 = \frac{dx'}{dt} = -\text{sh}\xi \cdot c + \text{ch}\xi \cdot \frac{dx}{dt} = -\text{sh}\xi \cdot c + \text{ch}\xi \cdot v$$

Поэтому

$$\frac{\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi} = \text{th}\xi$$

$$\text{th}\xi = \frac{v}{c}$$

Это уже не приближенная, а точная формула.

Тогда

$$\text{ch}^2\xi - \text{sh}^2\xi = 1$$

$$\frac{1}{\text{ch}^2\xi} \rightarrow 1 - \text{th}^2\xi = \frac{1}{\text{ch}^2\xi}$$

$$\text{ch}^2\xi = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\text{ch}\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

$$\text{sh}\xi = \text{th}\xi \cdot \text{ch}\xi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \beta\gamma,$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Таким образом, рассматриваемое преобразование принимает вид

$$\Lambda_{.v}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

А соответствующие преобразования координат и времени записываются в виде

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Это преобразования, соответствующие переходу в систему отсчета, движущуюся в сторону оси x со скоростью v .

В случае, если скорость не направлена по оси x , а равна

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Lambda_{.v}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v_n/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{v_m/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v_m v_n}{v^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left(\delta_{mn} - \frac{v_m v_n}{v^2} \right) \end{pmatrix}$$

Здесь

$$v_1 = v_x$$

$$v_2 = v_y$$

$$v_3 = v_z$$

Домашнее задание

Убедитесь, что матрица

$$\Lambda_{.v}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v_n/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{v_m/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v_m v_n}{v^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left(\delta_{mn} - \frac{v_m v_n}{v^2} \right) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Преобразования Лоренца (случай, когда скорость направлена произвольным образом)

В общем случае буст может быть представлен в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \frac{ct - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}' = \frac{-\vec{v}t + \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{r})}{v^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \vec{r} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{r})}{v^2} \end{array} \right.$$

Или, эквивалентно,

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}'_{\parallel} = \frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \end{array} \right.$$

Здесь

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{r}_{\parallel} \equiv \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{r})}{v^2}$$

$$\vec{r}_{\perp} \equiv \vec{r} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{r})}{v^2}$$

Найдем соответствующее обратное преобразование:

Очевидно, что

$$\vec{r}_\perp = \vec{r}'_\perp$$

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' + \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2}$$

Подставляя в формулу для \vec{r}'_\parallel , получаем

$$\vec{r}'_\parallel = \frac{\vec{r}_\parallel - \vec{v} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' + \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\vec{r}_\parallel}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \vec{v} t'$$

$$\vec{r}'_\parallel + \vec{v} t' = \vec{r}_\parallel \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\vec{r}_\parallel = \frac{\vec{r}'_\parallel + \vec{v} t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

То есть преобразование отличается заменой \vec{v} на $-\vec{v}$, как и следовало ожидать.

Аналогичным образом

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{c^2} (\vec{v}\vec{r}'_\parallel) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{c^2} \frac{(\vec{v}\vec{r}'_\parallel) + v^2 t'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' + \frac{1}{c^2} [(v\vec{r}'_\parallel) + v^2 t'] \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{\frac{(\vec{v}\vec{r}'_\parallel)}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{\frac{(\vec{v}\vec{r}'_\parallel)}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{(\vec{v}\vec{r}'_\parallel)}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Таким образом, обратное преобразование принимает вид

$$\begin{cases} t = \frac{t' + \frac{(\vec{v}\vec{r}'_{\parallel})}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}'_{\parallel} = \frac{\vec{r}'_{\parallel} + \vec{v}t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}'_{\perp} \end{cases}$$

Бесконечно малые преобразования Лоренца

При этом полная группа Лоренца содержит как бусты (соответствующие переходам в движущиеся системы отсчета), так и пространственные вращения. Ее элементы зависят от 6 параметров.

Увидеть это можно, рассматривая бесконечно малые преобразования Лоренца, для которых

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \simeq \delta^{\mu}_{\nu} + \alpha^{\mu}_{\nu},$$

где α^{μ}_{ν} – малые величины.

Тогда из инвариантности метрики получаем:

$$\eta^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \eta^{\alpha\beta}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \eta^{\alpha\beta} \simeq (\delta^{\mu}_{\alpha} + \alpha^{\mu}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + \alpha^{\nu}_{\beta})\eta^{\alpha\beta} \simeq \eta^{\mu\nu} + \alpha^{\mu}_{\alpha} \eta^{\alpha\nu} + \alpha^{\nu}_{\beta} \eta^{\mu\beta} = \eta^{\mu\nu} + \alpha^{\mu\delta} + \alpha^{\nu\mu}$$

Следовательно

$$\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$$

антисимметрично и имеет $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ независимых элементов.

Лекция 29. Специальная теория относительности Эйнштейна

Преобразования Лоренца

Ранее мы выяснили, что частным случаем преобразований Лоренца будут

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Это соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью v относительно оси x .

$$\begin{cases} x = x_1 + vt \\ y = y_1 \\ z = z_1 \\ t = t_1 \end{cases}$$

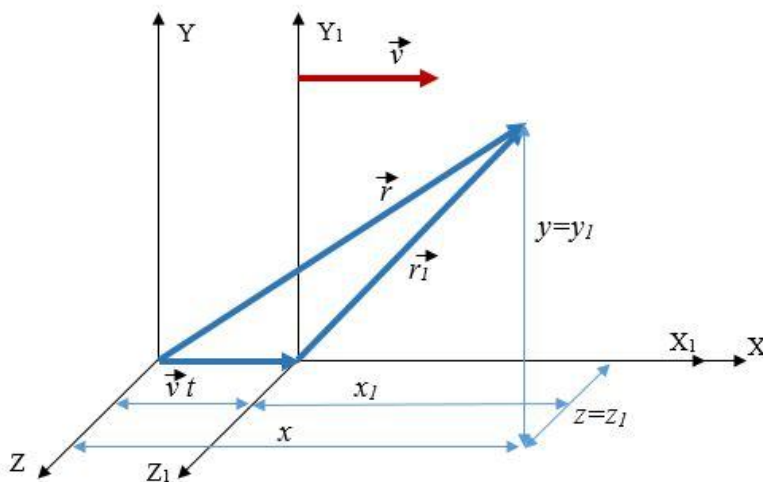


Рис. 29.1. Движение штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

Но эти преобразования отличаются от привычных преобразований Галилея

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Поэтому возникает много интересных и нетривиальных эффектов, если считать, что штрихованные величины есть время и координаты в движущейся системе отсчета.

Действительно, пусть в штрихованной системе отсчета есть покоящийся стержень длины l_0 , расположенный вдоль оси x . Тогда

$$x'_2 - x'_1 = l_0$$

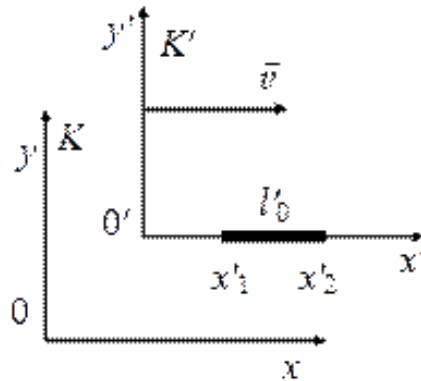


Рис. 29.2. Стержень в движущейся системе отсчета

Перейдем к неподвижной системе отсчета:

$$x'_2 - x'_1 = l_0 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Мы смотрим на стержень в один момент времени. Поэтому

$$l \equiv x_2 - x_1 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq l_0$$

То есть длина стержня уменьшается. Это называется релятивистским сокращением длин.

При этом длина сокращается только в направлении скорости. В перпендикулярных направлениях длина не меняется:

$$l_{\parallel} = l_{0\parallel} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$l_{\perp} = l_{0\perp}$$

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Здесь V_0 – собственный объем (то есть объем в такой системе отсчета, где тело покоится).

Пусть теперь в штрихованной системе отсчета есть неподвижные часы, и время, которое они показывают между событиями 1 и 2 равно

$$\Delta t_0 \equiv t'_2 - t'_1,$$

причем $x'_2 = x'_1$.

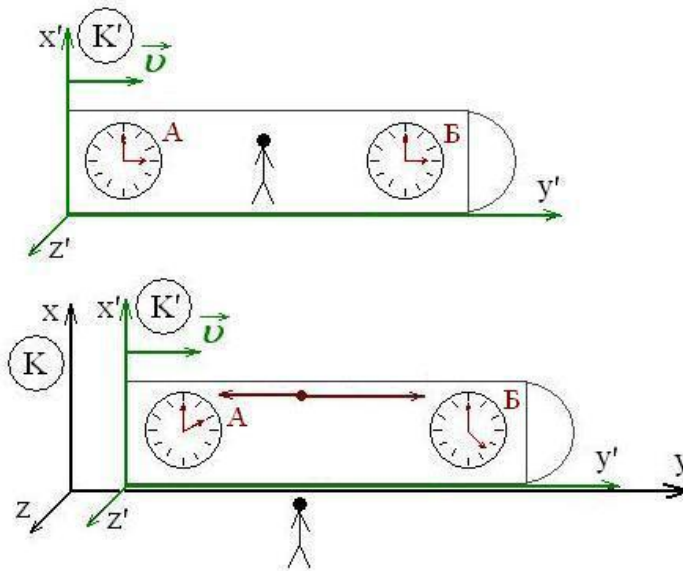


Рис. 29.3. Часы в движущейся системе отсчета

Тогда в неподвижной системе отсчета

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq \Delta t_0$$

Таким образом, промежуток времени в неподвижной системе отсчета оказывается больше. Это называется релятивистским замедлением времени.

С этим связан так называемый парадокс близнецов. Один человек летит со скоростью, близкой к скорости света, а потом возвращается. Для него $\Delta t_0 < \Delta t$, так что он будет моложе. Обратная ситуация неверна, так как первый человек не всегда находится в инерциальной системе отсчета, а второй – всегда. В момент ускорения уже будет действовать сила инерции, эквивалентная гравитации. То есть симметрии между близнецами нет.

Пример

Сокращение длин и замедление времени подтверждается следующим экспериментом. В атмосфере в космических лучах образуются мюоны. Многие из них долетают до Земли, пролетая более 20 км. Но время жизни мюона $\tau \approx 2.2 \cdot 10^{-6}$ с, так что в среднем он должен пролетать $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ с} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 600 \text{ м}$.

Это связано с тем, что мюоны движутся со скоростями, близкими к скорости света и $\Delta t_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ с, а $\Delta t \gg \Delta t_0$.

С другой стороны, мюону кажется, что надвигающаяся на него атмосфера очень тонкая.

Также нетривиальным оказывается и закон сложения скоростей в релятивистском случае. Пусть $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость в неподвижной системе отсчета, а $\vec{u}' \equiv \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ – скорость в системе отсчета, движущейся со скоростью v относительно оси x .

Преобразование скорости в релятивистском случае

Тогда в силу преобразований Лоренца

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - \frac{vdx}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

И аналогично

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Эту формулу можно эквивалентно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{u}'_{\parallel} &= \frac{\vec{u}_{\parallel} - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} \quad \vec{u}'_{\perp} = \frac{\vec{u}_{\perp} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} \\ \vec{u}' &= \frac{\vec{u}_{\parallel} - \vec{v} + \vec{u}_{\perp} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} = \frac{\vec{u}_{\parallel} - \vec{v} + (\vec{u} - \vec{u}_{\perp}) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{\vec{u} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} + \frac{(\vec{v}\vec{u})\vec{v}}{v^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} - \frac{\vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} \\ \frac{\vec{u} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} + \frac{(\vec{v}\vec{u})\vec{v}}{v^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} - \frac{\vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} &= \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}} \cdot \left[\vec{u} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \vec{v} + \frac{\vec{v}(\vec{u}\vec{v})}{v^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

При этом если $v \ll c$, то

$$\vec{u}' \simeq \vec{u} - \vec{v}$$

Вычислим теперь квадрат скорости:

$$\begin{aligned} \vec{u}'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[u^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \vec{v}^2 + \frac{(\vec{u}\vec{v})^2}{v^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 - 2\vec{u}\vec{v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(\vec{u}\vec{v})^2}{v^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) - 2(\vec{u}\vec{v}) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[u^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \vec{v}^2 + \frac{(\vec{u}\vec{v})^2}{v^2} \left(1 - 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1 - \frac{v^2}{c^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) - 2\vec{u}\vec{v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 2\vec{u}\vec{v} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \right] \\ \vec{u}'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[u^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + v^2 + \frac{(\vec{u}\vec{v})^2}{c^2} - 2\vec{u}\vec{v} \right] \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[(\vec{u} - \vec{v})^2 - \frac{[\vec{u} \times \vec{v}]^2}{c^2} \right]\end{aligned}$$

Постоянство скорости света

Положим теперь, что

$$\vec{u} = \vec{n}c$$

Тогда

$$\begin{aligned}\vec{u}'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^2} \left[c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + v^2 - 2c(\vec{n}\vec{v}) + (\vec{n}\vec{v})^2 \right] = c^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^2} \left(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^2 \\ &= c^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^2} \left(1 - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^2 = c^2\end{aligned}$$

Так что

$$\vec{u}' = c\vec{n}'$$

где

$$\vec{n}'^2 = 1$$

Это означает, что скорость света будет неизменна во всех системах отсчета. В этом можно убедиться намного легче следующим образом:

Рассмотрим квадрат интервала

$$s_{12}^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \eta_{\mu\nu}(x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$$

Эта величина, очевидно, инвариантна относительно преобразований Лоренца. Это можно проверить явно, например

$$s_{12}'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$$

$$\begin{aligned}
 & c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \\
 &= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \right]^2 \\
 &\quad - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} [x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)]^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
 &= \frac{(t_2 - t_1)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} (c^2 - v^2) - \frac{2v(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{2v(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\
 &\quad + \frac{(x_2 - x_1)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\
 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2
 \end{aligned}$$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = s_{12}^2$$

Для бесконечно близких друг к другу событий

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

Если

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = c^2,$$

то, очевидно, что

$$ds^2 = 0$$

В силу Лоренц-инвариантности интервала

$$ds'^2 = ds^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}'}{dt'}\right)^2 = c^2$$

Получилось простое доказательство неизменности скорости света.

Преобразование углов между векторами скоростей под действием преобразований Лоренца

Предположим теперь, что скорость лежит в плоскости xu , так что

$$u_x = u \cos \theta$$

$$u_y = u \sin \theta$$

$$u_z = 0$$

Тогда

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = 0$$

$$u'_x = u' \cos \theta' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{u \cos \theta - v}{1 - \frac{vu \cos \theta}{c^2}}$$

$$u'_y = u' \sin \theta' = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{u \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu \cos \theta}{c^2}}$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{u \cos \theta - v}$$

Эта формула описывает изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

В частном случае, если $v = c$, то

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c}}$$

Это отклонение света при переходе к другой системе отсчета – так называемое явление аберрации света.

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

Если $\frac{v}{c} \ll 1$, то

$$\theta' = \theta + \Delta\theta,$$

где $\Delta\theta$ – малая величина.

Следовательно

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin \theta \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\sin \theta + \cos \theta \cdot \Delta\theta \approx \sin \theta + \frac{v}{c} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

Отсюда получаем, что в нерелятивистском пределе

$$\Delta\theta \approx \frac{v}{c} \sin \theta$$

Лекция 30. Преобразования Лоренца для полей и потенциалов

Преобразования потенциалов

Зная общий вид преобразований Лоренца для тензорных величин и, в частности, для 4-х вектора потенциала

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

4-х вектора тока

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

и тензора поля

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

можно найти, как они преобразуются при бустах, то есть при переходе в движущуюся систему отсчета. В этом случае матрица преобразования Лоренца имеет вид

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

Тогда

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda_{\nu}^{\mu} A^\nu$$

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

Откуда мы получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = \gamma\varphi - \beta\gamma A_x = \frac{\varphi - \frac{vA_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A'_x = -\beta\gamma\varphi + \gamma A_x = \frac{A_x - \frac{v}{c}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \end{array} \right.$$

Эквивалентно это можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = \frac{\varphi - \vec{v}\vec{A}}{c} \\ \vec{A}'_{\parallel} = \frac{\vec{A}_{\parallel} - \frac{\vec{v}\varphi}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{A}'_{\perp} = \vec{A}_{\perp} \end{array} \right.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\parallel} &\equiv \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{A})}{v^2} \\ \vec{A}_{\perp} &= \vec{A} - \vec{A}_{\parallel} \\ \vec{A} - \vec{A}_{\parallel} &= \vec{A} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{A})}{v^2} \end{aligned}$$

Это компоненты параллельные и перпендикулярные скорости.

Преобразования тока

Аналогичным образом меняются компоненты 4-х вектора тока

$$j^{\mu} = (c\rho, \vec{j})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c\rho' = \frac{c\rho - \frac{vj_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ j'_y = j_y \\ j'_z = j_z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho' = \frac{\rho - \frac{vj}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{j}'_{\parallel} = \frac{\vec{j}_{\parallel} - \vec{v}\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{j}'_{\perp} = \vec{j}_{\perp} \end{array} \right.$$

Отсюда в нерелятивистском пределе мы, в частности, получаем

$$\vec{j}' \simeq \vec{j} - \vec{v}\rho$$

$$v \ll c$$

Преобразования электрического поля

Для нахождения законов преобразования электрического и магнитного полей удобно рассматривать тензор поля с верхними индексами

$$F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

А также учтено, что

$$F^{0i} = -F_{0i}$$

$$F^{ij} = +F_{ij}$$

При преобразованиях Лоренца

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta}$$

В частности,

$$E'_x = F'^{10}$$

$$\begin{aligned}
 F'^{10} &= \Lambda^1_\alpha \Lambda^0_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^1_0 \Lambda^0_0 F^{00} + \Lambda^1_0 \Lambda^0_1 F^{01} + \Lambda^1_1 \Lambda^0_0 F^{10} + \Lambda^1_1 \Lambda^0_1 F^{11} \\
 &= \beta^2 \gamma^2 \cdot (-E_x) + \gamma^2 E_x = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) E_x = E_x
 \end{aligned}$$

$$E'_y = F'^{20}$$

$$F'^{20} = \Lambda^2_\alpha \Lambda^0_\beta F^{\alpha\beta} = \widehat{\Lambda^2_2} (\Lambda^0_0 F^{20} + \Lambda^0_1 F^{21} + \Lambda^0_3 F^{23}) = \gamma E_y - \beta \gamma H_z = \frac{E_y - \frac{vH_z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E'_z = F'^{30}$$

$$F'^{30} = \Lambda^3_\alpha \Lambda^0_\beta F^{\alpha\beta} = \widehat{\Lambda^3_3} (\Lambda^0_0 F^{30} + \Lambda^0_1 F^{31} + \Lambda^0_2 F^{32}) = \gamma E_z - \beta \gamma (-H_y) = \frac{E_z + \frac{vH_y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Итого, получаем систему

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \frac{E_y - \frac{vH_z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E'_z = \frac{E_z + \frac{vH_y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Эти формулы можно переписать в виде

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

поскольку

$$[\vec{v} \times \vec{H}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\bar{e}_y v H_z + \bar{e}_z v H_y$$

Преобразования магнитного поля

Для магнитного поля

$$H'_x = F'^{32}$$

$$F'^{32} = \Lambda_3^3 \Lambda_2^2 F^{32} = H_x$$

$$H'_y = F'^{13}$$

$$F'^{13} = \Lambda_{0,3}^1 \Lambda_3^3 F^{03} + \Lambda_{1,3}^1 \Lambda_3^3 F^{13} = -\beta\gamma(-E_z) + \gamma H_y = \frac{H_y + \frac{vE_z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$H'_z = F'^{21}$$

$$F'^{21} = \Lambda_{2,0}^2 \Lambda_0^1 F^{20} + \Lambda_{2,1}^2 \Lambda_1^1 F^{21} = -\gamma\beta \cdot E_y + \gamma H_z = \frac{H_z - \frac{vE_y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Итого, получаем систему

$$\begin{cases} H'_x = H_x \\ H'_y = \frac{H_y + \frac{vE_z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ H'_z = \frac{H_z - \frac{vE_y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Эти формулы можно эквивалентно записать в виде

$$\begin{cases} \vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel} \\ \vec{H}'_{\perp} = \frac{\vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Инвариантность уравнений Максвелла

В качестве примера убедимся в Лоренц-инвариантности уравнений Максвелла. Действительно, предположим, что уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \bar{E} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

верны в исходной системе отсчета. Убедимся, что уравнение

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0$$

верно и в движущейся системе отсчета:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' \bar{H}' &= \frac{\partial}{\partial x'} H'_x + \frac{\partial}{\partial y'} H'_y + \frac{\partial}{\partial z'} H'_z \\ \frac{\partial}{\partial x'} H'_x + \frac{\partial}{\partial y'} H'_y + \frac{\partial}{\partial z'} H'_z &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \right) H_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_y + \frac{vE_z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H_z - \frac{vE_y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \right) H_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_y + \frac{vE_z}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H_z - \frac{vE_y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial H_z}{\partial z} \\ &\quad - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \operatorname{div} \bar{H} + \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = (\operatorname{rot} \bar{E})_x \end{aligned}$$

$$\text{rot}\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

В силу уравнения

$$\text{rot}\bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

Итого, получаем

$$\text{div}'\bar{H}' = 0$$

Таким образом, это уравнение действительно справедливо в движущейся системе отсчета, если уравнения Максвелла верны в исходной.

Заметим теперь, что из тензора поля можно построить скалярную величину

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} = -2F_{0i} + F_{ij}F_{ij} = -2\vec{E}^2 + 2\vec{H}^2$$

Это инвариант относительно преобразований Лоренца. Действительно,

$$\vec{E}'^2 - \vec{H}'^2 = \vec{E}_{\parallel}'^2 + \vec{E}_{\perp}'^2 - \vec{H}_{\parallel}'^2 - \vec{H}_{\perp}'^2$$

$$\vec{E}_{\parallel}'^2 + \vec{E}_{\perp}'^2 - \vec{H}_{\parallel}'^2 - \vec{H}_{\perp}'^2$$

$$= \vec{E}_{\parallel}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)^2 - \vec{H}_{\parallel}^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}] \right)^2$$

$$\vec{E}_{\parallel}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)^2 - \vec{H}_{\parallel}^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}] \right)^2$$

$$= \vec{E}_{\parallel}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\vec{E}_{\perp}^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}]^2 \right) - \vec{H}_{\parallel}^2$$

$$- \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\vec{H}_{\perp}^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{H}_{\perp}]^2 \right) + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{1}{c} \vec{E}_{\perp} [\vec{v}^2 \vec{H}_{\perp}]$$

$$+ \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{1}{c} \vec{H}_{\perp} [\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}]$$

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{\parallel}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp}^2 - \frac{1}{c^2} [\bar{v} \times \bar{E}_{\perp}]^2 \right) - \bar{H}_{\parallel}^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{H}_{\perp}^2 - \frac{1}{c^2} [\bar{v} \times \bar{H}_{\perp}]^2 \right) \\
 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{1}{c} \bar{E}_{\perp} [\bar{v}^2 \bar{H}_{\perp}] + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{1}{c} \bar{H}_{\perp} [\bar{v} \times \bar{E}_{\perp}] \\
 = \bar{E}_{\parallel}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp}^2 - \frac{v^2}{c^2} \bar{E}_{\perp}^2 \right) - \bar{H}_{\parallel}^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{H}_{\perp}^2 - \frac{v^2}{c^2} \bar{H}_{\perp}^2 \right) \\
 \bar{E}_{\parallel}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp}^2 - \frac{v^2}{c^2} \bar{E}_{\perp}^2 \right) - \bar{H}_{\parallel}^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{H}_{\perp}^2 - \frac{v^2}{c^2} \bar{H}_{\perp}^2 \right) = \bar{E}_{\parallel}^2 + \bar{E}_{\perp}^2 - \bar{H}_{\parallel}^2 - \bar{H}_{\perp}^2 \\
 \bar{E}_{\parallel}^2 + \bar{E}_{\perp}^2 - \bar{H}_{\parallel}^2 - \bar{H}_{\perp}^2 = \bar{E}^2 - \bar{H}^2
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть величину

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = F_{0i} \tilde{F}^{0i} + F_{i0} \tilde{F}^{i0} + F_{ij} \tilde{F}^{ij} = 2F_{0i} \tilde{F}^{0i} + F_{ij} \tilde{F}^{ij} = -2\bar{E}\bar{H} - 2\bar{E}\bar{H} = -4\bar{E}\bar{H}$$

Так как

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \bar{E}'\bar{H}' = \bar{E}_{\parallel}'\bar{H}_{\parallel}' + \bar{E}_{\perp}'\bar{H}_{\perp}' = \bar{E}_{\parallel}\bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\bar{v} \times \bar{H}_{\perp}] \right) \left(\bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\bar{v} \times \bar{E}_{\perp}] \right) \\
 \bar{E}_{\parallel}\bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\bar{v} \times \bar{H}_{\perp}] \right) \left(\bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\bar{v} \times \bar{E}_{\perp}] \right) \\
 = \bar{E}_{\parallel}\bar{H}_{\parallel} \\
 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left\{ \bar{E}_{\perp}\bar{H}_{\perp} + \frac{1}{c} [\bar{v} \times \bar{H}_{\perp}]\bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c} \bar{E}_{\perp}[\bar{v} \times \bar{E}_{\perp}] - \frac{1}{c^2} [\bar{v} \times \bar{H}_{\perp}][\bar{v} \times \bar{E}_{\perp}] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{E}_{\parallel} \bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left\{ \bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \bar{H}_{\perp}] \bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c} \bar{E}_{\perp} [\vec{v} \times \bar{E}_{\perp}] - \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \bar{H}_{\perp}] [\vec{v} \times \bar{E}_{\perp}] \right\} \\
 & = \bar{E}_{\parallel} \bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} [\bar{E}_{\perp} \times [\vec{v} \times \bar{H}_{\perp}]] \right) \\
 & \bar{E}_{\parallel} \bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} [\bar{E}_{\perp} \times [\vec{v} \times \bar{H}_{\perp}]] \right) \\
 & = \bar{E}_{\parallel} \bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c^2} v^2 \bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \bar{H}_{\perp}) (\vec{v} \bar{E}_{\perp}) \right) \\
 & \bar{E}_{\parallel} \bar{H}_{\parallel} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} - \frac{1}{c^2} v^2 \bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \bar{H}_{\perp}) (\vec{v} \bar{E}_{\perp}) \right) = \bar{E}_{\parallel} \bar{H}_{\parallel} + \bar{E}_{\perp} \bar{H}_{\perp} = \bar{E} \bar{H}
 \end{aligned}$$

Итого получаем

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sim \bar{E}^2 - \bar{H}^2$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \sim \bar{E} \bar{H}$$

$$(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 \sim (\bar{E} \bar{H})^2$$

Однако

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

не тензор, а псевдотензор и меняет знак при преобразованиях с

$$\det \Lambda = -1$$

Настоящий инвариант получается, если возвести его квадрат с использованием формулы

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\sigma\rho\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\sigma}^{\beta} \\ \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\beta} \\ \delta_{\gamma}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\alpha} & \delta_{\gamma}^{\beta} \\ \delta_{\delta}^{\mu} & \delta_{\delta}^{\nu} & \delta_{\delta}^{\alpha} & \delta_{\delta}^{\beta} \end{vmatrix}$$

После выполнения свертки получается некоторая линейная комбинация величин $(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2$ и $F_{\mu\nu} F^{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\mu}$.

На самом деле никаких других инвариантов кроме $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu} F^{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\mu}$ нет.

Преобразование частоты и волнового вектора электромагнитной волны. Эффект Доплера.

Для электромагнитной волны

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})) \\ \vec{H} = \text{Re}(\vec{H}_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})) \end{cases}$$

При этом можно ввести 4-х вектор

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

Так как

$$k_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k} \right)$$

Тогда

$$k_\mu x^\mu = \frac{\omega}{c} \cdot ct - \vec{k}\vec{r} = \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

Тогда

$$k_\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{-ik_\mu x^\mu}) \\ \vec{H} = \text{Re}(\vec{H}_0 e^{-ik_\mu x^\mu}) \end{cases}$$

Отсюда можно найти как меняется частота и волновой вектор при преобразованиях Лоренца (рис. 30.1):

$$k^\mu \rightarrow k'^\mu$$

$$k'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} k^\nu$$

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + vt \\ y = y_1 \\ z = z_1 \\ t = t_1 \end{cases}$$

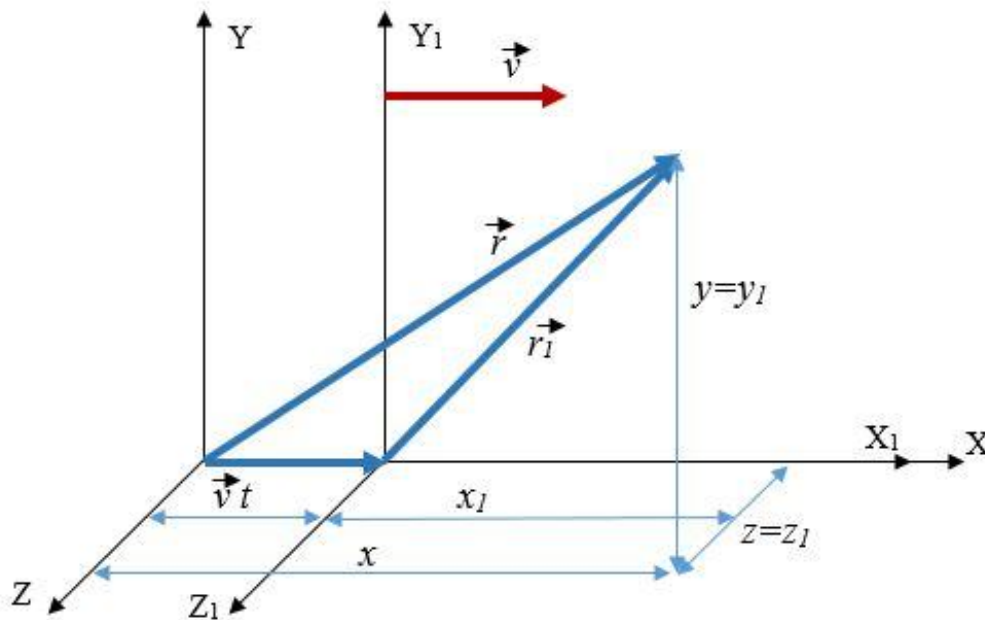


Рис. 30.1. Движение штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

Получаем

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{vk_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k'_x = \frac{k_x - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k'_y = k_y$$

$$k'_z = k_z$$

Или эквивалентно

$$\begin{cases} \omega' = \frac{\omega - (\vec{k}\vec{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{k}'_{\parallel} = \frac{\vec{k}_{\parallel} - \vec{v} \cdot \frac{\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{k}'_{\perp} = \vec{k}_{\perp} \end{cases}$$

Благодаря этим преобразованиям возникает эффект Доплера – отличие частоты, принимаемой наблюдателем, по сравнению с частотой, излучаемой движущимся источником.

Пусть источник покоится в штрихованной системе отсчета и излучает волну частоты ω_0 . Тогда в нашей системе отсчета (неподвижной):

$$\begin{cases} k_x = k \cos \theta \\ k_y = k \sin \theta \\ k_z = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\omega_0 = \frac{\omega - vk \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\omega \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Поэтому принимаемая частота будет равной

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}}$$

Если объект движется на нас, то частота увеличивается, а если от нас – то уменьшается.

Поперечный эффект доплера ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Лекция 31. Релятивистски инвариантная формулировка классической механики Преобразование частоты и волнового вектора электромагнитной волны. Эффект Доплера. (продолжение)

На прошлой лекции для электромагнитной волны

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})) \\ \vec{H} = \text{Re}(\vec{H}_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})) \end{cases}$$

мы ввели 4-х вектор

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

Тогда

$$k_\mu x^\mu = \frac{\omega}{c} \cdot ct - \vec{k}\vec{r} = \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

Тогда

$$k_\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{-ik_\mu x^\mu}) \\ \vec{H} = \text{Re}(\vec{H}_0 e^{-ik_\mu x^\mu}) \end{cases}$$

Отсюда можно найти как меняется частота и волновой вектор при преобразованиях Лоренца (рис. 31.1):

$$k^\mu \rightarrow k'^\mu$$

$$k'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} k^\nu$$

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + vt \\ y = y_1 \\ z = z_1 \\ t = t_1 \end{cases}$$

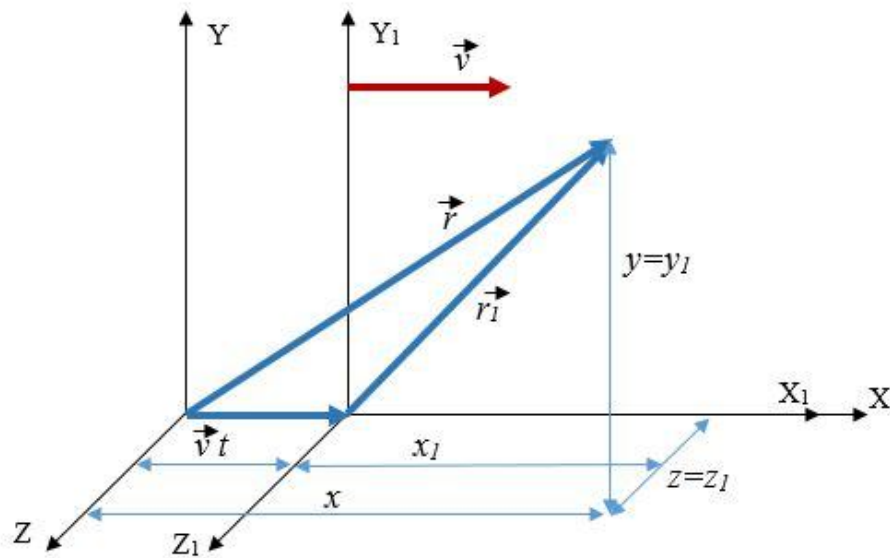


Рис. 31.1. Движение штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

Получаем

$$k'^0 = \frac{k^0 - \frac{v}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k'^1 = \frac{k^1 - \frac{v}{c} k^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k'^2 = k^2$$

$$k'^3 = k^3$$

Если вектор k лежит в плоскости xu , то можем записать

$$\begin{cases} k_x = k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta \\ k_y = k \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sin \theta \\ k_z = 0 \end{cases}$$

а вектор k' в виде

$$\begin{cases} k'_x = k' \cos \theta' = \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \\ k'_y = k' \sin \theta' = \frac{\omega'}{c} \sin \theta' \\ k'_z = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\omega'}{c} \cos \theta' = k'_x = \frac{k_x - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\omega (\cos \theta - \frac{v}{c})}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v k_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Разделив верхнее равенство на нижнее, получаем

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

Ранее в точности такая же формула была получена из закона сложения скоростей в релятивистском случае. Можно ли получить закон преобразования скорости с помощью техники пространства Минковского?

4-х векторы скорости и ускорения

4-х вектор скорости можно определить следующим образом:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$$

$$[u^\mu] = 1$$

Здесь

$$ds \equiv \sqrt{ds^2} \equiv \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{(d\vec{r})^2}{c^2}} \equiv c d\tau$$

τ – собственное время.

Напомним, что

$$s_{12}^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$$

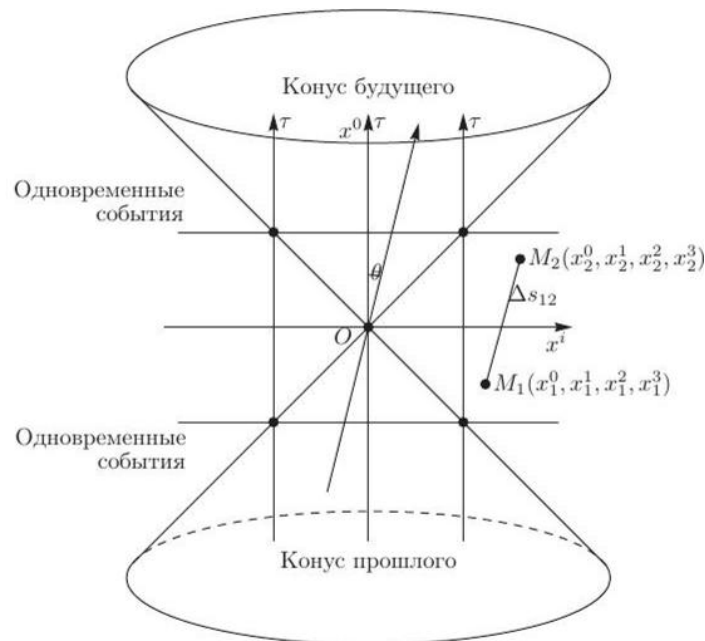


Рис. 31.2. Световой конус

Если $s_{12}^2 > 0$, то интервал называется временноподобным и можно найти систему отсчета, в которой события 1 и 2 произошли в одной точке.

Если $s_{12}^2 < 0$, то интервал называется пространственноподобным и можно найти систему отсчета, в которой события 1 и 2 произошли одновременно и в разных точках.

4-х вектор скорости связан с обычной скоростью

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

следующим образом

$$u^0 = \frac{d(ct)}{ds} = \frac{cdt}{cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v^i}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Поэтому

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

При этом

$$u^\mu u_\mu = \eta_\mu u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \cdot \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Получим отсюда формулу для преобразования скорости с помощью преобразования Лоренца.

Если в исходной системе отсчета

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \frac{\vec{u}}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

то после преобразования Лоренца

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = u'^0$$

$$u'^0 = \frac{u^0 - \frac{v}{c} u^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v u_x}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

$$\frac{u'_x}{c \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = u'^1$$

$$u'^1 = \frac{u^1 - \frac{v}{c} u^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u_x - v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = u'^2$$

$$u'^2 = u^2$$

$$u^2 = \frac{u_y}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = u'^3$$

$$u'^3 = u^3$$

$$u^3 = \frac{u_z}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Деля их друг на друга получаем, что

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}$$

Первую формулу можно переписать в виде

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

или, эквивалентно

$$\begin{aligned} u'^2 &= c^2 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} = \frac{c^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[1 - \frac{2(uv)}{c^2} + \frac{(vu)^2}{c^4} - 1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2 u^2}{c^4}\right] \\ &= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[1 - \frac{2(uv)}{c^2} + \frac{(vu)^2}{c^4} - 1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2 u^2}{c^4}\right] \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)^2} \left[(\vec{u} - \vec{v})^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{u} \times \vec{v}]^2\right] \end{aligned}$$

Аналогично 4-х вектору скорости можно определить 4-х вектор ускорения

$$w^\mu \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{d}{ds} u^\mu = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} u^\mu$$

Его размерность также отличается от обычного ускорения:

$$[w^\mu] = \text{м}^{-1}$$

$$w^\mu \equiv (w^0, \vec{w})$$

$$\begin{aligned}
 w^0 &= \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{c^2}\right) \frac{d}{dt} v^2 = \\
 &= + \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^3 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{w} &= \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\vec{v}}{c} w^0 + \frac{\vec{a}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^4 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{\vec{a}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \\
 &= \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^4 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{\vec{a}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{c^4 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} [(c^2 - v^2)\vec{a} + \vec{v}(\vec{v}\vec{a})] = \\
 &= \frac{1}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \left[\vec{a} - \frac{c^2}{c^2} \vec{a}_\perp \right] = \frac{\vec{a} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^2}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{a}_\perp \equiv \vec{a} - \frac{(\vec{v}\vec{a})\vec{v}}{v^2}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} w^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^3 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \\ \vec{w} = \frac{\vec{a} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^2}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \end{cases}$$

При этом только три независимых, так как

$$w^\mu u_\mu = \frac{du^\mu}{ds} \cdot u_\mu = \frac{du_\mu}{ds} u^\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (u^\mu u_\mu) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (1) = 0$$

Релятивистски инвариантная формулировка классической механики

Заметим, что функционал действия для релятивистской частицы в электромагнитном поле может быть записан в явно Лоренц-инвариантном виде:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} (\vec{v}\vec{A}) - \varphi q$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

Однако

$$cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = ds,$$

так что для свободной релятивистской частицы

$$S_0 = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc \int_1^2 ds$$

с точностью до множителя представляет собой длину мировой линии и является релятивистски инвариантными.

Аналогично

$$\frac{q}{c} (\vec{v}\vec{A}) - q\varphi = -qA_\mu u^\mu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

поскольку

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Поэтому

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dtL &= -mc \int_{S_1}^{S_2} ds - \frac{q}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} A_\mu u^\mu = -mc \int_{S_1}^{S_2} ds - \frac{q}{c} \int_{S_1}^{S_2} ds A_\mu u^\mu = \\ &= -mc \cdot \int_{S_1}^{S_2} ds - \frac{q}{c} \int_{S_1}^{S_2} A_\mu dx^\mu \end{aligned}$$

Вновь получается выражение, которое явно инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Уравнения движения теперь также можно вывести из принципа наименьшего действия релятивистски инвариантным образом.

Пусть

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$$

причем

$$\delta x^\mu|_{1,2} = 0$$

Тогда при варьировании действия мы получаем

$$0 = \delta S$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_1^2 \left(-mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} - \frac{q}{c} A_\mu(x) dx^\mu \right) = \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{mc}{2ds} \cdot 2\eta_{\mu\nu} d\delta x^\mu dx^\nu - \frac{q}{c} \partial_\nu A_\mu(x) \delta x^\nu dx^\mu - \frac{q}{c} A_\mu(x) d\delta x^\mu \right) = \\ &= \int_1^2 \left(-mcdx^\mu u_\mu - \frac{q}{c} \partial_\mu A_\nu(x) \delta x^\mu dx^\nu - \frac{q}{c} A_\mu(x) d\delta x^\mu \right) = \\ &= \int_1^2 \left(-mcd u_\mu \delta x^\mu - \frac{q}{c} dA_\mu(x) \delta x^\mu - \frac{q}{c} \partial_\mu A_\nu(x) \delta x^\mu dx^\nu \right) - \left(mc\delta x^\mu u_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \delta x^\mu \right) \Big|_1^2 = \\ &= \int_1^2 \left(mc \frac{du_\mu}{ds} ds \delta x^\mu + \frac{q}{c} \partial_\nu A_\mu dx^\nu \delta x^\mu - \frac{q}{c} \partial_\mu A_\nu \delta x^\mu dx^\nu \right) = \\ &= \int_1^2 ds \delta x^\mu \left(mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \right) \end{aligned}$$

В силу произвольности δx^μ мы получаем уравнение

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = + \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu = m \frac{du_\mu}{d\tau} = mcw_\mu$$

Здесь

$$F_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\frac{du_{\mu}}{ds} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right)$$

Выясним смысл полученных уравнений. При $\mu = 0$ получаем

$$mc \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{q}{c} F_{0i} u^i = \frac{q}{c} \vec{E} \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Или, эквивалентно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \vec{E} \vec{v}$$

Это закон сохранения энергии.

Ранее мы такую формулу уже получали:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{q}{c} \left(\vec{v} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) + q \frac{\partial \varphi}{\partial t} = q \frac{d\varphi}{dt} - \frac{q}{c} \left(\vec{v} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) - q \vec{v} \nabla \varphi = q \frac{d\varphi}{dt} + q(\vec{v}E)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dT}{dt} = q \vec{E} \vec{v}$$

При $\mu = 1$ получаем

$$mc \frac{du_1}{ds} = \frac{q}{c} F_{1\nu} u^{\nu}$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{c} F_{1\nu} u^\nu &= \frac{q}{c} (F_{10} u^0 + F_{12} u^2 + F_{13} u^3) - mc \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \\ &= \frac{q}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(-E_x \cdot 1 - H_z \cdot \frac{v_y}{c} + \frac{H_y v_z}{c} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \left(E_x + \frac{1}{c} v_y H_z - \frac{1}{c} v_z H_y \right) = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)_x$$

ПОСКОЛЬКУ

$$[\vec{v} \times \vec{H}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Лекция 32. 4-х вектор силы. Сила радиационного трения в четырехмерном виде

Аналог второго закона Ньютона в 4-х мерном виде

На прошлой лекции мы рассмотрели действие частицы в электромагнитном поле. Мы получили функцию Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} (\vec{v}\vec{A}) - \varphi q$$

Построили функционал действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt L = -mc \int_1^2 ds - \frac{q}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} A_\mu u^\mu,$$

где

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Далее минимизируем функционал действия

$$0 = \delta S$$

В итоге мы получили

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

При $\mu = 0$ мы получили:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \vec{E} \vec{v}$$

Это закон сохранения энергии.

При $\mu = 1, 2, 3$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)$$

Это, фактически, сила Лоренца.

В прошлый раз мы вводили 4-х вектор ускорения

$$w^\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right)$$

$$w^\mu u_\mu = 0$$

Теперь рассмотрим величину

$$p^\mu \equiv mc u^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Ее можно назвать 4-х вектором импульса. Если индекс сверху, то

$$p^\mu = \left(\frac{T}{c}, \vec{p}_{об} \right)$$

Можно легко найти как меняются энергия и импульс при преобразованиях Лоренца. При этом имеется важное соотношение

$$p^\mu p_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$$

То есть

$$\frac{T^2}{c^2} - \vec{p}_{об}^2 = m^2 c^2$$

Это соотношение между энергией и импульсом релятивистской частицы. В частности, для свободной частицы

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

Можно также ввести 4-х вектор силы

$$g^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{ds} = mc \frac{d}{ds} u^\mu = mc w^\mu$$

Тогда при $\mu = 1, 2, 3$ получим

$$\vec{g} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

В случае $\mu = 0$ получаем

$$g^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{mc}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{c^2}\right) \cdot 2\vec{v}\vec{a}$$

$$\frac{mc}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{c^2}\right) \cdot 2\vec{v}\vec{a} = \frac{m(\vec{v}\vec{a})}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

С другой стороны,

$$\vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m(\vec{v}\vec{a})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mv^2}{2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{c^2}\right) 2(\vec{v}\vec{a}) = \frac{m(\vec{v}\vec{a})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[1-\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right]$$

$$\frac{m(\vec{v}\vec{a})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[1-\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right] = \frac{m(\vec{v}\vec{a})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

Поэтому

$$g^0 = \frac{m(\vec{v}\vec{a})}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{\vec{v}}{c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\vec{v}\vec{F}}{c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Поэтому 4-х вектор силы принимает вид

$$g^\mu = \left(\frac{\vec{v}\vec{F}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Подставляя явные выражения для 4-х векторов силы и ускорения, из формулы $mcw^\mu = g^\mu$ получаем, что

$$\begin{cases} mc \frac{\bar{v}\bar{a}}{c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{\bar{v}\bar{F}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ mc \cdot \frac{1}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \left(\bar{a}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(\bar{v}\bar{a})\bar{v}}{c^2} \right) = \frac{\bar{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{m\bar{a}}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{\bar{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m\bar{v}(\bar{a}\bar{v})}{c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{\bar{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\bar{v}(\bar{F}\bar{v})}{c^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Откуда следует, что

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \left[\bar{F} - \frac{(\bar{v}\bar{F})\bar{v}}{c^2} \right]$$

То есть, если скорость начинает приближаться к скорости света, то ускорение перестает расти – скорость света оказывается недостижимой.

Сила Лоренца в 4-х мерном виде получается из

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

Тогда в 4-х мерных обозначениях сила Лоренца примет вид

$$g^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

Заметим, что

$$g^\mu u_\mu = 0$$

Это верно и в общем случае:

$$g^\mu u_\mu = \frac{\bar{v}\bar{F}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\bar{v}\bar{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

Сила радиационного трения в 4-х мерном виде

Уравнение движения для частицы, движущейся в электромагнитном поле:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F_{\text{л}}$$

$$F_{\text{л}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)$$

Это можно записать в 4-х мерном виде следующим образом:

$$mc \frac{du_{\mu}}{ds} = m \frac{du_{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^{\nu},$$

где

$$u_{\mu} = \frac{du_{\mu}}{ds}$$

В нерелятивистском случае:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}_{\text{л}} + \vec{F}_{\text{рад}}$$

Ранее мы нашли выражение для силы радиационного трения ($v \ll c$):

$$\vec{F}_{\text{рад}} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}$$

Можно предположить, что релятивистски инвариантным обобщением этого выражения будет величина

$$g_{\text{рад}}^{\mu} \rightarrow \frac{2q^2}{3c} \frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} = \frac{2q^2}{3c} \frac{d^3 x^{\mu}}{ds^3}$$

Однако, тогда

$$g_{\text{рад}}^{\mu} u_{\mu} \neq 0$$

Тем не менее, можно придумать добавку, которая приводит к выполнению этого условия и не портит предел при $v \ll c$:

$$g_{\text{рад}}^{\mu} = \frac{2q^2}{3c} \left[\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} - u^{\mu} u^{\nu} \frac{d^2 u_{\nu}}{ds^2} \right]$$

Тогда, очевидно, что

$$g_{\text{рад}}^{\mu} u_{\mu} = 0$$

поскольку

$$u^{\mu} u_{\mu} = 1$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$u^{\mu} \frac{du_{\mu}}{ds} = 0$$

Поэтому

$$g_{\text{рад}}^{\mu} = \frac{2q^2}{3c} \left[\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} + u^{\mu} \frac{du^{\nu}}{ds} \frac{du_{\nu}}{ds} - u^{\mu} \frac{d}{ds} \left(u^{\nu} \frac{du_{\nu}}{ds} \right) \right] = \frac{2q^2}{3c} \left[\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} + u^{\mu} \frac{du^{\nu}}{ds} \frac{du_{\nu}}{ds} \right]$$

Поэтому, с учетом радиационного трения

$$mc \frac{du_{\mu}}{ds} = \frac{9}{c} F_{\mu\nu} u^{\nu} + \frac{2q^2}{3c} \left[\frac{d^2 u_{\mu}}{ds^2} + u_{\mu} \frac{du^{\nu}}{ds} \frac{du_{\nu}}{ds} \right]$$

Это уравнение Абрахама-Дирака-Лоренца.

Поскольку

$$g^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{ds},$$

то потери энергии и импульса при движении частицы из-за излучения будут равны

$$\begin{aligned} \Delta p^{\mu} &= \int_1^2 ds g_{\text{рад}}^{\mu} = \int_1^2 ds \cdot \frac{2q^2}{3c} \left[\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} + u^{\mu} \frac{du^{\nu}}{ds} \frac{du_{\nu}}{ds} \right] = \\ &= + \frac{2q^2}{3c} \frac{du^{\mu}}{ds} \Big|_1^2 + \int_1^2 dx^{\mu} \frac{2q^2}{3c} \frac{du^{\nu}}{ds} \frac{du_{\nu}}{ds} \end{aligned}$$

В частности, в нерелятивистском пределе для интенсивности излучения отсюда получим

$$\langle I \rangle = - \frac{\Delta P^0 c}{\Delta t} = - \frac{\Delta P^0}{\Delta x^0} c^2 \simeq \frac{2q^2 c}{3} \left(\frac{\vec{a}}{c^3} \right)^2 = \frac{2q^2 \vec{a}^2}{3c^3}$$

Мы получили формулу Лармора.

В релятивистском случае

$$\langle I \rangle = - \frac{\Delta P^0 \cdot c}{\Delta t} = - \frac{\Delta P^0 \cdot c^2}{\Delta x^0}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\Delta P^0 \cdot c^2}{\Delta x^0} &= -\frac{2q^2 c}{3} \\
 &\cdot \left\{ \frac{(\vec{v}\vec{a})^2}{c^6 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4} \left[\vec{a}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + 2\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^4} (\vec{v}\vec{a})^2 \right] \right\} = \\
 &= -\frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{(\vec{v}\vec{a})^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} - \frac{\vec{a}^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} - \frac{2(\vec{v}\vec{a})^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \right\} = \\
 &= \frac{2q^2}{3c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \left[\vec{a}^2 - \vec{a}^2 \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\vec{v}\vec{a})^2}{c^2} \right] = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{\left(\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2 \frac{1}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}
 \end{aligned}$$

Мы получили формулу Лиенара.

Лекция 33. Лагранжева формулировка электродинамики с внешним источником Действие для электродинамики

На прошлой лекции мы рассмотрели действие частицы в электромагнитном поле. Мы получили функцию Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} (\vec{v}\vec{A}) - q\varphi$$

Построили функционал действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt L = -mc \int_1^2 ds - \frac{q}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} A_\mu u^\mu,$$

где

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Далее минимизируем функционал действия

$$0 = \delta S$$

В итоге мы получили

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

Ранее мы доказали, что действие заряженной частицы в электромагнитном поле может быть записано в виде

$$S = \int_1^2 dt L$$

$$\int_1^2 dt L = \int_1^2 dt \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} (\vec{v}\vec{A}) - q\varphi \right) = -mc \int_1^2 ds - \frac{q}{c} \int_1^2 dx^\mu A_\mu$$

Представим теперь слагаемые с зарядом следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_1^2 dt \left[\frac{q}{c} (\vec{v}\vec{A}) - q\varphi \right] &= \int_1^2 dt \left[\frac{q}{c} (\vec{r}_0\vec{A}(\vec{r}_0(t), t)) - q\varphi(\vec{r}_0(t), t) \right] = \\ &= \int_1^2 dt \int dV \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \left[\frac{q}{c} \vec{r}_0(t)\vec{A}(\vec{r}, t) - q\varphi(\vec{r}, t) \right] = \\ &= \int_1^2 dt \int dV \left[\frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)\vec{A}(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t)\varphi(\vec{r}, t) \right] \end{aligned}$$

Вспомним, что

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

$$\begin{cases} \rho(t, \vec{r}) = q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \\ \vec{j}(t, \vec{r}) = q\vec{r}_0(t)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \end{cases}$$

Поэтому рассматриваемое выражение можно представить в виде

$$-\frac{1}{c} \int_1^2 dt \int dV j^\mu A_\mu = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu A_\mu,$$

где

$$\int d^4x = \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c \int dt \int dV$$

Можно догадаться, что уравнения Максвелла также можно получить из вариационного принципа, если добавить к данному слагаемому еще величину

$$-\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

Тогда часть действия, содержащая калибровочное поле запишется в виде

$$S = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

При этом аналогом обобщенных координат будут значения 4-х вектора потенциала в точках трехмерного пространства – получается система с бесконечным числом степеней свободы.

Заметим, что, беря 4-х вектор потенциала в качестве полевой переменной, мы автоматически обеспечиваем выполнение уравнений Максвелла без источников:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$F_{\mu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

Уравнения Максвелла с источниками получаются из условия экстремума действия:

$$0 = \delta S$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^{\mu} \delta A_{\mu} - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x \cdot 2\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^{\mu} \delta A_{\mu} - \frac{1}{8\pi c} \int d^4x F^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \delta A_{\nu} - \partial_{\nu} \delta A_{\mu}) = \\ &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^{\nu} \delta A_{\nu} - \frac{1}{4\pi c} \int d^4x F^{\mu\nu} \partial_{\mu} \delta A_{\nu} = \\ &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^{\nu} \delta A_{\nu} - \frac{1}{4\pi c} \int d^4x (\partial_{\mu} (F^{\mu} \delta A_{\nu}) - \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_{\nu}) = \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \oint dS_{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_{\nu} - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^{\nu} \delta A_{\nu} + \frac{1}{4\pi c} \int d^4x \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_{\nu} \end{aligned}$$

Первое слагаемое зануляется, поскольку мы предполагаем, что на границе области интегрирования поля фиксированы, так что

$$\delta A_{\nu} = 0$$

В силу произвольности вариации δA_{ν} мы получаем, что

$$\frac{1}{4\pi c} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} j^{\nu}$$

или

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^{\nu}$$

Уравнения Лагранжа в теории поля

Электродинамика является частным случаем теории поля, для которой полевыми переменными будут

$$\varphi_i(x) \equiv \varphi_i(t, \vec{r})$$

Тогда действие может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} S &= \int dt L \\ \int dt L &\equiv \int dt \cdot c \int dV \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_{\mu} \varphi_i) = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_{\mu} \varphi_i) \end{aligned}$$

Тогда

$$0 = \delta S'$$

$$\begin{aligned} \delta S' &= S'[\varphi_i + \delta\varphi_i] - S[\varphi_i] = \int d^4x \{ \mathcal{L}(\varphi_i + \delta\varphi_i; \partial_\mu\varphi_i + \partial_\mu\delta\varphi_i) - \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i) \} \\ &= \int d^4x \{ \mathcal{L}(\varphi_i + \delta\varphi_i; \partial_\mu\varphi_i + \partial_\mu\delta\varphi_i) - \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i) \} = \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \partial_\mu\delta\varphi_i \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \delta\varphi_i \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i \right\} = \\ &= \oint S_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \delta\varphi_i - \int d^4x \delta\varphi_i \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} \right] \end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta\varphi_i$ мы получаем уравнения Лагранжа в теории поля

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}$$

Для случая электродинамики с внешним источником

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu \right\} + S_{\text{материя}}$$

А φ_i есть A_ν . Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left\{ -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} A_\alpha j^\alpha \right\} = -\frac{1}{c^2} \delta_\alpha^\nu j^\alpha = -\frac{1}{c^2} j^\nu$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left\{ -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} A_\alpha j^\alpha \right\} = -\frac{1}{8\pi c} F^{\alpha\beta} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{8\pi c} F^{\alpha\beta} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{8\pi c} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) = -\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Подставляя это в уравнения Лагранжа, получаем

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\mu \left(-\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{c^2} j^\nu$$

Отсюда вновь получаем уравнения Максвелла с источниками

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Лекция 34. Сохранение тензора энергии-импульса

Вернемся к уравнению движения для релятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

и попробуем теперь представить его в несколько ином виде.

Рассмотрим сначала правую часть, где

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

При этом для точечного заряда

$$\begin{cases} \rho = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \\ \vec{j} = q \dot{\vec{r}}_0(t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \end{cases}$$

Вспоминая, что

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

мы видим, что 4-х вектор тока для точечного заряда можно записать в виде

$$j^\mu = cq u^\mu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Чтобы увидеть, что правая часть является Лоренц-ковариантной, представим ее в виде

$$j^\mu = cq \int_s^s ds u^\mu \delta^4(x^\mu - x_0^\mu(s))$$

Здесь

$$S \equiv \int_0^s ds$$

Называется параметром мировой линии, а интегрирование начинается с некоторой фиксированной точки.

При этом очевидно, что

$$ct = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv x_0^0(s)$$

Действительно,

$$\int ds \delta \left(ct - \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\left| \frac{(-1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right|} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Благодаря чему верно, что

$$j^\mu = cq u^\mu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

При этом величина

$$\delta^4(x^\mu - x_0^\mu(s))$$

является Лоренц-инвариантной, поскольку при преобразованиях Лоренца

$$\delta^4(x^\mu - x_0^\mu(s)) \rightarrow \delta^4[\Lambda^\mu_{\nu} (x^\nu - x_0^\nu(s))]$$

$$\delta^4[\Lambda^\mu_{\nu} (x^\nu - x_0^\nu(s))] \equiv \delta^4(x'^\mu - x_0'^\mu(s))$$

Также

$$\int d^4x \delta^4[\Lambda^\mu_{\nu} \cdot (x^\nu - x_0^\nu(s))] = \int d^4x' \cdot \frac{1}{|\det\Lambda|} \delta^4(x'^\mu - x_0'^\mu(s)) = \frac{1}{|\det\Lambda|}$$

$$\frac{1}{|\det\Lambda|} = 1$$

Так как при преобразованиях Лоренца

$$|\det\Lambda| = 1$$

Поэтому величина

$$\delta^4(x^\mu - x_0^\mu(s)) \rightarrow \delta^4[\Lambda^\mu_{\nu} (x^\nu - x_0^\nu(s))]$$

Лоренц-инвариантна.

Вернемся теперь к уравнению

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

И умножим обе части на

$$c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

Тогда

$$mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{du_\mu}{ds} \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j^\nu$$

Подставим в правую часть ток из уравнения Максвелла:

$$\frac{1}{c} F_{\mu\nu} j^\nu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} \cdot \frac{c}{4\pi} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi} [\partial_\alpha (F_{\mu\nu} F^{\alpha\nu}) - \partial_\alpha F_{\mu\nu} F^{\alpha\nu}]$$

А затем воспользуемся тождеством Бьянки:

$$0 = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu}$$

Умножим его на $F^{\alpha\nu}$. Тогда

$$0 = \partial_\alpha F_{\mu\nu} F^{\alpha\nu} \cdot 2 - \partial_\mu F_{\nu\alpha} \cdot F^{\nu\alpha}$$

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} F^{\alpha\nu} = \frac{1}{4} \partial_\mu (F_{\nu\alpha} F^{\nu\alpha})$$

Поэтому

$$\frac{1}{c} F_{\mu\nu} j^\nu = \frac{1}{4\pi} \left[\partial_\alpha (F_{\mu\nu} F^{\alpha\nu}) - \frac{1}{4} \partial_\mu (F_{\nu\alpha} F^{\nu\alpha}) \right] = \partial_\nu \left[\frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right]$$

Величина

$$\Theta_{\mu\cdot}^\nu \equiv \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

называется тензором энергии-импульса электромагнитного поля.

При этом

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\cdot\alpha}^\mu F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \theta^{\nu\mu}$$

То есть это симметричный тензор, удовлетворяющий условию бесследовости:

$$\Theta_{\mu\cdot}^\mu = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4} \cdot 4 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = 0$$

Таким образом, мы получаем, что

$$mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{du_\mu}{ds} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \frac{1}{c} F_{\mu\alpha} j^\alpha = -\partial_\nu \theta_\mu^\nu$$

Попробуем теперь левую часть этого уравнения записать аналогичным образом. Построим величину

$$T^{\mu\nu} \equiv mc^2 \int ds \delta^4(x^\alpha - x_0^\alpha(s)) u^\mu u^\nu = T^{\nu\mu}$$

Явно видно, что эта величина является тензором по отношению к группе Лоренца. Как и в случае тока

$$\int ds \delta\left(ct - \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Поэтому

$$T^{\mu\nu} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^\mu u^\nu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

Рассмотрим теперь величину

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \left[mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^\mu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \right] u^\nu + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^\mu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \partial_\mu u^\nu$$

Первое слагаемое будет равно нулю, так как

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^\mu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \right] &= \partial_0 [mc^2 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))] + \vec{\nabla} \left[mc^2 \frac{v}{c} \delta^3(\vec{r}_0 - \vec{r}_0(t)) \right] = \\ &= mc(-\dot{\vec{r}}_0(t)) \vec{\nabla} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) + mc \dot{\vec{r}}_0(t) \vec{\nabla} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = 0 \end{aligned}$$

Мы получили уравнение непрерывности для плотности массы и соответствующего тока.

Поэтому

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \frac{dx^\mu}{ds} \partial_\mu u^\nu = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{du^\nu}{ds} \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

Таким образом,

$$\partial_\mu T^\mu = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{du^\nu}{ds} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu = -\partial_\mu \theta^{\mu\nu}$$

Или эквивалентно

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}) = 0$$

Выясним теперь смысл полученного равенства. Для этого вначале проинтегрируем его по показанному на рисунке 34.1 цилиндру.

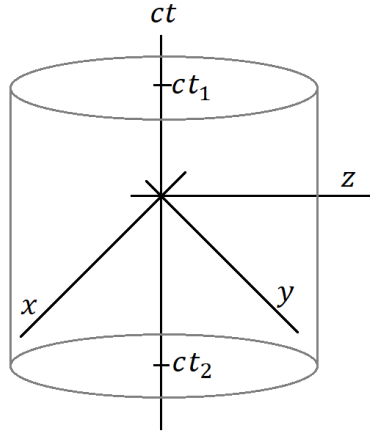


Рис. 34.1. Цилиндр, по которому производится интегрирование

Тогда получим, что

$$\int d^4x \partial_\mu (T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}) = 0$$

$$0 = \int dV T^{0\nu} + \theta^{0\nu} \Big|_{t=t_1} - \int dV (T^{0\nu} + \theta^{0\nu}) \Big|_{t=t_2} + \int_{\delta_{0k}} dS_i (T^{i\nu} + \theta^{i\nu})$$

Если при этом поля быстро убывают на пространственной бесконечности (нет излучения), то

$$\int dV (T^{0\nu} + \theta^{0\nu}) \equiv P^\nu$$

$$P^\nu = \text{const}$$

Вычислим вначале нулевые компоненты:

$$T^{00} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^0 u^0 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \frac{mc^2 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Это плотность энергии релятивистской частицы.

$$\begin{aligned}\theta^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{0\alpha} F_{\alpha}^0 + \frac{1}{4} \eta^{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{0i} F_{\cdot i}^0 + \frac{1}{4} (F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[F_{0i}^2 - \frac{1}{2} F_{0i}^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right] = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = \omega\end{aligned}$$

Это плотность энергии электромагнитного поля.

Здесь

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому в отсутствие излучения

$$\begin{aligned}\text{const} &= \int dV \left\{ \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \frac{mc^2 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} \\ \int dV \left\{ \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \frac{mc^2 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\end{aligned}$$

Это закон сохранения энергии.

Затем вычисляем пространственные компоненты:

$$T^{0i} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^0 u^i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \frac{m c v^i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Это плотность импульса релятивистской частицы, умноженная на скорость света.

$$\begin{aligned}\theta^{01} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{0\alpha} F_{\alpha}^1 + \frac{1}{4} \eta^{01} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{4\pi} (-F^{02} F'_{\cdot 2} - F^{03} F'_{\cdot 3}) = \frac{1}{4\pi} (-F_{02} F_{12} - F_{03} F_{13}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} (-E_y (-H_z) - E_z H_y) = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]_x = \frac{1}{c} S_x\end{aligned}$$

Здесь

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{E} \times \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$$

Поэтому

$$\theta^{0i} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]_i$$

Это плотность импульса электромагнитного поля, умноженная на скорость света.

Напомним, что

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

Таким образом, в отсутствие излучения

$$\text{const} = \int dV \left\{ \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{H}] + \frac{m\vec{v}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}$$

$$\int dV \left\{ \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{H}] + \frac{m\vec{v}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{4\pi c} \int dV [\vec{E} \times \vec{H}]$$

Это закон сохранения импульса.

В случае, если есть поток энергии, то получаем

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \right\} = - \oint d\vec{S} \left(\frac{mc^2 \vec{v} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \right)$$

Аналогичным образом для импульса можно написать закон сохранения с учетом излучения.

Для этого потребуются компоненты

$$T^{ij} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^i u^j \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \frac{mv^i v^j \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{aligned}
 \theta^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{i\alpha} F_{\alpha}^j + \frac{1}{4} \eta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{i0} F_0^j - F^{ik} F_k^j - \frac{1}{4} \delta^{ij} (2F_{0k} F^{0k} + F_{kl} F^{kl}) \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-F_{0i} F_{0j} + F_{ik} F_{jk} - \frac{1}{4} \delta_{ij} (-2\bar{E}^2 + 2\bar{H}^2) \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_i E_j + \varepsilon_{ikm} H_m \varepsilon_{jkn} H_n + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\bar{E}^2 - \bar{H}^2) \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_i E_j + (\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{jm}) H_m H_n + \frac{1}{2} \delta_{ij} \cdot (\bar{E}^2 - \bar{H}^2) \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-E_i E_j - H_i H_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + \bar{H}^2) \right) \equiv -\sigma_{ij}
 \end{aligned}$$

Здесь σ_{ij} – тензор напряжений Максвелла.

Тогда для импульса мы получим, что

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{4\pi c} \int dV [\bar{E} \times \bar{H}] \right\}_j &= \oint dS_i \sigma_{ij} - \oint mv_j \frac{(d\bar{S}\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \oint dS_i \left(E_i E_j + H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) \right)
 \end{aligned}$$

Таким образом законы сохранения энергии-импульса следуют из некоторого Лоренц-инвариантного равенства – закона сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu (T^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}) &= 0 \\
 0 &= \int dV \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (T^{0\partial} + \theta^{0\nu}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (T^{i\nu} + \theta^{i\nu}) \right] = \\
 &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int dV (T^{0\nu} + \theta^{0\nu}) + \int dS_i (T^{i\nu} + \theta^{i\nu})
 \end{aligned}$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ