



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. ЧАСТЬ 2

СОКОЛОВ
ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Оглавление

1	Лекция 1. Усреднение микроскопических уравнений Максвелла.	5
1.1	Детальное и статистическое описание.	5
1.2	Переход от детального описания к статистическому описанию.	5
1.3	Усреднение закона сохранения заряда.	8
1.4	Усреднение уравнений Максвелла.	11
1.5	Физический смысл вектора поляризации среды \vec{P}	13
1.6	Физический смысл вектора намагничения среды \vec{M}	15
2	Лекция 2. Материальные уравнения для полей в неподвижном веществе. .	17
2.1	Разрешимость уравнений Максвелла-Лоренца.	17
3	Лекция 3. Уравнения для потенциалов в однородном покоем веществе. Калибровочная инвариантность. Решение в виде запаздывающих потенциалов.	26
3.1	Потенциалы электромагнитного поля в веществе.	26
3.2	Калибровочная инвариантность.	29
4	Лекция 4. Граничные условия для полей в покоем кусочно-однородной среде.	33
4.1	Уравнения Максвелла-Лоренца в интегральной форме.	33
4.2	Граничные условия.	36
5	Лекция 5. Закон сохранения энергии в электродинамике покоем сред.	48
5.1	Энергия электромагнитного поля.	48
5.2	Закон изменения импульса электромагнитного поля.	50
6	Лекция 6.	54
7	Лекция 7. Силы в электростатике диэлектриков.	55
8	Лекция 8.	60
8.1	Сила, действующая на проводник во внешнем поле.	60
8.2	Энергия локальной системы проводников.	61
8.3	Энергия локальной системы проводников.	64
9	Лекция 9	68
9.1	Уравнения магнитостатики.	68
9.2	Материальные уравнения для тока.	68
9.3	Уравнение для векторного потенциала стационарных токов и его решение.	69

9.4	Условие нестационарности для линейного проводника с током.	71
10	Лекция 10.	73
10.1	Энергия магнитного поля стационарных токов.	73
10.2	Энергия системы линейных контуров с токами.	74
10.3	Магнитный поток.	76
11	Лекция 11.	78
11.1	Квазистационарное приближение.	78

Лекция 1. Усреднение микроскопических уравнений Максвелла.

Детальное и статистическое описание.

В микроскопической электродинамике (электродинамике в вакууме) используется детальное описание – плотность заряда и тока задается для каждой заряженной частицы. То есть задается динамика каждой частицы, а характеристики поля определяются на основании источников.

Достоинства такого подхода в точности и полноте. Действительно, если задать распределения зарядов и токов, и если можно проинтегрировать уравнение Максвелла, мы получим полную информацию о системе.

Недостатки данного подхода при описании электромагнитных процессов в веществе:

1. Сложность применения к системам содержащих большое число заряженных частиц. Большое число слагаемых для источников поля.
2. Трудности аналитического определения законов движения для самосогласованных систем состоящих из большого числа заряженных частиц.
3. Существенная неоднородность поля на масштабах порядка размера атома (поле будет быстро меняться при переходе от одной частицы к другой). При этом частица находится в процессе непрерывного движения, значит, поля тоже будут быстро меняться на временах порядка 10^{-14} с.
4. Избыточность описания.

Несложное рассуждение наталкивает на мысль о необходимости перехода от детального описания к статистическому.

Переход от детального описания к статистическому описанию.

Рассмотрим систему состоящую из большого числа заряженных частиц, достаточного для статистической обеспеченности результата усреднения. Изобразим данную макроскопическую систему на рис. 1.1. Граница макроскопического объема, занятого заряженными частицами, обозначена зеленым. Внутри этой системы находится вещество, содержащее заряженные частицы. Определим характерные масштабы в этой системе:

- L – макроскопический размер системы
- T – характерное время протекания электромагнитных процессов в системе

- l – характерный размер объема усреднения
- τ – время усреднения
- a – межатомное расстояние
- τ_0 – характерное время изменения микрополей

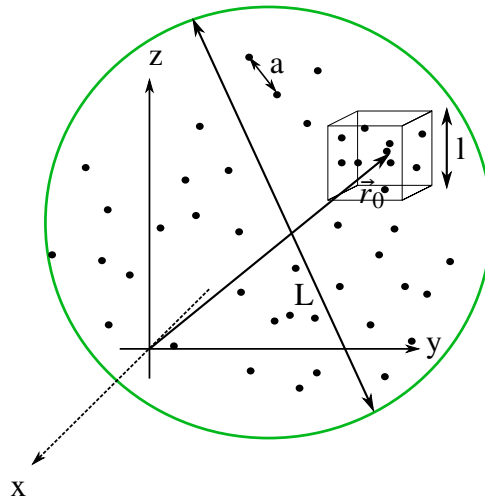


Рис. 1.1: Иллюстрация к объяснению.

Введем произвольную систему координат и обозначим некоторый объем, по которому будем производить усреднение. Проведем в центр объема радиус-вектор \vec{r}_0 . Проведем усреднение по указанному объему и введем статистически-средние описания величин. Для этого проведем усреднение какой-либо электродинамической величины по указанному объему. Получаем среднее значение величины, вычисленной по объему в точке \vec{r}_0 . Далее сдвигаем объем на величину его ребра и снова производим усреднение. В результате получаем среднее описание величины по всему макроскопическому объему.

Замечание. Характерный пространственный масштаб и время усреднения должны быть выбраны такими, чтобы после усреднения по ним исчезали все быстрые изменения полей в пространстве и времени обусловлены атомно-молекулярным строением вещества.

$$a \ll l \ll L, \quad \tau_0 < \tau < T \quad (1.1)$$

Правило усреднения. Введем обозначение $\langle f(\vec{r}_0, t_0) \rangle$ для среднего значения функции $f(\vec{r}, t)$, вычисленное по объему V с центром в точке \vec{r}_0 и усредненное по отрезку времени τ :

$$\langle f(\vec{r}_0, t_0) \rangle = \frac{1}{V} \int_V dV \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0} dt f(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

Замечание. Отметим, что в некоторых случаях при получении макроскопических уравнений усреднение по времени опускается. Отметим также, что интегрирование по времени производится от $t_0 - \tau$ до t_0 , то есть мы сдвигаемся относительно момента t_0 в прошлое. Это сделано для того, чтобы сохранить принцип причинности.

Замечание. После усреднения некорректна задача определения деталей процессов на временах меньше τ и расстояниях меньше l .

Замечание. Возможно использование *весовой функции* $w(\vec{r}, t)$ для выделения определенной части объема интегрирования по отношению к другим его частям или для выделения моментов времени на отрезке усреднения и заданию определенных направлений в пространстве. Для этого производят переопределение операции усреднения

$$\langle f(\vec{r}_0, t_0) \rangle = \frac{1}{V} \int_V dV \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0} dt f(\vec{r}, t) w(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \quad (1.3)$$

Как правило, весовую функцию выбирают так, чтобы

$$w \rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r} - \vec{r}_0| \rightarrow \infty \text{ и } |t - t_0| \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Итак, наша задача – произвести усреднение уравнений Максвелла. Это дифференциальные уравнения, поэтому возникает вопрос: можно ли менять местами операции усреднения и дифференцирования? Выполним **усреднение производной по времени**

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{V} \int_V dV \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0} dt \cdot \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_V dV \frac{[f(\vec{r}, t_0) - f(\vec{r}, t_0 - \tau)]}{\tau} \quad (1.5)$$

Здесь мы учли, что под интегралом стоит производная, то есть можно снять интегрирование по времени.

Сравним это выражение с **результатом действия производной на среднее значение:**

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \langle f(\vec{r}_0, t_0) \rangle = \frac{1}{V} \int_V dV \underbrace{\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{t_0-\tau}^{t_0} dt f(\vec{r}, t)}_{\text{зависит от } \vec{r}_0, t_0} = \frac{1}{V} \int_V dV \frac{[f(\vec{r}, t_0) - f(\vec{r}, t_0 - \tau)]}{\tau} \quad (1.6)$$

Здесь мы учли, что знак дифференцирования стоит перед интегралом с переменным верхним пределом.

Итак, **возможна перестановка операции усреднения и вычисления производных**

по координатам и времени. Выше мы показали

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t_0} \langle f \rangle \quad (1.7)$$

Аналогично можно показать, что

$$\langle grad f \rangle = grad \langle f \rangle \quad (1.8)$$

Усреднение закона сохранения заряда.

Выполним усреднение закона сохранения заряда в дифференциальной форме (детальное описание)

$$\frac{\partial \rho_{\text{полн}}}{\partial t} + div \vec{j}_{\text{полн}} = 0 \quad (1.9)$$

где

$$\rho_{\text{полн}} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}} \quad (1.10)$$

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{своб}} + \vec{j}_{\text{связ}} \quad (1.11)$$

$\rho_{\text{связ}}, \vec{j}_{\text{связ}}$ – плотность заряда и тока для зарядов связанных в составе атомов и молекул, $\rho_{\text{своб}}, \vec{j}_{\text{своб}}$ – плотность заряда и тока для свободных (сторонних) источников.

Разделение всех зарядов на свободные и связанные связано с тем, что в дальнейшем нам нужно будет работать с веществом. Какая-то часть заряженных частиц входит в состав атомов вещества, а другие частицы мы вносим в вещество извне.

Замечание. Будем считать, что переход из свободных зарядов $\rho_{\text{своб}}$ в связанные $\rho_{\text{связ}}$ невозможен.

Поскольку закон сохранения заряда применим к отдельно взятой частице (и мы не рассматриваем процессы, приводящие к переходу свободных зарядов в связанные и наоборот), то он должен выполняться отдельно для свободных и связанных зарядов:

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + div \vec{j}_{\text{своб}} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{связ}}}{\partial t} + div \vec{j}_{\text{связ}} = 0 \quad (1.13)$$

Выполним усреднение

$$\frac{\partial \langle \rho_{\text{своб}} \rangle}{\partial t} + div \langle \vec{j}_{\text{своб}} \rangle = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \langle \rho_{\text{связ}} \rangle}{\partial t} + div \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = 0 \quad (1.15)$$

Свободные заряды мы сами вносим в систему, поэтому, вообще говоря, мы знаем плотность

зарядов и плотность тока для этого типа источников. Обозначим

$$\langle \rho_{\text{своб}} \rangle := \rho, \quad \langle \vec{j}_{\text{свод}} \rangle := \vec{j} \quad (1.16)$$

(ранее эти величины обозначали полную плотность заряда и полную плотность тока в детальном описании).

Тогда закон сохранения заряда для свободных источников примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (1.17)$$

Рассмотрим случай связанных источников. Нам неизвестно, как распределены в каждый момент времени заряженные частицы в составе атомов вещества. Однако мы должны обеспечить закон сохранения заряда для этих источников. Значит, нам нужно подобрать величины, при которых равенство будет выполняться тождественно. Отметим, что второе слагаемое в (1.15) имеет вид дивергенции. Приведем первое слагаемое к такому же виду. Обозначим

$$\langle \rho_{\text{связ}} \rangle = -\text{div } \vec{P} \quad (1.18)$$

где \vec{P} – *вектор поляризации среды* (пока что это произвольный неизвестный вектор). Выполнив подстановку $\langle \rho_{\text{связ}} \rangle$ в закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \langle \rho_{\text{связ}} \rangle}{\partial t} + \text{div } \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = 0 \quad (1.19)$$

получим

$$\text{div } \left\{ \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\} = 0 \quad (1.20)$$

Известно, что если дивергенция некоторого вектора равна нулю, то этот вектор можно представить в виде ротора некоторого нового вектора (c – скорость света в вакууме)

$$\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = c \cdot \text{rot } \vec{M} \quad (1.21)$$

Значит

$$\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot } \vec{M} \quad (1.22)$$

где \vec{M} – *вектор намагниченности среды*.

Итак, задача усреднения пока что не решена (нам еще не известны вектора \vec{M} и \vec{P}),

однако мы заменили неизвестные $\langle \rho_{\text{связ}} \rangle$ и $\langle j_{\text{связ}} \rangle$ на вектора \vec{M} и \vec{P} , которые сами по себе уже являются макроскопическими характеристиками, так как они описывают средние величины. При этом подобная замена обеспечивает выполнение закона сохранения для связанных источников тождественно.

Замечание.

$$\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = \underbrace{c \cdot \text{rot } \vec{M}}_{=\vec{j}_M} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{=\vec{j}_P} \quad (1.23)$$

Обозначим

$$\vec{j}_M = c \cdot \text{rot } \vec{M} = \vec{j}_M \quad (1.24)$$

– *плотность тока намагниченности.*

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.25)$$

– *плотность тока поляризации.*

Замечание: Выражения для $\langle \rho_{\text{связ}} \rangle$ и $\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle$ обращают закон сохранения заряда для связанных источников в тождество.

Замечание. Векторы \vec{P} и \vec{M} определены неоднозначно:

$$\vec{M} \rightarrow \vec{M}' = \vec{M} + \vec{\nabla} \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \quad (1.26)$$

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P}' = \vec{P} + \text{rot } \vec{Z} \quad (1.27)$$

где ψ и \vec{Z} – произвольные функции.

Произвол в определении векторов \vec{P} и \vec{M} можно дополнить следующим логическим утверждением. Указанные векторы появляются при описании электромагнитных процессов в веществе. Значит, если мы перейдём из вещества в вакуум, эти вектора должны исчезнуть. Следует потребовать, чтобы вне вещества эти векторы тождественно обращались в ноль:

$$\vec{P} \equiv 0, \quad \vec{M} \equiv 0 \quad \text{вне вещества} \quad (1.28)$$

Усреднение уравнений Максвелла.

Запишем уравнения микроскопической электродинамики и выполним их усреднение:

$$\begin{cases} \text{rot} \langle \vec{h} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{полн}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{e} \rangle \\ \text{div} \langle \vec{e} \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{полн}} \rangle \\ \text{rot} \langle \vec{e} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{h} \rangle \\ \text{div} \langle \vec{h} \rangle = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

где \vec{e} и \vec{h} – векторы микроскопической напряженности поля (векторы напряженности поля при детальном описании).

Введем обозначения для величин, которые появились после усреднения

1. $\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}$ – макроскопическая напряженность электрического поля
2. $\langle \vec{h} \rangle = \vec{B}$ – макроскопическая индукция магнитного поля
3. $\langle \rho_{\text{своб}} \rangle = \rho$ – плотность свободных зарядов
4. $\langle \vec{j}_{\text{своб}} \rangle = \vec{j}$ – плотность тока свободных зарядов
5. $\langle \rho_{\text{связ}} \rangle = -\text{div} \vec{P}$
6. $\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = c \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

Запишем уравнения электромагнитного поля с учетом новых обозначений:

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle}_{\equiv \vec{j}} + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.30)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \underbrace{\langle \rho_{\text{своб}} \rangle}_{\equiv \rho} + 4\pi \langle \rho_{\text{связ}} \rangle \quad (1.31)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.32)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.33)$$

Выполнив подстановку выражений для $\langle \rho_{\text{связ}} \rangle$ и $\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle$, получим

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \left\{ c \cdot \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.34)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho - 4\pi \cdot \text{div} \vec{P} \quad (1.35)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.36)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.37)$$

Перегруппируем слагаемые в неоднородных уравнениях (объединим слагаемые с одинаковой структурой)

$$\operatorname{rot} \left\{ \underbrace{\vec{B} - 4\pi \vec{M}}_{:=\vec{H}} \right\} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \underbrace{\vec{E} + 4\pi \vec{P}}_{:=\vec{D}} \right\} \quad (1.38)$$

$$\operatorname{div} \left\{ \underbrace{\vec{E} + 4\pi \vec{P}}_{:=\vec{D}} \right\} = 4\pi \rho \quad (1.39)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.40)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.41)$$

Определение. Будем называть **вектором электрической индукции** величину

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (1.42)$$

Будем называть **вектором макроскопической напряженности магнитного поля** величину

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad (1.43)$$

Итак, все величины, входящие в уравнения поля через макроскопические величины.

Уравнения Максвелла-Лоренца в веществе при заданных плотностях заряда ρ и тока \vec{j} свободных источников примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Физический смысл вектора поляризации среды \vec{P} .

Рассмотрим конечный объем диэлектрика, находящийся в заданном электростатическом поле (рис. 1.2).

Диэлектрик поляризуется, оболочки атомов под действием внешнего поля смещаются, в результате чего средняя плотность связанных зарядов оказывается отличной от нуля

$$\langle \rho_{\text{связ}} \rangle \neq 0 \quad (1.45)$$

Вычислим вектор электрического дипольного момента, определяющийся средней плотностью связанных зарядов

$$\vec{d} = \int_{V_{\infty}} \langle \rho_{\text{связ}} \rangle \cdot \vec{r}' dV' \quad (1.46)$$

Следует обратить внимание, что интеграл вычисляется по всему объему пространства и внутри и снаружи диэлектрика. Технически удобнее охватить диэлектрик поверхностью S_{∞} (предполагается, что мы можем отдалить эту границу от границы вещества на бесконечное расстояние) (рис. 1.2).

Посчитаем указанный интеграл. Для этого произведем следующую процедуру. Умножим скалярно обе части равенства на произвольный постоянный вектор \vec{q} :

$$(\vec{q}, \vec{d}) = \int_{V_{\infty}} \underbrace{\langle \rho_{\text{связ}} \rangle}_{=-\text{div} \vec{P}} (\vec{q}, \vec{r}') dV' = - \int_{V_{\infty}} \text{div} \vec{P} \cdot (\vec{q}, \vec{r}') dV' \quad (1.47)$$

Здесь мы внесли скалярное произведение под знак интеграла, так как вектор \vec{q} – постоянный. Распишем подынтегральное выражение отдельно

$$\underbrace{(\vec{q}, \vec{r}')}_{=\psi} \cdot \underbrace{\text{div} (\vec{P})}_{=\vec{a}} = \text{div} \left((\vec{q}, \vec{r}') \vec{P} \right) - \underbrace{(\vec{P}, \vec{\nabla} (\vec{q}, \vec{r}'))}_{=\vec{q}} = \text{div} \left((\vec{q}, \vec{r}') \vec{P} \right) - (\vec{q}, \vec{P}) \quad (1.48)$$

где учтено тождество векторной алгебры

$$\text{div} (\psi \vec{a}) = \psi \cdot \text{div} \vec{a} + (\vec{a}, \vec{\nabla} \psi) \quad (1.49)$$

А также учтено, что градиент от скалярного произведения постоянного вектора и радиус-

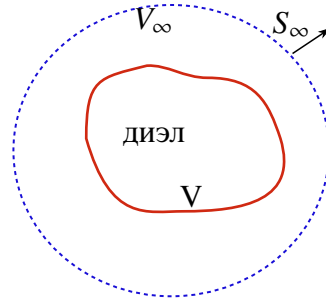


Рис. 1.2: Иллюстрация к объяснению.

вектора есть постоянный вектор:

$$\vec{\nabla}(\vec{q}, \vec{r}) = \vec{q} \quad (1.50)$$

Выполнив подстановку (1.48) в подынтегральное выражение (1.47), получим

$$(\vec{q}, \vec{d}) = - \int_{V_\infty} \text{div}((\vec{q}, \vec{r}') \cdot \vec{P}) dV' + \int_{V_\infty} (\vec{P}, \vec{q}) dV' \stackrel{\vee}{=} - \oint_{S_\infty} ((\vec{q}, \vec{r}') \cdot \vec{P}, d\vec{S}) + \left(\vec{q}, \int_{V_\infty} \vec{P} dV' \right) \quad (1.51)$$

В $\stackrel{\vee}{=}$ для интегрирования дивергенции по объему применили теорему Остроградского-Гаусса. Далее мы интегрируем по поверхности, охватывающей объем. При этом, вне вещества вектор поляризации тождественно обращается в ноль

$$\vec{P}|_{S_\infty} \equiv 0 \quad (1.52)$$

поэтому интеграл по поверхности будет равен нулю, а оставшееся выражение примет вид

$$(\vec{q}, \vec{d}) = \left(\vec{q}, \int_V \vec{P} dV' \right) \quad (1.53)$$

или

$$\left(\vec{q}, \vec{d} - \int_V \vec{P} dV' \right) = 0 \quad (1.54)$$

Равенство должно выполняться для произвольного вектора \vec{q} , поэтому второй сомножитель в скалярном произведении тождественно равен нулю:

$$\vec{d} = \int_V \vec{P} dV' \quad (1.55)$$

Воспользовавшись *теоремой о среднем значении*, представим вектор поляризации в виде

$$\vec{P} \approx \frac{\vec{d}}{V} \quad (1.56)$$

где V – объем диэлектрика.

Утверждение. Вектор \vec{P} – **объемная плотность электрического дипольного момента связанных зарядов в веществе** (электрический дипольный момент единицы объема вещества).

Физический смысл вектора намагничения среды \vec{M} .

Рассмотрим конечный объем магнетика, находящегося в постоянном магнитном поле.
Вычислим *магнитный дипольный момент токов намагничения*

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_{V_\infty} [\vec{r}', \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle] dV' \quad (1.57)$$

где средняя плотность тока намагниченности

$$\langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = c \cdot \text{rot} \vec{M} \quad (1.58)$$

Отметим, что здесь отсутствует слагаемое $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ (плотность тока поляризации), так как мы рассматриваем объем магнетика, находящегося в постоянном магнитном поле, то есть ни одна из величин не должна зависеть от времени.

Умножим скалярно обе части равенства на произвольный постоянный вектор \vec{q}

$$(\vec{q}, \vec{m}) = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} (\vec{q}, [\vec{r}', \text{rot} \vec{M}]) dV' \quad (1.59)$$

Здесь мы снова внесли постоянный вектор под знак интеграла.

Выпишем подынтегральное выражение. Воспользуемся свойством смешанного произведения векторов

$$(\vec{q}, [\vec{r}', \text{rot} \vec{M}]) = \left(\underbrace{[\vec{q}, \vec{r}']}_{=\vec{b}}, \underbrace{\text{rot} \vec{M}}_{=\vec{a}} \right) \quad (1.60)$$

Воспользуемся тождеством векторной алгебры

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \text{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot} \vec{b}) \quad (1.61)$$

с помощью которого преобразуем подынтегральное выражение

$$([\vec{q}, \vec{r}'], \text{rot} \vec{M}) = \text{div} [\vec{M}, [\vec{q}, \vec{r}']] + \left(\vec{M}, \underbrace{\text{rot} [\vec{q}, \vec{r}']}_{=2\vec{q}} \right) = \text{div} [\vec{M}, [\vec{q}, \vec{r}']] + 2(\vec{q}, \vec{M}) \quad (1.62)$$

Здесь мы воспользовались тем, что ротор векторного произведения постоянного вектора и радиус-вектора равен удвоенному постоянному вектору.

Выполнив подстановку подынтегрального выражения (1.62) в (1.60), получим

$$\begin{aligned}
 (\vec{q}, \vec{m}) &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \operatorname{div} [\vec{M}, [\vec{q}, \vec{r}']] dV' + \int_{V_\infty} (\vec{q}, \vec{M}) dV' = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \left([\vec{M}, [\vec{q}, \vec{r}']] d\vec{S} \right) + \left(\vec{q}, \int_V \vec{M} dV' \right) \quad (1.63)
 \end{aligned}$$

При этом вне вещества вектор намагниченности тождественно обращается в ноль

$$\vec{M}|_{S_\infty} \equiv 0 \quad (1.64)$$

поэтому интеграл по поверхности будет равен нулю, а оставшееся выражение примет вид

$$\left(\vec{q}, \vec{m} - \int_V \vec{M} dV' \right) = 0 \quad (1.65)$$

Равенство должно выполняться для произвольного вектора \vec{q} , поэтому второй сомножитель в скалярном произведении тождественно равен нулю

$$\vec{m} = \int_V \vec{M} dV' \quad (1.66)$$

Воспользовавшись *теоремой о среднем значении*, представим вектор намагниченности в виде

$$\vec{M} \approx \frac{\vec{m}}{V} \quad (1.67)$$

где V – объем магнетика.

Утверждение. Вектор \vec{M} – **объемная плотность магнитного дипольного момента, созданного током связанных зарядов в веществе** (магнитный дипольный момент единицы объема вещества).

Итак, мы провели усреднение микроскопических уравнений Максвелла. Получили макроскопические уравнения Максвелла-Леденца, описывающие электромагнитные процессы в веществе. Теперь нам нужно выяснить, разрешима ли данная система уравнений.

Лекция 2. Материальные уравнения для полей в неподвижном веществе.

Разрешимость уравнений Максвелла-Лоренца.

На прошлой лекции мы получили систему уравнений Максвелла-Лоренца. Теперь нужно выяснить, разрешима ли эта система. Выпишем систему уравнений Максвелла-Лоренца

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & - 3 \text{ уравнения} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho & - 1 \text{ уравнение} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & - 3 \text{ уравнения} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & - 1 \text{ уравнение} \end{cases} \quad (2.1)$$

В системе 8 уравнений для 12 неизвестных. Неизвестными считаются компоненты векторов $\{\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}\}$.

Замечание. Плотности свободных зарядов и их токов ρ и \vec{j} считаются заданными.

Итак, система уравнений Максвелла в веществе не доопределена. Это связано с тем, что ранее мы ввели две новые векторные величины – вектор поляризации и вектор намагничивания. Дополним эту систему уравнениями, учитывающими свойствами вещества – **материальные уравнения.**

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (2.2)$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \quad (2.3)$$

Векторы $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{H})$, $\vec{M} = \vec{M}(\vec{E}, \vec{H})$ не являются независимыми и *характеризуют отклик вещества на наличие внешних полей*. Поэтому в общем случае материальные уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}, \text{Ext}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}, \text{Ext}) \quad (2.4)$$

где *Ext* – некоторые параметры, которые определяют внешние условия.

Замечание.

Эти уравнения должны зависеть от:

- свойств среды
- внешних условий (*Ext*): температуры, давления и т.д.

В большинстве случаев в дальнейшем внешние условия будем считать неизменными и зависимость от них подробно рассматривать не будем.

Итак, (2.4) – **общий вид материальных уравнений**. Конкретную функциональную зависимость можно установить из эксперимента. Этими уравнениями можно дополнить уравнения Максвелла-Лоренца. Однако, хотелось бы уточнить вид связи между векторами \vec{D} , \vec{B} и векторами \vec{E} и \vec{H} в каком-то общем виде, но при этом так, чтобы полученная зависимость была пригодна для описания многих типов веществ. Для этого потребуется следующее утверждение.

Утверждение. Если \vec{E} и \vec{H} малы по сравнению с характерным атомным полем (в качестве масштаба такого поля можно выбрать отношение заряда электрона к квадрату радиуса боровской орбиты)

$$|\vec{E}_a| \sim \frac{e}{r_B^2} \sim 10^8 \text{ ед. СГС} \quad (2.5)$$

и изменяются медленно по сравнению с релаксационными процессами в веществе (например, для установления поляризации нужно конечное время; тогда мы считаем, что изменение внешнего поля происходит медленно по сравнению с временем установления поляризации), то материальные уравнения можно разложить в ряд по малому параметру (отношение модуля напряженности электрического поля к характерному атомному полю)

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}_a|} \ll 1 \quad (2.6)$$

и (отношение модуля напряженности магнитного поля к характерному атомному полю)

$$\frac{|H|}{|\vec{E}_a|} \ll 1 \quad (2.7)$$

Выполним разложение материальных уравнений, ограничившись слагаемыми, линейными по малому параметру. Тогда компонента вектора \vec{D}

$$D^\alpha = d^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta + \omega^{\alpha\beta} H_\beta + \dots \quad (2.8)$$

Аналогично компонента вектора \vec{B} представляется в виде

$$B^\alpha = b^\alpha + \mu^{\alpha\beta} H_\beta + \lambda^{\alpha\beta} E_\beta + \dots \quad (2.9)$$

здесь использовано *правило суммирования Эйнштейна* – по повторяющимся индексам, встречающимся в слагаемом дважды, ведется суммирование.

Сформулируем некоторые общие свойства для каждого из слагаемых разложения. Например, из того, что \vec{D} – полярный вектор, можно заключить, что и вектор \vec{d} – полярный. Аналогично, если \vec{B} – аксиальный, то и \vec{b} – аксиальный.

Замечание.

Вектор \vec{D} называется **полярным**, если при выполнении операции инверсии координаты вектор изменяет знак. Поэтому d^α – компоненты полярного вектора

$$\text{при } \vec{r} \rightarrow -\vec{r} \quad \vec{d} \rightarrow -\vec{d} \quad (2.10)$$

Вектор \vec{B} называется **аксиальным**, если при выполнении операции инверсии координаты вектор не меняет знак. Поэтому b^α – компоненты аксиального вектора

$$\text{при } \vec{r} \rightarrow -\vec{r} \quad \vec{b} \rightarrow -\vec{b} \quad (2.11)$$

Также отметим, что \vec{E} – полярный вектор, а \vec{H} – аксиальный. Поэтому соответствующие коэффициенты разложения $\varepsilon^{\alpha\beta}$, $\mu^{\alpha\beta}$ – компоненты обыкновенных тензоров, а оставшиеся коэффициенты $\omega^{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ – компоненты аксиальных тензоров.

Перечислим некоторые свойства вещества, обусловленные отдельными слагаемыми разложения.

Первые слагаемые разложения. Выделим первые слагаемые разложения. Для этого положим $\vec{E} = 0$ и $\vec{H} = 0$. Тогда в отсутствие внешнего поля d^α совпадает с электрической индукцией

$$D^\alpha = d^\alpha \quad (2.12)$$

– **остаточная электрическая индукция**, возникающая в веществе в отсутствие внешнего поля (сегнетоэлектрики + жесткие пироэлектрики, например, сегнетова соль $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4 H_2O$).

Замечание. *Пироэлектрики* – это вещества, у которых кристаллическая решетка устроена таким образом, что при нагревании этого вещества происходит смещение одной подрешетки относительно другой. В результате появляется нескомпенсированный электрический заряд на границах вещества. Этот заряд приводит к появлению отличного от нуля электрического дипольного момента. Как следствие, появляется вектор поляризации, значит, появляются компоненты вектора \vec{d} – остаточная электрическая индукция, даже если вещество не находится во внешнем электрическом поле.

Сегнетоэлектрики – это вещества, обладающие доменной структурой, в результате формирования которой возможно формирование которой возможно создание остаточной

электрической индукции.

Теперь рассмотрим второе материальное уравнение в отсутствие внешних полей. В этом случае сохраняется только первое слагаемое в правой части

$$B^\alpha = b^\alpha \quad (2.13)$$

– **остаточная магнитная индукция** (ферромагнетики и ферримагнетики, например, постоянный неодимовый магнит $Nd_2Fe_{14}B$).

Замечание. Ферримагнетики по структуре похожи на пирозлектрики: они тоже содержат подрешетки с нескомпенсированным магнитным моментом. В результате появляется ненулевой вектор намагничивания, вследствие чего возникает остаточная магнитная индукция.

В дальнейшем мы не будем рассматривать среды, у которых остаточная электрическая или магнитная индукция отличны от нуля, то есть будем считать, что $d^\alpha = 0$ и $b^\alpha = 0$.

Вторые слагаемые разложения. Рассмотрим второй набор коэффициентов в разложении материальных уравнений. Будем называть

- $\varepsilon^{\alpha\beta}$ – тензором диэлектрической проницаемости
- $\mu^{\alpha\beta}$ – тензором магнитной проницаемости

Используя термодинамические потенциалы (см. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. Том 8, п.13), можно показать, что эти тензоры симметричны

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\beta\alpha} \\ \mu^{\alpha\beta} &= \mu^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Это означает, что такие тензоры с помощью невырожденного преобразования можно привести к диагональному виду так, что отличными от нуля будут только три элемента на диагонали каждого из тензоров. Поэтому 3 независимые величины на диагонали тензора будут не равны нулю. Обозначим эти величины для тензора диэлектрической проницаемости как $\varepsilon^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$. На основании материальных уравнений можно показать, что в случае медленно изменяющегося поля (статического или квазистатического) все элементы на диагонали больше 1

$$\varepsilon^{(\varepsilon)} > 1 \quad (2.15)$$

Для тензора магнитной проницаемости аналогично: он симметричен, поэтому он может быть приведен к диагональному виду невырожденным преобразованием, в котором есть только три независимых элемента на диагонали. Обозначим их $\mu^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$. Аналогично,

на основании термодинамических соотношений можно показать, что для статического или квазистатического поля

$$\mu^{(\alpha)} > 0 \quad (2.16)$$

Если хотя бы два из трех элементов на диагонали отличаются друг от друга, то говорят, что вещество обладает **свойством анизотропии**. Это значит, что для этого вещества есть выделенные направления в пространстве, что приводит к тому, что хотя бы два выражения на диагонали не совпадают. Далее мы будем рассматривать электромагнитные процессы в **изотропных** средах. Для таких сред все три элемента на диагонали тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости равны друг другу. Для изотропных сред все направления в пространстве равноценны: электромагнитные свойства вещества одинаковы для всех направлений в пространстве.

Итак, если все три элемента на диагонали тензора диэлектрической или магнитной проницаемости одинаковы, то мы можем задать все компоненты этого тензора следующим образом: диагональный элемент выносится как общий множитель, а сам тензор представляется пропорциональным единичной матрице. **Для изотропных диэлектриков и магнетиков:**

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} \quad (2.17)$$

$$\mu^{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} = \mu\delta_{\alpha\beta} \quad (2.18)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды,
 μ – магнитная проницаемость среды.

Отметим, что здесь мы пока что не делаем различия между нижними и верхними индексами в написании тензора.

Убедимся, что такое представление тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости на следующем примере. Покажем, что такое представление не зависит от выбора направления в пространстве. Пусть компоненты тензора диэлектрической проницаемости определены определённым положением системы координат. Запишем (2.17) в матричной форме:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon I \quad (2.19)$$

где $\hat{\varepsilon}$ – матрица, компоненты которой совпадают с компонентами тензора диэлектрической проницаемости.

Выполним поворот системы координат на произвольный угол вокруг некоторой произвольной оси. Поворот описывается с помощью ортогональной матрицы, элементы которой зависят от угла поворота θ

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\theta) \quad (2.20)$$

Матрица R – ортогональная, поэтому

$$R^T R = I \quad (2.21)$$

Предположим, что для тензор диэлектрической проницаемости мы задали в виде (2.19). Посмотрим, как изменится этот тензор при повороте с помощью ортогональной матрицы:

$$\hat{\epsilon}' = R^T \hat{\epsilon} R \quad (2.22)$$

Здесь мы воспользовались законом преобразования тензора которого ранга при преобразовании поворота.

Подставим представление (2.19) в (2.22) и получим выражение для тензора после поворота системы координат

$$\hat{\epsilon}' = \epsilon R^T I R = \epsilon I = \hat{\epsilon} \quad (2.23)$$

Таким образом, представление тензора диэлектрической проницаемости в виде (2.19) приводит к тому, что при любом повороте тензор остается неизменным. Значит, для такой среды все направления в пространстве одинаковы. Значит, такое представление тензора диэлектрической проницаемости годится для описания изотропных сред.

Вернемся к материальным уравнениям. Тогда, при подставке тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости в виде (2.17)-(2.18) в материальные уравнения, получим *материальные уравнения для изотропной среды* в виде

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.24)$$

Здесь ϵ и μ вообще говоря функции координаты. При этом мы считаем, что от времени они не зависят, так как ранее было оговорено, что для разложения материальных уравнений в ряд должно выполняться условие медленного изменения полей по сравнению с релаксационными процессами в веществе. Если же поля изменяются быстро, то материальные уравнения нужно строить иначе. Если ϵ , μ зависят от координаты, то речь идет о **неоднородных средах**.

В дальнейшем будем считать, что среда изотропна (тогда материальные уравнения имеют вид (2.24)) и однородна, поэтому

$$\epsilon = const, \quad \mu = const \quad (2.25)$$

Третьи слагаемые разложения. Отличие от нуля коэффициентов $\omega_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{\alpha\beta}$ обеспечивает **магнитно-электрические свойства** вещества, что выражается в виде

перекрестной зависимости в материальных уравнениях

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{H}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{E}) \quad (2.26)$$

То есть вектор электрической индукции оказывается зависящим от магнитного поля. Вектор магнитной индукции зависит от электрического поля. Таким свойством обладают некоторые кристаллические вещества. Можно показать, что при движении изотропного вещества в материальных уравнениях появляется такая перекрестная зависимость, то есть изотропное вещество приобретает магнитно-электрические свойства в процессе движения.

Подобная зависимость имеет место

- при движении вещества
- характерна для некоторых оптических кристаллов

Перекрестная зависимость в материальных уравнениях имеет наблюдательное проявление в виде **эффекта оптической невзаимности**. Рассмотрим 2 точки пространства: точки А и В. Измерим скорость распространения света из точки А в точку В и обратно (рис. 2.1). Тогда окажется, что скорость распространения света из А в В и обратно не равны друг другу. Это и называется эффектом оптической невзаимности, связанным с магнитно-электрическими свойствами вещества.

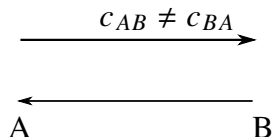


Рис. 2.1: Эффект оптической невзаимности.

Нелинейные слагаемые в материальных уравнениях. Рассмотрим теперь нелинейные слагаемые, которые в (2.8)-(2.9) обозначены многоточием. Например, квадратичные слагаемые по компонентам вектора E $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E^\beta E^\gamma$, $\mu_{\alpha\beta\gamma} E^\beta E^\gamma$ приводят к нелинейно-оптическим эффектам вида

- удвоение частот $\omega \rightarrow 2\omega$ (например, если пропустить электромагнитную волну через оптический кристалл, обладающий квадратичной нелинейностью, то на выходе можно получить сигнал с удвоенной частотой. Такое свойство используется, например, при создании лазерных указок зелёного цвета. Там установлен оптический кристалл, накачка которого происходит на длине волны, близкой к инфракрасному диапазону, а в результате увеличения частоты длина волны сокращается, получаем на выходе зелёный свет).
- генерация комбинационных частот $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_1 + \omega_2, |\omega_1 - \omega_2|$ (если через кристалл с квадратичной нелинейностью пропустить две электромагнитные волны с разными

частотами, то на выходе кристалла можно получить волны с комбинированными частотами).

Далее рассмотрим материальные уравнения для *однородного изотропного вещества*. Тогда, дополнив этими материальными уравнениями (2.24) систему Максвелла-Лоренца, проанализируем полученную систему на разрешимость.

Запишем уравнения Максвелла-Лоренца, дополненные материальными уравнениями для изотропных диэлектриков и магнетиков

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{-- 3 уравнения} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho & \text{-- 1 уравнение} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{-- 3 уравнения} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{-- 1 уравнение} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \text{ уравнений} \\ 6 \text{ уравнений} \end{array} \quad (2.27)$$

Получаем 14 уравнений для 12 неизвестных – среди уравнений есть зависимые. Однако, в уравнениях Максвелла, и как следствие, в уравнениях Максвелла-Лоренца не все уравнения являются линейно-независимыми. Установим зависимости среди уравнений.

1. Выпишем уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \operatorname{div} \quad (2.28)$$

Подействуем на обе части этого уравнения операцией дивергенции и учтем, что дивергенция ротора равна нулю

$$0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} \quad (2.29)$$

Но $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ в любое случае в силу отсутствия магнитных зарядов. Поэтому мы получили одно скалярное тождество.

2. Получим еще одно скалярное тождество, устанавливающее зависимость между уравнениями системы. Запишем уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad | \operatorname{div} \quad (2.30)$$

Подействуем на это равенство операцией дивергенции и учтем, что дивергенция ротора равна нулю

$$0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{=4\pi\rho} \quad (2.31)$$

Здесь мы учли второе уравнение системы (2.27). Получаем

$$0 = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\left\{ \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\}}_{=0} \quad (2.32)$$

Однако это равенство тоже выполняется тождественно в силу закона сохранения заряда для свободных источников.

Итак, получаем, что есть две скалярные зависимости, поэтому **14 уравнений - 2 зависимости = 12 независимых уравнений/12 неизвестных**. Значит, рассматриваемая система разрешима.

Замечание:

Несмотря на то, что ρ и \vec{j} считаются заданными, часто плотность тока \vec{j} выражают через электромагнитное поле в среде. Например, в виде линейной пропорциональности

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad (2.33)$$

Это выражение называют **материальным уравнением для тока** в изотропном проводнике (**закон Ома в дифференциальной форме**)

Лекция 3. Уравнения для потенциалов в однородном покоем веществе. Калибровочная инвариантность. Решение в виде запаздывающих потенциалов.

Потенциалы электромагнитного поля в веществе.

Ранее мы получили и проанализировали уравнения Максвелла-Лоренца. Также мы показали, что эта система уравнений, дополненная материальными уравнениями, разрешима. Получим решения данной системы.

Запишем уравнения Максвелла-Лоренца, дополненные материальными уравнениями для линейной изотропной среды

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Будем считать, что $\epsilon, \mu = \text{const}$, то есть среда однородна.

Отметим, что в каждое уравнение входит несколько переменных. Мы считаем, что источники поля – плотность тока и плотность заряда заданы. Найдем полевые компоненты – векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$. Как и в прошлом семестре, было бы удобно ввести некоторые новые величины, в терминах которых каждое из уравнений содержало бы только один набор неизвестных. Даже если уравнения станут более высокого порядка (например, второго), решать из будет проще, так как каждое уравнение будет содержать только одну из неизвестных величин.

Рассмотрим однородные уравнения

1. Запишем уравнение

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.2)$$

Отсюда можно получить, что вектор индукции магнитного поля можно представить как ротор некоторой новой векторной величины

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

\vec{A} – **векторный потенциал электромагнитного поля**. Тогда выражение (3.2) будет выполняться тождественно.

Отметим, что в электродинамике в вакууме мы представляли таким образом вектор напряженности магнитного поля \vec{H} .

2. Запишем уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.4)$$

Подставим сюда полученное выше представление (3.3)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.5)$$

Переставим операторы дифференцирования координаты и времени и преобразуем выражение

$$\operatorname{rot} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = 0 \quad (3.6)$$

$= -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t)$

Если ротор некоторого вектора равен нулю, то аргумент этого ротора можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции. Тогда выражение для напряженности электрического поля, выраженной через скалярный и векторный потенциалы

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (3.7)$$

φ – скалярный потенциал электромагнитного поля.

Получим уравнения для потенциалов. Воспользуемся неоднородными уравнениями Максвелла-Лоренца (уравнениями, содержащими источники). Выразим вектор напряженности поля \vec{H} через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.8)$$

Здесь мы воспользовались материальным уравнением и (3.3).

Аналогично для вектора индукции электрического поля воспользуемся материальным уравнением и представлением (3.7)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \left\{ -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} \quad (3.9)$$

Выполним подстановку (3.8) и (3.9) в первое уравнение системы

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \vec{\nabla} \left\{ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \left| \times \mu \quad (3.10) \right.$$

Здесь мы воспользовались тем, что можно менять местами операции дифференцирования по времени и координате. Преобразуем полученное данное выражение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} - \vec{\nabla} \left\{ \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

Учтем соотношение векторной алгебры

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (3.12)$$

Окончательно получаем векторное уравнение вида

$$\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} - \vec{\nabla} \left\{ \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (3.13)$$

Перегруппируем слагаемые

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} + \vec{\nabla} \left\{ \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} \quad (3.14)$$

Однако, нам хотелось бы получить уравнение, которое содержало бы только одну неизвестную величину. Однако здесь уравнение содержит как компоненты векторного потенциала, так и скалярный потенциал. Это уравнение мы преобразуем позже, а пока что продолжим рассмотрение уравнений Максвелла-Лоренца. Третье и четвертое уравнения системы выполняются тождественно вследствие введения потенциалов. Значит, осталось рассмотреть второе уравнение системы.

Выполним подстановку материальных уравнений во второе уравнение системы (3.1)

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \quad (3.15)$$

Материальное уравнение можно записать в виде

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \left\{ -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} \quad (3.16)$$

Подставим (3.16) в (3.15)

$$-\varepsilon \operatorname{div} \left\{ \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = 4\pi \rho \quad \left| \times -\frac{1}{\varepsilon} \right. \quad (3.17)$$

Преобразуем уравнение

$$\Delta \varphi + \operatorname{div} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho \quad (3.18)$$

где

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\vec{\nabla}\varphi \quad (3.19)$$

Перегруппируем слагаемые

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{A}) \quad (3.20)$$

Отметим, что данное уравнение сильно отличается по форме от уравнения (3.14). На самом деле полученное уравнение для скалярного потенциала (3.20) можно привести к такой же форме, что и уравнение (3.14). Добавим по одному слагаемому в обе части уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{A}) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} \quad (3.21)$$

Здесь мы учли, что производную по времени можно вынести за скобку как общий оператор.

Получим скалярное уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} \quad (3.22)$$

Итак, мы получили уравнения для скалярного и векторного потенциалов одной формы. Однако мы не добились результата – оба уравнения содержат более одной переменной. Отметим, что в обоих уравнениях есть фигурная скобка, в которой присутствуют оба потенциала:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j} + \vec{\nabla}\left\{\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} \\ \Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} \end{aligned}$$

Попробуем избавиться от этой скобки, чтобы в каждом уравнении получить только одну переменную.

Калибровочная инвариантность.

Воспользуемся калибровочным преобразованием потенциала, чтобы избавиться от выражения в фигурных скобках.

Выполним калибровочное преобразование потенциалов, перейдя от старого набора потенциалов к новому. Покажем, что векторы \vec{B} и \vec{E} не изменяются при этих преобразованиях.

Старый векторный потенциал выражается через сумму нового потенциала и градиента произвольной функции f , которая называется **калибровочной функцией**

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f \quad (3.23)$$

Старый скалярный потенциал можно выразить через новый, путем прибавления соотношения

$$\varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.24)$$

где φ' , \vec{A}' – новые потенциалы. Отметим, что такие преобразования потенциалов не изменяют векторов \vec{B} и \vec{D} . Покажем это. Распишем

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } A' + \text{rot } \text{grad } f = \text{rot } \vec{A}' \quad (3.25)$$

так как $\text{rot } \text{grad } f = 0$.

Аналогично запишем вектор \vec{E} , подставив вместо потенциалов калибровочные выражения

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi' + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} f = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (3.26)$$

Видно, что красные слагаемые сокращаются, так как можно переставлять операторы дифференцирования по времени и по координате. Таким образом, мы получили одинаковые выражения для векторов в любом наборе потенциалов. Значит, можно получить уравнения для новых потенциалов, аналогичные (3.14) и (3.22).

Выполнив вычисления, аналогичные предыдущим, запишем уравнения для потенциалов в виде

$$\Delta \vec{A}' - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} + \vec{\nabla} \left\{ \text{div } \vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right\} \quad (3.27)$$

$$\Delta \varphi' - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{div } \vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right\} \quad (3.28)$$

Замечание. Уравнения для потенциалов сохранили свою форму, калибровочная функция в уравнениях не участвует.

Итак, мы получили уравнения для потенциалов, используя старый новый набор потенциалов. Предположим, что изначально мы работали с исходным набором потенциалов: φ и \vec{A} , причем эти потенциалы оказались такими, что фигурная скобка в уравнениях (3.14) и (3.22) не равна нулю. Предположим, что в первоначальной калибровке выполняется равенство (где $F(\vec{r}, t)$ – некоторая функция.)

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\vec{r}, t) \quad (3.29)$$

Однако, мы можем выполнить калибровочное преобразование потенциалов, и посмотреть, как изменится выражение (3.29)

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{A}' + \vec{\nabla}f \\ \varphi &= \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.30)$$

После подстановки найдем:

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \underbrace{\Delta f - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}_{\text{всегда можно найти калибр. ф-ю}} = F(\vec{r}, t) \quad (3.31)$$

Отметим, что калибровочная функция произвольна. Значит, можно выбрать такую калибровочную функцию, чтобы выражение над фигурной скобкой в (3.31) выполнялось тождественно. Отметим, что указанное уравнение

$$\Delta f - \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(\vec{r}, t) \quad (3.32)$$

– неоднородное волновое уравнение. Это уравнение всегда имеет решение при произвольной правой части. У него есть бесконечное число независимых решений.

Выберем калибровочную функцию так, чтобы выполнялось **калибровочное условие Лоренца**:

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (3.33)$$

Таким образом, всегда можно подобрать калибровочную функцию так, чтобы выражения в фигурных скобках в (3.14) и (3.22) обращались в ноль.

Уравнения для потенциалов принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \\ \Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho\end{aligned}\quad (3.34)$$

при этом должно выполняться **калибровочное условие Лоренца**

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (3.35)$$

Во всех уравнениях из обозначений исключен штрих.

Выполним сравнение полученных уравнений для потенциалов в макроскопической электродинамике с уравнениями микроскопической электродинамики (в вакууме):

1. Изменился коэффициент перед второй производной по времени. Это значит, что фактически изменилась *скорость распространения излучения в однородных и изотропных средах*. Значит, можно перенормировать скорость

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (3.36)$$

2. В правых частях уравнений для потенциалов вместо плотностей \vec{j} и ρ появились *эффективные источники*. Ранее \vec{j} – обозначение полной плотности тока всех зарядов. Теперь же это плотность тока свободных зарядов. Значит, источником в уравнении для векторного потенциала является эффективная плотность тока – произведение μ на плотность тока свободных зарядов. Аналогично, ранее ρ – обозначение полной плотности заряда, теперь же это плотность свободных зарядов. Значит, источником в уравнении скалярного потенциала выступает плотность свободных зарядов, деленная на диэлектрическую проницаемость ϵ :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{полн}} &\rightarrow \vec{j}_{\text{своб}}\mu \\ \rho_{\text{полн}} &\rightarrow \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким образом, мы можем воспользоваться результатом прошлого семестра и записать решение полученных уравнений для скалярного и векторного потенциалов в виде **запаздывающих потенциалов**, учитывая указания 1. и 2. Изменяем скорость распространения электромагнитного излучения, и выражения для источников

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \int dV' \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.38)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{c} \cdot \int dV' \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.39)$$

Отметим, что по штрихованным переменным производится интегрирование.

Замечание. Отметим, что в микроскопической электродинамике при выводе данного решения мы учитывали интегрирование по всему неограниченному объему пространства. Значит, в данном случае ϵ и μ должны быть непрерывны во всем пространстве, в противном случае решение неприменимо. При наличии границ, разделяющих среды с разными электромагнитными свойствами указанное решение неприменимо. Например, для кусочно-однородной среды следует учитывать граничные условия.

Лекция 4. Граничные условия для полей в покоящейся кусочно-однородной среде.

Уравнения Максвелла-Лоренца в интегральной форме.

Отметим, что в дальнейшем рассмотрении производные будут претерпевать разрыв на границах сред. Поэтому в дальнейшем нам потребуются интегральные уравнения. Преобразуем уравнения Максвелла-Лоренца к интегральной форме. Для этого рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S , в котором находится некоторое количество свободного заряда Q (рис. 4.1).

1. Запишем уравнение

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.1)$$

И проинтегрируем его по объему

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0 \quad (4.2)$$

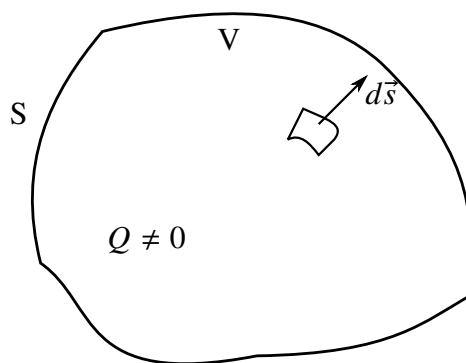


Рис. 4.1: Иллюстрация к объяснению.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и перейдем к интегралу по поверхности

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = 0 \quad (4.3)$$

Замечание. Равенство выполняется для любого объема V вне зависимости от того, содержится ли в нем вещество, или нет.

2. Запишем второе уравнение

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad (4.4)$$

и проинтегрируем это уравнение по тому же объему

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = 4\pi \int_V \rho dV \quad (4.5)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = 4\pi Q \quad (4.6)$$

где

$$Q = \int_V \rho dV \quad (4.7)$$

– свободный заряд в объеме V (ρ – плотность свободных зарядов в объеме V .)

3. Выведем третье интегральное уравнение. Для этого рассмотрим произвольный контур без самопересечений (рис. 4.2). Обозначим его L . Натянем на контур произвольную незамкнутую поверхность S . Элемент площади поверхности $d\vec{s}$ ориентирован так, чтобы он был направлен вверх, если мы обходим контур так, что он всех находится от нас слева. Это стандартное правило обхода контура и выбора напряжения обхода площади.

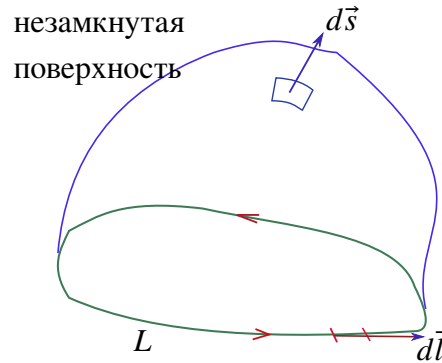


Рис. 4.2: К вычислению интеграла.

Запишем еще одно уравнение

Максвелла-Лоренца и умножим обе части равенства на элемент площади скалярно

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Big| \cdot d\vec{s} \quad (4.8)$$

и проведем интегрирование по поверхности

$$\int_S (\text{rot } \vec{E}, d\vec{s}) = -\frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{s} \right) \quad (4.9)$$

Вспользуемся теоремой Стокса и перейдем от интегрирования по поверхности S к интегрированию по контуру L , на которую натянута эта поверхность. В результате получим интеграл по контуру (производную по времени можно вынести за знак интеграла, так как мы предполагаем, что поверхность S не меняется со временем)

$$\underbrace{\int_L (\vec{E}, d\vec{l})}_{\text{=циркуляция вектора } \vec{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_S (\vec{B}, d\vec{S})}_{\text{поток вектора } \vec{B}} \quad (4.10)$$

Отметим, что данное выражение есть **закон электромагнитной индукции Фарадея**. Действительно, выражение в левой части (4.10) есть ЭДС – работа, которое совершает электрическое поле при переносе единичного электрического заряда по замкнутому

контур. Если мы умножим (4.10) на единичный заряд, то в правой части получим силу Лоренца, действующую на этот заряд. Сила Лоренца, умноженная скалярно на элемент $d\vec{l}$ и проинтегрированная по контуру – это работа по переносу единичного заряда по замкнутому контуру – это и есть ЭДС. В правой же части (4.10) производная от потока вектора индукции через поверхность S . Отметим, что так как мы работаем с системе СГС, а не в системе СИ, здесь появляется коэффициент $\frac{1}{c}$.

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.11)$$

4. Получим последнее интегральное уравнение. Запишем последнее уравнение в дифференциальной форме и скалярно умножим обе части этого равенства на элемент площади $d\vec{s}$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Big| \cdot d\vec{s} \quad (4.12)$$

и проведем интегрирование по поверхности S

$$\int_S (\text{rot } \vec{H}, d\vec{s}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j}, d\vec{s}) + \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{s} \right) \quad (4.13)$$

Воспользуемся теоремой Стокса и перейдем от интегрирования по незамкнутой поверхности S к интегрированию по контуру, на которую эта поверхность опирается

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D}, d\vec{s}) \quad (4.14)$$

где

$$I = \int_S (\vec{j}, d\vec{s}) \quad (4.15)$$

– ток свободных зарядов.

Запишем уравнения Максвелла-Лоренца в интегральной форме (отметим, что интегралы в правых частях уравнений в (4.16) (\oint_S) берутся по замкнутой поверхности S , а интегралы в правых частях (\int_S) берутся по незамкнутой поверхности, интеграл \oint_L – интеграл по замкнутому контуру; Q – свободный заряд, заключенный под поверхностью S , I – ток свободных зарядов)

$$\begin{aligned}
 \oint_S (\vec{B}, d\vec{s}) &= 0 \\
 \oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) &= 4\pi Q \\
 \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, d\vec{s}) \\
 \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) &= \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D}, d\vec{s})
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

где $Q = \int_V \rho dV$
 $I = \int_S (\vec{j}, d\vec{s})$

Итак, мы получили систему уравнений Максвелла-Лоренца в интегральной форме, с помощью которой можно получить граничное условие.

Граничные условия.

Рассмотрим **кусочно-однородную среду** – среду, свойства которой изменяются скачком при переходе через некоторую тонкую границу.

Пусть две среды с разными электромагнитными свойствами разделены бесконечно тонкой и гладкой границей Γ (рис. 4.3). У первой среды диэлектрическая проницаемость ε_1 , магнитная проницаемость – μ_1 . Для второй границы – ε_2 и μ_2 соответственно. На границе сред введем вектор, направленный по нормали к границе \vec{n} из второй среды в первую. Также введём вектор по касательной к границе $\vec{\tau}$.

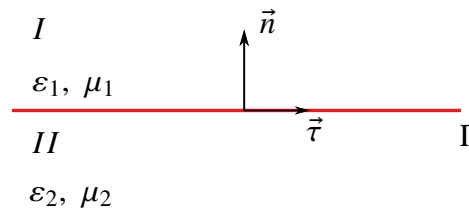


Рис. 4.3: Граница сред.

Замечание. Будем считать, что граница бесконечно тонкая. Конечно, в реальности это не так: всегда есть некоторый переходный слой между средами, обусловленный диффузией. Однако, чтобы воспользоваться полученными ранее результатами (напомним, что мы имеем дело с усредненными уравнениями Максвелла), толщина этого переходного слоя должна быть значительно меньше, чем характерный размер объема усреднения. В этом случае после усреднения этот слой можно будет считать бесконечно тонким. В противном случае все полученные далее соотношения окажутся неверны.

Для решения уравнений электромагнитного поля в случае кусочно-однородных сред необходимо использовать граничные условия. Получим их. Рассмотрим указанные две среды. Введем систему координат, связанную с границей раздела сред. Рассмотрим достаточно малый плоский участок поверхности раздела сред. Построим круговой цилиндр высоты $2h$ вблизи этого участка так, чтобы середина этого цилиндра находилась в начале координат (граница раздела сред делит цилиндр пополам). Элемент поверхности внешнего основания обозначим $d\vec{s}_1$ (он сонаправлен с нормалью \vec{n}), а для нижнего основания – $d\vec{s}_2$ (этот элемент площади направлен против нормали). Элемент боковой поверхности цилиндра $d\vec{s}_{\text{бок}}$.

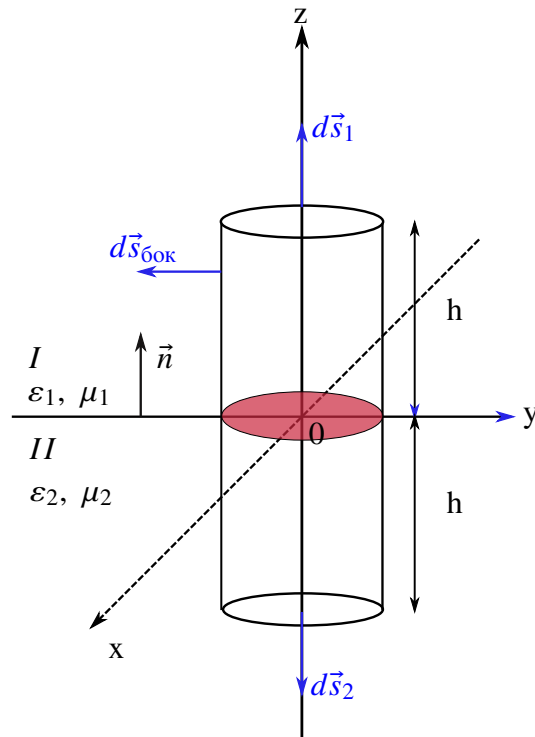


Рис. 4.4: Граница раздела сред.

Попробуем связать компоненты электромагнитного поля по разные стороны от бесконечно тонкой границы, разделяющей среды. Это значит, что нас в сущности не интересует, что происходит с полем на удалении от границы. Мы рассматриваем компоненты поля в приграничной области. Значит, далее мы можем устремить высоту цилиндра к нулю.

Вычислим компоненты поля на основаниях цилиндра, воспользовавшись интегральными уравнениями Максвелла-Лоренца. Запишем уравнение

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \quad (4.17)$$

В этом выражении в качестве поверхности S выберем поверхность цилиндра. Разделим ее на части (поверхность верхнего основания S_1 , поверхность нижнего основания S_2 и боковая поверхность)

$$S = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}} \quad (4.18)$$

При этом

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot 2h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (4.19)$$

$$S_1 = \pi R^2 \quad S_2 = \pi R^2 \quad (4.20)$$

Разделим интегрирование по поверхности цилиндра на сумму интегралов по частям этой поверхности

$$\int_{s_1} (\vec{B}, d\vec{s}_1) + \int_{s_2} (\vec{B}, d\vec{s}_2) + \int_{s_{\text{бок}}} (\vec{B}, d\vec{s}_{\text{бок}}) \Big|_{h \rightarrow 0} = 0 \quad (4.21)$$

Учтем, что

$$d\vec{s}_1 = ds_1 \vec{n} \quad d\vec{s}_2 = -ds_2 \vec{n} \quad (4.22)$$

Тогда, учитывая, что интегралы берутся в разных средах, а также то, что интегрирование ведется по границам раздела сред, получим

$$\int_{s_1} (\vec{B}^I, \vec{n}) ds_1 - \int_{s_2} (\vec{B}^{II}, \vec{n}) ds_2 \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.23)$$

Устремим радиус цилиндра к нулю. Тогда по **теореме о среднем значении** заменим точное значение интеграла на приближенное значение подынтегральной функции, вычисленное в некоторой внутренней точке области интегрирования и умноженное на площадь поверхности интегрирования

$$\underbrace{(\vec{B}^I, \vec{n})}_{=B_n^I} \cdot \pi R^2 - \underbrace{(\vec{B}^{II}, \vec{n})}_{=B_n^{II}} \pi R^2 \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.24)$$

Таким образом получаем **первое граничное условие**, связывающее нормальные компоненты вектора индукции магнитного поля

$$\boxed{B_n^I = B_n^{II} \Big|_{\Gamma}} \quad (4.25)$$

Значит, нормальные составляющие вектора индукции магнитного поля должна быть непрерывная на границе раздела сред.

Получим еще одно граничное условия на основе другого интегрального уравнения Максвелла-Лоренца. **Рассмотрим уравнение**

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) = 4\pi Q = 4\pi \int_V \rho dV \quad (4.26)$$

Здесь Q – свободный заряд, заключенный под поверхностью S .

Поверхность S может быть произвольной. Выберем в качестве S поверхность цилиндра,

а в качестве V его объем.

$$\int_{S_1} (\vec{D}, d\vec{s}_1) + \int_{S_2} (\vec{D}, d\vec{s}_2) + \underbrace{\int_{S_{\text{бок}}} (\vec{D}, d\vec{s}_{\text{бок}})}_{=0} \Big|_{h \rightarrow 0} = 4\pi \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \rho(\vec{r}, t) \quad (4.27)$$

где $dV = r dr d\varphi dz$ – элемент объема цилиндра.

Здесь мы устремили основания цилиндра к поверхности, то есть $h \rightarrow 0$. Также мы расписали интеграл в правой части в цилиндрических координатах.

Замечание. Отметим, что мы устремили $h \rightarrow 0$, поэтому можно пренебречь интегралом по боковой поверхности. Однако при этом мы оставляем в правой части интеграл по объему, несмотря на то, что объем при том же условии становится исчезающе малым. Это обосновывается тем, что возможна ситуация, в которой заряды распределены не только в объеме самого цилиндра, но и на границе раздела сред (поверхностные заряды). Если мы устремим $h \rightarrow 0$, то объемный заряд мы тем самым устремим к нулю, однако это не скажется на поверхностном заряде, который находится на бесконечно тонкой границе раздела. Даже когда мы устремляем $h \rightarrow 0$ поверхность на границе (и заряд на этой поверхности) не изменяется. Это и нужно учесть.

Если на границу раздела сред Γ нанесены свободные заряды, то их объемную плотность можно представить через поверхностную плотность с помощью выражения

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_{\text{пов}}(r, \varphi, t) \cdot \delta(z) \quad (4.28)$$

где $\rho_{\text{пов}}$ – поверхностная плотность свободных зарядов.

Итак, нам нужно подставить указанную плотность в (4.27). Учтем, что как и ранее:

$$d\vec{s}_1 = \vec{n} ds_1, \quad d\vec{s}_2 = -\vec{n} ds_2 \quad (4.29)$$

Тогда, подставив (4.29) и (4.28) в (4.27), получим

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (\vec{D}^I, \vec{n}) dS_1 - \int_{S_2} (\vec{D}^{II}, \vec{n}) dS_2 \Big|_{\Gamma} &= 4\pi \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \rho_{\text{пов}}(r, \varphi, t) \delta(z) = \\ &= 4\pi \underbrace{\int_0^R r dr}_{=\frac{R^2}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_{\text{пов}}(r, \varphi, t) d\varphi \quad (4.30) \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой о среднем значении. Предполагая, что радиус цилиндра мал, получим, что интеграл можно заменить на значение его подинтегральной функции, умноженное на область интегрирования

$$\underbrace{\left(\vec{D}^I, \vec{n}\right) \pi R^2}_{=D_n^I} - \underbrace{\left(\vec{D}^{II}, \vec{n}\right) \pi R^2}_{=D_n^{II}} \Big|_{\Gamma} = 4\pi \rho_{\text{пов}} \cdot \pi R^2 \quad (4.31)$$

Учтем, что скалярное произведение (\vec{D}, \vec{n}) выделяет из вектора \vec{D} компоненту, направленную по нормали к поверхности – нормальная проекция вектора. Тогда получаем **второе граничное условие**: нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля \vec{D} может испытывать скачок в случае, когда на границу раздела сред нанесены поверхностные свободные заряды.

$$D_n^I - D_n^{II} \Big|_{\Gamma} = 4\pi \rho_{\text{пов}}^{\text{своб}} \quad (4.32)$$

Замечание. Поверхностная плотность $\rho_{\text{пов}}^{\text{своб}}$ – поверхностная плотность свободных зарядов.

Замечание. Получая это граничное условие, мы использовали уравнение

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho \quad (4.33)$$

где ρ – объемная плотность свободных зарядов. Однако мы могли воспользоваться уравнением

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho_{\text{полн}} \quad (4.34)$$

(это уравнение, которое получается сразу после соединения микроскопического уравнения в вакууме), где $\rho_{\text{полн}}$ – средняя полная плотность заряда. Отсюда аналогично предыдущим выкладкам можно получить

$$E_n' - E_n'' \Big|_{\Gamma} = 4\pi \rho_{\text{пов}}^{\text{полн}} \quad (4.35)$$

Здесь $\rho_{\text{пов}}^{\text{полн}}$ – поверхностная плотность полного заряда.

Итак, у нас есть два граничных условия, связывающих компоненты поля по разные стороны от границы. Теперь нам нужно получить ещё два граничных условия. Для этого нужно выполнить следующее дополнительное построение. Построим прямоугольный контур на границе раздела двух сред (рис. 4.5).

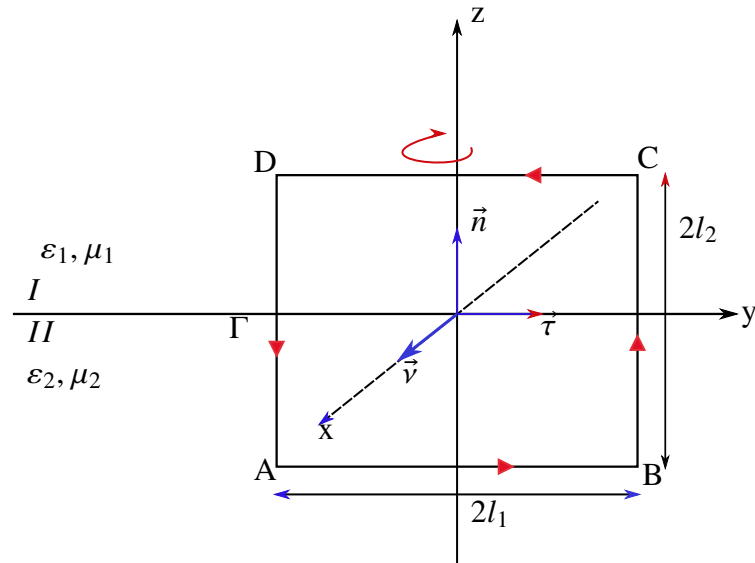


Рис. 4.5: Иллюстрация к объяснению.

Введем систему координат, связанную с границей раздела сред – x, y, z . На границе раздела сред построим плоский прямоугольный контур. Стороны этого контура указаны на рис. 4.5. Первоначально контур ориентирован так, чтобы он находился в плоскости Oyz . Направления обхода контура обозначены красными стрелками. Введём три нормальных вектора. Вектор нормали \vec{n} ориентирован из второй среды в первую. Вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к границе по оси Oy . Второй вектор \vec{v} направлен по касательной к границе по оси Ox . Далее нас будут интересовать характеристики электромагнитного поля (их связь) по разные стороны от границы. Значит, далее мы будем притягивать к границе стороны контура DC и AB .

$$\begin{aligned} AB = CD &= 2l_1 \\ AD = BC &= 2l_2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Рассмотрим одно из уравнений Максвелла-Лоренца в интегральной форме:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \quad (4.37)$$

Выберем в качестве контура L прямоугольник $ABCD$, а в качестве S – поверхность этого прямоугольника.

В дальнейшем нас будет интересовать связь между компонентами поля по разные стороны от границы. Значит, устремим $l_2 \rightarrow 0$. Учтем, что при $l_2 \rightarrow 0$ площадь поверхности

$$S = 2l_1 \times 2l_2 \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

поэтому поверхность, через которую вычисляется поток индукции магнитного поля

обращается в ноль. Поэтому

$$\int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \rightarrow 0 \quad (4.39)$$

тогда интеграл по границе контура

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \quad (4.40)$$

разбивается на два интеграла

$$\int_{-l_1}^{l_1} (\vec{E}^{II}, d\vec{l}) \Big|_{\Gamma} + \int_{l_1}^{-l_1} (\vec{E}^I, d\vec{l}) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.41)$$

Отметим, что интегрирование по границе AB эквивалентно интегрированию вдоль оси y , поэтому

$$d\vec{l} = \tau dl = \tau dy \quad (4.42)$$

Поэтому интегралы можно переписать в виде

$$\int_{-l_1}^{l_1} (\vec{E}^{II}, \vec{\tau}) dy \Big|_{\Gamma} - \int_{-l_1}^{l_1} (\vec{E}^I, \vec{\tau}) dy \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.43)$$

Согласно теореме о среднем значении, для любого достаточно малого l_1 получим

$$\underbrace{(\vec{E}^{II}, \vec{\tau})}_{=E_{\tau}^{II}} \cdot 2l_1 \Big|_{\Gamma} - \underbrace{(\vec{E}^I, \vec{\tau})}_{=E_{\tau}^I} \cdot 2l_1 \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.44)$$

Учтём, что скалярное произведение вектора \vec{E} на вектор, касательный к границе, выделяет из напряженности электрического поля касательную проекцию. Обозначим

$$(\vec{E}^{I,II}, \vec{\tau}) = E_{\tau}^{I,II} \quad (4.45)$$

Таким образом, в выбранных обозначениях

$$E_{\tau}^I = E_{\tau}^{II} \Big|_{\Gamma} \quad (4.46)$$

Это означает, что касательная составляющая вектора напряжённости электрического поля на границе раздела сред непрерывна.

Повернем контур так, чтобы он располагался в плоскости Oxz . Тогда аналогичным способом приходим к уравнению

$$E_v^I = E_v^{II} \Big|_{\Gamma} \quad (4.47)$$

из которого следует непрерывность проекций вектора напряженности электрического поля на вектор v .

Замечание. Касательные составляющие вектора напряжённости электрического поля на границе раздела сред непрерывны.

Получим последнее граничное условие. Выберем в качестве контура L прямоугольник $ABCD$, а в качестве поверхности S – поверхность этого прямоугольника. Запишем оставшееся уравнение системы Максвелла-Лоренца в интегральной форме.

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D}, d\vec{S}) + \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) \quad (4.48)$$

при $l_2 \rightarrow 0$

. Здесь мы устремили $l_2 \rightarrow 0$. Тогда поверхность прямоугольника также $\rightarrow 0$. Значит, первый интеграл в правой части (4.48) стремится к нулю. Однако мы не можем сказать то же для второго интеграла, так как возможна ситуация, в которой на границе раздела протекает поверхностный ток. Тогда, несмотря на то, что площадь контура $S \rightarrow 0$, интеграл от плотности тока по поверхности сохранится, так как полный ток даже при сжатии контура сохранится. Таким образом, получаем уравнение

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) \quad (4.49)$$

По границе раздела сред могут протекать поверхностные токи, плотность которых можно задать в виде:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{i}_{\text{пов}}(x, y, z) \cdot \delta(z) \quad (4.50)$$

где $\vec{i}_{\text{пов}}$ – поверхностная плотность тока.

Учтем также, что элемент площади поверхности есть произведение дифференциалов $dy \cdot dz$, при этом элемент площади ориентирован вдоль оси x , то есть вдоль вектора v . Элемент длины контура сонаправлен с вектором τ .

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= dy dz \vec{v} \\ d\vec{l} &= \vec{\tau} dl = \vec{\tau} dy \end{aligned} \quad (4.51)$$

Поэтому, учитывая (4.50) и (4.51), из (4.49) получим

$$\int_{-l_1}^{l_1} (\vec{H}^{II}, \vec{dl}) + \int_{l_1}^{-l_1} (\vec{H}^I, \vec{dl}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \frac{4\pi}{c} \int_{-l_1}^{l_1} dy \int_{-l_2}^{l_2} dz (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{v}) \delta(z) =$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int_{-l_1}^{l_1} dy (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{v}) \quad (4.52)$$

Поменяем порядок интегрирования во втором интеграле в левой части равенства (4.52)

$$\int_{-l_1}^{l_1} \underbrace{(\vec{H}^{II}, \vec{\tau})}_{=H_{\tau}^{II}} dy - \int_{-l_1}^{l_1} \underbrace{(\vec{H}^I, \vec{\tau})}_{=H_{\tau}^I} dy = \frac{4\pi}{c} \int_{-l_1}^{l_1} (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{v}) dy \quad (4.53)$$

Скалярное произведение напряженности магнитного поля на вектор касательной к границе выделяет касательную проекцию напряженности магнитного поля на границе раздела.

Согласно теореме о среднем значении, получим граничное условие:

$$H_{\tau}^{II} \cdot \mathcal{K}_1 - H_{\tau}^I \cdot \mathcal{K}_1 \Big|_{\Gamma} = \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{P}) \cdot \mathcal{K}_1 \quad (4.54)$$

Отсюда получаем граничное условие

$$H_{\tau}^{II} - H_{\tau}^I \Big|_{\Gamma} = \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{v}) \quad (4.55)$$

Таким образом, получили, что касательная составляющая напряженности магнитного поля на границе раздела сред может испытывать скачок, если на границе протекают поверхностные токи.

Замечание. Отметим, что полученное выражение есть одна частная проекция. Она получилась из-за того, что мы выбрали расположение контура определенным образом. (контур $ABCD$ лежит в плоскости Ouz .) Если выполнить поворот контура вокруг оси z на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке (тогда контур $ABCD$ будет лежать в плоскости Oxz). Тогда

$$\begin{cases} \vec{v} \rightarrow -\vec{\tau} \\ \vec{\tau} \rightarrow \vec{v} \end{cases} \quad (4.56)$$

Тогда граничное условие примет вид

$$H_v^{II} - H_v^I \Big|_{\Gamma} = -\frac{4\pi}{c} \cdot (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{\tau}) \quad (4.57)$$

Обе проекции граничного условия можно объединить в общее векторное выражение:

$$\boxed{[\vec{n}, \vec{H}^I - \vec{H}^{II}] \Big|_{\Gamma} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}_{\text{пов}}} \quad (4.58)$$

Замечание. Покажем, что векторное выражение (4.58) переходит в полученные ранее проекции. Умножим правую и левую части векторного равенства скалярно на вектор \vec{v}

$$(\vec{v}, [\vec{n}, \vec{H}^I - \vec{H}^{II}]) \Big|_{\Gamma} = \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{v}) \quad (4.59)$$

Воспользуемся свойством векторного произведения и перенесем скобки внутреннего векторного произведения со второго и третьего сомножителя к первому и второму сомножителю

$$\left(\underbrace{[\vec{v}, \vec{n}]}_{=-\vec{\tau}}, \vec{H}^I - \vec{H}^{II} \right) \Big|_{\Gamma} = (\vec{\tau}, \vec{H}^I - \vec{H}^{II}) \Big|_{\Gamma} = H_{\tau}^I - H_{\tau}^{II} \Big|_{\Gamma} \quad (4.60)$$

Здесь мы учли, что имеет место векторное произведение (см. рис. 4.5).

$$[\vec{v}, \vec{n}] = -\vec{\tau} \quad (4.61)$$

Поэтому получаем

$$H_{\tau}^{II} - H_{\tau}^I \Big|_{\Gamma} = \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{v}) \quad (4.62)$$

Это выражение совпадает с полученным ранее (4.55). Итак, из векторного обобщения (4.58) следует одна из проекций. Аналогично можно получить вторую проекцию (если умножить векторное выражение скалярно на вектор $\vec{\tau}$).

Выпишем полученные граничные условия:

$$\begin{aligned}
 E_{\tau}^I &= E_{\tau}^{II} \Big|_{\Gamma} \\
 D_n^I - D_n^{II} \Big|_{\Gamma} &= 4\pi\rho_{\text{пов}} \\
 B_n^I &= B_n^{II} \Big|_{\Gamma} \\
 \left[\vec{n}, \vec{H}^I - \vec{H}^{II} \right] \Big|_{\Gamma} &= \frac{4\pi}{c} \vec{i}_{\text{пов}}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Замечание. В процессе получения данных условий мы не пользовались материальными уравнениями. Значит, полученные условия справедливы как для изотропных, так и для анизотропных сред.

Замечание. Мы выбрали направление нормали \vec{n} из второй среды в первую. Это важно, так как сказывается на порядке вычитания в некоторых граничных условиях.

Эти выражения также бывает удобно представить в векторном виде

$$\begin{aligned}
 \left[\vec{n}, \vec{E}^I - \vec{E}^{II} \right] \Big|_{\Gamma} &= 0 \\
 \left(\vec{n}, \vec{D}^I - \vec{D}^{II} \right) \Big|_{\Gamma} &= 4\pi\rho_{\text{пов}} \\
 \left(\vec{n}, \vec{B}^I - \vec{B}^{II} \right) \Big|_{\Gamma} &= 0 \\
 \left[\vec{n}, \vec{H}^I - \vec{H}^{II} \right] \Big|_{\Gamma} &= \frac{4\pi}{c} \vec{i}_{\text{пов}}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Замечание. Часто требуется привлекать **естественные** граничные условия, выражающиеся в виде требования ограниченности модулей векторов электромагнитного поля

$$\begin{cases} |\vec{E}| < \infty \\ |\vec{H}| < \infty \end{cases} \tag{4.65}$$

во всех точках, где нет точечных зарядов или других источников поля исчезающе малых

размеров. При решении задач это требование следует учитывать особенно при описании поля в начале координат $r = 0$ или на бесконечно большом удалении от системы $r \rightarrow \infty$.

Лекция 5. Закон сохранения энергии в электродинамике покоящихся сред.

Энергия электромагнитного поля.

Ранее мы получили граничные условия. Эти условия позволяют выделять из множества решений те, что подходят к формулировке опрарвленных задач. Прежде чем решать задачи, рассмотрим некоторые дополнительные характеристики поля, которые можно ввести. Ранее, анализируя уравнения Максвелла в вакууме, мы получили выражения для энергии электромагнитного поля, плотности потока энергии электромагнитного поля и закон сохранения энергии. Рассмотрим этот закон в случае описания электромагнитных процессов в веществе. Попробуем получить энергию поля, используя те же методы, что и в случае электродинамики в вакууме.

Запишем уравнения Максвелла- Лоренца

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\cdot \vec{E} \\ &\cdot \vec{H} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Скалярно умножим первое уравнение на вектор \vec{E} , а второе – на вектор \vec{H} и вычтем из первого уравнения второе.

$$\underbrace{(\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E})}_{=-\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}]} = \frac{1}{c} \left\{ \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}, \vec{E}) \quad (5.2)$$

Воспользуемся тождеством векторной алгебры

$$\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) \quad (5.3)$$

тогда получим

$$-\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{1}{c} \left\{ \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}, \vec{E}) \quad \left| \times \frac{c}{4\pi} \right. \quad (5.4)$$

Умножим уравнение на $\frac{4\pi}{c}$ и перегруппируем слагаемые

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\} + \operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \right) + (\vec{j}, \vec{E}) = 0 \quad (5.5)$$

Отметим, что в прошлом семестре следующим шагом в получении закон сохранения энергии было выделение производной по времени в первой группе слагаемых. Однако в данном случае конструкция поменялась. Поэтому возникает вопрос: можно ли представить выражение в фигурных скобках в виде производной по времени от некоторой функции по t

$$\frac{\partial w}{\partial t} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\} \quad (5.6)$$

Отметим, что вообще говоря, ответ на этот вопрос отрицательный.

Замечание. Не всегда возможно ввести понятие энергии поля, как функции состояния.

Воспользуемся материальными уравнениями

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (5.7)$$

при этом $\varepsilon = const$ и $\mu = const$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \varepsilon \underbrace{\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}_{=\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}} + \mu \underbrace{\left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)}_{=\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t}} \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H}^2 \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Определение. Плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi} = \frac{(\vec{D}, \vec{E}) + (\vec{B}, \vec{H})}{8\pi} \quad (5.9)$$

Определение. Вектор Пойнтинга (плотность потока энергии электромагнитного поля)

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \quad (5.10)$$

Определение. Работа, совершаемая полем над свободными зарядами в единице объема вещества за единицу времени

$$(\vec{j}, \vec{E}) \quad (5.11)$$

Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma} + (\vec{j}, \vec{E}) = 0 \quad (5.12)$$

Запишем закон сохранения энергии в интегральной форме

$$\int_V dV \frac{\partial w}{\partial t} + \int_V \operatorname{div} \vec{\sigma} dV + \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV + \oint_S (\vec{\sigma}, d\vec{S}) + \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = 0 \quad (5.14)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\frac{d\varepsilon}{dt}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\frac{\partial\Phi_c}{\partial t}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\frac{\partial A}{\partial t}}$

Закон изменения импульса электромагнитного поля.

Запишем выражение для плотности силы, действующей на единицу объема вещества

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] \quad (5.15)$$

Выразим источники из уравнений Максвелла-Лоренца и выполним их подстановку в выражение для плотности силы

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D} \quad (5.16)$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\}$$

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right] \quad (5.17)$$

Построим вспомогательное выражение

$$0 = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} + \frac{1}{4\pi} \left[\underbrace{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0}, \vec{D} \right] \quad (5.18)$$

Сложив уравнения (5.17) и (5.18), получим

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \left[\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{D} \right] \right\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} + \left[\operatorname{rot} \vec{H}, \vec{B} \right] \right\} - \frac{1}{4\pi c} \left\{ \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right] + \left[\vec{D}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \right\} \quad (5.19)$$

Изменим порядок сомножителей в векторных произведениях и выделим производную по времени

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \left[\vec{D}, \operatorname{rot} \vec{E} \right] \right\}}_{=\vec{a}} + \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left\{ \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \left[\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{H} \right] \right\}}_{=\vec{b}} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\{ \frac{1}{4\pi c} \left[\vec{D}, \vec{B} \right] \right\}}_{=\vec{G}} \quad (5.20)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \left[\vec{D}, \operatorname{rot} \vec{E} \right] \\ \vec{b} &= \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \left[\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{H} \right] \\ \vec{G} &= \frac{1}{4\pi c} \left[\vec{D}, \vec{B} \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Преобразуем выражения для вектора \vec{a}

$$\vec{a} = \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \left[\vec{D}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E} \right] \right] = E \operatorname{div} \vec{D} - \vec{\nabla} \left(\vec{E}, \vec{D} \right) + \left(\vec{D}, \vec{\nabla} \right) \vec{E} \quad (5.22)$$

Запишем выражение для компоненты a^α в индексной форме

$$a^\alpha = E^\alpha \frac{\partial D^\beta}{\partial x^\beta} - \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\beta} \left(D_\mu \vec{E}^\mu \right) + D^\beta \frac{\partial E^\alpha}{\partial x^\beta} = E^\alpha \frac{\partial D^\beta}{\partial x^\beta} - \delta^{\alpha\beta} D_\mu \frac{\partial E^\mu}{\partial x^\beta} + D^\beta \frac{\partial E^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (5.23)$$

Выделим частную производную в первом слагаемом

$$a^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(E^\alpha D^\beta \right) - \cancel{D^\beta \frac{\partial E^\alpha}{\partial x^\beta}} - \delta^{\alpha\beta} D_\mu \frac{\partial E^\mu}{\partial x^\beta} + \cancel{D^\beta \frac{\partial E^\alpha}{\partial x^\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(E^\alpha D^\beta \right) - \delta^{\alpha\beta} D_\mu \frac{\partial E^\mu}{\partial x^\beta} \quad (5.24)$$

Аналогичным вычислением получим выражение для компонент вектора b^α

$$b^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(U^\alpha B^\beta \right) - \delta^{\alpha\beta} B_\mu \frac{\partial H^\mu}{\partial x^\beta} \quad (5.25)$$

Для проекций уравнения на оси системы координат получим

$$f^\alpha = \frac{1}{4\pi} a^\alpha + \frac{1}{4\pi} b^\alpha - \frac{\partial G^\alpha}{\partial t} \quad (5.26)$$

$$f^\alpha = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{E^\alpha D^\beta + H^\alpha B^\beta}{4\pi} \right) - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{4\pi} \left(D_\mu \frac{\partial E^\mu}{\partial x^\beta} + B_\mu \frac{\partial H^\mu}{\partial x^\beta} \right) \right\} - \frac{\partial b^\alpha}{\partial t} \quad (5.27)$$

Если среда изотропная

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (5.28)$$

и однородная, то $\varepsilon = const$ и $\mu = const$ тогда можно выделить производную

$$D_\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta} E^\mu = \varepsilon E_\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta} E^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\varepsilon \vec{E}^2) \quad (5.29)$$

$$B_\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta} H^\mu = \mu H_\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta} H^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\mu \vec{H}^2) \quad (5.30)$$

Выполним подстановку в выражение для плотности силы

$$f^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{4\pi} \left\{ \varepsilon E^\alpha E^\beta + \mu H^\alpha H^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} (\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) \right\} - \frac{\partial G^\alpha}{\partial t} \quad (5.31)$$

Определение. Будем называть **тензором напряжений натяжений Максвелла** величину

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \varepsilon E^\alpha E^\beta + \mu H^\alpha H^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} (\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) \right\} \\ \sigma^{\alpha\beta} &= \sigma^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Тогда выражение (3) примет вид

$$f^\alpha = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial G^\alpha}{\partial t} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\beta} + (\vec{j}, \vec{E}) = 0 \quad (5.34)$$

Определение. Будем называть **плотностью импульса электромагнитного поля** величину

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{D}, \vec{B}] \quad (5.35)$$

Замечание.

Вычислим силу, действующую на конечный объем вещества V в статическом поле $\partial_t \rightarrow 0$

$$F^\alpha = \int_V f^\alpha dV = \int_V \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} dV = \oint_S \sigma^{\alpha\beta} dS_\beta \quad (5.36)$$

Для вычисления силы, действующей на объем V в статическом поле, достаточно определить значение поля на границе этого объема

Лекция 6.



Лекция 7. Силы в электростатике диэлектриков.

При помещении диэлектрика в электрическое поле происходит его поляризация, в результате чего появляется отличная от нуля объёмная и поверхностная плотность связанных зарядов. Кроме того, диэлектрик может содержать некоторое количество объёмных и поверхностных "свободных" зарядов. В результате сила, действующая на диэлектрик со стороны внешнего поля может иметь достаточно сложный вид.

Вычислим силы, действующую на диэлектрик, используя вариационный принцип.

Рассмотрим диэлектрик, заряженный по объёму с плотностью свободных зарядов ρ , находящийся в электростатическом поле с напряжённостью \vec{E} .

Пусть поле **не вызывает пробоя диэлектрика**. Кроме того, будет считать процесс деформации диэлектрика во внешнем поле **изотермическим**.

Вычислим изменение энергии электростатического поля системы, вызванное изменением обобщенной энергии координаты α на величину $\delta\alpha$:

$$\delta\varepsilon_{es} = - \int f_a \delta a dV \quad (7.1)$$

f_a – плотность обобщенной силы, соответствующая координате a .

Замечание Если в качестве обобщённой координаты выбраны декартовы координаты радиус-вектора \vec{r} , указывающего в точку внутри объема диэлектрика, тогда

$$a \rightarrow \vec{r}, \quad \delta a \rightarrow \delta\vec{r}, \quad f_a \rightarrow f \quad (7.2)$$

где f – плотность ньютоновской силы, действующей на диэлектрик.

Поэтому

$$\delta\varepsilon_{es} = - \int (\vec{f}, \delta\vec{r}) dV \quad (7.3)$$

Воспользуемся выражением для энергии электростатического поля

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \rho\varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} (\vec{E}, \vec{D}) dV = \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \varepsilon \vec{E}^2 dV \quad (7.4)$$

$$\varepsilon_{es} = \int_{V_\infty} \left[\underbrace{\rho\varphi}_{=2 \cdot \varepsilon_{es}} - \underbrace{\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi}}_{=\varepsilon_{es}} \right] dV \quad (7.5)$$

где ρ – объёмная плотность свободных зарядов

Замечание Интеграл вычисляется по всему объёму, занятому полем V_∞ и внутри, и снаружи диэлектрика.

Перемещение $\delta \vec{r}$ приводит к приращению всех величин, входящих в выражение для энергии. Выполним варьирование выражения для энергии электростатической системы

$$\delta \varepsilon_{es} = \int_{V_\infty} \left[\delta \rho \varphi + \rho \delta \varphi - \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \delta \varepsilon - \frac{(\varepsilon \vec{E}, \delta \vec{E})}{4\pi} \right] dV \quad (7.6)$$

Преобразуем выражение в последнем слагаемом. Для этого учтем, что

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$(\varepsilon \vec{E}, \delta \vec{E}) = -(\vec{D}, \delta \vec{\nabla} \varphi) = -(\vec{D}, \vec{\nabla} \delta \varphi) = -\text{div}(\vec{D} \cdot \delta \varphi) + \delta \varphi \underbrace{\text{div} \vec{D}}_{=4\pi\rho} \quad (7.8)$$

Выполнив подстановку, получим

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{es} &= \int_{V_\infty} \left[\delta \rho \varphi + \rho \delta \varphi - \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \delta \varepsilon + \frac{\text{div}(\vec{D} \delta \varphi)}{4\pi} - \rho \delta \varphi \right] dV = \\ &= \int_{V_\infty} \left[\varphi \delta \rho - \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \delta \varepsilon \right] dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_\infty} (\vec{D} \delta \varphi, d\vec{S}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Выполним асимптотическую оценку поверхностного интеграла на границе объема V_∞

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r} \\ \delta \varphi \Big|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r^2} \\ |\vec{D}| \Big|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r^2} \\ |d\vec{S}| &\sim r^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\oint_{S_\infty} (\vec{D} \delta \varphi, d\vec{S}) \sim \frac{1}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (7.11)$$

Тогда получим

$$\boxed{\delta \varepsilon_{es} = \int_{V_\infty} \left[\varphi \delta \rho - \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \delta \varepsilon \right] dV} \quad (7.12)$$

Вычислим $\delta\rho$ – изменение плотности свободных зарядов в точке с радиус-вектором \vec{r}

$$\delta\rho(\vec{r}) = \delta_1\rho(\vec{r}) + \delta_2\rho(\vec{r}) \quad (7.13)$$

где $\delta_1\rho$ – изменение плотности заряда за счет перемещения объема $\delta\vec{r}$ $\delta_2\rho$ – изменение плотности заряда за счет деформации объема на $\delta\vec{r}$ (смещение границы объема на $\delta\vec{r}$)

Вычислим $\delta_1\rho$:

до перемещения в точке с радиус-вектором \vec{r} находился заряд с плотностью

$$\rho_{\text{до}} = \rho(\vec{r}) \quad (7.14)$$

После перемещения в точку с радиус-вектором \vec{r} переходит заряд из точки с радиус-вектором $\vec{r} - \delta\vec{r}$ с плотностью заряда

$$\rho_{\text{после}} = \rho(\vec{r} - \delta\vec{r}) \quad (7.15)$$

Вычислим изменение плотности заряда

$$\begin{aligned} \delta_1\rho &= \rho_{\text{после}} - \rho_{\text{до}} = \rho(\vec{r} - \delta\vec{r}) - \rho(\vec{r}) \cong \rho(\vec{r}) + \left(-\delta\vec{r}, \vec{\nabla}\right) \rho(\vec{r}) + \dots - \rho(\vec{r}) = \\ &= -\left(\delta\vec{r}, \vec{\nabla}\right) \rho(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\boxed{\delta_1\rho = -\left(\delta\vec{r}, \vec{\nabla}\rho\right)} \quad (7.17)$$

Найдем изменение плотности заряда, вызванное деформацией диэлектрика $\delta_2\rho$:

Обозначим

- $\rho_{\text{до}}$ – плотность заряда до деформации диэлектрика
- $\rho_{\text{после}}$ – плотность заряда после деформации диэлектрика

$$\delta_2\rho = \rho_{\text{после}} - \rho_{\text{до}} \quad (7.18)$$

Заряды жестко связаны с диэлектриком, поэтому после деформации объема полный заряд, содержащийся в нем не изменится

$$\begin{aligned} q_{\text{до}} &= q_{\text{после}} \\ \rho_{\text{до}} V &= \rho_{\text{после}} (V + \delta V) \\ \rho_{\text{до}} V &= \rho_{\text{после}} (V + \delta V) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Вычислим δV , используя

следует учесть, что $(\delta\vec{r}, d\vec{S})$ – объем элементарного цилиндра с основанием $d\vec{S}$ и высотой $\delta\vec{r}$.

Тогда получим

$$\delta V = V \operatorname{div} \delta\vec{r} \quad (7.20)$$

С точностью до слагаемых, линейных по $\delta\vec{r}$ найдем плотность заряда в выделенном объеме после деформации

$$\rho_{\text{после}} = \frac{\rho_{\text{до}} V}{V + \delta V} = \frac{\rho_{\text{до}} \mathcal{V}}{\mathcal{V} + \mathcal{V} \operatorname{div} \delta\vec{r}} = \frac{\rho_{\text{до}}}{1 + \operatorname{div} \delta\vec{r}} \cong \rho_{\text{до}} (1 - \operatorname{div} \delta\vec{r}) + \dots \quad (7.21)$$

Вычислим изменение плотности заряда $\delta_2\rho$

$$\delta_2\rho = \rho_{\text{после}} - \rho_{\text{до}} = \rho_{\text{до}} (1 - \operatorname{div} \delta\vec{r}) - \rho_{\text{до}} = - \underbrace{\rho_{\text{до}}}_{=\rho(\vec{r})} \operatorname{div} \delta\vec{r} = -\rho(\vec{r}) \operatorname{div} \delta\vec{r} \quad (7.22)$$

Найдем общее изменение плотности свободных зарядов в диэлектрике

$$\begin{aligned} \delta_1\rho &= -(\delta\vec{r}, \vec{\nabla}\rho) \\ \delta_2\rho &= -\rho \operatorname{div} \delta\vec{r} \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\delta\rho = \delta_1\rho + \delta_2\rho = -(\delta\vec{r}, \vec{\nabla}\rho) - \rho \operatorname{div} \delta\vec{r} = -\operatorname{div}(\rho\delta\vec{r}) \quad (7.24)$$

$$\boxed{\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\vec{r})} \quad (7.25)$$

Вычислим изменение диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$

$$\delta\varepsilon(\vec{r}) = \delta_1\varepsilon(\vec{r}) + \delta_2\varepsilon(\vec{r}) \quad (7.26)$$

$\delta_1\varepsilon$ – изменение диэлектрической проницаемости, вызванное перемещением объема диэлектрика на $\delta\vec{r}$ $\delta_2\varepsilon$ – изменение диэлектрической проницаемости за счёт деформации объема на $\delta\vec{r}$ (смещение границы объема на $\delta\vec{r}$)

1. Аналогично вычислению $\delta_1\rho$

$$\boxed{\delta_1\varepsilon = -(\delta\vec{r}, \vec{\nabla}\varepsilon)} \quad (7.27)$$

2. При изотермической деформации диэлектрика его диэлектрическая проницаемость

изменяется в соответствии с изменением его плотности τ

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau) \quad (7.28)$$

тогда

$$\delta_2 \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \delta_2 \tau \quad (7.29)$$

$\delta_2 \tau$ – изменение плотности среды при деформации, для которого, аналогично $\delta_2 \rho$ найдем

$$\delta_2 \tau = -\tau \operatorname{div} \delta \vec{r} \quad (7.30)$$

Общее изменение диэлектрической проницаемости примет вид

$$\delta \varepsilon = \delta_1 \varepsilon + \delta_2 \varepsilon = -\left(\delta \vec{r}, \vec{\nabla} \varepsilon\right) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \cdot \operatorname{div} \delta \vec{r} \quad (7.31)$$

Выполним подстановку полученных выражений в уравнение

$$\delta \varepsilon_{es} = \int_{V_\infty} dV \left[\varphi \delta \rho = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \delta \varepsilon \right] = \int_{V_\infty} dV \left[-\varphi \operatorname{div} (\rho \delta \vec{r}) + \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \left(\delta \vec{r}, \vec{\nabla} \varepsilon\right) + \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \cdot \tau \operatorname{div} \delta \vec{r} \right] \quad (7.32)$$

Выделим полную дивергенцию

$$-\varphi \operatorname{div} (\rho \delta \vec{r}) = -\operatorname{div} (\varphi \rho \delta \vec{r}) + (\rho \delta \vec{r}, \vec{\nabla} \varphi) = -\operatorname{div} (\varphi \rho \delta \vec{r}) + (\delta \vec{r}, \rho \vec{\nabla} \varphi) \quad (7.33)$$

$$\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \operatorname{div} \delta \vec{r} = \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \delta \vec{r} \right) - \left(\delta \vec{r}, \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \cdot \tau \right) \right) \quad (7.34)$$

Выполнив подстановку, найдем

$$\delta \varepsilon_{es} = \int_{V_\infty} dV \left[(\delta \vec{r}, \rho \vec{\nabla} \varphi) - \operatorname{div} (\rho \varphi \delta \vec{r}) + \frac{\vec{E}^2}{8\pi} (\delta \vec{r}, \vec{\nabla} \varepsilon) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \delta \vec{r} \right) - \left(\delta \vec{r}, \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) \right) \right] =$$

$$\int_{V_\infty} dV \left(\delta \vec{r}, \rho \vec{\nabla} \varphi + \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \vec{\nabla} \varepsilon - \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) \right) + \oint_{S_\infty} \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \delta \vec{r} - \rho \varphi \delta \vec{r}, d\vec{S} \right) \xrightarrow{0} \quad (7.35)$$

Поверхность S_∞ выходит за границы диэлектрика, поэтому на ней

Лекция 8.

Сила, действующая на проводник во внешнем поле.

Пусть \vec{E} – электростатическое поле вне проводника.

Запишем выражение для тензора напряжений Максвелла при условии, что магнитное поле отсутствует \vec{H} .

Вычислим на основании этого выражения силу, действующую на проводник.

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ E^\alpha E^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \vec{E}^2 \right\} \quad (8.1)$$

$$F^\alpha = \oint_S \sigma^{\alpha\beta} dS_\beta \quad (8.2)$$

Учтем, что на поверхности проводника электрическое поле направлено по нормали к его поверхности

$$E_\alpha = E \cdot n^\alpha \quad (8.3)$$

где $|\vec{n}| = 1$ а также учтем связь элемента площади dS_β с вектором нормали к поверхности проводника

$$dS_\beta = dS \cdot n_\beta \quad (8.4)$$

Тогда, для тензора напряжений Максвелла получим выражение

$$\sigma^\alpha = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ \vec{E}^2 \cdot n^\alpha n^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \vec{E}^2 \right\} = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{4\pi} \left\{ n^\alpha n^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \right\} \quad (8.5)$$

Вычислим силы, действующую на проводник

$$\begin{aligned} F^\alpha &= \oint_S \sigma^{\alpha\beta} dS_\beta = \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{4\pi} \left\{ n^\alpha n^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \right\} \cdot n_\beta dS = \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{n^\alpha \cdot n^\beta n_\beta}_{=1} - \underbrace{\frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} n_\beta}_{=\frac{n^\alpha}{2}} \right\} dS = \\ &= \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi} \cdot n^\alpha dS \quad (8.6) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi} \vec{n} dS \quad (8.7)$$

Энергия локальной системы проводников.

Рассмотрим системы, состоящую из N заряженных проводников.

Пусть проводник:

1. имеют ограниченный размер
2. расположены локально

Обозначим

$$V = V_\infty - \sum_{a=1}^N V_a \quad (8.8)$$

$$S = S_\infty + \sum_{a=1}^N S_a \quad (8.9)$$

Определим энергию электростатического поля в объеме V

$$\begin{aligned} \varepsilon_{es} &= \int_V \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{8\pi} dV = - \int_V \frac{(\vec{\nabla}\varphi, \vec{D})}{8\pi} dV = -\frac{1}{8\pi} \oint_S \{ \text{div}(\varphi \vec{D}) - \varphi \text{div} \vec{D} \} dV = \\ &= -\frac{2}{8\pi} \oint_S (\varphi \vec{D}, d\vec{S}) + \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \text{div} \vec{D} dV \quad (8.10) \end{aligned}$$

Учтем, что свободные заряды в объеме V отсутствуют, поэтому $\text{div} \vec{D} = 0$ во всех точках внутри объема, поэтому сохранится только интеграл по поверхности:

$$\varepsilon_{es} = -\frac{1}{8\pi} \oint_S (\varphi \vec{D}, d\vec{S}) = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} (\varphi \vec{D}, d\vec{S}) - \frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \oint_{S_a} (\varphi \vec{D}, d\vec{S}) \quad (8.11)$$

$\sim \frac{1}{r}$

На поверхности S_∞

$$\begin{aligned} \varphi|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r} \\ |\vec{D}|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r^2} \\ |D\vec{S}| &\sim r^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

На поверхности S_a

$$\varphi|_{S_a} = \varphi_a = \text{const} \quad (8.13)$$

Тогда получим

$$\mathcal{E}_{el} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \varphi_a \oint_{S_\infty} (\vec{D}, d\vec{S}) \quad (8.14)$$

Учтем, что

$$d\vec{S} = -d\vec{S}_a \quad (8.15)$$

а также, что

$$\oint_{S_a} (\vec{D}, d\vec{S}_a) = 4\pi q_a \quad (8.16)$$

где q_a – заряд проводника с номером (a).

Выполнив подстановку, найдем

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \varphi_a \oint_{S_a} (\vec{D}, d\vec{S}_a) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a \quad (8.17)$$

Окончательно выражение для энергии электростатического поля системы проводников имеет вид:

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a \quad \text{при условии } \varphi_a \rightarrow 0, \text{ для } r \rightarrow \infty \quad (8.18)$$

Утверждение. φ_a – потенциал проводника с зарядом (a) является линейной однородной функцией зарядов всех проводников системы

$$\varphi_a = \sum_{b=1}^N S_{ab} q_b \quad (8.19)$$

где $S_{ab} = S_{ba}$ – потенциальные коэффициенты, зависящие от формы проводников, их взаимного расположения и свойств среды, в которой проводники находятся.

Замечание. S_{ab} количественно совпадает с потенциалом проводника с номером (a), когда заряд проводника с номером (b) равен 1, а все остальные проводники заряжены.

$$\varphi_a = S_{ab} \underbrace{q_b}_{=1} \quad (8.20)$$

Утверждение. q_a – заряд проводника с номером (a) должен быть линейной однородной функцией всех проводников системы

$$q_a = \sum_{b=1}^N C_{ab} \varphi_b \quad (8.21)$$

где $C_{ab} = C_{ba}$ – ёмкостные коэффициенты, зависящие от формы проводников, их взаимного расположения и свойств среды, в которой проводники находятся.

1. Если $a = b$, тогда коэффициент C_{aa} называется **собственной ёмкостью проводника**. Количественно он совпадает с зарядом, который необходимо сообщить уединенному

проводнику, чтобы его потенциал (относительно бесконечности) был равен $\varphi_a = 1$.

$$C_{aa} > 0 \quad (8.22)$$

2. Если $a \neq b$, тогда C_{ab} наведываются **коэффициентами взаимной ёмкости**. Количественно коэффициент C_{ab} совпадает с зарядом, индуцированным на проводнике с номером (a) при условии, что $\varphi_b = 1$, а все остальные проводники системы заземлены $\varphi_c = 0$ (при $c \neq b$)

$$C_{ab} < 0 \quad (8.23)$$

Докажем утверждение о знаке коэффициентов взаимной емкости, рассмотрев систему из двух проводников (a) и (b) .

Если $\varphi_b = 1, q_b > 0$, заряд, индуцированный на проводнике с номером (a) (заземленном) под действием поля проводника (b) будет противоположного знака $q_a < 0$. Тогда

$$\underbrace{q_a}_{<0} = C_{ab} \cdot \underbrace{\varphi_b}_{>0} \quad (8.24)$$

Поэтому

$$C_{ab} < 0 \text{ при } a \neq b \quad (8.25)$$

запишем выражение для энергии электростатического поля системы проводников, используя потенциальные и ёмкостные коэффициенты

$$\mathcal{E}_{el} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N S_{ab} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N C_{ab} \varphi_a \varphi_b \quad (8.26)$$

при этом

$$\begin{aligned} S_{ab} &= C_{ab}^{-1} \\ S_{aa} S_{bb} &> S_{ab}^2 \\ C_{aa} C_{bb}^2 &> C_{ab}^2 \end{aligned} \quad (8.27)$$

Если \vec{E} – электростатическое поле вне проводника.

Запишем выражение для тензора напряжений Максвелла при условии, что магнитное поле отсутствует $\vec{H} = 0$.

Вычислим на основании этого выражения силу, действующую на проводник.

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ E^\alpha E^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \vec{E}^\alpha \right\} \quad (8.28)$$

$$F^\alpha = \oint_S \sigma^{\alpha\beta} ds_\beta \quad (8.29)$$

Учтем, что на поверхности проводника электрическое поле направлено по нормали к его поверхности

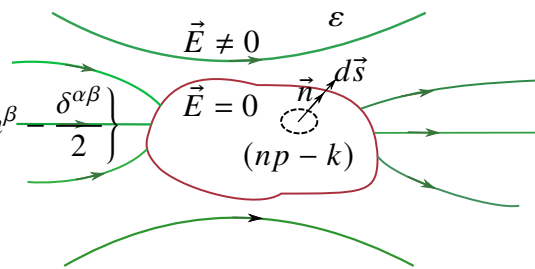
$$E^\alpha = E \cdot n^\alpha \quad (8.30)$$

где $|\vec{n}| = 1$ а также учтем связь элемента площади dS_β с вектором нормали к поверхности проводника

$$dS_\beta = dS \cdot n_\beta \quad (8.31)$$

Тогда, для тензора напряжений Максвелла получим выражение

$$\sigma^{\alpha\beta} dS_\beta = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ \vec{E}^2 \cdot b^\alpha n^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \vec{E}^\alpha \right\} = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{4\pi} \left\{ n^\alpha n^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \right\} \quad (8.32)$$



Вычислим силу, действующую на проводник

$$F^\alpha = \oint_S \sigma^{\alpha\beta} dS_\beta = \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{4\pi} \left\{ n^\alpha n^\beta - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} \right\} \cdot n_\beta dS = \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{n^\alpha \cdot n^\beta n_\beta}_{=1} - \underbrace{\frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} n_\beta}_{=\frac{n^\alpha}{2}} \right\} \cdot dS$$

$$= \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi} \cdot n^\alpha dS \quad (8.33)$$

Рис. 8.1: Иллюстрация к объяснению.

$$\vec{F} = \oint_S \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi} \vec{n} ds \quad (8.34)$$

Энергия локальной системы проводников.

Пусть проводники

1. имеют ограниченный размер
2. расположены локально

Обозначим

$$V = V_\infty - \sum_{a=1}^N V_a \quad (8.35)$$

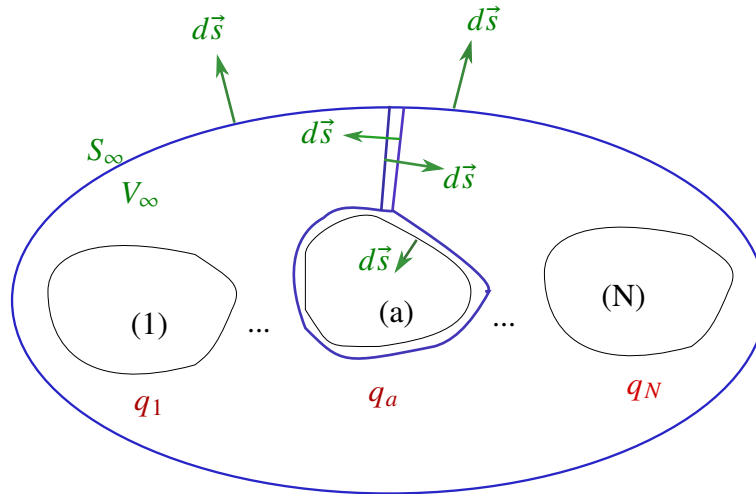


Рис. 8.2: Иллюстрация к объяснению.

$$S = S_\infty + \sum_{a=1}^N S_a \quad (8.36)$$

Определим энергию электростатического поля в объеме V

$$\begin{aligned} \varepsilon_{es} &= \int_V \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{8\pi} dV = - \int_V \frac{(\vec{\nabla}\varphi, \vec{D})}{8\pi} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_V \{ \text{div}(\varphi \vec{D}) - \varphi \text{div} \vec{D} \} dV = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_S (\varphi \vec{D}, d\vec{s}) + \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \text{div} \vec{D} dV \quad (8.37) \end{aligned}$$

Учтем, что свободные заряды в объеме V отсутствуют, поэтому $\text{div} \vec{D} = 0$ во всех точках внутри объема. Поэтому сохранится только интеграл по поверхности

$$\varepsilon_{es} = -\frac{1}{8\pi} \oint_S (\varphi \vec{D}, d\vec{s}) = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} (\varphi \vec{D}, d\vec{s}) - \frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \oint_{S_a} (\varphi \vec{D}, d\vec{s}) \quad (8.38)$$

(Note: In the original image, the term $\frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \oint_{S_a} (\varphi \vec{D}, d\vec{s})$ is crossed out with a red line and labeled $\sim \frac{1}{r}$)

На поверхности S_∞ :

$$\begin{aligned} \varphi|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r} \\ |\vec{D}|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r^2} \\ |d\vec{s}| &\sim r^2 \end{aligned} \quad (8.39)$$

На поверхности S_a :

$$\varphi|_{S_a} = \varphi_a = \text{const} \quad (8.40)$$

Тогда получим

$$\varepsilon_{es} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \varphi_a \oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) \quad (8.41)$$

Учтем, что

$$d\vec{S} = -d\vec{S}_a \quad (8.42)$$

а также что

$$\oint_{S_a} (\vec{D}, d\vec{S}_a) = 4\pi q_a \quad (8.43)$$

где q_a – заряд проводника с номером (a).

Выполнив подстановку, найдем

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{8\pi} \sum_{a=1}^N \varphi_a \oint_{S_a} (\vec{D}, d\vec{S}_a) - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a \quad (8.44)$$

Окончательно, выражение для энергии электростатического поля системы проводников примет вид

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a \quad \text{при } \varphi_a \rightarrow 0, \text{ для } r \rightarrow \infty \quad (8.45)$$

Утверждение. φ_a – потенциал проводника с номером (a) является линейной однородной функцией зарядов всех проводников системы

$$\varphi_a = \sum_{b=1}^N S_{ab} q_b \quad (8.46)$$

где $S_{ab} = S_{ba}$ – потенциальные коэффициенты, зависящие от формы проводников, их взаимного расположения и свойств среды, в которой проводники находятся.

Замечание. S_{ab} количественно совпадает с потенциалом проводника с номером (a), когда заряд проводника с номером (b) равен 1, а все остальные проводники заряжены.

$$\varphi_a = S_{ab} \underbrace{q_b}_{=1} \quad (8.47)$$

Утверждение. q_a – заряд проводника с номером (a) должен быть линейной однородной

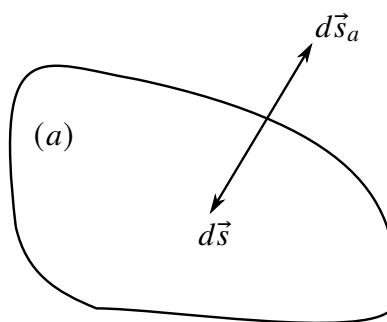


Рис. 8.3: Иллюстрация к объяснению.

функцией потенциалов всех проводников системы

$$q_a = \sum_{b=1}^N C_{ab} \varphi_b \quad (8.48)$$

где $C_{ab} = C_{ba}$ – ёмкостные коэффициенты, зависящие от формы проводников, их взаимного расположения и свойств среды, в которой проводники находятся.

1. Если $a = b$, тогда коэффициент C_{aa} называется **собственной ёмкостью проводника**. Количественно он совпадает с зарядом, который необходимо сообщить уединенному проводнику, чтобы его потенциал (относительно бесконечности) был равен $\varphi_a = 1$.

$$C_{aa} > 0 \quad (8.49)$$

2. Если $a \neq b$, тогда C_{ab} называются **коэффициентами взаимной ёмкости**. Количественно коэффициент C_{ab} совпадает с зарядом, индуцированным на проводнике с номером (a) при условии, что $\varphi_b = 1$, а все остальные проводники системы заземлены $\varphi_c = 0$ при $c \neq b$.

$$C_{ab} < 0 \quad (8.50)$$

Докажем утверждение о знаке коэффициентов взаимной ёмкости, рассмотрев систему из двух проводников (a) и (b).

Если $\varphi_b = 1$, $q_b > 0$ заряд, индуцированный на проводнике с номером (a) (заземленном) под действием поля проводника (b) будет противоположного знака $q_a < 0$. Тогда

$$\underbrace{q_a}_{<0} = C_{ab} \cdot \underbrace{\varphi_b}_{>0} \quad (8.51)$$

Поэтому $C_{ab} < 0$ при $a \neq b$

Запишем выражение для энергии электростатического поля системы проводников, используя потенциальные и емкостные коэффициенты

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N S_{ab} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N m C_{ab} \varphi_a \varphi_b \quad (8.52)$$

при этом:

$$\begin{aligned} S_{ab} &= C_{ab}^{-1} \\ S_{aa} S_{bb} &> S_{ab}^2 \\ C_{aa} C_{bb} &> C_{ab}^2 \end{aligned} \quad (8.53)$$

Лекция 9

Уравнения магнитостатики.

Магнитостатика описывает магнитные поля, созданные токами, не зависящими от времени.

Будем считать, что электромагнитное поле и его источники не изменяются со временем $\partial_t \rightarrow 0$.

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}) \quad (9.1)$$

В этом случае закон сохранения заряда для свободных источников примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (9.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (9.3)$$

Полученное ограничение на компоненты вектора плотности тока называется **условием стационарности тока в дифференциальной форме**.

Запишем систему уравнений Максвелла-Лоренца в случае стационарных токов и дополним ее материальным уравнением для тока

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \end{cases} \quad (9.4)$$

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{H}, Ext) \quad (9.5)$$

Материальные уравнения для тока.

Утверждение.

Для поддержания стационарных токов свободных зарядов необходимо существование источников *сторонних электродвижущих сил неэлектрического происхождения* (механических, электрохимических и т.д.)

Такие источники должны приводить заряды в движение в области своего действия.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \underbrace{q}_{=1} \oint_l (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = \oint_l \left(\underbrace{\vec{E}}_{=-\vec{\nabla}\varphi}, d\vec{l} \right) + \oint_l (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = \\ &= - \oint_l (\vec{\nabla}\varphi, d\vec{l}) + \oint_l (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = - \int_l^0 d\varphi + \oint_l (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = \oint_l (\vec{E}_{\text{стор}}, d\vec{l}) \end{aligned} \quad (9.6)$$

При относительно слабых полях для изотропных проводников материальное уравнение для токов можно записать в виде **закона Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \quad (9.7)$$

$\sigma = \sigma(\text{Ext})$ – проводимость среды, которая может зависеть от внешних условий **Ext**, например, от температуры и давления.

Если источники сторонних электродвижущих сил находятся вне рассматриваемой области, тогда материальное уравнение примет вид

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (9.8)$$

Замечание. Тепловая мощность тока $\frac{dQ}{dt}$ совпадает с работой, совершаемой полем при перемещении зарядов в проводнике за единицу времени, поэтому

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV \quad (9.9)$$

Уравнение для векторного потенциала стационарных токов и его решение.

Запишем уравнения Максвелла-Лоренца для магнитного поля стационарных токов в интегральной форме и дифференциальной формах

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j}, d\vec{s}) \\ \oint_S (\vec{B}, d\vec{s}) = 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Получим уравнение для векторного потенциала

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (9.11)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{ro \vec{A}}{\mu} \quad (9.12)$$

где $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$.

$$rot \vec{H} = \frac{1}{\mu} rot rot \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad | \times \mu \quad (9.13)$$

$$\vec{\nabla} div \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \quad (9.14)$$

Учтем калибровочное условие Лоренца

$$div \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (9.15)$$

$$div \vec{A} = 0 \quad (9.16)$$

Уравнение для потенциала и его решение примут вид

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}(\vec{r}) \quad (9.17)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (9.18)$$

Замечание.

При решении уравнения для потенциала в кусочно-однородной среде, граничные условия для векторов \vec{B} и \vec{H} следует переписать в терминах \vec{A} . Кроме того, необходимо учесть граничное условие для вектора плотности тока

$$div \vec{B} = 0 \quad (9.19)$$

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{s}) = 0 \quad (9.20)$$

$$B_n^I = B_n^{II} |_{\Gamma} \quad (9.21)$$

аналогично

$$div \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (9.22)$$

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{s}) = 0 \quad (9.23)$$

$$j_n^I = j_n^{II} \Big|_{\Gamma} \quad (9.24)$$

Условие нестационарности для линейного проводника с током.

Проводники, линейные размеры которых значительно превосходят характерный размер их поперечного сечения, будем называть **линейными проводниками**.

$$a \sim \sqrt{s} \ll L \quad (9.25)$$

Замечание.

В любом сечении линейного проводника плотность тока \vec{j} постоянная и сонаправлена с векторами $d\vec{l}$ касательных к проводнику

$$\vec{j} dl \approx j d\vec{l} \quad (9.26)$$

Окружим линейный проводник с током цилиндрической поверхностью S как показано на

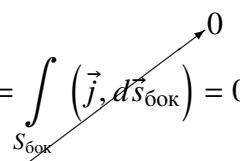
$$S = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}} \quad (9.27)$$

Воспользуемся условием стационарности тока и запишем его в интегральной форме

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (9.28)$$

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{s}) = 0 \quad (9.29)$$

Выберем в качестве поверхности S поверхность цилиндра, окружающего проводник.

$$\int_{S_1} (\vec{j}, d\vec{s}_1) + \int_{S_2} (\vec{j}, d\vec{s}_2) + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{j}, d\vec{s}_{\text{бок}}) = 0 \quad (9.30)$$


Так как проводник находится в непроводящей среде, то ток через боковую поверхность цилиндра не протекает, поэтому

$$j_n \Big|_{S_{\text{бок}}} = 0 \quad (9.31)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}d\vec{s}_1 &= -\vec{\tau} \cdot ds_1 \\d\vec{s}_2 &= \vec{\tau} \cdot ds_2\end{aligned}\tag{9.32}$$

Тогда найдем

$$-\underbrace{\int_{S_1} (\vec{j}, \vec{\tau}) ds_1}_{=-I_1} + \underbrace{\int_{S_2} (\vec{j}, \vec{\tau}) ds_2}_{=I_2} = 0\tag{9.33}$$

Утверждение. Условие стационарности примет вид

$$I_1 = I_2\tag{9.34}$$

Величина тока, протекающего через любое поперечное сечение линейного проводника, постоянна.

Лекция 10.

Энергия магнитного поля стационарных токов.

Пусть стационарные токи занимают конечную область пространства. Вычислим энергию магнитостатического поля.

$$\mathcal{E}_{es} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{B}, \vec{H}) dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{H}, \text{rot } \vec{A}) dV \quad (10.1)$$

Воспользуемся тождеством векторной алгебры

$$\text{div} [\vec{A}, \vec{H}] = (\vec{H}, \text{rot } \vec{A}) - (\vec{A}, \text{rot } \vec{H}) \quad (10.2)$$

Выполним подстановку и получим

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{8\pi} \int_V \left\{ \text{div} [\vec{A}, \vec{H}] + (\vec{A}, \text{rot } \vec{H}) \right\} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \text{div} [\vec{A}, \vec{H}] dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \left(\vec{A}, \underbrace{\text{rot } \vec{H}}_{=\frac{4\pi}{c}\vec{j}} \right) dV \quad (10.3)$$

Для стационарных токов выполняется уравнение

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad (10.4)$$

Тогда найдем, что

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{8\pi} \oint_S \left([\vec{A}, \vec{H}], d\vec{s} \right) + \frac{1}{2c} \int_V (\vec{A}, \vec{j}) dV \quad (10.5)$$

Выполним асимптотическую оценку поверхностного интеграла при условии, что точки на поверхности интегрирования удалены от системы токов на расстояние, значительно превышающее линейный размер этой системы

$$S \rightarrow S_\infty \quad (10.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\vec{A}|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r^2} \\ |\vec{H}|_{S_\infty} &\sim \frac{1}{r^3} \\ |d\vec{s}| &\sim r^2 \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$\oint_{S_\infty} \left([\vec{A}, \vec{H}], d\vec{s} \right) \sim \frac{1}{r^3} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (10.8)$$

Окончательное выражение для энергии магнитостатического поля примет вид

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{2c} \int_V (\vec{j}, \vec{A}) dV \quad (10.9)$$

Энергия системы линейных контуров с токами.

Рассмотрим систему, состоящую из N непересекающихся тонких контуров со стационарными токами.

Воспользуемся принципом суперпозиции для векторного потенциала и плотности тока

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N \vec{j}_a(\vec{r}) \quad (10.10)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{b=1}^N \vec{A}_b(\vec{r}) \quad (10.11)$$

При этом векторный потенциал поля отдельно взятого контура определятся выражением

$$\vec{A}_b(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int dV' \frac{\vec{j}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.12)$$

Вычислим энергию магнитного поля контуров с токами

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ms} &= \frac{1}{2c} \int (\vec{j}, \vec{A}) dV = \frac{\mu}{2c^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \int dV \int dV' \frac{\left(\overbrace{\vec{j}_a(\vec{r})}^{\sim I_a}, \overbrace{\vec{j}_b(\vec{r}') }^{\sim I_b} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{2c^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N L_{ab} I_a I_b \end{aligned} \quad (10.13)$$

Утверждение. Плотность тока в проводнике с номером (a) \vec{j}_a должна быть линейной однородной функцией полного тока в этом проводнике I_a . Энергия магнитного поля должна быть однородной квадратичной формой относительно тока в проводниках.

Коэффициенты L_{ab} называются **индуктивными коэффициентами**

1. Если $a = b$, тогда L_{aa} называется **коэффициентом самоиндукции**, $L_{aa} > 0$

2. Если $a \neq b$, тогда L_{ab} называется **коэффициентом взаимной индукции** L_{ab} –
знаконеопределен

Замечание. Из условия положительной определенности энергии магнитного поля
следует, что

$$L_{aa} \cdot L_{bb} \geq L_{ab}^2 \quad (10.14)$$

Вычислим L_{ab} для системы линейных (тонких) контуров с токами.

$$L_{ab} = \frac{\mu}{I_a I_b} \int dV \int dV' \frac{(\vec{j}_a(\vec{r}), \vec{j}_b(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.15)$$

Учтем, что элементы объема линейных проводников могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} dV &= dS_a^\perp dl_a \\ dV' &= dS_b'^\perp dl_b' \end{aligned} \quad (10.16)$$

Выполнив подстановку, получим

$$L_{ab} = \frac{\mu}{I_a I_b} \int dS_a^\perp \oint_{l_a} \oint_{l_b} \frac{(dl_a \vec{j}_a(\vec{r}), dl_b' \vec{j}_b(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.17)$$

Кроме того, для линейных проводников выполняются приближения

$$dl_a \vec{j}_a(\vec{r}) \approx \vec{dl}_a j_a(\vec{r}) \quad (10.18)$$

$$dl_b' \vec{j}_b(\vec{r}') \approx \vec{dl}_b' j_b(\vec{r}') \quad (10.19)$$

Выполним подстановку и изменим порядок интегрирования

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \frac{\mu}{I_a I_b} \int dS_a^\perp \int dS_b'^\perp \oint_{l_a} \oint_{l_b} j_a(\vec{r}) j_b(\vec{r}') \frac{(d\vec{l}_a, d\vec{l}_b')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{\mu}{I_a I_b} \oint_{l_a} \oint_{l_b} \frac{(d\vec{l}_a, d\vec{l}_b')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\int dS_a^\perp j_a(\vec{r})}_{I_a = \text{const}} \underbrace{ds_b'^\perp j_b(\vec{r}')}_{I_b = \text{const}} = \\ &= \frac{\mu}{I_a I_b} \cdot I_a I_b \cdot \oint_{l_a} \oint_{l_b} \frac{(d\vec{l}_a, d\vec{l}_b')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (10.20)$$

слабо изменится в сечении проводника

$$L_{ab} = \mu \oint_{l_a} \oint_{l_b} \frac{(d\vec{l}_a, d\vec{l}'_b)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.21)$$

Замечание. Коэффициенты взаимной индукции симметричны относительно перестановки индексов

$$L_{ab} = L_{ba} \quad (10.22)$$

Магнитный поток.

Рассмотрим систему состоящую из N непересекающихся, тонких контуров с токами.

Пусть S_a – произвольная незамкнутая поверхность, натянутая на контур с номером (a) .

Вычислим энергию магнитного поля создаваемого токами.

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{2c} \int (\vec{j}, \vec{A}) dV \quad (10.23)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N \vec{j}_a(\vec{r}) \quad (10.24)$$

Для тонкого проводника представим элемент объема интегрирования в виде

$$dV = dS_a^\perp dl_a \quad (10.25)$$

где dl_a – элемент длины проводника, а dS_a^\perp – элемент площади поперечного сечения провода, из которого изготовлен контур.

Тогда выражение для энергии магнитного поля системы контуров примет вид

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N \int dV (\vec{j}_a, \vec{A}) = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N \int_{S_a^\perp} dS_a^\perp \oint_{l_a} (dl_a \vec{j}_a, \vec{A}) \quad (10.26)$$

Так как проводники тонкие, то векторный потенциал слабо изменяется при переходе от одной точки сечения проводника к другой точке этого же сечения. Кроме того, вектор плотности тока сонаправлен с вектором, касательным к проводнику в каждой точке контура (сонаправлен с элементом длины):

$$dl_a \vec{j}_a \approx d\vec{l}_a j_a \quad (10.27)$$

$$\vec{A}|_{S_a^\perp} \approx const \quad (10.28)$$

Выполнив подстановку и изменив очередность интегрирования, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ms} &= \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N \int_{l_a} (d\vec{l}_a, \vec{A}) \underbrace{\int_{S_a^\perp} j_a dS_a^\perp}_{I_a = \text{const}} = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N I_a \int_{l_a} (d\vec{l}_a, \vec{A}) = \\ &= \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N I_a \int_{S_a} \left(d\vec{S}_a, \underbrace{\text{rot } \vec{A}}_{=\vec{B}} \right) = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N I_a \int_{S_a} (\vec{B}, d\vec{S}_a)\end{aligned}\quad (10.29)$$

Будем называть интеграл по поверхности

$$\Phi_a = \int_{S_a} (\vec{B}, d\vec{S}) \quad (10.30)$$

потоком вектора индукции \vec{B} через поверхность S_a , натянутую на контур.

Выразим энергию магнитного поля системы контуров через поток Φ_a

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N I_a \Phi_a \quad (10.31)$$

Установим связь между потоком Φ_a и индуктивными коэффициентами L_{ab}

$$\mathcal{E}_{ms} = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N I_a \Phi_a = \frac{1}{2c^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N L_{ab} I_a I_b \quad (10.32)$$

Так как равенство выполняется для произвольных токов I_a , следует потребовать, чтобы коэффициенты перед токами I_a в обеих частях равенства были одинаковыми. Тогда получим

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_{b=1}^N L_{ab} I_b \quad (10.33)$$

Лекция 11.

Квазистационарное приближение.

Запишем уравнения Максвелла-Лоренца и дополним их материальными уравнениями для изотропной среды.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{=\vec{j}_{\text{ст}}} \right\} \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{j} = \sigma\vec{E} \end{array} \right. \quad (11.1)$$

Будем считать, что векторы $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ могут зависеть от времени с некоторыми ограничениями.

1. В качестве первого из таких ограничений примем требование малости модуля плотности тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ по сравнению с модулем плотности тока проводимости \vec{j}

$$|\vec{j}| \gg \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = |\vec{j}_{\text{см}}| \quad (11.2)$$

Это условие приводит к ограничению сверху на частоту изменения поля

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{D}| = \varepsilon |\vec{E}| \\ |\vec{j}| = \sigma |\vec{E}| \\ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega \\ \sigma |\vec{E}| \gg \varepsilon \omega |\vec{E}| \end{array} \right. \quad (11.3)$$

$$\boxed{\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}} \quad (11.4)$$

2. В качестве второго ограничения потребуем малость слагаемого с током смещения по сравнению с $|\text{rot } \vec{H}|$

$$|\text{rot } \vec{H}| \gg \frac{4\pi}{c} |\vec{j}_{\text{см}}| = \frac{1}{c} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \quad (11.5)$$

Пусть L – характерный размер системы, а ω – характерная частота изменения поля.

Выполним оценку по порядку величины для выражений

$$\begin{cases} |rot \vec{H}| \sim \frac{|\vec{H}|}{L} \\ \frac{1}{c} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \sim \frac{\omega \epsilon}{c} |\vec{E}| \end{cases} \quad (11.6)$$

Из принятого ограничения следует, что

$$\frac{|\vec{H}|}{L} \gg \frac{\epsilon \omega}{c} |\vec{E}| \quad (11.7)$$

Чтобы установить соотношение между $|\vec{E}|$ и $|\vec{H}|$, воспользуемся уравнением

$$rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.8)$$

$$\underbrace{|rot \vec{E}|}_{\sim \frac{|\vec{E}|}{L}} = \frac{1}{c} \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right|}_{\sim \frac{\omega \mu}{c} |\vec{H}|} \quad (11.9)$$

$$\frac{|\vec{E}|}{L} \sim \frac{\omega \mu}{c} |\vec{H}| \quad (11.10)$$

$$|\vec{H}| \sim \frac{c}{\mu \omega L} |\vec{E}| \quad (11.11)$$

Выполним подстановку последнего соотношения в выражение получим

$$\frac{c}{\mu \omega L^2} |\vec{E}| \gg \frac{\epsilon \omega}{c} |\vec{E}| \quad (11.12)$$

$$\omega^2 L^2 \ll \frac{c^2}{\epsilon \mu} \quad (11.13)$$

Обозначим

$$c_m = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (11.14)$$

– *скорость распространения излучения в изотропной среде*. С учетом этого обозначения получим

$$\boxed{\frac{\omega L}{c_m} \ll 1} \quad (11.15)$$

Выражение можно записать в альтернативной форме, если учесть связь между характерной

длиной волны в среде λ и соответствующей ей частотой ω

$$\frac{\omega}{c_m} \sim \frac{1}{\lambda} \quad (11.16)$$

Запишем уравнения Максвелла-Лоренца в квазистатическом приближении и дополним их материальными уравнениями для изотропной (и однородной) проводящей среды.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{array} \right. \quad (11.17)$$

$$\mu, \varepsilon, \sigma = \text{const}$$

Замечание. По сравнению с уравнениями магнитостатики добавлено уравнение, являющееся следствием закона Фарадея.

Замечание. Для согласованности первого уравнения системы с первым законом сохранения заряда следует потребовать, чтобы

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (11.18)$$

и

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (11.19)$$

Получим уравнения для поля и тока в проводнике. Подействуем операцией ротора на первое уравнение системы

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \operatorname{rot} \vec{E} \quad (11.20)$$

$$\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \sigma \operatorname{rot} \vec{E} \quad (11.21)$$

Воспользуемся материальными уравнениями

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (11.22)$$

где $\mu = \text{const}$

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{H} = -\frac{4\pi}{c^2} \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (11.23)$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (11.24)$$

Тогда, учитывая что

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \quad (11.25)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \vec{H} \quad (11.26)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \Delta \vec{E} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \Delta \vec{j} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.27)$$

d



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ