ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. ЧАСТЬ 1

ОСТАНИНА
МАРГАРИТА ВЛАДИМИРОВНА

ФИЗФАК МГУ

Оглавление

Лекция 1. Математическое введение

Базовые операции с векторами

Электродинамика – второй курс теоретической физики, состоит из двух частей: электродинамика и электродинамика сплошных сред. Первая рассматривает теорию потенциала и теорию относительности в вакууме, а вторая те же темы, но в присутствии среды. Курс основывается на уравнениях Максвелла, выведенных в 1862 году. Это дифференциальные уравнения для функций трёх переменных. В данном разделе мы рассматриваем математические приёмы и методы, необходимые для работы с этими уравнениями.

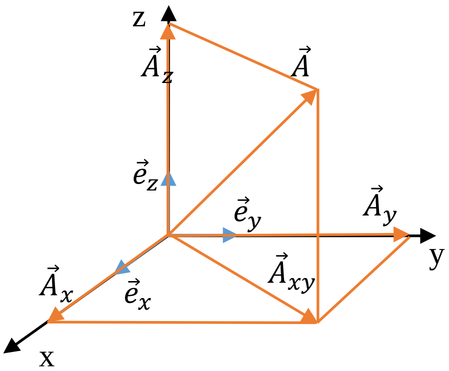

Рис. 1.1. Система координат

Мы будем работать в системе координат xyz с ортонормированным базисом векторов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, удовлетворяющих условию $[\vec{e}_x, \vec{e}_y] = \vec{e}_z$. Вектор $\vec{A}$ в данном базисе представим в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \tag{1.1}$$

В таком случае вектор имеет декартовы координаты $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Пусть дан ещё один вектор $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, тогда суммарный вектор $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ определяется как

$$\vec{C} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{1.2}$$

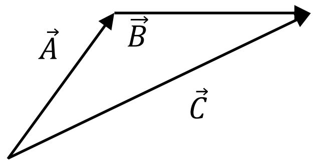

Рис. 1.2. Сложение векторов

Скалярное произведение векторов определяется как

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.3}$$

Длина вектора определяется как норма в пространстве векторов, то есть с помощью скалярного произведения

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\left(\vec{A},\vec{A}\right)} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.4}$$

Векторное произведение векторов является антисимметричным и определяется как

$$\left[\vec{A},\vec{B}\right] = -\left[\vec{B},\vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \vec{e}_y\left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \vec{e}_z\left(A_x B_y - A_y B_x\right) \tag{1.5}$$

Смешанное произведение трёх векторов $\left(\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right)$ обладает перестановочным свойством $\left(\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right) = \left(\left[\vec{A},\vec{B}\right],\vec{C}\right)$ и вычисляется с помощью определителя

$$\left(\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

Двойное векторное произведение:

$$\left[\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A},\vec{B}\right) \tag{1.7}$$

В произвольных ортогональных координатах индексы базисных векторов будут пробегать не буквы x, y, z, а цифры 1, 2, 3.

Дифференциальные операторы rot, div, grad

В электродинамике градиент связывает потенциал с электрическим полем, дивергенция связывает поля с зарядами, а ротор описывает вихревые магнитное и электрическое поле. Градиент является вектором, направление которого указывает направление наискорейшего подъёма. В декартовых координатах градиент определяется как

$$\mathrm{grad}\psi = \vec{e}_{\mathrm{x}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{x}} + \vec{e}_{\mathrm{y}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{y}} + \vec{e}_{\mathrm{z}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{z}} \tag{1.8}$$

Для удобства в дальнейшем введём оператор $\vec{\nabla}$ («набла»):

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}} + \vec{e}_{\mathrm{y}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{y}} + \vec{e}_{\mathrm{z}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{z}} \tag{1.9}$$

В данной нотации можно переписать градиент функции как действие оператора набла на функцию

$$\mathrm{grad}\psi = \vec{\nabla}\psi \tag{1.10}$$

Дивергенция вектора определяется следующим образом

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.11}$$

и характеризует «силу» источника векторного поля. Например, дивергенция радиус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$div\,\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \tag{1.12}$$

Длина радиус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (без стрелочки) и сам радиус вектор $\vec{r}$ (со стрелочкой) существенно разные объекты. Пусть имеются векторы $\vec{r}$ и $\vec{r'}$ одинаковой длины, но разные по направлению. Тогда разность длин $|r - r'| = 0$, но длина разности векторов $\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|$ не равна нулю.

С помощью оператора набла можно записать ротор как скалярное произведение набла на вектор

$$div\vec{A} = \left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) \tag{1.13}$$

Ротор вектора определяется с помощью определителя

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] \tag{1.14}$$

Физический смысл ротора – угловая скорость поворота вектора, при перемещении от точки к точке.

В координатах, отличных от декартовых, базисные вектора должны быть ортогональны и составлять правую тройку векторов, то есть

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3 \tag{1.15}$$

Например, в цилиндрической системе координат (Рис. 1.3.) проекция радиус-вектора на плоскость (x, y) называется ρ, а проекции на оси x и y связаны с углом φ соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \tag{1.15}$$

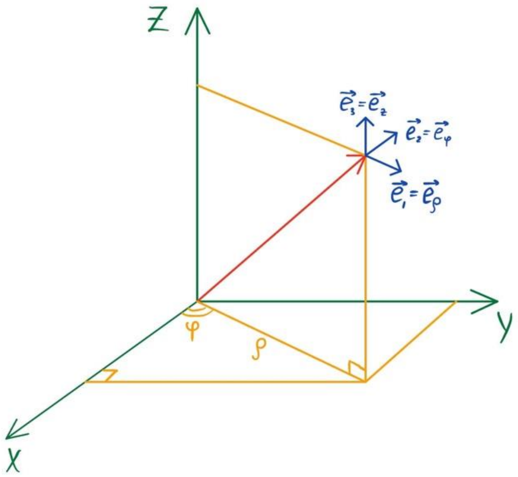

Рис. 1.3. Цилиндрическая система координат

Независимыми координатами в данном примере являются (ρ, φ, z). Области значений переменных $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $-\infty \leq z < \infty$. Орты направлены по направлению роста переменной.

Сферическая система координат определяется длиной радиус-вектора r, углом между радиус-вектором и осью z – θ и углом φ. Области значений переменных $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $0 \leq \theta < \pi$.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \tag{1.16}$$

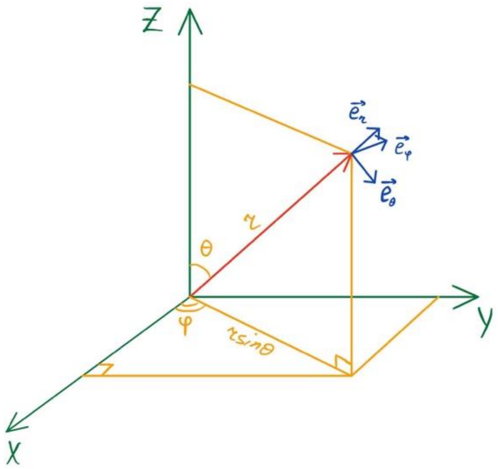

Рис. 1.4. Сферическая система координат

Правая тройка векторов в этом случае $[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta] = \vec{e}_\varphi$.

Параметры Ламэ

Параметры Ламэ определяются как производные старых координат по новым

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i}\right)^2} \tag{1.17}$$

Например, для цилиндрических координат:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} \tag{1.18}$$

Из уравнений (1.15) находим

$$h_1 = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1 \tag{1.19}$$

Аналогично определяются параметры $h_2 = \rho$ и $h_3 = 1$.

В случае сферических координат $h_1 = 1$, $h_2 = r$ и $h_3 = r\sin\theta$.

Элемент объёма в новых координатах записывается следующим образом:

$$dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3 \tag{1.20}$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \qquad \text{в цилиндрических координатах}$$
$$dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi \qquad \text{в сферических координатах}$$

С помощью параметров Ламэ можно записать дифференциальные операторы в произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$grad\ \psi = \frac{1}{h_1}\vec{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{1}{h_2}\vec{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}_2} + \frac{1}{h_3}\vec{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}_3} \tag{1.21}$$

$$div\ \vec{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial(h_2 h_3 B_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 B_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 B_{3)}}{\partial x_3}\right\} \tag{1.22}$$

$$rot\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_x & h_2\vec{e}_y & h_3\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

Оператор Лапласа определяется как дивергенция градиента

$$\Delta\psi = div\ grad\ \psi = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)\right] \quad (1.24)$$

В качестве примера рассмотрим оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах. В цилиндрических координатах

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (1.25)$$

В сферических координатах

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad (1.26)$$

Дифференциальные операторы в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{grad}\psi = \vec{e}_\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (1.27)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.28)$$

$$rot\ \vec{A} = \vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho A_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right) \quad (1.29)$$

Дифференциальные операторы в сферических координатах:

$$\operatorname{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\mathrm{r}\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \quad (1.30)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[A_r r^2] + \frac{1}{\mathrm{r}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[A_\theta\sin\theta] + \frac{1}{\mathrm{r}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}[A_\phi] \quad (1.31)$$

$$rot\ \vec{A} = \frac{1}{\mathrm{r}\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi \quad (1.32)$$

Отдельно упомянем оператор $(\vec{A},\vec{\nabla}) \neq (\vec{\nabla},\vec{A})$. В самом деле, этот оператор представляет собой скалярное произведение двух векторов:

$$(\vec{A},\vec{\nabla}) = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z} \quad (1.33)$$

Действие такого оператора, например, на вектор $\vec{B}$ осуществляется следующим образом

$$(\vec{A},\vec{\nabla})\,\vec{B} = \vec{e}_x\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{e}_z\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \tag{1.34}$$

Вычислим действие оператора набла на скалярное произведение $\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B})$. Поскольку набла представляет собой производную, то действие на сомножители должно происходить в соответствии с правилом Лейбница:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B}) = \vec{\nabla}\left(\breve{\vec{A}}\vec{B}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{A}\breve{\vec{B}}\right),$$

где значок $\smile$ обозначает вектор, на который действует оператор набла. Для того, чтобы понять, как подействовать оператором набла внутрь скалярного произведения, попробуем вычислить вспомогательную величину $\left[\vec{B}\left[\vec{\nabla}\breve{\vec{A}}\right]\right]$, где оператор набла действует только на вектор A:

$$\left[\vec{B}\left[\vec{\nabla}\breve{\vec{A}}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\breve{\vec{A}}\vec{B}\right) - \breve{\vec{A}}(\vec{B}\vec{\nabla}) = \vec{\nabla}\left(\breve{\vec{A}}\vec{B}\right) - (\vec{B}\vec{\nabla})\breve{\vec{A}} \tag{1.35}$$

Воспользуемся этим соотношением, чтобы выразить из него первое слагаемое и получить выражение для градиента скалярного произведения (где набла действует только на вектор справа от оператора)

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} + \left[\vec{A}[\vec{\nabla}\vec{B}]\right] + \left[\vec{B}[\vec{\nabla}\vec{A}]\right] \tag{1.36}$$

Аналогично можно записать следующие выражения

$$\mathrm{gra\,d}(\varphi\psi) = \psi\mathrm{grad}\varphi + \varphi\mathrm{grad}\psi$$

$$\mathrm{di\,v}(\psi\vec{\mathrm{A}}) = (\mathrm{grad}\psi\vec{\mathrm{A}}) + \psi\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}}$$

$$\mathrm{rot}[\vec{A}\,\vec{B}] = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\mathrm{rot}(\psi,\bar{A}) = \psi\mathrm{ro\,t}\,\bar{A} + [\mathrm{grad}\psi,\bar{A}]$$

$$\mathrm{di\,v}[\bar{A}\bar{B}] = (\bar{B}\mathrm{ro\,t}\,\bar{A}) - (\bar{A}\mathrm{ro\,t}\,\bar{B})$$

$$\mathrm{rot\,grad}\,\psi = [\nabla,\mathrm{gra\,d}\,\psi] = [\vec{\nabla},\vec{\nabla}\psi] = [\vec{\nabla},\vec{\nabla}]\psi = 0$$

$$\mathrm{div\,rot}\,\vec{A} = (\vec{\nabla},\mathrm{rot}\,\vec{A}) = (\vec{\nabla},[\vec{\nabla}\vec{\mathrm{A}}]) = ([\vec{\nabla},\vec{\nabla}]\vec{A}) = 0$$

$$\Delta\vec{A} = \mathrm{grad\,div}\,\vec{A} - \mathrm{rot\,rot}\,\vec{A}$$

Интегральные соотношения

В электродинамике широкое применение находят различные интегральные теоремы. Одна из них – теорема Остроградского-Гаусса, она связывает дивергенцию векторного поля с потоком этого векторного поля через замкнутую поверхность:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \left(\vec{A} d\vec{S}\right) = \oint_S \left(\vec{A}\vec{n}\right) dS \tag{1.37}$$

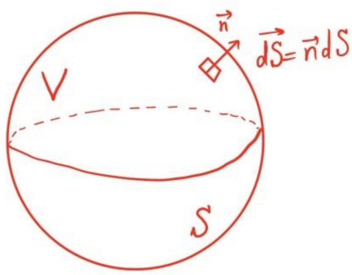

Рис. 1.5. Теорема Остроградского-Гаусса

Теорема Стокса связывает поток ротора векторного поля через поверхность с циркуляцией этого поля вдоль односвязного контура, являющегося границей поверхности:

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{A}\, d\vec{S} = \oint_L \left(\bar{A}\, d\bar{\ell}\right) \tag{1.38}$$

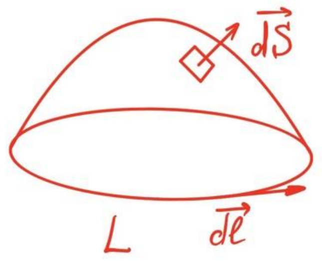

Рис. 1.6. Теорема Стокса

Единичный вектор в направлении радиус-вектора определяется как

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

или в сферических координатах $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Также крайне полезным окажутся интегралы вида

$$\int n_\alpha n_\beta d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta d\varphi \, n_\alpha n_\beta = \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta} \tag{1.39}$$

$$\int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta d\varphi \, n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta = \frac{4\pi}{15}\left[\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}\right] \tag{1.40}$$

Дельта-функция

Для описания точечных зарядов, не обладающих размером, удобно пользоваться дельта-функцией, которая определяется следующим образом:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \tag{1.41}$$

Дельта-функция является нормированной, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = 1 = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x - x_0)dx \tag{1.42}$$

Однако если верхний или нижний предел интегрирования попадает в ноль дельта-функции, то ответ будет равен 0.5

$$\int_{x_0}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = \int_{-\infty}^{x_0} \delta(x - x_0)dx = \frac{1}{2} \tag{1.43}$$

Основные свойства дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \tag{1.44}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\delta(x - x_0)dx = \frac{1}{2}f(x_0) \tag{1.45}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \tag{1.46}$$

$$\delta\big(F(x)\big) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta(x - x_k)}{\left|\frac{dF(x_k)}{dx}\right|} \tag{1.47 }$$

где в формуле (1.47) x_k – нули функции F(x). Будет полезным Фурье-преобразование

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x - x_0)} \tag{1.48}$$

Определена также трёхмерная дельта-функция

$$\delta(\tilde{r} - \bar{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \tag{1.49}$$

Для трёхмерной дельта-функции также выполняются соотношения:

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV = f(\overrightarrow{r_0}) \tag{1.50}$$

Кроме того, дельта-функция в трёх измерениях связана с оператором Лапласа следующими соотношениями:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_0}|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \tag{1.51}$$

$$\Delta \int \frac{f(\overrightarrow{r_0}, t)dV_0^2}{|\vec{r} - \bar{r}_0|} = -4\pi f(\overrightarrow{r_0}) \tag{1.52}$$

Лекция 2. Уравнения Максвелла и их физическое обоснование

Понятия плотности заряда и плотности тока

Прежде чем записывать уравнения Максвелла введем понятия плотности заряда и плотности тока. Природу электричества пытались объяснить по-разному. Древние греки считали, что существует электричество стеклянное и смоляное. Позже считалось, что носителями зарядов являются жидкости разных родов. По аналогии с жидкостями вводилось понятие плотности заряда:

$$\rho(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \tag{2.1}$$

где Δq – количество заряда, которое попадает в объем ΔV.

Плотность тока:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{v}, \tag{2.2}$$

где $\vec{v}$ – скорость движения носителей свободного заряда.

Аналогично с зарядом объемным мы можем внести понятие заряда поверхностного:

$$\sigma(\vec{r},t) = \rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \tag{2.3}$$

где ΔS – площадь поверхности.

Поверхностная плотность тока:

$$\vec{j_S}(\vec{r},t) = \sigma(\vec{r},t)\vec{v} \tag{2.4}$$

Введем также линейную плотность заряда (где заряд относится к единице длины ΔL):

$$\kappa(\vec{r},t) = \rho_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} \tag{2.5}$$

В последствии выяснилось, что носителями являются не жидкости, а дискретные носители (с классической точки зрения) – электроны. Однако так как в веществе их моли, то их дискретность в общем не влияет на возможность использования плотности, так как такое количество заряда может рассматриваться как некоторое непрерывное распределение заряда. Однако если мы рассматриваем точечный заряд, то в таком случае нам нужно вводить другие понятия.

Если в какой-то точке на конце радиуса $\vec{r_0}(t)$, который может меняться со временем, находится заряд q, и наблюдатель находится на конце радиус-вектора $\vec{r}$, то плотность точечного заряда равна нулю везде кроме собственно того места, где находится этот точечный заряд (рис. 2.1). Поскольку объем точки равен нулю, то плотность точечного заряда бесконечна в $\overrightarrow{r_0}(t)$, тогда плотность заряда и тока соответственно:

$$\rho(\vec{r},t) = q\delta\big(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}(t)\big), \tag{2.6}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\overrightarrow{v_0}(t)\delta\big(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}(t)\big), \tag{2.7}$$

где $\overrightarrow{v_0}$ – это скорость заряда.

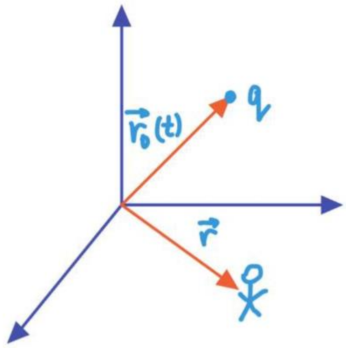

Рис. 2.1. Плотность точечного заряда

Если у нас несколько зарядов (рис. 2.2), то плотность n зарядов и токов равна:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_n q_n\delta\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_{0_n}}(t)\right); \tag{2.8}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_n q_n\overrightarrow{v_{0_n}}(t)\delta\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_{0_n}}(t)\right) \tag{2.9}$$

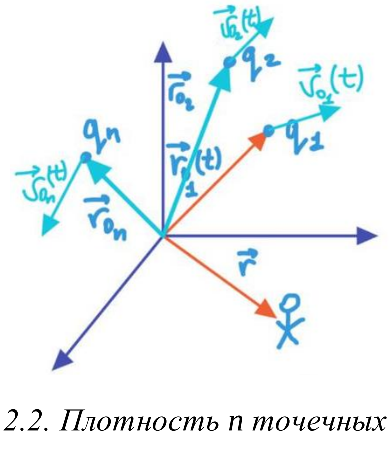

Рис. 2.2. Плотность n точечных зарядов

Уравнение непрерывности

Уравнения Максвелла – это совокупность всех данных об электрическом и магнитном поле, которые были собраны к середине 19 века. Одним из самых важных вещей является закон сохранения заряда.

Допустим, что в некотором объеме V распределен некоторый заряд с плотностью $\rho(\vec{r},t)$ (рис. 2.3). Полный заряд в таком случае:

$$Q = \int_V \rho(\vec{r},t)dV \tag{2.10}$$

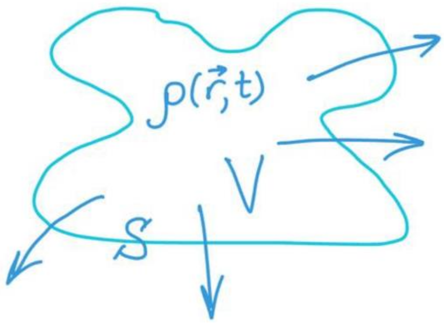

Рис. 2.3. Закон сохранения заряда

Предположим, что заряд утекает. Введем полный ток вытекающий через поверхность S, которая ограничивает наш объем:

$$I = \oint_S \left(\vec{j}\,\overrightarrow{dS}\right) \tag{2.11}$$

В таком случае экспериментально было обнаружено, что если мы можем создать жидкость одного заряда, то неминуемо тут же возникает столько же жидкости противоположного заряда. То есть, таким образом заряд всегда сохраняется. В соответствии с законом сохранения заряда, то количество заряда, которое вытекает в единицу времени, равно потоку заряженных частиц, которые вытекают через поверхность площади S:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -I \tag{2.12}$$

В таком случае, если мы обратимся к определениям (2.10) и (2.11), то:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)dV + \oint_S \left(\vec{j}\,\overrightarrow{dS}\right) = 0 \tag{2.13}$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)dV + \int_V div(\vec{j}(\vec{r},t))dV = 0 \tag{2.15}$$

Поскольку объем имеется в виду один и тот же:

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + div\big(\vec{j}(\vec{r},t)\big)\right)dV = 0; \tag{2.16}$$

что должно выполняться при любом выборе объема интегрирования V, то:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + div\,\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) – дифференциальная запись закона сохранения заряда, или **уравнение непрерывности**.

Напряженность поля точечного заряда

Уравнения Максвелла основывается на таких экспериментальных фактах как закон Кулона, закон электромагнитной индукции Фарадея, закон Био-Савара-Лапласа, и на гипотезе Ампера.

Остановимся поподробнее на законе Кулона. Закон Кулона был открыт Шарлем Кулоном в 1785 году экспериментально. Заключается он в следующем: если у нас есть два точечных заряда q и Q, которые находятся в точках с радиус векторами $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ соответственно, то в таком случае сила, с которой заряд q действует на заряд Q (рис. 2.4), равна (в системе СГС):

$$\vec{F} = \frac{qQ\vec{R}}{R^3}, \tag{2.18}$$

где

$$\vec{R} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \tag{2.19}$$

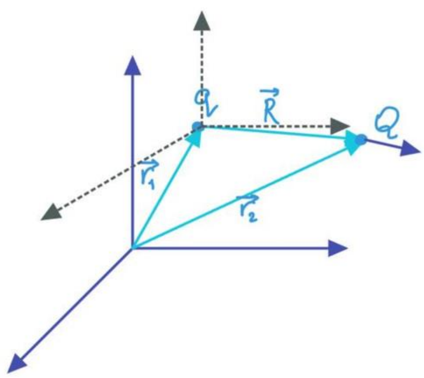

Рис. 2.4. Закон Кулона

Мы можем ввести понятие напряженности электрического поля, чтобы иметь характеристику одного заряда q. Напряженность – это сила, действующая на единичный положительный точечный заряд, помещенный в данную точку ($\overrightarrow{r_2}$):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \tag{2.20}$$

Напряженность точечного заряда:

$$\overrightarrow{E_q} = \frac{q\vec{R}}{R^3} \tag{2.21}$$

Напряженность поля точечного заряда, помещенного в начало координат:

$$\overrightarrow{E_q} = \frac{q\vec{r}}{r^3} \tag{2.22}$$

Закон Кулона

Рассмотрим некоторый поток, который создает заряд q своим полем, напряженность $\vec{E}$ (рис. 2.5). В таком случае элемент потока:

$$d\Phi = \left(\vec{E}\,\overrightarrow{dS}\right) = \left(\vec{E}\,\vec{n}\right)dS, \tag{2.23}$$

где dS – это элемент некоторой замкнутой поверхности, которой мы охватываем заряд, чтобы он оказался внутри, а $\vec{n}$ – это нормаль к этой поверхности. В таком случае, если мы рассматриваем в качестве источника поле точечного заряда q, то:

$$d\Phi = \frac{q\left(\vec{R}\,\vec{n}\right)}{R^3}dS \tag{2.24}$$

Если поверхность, которой мы охватываем точечный источник, не является сферической, то

$$d\Phi = \frac{q|R||n|\cos(\vec{R},\vec{n})}{R^3}dS = \frac{q}{R^2}dS\cos(\vec{R},\vec{n}) = \frac{q}{R^2}dS_{\text{сферы}} \tag{2.24}$$

$dS\cos(\vec{R},\vec{n})$ – это проекция dS на радиус-вектор $\vec{R}$.

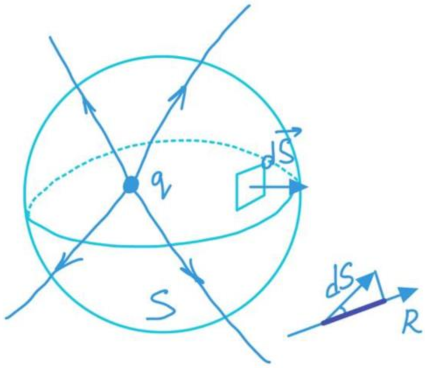

Рис. 2.5. Поток, создаваемый зарядом q

Элемент объема сферы:

$$dS = R^2 d\Omega = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \tag{2.25}$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

В таком случае мы можем рассматривать

$$\oint_S d\Phi = \oint_S \frac{q}{R^2} R^2 d\Omega = \oint_S q d\Omega = q \oint_S d\Omega = 4\pi q \tag{2.26}$$

Также из определения потока (2.23) и теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S d\Phi = \oint_S (\vec{E}\,\overrightarrow{dS}) = \int_V div\,\vec{E}\,dV = 4\pi q = 4\pi \int_V \rho dV, \tag{2.26}$$

что должно выполняться для любого V. Тогда закон Кулона в дифференциальной форме для неподвижных зарядов:

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r}) \tag{2.27}$$

Максвелл предположил, что это соотношение является верным в любой момент времени, в том числе и для движущихся зарядов:

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{2.28}$$

Уравнение Максвелла из закона Кулона и уравнения непрерывности

Возьмем частную производную от обеих частей уравнения (2.28):

$$\frac{\partial}{\partial t} div\,\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{2.29}$$

С учетом уравнения непрерывности (2.17) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} div\, \vec{E}(\vec{r},t) = -4\pi\, div\, \vec{j}(\vec{r},t) \tag{2.30}$$

$$div\left(\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} + 4\pi\vec{j}(\vec{r},t)\right) = 0 \tag{2.31}$$

Так как дивергенция любого ротора равна нулю, можем утверждать:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} + 4\pi\vec{j}(\vec{r},t) = rot\, X \tag{2.32}$$

Закон Био-Савара-Лапласа

Закон Био-Савара-Лапласа был выведен в 1820 году.

Если у нас есть некоторый линейный ток, на конце радиус-вектора $\vec{r}'$, находится некоторый элемент dl, dS – это толщина трубки с током, в конце радиус-вектора $\vec{r}$ находится наблюдатель (рис. 2.6). Контур, по которому течет линейный ток, замкнут, L – это некоторый контур, о котором идет речь. Внутри контура течет ток I.

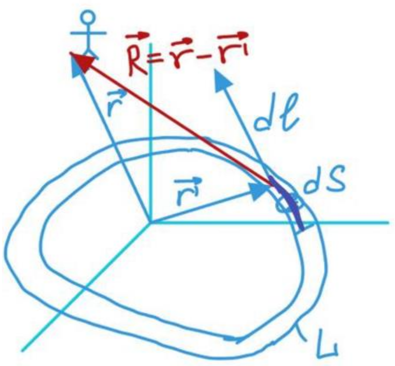

Рис. 2.6. Закон Био-Савара-Лапласа

В таком случае, элемент магнитного поля, который создается трубкой с током, в точке, где находится наблюдатель:

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I[d\vec{l},\vec{R}]}{cR^3}, \tag{2.33}$$

где с – это постоянная скорости света, связано это с выбором системы единиц. Если взять магнитное поле от всех элементов контура, то:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int \frac{I[d\vec{l},\vec{R}]}{cR^3} \tag{2.34}$$

Где полный ток, протекающий в контуре, имеет плотность тока $j(\vec{r}')$, которая для линейный проводников всегда перпендикулярна элементу площади dS:

$$I = \int j\, dS = \int j(\vec{r}\,')dS \tag{2.35}$$

Подставляя уравнение (2.35) в (2.34):

$$\vec{H}(\vec{r}) = \iint_{L,S} dS \frac{j(\vec{r}\,')\left[d\vec{l}, \vec{R}\right]}{cR^3} \tag{2.36}$$

Так как мы можем утверждать, что для линейного проводника $j(\vec{r}\,')$ и $d\vec{l}$ идут вдоль проводника, то:

$$j(\vec{r}\,')d\vec{l} = \vec{j}(\vec{r}\,')dl \tag{2.37}$$

В таком случае, учитывая, что $dl\, dS = dV'$ - элемент объем, уравнение (2.36) перепишем в виде:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \iint_{L,S} dl\, dS \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}\,'), \vec{R}\right]}{cR^3} = \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}\,'), (\vec{r} - \vec{r}\,')]}{cR^3} dV' \tag{2.38}$$

Рассмотрим следующее:

$$rot_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \left[\vec{\nabla}, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{j_x(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} & \dfrac{j_y(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} & \dfrac{j_z(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2(y - y')}{\sqrt{(\ldots)^3}} = -\frac{y - y'}{\sqrt{(\ldots)^3}} \tag{2.40}$$

Посчитаем компоненту при $\vec{i}$ с учетом (2.40):

$$\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{j_z(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{j_y(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) = \vec{i}\left(-\frac{(y - y')j_z - (z - z')j_y}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\right) = \frac{\vec{i}[\vec{j}, (\vec{r} - \vec{r}\,')]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$= \frac{\vec{i}\left[\vec{j}, \vec{R}\right]}{R^3} \tag{2.41}$$

С учетом этого перепишем:

$$H(\vec{r}) = \frac{1}{c}\ rot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \tag{2.42}$$

Возьмем ротор от обоих частей полученного уравнения:

$$rot\, \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\ rot\, rot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\ dV' \tag{2.43}$$

Напоминание: ротор ротора это ([a[bc]]=b(ac)-c(ab)):

$$\left[\vec{\nabla}[\vec{\nabla},\vec{A}]\right] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla},\vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla},\vec{\nabla}) \tag{2.44}$$

откуда получаем:

$$rot\, rot\, \vec{A} = grad\, div\, \vec{A} - \Delta\vec{A} \tag{2.45}$$

Так как интегрирование происходить по штрихованной координате $\vec{r}'$, а дифференцирование по $\vec{r}$, то мы можем поменять интегрирование и дифференцирование местами:

$$rot\, \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V' \left(grad\vec{\nabla}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \Delta_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dV' \tag{2.46}$$

Рассмотрим первое слагаемое подынтегрального выражения в декартовых координатах для наглядности:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\vec{\imath}j_x + \vec{\jmath}j_y + \vec{k}j_z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) =$$

$$= j_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + j_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + j_z \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = -\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{\sqrt{(\ldots)^3}} = -\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.48}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -j_x\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - j_y\frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - j_z\frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.49}$$

Если продифференцировать аналогичное уравнение, но по $\vec{r}'$, то получим следующее:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{j}(\vec{r}')\vec{\nabla}'_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{\nabla}'_{\vec{r}}\vec{j}(\vec{r}'), \tag{2.50}$$

где второе слагаемое с учетом уравнения непрерывности обращается в ноль, так как мы рассматриваем стационарные токи:

$$\vec{\nabla}'_{\vec{r}}\vec{j}(\vec{r}') = div_{\vec{r}'}\, \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{\partial\rho(\vec{r}')}{\partial t} = 0 \tag{2.51}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{j}(\vec{r}')\vec{\nabla}'_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = j_x(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \cdots$$

$$= j_x(\vec{r}')\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(x-x')(-1)}{\sqrt{(\ldots)^3}} + \cdots = +j_x\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + j_y\frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + j_z\frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$$= +\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{2.52}$$

На основе этого получаем следующее соотношение:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{2.53}$$

Тогда перепишем первое слагаемое уравнения (2.46) с учетом теоремы Гаусса. Так как поверхность S можем взять сколь угодно большую (главное, чтобы она охватывала объем V'), а токи у нас являются замкнутыми, то на далекой поверхности от V токов не будет:

$$-\frac{1}{c}grad_r\int_{V'}\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' = -\frac{1}{c}grad_r\int_{S'}\frac{\left(\vec{j}(\vec{r}\,')d\vec{S}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0 \tag{2.54}$$

Второе слагаемое уравнения (2.46) с учетом равенства из первой лекции (2.56):

$$-\frac{1}{c}\int_{V'}\Delta_r\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' = -\frac{-4\pi}{c}\int\vec{j}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')dV' = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{2.55}$$

$$\Delta_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{2.56}$$

Тогда получаем следующее уравнение, которое не распространяется на случай движущихся зарядов:

$$rot\,\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{2.57}$$

Если предположим зависимость от времени выполняющейся и возьмем дивергенцию от обеих частей, то с учетом уравнения непрерывности:

$$rot\,\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}(\vec{r},t)+\vec{j}_{\text{смещения}}\right) \tag{2.59}$$

Следовательно, в (2.57) присутствует еще одно слагаемое, где первое слагаемое – ток проводимости, а второе – ток смещения:

$$rot\,\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}(\vec{r},t)+\vec{j}_{\text{смещения}}\right) \tag{2.59}$$

Так как чтобы прийти в первоначальной задаче, в стационарном случае ток смещения будет равен нулю. Следовательно: $\vec{j}_{\text{смещения}} = \frac{\partial Y}{\partial t}$.

$$rot\,\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} \tag{2.60}$$

Кроме того, ранее было получено утверждение:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\vec{j} = rot\ X \quad (2.61)$$

Переписывая оба уравнения (2.60) и (2.61):

$$4\pi\vec{j} = rot\ X - \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.62)$$

$$4\pi\vec{j} = c\ rot\ \vec{H} - 4\pi\frac{\partial Y}{\partial t} \quad (2.63)$$

Откуда мы можем утверждать, что

$$cH = X$$

$$4\pi Y = E \quad (2.64)$$

Откуда получаем:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{j} = c\ rot\ \vec{H} \quad (2.65)$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}}{4\pi}\right) \quad (2.66)$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.67)$$

Уравнения получились самосогласованные. Таким образом имеем два уравнения Максвелла:

$$div\ \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.68)$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.69)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея

Следующее уравнение Максвелла — это запись закона электромагнитной индукции Фарадея. Закон электромагнитной индукции Фарадея был открыт в 1831 и заключается в следующем: ЭДС индукции по замкнутому контуру, то есть работа электрического поля по перемещению некоторого единичного положительного заряда по некоторому замкнутому контуру L равна скорости изменения магнитного поля, которое пронзает данный контур (рис. 2.7):

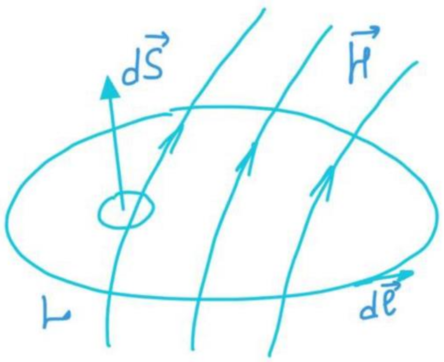

Рис. 2.7. Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\int_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \left(\vec{H}\,\overrightarrow{dS}\right), \tag{2.70}$$

знак минус из правила Ленца: возникающий в замкнутом контуре индукционный ток имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток стремится компенсировать то изменение магнитного потока, который вызывает данный ток.

Если воспользуемся теоремой Стокса:

$$\int_S rot\,\vec{E}d\vec{S} + \frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}d\vec{S} = 0 \tag{2.71}$$

$$\int_S \left(rot\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)d\vec{S} = 0 \tag{2.72}$$

Так как это должно выполняться для любой поверхности, натянутой на данный контур, мы можем утверждать, что существует следующее уравнение Максвелла:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{2.73 }$$

Гипотеза Ампера

Если взять дивергенцию от обеих частей $div\,rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}div\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ и переставим местами дифференцирование по разным производным, то

$$\frac{\partial}{\partial t}div\,\vec{H} = 0 \tag{2.74}$$

Поскольку $\vec{H}$ может как зависеть, так и не зависеть от времени, мы можем утвержать, что:

$$div\,\vec{H} = 0 \tag{2.75}$$

Это уравнение можно понимать так, что источником электрического поля являются заряды $div\,\vec{E} = 4\pi\rho$, а источником магнитного поля является никто, то есть отсутствие магнитных зарядов в природе – Гипотеза Ампера.

4 уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной форме соответсвенно:

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \tag{2.76}$$

$$\int_S (\vec{E}d\vec{S}) = 4\pi\rho \tag{2.77}$$

- источником электрического поля являются заряды (поток электрического поля через любую поверхность, ограничивающую данный объем равен полному заряду, находящемуся в этом объеме);

$$div\,\vec{H} = 0 \tag{2.78}$$

$$\int_S (\vec{H}d\vec{S}) = 0 \tag{2.79}$$

- гипотеза Ампера об отсутствии магнитных зарядов (количество магнитных силовых линий, пронзающих некоторую замкнутую поверхность, должно быть равно количеству силовых линий, которые выходят из объема, ограничивающего данную поверхность);

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{2.80}$$

$$\int_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S (\vec{H}d\vec{S}) \tag{2.81}$$

- циркуляция электрического поля по какому контору равна скорости потока магнитного поля, пронзающего поверхность натянутого на данный контур;

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{2.82}$$

$$\int_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{E}d\vec{S} \tag{2.83}$$

- электрическое и магнитное поля порождают друг друга (закон Био-Савара-Лапласа).

Сила Лоренца

Сила Лоренца – это сила, которая имеет следующее выражение:

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\,[\vec{v}\vec{H}] \tag{2.84}$$

Сила, действующая на некоторое непрерывное распределение заряда – объёмная сила:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}] \tag{2.85}$$

Закон сохранения энергии

Используя уравнения Максвелла, мы можем получить закон сохранения энергии в электродинамике. Умножим скалярно уравнения (2.80) и (2.82) на $\vec{H}$ и $\vec{E}$ соответственно:

$$\vec{H}\,rot\,\vec{E} = -\frac{\vec{H}}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{2.86}$$

$$\vec{E}\,rot\,\vec{H} = \frac{\vec{E}}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,(\vec{j}\vec{E}) \tag{2.87}$$

Вычтем из второго уравнение первое:

$$(\vec{E}\,rot\,\vec{H}) - (\vec{H}\,rot\,\vec{E}) = \frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) + \frac{4\pi}{c}\,(\vec{E}\,\vec{j}) \tag{2.88}$$

Напоминание свойств смешанного произведения:

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]);\,[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}] \tag{2.89}$$

Правила дифференцирования:

$$(\vec{\nabla}[\vec{E}\,\vec{H}]) = (\vec{\nabla}[\vec{E},\vec{H}]) + (\vec{\nabla}[\vec{E},\vec{H}]) = ([\vec{\nabla},\vec{E}],\vec{H}) - ([\vec{\nabla},\vec{H}],\vec{E}) =$$

$$= (\vec{H}\,rot\,\vec{E}) - (\vec{E}\,rot\,\vec{H}) \tag{2.90}$$

Рассмотрим следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{E}^2 = 2\,\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{2.91}$$

Тогда с учетом (2.90) и (2.91) мы можем переписать уравнение (2.88):

$$-(div\,[\vec{E}\,\vec{H}]) = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t} + \frac{\partial\vec{H}^2}{\partial t}\right) + \frac{4\pi}{c}\,(\vec{E},\vec{j}) \tag{2.92}$$

Перенеся всё в правую часть и преобразуя, получим:

$$div\,\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}+\left(\vec{E},\vec{j}\right)=0 \tag{2.93}$$

Чтобы понять физический смысл полученного выражения, рассмотрим последнее слагаемое (предполагая, что у нас просто точечный заряд, движущийся со скоростью v):

$$\left(\vec{E},\vec{j}\right)=\left(\vec{E}\rho,\vec{v}\right)=\left(\vec{E}\frac{q}{V}\vec{v}\right)=\frac{\vec{F}\,\vec{v}}{V}=\frac{\vec{F}\,\vec{l}}{Vt} \tag{2.94}$$

Получается, что это работа внешних сил в единицу объема за единицу времени – плотность мощности.

По теореме о кинетической энергии работа внешних сил равна изменению кинетической энергии. Поэтому второе слагаемое выражения (2.93) логично рассматривать как энергию.

Проинтегрируем (2.93) по объему:

$$\int_V div\,\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]dV+\int_V\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\,dV+\int_V\left(\vec{E},\vec{j}\right)dV=0 \tag{2.94}$$

Преобразуем получившееся равенство:

$$\oint_S\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]dS+\frac{d}{dt}\int_V\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}dV+\int_V\left(\vec{E},\vec{j}\right)dV=0 \tag{2.96}$$

Плотность тока:

$$\vec{j}=\sum_a\rho_a v_a=\sum_a q\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a(t)\right)\vec{v}_a \tag{2.97}$$

Рассмотрим третье слагаемое (2.96), учитывая (2.97) и что векторное произведение скорости на поле будет перпендикулярно скорости $\left(\frac{1}{c}\left[\vec{v}_a,\vec{H}(\vec{r}_a,t)\right]\vec{v}_a=0\right)$ и определение силы Лоренца:

$$\int_V\left(\vec{E}\vec{j}\right)dV=\sum_a q_a\int_V\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a(t)\right)\left(\vec{v}_a\vec{E}(\vec{r},t)\right)dV=\sum_a q_a\left(\vec{v}_a\vec{E}(\vec{r}_a,t)\right)=$$
$$=\sum_a q_a\left(\vec{v}_a\vec{E}(\vec{r}_a,t)+\frac{1}{c}\left[\vec{v}_a,\vec{H}(\vec{r}_a,t)\right]\vec{v}_a\right)=$$
$$=\sum_a\vec{v}_a\left(q_a\vec{E}(\vec{r}_a,t)+\frac{q_a}{c}\left[\vec{v}_a,\vec{H}(\vec{r},t)\right]\right)=\sum_a\left(\vec{v}_a\vec{F}_a\right)=\frac{\partial E_k}{\partial t} \tag{2.98}$$

Что является мощностью электромагнитных сил действующих на систему заряженных частиц, равная изменению кинетической энергии.

Тогда наше соотношение (2.96) может быть записано:

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}\, dV\right) = -\oint_S \frac{c}{4\pi}\,[\vec{E}, \vec{H}]dS \qquad (2.99)$$

Из этой записи видно, что второе слагаемое также является энергией – энергией электромагнитного поля. Подынтегральное выражение – плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \qquad (2.100)$$

Соответственно, плотность потока энергии энергии электромагнитного поля– вектор Умова-Пойнтинга:

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\,[\vec{E}, \vec{H}] \qquad (2.101)$$

Полная энергия поля:

$$\varepsilon_{\text{поля}} = \int \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV \qquad (2.102)$$

Можем переписать (2.99):

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = div\ \sigma + (\vec{E}\vec{j}) \qquad (2.103)$$

В некоторой области пространства у нас есть энергия плотности w, которая затрачивается на работу по перемещению заряда и излучение.

В интегральном виде:

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_V div\ \sigma\ dV + \int_V (\vec{E}\vec{j})dV \qquad (2.104)$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \oint_S (\vec{\sigma} d\vec{S}) + \int_V (\vec{E}\vec{j})dV \qquad (2.105)$$

Понятие плотности импульса из плотности энергии:

$$\vec{P} = \frac{\vec{\sigma}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\,[\vec{E}, \vec{H}] \qquad (2.106\ )$$

Электромагнитное поле обладает энергией и импульсом, то есть является материальным и реальным.

Лекция 3. Векторный и скалярный потенциалы

Уравнения Максвелла. Линейная зависимость уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла:

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \tag{3.1}$$

- закон Кулона,

$$div\,\vec{H} = 0 \tag{3.2}$$

- гипотеза Ампера,

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{3.3}$$

- закон электромагнитной индукции Фарадея,

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3.4}$$

- закон Био-Савара-Лапласа.

Вектора электрического и магнитного полей имеют по 3 компоненты, то есть 6 неизвестных. Уравнения (3.1) и (3.2) – скалярные, а (3.3) и (3.4) – векторные (по три уравнения в каждом), то есть 8 уравнений. Получается, что мы имеем 8 уравнений и 6 неизвестных. Не является ли система уравнений Максвелла переопределенной? Если она является переопределенной, то может она не имеет решений? Или не все уравнения являются линейно независимыми?

Возьмем дивергенцию от уравнения (3.4), поменяв дифференцирование по времени и по координате местами:

$$div\,rot\,H = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\,\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\,div\,\vec{j} \tag{3.5}$$

Напомним уравнение непрерывности (закон сохранения заряда):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0 \tag{3.6}$$

Так как дивергенция ротора равна нулю и беря во внимание (3.6), перепишем (3.5):

$$0 = div\,rot\,H = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\,\vec{E} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3.7}$$

Вынесем дифференцирование по времени за знак уравнения и получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\vec{E} - 4\pi\rho\right) = 0 \tag{3.8}$$

Поскольку в нашем распоряжении имеется уравнение (3.1), уравнение (3.8) удовлетворяется автоматически. Отсюда следует, что уравнение (3.1) и (3.4) не являются независимыми.

Аналогичным образом возьмем дивергенцию от уравнения (3.3):

$$0 = div\, rot\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\, div\, \vec{H} \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что

$$div\, \vec{H} = 0, \tag{3.10}$$

и это в точности уравнение (3.2). То есть уравнения (3.2) и (3.3) – зависимы.

Итого, два уравнения из восьми являются линейно зависимыми, следует, система не является переопределенной и допускает однозначное решение.

Однако, решать уравнения в терминах полей является достаточно затруднительной задачей. Традиционным подходом к решению системы является введение дополнительных величин, в терминах которых и будет в последствии ставиться задача.

Векторный и скалярный потенциалы

Величины вводятся из следующих соображений: так как (3.10) и дивергенция ротора равна нулю, следует, что:

$$\vec{H} = rot\, \vec{A} \tag{3.11}$$

Если мы рассмотрим уравнение (3.3), то

$$rot\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\, rot\, \vec{A} \tag{3.12}$$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.13}$$

Так как ротор градиента равен нулю, предполагаем, что:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\, \varphi \tag{3.14}$$

$$\vec{E} = -grad\, \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.15}$$

Таким образом, через уравнения (3.11) и (3.15) мы ввели векторный и скалярный потенциалы соответственно:

$$\vec{A}; \varphi \tag{3.16}$$

В терминах этих потенциалов можно переписать и решать уравнения Максвелла. Однако есть некоторая тонкость.

Калибровочное преобразование

Мы знаем, что ротор градиента равен нулю, следует, что к векторному потенциалу мы можем прибавить градиент любой функции *f*:

$$\vec{A} = \vec{A}' + grad\ f \tag{3.17}$$

Откуда получаем следующее равенство:

$$\vec{H} = rot\ \vec{A} = rot\left(\overrightarrow{A'} + grad\ f\right) = rot\ \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{H'} \tag{3.18}$$

$$\vec{H}' = rot\overrightarrow{A'} \tag{3.19}$$

Следует, что векторный потенциал определен с точностью до некоторого градиента.

Аналогичным образом, рассмотрим уравнение для электрического поля, подставив (3.17):

$$\begin{gathered}\vec{E} = -grad\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \\ = -grad\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' + grad\ f\right) = \\ = -grad\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \frac{1}{c}\ grad\frac{\partial f}{\partial t} = \\ = -grad\left(\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}\end{gathered} \tag{3.20}$$

Откуда достанем:

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.21}$$

Значит, если одновременно сделать следующие преобразования:

$$\begin{gathered}\vec{A} = \vec{A}' + grad\ f \\ \varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\end{gathered} \tag{3.22}$$

то

$$\vec{E} = -grad\ \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}' \tag{3.23}$$

Преобразования (3.22) будут являться калибровочными преобразованиями, для

$$\begin{gathered}\vec{E} = \vec{E}', \\ \vec{H} = \vec{H}',\end{gathered} \tag{3.24}$$

если были введены следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{H} = rot\,\vec{A}\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \\ \vec{H}' = rot\,\vec{A}'\end{gathered} \tag{3.26}$$

Калибровочные преобразования сохраняют поля. То есть потенциалы определены неоднозначно. Тем, что мы можем каким-то образом менять потенциалы, мы можем воспользоваться в дальнейшем. Например, налагать некоторые условия на потенциалы.

Уравнение Даламбера для потенциалов

Наша идея заключается в том, чтобы выразить уравнения Максвелла в терминах потенциалов, а не полей. Например,

$$\vec{H} = rot\,\vec{A}$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3.27}$$

Подставив, получим:

$$rot\,rot\,\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \tag{3.28}$$

$$grad\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} - \frac{1}{c}\,grad\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \tag{3.29}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + grad\left[div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] \tag{3.30}$$

- первое уравнение в терминах потенциалов.

Также, оператор даламбера:

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square \tag{3.31}$$

Аналогичное уравнение для скалярного потенциала можем получить из следующего уравнения Максвелла:

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \tag{3.32}$$

$$div\left(-grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho \tag{3.33}$$

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,div\,\vec{A} = 4\pi\rho \tag{3.34}$$

Добавив в обе части аналогичное уравнению (3.30) слагаемое (вторую производную по времени от скалярного потенциала):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{3.35}$$

Получаем два уравнения:

$$\Box\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{3.36}$$

$$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + grad\left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{3.37}$$

Воспользуемся произвольностью выбора потенциалов:

$$\begin{gathered}\varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\\ \vec{A} = \vec{A}' + grad\,f\end{gathered} \tag{3.38}$$

Подставим в уравнение (3.36):

$$\Box\varphi' - \frac{1}{c}\Box\frac{\partial f}{\partial t} = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + div\,grad\,f\right) \tag{3.39}$$

$$\Box\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta f - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\overrightarrow{A'} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta f - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \tag{3.40}$$

Слагаемые с f в левой и правой частях одинаковые, у нас остается идентичное уравнение уравнению (3.36):

$$\Box\varphi' = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\overrightarrow{A'} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right) \tag{3.41}$$

Аналогичным образом убедимся, что уравнение для векторного потенциала ведет себя также:

$$\Box\vec{A}' + \Box grad\ f = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + grad\left(div\ \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad\ \left(div\ grad\ f - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \quad (3.42)$$

$$\Box\vec{A}' + grad\ \left(\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + grad\left(div\ \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + grad\ \left(\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \quad (3.43)$$

$$\Box\overrightarrow{A'} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + grad\left(div\ \overrightarrow{A'} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right) \quad (3.44)$$

Калибровочные преобразования не только не меняют связь полей и потенциалов, но и не меняют форму уравнений для потенциалов.

Уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца

Заметим, что в уравнениях (3.36) и (3.37) для скалярного потенциала присутствует слагаемое с векторным потенциалом и наоборот. Выпишем это слагаемое, которое будет равно некоторой функции координаты и времени:

$$div\ \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = F(\vec{r}, t); \quad (3.45)$$

Можем ли мы подобрать такие потенциалы, чтобы:

$$div\ \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0\ (?) \quad (3.46)$$

Применим калибровочные преобразования к (3.45):

$$div\ \left(\overrightarrow{A'} + grad\ f\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = F(\vec{r}, t) \quad (3.47)$$

$$div\ \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + div\ grad\ f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(\vec{r}, t) \quad (3.48)$$

Если найдется такая функция, которая будет удовлетворять:

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(\vec{r}, t) \quad (3.49)$$

то в таком случае, будет выполнено

$$div\ \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0 \quad (3.50)$$

Условие (3.50) называется калибровкой Лоренца.

Уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца:

$$\begin{gathered}\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho;\\ \Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{gathered}\tag{3.51}$$

Калибровка Кулона

Калибровка Лоренца не является единственной калибровкой. Из условия:

$$\Box f=0\tag{3.52}$$

возникнет требование, чтобы

$$div\,\vec{A}=0\tag{3.53}$$

— это калибровка Кулона.

Уравнения для потенциалов в калибровке Кулона, где производные по времени сокращаются:

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\tag{3.54}$$

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho\tag{3.55}$$

Второе уравнение выглядит следующим образом:

$$\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}+grad\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\tag{3.56}$$

Если рассматриваем электромагнитные волны в тех областях, где:

$$\vec{j}=0;\quad\rho=0\tag{3.57}$$

необходимо будет положить $\varphi=0$. И тогда уравнение в калибровке Кулона будет выглядеть как:

$$\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\tag{3.58}$$

Электростатика. Уравнение Пуассона

В нашем распоряжении имеются уравнения Максвелла:

$$\begin{gathered}div\,\vec{E}=4\pi\rho\\ div\,\vec{H}=0\\ rot\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0\\ rot\,\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}=0\end{gathered}\tag{3.59}$$

Будем рассматривать электростатику, когда правые части уравнений равны нулю, кроме первого, для стационарных токов. Дивергенция и ротор магнитного поля равны нулю, но это не значит, что само поле равно нулю. Однако нас не будет волновать магнитное поле, поскольку оно действует только на движущиеся заряды. В электростатике $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Следовательно, будет зависимость только от координаты:

$$\begin{gathered} div\,\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \\ rot\,\vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{gathered} \tag{3.60}$$

Введем потенциалы для электростатического поля:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi = -grad\,\varphi \tag{3.61}$$

Подставляя (3.61) в (3.60), получаем:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{3.62}$$

- уравнение Пуассона, уравнение эллиптического типа второго порядка, требующее граничных условий. Так как сейчас рассматривается только вакуум, где источником могут являться только точечные заряды, системы островного типа, то естественно положить граничное условие, чтобы на бесконечности скалярный потенциал стремился к нулю:

$$\varphi|_{\infty} \to 0 \tag{3.63}$$

Напоминание основного свойства дельта-функции:

$$\int \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \tag{3.64}$$

Можем искать скалярный потенциал через функцию Грина:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')dV' \tag{3.65}$$

Потребуем, чтобы удовлетворялось следующее уравнение:

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{3.66}$$

С данной функцией Грина будет удовлетворяться следующее:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = \int \Delta G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')dV' = -4\pi\int \delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')dV' = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{3.67}$$

Разложим функцию Грина в интеграл Фурье:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{k},\vec{r}')e^{i\vec{k}\vec{r}}d^3\vec{k} \tag{3.68}$$

Напоминание разложения дельта-функции в интеграл Фурье:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} d^3\vec{k} \tag{3.69}$$

Вспомогательные вычисления:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} = -(k_x^2+k_y^2+k_z^2)e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{3.70}$$

Откуда получаем:

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{k},\vec{r}')(-k^2)e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \tag{3.71}$$

Перепишем (3.69), разделив экспоненту на два множителя и помножив обе части на -4π:

$$-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}}(-4\pi)e^{-i\vec{k}\overrightarrow{r'}} d^3\vec{k} \tag{3.72}$$

С учетом этого перепишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}\left(-k^2 G(\vec{k},\vec{k}') + 4\pi e^{-i\vec{k}\vec{r}'}\right) = 0 \tag{3.73}$$

Отсюда мы можем утверждать, что подынтегральное выражение обязано быть равно нулю. Таким образом, выражение для Фурье образа функции Грина:

$$G(\vec{k},\vec{r}') = \frac{4\pi}{k^2}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \tag{3.74}$$

Посчитаем функцию Грина подставив (3.74) в (3.68):

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d^3k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} d^3\vec{k} \tag{3.75}$$

Для удобства введем сферическую систему координат, где $\angle(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}') = \theta_k$ (рис. 3.1).

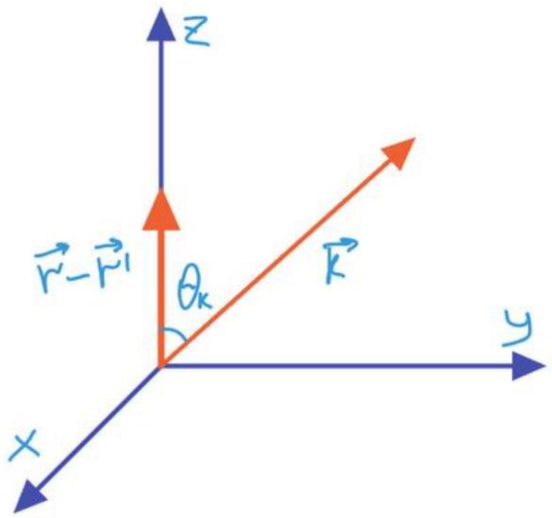

Рис. 3.1. Введение сферической системы координат для вычисления функции Грина

Отсюда можем записать:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{2\pi^2}\iiint_{0,0,0}^{\infty,\pi,2\pi}\frac{1}{k^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|\cos\theta_k}\,k^2\sin\theta_k\,dk d\theta_k d\varphi_k =$$

$$= -\frac{2\pi}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\int_0^\pi e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|\cos\theta_k}\,d(\cos\theta_k) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|\cos\theta_k}}{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\quad\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}-e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.76}$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$k|\vec{r}-\vec{r}\,'| = y$$
$$dk = \frac{dy}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.77}$$

Тогда (3.76) перепишем в терминах новой переменной:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dy}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|y}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\int_0^\infty\frac{\sin y}{y}\,dy}_{\pi/2} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big|_{\vec{r}-\vec{r}\,'\neq 0} \tag{3.78}$$

В таком случае скалярный потенциал равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')dV' \tag{3.79}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \tag{3.80}$$

- решение уравнения Пуассона.

Интерпретация решения уравнения Пуассона

Допустим, что в некоторой области V' у нас есть некоторое заряженное облако с плотностью заряда $\rho(\vec{r}\,')$ (рис.3.2). На конце радиус-вектора $\vec{r}$ находится наблюдатель. На конце радиус-вектора $\vec{r}\,'$ находится некоторый бесконечно малый элемент объема dV', в котором находится заряд $dq = \rho(\vec{r}\,')dV'$. Расстояние от этого бесконечно малого элемента объема до наблюдателя равно $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$. Тогда этот бесконечно малый объем создает в точке, где находится наблюдатель, потенциал $d\varphi = dq/R$. Тогда в силу аддитивности потенциала, можем проинтегрировать по всему объему V' и получим:

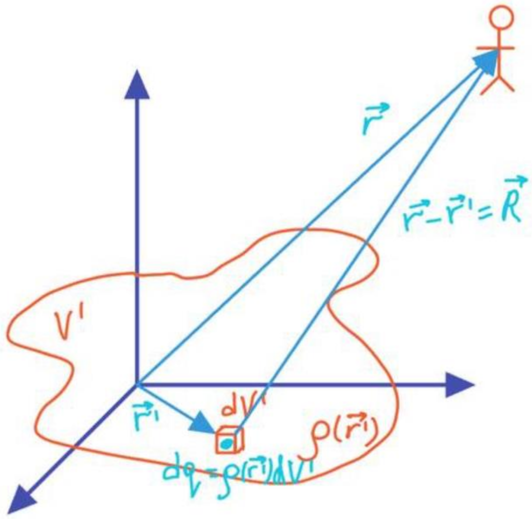

Рис. 3.2. Интерпретация решения уравнения Пуассона

$$\varphi(\vec{r}) = \int d\varphi = \int \frac{dq}{R} = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{3.81}$$

Если мы рассматриваем систему островного типа, то в далеке, где заканчиваются заряды, R будет стремиться к бесконечности, а потенциал будет стремиться к нулю, выполняя граничное условие.

Обратим внимание на знаменатель подынтегрального выражения. Он содержит переменную r’, по которой также производится интегрирование (интегрирование по объему, которое может быть представлено через тройной интеграл по трем переменным), от который также может неудобным образом зависеть плотность заряда. В таком случае взятие интеграла может быть очень затруднительным. Однако в дальнейшем в курсе электродинамики мы рассматриваем ситуации, когда источниками являются точечные объекты и, как правило, расстояние от источников до наблюдателя представляется большим по сравнению с характерными размерами самих источников. В таком случае искать потенциалы представляется логичным приближенными методами. Приближенным методом, а именно мультипольным разложением потенциала, будем заниматься в следующих лекциях.

Скалярный потенциал точечного заряда

В некоторых случаях можно избежать вычисление потенциала по формуле (3.81). Например, если у нас есть система координат и в некоторой точке $\vec{r}_0$ находится заряд q (рис. 3.3). Плотность этого заряда должна описываться функцией некоторого радиус-вектора $\vec{r}'$:

$$\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}' - \overrightarrow{r_0}) \tag{3.82}$$

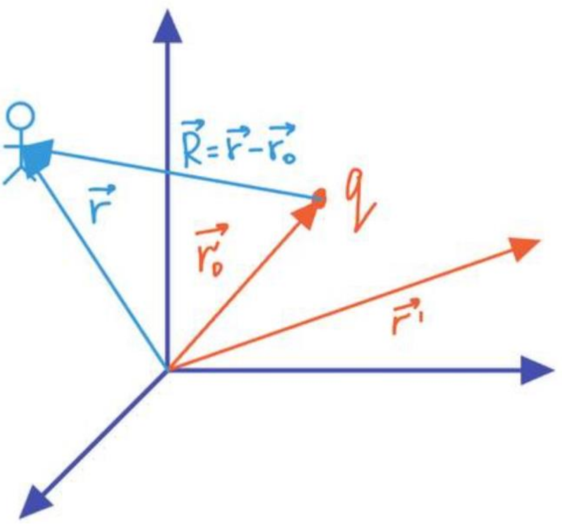

Рис. 3.3. Потенциал точечного заряда

Подставив (3.82) в (3.81), получаем:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)dV' = \frac{q}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\ \right|} = \frac{q}{R} \tag{3.83}$$

Если заряд находится в начале координат (рис. 3.4), то:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} \tag{3.84}$$

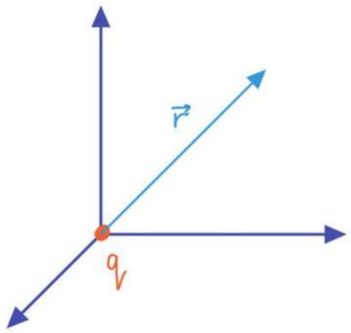

Рис. 3.4. Потенциал точечного заряда, находящегося в начале координат

Сферически-симметричное распределение заряда. Граничные условия

Если рассматриваемый потенциал является сферически симметричным, то есть только функцией $\rho(\vec{r})$, то взятие интеграла тоже упрощается. Можем решить уравнение Пуассона как дифференциальное, не прибегая к взятию полученного интеграла (3.80).

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{3.85}$$

Однако, нам будут нужны дополнительные граничные условия. Напомним, что оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{3.86}$$

В сферически-симметричном случае:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) \tag{3.87}$$

Также в отсутствии других переменных можем заменить частную производную на полную. Уравнение (3.85) становится:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -4\pi\rho \tag{3.88}$$

Потенциал на бесконечности должен равняться нулю (одно из граничных условий):

$$\varphi|_\infty = 0 \tag{3.89}$$

Допустим, что мы рассматриваем точечный заряд, находящийся в начале координат. Его потенциал равен:

$$\varphi = \frac{q}{r} \tag{3.90}$$

Плотность этого заряда будет выражаться через дельта-функцию $\rho \ldots \delta(r)$. В таком случае уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ должно удовлетворяться. Подставим (3.90) в уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{q}{r}\right) + 0 + 0 = 0 \tag{3.91}$$

Получается, что прямым дифференцированием в сферических координатах мы не получаем дельта-функцию. Необходимо быть осторожными с точечными зарядами в начале координат, а также понимать, что:

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{q}{r}|_{r\to 0} = -q \tag{3.92}$$

И для уравнения Пуассона:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -4\pi\rho \\ \varphi|_\infty \to 0\end{gathered} \tag{3.93}$$

Таким образом, необходимо выполнение двух граничных условий (3.92) и (3.93).

Проинтегрируем уравнение (3.93) (умножив на r^2dr):

$$\int_0^r d\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -4\pi\int_0^r \rho x^2 dx \tag{3.94}$$

Один из пределов должен быть переменным, исходя из условия (3.92) верхний предел будет переменной r, а нижний - ноль.

$$r^2\frac{d\varphi}{dr} = -4\pi\int_0^r \rho x^2 dx \tag{3.95}$$

Поделив на r^2, помножив на dr и сменив переменный предел на нижний, получаем (сменили переменную интегрирования, чтобы не запутаться):

$$\int_r^\infty d\varphi = -\int_r^\infty \frac{4\pi}{y^2}\,dy\int_0^y \rho x^2 dx \tag{3.96}$$

$$-\varphi(r) = -4\pi\int_r^\infty \frac{dy}{y^2}\int_0^y \rho(x)x^2 dx \tag{3.97}$$

Проинтегрируем по частям, сделав следующую замену:

$$dv = \frac{dy}{y^2};$$
$$u = \int_0^y \rho(x)x^2dx;$$
$$du = \rho(y)y^2dy; \qquad (3.98)$$
$$v = -\frac{1}{y}$$

Получаем следующее выражение для потенциала сферически-симметричного распределения заряда:

$$\varphi(r) = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\int_0^y \rho(x)x^2dx\ |_r^\infty + \int_r^\infty \frac{1}{y}\rho(y)y^2dy\right] =$$
$$= 4\pi\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho(x)x^2dx + \int_r^\infty \rho(x)xdx\right] \qquad (3.99)$$

Рассмотрим на простом случае. Пусть у нас есть равномерно заряженный шарик с радиусом R (рис. 3.5). Внутри шарика плотность заряда равна какой-то постоянной величине, а вне – нулю.

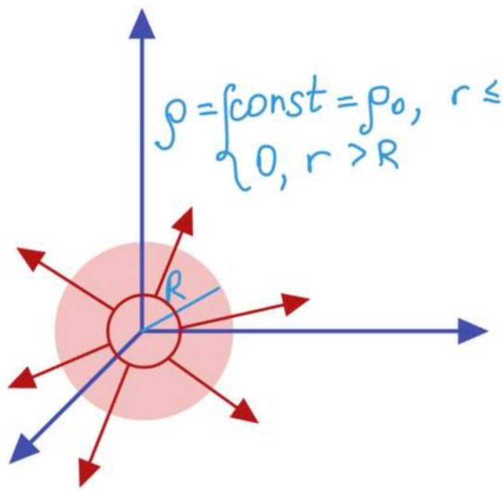

Рис. 3.5. Потенциал равномерно заряженного шарика

В случае $r > R$:

$$\varphi(r) = 4\pi\left[\frac{1}{r}\int_0^R \rho_0 x^2dx + 0\right] = 4\pi\rho_0\frac{1}{r}\frac{x^3}{3}|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}\rho_0\frac{1}{r} = \frac{q}{r} \qquad (3.100)$$

Потенциал внутри шарика при $r \leq R$:

$$\varphi(r) = 4\pi\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho_0 x^2 dx + \int_r^R \rho_0 x dx\right] = 4\pi\rho_0\left[\frac{1}{r}\frac{x^3}{3}\ |_0^r + \frac{x^2}{2}\ |_r^R\right] =$$

$$= 4\pi\rho_0\left[\frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right] = -\frac{4\pi\rho_0}{6}r^2 + \frac{4\pi\rho_0 R^2}{2} \qquad (3.101)$$

$$\varphi(r) = -\frac{4\pi\rho_0}{6}r^2 + 2\pi\rho_0 R^2 \qquad (3.102)$$

Применим теорему Гаусса, чтобы найти поле внутри нашего шарика:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV \qquad (3.103)$$

Так как вектор электрического поля параллелен $d\vec{S}$:

$$E * 4\pi r^2 = 4\pi\rho * \frac{4\pi}{3} r^3 \qquad (3.104)$$

Откуда:

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho r \qquad (3.105)$$

Также через градиент потенциала (3.102):

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{4\pi}{6}\rho_0 * 2r = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r \qquad (3.106)$$

Следует, (3.102) позволяют в точности узнать потенциал внутри шарика, а постоянная добавка в (3.102) позволяет сшивать решения внутри и снаружи.

Лекция 4. Мультипольное разложение потенциала

Мультипольное разложение потенциала

Для электростатического поля потенциал выглядит следующим образом

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{4.1}$$

где интегрирование ведётся по объёму V', в котором расположен заряженный объект с плотностью заряда $\rho(\vec{r}')$. На Рис. 4.1 представлена схема расположения заряженного объекта и наблюдателя.

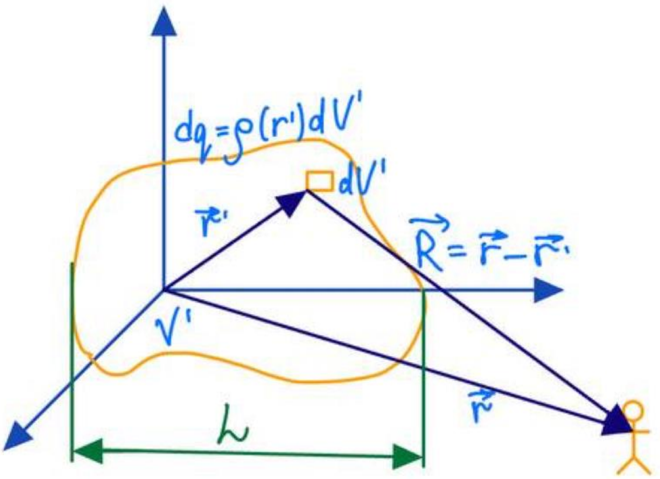

Рис. 4.1. Электростатический потенциал заряженного объекта.

Данное выражение является очень сложным и в большинстве случаев невозможно найти точное решение. Однако в практических случаях, когда расстояние до наблюдателя намного больше характерного размера системы:

$$|\vec{r}| \gg L \sim |\vec{r}'|, \tag{4.2}$$

можно воспользоваться малостью r' по сравнению с r.

Вспомним, как разлагается функция одной переменной в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'|_{x=0} \dots \tag{4.3}$$

где координата может представляться малым смещением ε относительно некоторой точки

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{\varepsilon} \tag{4.4}$$

В таком случае ряд Тейлора принимает следующий вид:

$$f(x) = f(\varepsilon = 0) + f'|_{\varepsilon=0}\varepsilon + \frac{1}{2}\, f''|_{\varepsilon=0}\varepsilon^2 + \cdots \tag{4.5}$$

Если же функция зависит от трёх пространственных координат, то производная заменяется на частные производные

$$f'|_{\varepsilon=0}\varepsilon = f'_{(x)}|_{\vec{\varepsilon}=0}\varepsilon_x + f'_{(y)}|_{\vec{\varepsilon}=0}\varepsilon_y + f'_{(z)}|_{\vec{\varepsilon}=0}\varepsilon_z \tag{4.6}$$

В этом случае удобно воспользоваться оператором «набла»

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{4.7}$$

и представить вектор смещения в виде

$$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z\right) \tag{4.8}$$

Тогда, разложение в ряд Тейлора примет вид:

$$f(\vec{a} + \vec{\varepsilon}) = f(\vec{a}) + \left(\vec{\varepsilon}\vec{\nabla}\right)f|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2}\,\left(\vec{\varepsilon}\,\vec{\nabla}\right)^2 f|_{\varepsilon=0} \tag{4.9}$$

Здесь второе слагаемое порядка малости $\sim\varepsilon$, а третье слагаемое имеет порядок малости $\sim\varepsilon^2$.

Разложим знаменатель формулы (4.1) в ряд Тейлора, считая r' малым по сравнению с r:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}'\vec{\nabla}\right)\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,|_{r'=0} + \frac{1}{2}\,\left(-\vec{r}'\vec{\nabla}\right)\left(-\vec{r}'\vec{\nabla}\right)\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,|_{r'=0}\,, \tag{4.10}$$

где $r = |\vec{r}|$.

Посчитаем каждое слагаемое по отдельности:

$$\left(\vec{r}'\vec{\nabla}\right)\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} =$$

$$= x'\left(-\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{\left(\sqrt{(\ldots)^2}\right)^3} + \cdots\right)|_{x'=0\ldots} = -\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} = -\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3} \tag{4.11}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3} + \frac{1}{2}\,\left(-\vec{r}'\vec{\nabla}\right)\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3}\right) \tag{4.12}$$

Последнее слагаемое в этой формуле вычислим по правилу Лейбница

$$-(\vec{r}'\vec{\nabla})\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\,(\vec{r'}\,\vec{\nabla})(\vec{r}\vec{r}') + (\vec{r}\vec{r}')(\vec{r}'\,\vec{\nabla})\frac{1}{r^3}\right] \tag{4.13}$$

Первое слагаемое:

$$(\vec{r'}\,\vec{\nabla})(\vec{r}\vec{r}') = \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z}\right)(xx' + yy' + zz') = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 \tag{4.14}$$

Второе слагаемое:

$$(\vec{r'}\,\vec{\nabla})\frac{1}{r^3} = \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} =$$

$$= x'\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{r^5} + \cdots = -\frac{3xx'}{r^5} + \cdots = -\frac{3(\vec{r}\vec{r}')}{r^5} \tag{4.15}$$

Подставляя (4.14) и (4.15) в (4.13), получим

$$-(\vec{r}'\vec{\nabla})\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3}\right) = -\left\{\frac{r'^2}{r^3} - \frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5}\right\} = \frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \tag{4.16}$$

Конечный ответ для (4.12) примет вид

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \tag{4.17}$$

Электростатический потенциал в данном приближении можно записать следующим образом:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}')dV'\left\{\frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\int_V \rho(\vec{r}')dV' + \frac{1}{r^3}\int_V (\vec{r}\vec{r}')\rho(\vec{r}')dV' + \int_V \left(\frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right)\rho(\vec{r}')dV' \tag{4.18}$$

Нулевое приближение. Потенциала точечного заряда

Первое слагаемое в разложении (4.18)

$$\varphi = \frac{1}{r}\int \rho(\vec{r}')dV' \tag{4.19}$$

содержит выражение для полного заряда системы

$$\int \rho(\vec{r}')dV' = Q \tag{4.20}$$

То есть в нулевом приближении заряженное облако выглядит как точечный заряд

$$\varphi_0 = \frac{Q}{r} \tag{4.21}$$

Если система состоит из нескольких точечных зарядов (Рис. 4.2), то плотность зарядов для системы представляется в виде дельта-функции:

$$\int \sum_i q_i \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_{0_i}) dV' = \sum_i q_i \int_{V_i} \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_{0_i}) dV' = \sum_i q_i \tag{4.22}$$

то есть мы получаем суммарный заряд системы.

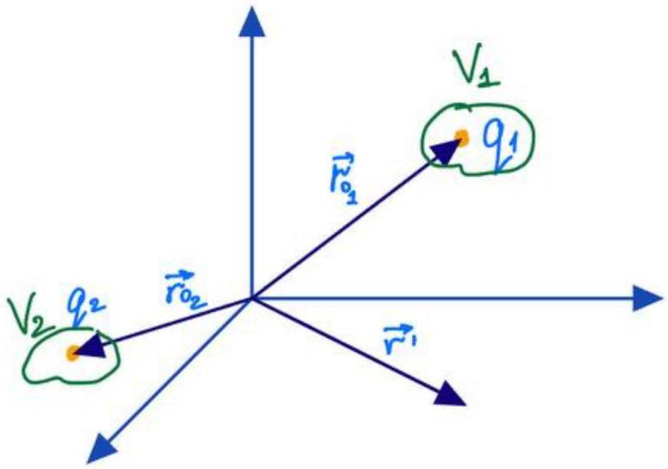

Рис. 4.2. Система, состоящая из точечных зарядов

Дипольное приближение

Рассмотрим первое приближение:

$$\varphi_1 = \frac{1}{r^3} \int (\vec{r}\,\vec{r}\,') \rho(\vec{r}\,') dV' \tag{4.23}$$

Введём понятие дипольного момента системы. По определению, дипольный момент $\vec{d}$ даётся следующим выражением:

$$\vec{d} = \int \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') dV' \tag{4.24}$$

В таком случае электростатический потенциал в дипольном приближении:

$$\varphi_1 = \frac{(\vec{d}\,\vec{r})}{r^3} \tag{4.25}$$

Для системы точечных зарядов воспользуемся свойством дельта-функции, которое распространяется и на трёхмерный случай:

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{4.26}$$

Тогда дипольный момент системы можно рассчитать как сумму интегралов в малой окрестности объёма каждого из зарядов:

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \sum_i q_i \delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{0_i}\right) dV' = \sum_i q_i \int_{V_i} \vec{r}' \delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_{0_i}\right) dV_i = \sum_i q_i \vec{r}_{0_i} \tag{4.27}$$

То есть, дипольный момент суммы зарядов – это сумма произведений зарядов на радиус вектор положения этих зарядов:

$$\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_{0_i} \tag{4.28}$$

Тензор квадрупольного момента

Рассмотрим третье слагаемое в разложении (4.18)

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right) \rho(\vec{r}') dV' \tag{4.29}$$

Чтобы продвинуться далее нам необходим некоторый математический аппарат. В будущих лекциях мы будем изучать теорию относительности и для нас будет важно, в каком месте поставить индекс – вверху или снизу. Например, вектора

$$\begin{aligned} A^\alpha &= (A^1, A^2, A^3), \\ A_\alpha &= (A_1, A_2, A_3), \end{aligned} \tag{4.30}$$

будут не совсем одним и тем же объектом.

Посмотрим на скалярное произведение двух векторов:

$$\left(\vec{A}\,\vec{B}\right) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha B_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha B^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} A^\alpha B_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} A^\alpha B^\alpha \tag{4.31}$$

Выше мы записали это произведение любым из удобных для нас способов – с любым расположением векторов. Однако удобно использовать правило суммирования Эйнштейна – по повторяющемуся один раз сверху и один раз снизу индексу предполагается сумма:

$$\left(\vec{A}\,\vec{B}\right) = A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha \tag{4.32}$$

Поэтому скалярное произведение следующих векторов

$$\begin{gathered}\vec{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{r}' = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})\end{gathered} \tag{4.33}$$

можно записать как

$$(\vec{r}\,\vec{r}') = xx' + yy' + zz' = x_1 x^{1'} + x_2 x^{2'} + x_3 x^{3'} = x_\alpha x^{\alpha'} \tag{4.34}$$

С другой стороны, выражение (4.29) можно привести к общему знаменателю и рассмотреть второе слагаемое в нём

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_V \left(\frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right)\rho(\vec{r}')dV' = \frac{1}{2}\int \frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{r^5}\,\rho(\vec{r}')dV' \tag{4.35}$$

При помощи дельта-символа Кронекера:

$$\delta_\alpha^\beta = \delta^{\alpha\beta} = \begin{cases}1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta\end{cases} \tag{4.36}$$

мы перепишем это слагаемое с использованием следующих выражений

$$\begin{gathered}r_\alpha = \delta_\alpha^\beta r_\beta \\ r^2 = r_\alpha r^\alpha = r_\beta r^\alpha \delta_\alpha^\beta = r_\alpha r_\beta \delta^{\alpha\beta}\end{gathered} \tag{4.37}$$

Тогда

$$r^2 r'^2 = r_\alpha r^\beta \delta_\beta^\alpha r_{\alpha'} r^{\beta'} \delta_{\beta'}^{\alpha'} \tag{4.38}$$

А первое слагаемое в (4.35)

$$(\vec{r}\,\vec{r}')^2 = (x_\alpha\, x'^\alpha)\left(x_\beta x'^\beta\right) = x_\alpha x_\beta x'^\alpha\ x'^\beta \tag{4.39}$$

Тогда второе приближение принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^5}\int\left\{3x_\alpha x_\beta x'^\alpha x'^\beta - x_\alpha x_\beta \delta^{\alpha\beta} r'^2\right\}\rho(\vec{r}')dV' = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{r^5}\,x_\alpha x_\beta \int\left\{3x'^\alpha x'^\beta - \delta^{\alpha\beta} r'^2\right\}\rho(\vec{r}')dV'\end{gathered} \tag{4.40}$$

где интеграл с тензором второго ранга традиционно называется тензором квадрупольного момента:

$$D^{\alpha\beta} = \int\left\{3x'^\alpha x'^\beta - \delta^{\alpha\beta} r'^2\right\}\rho(\vec{r}')dV' \tag{4.41}$$

Получаем разложение электростатического потенциала

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3} + \frac{D^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} \tag{4.42}$$

Оценка величин слагаемых мультипольного разложения

Сравним слагаемые этого разложения по порядку малости. Для этого вспомним, как определяются заряд и дипольный момент

$$q = \int \rho(\vec{r}')dV' \tag{4.43}$$

$$\vec{d} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')dV' \tag{4.44}$$

Поскольку проводится интегрирование по объёму заряженной области, то вектор расстояния не превосходит характерной длины системы:

$$\begin{gathered} |\vec{r}'| \leq L, \\ \left|\vec{d}\right| \leq \int L\rho(\vec{r}')dV' = qL \end{gathered} \tag{4.45}$$

И тогда тензор квадрупольного момента по порядку малости

$$D^{\alpha\beta} \leq \int (3L^2 - L^2)\rho(\vec{r}')dV' \sim qL^2 \tag{4.46}$$

Таким образом, максимальная оценка сверху для каждого из слагаемых в разложении выглядит следующим образом:

$$\varphi \quad = \frac{q}{r} + \frac{qL}{r^2} + \frac{qL^2}{r^3} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} \tag{4.47}$$

Посмотрим, как относятся друг к другу эти приближения:

$$\frac{\varphi^{(0)}}{\varphi^{(1)}} = \frac{q}{r} : \frac{qL}{r^2} = \frac{r}{L} \tag{4.48}$$

$$\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)}} = \frac{qL}{r^2} : \frac{qL^2}{r^3} = \frac{r}{L} \tag{4.49}$$

Получаем, что каждое последующее слагаемое в разложении является намного меньше предыдущего, подавлено отношением $\frac{r}{L}$ – отношением расстояния от системы до наблюдателя к характерному линейному размеру системы Рис 4.3.

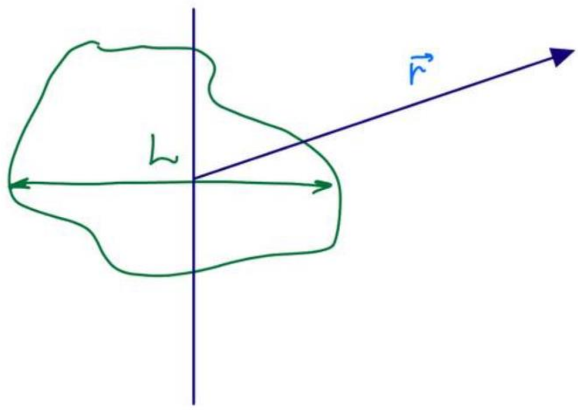

Рис. 4.3. Электростатическая система и расстояние до наблюдателя

Получаем, что если у системы есть нескомпенсированный заряд, то дипольное и квадрупольное приближения становятся неважны по сравнению с нулевым приближением точечного заряда. Если же суммарный заряд системы ноль, то система из далека выглядит как точечный диполь. При нулевом дипольном моменте – как точечный квадруполь. Это можно представить диаграммой на рис. 4.4

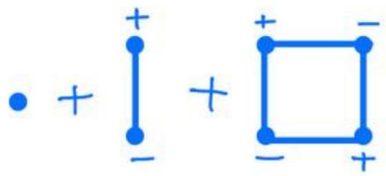

Рис. 4.4. Мультипольное приближение электростатического потенциала

Общий вид слагаемых мультипольного разложения потенциала

Попробуем определить общий вид слагаемых мультипольного приближения. Для этого воспользуемся формулой для разложения интересующей нас функции

$$f(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = f(\vec{r}) - \left(\vec{r}\,'\vec{\nabla}\right)\frac{1}{|r-r'|}\,\Big|_{r'=0} + \frac{1}{2}\left|\vec{r}\,'\vec{\nabla}\right|^2\frac{1}{|r-r'|} + \cdots \qquad (4.50)$$

Полностью этот (знакопеременный) ряд можно выписать в следующем виде:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\vec{r}\,'\vec{\nabla}\right)^n\frac{1}{r} \quad (4.51)\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\vec{r}\,'\vec{\nabla}\right)^n\frac{1}{r} \qquad (4.51)$$

То есть полное разложение для потенциала принимает вид

$$\varphi(\vec{r}) = \int\frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int dV'\rho(\vec{r}\,')\left(\vec{r}\,'\vec{\nabla}\right)^n\frac{1}{r} \qquad (4.52)$$

Потенциал является суммой ряд

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\vec{r}), \tag{4.53}$$

в котором общий вид члена ряда даётся формулой

$$\varphi_n(\vec{r}) = \frac{(-1)^n}{n!} \int dV' \rho(\vec{r}') \left(\vec{r}' \vec{\nabla}\right)^n \frac{1}{r} \tag{4.54}$$

Нулевое слагаемое даётся потенциалом суммы точечных зарядов

$$\begin{gathered} \varphi^{(0)} = \frac{q}{r}, \\ q = \int \rho(\vec{r}') dV' = \sum q_i \end{gathered} \tag{4.55}$$

Электрическое поле вычисляется как градиент потенциала:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= -q\left(\vec{\imath}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \vec{\jmath} \dots\right) =$$

$$= \frac{q}{r^3}\left(\vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z\right) = \frac{q\vec{r}}{r^3} \tag{4.56}$$

То есть восстанавливается кулоновское поле точечного заряда. Если же суммарный заряд системы равен нулю $q = 0$, то основным вкладом становится потенциал дипольного момента:

$$\varphi^{(1)} = \frac{\left(\vec{d}\vec{r}\right)}{r^3} \tag{4.57}$$

где дипольный момент системы

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \sum_i q_i \vec{r}_i \tag{4.58}$$

Основные свойства дипольного момента

Найдём электрическое поле диполя

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi^{(1)}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\frac{\left(\vec{d}\vec{r}\right)}{r^3} = -\left(\vec{d}\vec{r}\right)\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3}\vec{\nabla}\left(\vec{d}\vec{r}\right) \tag{4.59}$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое

$$\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(d_x x+d_y y+d_z z\right)=\vec{\imath}d_x+\vec{\jmath}d_y+\vec{k}d_z=\vec{d} \quad (4.60)$$

То есть просто дипольный момент. Первое слагаемое:

$$\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{3i}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\cdots=$$

$$=-\frac{3\left(\vec{\imath}x+\vec{\jmath}y+\vec{k}z\right)}{r^5}=-\frac{3\vec{r}}{r^5} \quad (4.61)$$

Получаем следующее выражение для поля диполя

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi^{(1)}(\vec{r})=\frac{3\left(\vec{d}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{d}}{r^3} \quad (4.62)$$

Более традиционная форма записи которого:

$$\vec{E}=\frac{3\left(\vec{d}\vec{r}\right)\vec{r}-\vec{d}r^2}{r^5} \quad (4.63)$$

Рассмотрим систему двух разноимённых равных по модулю зарядов Рис. 4.5

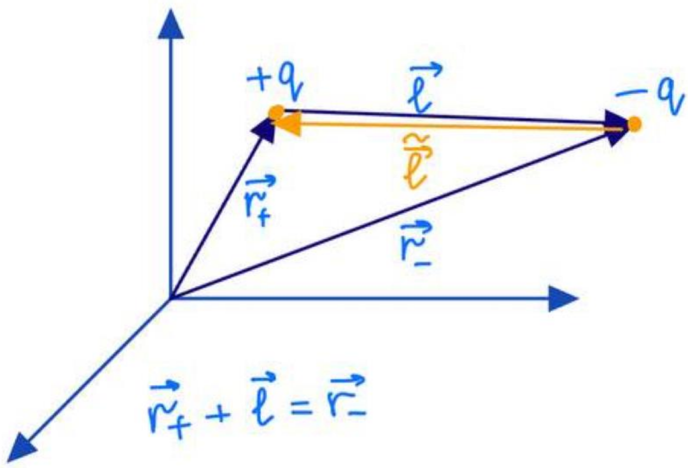

Рис. 4.5. Электрический диполь

Дипольный момент записывается в виде

$$\vec{d}=q\vec{r}_+-q\vec{r}_-=q\vec{r}_+-q\left(\vec{r}_++\vec{l}\right)=q\vec{r}_+-q\vec{r}_+-q\vec{l}=-q\vec{l}=q\tilde{\vec{l}} \quad (4.64)$$

Таким образом, дипольный момент такой системы не зависит от выбора системы координат. Это не верно, например, для точечного заряда. Для него дипольный момент

$$\vec{d}=q\vec{r}_q \quad (4.65)$$

может быть обнулён выбором начала координат в месте расположения самого заряда Рис. 4.6

$$\vec{d} = q * 0 = 0 \tag{4.66}$$

То есть для заряженной системы дипольный момент не является координатно-инвариантной величиной. Однако для электронейтральной системы дипольный момент не зависит от выбора начала системы координат.

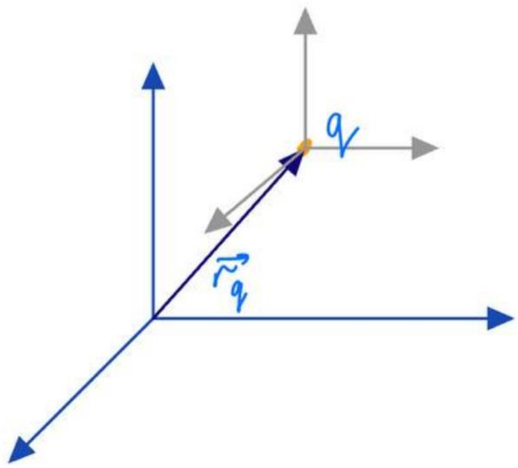

Рис. 4.6. Зависимость дипольного момента заряженной системы от выбора начала отсчёта

Данное утверждение можно продемонстрировать в общем виде. Допустим, у нас есть система точечных зарядов Рис. 4.7.

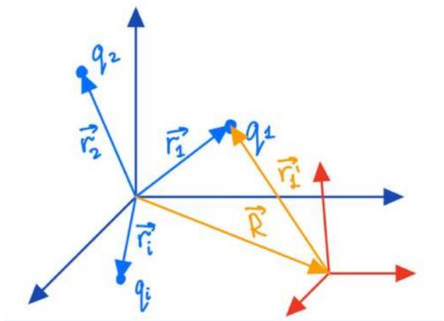

Рис. 4.7. Система точечных зарядов и две различные системы координат

Полный заряд системы – сумма точечных зарядов

$$q = \sum q_i \tag{4.67}$$

а суммарный дипольный момент системы

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i \tag{4.68}$$

Перейдём в новую систему координат. Обратное и прямое преобразование координат соответственно:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1{}' \\ \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{R} \tag{4.69}$$

Тогда дипольный момент системы в новых координатах

$$\vec{p}\,' = \sum q_i \vec{r_i}' = \sum q_i(\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum q_i \vec{r}_i - \sum q_i \vec{R} = \vec{p} - \vec{R}q \tag{4.70}$$

Очевидно, что если полный заряд системы равен нулю $q = 0$, то дипольный момент системы не зависит от выбора координат. Однако если система имеет ненулевой суммарный заряд, то всегда можно выбрать такую систему координат, что в ней дипольный момент будет равен нулю.

Изобразим диаграмму направленности точечного диполя – картину силовых линий электрического поля, создаваемого точечным диполем (Рис. 4.8)

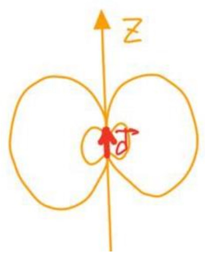

Рис. 4.8. Диаграмма направленности точечного диполя

Основные свойства квадрупольного момента

Следующим в разложении потенциала является квадрупольное слагаемое:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{D^{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{r^5} \tag{4.71}$$

Рассмотрим вид электрического поля точечного квадруполя. Его удобнее вычислять в компонентах, а не в векторной форме. Для начала вычислим производную знаменателя:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{5}{2}\frac{2x_\alpha}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{7}{2}}} \tag{4.72}$$

В дальнейшем вычислении мы пользуемся неразличимостью верхних и нижних индексов в евклидовом трёхмерном пространстве. Поэтому мы будем предполагать сумму по любому дважды повторяющемуся индексу.

Электрическое поле:

$$E_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{D^{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{r^5} = -\frac{1}{2}\left(\frac{D_{\alpha\beta}}{r^5}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(x_\alpha x_\beta\right) + D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r^5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{D_{\alpha\beta}}{r^5}\left(\overbrace{x_\beta + x_\alpha\delta_{\alpha\beta}}^{2x_\beta}\right) - D_{\gamma\beta}x_\gamma x_\beta\frac{5x_\alpha}{r^7}\right] \qquad (4.73)$$

Окончательно, получаем выражение для электрического поля квадруполя

$$E_\alpha = \frac{5}{2}\frac{D_{\gamma\beta}x_\gamma x_\beta x_\alpha}{r^7} - \frac{D_{\alpha\beta}x_\beta}{r^5}, \qquad (4.74)$$

где тензор квадрупольного момента в случае системы точечных зарядов

$$D_{\alpha\beta} = \int\left\{3x^{\alpha'}x^{\beta'} - \delta^{\alpha\beta}r'^2\right\}\rho(\vec{r}')dV', \qquad (4.75)$$

$$\rho(\vec{r}') = \sum q_i\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

принимает вид

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i\int\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)\left\{3x^{\alpha'}x^{\beta'} - \delta^{\alpha\beta}r'^2\right\}\rho(\vec{r}')dV' \qquad (4.76)$$

С учётом правила интегрирования дельта-функций получаем

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i\left(3x_{i_\alpha}x_{i_\beta} - \delta_{\alpha\beta}r_i^2\right), \alpha, \beta = 1,2,3 \qquad (4.77)$$

Явно выпишем компоненты тензора квадрупольного момента. Диагональные компоненты:

$$\begin{aligned} D_{xx}\& = D_{11} = \sum_i q_i(3x_i^2 - r_i^2) = \sum_i q_i(3x_i^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2) \\ = \sum_i q_i(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2) \\ D_{yy}\& = \sum_i q_i(2y_i^2 - x_i^2 \cdot z_i^2) \\ \mathrm{D_{zz}}\& = \sum_i q_i(2z_i^2 - x_i^2 \cdot y_i^2) \end{aligned} \qquad (4.78)$$

Внедиагональыне компоненты:

$$\begin{gathered}D_{xy} = \sum_i q_i(3x_iy_i) = D_{yx} \\ D_{xz} = \sum_i q_i(3x_iz_i) = D_{zy} \\ D_{yz} = \sum_i q_i(3y_iz_i) = D_{yz}\end{gathered} \tag{4.79}$$

то есть тензор является симметричным.

Вычислим след тензора квадрупольного момента:

$$\mathrm{Tr}\& D_{\alpha\beta} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} =$$

$$= \& \sum_i q_i(2x_i^2 - x_i^2 - x_i^2 + \cdots) = 0 \; (4.80)$$

Всего тензор состоит из 9 компонент

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

Однако из них независимыми являются только 5 элементов: 6 внедиагональных элементов являются попарно равными, то есть 3 независимых; а диагональные элементы связаны равенством нулю следа тензора, то есть одна компонента линейно выражается через две другие и, следовательно, является зависимой.

Тем не менее, как и любой тензор второго ранга, тензор квадрупольного момента можно привести к главным осям. То есть так выбрать систему координат, что у тензор квадрупольного момента будет диагонален. Равенство следа нулю остаётся в силе, и такой тензор будет обладать всего двумя независимыми компонентами.

Рассмотрим пример Рис. 4.9. Точечный заряд q расположен в точке (a, b, c), а наблюдатель расположен очень далеко с радиус-вектором $\vec{r}$.

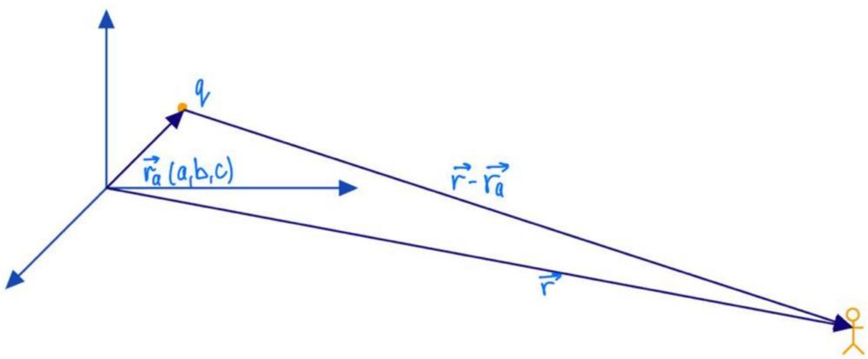

Рис. 4.9. Заряд и наблюдатель на большом расстоянии друг от друга

Так как заряд не находится в начале координат, то в данных координатах мы можем вычислить его потенциал приближённо, используя мультипольное разложение

$$\varphi = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \approx \frac{q}{r} + \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{r^5} \tag{4.82}$$

Дипольный момент этого заряда равен

$$\vec{p} = q\vec{r}_a = (qa, qb, qc) \tag{4.83}$$

Тогда, с точностью до поправок первого порядка, получаем потенциал

$$\varphi \approx \frac{q}{r} + \frac{qax + qby + qcz}{r^3} + \cdots \tag{4.84}$$

где второе слагаемое подавлено по сравнению с первым как $\sim \frac{|r_a|}{r} \ll 1$.

Стоит отметить, что если бы мы совместили начало координат с положением заряда, то потенциал

$$\varphi = \frac{q}{r} \tag{4.85}$$

был бы точным. Однако не всегда есть возможность выбрать начало координат таким образом. Например, если дано несколько несовпадающих зарядов, то только для одного из них можно будет удачно выбрать координаты.

Для нашего случая

$$\begin{gathered} r_a = (a, b, c) \\ r^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{gathered} \tag{4.86}$$

попробуем вычислить тензор квадрупольного момента по формулам (4.78)-(4.79):

$$\begin{gathered} D_{xx} = q(3a^2 - a^2 - b^2 - c^2) = q(2a^2 - b^2 - c^2) \\ D_{xy} = q(3ab) \\ \ldots \end{gathered} \tag{4.87}$$

В матричном виде это можно записать как

$$D_{\alpha\beta} = q\begin{pmatrix} 2a^2 - b^2 - c^2 & 3ab & 3ac \\ 3ba & 2b^2 - a^2 - c^2 & 3bc \\ 3ca & 3cb & 2c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix} \tag{4.88}$$

Поправка второго порядка, связанная с наличием квадрупольного момента, будет выглядеть следующим образом

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2r^5}\left(D_{x_x}x^2 + D_{xy}xy + D_{xz}xz + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2r^5} q\big((2a^2 - b^2 - c^2)x^2 + \cdots\big) \sim \frac{1}{r}\left(\frac{|r_a|}{r}\right)^2 \tag{4.89}$$

Полностью потенциал точечного заряда с точностью до поправок квадрупольного момента:

$$\varphi \approx \frac{q}{r} + \frac{qax + qby + qcz}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\Big(q\big((2a^2 - b^2 - c^2)x^2 + \cdots\big)\Big) \tag{4.90}$$

Все эти поправки возникли из-за неудачного выбора системы координат. Представим теперь, что заряд расположен на одной из осей системы координат, как представлено на рис. 4.10.

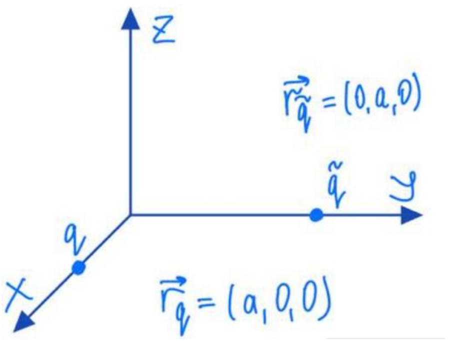

Рис. 4.10. Точечный заряд на одной из осей координат

Нулевое и первое приближения в этом случае выглядят точно так же, как и в предыдущем примере. Попробуем посчитать тензор квадрупольного момента для случая $\vec{r}_q = (a, 0, 0)$:

$$\begin{gathered} D_{xx} = q(3a^2 - a^2) = 2qa^2 \\ D_{yy} = q(3 * 0 - a^2) = -qa^2 = D_{zz} \\ D_{xy} = q(3a * 0) = 0 = D_{xz} = D_{yz} \end{gathered} \tag{4.91}$$

То есть полностью тензор квадрупольного момента выглядит следующим образом

$$D_{\alpha\beta} = q\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

Либо же, в более удобном виде:

$$D_{\alpha\beta} = qa^2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.93}$$

Вообще, когда заряд находится на одной из осей координат, достаточно посчитать лишь одну компоненту квадрупольного момента, а остальные определить из свойств симметрии и равенства нулю следа. Например, в случае, если заряд расположен на оси y с координатами $\vec{r}_{\tilde{q}} = (0, a, 0)$ (рис. 4.10) тензор квадрупольного момента будет иметь вид

$$D_{\alpha\beta} = qa^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

В случае же нашего изначального примера с тензором 4.94, потенциал точечного заряда в мультипольном приближении будет иметь следующий вид:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{qax}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}(2x^2 - y^2 - z^2) \tag{4.95}$$

Лекция 5. Энергия электростатического поля

Энергия взаимодействия двух удаленных систем зарядов

Напомним закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div\,\sigma + (\vec{E}\vec{j}) = 0, \tag{5.1}$$

где плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}, \tag{5.2}$$

плотность потока энергии – вектор Пойнтинга

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\,[\vec{E}, \vec{H}], \tag{5.3}$$

$(\vec{E}\vec{j})$ – мощность поля по перемещению заряда.

В интегральной форме закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}\,dV + \oint_S (\vec{\sigma}d\vec{S}) + \int_V (\vec{E}\vec{j})dV = 0 \tag{5.4}$$

Для статического случая, если поле не совершает работы, энергия электростатического поля:

$$\begin{aligned} w &= \int_V \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\,dV = \{\vec{E} = -grad\varphi\} = -\int_V \frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{E}}{8\pi}\,dV = \{\vec{\nabla}(\varphi\vec{E}) = \varphi\vec{\nabla}\vec{E} + \vec{E}\vec{\nabla}\varphi\} \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_V \vec{\nabla}(\varphi\vec{E})dV + \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\vec{\nabla}\vec{E}dV \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi(\vec{E}d\vec{S}) + \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi \cdot 4\pi\rho dV \end{aligned} \tag{5.5}$$

Если у нас есть некая система, и мы находимся очень далеко от нее на расстоянии r, много большем, чем характерный размер системы, то потенциал можно записать в виде

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + \cdots \cong \frac{q}{r} \tag{5.6}$$

Рассматриваемый объем V можно окружить поверхностью любого радиуса, например, сферой S_r радиуса $r \to \infty$. На очень большом расстоянии система будет выглядеть как точечный заряд. Тогда первое слагаемое в (5.5) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi(\vec{E}d\vec{S}) = -\frac{1}{8\pi}\int_{S_r} \frac{q}{r}\frac{q\vec{r}}{r^3} r^2 d\vec{\Omega}, \tag{5.7}$$

где подынтегральное выражение имеет порядок $q^2 d\Omega/r^2$, следовательно, при $r \to \infty$ слагаемое стремится к нулю. Получаем

$$w = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV \tag{5.8}$$

Пусть у нас есть две удаленные друг от друга системы зарядов (рис. 5.1). Начало координат поместим в первую систему. Введем $\vec{L}$ – радиус-вектор от одной системы к другой, $\vec{r} = \vec{r}_1$ и $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{L}$. Первая система имеет плотность заряда ρ_1 и создает потенциал φ_1. Аналогично, для второй системы имеем ρ_2 и φ_2.

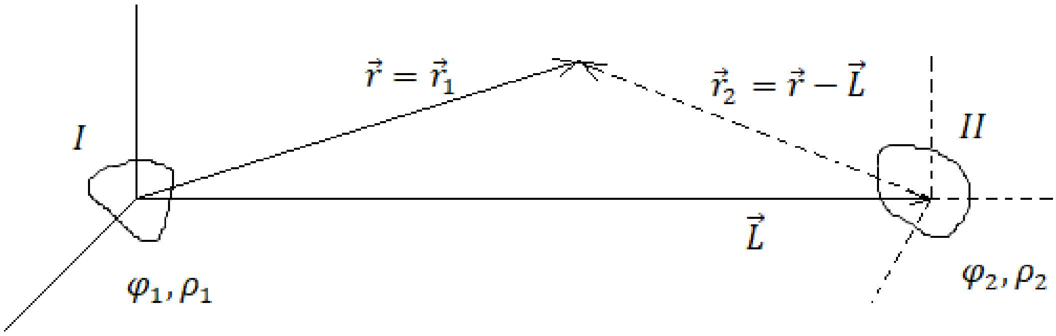

Рис. 5.1. Удаленные системы зарядов.

Учитывая аддитивность заряда и потенциала, получаем полную энергию в виде

$$w = \frac{1}{2}\int_V (\rho_1 + \rho_2)(\varphi_1 + \varphi_2) dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{V_1} \rho_1\varphi_1 dV + \frac{1}{2}\int_V \rho_1\varphi_2 dV + \frac{1}{2}\int_V \rho_2\varphi_1 dV + \frac{1}{2}\int_{V_2} \rho_2\varphi_2 dV, \tag{5.9}$$

где энергия первой системы:

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{V_1} \rho_1\varphi_1 dV, \tag{5.10}$$

энергия второй системы:

$$w_2 = \frac{1}{2}\int_{V_2} \rho_2\varphi_2 dV, \tag{5.11}$$

энергия взаимодействия:

$$w_{\text{вз}} = \frac{1}{2}\int_V \rho_1(\vec{r})\varphi_2(\vec{r}) dV + \frac{1}{2}\int_V \rho_2(\vec{r})\varphi_1(\vec{r}) dV \tag{5.12}$$

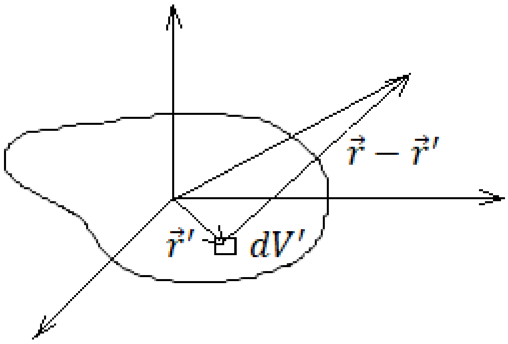

Рис. 5.2. Потенциал объемного источника.

Вспомним, если источником является некая область (рис. 5.2), то потенциал φ в точке $\vec{r}$ можно записать в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{5.13}$$

Соответственно, для систем I и II получим

$$\varphi_{1,2}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_{1,2}(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{5.14}$$

Подставив (5.14) в (5.12), получим

$$\begin{aligned} w_{\text{вз}} &= \frac{1}{2}\int_V \rho_1(\vec{r})dV \int_V \frac{\rho_2(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{2}\int_V \rho_2(\vec{r})dV \int_V \frac{\rho_1(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{2}\iint \frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')dVdV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho_2(\vec{r})\rho_1(\vec{r}')dVdV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \iint \frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')dVdV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Приходим к следующему выражению для энергии взаимодействия

$$w_{\text{вз}} = \int \rho_1\varphi_2 dV = \int \rho_2\varphi_1 dV \tag{5.16}$$

Энергия взаимодействия в мультипольном разложениии

Посчитаем энергию взаимодействия двух удаленных систем (рис. 5.1)

$$w_{\text{вз}} = \int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})dV \tag{5.17}$$

Поскольку $\vec{L}$ – постоянный вектор, можем записать

$$\rho_2(\vec{r}) = \rho_2(\vec{r}\,') \tag{5.18}$$

Разложим потенциал в окрестности точки $\vec{L}$:

$$\varphi_1(\vec{r}) \cong \varphi_1(\vec{L}) + (\vec{r}\,'\nabla)\varphi_1(\vec{r})|_L + \frac{1}{2}(\vec{r}\,'\vec{\nabla})^2\varphi_1(\vec{r})|_L \tag{5.19}$$

Подставив (5.18), (5.19) в (5.17), получим

$$\begin{aligned} w_{\text{вз}} &= \int_{V_2}\rho_2(\vec{r}\,')\varphi_1(\vec{L})dV' + \int_{V_2}\rho_2(\vec{r}\,')(\vec{r}\,'\vec{\nabla})\varphi_1(\vec{r})|_L dV' + \frac{3}{6}\int_{V_2}(\vec{r}\,'\vec{\nabla})^2\varphi_1(\vec{r})|_L dV' \\ &= \varphi_1(\vec{L})q_2 + (\vec{p}_2\vec{\nabla})\varphi_1(\vec{r})\big|_{\vec{L}} \\ &+ \frac{1}{6}\int_{V_2}\rho_2(\vec{r}\,')\left(3r'_\alpha r'_\beta\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} - \vec{r}\,'^2\cdot\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\varphi_1(\vec{r})|_{\vec{L}}dV' \\ &= q_2\varphi_1(\vec{L}) - \vec{p}_2\vec{E}_1\big|_{\vec{L}} + \frac{1}{6}\int_{V_2}(3r'_\alpha r'_\beta - \delta_{\alpha\beta}\vec{r}\,'^2)\rho_2(\vec{r}\,')dV' \\ &\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\varphi_1(\vec{r})|_{\vec{L}} \end{aligned} \tag{5.20}$$

где мы учли, что

$$\vec{r}\,'\vec{\nabla} = r'^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \tag{5.21}$$

$$(\vec{r}\,'\vec{\nabla})^2 = r'^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\cdot r'^\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}, \tag{5.22}$$

$$\vec{r}\,'^2\cdot\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_1(\vec{r})}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\bigg|_{\vec{L}} = \vec{r}\,'^2\cdot\sum_\alpha\frac{\partial^2\varphi_1(\vec{r})}{\partial x_\alpha^2}\bigg|_{\vec{L}} = \vec{r}\,'^2\cdot\Delta\varphi_1(\vec{r})|_{\vec{L}} = \vec{r}\,'^2\cdot(-4\pi\rho_1|_{\vec{L}}) = 0 \tag{5.23}$$

В итоге мы имеем следующую формулу для энергии взаимодействия удаленных систем:

$$w_{\text{вз}} = q_2\varphi_1(\vec{L}) - \vec{p}_2\vec{E}_1\big|_{\vec{L}} + \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\varphi_1(\vec{r})|_{\vec{L}} \tag{5.24}$$

Порядок величин различных типов взаимодействия систем зарядов

Напомним, что можно записать ряд

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{r} + \frac{(\vec{p}_1\vec{r})}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{D^{(1)}_{\alpha\beta}r_\alpha r_\beta}{r^5} + \cdots \tag{5.25}$$

Тогда первое слагаемое в (5.24):

$$q_2\varphi_1(\vec{r})|_{\vec{L}} = \frac{q_1 q_2}{L} + \frac{q_2(\vec{p}_1\vec{L})}{L^3} + \frac{1}{2}q_2\frac{D^{(1)}_{\alpha\beta}L_\alpha L_\beta}{L^5} + \cdots \tag{5.26}$$

Аналогично (5.25) можно записать ряд

$$E_1(\vec{r}) = \frac{q_1\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}_1\vec{r})\vec{r} - \vec{p}_1\vec{r}^2}{r^5} + \cdots \tag{5.27}$$

Тогда второе слагаемое в (5.24):

$$-\vec{p}_2\vec{E}_1\big|_{\vec{r}=\vec{L}} = -\frac{q_1(\vec{p}_2\vec{L})}{L^3} - \frac{3(\vec{p}_1\vec{L})(\vec{p}_2\vec{L})\vec{r} - (\vec{p}_1\vec{p}_2)L^2}{L^5} \tag{5.28}$$

Подставим первый член разложения (5.25) в третье слагаемое в (5.24), получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}D^{(2)}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\varphi_1(\vec{r})|_{\vec{L}} &= \frac{1}{6}D^{(2)}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Bigg|_{\vec{L}} \\ &= \frac{1}{6}D^{(2)}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(-\frac{1}{2}\frac{2x_\beta q_1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)\Bigg|_{\vec{L}} = -\frac{1}{6}D^{(2)}_{\alpha\beta}q_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{x_\beta}{r^3}\Big|_{\vec{L}} \\ &= \frac{1}{2}D^{(2)}_{\alpha\beta}q_1\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}\Big|_{\vec{L}} = \frac{q_1 D^{(2)}_{\alpha\beta}L_\alpha L_\beta}{2L^5},\end{aligned} \tag{5.29}$$

где мы учли, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{x_\beta}{r^3} = x_\beta\left(-\frac{3}{2}\frac{2x_\alpha}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\right) = \frac{-3x_\alpha x_\beta}{r^5} \tag{5.30}$$

Перепишем (5.24) в виде

$$\begin{aligned}w_{\text{вз}} = \frac{q_1 q_2}{L} + \frac{q_2(\vec{p}_1\vec{L}) - q_1(\vec{p}_2\vec{L})}{L^3} + \frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)L^2 - 3(\vec{p}_1\vec{L})(\vec{p}_2\vec{L})}{L^5} \\ + \frac{1}{2}\frac{\left(q_1 D^{(2)}_{\alpha\beta} + q_2 D^{(1)}_{\alpha\beta}\right)L_\alpha L_\beta}{L^5}\end{aligned} \tag{5.31}$$

Самым сильным слагаемым в разложении (5.31) является первое слагаемое типа взаимодействия заряд-заряд, послабее – взаимодействие заряд-диполь, далее следуют одинаковые по силе диполь-дипольное и заряд-квадрупольное взаимодействия.

Энергия взаимодействия диполя и квадруполя

Мы можем рассмотреть также взаимодействие диполя и квадруполя. Запишем энергию диполя во внешнем поле:

$$w = -(\vec{p}\vec{E}) = -(\vec{p}\vec{\nabla})\varphi = (\vec{p}\vec{\nabla})\frac{D_{\gamma\beta}r_\gamma r_\beta}{2r^5} = p_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{D_{\gamma\beta}r_\gamma r_\beta}{2r^5}$$

$$= \frac{1}{2r^5} p_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(D_{\gamma\beta} r_\gamma r_\beta\right) + \frac{\left(D_{\gamma\beta} r_\gamma r_\beta\right)}{2} p_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r^5} \qquad (5.32)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (5.32):

$$p_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(D_{\gamma\beta} x_\gamma x_\beta\right) = p_\alpha\left(D_{\gamma\beta}\delta_{\gamma\alpha} x_\beta + D_{\gamma\beta}\delta_{\alpha\beta} x_\gamma\right) = p_\alpha D_{\alpha\beta} x_\beta + p_\alpha D_{\gamma\alpha} x_\gamma$$

$$= p_\alpha D_{\alpha\beta} x_\beta + p_\alpha D_{\alpha\gamma} x_\gamma = 2 p_\alpha x_\beta D_{\alpha\beta}, \qquad (5.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r^5} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} = -\frac{5}{2}\frac{2x_\alpha}{r^7} = -\frac{5x_\alpha}{r^7} \qquad (5.34)$$

Подставив $(5.33), (5.34)$ в (5.32), получим энергию взаимодействия диполя и квадруполя:

$$w = \frac{2D_{\alpha\beta} r_\beta p_\alpha}{2r^5} + \frac{D_{\gamma\beta} r_\gamma r_\beta}{2} p_\alpha\left(-\frac{5r_\alpha}{r^7}\right) = \{p_\alpha r_\alpha = (\vec{p}\vec{r}), \vec{r} = \vec{n} r\}$$

$$= \frac{D_{\alpha\beta} p_\alpha n_\beta}{2r^4} - \frac{5D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta r^2 (\vec{p}\vec{n}) r}{2r^7}$$

$$= \left(D_{\alpha\beta} p_\alpha n_\beta - 5D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta (\vec{p}\vec{n})\right)\frac{1}{2r^4} \qquad (5.35)$$

Диполь в поле точечного заряда

Вернемся к энергии взаимодействия двух систем, которую мы определили как

$$w = \int \rho_1 \varphi_2 dV \left(= \int \rho_2 \varphi_1 dV\right) \qquad (5.36)$$

Пусть первая система представляет собой систему точечных зарядов:

$$\rho_1 = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \qquad (5.37)$$

Подставив (5.37) в (5.36), получим

$$w = \sum_i \int q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\varphi_2(\vec{r}) dV = \sum_i q_i \varphi_{2i}(\vec{r}_i) \qquad (5.38)$$

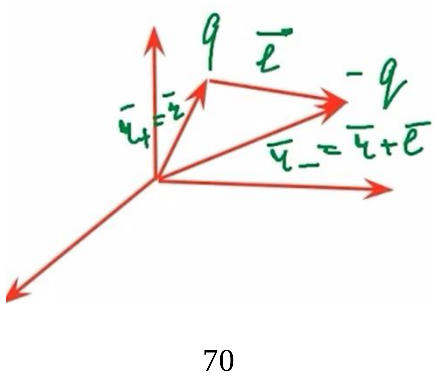

Рис. 5.3. Диполь.

Пусть у нас есть диполь, изображенный на рис. 5.3, дипольный момент такой системы будет равен

$$\vec{p} = q\vec{r} - q(\vec{r} + \vec{l}) = -q\vec{l} \tag{5.39}$$

Используя (5.36), запишем энергию взаимодействия диполя с внешним полем

$$w_{\text{вз}} = q\varphi(\vec{r}) - q\varphi(\vec{r} + \vec{l}) \tag{5.40}$$

Считая диполь точечным или l очень маленьким, получим

$$w_{\text{вз}} = q\varphi(\vec{r}) - q[\varphi(\vec{r}) + (\vec{l}\vec{\nabla})\varphi(\vec{r})] = -q\vec{l}\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = (\vec{p}\vec{\nabla})\varphi(\vec{r}) = -(\vec{p}\vec{E}) \tag{5.41}$$

Энергия взаимодействия диполя и точечного заряда

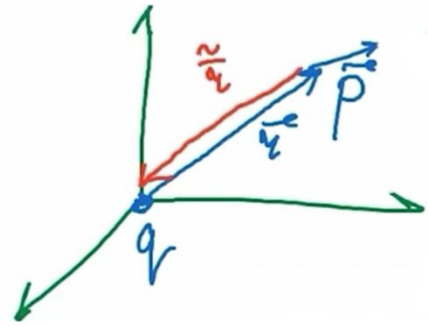

Рис. 5.4. Взаимодействие диполя и точечного заряда.

Пусть у нас есть точечный заряд и диполь, который находится на расстоянии $\vec{r}$ от него (рис. 5.4). В этом случае можем посчитать энергию взаимодействия диполя с полем заряда

$$w_{\text{вз}} = -(\vec{p}\vec{E}) = -q\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \tag{5.42}$$

Если же мы рассмотрим заряд в поле диполя, то получим

$$w_{\text{вз}} = q\varphi = q\frac{(\vec{p}\tilde{\vec{r}})}{\tilde{r}^3} = -q\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \tag{5.43}$$

Энергия взаимодействия двух диполей

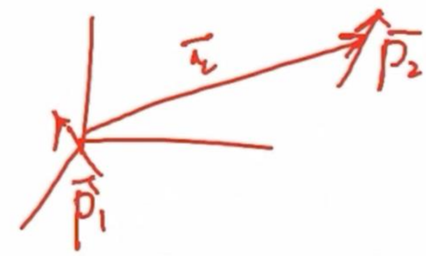

Рис. 5.5. Взаимодействие двух диполей.

Посчитаем энергию взаимодействия двух диполей (рис. 5.5)

$$w_{\text{вз}} = -(\vec{p}_2\vec{E}_1) = -\vec{p}_2 \cdot \frac{3(\vec{p}_1\vec{r})\vec{r} - \vec{p}_1 r^2}{r^5} = \frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)r^2 - 3(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r})}{r^5} \quad (5.44)$$

Сила взаимодействия диполя и точечного заряда

Из теоретической механики мы помним, что обобщенная сила – это производная от Лагранжиана по обобщенной координате

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i}, \quad (5.45)$$

где $\mathcal{L} = -w_{int}$. Следовательно,

$$F_i = \frac{\partial w_{int}}{\partial a_i} \quad (5.46)$$

Для силы взаимодействия диполя с точным зарядом получим выражение

$$F = -\nabla\left(-q\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}\right) = q\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\vec{r}) + q(\vec{p}\vec{r})\nabla\frac{1}{r^3} = q\frac{\vec{p}r^2 - 3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} \quad (5.47)$$

Момент сил, действующих на диполь

Вернемся к рис. 5.3 и запишем момент сил, действующих на диполь

$$\vec{M} = [\vec{r}, q\vec{E}] - [\vec{r} + \vec{l}, q\vec{E}] = -[q\vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}] \quad (5.48)$$

Момент сил, действующих вдоль обобщенной координаты θ, можно посчитать как

$$M_\theta = -\frac{\partial w_{\text{вз}}}{\partial \theta} \quad (5.49)$$

Сила взаимодействия двух диполей

Для силы взаимодействия двух диполей получим выражение

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\left(-\frac{3(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r}) - (\vec{p}_1\vec{p}_2)r^2}{r^5}\right) =$$

$$= -\frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)\vec{\nabla}r^2 - 3\vec{\nabla}(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r})}{r^5} - (3(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r}) - (\vec{p}_1\vec{p}_2)r^2)\vec{\nabla}\frac{1}{r^5} \quad (5.50)$$

Произведем вспомогательные вычисления:

$$\vec{\nabla}r^2 = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2 + z^2) = \vec{\imath}2x + \vec{\jmath}2y + \vec{k}2z = 2\vec{r} \quad (5.51)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{p}\vec{r}) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(p_x x + p_y y + p_z z\right) = \vec{p} \tag{5.52}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r}) = \vec{p}_1(\vec{p}_2\vec{r}) + \vec{p}_2(\vec{p}_1\vec{r}) \tag{5.53}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^5} = -\frac{5\vec{r}}{r^7} \tag{5.54}$$

Подставив $(5.51) - (5.54)$ в (5.50), получим

$$\begin{aligned}\vec{F} = -\frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)2\vec{r} - 3\big(\vec{p}_1(\vec{p}_2\vec{r}) + \vec{p}_2(\vec{p}_1\vec{r})\big)}{r^5} + 5\,\frac{(3(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r}) - (\vec{p}_1\vec{p}_2)r^2)\vec{r}}{r^7} \\ = \left\{\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, n^2 = 1\right\} \\ = -\frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)2\vec{n} - 3\big(\vec{p}_1(\vec{p}_2\vec{n}) + \vec{p}_2(\vec{p}_1\vec{n})\big)}{r^5}r \\ + 5\,\frac{(3(\vec{p}_1\vec{n})(\vec{p}_2\vec{n}) - (\vec{p}_1\vec{p}_2)n^2)\vec{n}}{r^7}r^3\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{r^4}[-3(\vec{p}_1\vec{p}_2)\vec{n} - 3(\vec{p}_1(\vec{p}_2\vec{n}) + \vec{p}_2(\vec{p}_1\vec{n}) + 5(\vec{p}_1\vec{n})(\vec{p}_2\vec{n})\vec{n})] \tag{5.55}$$

Итак, сила взаимодействия двух диполей равна

$$\vec{F}_{\text{вз}} = \frac{3}{r^4}[\vec{p}_1(\vec{p}_2\vec{n}) + \vec{p}_2(\vec{p}_1\vec{n}) + (\vec{p}_1\vec{p}_2)\vec{n} - 5(\vec{p}_1\vec{n})(\vec{p}_2\vec{n})\vec{n}] \tag{5.56}$$

Лекция 6. Магнитостатика

Уравнения Максвелла для магнитного поля

В электростатике мы считали, что $\rho = const$, теперь в магнитостатике постоянны токи:

$$\vec{j} = const, \frac{\partial}{\partial t} = 0 \tag{6.1}$$

В этом случае уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c} j \\ div\vec{H} = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Преобразуя первое уравнение (6.2), получим

$$div\, rot\vec{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} div\, j = 0 \Rightarrow$$

$$div\, j = 0 \tag{6.3}$$

При условии $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ уравнение (6.3) также следует из закона сохранения заряда :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, j = 0 \tag{6.4}$$

Из второго уравнения (6.2) и того, что вектор $\vec{H}$ – соленоидальный, следует, что

$$\vec{H} = rot\vec{A} \tag{6.5}$$

Подставив (6.5) в первое уравнение (6.2), получим

$$rot\, rot\vec{A} = \frac{4\pi}{c} j \Rightarrow$$

$$grad\, div\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c} j \tag{6.6}$$

Используя калибровку Лоренца в случае статики $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\vec{A} = 0 \Rightarrow div\vec{A} = 0, \tag{6.7}$$

получим выражение для векторного потенциала

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{6.8}$$

Вспомним уравнение Пуассона и его решение:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{6.9}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{6.10}$$

На основе (6.9) и (6.10) делаем вывод относительно решения уравнения (6.8):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{6.11}$$

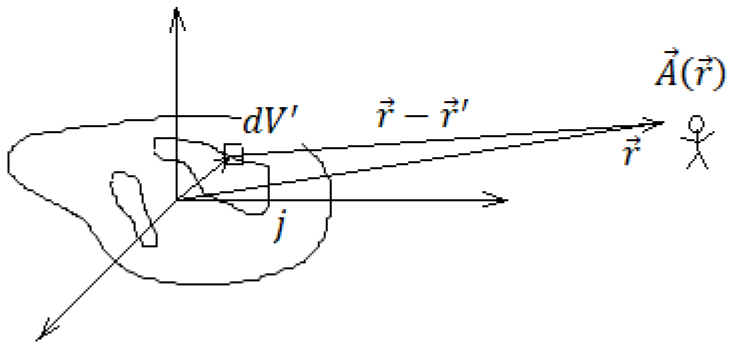

Рис. 6.1. Расчет векторного потенциала.

Проверим, удовлетворяет ли (6.11) условию (6.7):

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}_r\vec{A} = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c}\int \vec{\nabla}_r\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{6.12}$$

Произведем вспомогательные вычисления:

$$\vec{\nabla}_{r'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{j}(\vec{r}\,')\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{\nabla}_r\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \tag{6.13}$$

$$\vec{\nabla}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,') = div\vec{j}(\vec{r}\,') = 0\,, \tag{6.14}$$

$$\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{6.15}$$

Подставив (6.13) в (6.12) и используя теорему Гаусса, получим

$$div\vec{A} = \frac{1}{c}\int \vec{\nabla}_{r'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c}\int\limits_{S'\to\infty}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\vec{S} = 0, \tag{6.16}$$

где S' – поверхность бесконечного радиуса, такая, что токи, протекающие через нее, равны нулю. Таким образом, условие Лоренца выполняется, и (6.11) является решением (6.8). Запишем выражение для магнитного поля через полученный векторный потенциал:

$$\vec{H} = rot\vec{A} = rot_r \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{c}\int \left[\vec{\nabla}_r, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV' \qquad (6.17)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные выражения при условии, что $\vec{A}$ не зависит от φ:

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\varphi(\vec{r})\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x\varphi(\vec{r}) & A_y\varphi(\vec{r}) & A_z\varphi(\vec{r}) \end{vmatrix} = \vec{i}\left(A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y} - A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \cdots, \qquad (6.18)$$

$$\left[\vec{A}, \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \cdots =$$

$$= -\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\varphi(\vec{r})\right] = \left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), \vec{A}\right] \qquad (6.19)$$

Используя (6.19) в (6.17), получим обобщение закона Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\int \left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \vec{j}(\vec{r}\,')\right] dV' = \frac{1}{c}\int \left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}, \vec{j}(\vec{r}\,')\right] dV' =$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{[\vec{j}(\vec{r}\,'), \vec{r}-\vec{r}\,']}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dV', \qquad (6.20)$$

где

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} =$$

$$= -\vec{i}\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + \cdots = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (6.21)$$

Упражнение

Прежде чем двигаться дальше, произведем следующее математическое упражнение:

$$\vec{\nabla}\big(f(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})\big) = f(\vec{r})\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla}f(\vec{r}) = \{\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r}) = 0\} = \vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla}f(\vec{r}), \qquad (6.22)$$

$$\int \vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla}f(\vec{r})dV = \int \vec{\nabla}\big(f(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})\big)dV = \int\limits_{S\to\infty} f(\vec{r})(\vec{j}(\vec{r})d\vec{S}) = 0 \qquad (6.23)$$

Итак, мы утверждаем, что

$$\int \left(\vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla} f(\vec{r})\right) dV = 0 \tag{6.24}$$

В случае $f(\vec{r}) = \vec{r}$ имеем

$$\int \big(\vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla}\big)\vec{r} dV = \int \left(j_x \frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)(\vec{i}x + \cdots)dV = \int \vec{j}(\vec{r})dV = \int \vec{j}(\vec{r}')dV' = 0 \tag{6.25}$$

В случае $f(\vec{r}) = (\vec{r}\,\vec{r}')\vec{r}$ имеем

$$\int \big(\vec{j}\,\vec{\nabla}\big)\{(\vec{r}\,\vec{r}')\vec{r}\}dV = \int \{\vec{r}(\vec{j}(\vec{r})\,\vec{r}') + (\vec{r}\,\vec{r}')\vec{j}(\vec{r})\}dV =$$

$$= \int \{\vec{r}'(\vec{j}(\vec{r}')\,\vec{r}) + (\vec{r}\,\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')\}dV' = 0, \tag{6.26}$$

где

$$\begin{aligned}\big(\vec{j}\,\vec{\nabla}\big)\{(\vec{r}\,\vec{r}')\vec{r}\} &= \vec{r}\big(\vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla}\big)(\vec{r}\,\vec{r}') + (\vec{r}\,\vec{r}')\big(\vec{j}(\vec{r})\vec{\nabla}\big)\vec{r} \\ &= \vec{r}\left(j_x \frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)(xx' + \cdots) + (\vec{r}\,\vec{r}')\left(j_x \frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)(\vec{i}x + \cdots) \\ &= \vec{r}(\vec{j}\,\vec{r}') + (\vec{r}\,\vec{r}')\vec{j}\end{aligned} \tag{6.27}$$

Мы будем использовать полученные выражения при разложении потенциала в ряд по мультиполям.

Напомним разложение по мультиполям скалярного потенциала:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{D_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta}{r^5} \tag{6.28}$$

При этом мы рассматривали ситуацию, когда $\vec{r} \gg \vec{r}'$, $|\vec{r}'| \leq L-$ характерный размер системы, то есть $\frac{L}{r} \ll 1$. Выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{6.29}$$

Выражение для векторного потенциала схоже с (6.29):

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{6.30}$$

Снова воспользуемся тем, что в приближении $\frac{L}{r} \ll 1$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \big(\vec{r}'\vec{\nabla}\big)\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\bigg|_{\vec{r}'=0} + \frac{1}{2}\big(\vec{r}'\vec{\nabla}\big)^2\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\bigg|_{\vec{r}'=0} = \frac{1}{r} - \frac{(\vec{r}'\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\bigg|_{\vec{r}'=0} + \cdots \tag{6.31}$$

Посчитаем первое слагаемое в выражении для векторного потенциала, учитывая (6.25):

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} dV' = \frac{1}{cr}\int \vec{j}(\vec{r}') dV' = 0 \tag{6.32}$$

Полученное выражение соответствует тому, что полный магнитный заряд системы равен нулю, поскольку магнитные диполи в природе не обнаружены.

Посчитаем второе слагаемое в выражении для векторного потенциала, учитывая (6.26):

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}\,\vec{r}')}{r^3} dV' = \frac{2}{cr^3}\frac{1}{2}\int \vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}\,\vec{r}')\, dV' = \frac{1}{cr^3}\frac{1}{2}\int \{\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}\,\vec{r}') - \vec{r}'(\vec{j}(\vec{r}')\vec{r})\}\, dV'$$

$$= \frac{1}{r^3}\frac{1}{2c}\int \left[\vec{r}[\vec{j}(\vec{r}')\vec{r}']\right] dV' \tag{6.33}$$

Выше мы использовали утверждение:

$$\left[\vec{r}[\vec{j}\,\vec{r}']\right] = \vec{j}(\vec{r}\,\vec{r}') - \vec{r}'(\vec{j}\,\vec{r}) \tag{6.34}$$

Введем обозначение

$$\vec{\mu} = \int \frac{[\vec{r}'\vec{j}(\vec{r}')]}{2\mathrm{c}} dV', \tag{6.35}$$

тогда

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{r^3}[\vec{\mu}\,\vec{r}] \tag{6.36}$$

Вектор $\vec{\mu}$ называют магнитным дипольным моментом по аналогии с электрическим:

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')\, dV' \tag{6.37}$$

Общее разложение векторного потенциала в ряд:

$$\vec{A}_n = \frac{(-1)^n}{cn!}\int dV'\left(\vec{j}(\vec{r}')\vec{\nabla}\right)^n \frac{1}{r}, \tag{6.38}$$

$$\vec{A} = \sum_n \vec{A}_n \tag{6.39}$$

Запишем потенциал магнитного диполя:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{\mu}\,\vec{r}]}{r^3} \tag{6.40}$$

Найдем поле магнитного диполя:

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \frac{[\vec{\mu}\,\vec{r}]}{r^3}\right] = \left[\vec{\nabla}, \frac{1}{r^3}\cdot[\vec{\mu}\,\vec{r}]\right] + \frac{1}{r^3}\left[\vec{\nabla}, [\vec{\mu}\,\vec{r}]\right] \tag{6.41}$$

Вычислим отдельно первое слагаемое (6.41):

$$\left[\vec{\nabla}, \frac{1}{r^3}\vec{B}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x\dfrac{1}{r^3} & B_y\dfrac{1}{r^3} & B_z\dfrac{1}{r^3} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(B_z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^3} - B_y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^3}\right) + \cdots$$

$$= \vec{i}\left(B_z\left(-\frac{3y}{r^5}\right) - B_y\left(-\frac{3z}{r^5}\right)\right) + \cdots = \vec{i}\left(\frac{3}{r^5}\left(B_y z - B_z y\right)\right) + \cdots$$

$$= \frac{3}{r^5}[\vec{B}, \vec{r}], \tag{6.42}$$

$$\left[\vec{\nabla}, \frac{1}{r^3}\cdot[\vec{\mu}\,\vec{r}]\right] = \frac{3}{r^5}\left[[\vec{\mu}\,\vec{r}]\vec{r}\right] = -\frac{3}{r^5}\left(\vec{\mu}r^2 - \vec{r}(\vec{\mu}\vec{r})\right) = \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r} - 3\vec{\mu}r^2}{r^5} \tag{6.43}$$

Вычислим отдельно второе слагаемое (6.41):

$$\left[\vec{\nabla}, [\vec{\mu}\,\vec{r}]\right] = \vec{\mu}(\vec{\nabla}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\nabla}\vec{\mu}) = \vec{\mu}(\vec{\nabla}\vec{r}) - (\vec{\mu}\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{\mu}\cdot 3 - \vec{\mu} = 2\vec{\mu} \tag{6.44}$$

Подставив (6.43), (6.44) в (6.41), получим поле магнитного диполя:

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r} - 3\vec{\mu}r^2}{r^5} + \frac{2\vec{\mu}}{r^3} = \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}r^2}{r^5} \tag{6.45}$$

Напомним, что поле электрического диполя, для которого $\varphi = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}$, принимает вид

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} \tag{6.46}$$

Энергия магнитного поля

Энергия электромагнитного поля:

$$w = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV \tag{6.47}$$

Следовательно, энергия магнитного поля:

$$w = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi}\int \left(\vec{H} rot\vec{A}\right) dV \tag{6.48}$$

Используем следующее вспомогательное выражение:

$$div[\vec{H}\vec{A}] = \left(\vec{\nabla}[\vec{H}\vec{A}]\right) = \left([\vec{\nabla}\vec{H}]\vec{A}\right) - \left([\vec{\nabla}\vec{A}]\vec{H}\right) = \left(rot\vec{H}, \vec{A}\right) - \left(rot\vec{A}, \vec{H}\right), \tag{6.49}$$

тогда

$$w = -\frac{1}{8\pi}\int div[\vec{H}\vec{A}]dV + \frac{1}{8\pi}\int \left(rot\vec{H},\vec{A}\right)dV \tag{6.50}$$

Поскольку $\vec{H}\sim\frac{1}{r^3}, \vec{A}\sim\frac{1}{r^2}, dS\sim r^2 d\Omega$, при $r\to\infty$ можно считать, что следующий интеграл будет равен нулю:

$$\int div[\vec{H}\vec{A}]dV = \int\limits_{S\to\infty}[\vec{H}\vec{A}]dS = 0 \tag{6.51}$$

Таким образом, в случае известного распределения источников, мы получаем энергию магнитного поля в виде

$$w = \frac{1}{8\pi}\int\left(\vec{A}, rot\vec{H}\right)dV = \frac{1}{8\pi}\int\left(\vec{A},\frac{4\pi\vec{j}}{c}\right)dV = \frac{1}{2c}\int\left(\vec{A}\,\vec{j}\right)dV \tag{6.52}$$

В электростатике Лагранжиан равен энергии магнитного поля:

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_{м}, \tag{6.53}$$

соответственно, обобщенная сила:

$$F_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_i} = \frac{\partial\mathcal{E}_{м}}{\partial a_i} \tag{6.54}$$

Пример

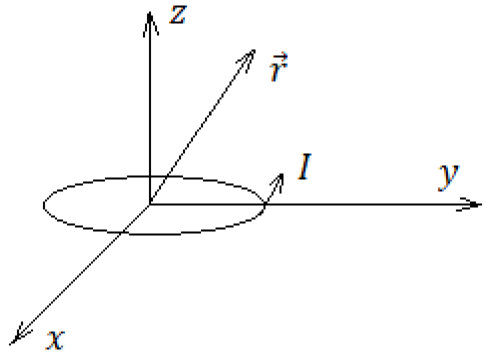

Рис. 6.2. Кольцо с током.

Посчитаем магнитный дипольный момент кольца радиуса R, лежащего в плоскости xy, с центром в начале координат, по которому течет ток I (рис. 6.2):

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int[\vec{r}'\vec{j}(\vec{r}')]\,dV' = \frac{1}{2c}\int[\vec{r},\vec{j}(\vec{r})]\,dV \tag{6.55}$$

Учтем, что

$$\vec{j} = I\delta(z)\delta(r-R)\vec{e}_\varphi, \tag{6.56}$$

и что в цилиндрической системе координат

$$\vec{r} = \vec{e}_z z + \vec{e}_\rho \rho \tag{6.57}$$

Тогда

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int \left[\vec{e}_z z + \vec{e}_\rho \rho, \vec{e}_\varphi\right] I\delta(z)\delta(r-R)dV$$
$$= \frac{1}{2c}\int z\left[\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi\right] I\delta(z)\delta(r-R)dV + \frac{1}{2c}\int \left[\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi\right]\rho I\delta(z)\delta(r-R)dV$$
$$= 0 + \frac{\vec{e}_z}{2c}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \rho I\delta(z)\delta(r-R)\rho d\rho d\varphi dz$$
$$= \frac{\vec{e}_z}{2c} I\int_0^\infty \rho^2\delta(r-R)d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)dz = I\frac{\vec{e}_z R^2 2\pi}{2c} = \frac{IS}{c}\vec{e}_z = \mu\vec{e}_z \tag{6.58}$$

Можем посчитать векторный потенциал и магнитное поле кольца с током на расстоянии $\vec{r}$:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{\mu}\,\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu\left[\vec{e}_z, \vec{e}_z z + \vec{e}_\rho \rho\right]}{r^3} = \frac{-\mu\rho\vec{e}_\varphi}{r^3}, \tag{6.59}$$

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}r^2}{r^5} = \frac{3\mu z\vec{r} - \mu\vec{e}_z r^2}{r^5} \tag{6.60}$$

Ранее мы рассматривали статические электрические и магнитные поля, пусть теперь у нас есть зависимость от времени при отсутствии источников:

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ div\vec{E} = 0 \\ div\vec{H} = 0 \end{cases} \tag{6.61}$$

Решением системы (6.61) является плоская электромагнитная волна:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}, \tag{6.62}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}, \tag{6.63}$$

где $\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$ – фаза, $T -$ период, $\lambda -$ длина волны, $k\lambda = 2\pi, \omega T = 2\pi$.

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, вычислим для него следующие произведения и производную:

$$(\vec{\nabla}\vec{A}) = \vec{A}_0\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)e^{-i(\omega t - k_x x - \cdots)} = \vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}(\vec{\imath}k_x + \cdots) = i(\vec{k}\vec{A}), \quad (6.64)$$

$$[\vec{\nabla}\vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \cdots$$

$$= \vec{\imath}\left(iA_{0_z}k_y e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - iA_{0_y}k_z e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right) + \cdots = \vec{\imath}i(A_z k_y - A_y k_z) + \cdots$$

$$= \vec{\imath}i[\vec{k}\vec{A}]_x + \cdots = i[\vec{k}\vec{A}], \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\omega\vec{A} \quad (6.66)$$

Перепишем уравнения Максвелла (6.61) в виде:

$$\begin{cases} [\vec{\nabla}\vec{H}] = \dfrac{1}{c}\dot{\vec{E}} \\ [\vec{\nabla}\vec{E}] = -\dfrac{1}{c}\dot{\vec{H}} \\ (\vec{\nabla}\vec{E}) = 0 \\ (\vec{\nabla}\vec{H}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i[\vec{k}\vec{H}] = -\dfrac{i\omega}{c}\vec{E} \\ i[\vec{k}\vec{E}] = \dfrac{i\omega}{c}\vec{H} \\ i(\vec{k}\vec{E}) = 0 \\ i(\vec{k}\vec{H}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} [\vec{k}\vec{H}] = -\dfrac{\omega}{c}\vec{E} \\ [\vec{k}\vec{E}] = \dfrac{\omega}{c}\vec{H} \\ (\vec{k}\vec{E}) = 0 \\ (\vec{k}\vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (6.67)$$

Подставим $\vec{H}$ из второго уравнения системы (6.67) в первое и используем третье равенство, тогда

$$\frac{c}{\omega}\left[\vec{k}\left[\vec{k}\vec{E}\right]\right] = -\frac{\omega}{c}\vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{k}\left(\vec{k}\vec{E}\right) - k^2\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \Rightarrow$$

$$k^2\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \Rightarrow$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{6.68}$$

Аналогично можем получить соотношение

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{H} = 0 \tag{6.69}$$

Поскольку $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в электромагнитной волне не равны нулю, мы получаем закон дисперсии:

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{6.70}$$

Если мы введем вектор $\vec{n}$ в направлении распространения волны, то

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \tag{6.71}$$

Подставив (6.70) в (6.66), получим

$$\vec{E} = -\left[\vec{n}\vec{H}\right], \tag{6.72}$$

$$\vec{H} = \left[\vec{n}\vec{E}\right] \tag{6.73}$$

Вектора $\vec{n}, \vec{E}, \vec{H}$ образуют правую тройку и $\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{H}\right|$.

Все приведенные выше выражения справедливы для монохроматической волны, коей настоящая волна не является. В таком случае электрическое и магнитное поля могут быть записаны как совокупности полей всех частот

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(\omega)e^{-i\left(\omega t - \vec{k}_\omega \vec{r}\right)}d\omega, \tag{6.74}$$

$$\vec{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}_0(\omega)e^{-i\left(\omega t - \vec{k}_\omega \vec{r}\right)}d\omega, \tag{6.75}$$

где для каждой частоты $\vec{k}_\omega = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ и выполняются соотношения

$$\vec{E}_0(\omega) = -\left[\vec{n}\vec{H}_0(\omega)\right], \tag{6.76}$$

$$\vec{H}_0(\omega) = -\left[\vec{n}\vec{E}_0(\omega)\right] \tag{6.77}$$

Лекция 7. Запаздывающие потенциалы

Уравнение Пуассона

Нам известно решение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{7.1}$$

в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{7.2}$$

Аналогично, для векторного потенциала решением уравнения

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{7.3}$$

является

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{7.4}$$

Напомним, что радиус-вектор $\vec{r}$ указывает на наблюдателя, который измеряет потенциал, а радиус-вектор $\vec{r}\,'$ указывает на некоторый объем dV', в котором находится заряд или протекает ток.

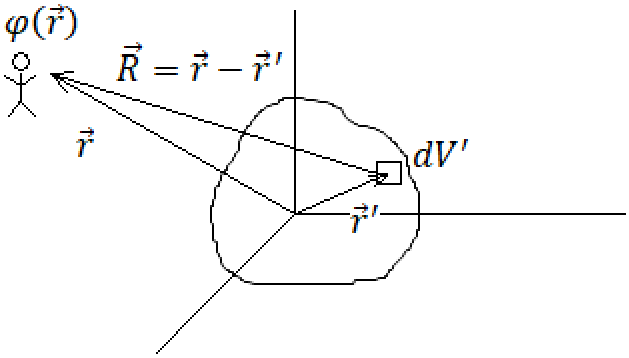

Рис. 7.1. Измерение потенциала системы.

В случае, когда заряды и токи могут меняться со временем, уравнения (7.1) и (7.3) преобразуются с заменой оператора Лапласа на оператор Даламбера:

$$\square\,\varphi = -4\pi\rho(\vec{r},t), \tag{7.5}$$

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \tag{7.6}$$

Тогда решения вида

$$\varphi(\vec{r},t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}',t)dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{7.7}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{7.8}$$

нам уже не подходят. Попробуем подставить (7.7) в (7.5), получим

$$\Box\, \varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho - \frac{1}{c^2}\int \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{7.9}$$

Интеграл в (7.9) ненулевой, таким образом уравнение (7.5) не выполняется.

Потенциалы, зависящие от времени, называются запаздывающими потенциалами. Будем искать решение уравнения (7.5) в виде

$$\varphi(\vec{r},t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho\big(\vec{r}',S(t,|\vec{r}-\vec{r}'|)\big)dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{7.10}$$

где $S(t,|\vec{r}-\vec{r}'|)-$ некоторая скалярная функция, которая зависит от времени и от расстояния между элементом объема dV' и наблюдателем (решение уравнения не должно зависеть от выбора системы отсчета). Введем вектор $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$, тогда

$$\varphi(\vec{r},t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho\big(\vec{r}',S(t,R)\big)dV'}{R} \tag{7.11}$$

Попробуем применить оператор Даламбера $\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ к решению (7.11). Напомним, что оператор Лапласа $\Delta \equiv \nabla^2$. Применим дважды оператор набла к подынтегральному выражению (7.11):

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{\rho\big(\vec{r}',S(t,R)\big)}{R}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{R}\cdot\rho\big(\vec{r}',S(t,R)\big) + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial R}\vec{\nabla}R\right)$$
$$= \Delta\frac{1}{R}\cdot\rho\big(\vec{r}',S(t,R)\big) + \vec{\nabla}\frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial R}\vec{\nabla}R + \vec{\nabla}\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial R}\vec{\nabla}R +$$
$$+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2\big(\vec{\nabla}R\big)^2 + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}\big(\vec{\nabla}R\big)^2 + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial R}\Delta R \tag{7.12}$$

Продифференцируем подынтегральное выражение (7.11) по времени:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\rho\left(\vec{r}',S(t,R)\right)}{R}=\frac{1}{c^2R}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t}\right)=\frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{c^2R}\frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \tag{7.13}$$

Итак, мы имеем

$$\Box\frac{\rho}{R}=\rho\Delta\frac{1}{R}+\frac{\partial\rho}{\partial S}\left(2\frac{\partial S}{\partial R}\vec{\nabla}\frac{1}{R}\vec{\nabla}R+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}\left(\vec{\nabla}R\right)^2+\frac{\partial S}{\partial R}\Delta R-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2\left(\vec{\nabla}R\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right] \tag{7.14}$$

Мы знаем, что

$$\vec{\nabla}\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}, \tag{7.15}$$

$$\vec{\nabla}R=\frac{\vec{R}}{R}, \tag{7.16}$$

$$\Delta R=\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right)=\frac{1}{R}\vec{\nabla}\vec{R}+\vec{R}\vec{\nabla}\frac{1}{R}=\frac{3}{R}-\frac{\left(\vec{R}\vec{R}\right)}{R^3}=\frac{2}{R}, \tag{7.17}$$

$$\Delta\frac{1}{R}=-4\pi\delta(R) \tag{7.18}$$

Подставим $(7.15)-(7.18)$ в (7.14):

$$\Box\frac{\rho}{R}=-4\pi\rho\delta(R)+\frac{\partial\rho}{\partial S}\left(2\frac{\partial S}{\partial R}\left(-\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\frac{\vec{R}}{R}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}+\frac{\partial S}{\partial R}\frac{2}{R}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]=$$

$$-4\pi\rho\delta(R)+\frac{\partial\rho}{\partial S}\left[-2\frac{\partial S}{\partial R}\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial S}{\partial R}-\frac{1}{Rc^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right]+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]=$$

$$-4\pi\rho\left(\vec{r}',S(t,R)\right)\delta(R)+\frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial S}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right]+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right] \tag{7.19}$$

Проинтегрируем выражение (7.19):

$$\int\Box\frac{\rho}{R}dV'=-4\pi\rho\left(\vec{r},S(t,0)\right)+\int\frac{dV'}{R}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial S}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right]+\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\Box\varphi=-4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{7.20}$$

Будем считать, что $S(t,0)=t$, и потребуем, чтобы всегда выполнялось

$$\int \frac{dV'}{R}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial S}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right]+\frac{\partial^2\rho}{\partial S^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]\right\}=0 \tag{7.21}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=0, \tag{7.22}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=0 \tag{7.23}$$

Таким образом, для того, чтобы решение (7.10) удовлетворяло уравнению (7.5), функция $S(t,R)$ должна удовлетворять условиям (7.22) и (7.23).

Решением (7.22) является функция

$$S(t,R)=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right) \tag{7.24}$$

Проверим, подставив (7.24) в (7.22):

$$\frac{\partial S}{\partial R}=-\frac{1}{c}f_1'+\frac{1}{c}f_2' \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2}=\frac{1}{c^2}(f_1''+f_2''), \tag{7.25}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}(f_1''+f_2'') \tag{7.26}$$

Теперь подставим (7.24) в (7.23):

$$\left(-\frac{1}{c}f_1'+\frac{1}{c}f_2'\right)^2-\frac{1}{c^2}(f_1'+f_2')^2=\frac{1}{c^2}f_1'^2-\frac{2}{c^2}f_1'f_2'+\frac{1}{c^2}f_2'^2-\frac{1}{c^2}f_1'^2-\frac{2}{c^2}f_1'f_2'-\frac{1}{c^2}f_2'^2$$

$$=-\frac{4}{c^2}f_1'\left(t-\frac{R}{c}\right)f_2'\left(t+\frac{R}{c}\right)=0 \tag{7.27}$$

Рассмотрим случай, когда

$$f_1'\left(t-\frac{R}{c}\right)\neq 0, f_2'\left(t+\frac{R}{c}\right)=0 \Rightarrow f_2\left(t+\frac{R}{c}\right)=C_0 \tag{7.28}$$

Тогда

$$S(t,R)=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+C_0, \tag{7.29}$$

причем

$$S(t,0) = f_1(t) + C_0 = t \tag{7.30}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что

$$S(t,R) = t - \frac{R}{c} \tag{7.31}$$

Вернемся к формулам для потенциалов:

$$\varphi(\vec{r},t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{7.32}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{7.33}$$

Поговорим о физическом смысле полученных выражений. У нас есть наблюдатель, который измеряет потенциал φ в точке $\vec{r}$ в момент времени t. Радиус-вектор $\vec{r}'$ указывает на объем dV', в котором находится заряд. В статическом случае, когда плотность заряда не зависит от времени, задача сводится к предыдущей, и решением является статический интеграл. В динамическом же случае потенциал, который мы измеряем в точке $\vec{r}$ в текущий момент времени t зависит от того, как были распределены заряды раньше в момент времени $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$, где $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = \tau -$ время запаздывания.

Если же мы рассмотрим случай, когда

$$f_2'\left(t + \frac{R}{c}\right) \neq 0, f_1'\left(t - \frac{R}{c}\right) = 0, \tag{7.34}$$

то мы получим, так называемый, опережающий потенциал

$$S(t,R) = t + \frac{R}{c}, \tag{7.35}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{7.36}$$

То есть потенциал сейчас зависит от распределения зарядов, которое установится через некоторое время. Тем не менее, физически обоснованным является рассмотрение именно запаздывающего потенциала. Уравнение (7.22) описывает фронт распространяющейся волны.

Плотность точечного заряда

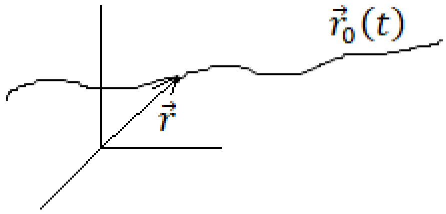

Рис. 7.2. Плотность точечного заряда.

Пусть у нас есть точечный заряд, который движется по закону $\vec{r}_0(t)$. В таком случае плотность точечного заряда будет такова, что если мы радиус-вектором $\vec{r}$ наблюдателя попадем на радиус-вектор точечного заряда, то мы получим бесконечность, а если не попадем – ноль:

$$\rho = q\delta\big(\vec{r} - \vec{r}_0(t)\big) \tag{7.37}$$

Точечный заряд движется со скоростью $\vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$. Напомним формулу для потенциала

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,', t')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \tag{7.38}$$

где $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$. Можем записать

$$\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\rho(\vec{r}\,', t')\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\rho(\vec{r}\,', t')\delta\left(t - t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right), \tag{7.39}$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\vec{j}(\vec{r}\,', t')\delta\left(t - t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right) \tag{7.40}$$

Подставим (7.39) в потенциал (7.38):

$$\varphi(\vec{r},t) = \int\limits_{V'} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(t-t'+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

$$= q\int\limits_{V'} dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\big(\vec{r}'-\vec{r}_0(t')\big)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(t-t'+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

$$= q\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} \quad (7.41)$$

Введем обозначение

$$F(t') = t - t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c} \quad (7.42)$$

Определим количество нулей функции $F(t')$. Считая $\vec{r}$ и t постоянными величинами, запишем производную

$$\frac{\partial F(t')}{\partial t'} = -1 + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c} \quad (7.43)$$

Рассмотрим производную функции

$$f(t')^2 = \frac{\big(\vec{r}-\vec{r}_0(t')\big)^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$2f(t')f'(t') = \frac{2\big(\vec{r}-\vec{r}_0(t')\big)}{c^2}\frac{\partial\vec{r}_0(t')}{\partial t'} \Rightarrow$$

$$f'(t') = \frac{\big(\vec{r}-\vec{r}_0(t')\big)}{c^2}\vec{v}_0(t')\frac{c}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} = \frac{\big(\vec{r}-\vec{r}_0(t')\big)\vec{v}_0(t')}{c|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} = \frac{\big(\vec{R}(t')\vec{v}_0(t')\big)}{cR(t')} \quad (7.44)$$

Вернемся к (7.43):

$$\frac{\partial F(t')}{\partial t'} = -1 + \frac{\big(\vec{R}(t')\vec{v}_0(t')\big)}{cR(t')} < 0 \quad (7.45)$$

Поскольку $\vec{v}_0(t') < c$, то $\frac{\left(\vec{R}(t')\vec{v}_0(t')\right)}{cR(t')} < 1$, и $\frac{\partial F(t')}{\partial t'} < 0$. Таким образом, функция $F(t')$ – монотонно убывающая, значит, существует единственный корень уравнения

$$F(t') = t - t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c} = 0 \Rightarrow \quad (7.46)$$

$$t' = \tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c} \quad (7.47)$$

На семинарах мы доказывали, что, если известен нуль x_0 функции $\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x_0) = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\big(\Phi(x)\big)dx = \frac{f(x_0)}{|\Phi'(x)|_{x_0}} \tag{7.48}$$

Следовательно,

$$\delta\big(\Phi(x)\big) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\Phi'(x)|_{x_0}} \tag{7.49}$$

Применим (7.49) к $F(t')$:

$$\delta\big(F(t')\big) = \frac{\delta(t' - \tau)}{\left|-1 + \frac{\left(\vec{R}(t')\vec{v}_0(t')\right)}{cR(t')}\right|} = \frac{\delta(t' - \tau)cR(t')}{\left|cR(t') - c\vec{\beta}_0(t')\vec{R}(t')\right|}, \tag{7.50}$$

где

$$\frac{\vec{v}_0(t')}{c} = \vec{\beta}_0(t') \tag{7.51}$$

Вернемся к (7.41):

$$\varphi(\vec{r}, t) = q \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\big(F(t')\big)}{R(t')} = q \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t' - \tau)cR(t')}{R(t')\left|cR(t') - \vec{v}_0(t')\vec{R}(t')\right|} =$$

$$= \frac{qc}{\left|cR(t') - \vec{v}_0(t')\vec{R}(t')\right|} = \frac{q}{R(t') - \left(\vec{\beta}_0(t')\vec{R}(t')\right)} \tag{7.52}$$

Аналогично,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{\beta}_0(t')}{R(t') - \left(\vec{\beta}_0(t')\vec{R}(t')\right)} = \frac{\vec{v}_0(t')}{c}\varphi(\vec{r}, t), \tag{7.53}$$

где $t' = \tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}$.

Задача

Используя потенциал Лиенара-Вихерта:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R(t') - \left(\vec{\beta}(t')\vec{R}(t')\right)}, \tag{7.54}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\,\vec{v}(t')/c}{R(t') - \left(\vec{\beta}(t')\vec{R}(t')\right)}, \tag{7.55}$$

найдем электрическое поле по формуле

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi \tag{7.56}$$

Предварительно посчитаем выражения $\frac{\partial t'}{\partial t}$ и $grad_{\vec{r}}\ t'$. Напомним, что

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t') \Rightarrow$$

$$R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = c(t - t') \Rightarrow$$

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\right)^2 = c^2(t - t')^2 \Rightarrow$$

$$-2\left(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\right)\frac{\partial \vec{r}_0(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = c^2 2(t - t')\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$-\vec{v}(t')\vec{R}(t')\frac{\partial t'}{\partial t} = cR(t') - cR(t')\frac{\partial t'}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{cR(t')}{cR(t') - \left(\vec{v}(t')\vec{R}(t')\right)} = \frac{R(t')}{R(t') - \left(\vec{\beta}(t')\vec{R}(t')\right)} \tag{7.57}$$

Аналогично,

$$R^2(t') = \left(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\right)^2 = c^2(t - t')^2 \Rightarrow$$

$$2\left(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\right)\left(1 - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t'} grad\ t'\right) = c^2 2(t - t')(-grad\ t') \Rightarrow$$

$$grad\ t' = -\frac{\vec{R}(t')}{cR(t') - \left(\vec{R}(t')\vec{v}(t')\right)} = -\frac{1}{c}\frac{\vec{R}(t')}{R(t') - \left(\vec{\beta}(t')\vec{R}(t')\right)} \tag{7.58}$$

Введем обозначение

$$\lambda(t') = R(t') - \left(\vec{\beta}(t')\vec{R}(t')\right) \tag{7.59}$$

Можем переписать (7.54), (7.55), (7.58), (7.59) в виде

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{\lambda(t')}, \tag{7.60}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\vec{\beta}(t')}{\lambda(t')}, \tag{7.61}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R(t')}{\lambda(t')}, \tag{7.62}$$

$$grad\ t' = -\frac{1}{c}\frac{\vec{R}(t')}{\lambda(t')} \tag{7.63}$$

Посчитаем производную $\frac{d\vec{R}}{dt'}$:

$$\frac{d\vec{R}}{dt'} = \frac{d\big(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\big)}{dt'} = -\frac{d\vec{r}_0}{dt'} = -\vec{v}_0(t') \tag{7.64}$$

Посчитаем производную $\frac{\partial R}{\partial t'}$:

$$R^2(t') = \big(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\big)^2 \Rightarrow$$

$$2R(t')\frac{\partial R(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -2\big(\vec{r} - \vec{r}_0(t')\big)\frac{\partial \vec{r}_0(t')}{\partial t'} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial R(t')}{\partial t'} = -\frac{\Big(\vec{R}(t')\vec{v}(t')\Big)}{R(t')} \tag{7.65}$$

Посчитаем производную $\frac{\partial \lambda}{\partial t'}$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t'} = \frac{\partial R(t')}{\partial t'} - \frac{\vec{v}(t')}{c}\frac{\partial \vec{R}(t')}{\partial t'} - \frac{\vec{R}(t')}{c}\frac{\partial \vec{v}(t')}{\partial t'} =$$

$$= -\frac{\Big(\vec{R}(t')\vec{v}(t')\Big)}{R(t')} + \frac{\vec{v}^2(t')}{c} - \frac{\Big(\vec{R}(t')\dot{\vec{v}}(t')\Big)}{c} \tag{7.66}$$

Посчитаем $grad\ \lambda$:

$$grad\ \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \lambda}{\partial t'} grad\ t' = \left(\frac{\vec{R}}{R} - \vec{\beta}\right) + \left(-\frac{(\vec{R}\vec{v})}{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{(\vec{R}\dot{\vec{v}})}{c}\right)\left(-\frac{\vec{R}}{c\lambda}\right) \tag{7.67}$$

Наконец, найдем электрическое поле

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi =$$

$$-\frac{e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\vec{v}}{\lambda(t')}\right)\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{e}{\lambda^2} grad\ \lambda(t') =$$

$$-\frac{e}{c^2}\frac{\dot{\vec{v}}}{\lambda}\frac{R}{\lambda} - \frac{e}{c^2}\left(-\frac{\vec{v}}{\lambda^2}\right)\left(-\frac{\vec{R}\vec{v}}{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{\vec{R}\dot{\vec{v}}}{c}\right)\frac{R}{\lambda} + \frac{e}{\lambda^2}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{e}{\lambda^2}\left(\frac{\vec{R}\vec{v}}{R} - \frac{v^2}{c} + \frac{\vec{R}\dot{\vec{v}}}{c}\right)\frac{\vec{R}}{c\lambda} =$$

$$\frac{e}{\lambda^3}\left\{-\frac{1}{c^2}R\lambda\dot{\vec{v}}-\frac{1}{c^3}\left(\vec{R}\dot{\vec{v}}\right)\vec{v}R+\frac{1}{c^2}\left(\vec{R}\dot{\vec{v}}\right)\vec{R}\right\}$$

$$+\frac{e}{\lambda^3}\left\{-\frac{1}{c^2}\left(\vec{R}\vec{v}\right)\dot{\vec{v}}+\frac{1}{c^3}Rv^2\vec{v}+\frac{\lambda}{R}\vec{R}+\frac{\lambda}{c}\vec{v}+\frac{\left(\vec{R}\vec{v}\right)}{c}\vec{R}-\frac{v^2}{c^2}\vec{R}\right\}=$$

$$\frac{e}{\lambda^3c^2}\left[\vec{R}\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}\vec{R}\right),\dot{\vec{v}}\right]+\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\lambda^3}\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right) \qquad (7.68)$$

Лекция 8. Излучение

Введение

Излучением мы будем считать ту часть электромагнитного поля, которая доходит до наблюдателя, находящегося на бесконечном расстоянии от источника излучения. Количественной характеристикой излучения является вектор Пойнтинга

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right] \tag{8.1}$$

Напомним, что закон сохранения энергии в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div\vec{\sigma} + \left(\vec{E}\vec{j}\right) = 0, \tag{8.2}$$

где $\left(\vec{E}\vec{j}\right)$ – работа поля по перемещению заряда, w – энергия поля. Энергия поля тратится на перемещение заряда и является источником излучения.

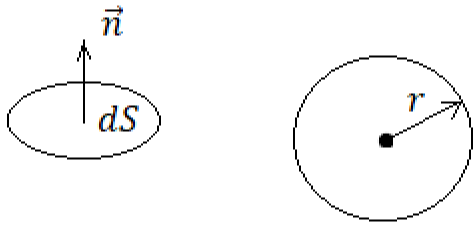

Рис. 8.1. Площадка.

Рассмотрим площадку $d\vec{S} = \vec{n}dS$ (рис. 8.1). Интенсивность излучения через эту площадку равна

$$dI = \vec{\sigma}d\vec{S} = (\vec{\sigma}\vec{n})dS \tag{8.3}$$

Если мы рассматриваем бесконечно большую площадку, окружающую источник излучения, например, сферу радиуса r, то

$$dI = (\vec{\sigma}\vec{n})r^2 d\Omega \tag{8.4}$$

Получим угловое распределение интенсивности излучения в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]\frac{\vec{r}}{r}\right)r^2 = \frac{cr}{4\pi}\left(\vec{r}\left[\vec{E}\vec{H}\right]\right) \tag{8.5}$$

Для того, чтобы интенсивность излучения на бесконечности была ненулевой, $\left[\vec{E}\vec{H}\right]$ не должно убывать быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$. Следовательно, потенциалы φ и A не должны убывать быстрее, чем $\frac{1}{r}$. Мы помним, что потенциалы, которые создаются движущимися зарядами, являются запаздывающими и имеют вид

$$\varphi(\vec{r},t)=\int\limits_{V'}\frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{8.6}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{8.7}$$

Интегралы (8.6), (8.7) можно посчитать далеко не во всех случаях.

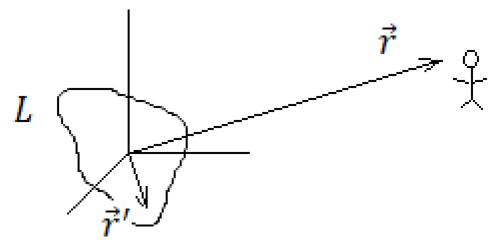

Рис. 8.2. Система зарядов и наблюдатель.

Рассмотрим систему островного типа, которая находится в объеме с характерным линейным размером L (рис. 8.2). Наблюдатель находится на конце радиус-вектора $\vec{r}$. Пусть выполнено

$$r'=|\vec{r}'|<L\ll|\vec{r}|=r \tag{8.8}$$

Тогда отношение r'/r можно считать малым параметром в разложении

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{r^2-2(\vec{r}\vec{r}')+(r')^2}=r\sqrt{1-\frac{2(\vec{r}\vec{r}')}{r^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}=r\left(1-\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)+\cdots$$

$$=r-\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r}+\cdots, \tag{8.9}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r\sqrt{1-\frac{2(\vec{r}\vec{r}')}{r^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{r}\left(1+\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^2}\right)+\cdots \tag{8.10}$$

Можем не учитывать дальнейшие слагаемые, поскольку

$$\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^2} : \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \sim \frac{r'}{r} < \frac{L}{r} \ll 1 \tag{8.11}$$

Подставим полученные приближения в формулы для потенциалов $(8.6), (8.7)$:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\int\limits_{V'} dV'\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right), \tag{8.12}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{cr}\int\limits_{V'} dV'\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right) \tag{8.13}$$

Мы видим, что плотность под интегралом зависит не только от $\vec{r}'$, нужно учитывать запаздывание по системе. Разложим плотности $\rho, \vec{j}$ в окрестности времени $\tau = t - \frac{r}{c}$ с учетом малости $\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}$:

$$\rho\left(\tau + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right) = \rho(\tau) + \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2}\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^2 + \cdots, \tag{8.14}$$

$$\vec{j}\left(\tau + \frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right) = \vec{j}(\tau) + \frac{\partial\vec{j}}{\partial\tau}\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\vec{j}}{\partial\tau^2}\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^2 + \cdots \tag{8.15}$$

Условием сходимости данного ряда является требование о том, чтобы каждое последующее слагаемое было меньше предыдущего:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\rho}{\partial\tau^n}\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^n}{\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\tau^{n-1}}\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{\frac{\partial^n\rho}{\partial\tau^n}}{\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\tau^{n-1}}}\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{c}\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r} \cong \frac{r'}{\lambda} \ll 1, \tag{8.16}$$

где мы предположили, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\sim\omega\rho \Rightarrow \frac{\partial^n\rho}{\partial\tau^n}\sim\omega^n\rho \tag{8.17}$$

Условие $r' \ll \lambda$ аналогично $v \ll c$, то есть скорости движения зарядов должны быть небольшими. Итак,

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\int\limits_{V'}\rho(\vec{r}',\tau)dV' + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'} dV'\rho(\vec{r}',\tau)\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc} +$$

$$+\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int\limits_{V'} dV'\rho(\vec{r}',\tau)\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^2 + \cdots, \tag{8.18}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{cr}\int\limits_{V'}\vec{j}(\vec{r}',\tau)dV'+\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'}dV'\vec{j}(\vec{r}',\tau)\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{r^2c^2}+\cdots \tag{8.19}$$

Введем обозначения:

$$\varphi_0(\vec{r},\tau)=\frac{1}{r}\int\limits_{V'}dV'\rho(\vec{r}',\tau), \tag{8.20}$$

$$\varphi_1(\vec{r},\tau)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'}dV'\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\rho(\vec{r}',\tau), \tag{8.21}$$

$$\varphi_3(\vec{r},\tau)=\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int\limits_{V'}dV'\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^2\rho(\vec{r}',\tau), \tag{8.22}$$

$$\vec{A}_1(\vec{r},\tau)=\frac{1}{cr}\int\limits_{V'}dV'\vec{j}(\vec{r}',\tau), \tag{8.23}$$

$$\vec{A}_2(\vec{r},\tau)=\frac{1}{2cr}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'}dV'\left[\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\vec{j}(\vec{r}',\tau)-\frac{\vec{r}\vec{j}(\vec{r}',\tau)}{rc}\vec{r}'\right], \tag{8.24}$$

$$\vec{A}_3(\vec{r},\tau)=\frac{1}{2cr}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'}dV'\left[\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\vec{j}(\vec{r}',\tau)+\frac{\vec{r}\vec{j}(\vec{r}',\tau)}{rc}\vec{r}'\right] \tag{8.25}$$

Тогда

$$\varphi(\vec{r},t)=\varphi_0(\vec{r},\tau)+\varphi_1(\vec{r},\tau)+0+\varphi_3(\vec{r},\tau), \tag{8.26}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_1(\vec{r},\tau)+\vec{A}_2(\vec{r},\tau)+\vec{A}_3(\vec{r},\tau) \tag{8.27}$$

Физический смысл уравнений излучения

Рассмотрим физический смысл слагаемых в (8.26). Не учитывая время запаздывания по системе, можем считать, что

$$\varphi_0(\vec{r},\tau)=\frac{1}{r}\int\limits_{V'}dV'\rho(\vec{r}',\tau)=\frac{Q(\tau)}{r}=\frac{Q}{r}, \tag{8.28}$$

где $Q(\tau)-$ полный заряд системы. Таким образом, φ_0- потенциал постоянного кулоновского поля, которое не вносит вклад в излучение. Для второго слагаемого получим

$$\varphi_1(\vec{r},\tau) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'} dV'\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\rho(\vec{r}',\tau) = \frac{1}{cr^2}\left(\vec{r},\int\limits_{V'}\vec{r}'\dot{\rho}(\vec{r}',\tau)dV'\right) = \frac{\left(\vec{r},\dot{\vec{d}}\right)}{cr^2} = \frac{\left(\vec{n},\dot{\vec{d}}\right)}{cr}, \quad (8.29)$$

где $\vec{d}$ – электрический дипольный момент системы. Для третьего слагаемого получим

$$\varphi_3(\vec{r},\tau) = \frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int\limits_{V'} dV'\left(\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\right)^2\rho(\vec{r}',\tau) = \frac{1}{6c^2r^3}\int\limits_{V'} 3dV'\ddot{\rho}(\vec{r}',\tau)r'_\alpha r'_\beta\cdot r_\alpha r_\beta =$$

$$= \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\tau)r_\alpha r_\beta}{6c^2r^3} = \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\tau)n_\alpha n_\beta}{6c^2r}, \quad (8.30)$$

где мы учли, что

$$(\vec{r}\vec{r}')^2 = (r_\alpha r'^\alpha)^2 = r_\beta r_\alpha r'^\alpha r'^\beta = r_\beta r_\alpha r'_\alpha r'_\beta, \quad (8.31)$$

и ввели тензор квадрупольного момента

$$Q_{\alpha\beta} = \int\limits_{V'} 3dV'\rho(\vec{r}',\tau)r'_\alpha r'_\beta \quad (8.32)$$

Аналогично рассмотрим компоненты векторного потенциала (8.27). Закон сохранения энергии в момент времени τ имеет вид

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}',\tau)}{\partial\tau} + div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}',\tau) = 0, \quad (8.33)$$

где

$$div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}',\tau) = \frac{\partial \vec{j}_{x'}(\vec{r}',\tau)}{\partial x'} + \cdots \quad (8.34)$$

Рассмотрим дипольный момент

$$\vec{d}(\tau) = \int dV'\vec{r}'\rho(\vec{r}',\tau) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{d}}(\tau) = \int dV'\vec{r}'\dot{\rho}(\vec{r}',\tau) \quad (8.35)$$

Скалярно умножим (8.35) на произвольный вектор $\vec{a}$ и используем закон сохранения (8.33):

$$\left(\vec{a}\dot{\vec{d}}(\tau)\right) = \int dV'(\vec{a}\vec{r}')\dot{\rho}(\vec{r}',\tau) = -\int dV'(\vec{a}\vec{r}')div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}',\tau) \quad (8.36)$$

Посчитаем

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\left(\vec{j}(\vec{r}',\tau)(\vec{a}\vec{r}')\right) = (\vec{a}\vec{r}')div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}',\tau) + \vec{j}(\vec{r}',\tau)\vec{\nabla}_{\vec{r}'}(\vec{a}\vec{r}') \qquad (8.37)$$

Используя (8.37) в (8.36), получим

$$\left(\vec{a}\dot{\vec{d}}(\tau)\right) = \int \vec{j}(\vec{r}',\tau)\vec{\nabla}_{\vec{r}'}(\vec{a}\vec{r}')dV' - \int dV' div_{\vec{r}'}\left(\vec{j}(\vec{r}',\tau)(\vec{a}\vec{r}')\right) \qquad (8.38)$$

Произведем промежуточные вычисления:

$$\left(\vec{j}\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\right)(\vec{a}\vec{r}') = \left(j_x\frac{\partial}{\partial x'} + j_y\frac{\partial}{\partial y'} + j_z\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(a_x x' + a_y y' + a_z z'\right) =$$

$$= j_x a_x + j_y a_y + j_z a_z = (\vec{a}\vec{j}), \qquad (8.39)$$

$$\int\limits_{V'} div_{\vec{r}'}\left(\vec{j}(\vec{r}',\tau)(\vec{a}\vec{r}')\right)dV' = \oint\limits_{S} \vec{j}_n(\vec{r}',\tau)(\vec{a}\vec{r}')dS' = 0, \qquad (8.40)$$

поскольку мы можем взять достаточно большую поверхность S, такую, что все токи нашей системы островного типа окажутся внутри нее, и $\vec{j}_n = 0$. Итак, преобразуем (8.38) к виду

$$\left(\vec{a}\dot{\vec{d}}\right) = \int dV'\left(\vec{a}\vec{j}(\vec{r}',\tau)\right) \qquad (8.41)$$

Поскольку (8.41) должно выполняться для любого $\vec{a}$, то

$$\dot{\vec{d}} = \int dV'\vec{j}(\vec{r}',\tau) \qquad (8.42)$$

Для первой компоненты векторного потенциала получим выражение

$$\vec{A}_1(\vec{r},\tau) = \frac{1}{cr}\int\limits_{V'} dV'\vec{j}(\vec{r}',\tau) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} \qquad (8.43)$$

Используя соотношение

$$\left[\vec{r}[\vec{r}'\vec{j}]\right] = \vec{r}'(\vec{r}\vec{j}) - \vec{j}(\vec{r}\vec{r}'), \qquad (8.44)$$

для второй компоненты векторного потенциала получим

$$\vec{A}_2(\vec{r},\tau) = \frac{1}{2cr}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'} dV'\left[\frac{(\vec{r}\vec{r}')}{rc}\vec{j}(\vec{r}',\tau) - \frac{\vec{r}\vec{j}(\vec{r}',\tau)}{rc}\vec{r}'\right] = \frac{1}{2c^2r^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'} dV'\left[[\vec{r}'\vec{j}(\vec{r}',\tau)]\vec{r}\right] =$$

$$= \frac{\left[\dot{\vec{\mu}}(\tau)\vec{r}\right]}{cr^2} = \frac{\left[\dot{\vec{\mu}}(\tau)\vec{n}\right]}{cr}, \qquad (8.45)$$

где

$$\vec{\mu}(\tau) = \frac{1}{2c}\int\limits_{V'} dV'[\vec{r}'\vec{j}(\vec{r}',\tau)] \tag{8.46}$$

Умножим (8.32) на n_β и возьмем производную $\frac{\partial}{\partial\tau}$, учитывая закон сохранения энергии, получим

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}n_\beta}{\partial\tau} = -n_\beta\int\limits_{V'} dV' div_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}',\tau)\big(3r'_\alpha r'_\beta\big) =$$

$$= 3n_\beta\int\limits_{V'} dV'\big(\vec{j}(\vec{r}',\tau)\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\big)r'_\alpha r'_\beta - 3n_\beta\int\limits_{V'}\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\big(\vec{j}(\vec{r}',\tau)\cdot r'_\alpha r'_\beta\big)dV', \tag{8.47}$$

где мы также учли, что

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\big(\vec{j}(\vec{r}',\tau)\cdot r'_\alpha r'_\beta\big) = r'_\alpha r'_\beta\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}',\tau) + \vec{\nabla}_{\vec{r}'}\big(r'_\alpha r'_\beta\big)\cdot\vec{j}(\vec{r}',\tau) \tag{8.48}$$

По теореме Гаусса

$$3n_\beta\int\limits_{V'}\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\big(\vec{j}(\vec{r}',\tau)\cdot r'_\alpha r'_\beta\big)dV' = 3n_\beta\int\limits_{S}\vec{j}_n(\vec{r}',\tau)r'_\alpha r'_\beta dS' = 0, \tag{8.49}$$

так как мы можем взять сколь угодно большую поверхность S. Тогда

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}n_\beta}{\partial\tau} = 3n_\beta\int\limits_{V'} dV'\left(j_{x'}\frac{\partial}{\partial x'} + j_{y'}\frac{\partial}{\partial y'} + j_{z'}\frac{\partial}{\partial z'}\right)r'_\alpha r'_\beta$$

$$= 3n_\beta\int\limits_{V'} dV'\big(j_\alpha(\vec{r}',\tau)r'_\beta + j_\beta(\vec{r}',\tau)r'_\alpha\big), \tag{8.50}$$

где мы учли, что

$$j_\gamma\frac{\partial}{\partial x^\gamma}r'_\alpha r'_\beta = j_\gamma\delta_{\alpha\gamma}r'_\beta + j_\gamma\delta_{\gamma\beta}r'_\alpha = j_\alpha r'_\beta + j_\beta r'_\alpha \tag{8.51}$$

Найдем -компоненту $\vec{A}_3(\vec{r},\tau)$:

$$\vec{A}_{3\alpha}(\vec{r},\tau) = \frac{1}{2c^2r^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'} dV'\big(r_\beta r'_\beta j_\alpha + r_\beta j_\beta r'_\alpha\big) = \frac{1}{2c^2r}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int\limits_{V'} dV' n_\beta r'_\beta j_\alpha + \int\limits_{V'} dV' n_\beta j_\beta r'_\alpha\right)$$

$$= \frac{n_\beta}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{V'} dV'\left(j_\alpha r'_\beta + j_\beta r'_\alpha\right) = \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial Q_{\alpha\beta} n_\beta}{\partial\tau} = \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\tau) n_\beta}{6c^2 r} = A_{3\alpha} \tag{8.52}$$

В итоге, мы получили следующие формулы для компонент потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\left(\vec{n}, \dot{\vec{d}}\right)}{cr} \\ \varphi_2 = 0 \\ \varphi_3 = \dfrac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\tau) n_\alpha n_\beta}{6c^2 r} \end{cases} \tag{8.53}$$

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \dfrac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} \\ \vec{A}_2 = \dfrac{\left[\dot{\vec{\mu}}(\tau)\vec{n}\right]}{cr} \\ A_{3\alpha} = \dfrac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\tau) n_\beta}{6c^2 r} \end{cases} \tag{8.54}$$

Первые компоненты соответствуют электрическому дипольному излучению, вторые – магнитному дипольному излучению, третьи – электрическому квадрупольному излучению.

Напомним, что для того, чтобы мы могли разложить потенциалы в ряд, нам необходимо, во-первых, находиться далеко от источника, т.е.

$$r' < L \ll r \tag{8.55}$$

Во-вторых, для сходимости рядов должно выполняться условие

$$r' \ll \lambda \tag{8.56}$$

В-третьих, для того, чтобы мы находились в волновой зоне

$$\lambda \ll r \tag{8.57}$$

Утверждение о волновой зоне

Для того, чтобы понять откуда появилось утверждение о волновой зоне, рассмотрим электрическое дипольное излучение, для которого

$$\varphi(\vec{r}, \tau) = \frac{\left(\vec{n}, \dot{\vec{d}}(\tau)\right)}{cr}, \tag{8.58}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, \tau) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} \tag{8.59}$$

Определим магнитное поле

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}\right] = \left[\vec{\nabla}\frac{1}{cr}, \dot{\vec{d}}(\tau)\right] + \frac{1}{cr}\left[\vec{\nabla}, \dot{\vec{d}}(\tau)\right] = -\frac{\left[\vec{r}, \dot{\vec{d}}\right]}{2cr^3} - \frac{\left[\vec{r}, \ddot{\vec{d}}\right]}{c^2r^2}$$

$$= -\frac{\left[\vec{n}, \dot{\vec{d}}\right]}{2cr^2} - \frac{\left[\vec{n}, \ddot{\vec{d}}\right]}{c^2r} \tag{8.60}$$

Выше мы использовали следующие математические утверждения:

$$\left[\vec{\nabla}, \varphi\vec{A}\right] = \varphi\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi A_x & \varphi A_y & \varphi A_z \end{vmatrix} = \varphi\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] + \vec{i}\left(A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y} - A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \cdots$$

$$= \varphi\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] + \left[\vec{\nabla}\varphi, \vec{A}\right], \tag{8.61}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{cr} = \frac{1}{c}\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)\frac{1}{\sqrt{x^2 + \cdots}} = -\frac{1}{2c}\frac{\vec{i}2x + \cdots}{\sqrt{(x^2 + \cdots)^3}} = -\frac{\vec{r}}{2cr^3}, \tag{8.62}$$

$$\left[\vec{\nabla}, \dot{\vec{d}}(\tau)\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{\vec{d}}_x(\tau) & \dot{\vec{d}}_y(\tau) & \dot{\vec{d}}_z(\tau) \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial\dot{\vec{d}}_z(\tau)}{\partial y} - \frac{\partial\dot{\vec{d}}_y(\tau)}{\partial z}\right) + \cdots = \vec{i}\left(\ddot{\vec{d}}_z\frac{\partial\tau}{\partial y} - \ddot{\vec{d}}_y\frac{\partial\tau}{\partial z}\right) + \cdots$$

$$= -\frac{\vec{i}}{cr}\left(\ddot{\vec{d}}_z y - \ddot{\vec{d}}_y z\right) + \cdots = -\frac{1}{cr}\left[\vec{r}, \ddot{\vec{d}}\right], \tag{8.63}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{y}{cr} \tag{8.64}$$

Напомним, что поле не должно убывать быстрее, чем $1/r$, иначе оно не долетит до бесконечности. Следовательно, первое слагаемое в (8.60) должно быть много меньше второго. Считая, что $\dot{\vec{d}} \sim \omega d, \ddot{\vec{d}} \sim \omega^2 d$, потребуем, чтобы

$$\frac{\omega d}{cr^2} : \frac{\omega^2 d}{c^2 r} \ll 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\omega d}{cr^2}\frac{c^2 r}{\omega^2 d} = \frac{c}{r\omega} = \frac{\lambda}{r} \ll 1 \tag{8.65}$$

Лекция 9. Излучение разной степени мультипольности

Электрическое дипольное излучение

Напомним выражения для скалярного и векторного потенциалов:

$$\varphi = \frac{\left(\vec{n}, \dot{\vec{d}}\right)}{cr}, \tag{9.1}$$

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cr} \tag{9.2}$$

При анализе условий применимости мультипольного излучения, мы получили

$$\vec{H} = \frac{\left[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}\right]}{c^2 r} \tag{9.3}$$

Характерные размеры излучаемой области должны быть много меньше, чем длина волны, которая, в свою очередь, должна быть много меньше расстояния до наблюдателя:

$$L \ll \lambda \ll r \tag{9.4}$$

Из (9.4) следует, что при дифференцировании по времени дифференцировать нужно только запаздывающее время $\tau = t - \frac{r}{c}$. Учитывая это, найдем электрическое поле

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\left(\vec{\nabla}, \frac{\left(\vec{n}, \dot{\vec{d}}(\tau)\right)}{cr}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} = -\frac{1}{cr}\left(\vec{n}, \ddot{\vec{d}}(\tau)\right)\vec{\nabla}\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\vec{d}}(\tau)}{r}$$

$$= \frac{1}{cr}\left(\vec{n}, \ddot{\vec{d}}\right)\frac{\vec{r}}{cr} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\vec{d}}}{r} = \frac{\left(\vec{n}, \ddot{\vec{d}}\right)\vec{r} - \ddot{\vec{d}}}{c^2 r} \tag{9.5}$$

Учитывая, что

$$\left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \ddot{\vec{d}}\right]\right] = \left(\vec{n}, \ddot{\vec{d}}\right)\vec{r} - \ddot{\vec{d}}\vec{n}^2\,, \tag{9.6}$$

получим

$$\vec{E} = -\frac{\left[\vec{n}, \left[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}\right]\right]}{c^2 r} = -\left[\vec{n}, \vec{H}\right] \tag{9.7}$$

Векторно слева умножим (9.7) на $\vec{n}$:

$$[\vec{n},\vec{E}] = -\left[\vec{n},[\vec{n},\vec{H}]\right] = -\left(\vec{n}(\vec{n},\vec{H}) - \vec{H}\right) = \vec{H}, \tag{9.8}$$

поскольку $\vec{n} \perp \vec{H}$, следовательно, $(\vec{n},\vec{H}) = 0$. Итак,

$$\begin{aligned} \vec{H} &= [\vec{n},\vec{E}] \\ \vec{E} &= -[\vec{n},\vec{H}]' \end{aligned} \tag{9.9}$$

где $\vec{n}-$ направление распространения волны. Волна является сферической, поскольку $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят только от величины $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$. Поверхность постоянной фазы:

$$c^2(t-\tau_0) = r^2 \tag{9.10}$$

В сферической волне, которая рассматривается очень далеко от источника, фронт волны можно рассматривать практически плоским. Кроме того, в плоской электромагнитной волне

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| \tag{9.11}$$

Напомним, что для интенсивности излучения справедливо

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi}(\vec{n},[\vec{E},\vec{H}]) = \frac{cr^2}{4\pi}([\vec{n},\vec{E}],\vec{H}) = \frac{cr^2}{4\pi}(\vec{H},\vec{H}) = \frac{cr^2H^2}{4\pi} = \frac{cr^2E^2}{4\pi} \tag{9.12}$$

Подставляя (9.3) в (9.12), получим формулу для углового распределения интенсивности электрического дипольного излучения

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi}\frac{\left[\ddot{\vec{d}},\vec{n}\right]^2}{c^4r^2} = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{d}},\vec{n}\right]^2 \tag{9.13}$$

Представим себе, что в какой-то фиксированный момент τ мы можем выбрать некую систему отсчета, ориентировать ось z вдоль $\ddot{\vec{d}}$, угол между направлением на излучатель и вектором $\ddot{\vec{d}}$ обозначим θ (рис. 9.1). В этом случае угловое распределение интенсивности

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta \tag{9.14}$$

При $\theta = 0$ интенсивность равна нулю. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ интенсивность максимальная. Анализируя интенсивность излучения для каждого угла, получим диаграмму направленности (тороид), изображенную на рис. 9.1.

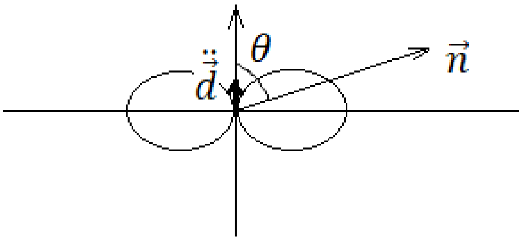

Рис. 9.1. Диаграмма направленности электрического дипольного излучения.

Для того, чтобы найти полную интенсивность излучения, проинтегрируем (9.14):

$$I = \int \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, d\Omega = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi = -\frac{\ddot{\vec{d}}^2 2\pi}{4\pi c^3}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)$$

$$= \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3}\left\{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cos^2\theta\, d(\cos\theta) - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d(\cos\theta)\right\} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3}\left\{\frac{\cos^3\theta}{3}\bigg|_0^{\pi} - \cos\theta|_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{2c^3}\left\{-\frac{2}{3}+2\right\} = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} \qquad (9.15)$$

Можно посчитать интенсивность излучения в более общем виде по формуле (9.13), где

$$\left[\ddot{\vec{d}},\vec{n}\right]^2 = \left|\ddot{\vec{d}}\right|^2|\vec{n}|^2\sin^2\alpha = \left|\ddot{\vec{d}}\right|^2(1-\cos^2\alpha) = \left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 - \left(\ddot{\vec{d}},\vec{n}\right)^2 \qquad (9.16)$$

Интегрируя (9.13) с учетом (9.15), получим

$$I = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\int \ddot{\vec{d}}^2 d\Omega - \int\left(\ddot{\vec{d}},\vec{n}\right)^2 d\Omega\right) = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\ddot{\vec{d}}^2 4\pi - \int \ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta n_\alpha n_\beta d\Omega\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3}\left(\ddot{\vec{d}}^2 4\pi - \ddot{d}_\alpha\ddot{d}_\beta\int n_\alpha n_\beta d\Omega\right) \qquad (9.17)$$

На семинарах мы получали, что

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} = \frac{\int n_\alpha n_\beta d\Omega}{\int d\Omega} \Rightarrow$$

$$\int n_\alpha n_\beta d\Omega = \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta} \qquad (9.18)$$

Подставим (9.18) в (9.17) и получим результат, который мы уже получали для частного случая в (9.15):

$$I = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\ddot{\vec{d}}^2 4\pi - \ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{c^3}\left(\ddot{\vec{d}}^2 - \frac{1}{3}\ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta \delta_{\alpha\beta}\right) = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{c^3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} \quad (9.19)$$

Если у нас есть одна заряженная частица, то

$$\vec{d} = q\vec{r}_q, \quad (9.20)$$

$$\ddot{\vec{d}} = q\vec{a}, \quad (9.21)$$

где $\vec{r}_q -$ радиус-вектор частицы, $\vec{a} -$ ускорение частицы. В этом случае угловое распределение интенсивности излучения:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}[\vec{a},\vec{n}]^2 \quad (9.22)$$

Полная интенсивность излучения:

$$I = \frac{2q^2\vec{a}^2}{3c^3} \quad (9.23)$$

Учитывая второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]\right), \quad (9.24)$$

перепишем (9.23) в виде

$$I = \frac{2q^4}{3c^3m^2}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]\right)^2 \quad (9.25)$$

Магнитное дипольное излучение

Скалярный и векторный потенциалы в приближении магнитного дипольного излучения имеют вид

$$\varphi = 0, \quad (9.26)$$

$$\vec{A} = \frac{[\dot{\vec{\mu}}(\tau),\vec{n}]}{cr} \quad (9.27)$$

Найдем электрическое и магнитное поля:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{[\ddot{\vec{\mu}}(\tau),\vec{n}]}{c^2r}, \quad (9.28)$$

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \left[\vec{\nabla},\frac{[\dot{\vec{\mu}}(\tau),\vec{n}]}{cr}\right] = \frac{1}{cr}\left\{(\vec{n},\vec{\nabla})\dot{\vec{\mu}}(\tau) - \vec{n}\left(\vec{\nabla},\dot{\vec{\mu}}(\tau)\right)\right\} \quad (9.29)$$

Вычислим по отдельности слагаемые в (9.29):

$$\vec{\nabla}\dot{\vec{\mu}}(\tau) = \frac{\partial \dot{\mu}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\mu}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\mu}_z}{\partial z} = \ddot{\mu}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \ddot{\mu}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \ddot{\mu}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\ddot{\mu}_x \frac{x}{r} + \ddot{\mu}_y \frac{y}{r} + \ddot{\mu}_z \frac{z}{r}\right) = -\frac{(\ddot{\vec{\mu}}, \vec{r})}{cr} = -\frac{(\ddot{\vec{\mu}}, \vec{n})}{c}, \tag{9.30}$$

$$(\vec{n}, \vec{\nabla})\dot{\vec{\mu}} = \left(n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\dot{\vec{\mu}}$$

$$= \vec{i}\left(n_x \frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)\dot{\mu}_x(\tau) + \vec{j}\left(n_x \frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)\dot{\mu}_y(\tau) + \vec{k}\left(n_z \frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)\dot{\mu}_z(\tau)$$

$$= \vec{i}\left(n_x \ddot{\mu}_x \left(-\frac{x}{rc}\right) + n_y \ddot{\mu}_x \left(-\frac{y}{rc}\right) + \cdots\right) + \vec{j}(\dots) + \vec{k}(\dots)$$

$$= \vec{i}\ddot{\mu}_x\left(-\frac{(\vec{n}, \vec{\mathrm{r}})}{rc}\right) + \vec{j}\ddot{\mu}_y(\dots) + \vec{k}\ddot{\mu}_z(\dots) = -\frac{(\vec{n}, \vec{\mathrm{r}})}{rc}\ddot{\vec{\mu}} = -\frac{\ddot{\vec{\mu}}}{c} \tag{9.31}$$

Подставим (9.30) и (9.31) в (9.29):

$$\vec{H} = \frac{1}{cr}\left\{-\frac{\ddot{\vec{\mu}}}{c} + \frac{\vec{n}(\ddot{\vec{\mu}}, \vec{n})}{c}\right\} = -\frac{\ddot{\vec{\mu}} - \vec{n}(\ddot{\vec{\mu}}, \vec{n})}{c^2 r} = -\frac{\left[\vec{n}, [\ddot{\vec{\mu}}, \vec{n}]\right]}{c^2 r} = [\vec{n}, \vec{E}] \tag{9.32}$$

Таким образом, вектора $\vec{n}, \vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют правую тройку.

Найдем полную интенсивность излучения и угловое распределение интенсивности излучения. Полная интенсивность:

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \tag{9.33}$$

Для плоской волны можно записать угловое распределение интенсивности в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2 E^2}{4\pi} = \frac{cr^2 H^2}{4\pi} = \frac{cr^2 H^2}{4\pi} \tag{9.34}$$

В итоге мы получим выражения аналогичные электрическому дипольному излучению с заменой $\ddot{\vec{d}}$ на $\ddot{\vec{\mu}}$:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\vec{\mu}}, \vec{n}]^2}{4\pi c^3}, \tag{9.35}$$

$$I = \frac{2\ddot{\vec{\mu}}^2}{3c^3} \tag{9.36}$$

Заметим, что

$$\vec{d} = \int \rho \vec{r}' dV', \tag{9.37}$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int [\vec{r}', \vec{j}]dV' \sim \frac{v}{c} \tag{9.38}$$

Таким образом, интенсивность магнитного дипольного излучения намного меньше, чем электрического дипольного. Магнитное дипольное излучение имеет диаграмму направленности аналогичную электрическому дипольному.

Электрическое квадрупольное излучение

Скалярный и векторный потенциалы в приближении электрического квадрупольного излучения:

$$\varphi = \frac{\dddot{Q}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{6c^2 r}, \tag{9.39}$$

$$A^\alpha = \frac{\dddot{Q}^{\alpha\beta} n_\beta}{6c^2 r}, \tag{9.40}$$

где

$$Q_{\alpha\beta} = 3\int dV' \rho(\vec{r}', \tau) r'_\alpha r'_\beta \tag{9.41}$$

Совершим калибровочное преобразование:

$$\begin{gathered} \varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{A} = \vec{A}' + grad\, f \end{gathered}, \tag{9.42}$$

где

$$f = -\frac{\dot{Q}^\nu{}_\nu}{18cr} \tag{9.43}$$

Вычислим для функции (9.43):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\ddot{Q}^\nu{}_\nu}{18c^2 r}, \tag{9.44}$$

$$(\vec{\nabla} f)_\alpha = \left(-\frac{1}{18cr}\vec{\nabla}\dot{Q}^\nu{}_\nu\right)_\alpha = \left(\frac{1}{18c^2 r}\ddot{Q}^\nu{}_\nu \frac{\vec{r}}{r}\right)_\alpha = \frac{\ddot{Q}^\nu{}_\nu n_\alpha}{18c^2 r} \tag{9.45}$$

Запишем калибровочное преобразование:

$$\varphi = \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{6c^2 r} - \frac{\ddot{Q}^\nu{}_\nu}{18c^2 r} = \frac{3\left(\int \ddot{\rho}(\vec{r}', \tau) dV' \left(3r'_\alpha r'_\beta\right) n_\alpha n_\beta - \int \ddot{\rho}(\vec{r}', \tau) dV' r'_\nu r'_\nu \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta\right)}{18c^2 r}$$

$$= \frac{\int dV' \ddot{\rho}(\vec{r}', \tau)\left(3r'_\alpha r'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2\right) n_\alpha n_\beta}{6c^2 r} = \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{6c^2 r}, \tag{9.46}$$

$$A^{\alpha} = \frac{\ddot{Q}^{\alpha\beta} n_{\beta}}{6c^2 r} - \frac{\ddot{Q}^{\nu}{}_{\nu} n_{\alpha}}{18c^2 r} = \frac{3\left(\int dV' \ddot{\rho}(\vec{r}',\tau)\left(3r'_{\alpha}r'_{\beta}\right)n_{\beta} - \int dV' \ddot{\rho}(\vec{r}',\tau) r'_{\nu} r'_{\nu}\, \delta_{\alpha\beta} n_{\beta}\right)}{18c^2 r}$$

$$= \frac{n_{\beta} \int dV' \ddot{\rho}(\vec{r}',\tau)\left(3r'_{\alpha}r'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^2\right)}{6c^2 r} = \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta} n_{\beta}}{6c^2 r} \tag{9.47}$$

Если мы введем вектор

$$D_{\alpha} = D_{\alpha\beta} n_{\beta}, \tag{9.48}$$

то

$$\varphi = \frac{\left(\ddot{\vec{D}}, \vec{n}\right)}{6c^2 r}$$
$$\vec{A} = \frac{\ddot{\vec{D}}}{6c^2 r} \tag{9.49}$$

Вспомним, что в дипольном электрическом приближении, потенциалы имели вид

$$\varphi = \frac{\left(\vec{n}, \dot{\vec{d}}\right)}{cr}$$
$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cr} \tag{9.50}$$

Сравнивая (9.49) и (9.50), понимаем, что можно заменить

$$\dot{\vec{d}} = \frac{\ddot{\vec{D}}}{6c} \tag{9.51}$$

Электрическое и магнитное поля в дипольном приближении были равны

$$\vec{E}(r,t) = -\frac{\left[\vec{n}, \left[\ddot{\vec{d}}(\tau), \vec{n}\right]\right]}{c^2 r}, \tag{9.53}$$

$$\vec{E}(r,t) = \frac{\left[\ddot{\vec{d}}(\tau), \vec{n}\right]}{c^2 r} \tag{9.54}$$

Произведем замену (9.51) и получим для квадрупольного приближения:

$$\vec{E}(r,t) = -\frac{\left[\vec{n}, \left[\dddot{\vec{D}}(\tau), \vec{n}\right]\right]}{6c^3 r}, \tag{9.55}$$

$$\vec{E}(r,t) = \frac{\left[\dddot{\vec{D}}(\tau), \vec{n}\right]}{6c^3 r} \tag{9.56}$$

Угловое распределение интенсивности в квадрупольном приближении:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2 H^2}{4\pi} = \frac{cr^2}{4\pi}\frac{\left[\dddot{\vec{D}}(\tau), \vec{n}\right]^2}{36c^6 r^2} = \frac{\left[\dddot{\vec{D}}(\tau), \vec{n}\right]^2}{144\pi c^5} \tag{9.57}$$

При расчете полной интенсивности мы должны учесть, что направление в вектор $\vec{D}$ (9.48) входит дважды. Полная интенсивность квадрупольного излучения считается отдельно:

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{144\pi c^5}\int \left[\dddot{\vec{D}}(\tau), \vec{n}\right]^2 d\Omega = \frac{1}{144\pi c^5}\int \left(\dddot{D}^2 - \left(\dddot{\vec{D}}, \vec{n}\right)^2\right) d\Omega, \tag{9.58}$$

где

$$\left[\dddot{\vec{D}}, \vec{n}\right]^2 = \dddot{D}^2 n^2 \sin\alpha = \dddot{D}^2 - \left(\dddot{\vec{D}}, \vec{n}\right)^2 \tag{9.59}$$

Посчитаем отдельно слагаемые в (9.58):

$$\int \dddot{D}^2 d\Omega = \int \dddot{D}^{\alpha\beta} n_\beta \dddot{D}^{\alpha\gamma} n_\gamma d\Omega = \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\int n_\beta n_\gamma d\Omega = \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\frac{4\pi}{3}\delta_{\beta\gamma}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{3}\dddot{D}^2, \tag{9.60}$$

$$\int \left(\dddot{\vec{D}}, \vec{n}\right)^2 d\Omega = \int \left(\dddot{D}_\alpha n_\alpha\right)\left(\dddot{D}_\beta n_\beta\right) d\Omega = \int \left(\dddot{D}_{\alpha\gamma} n_\gamma n_\alpha\right)\left(\dddot{D}_{\beta\delta} n_\delta n_\beta\right) d\Omega$$

$$= \dddot{D}_{\alpha\gamma}\dddot{D}_{\beta\delta}\int n_\gamma n_\alpha n_\delta n_\beta d\Omega = \dddot{D}_{\alpha\gamma}\dddot{D}_{\beta\delta}\frac{4\pi}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{15}\left(\dddot{D}_{\beta\delta}\dddot{D}_{\beta\delta} + \dddot{D}_{\gamma\gamma}\dddot{D}_{\delta\delta} + \dddot{D}_{\delta\gamma}\dddot{D}_{\gamma\delta}\right) = \frac{8\pi}{15}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha} \tag{9.61}$$

На семинарах мы получали, что

$$\overline{n_\gamma n_\alpha n_\delta n_\beta} = \frac{\int n_\gamma n_\alpha n_\delta n_\beta d\Omega}{\int d\Omega} = \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right)\frac{1}{15} \tag{9.62}$$

Подставим (9.60) и (9.61) в (9.58):

$$I = \frac{1}{144\pi c^5}\left(\frac{4\pi}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha} - \frac{8\pi}{15}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha}\right) = \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha}}{180c^5} \tag{9.63}$$

Пример

Рассмотрим заряд, который осциллирует вдоль оси z с амплитудой a (рис. 9.2).

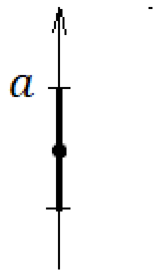

Рис. 9.2. Осциллирующий заряд.

Радиус-вектор заряда:

$$\vec{r} = (0,0, a\cos\omega t) \tag{9.64}$$

Дипольный момент:

$$\vec{d} = ea\cos\omega t\,(0,0,1) \tag{9.65}$$

Квадрупольный момент:

$$D_{xx} = (ea\cos\omega t)^2(3\cdot 0\cdot 0 - 1) = -(ea\cos\omega t)^2 = -\frac{D_{zz}}{2} = D_{yy} \tag{9.66}$$

Тензор квадрупольного момента можно записать в виде

$$D = e^2a^2\cos^2\omega t\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = e^2a^2\,\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{9.67}$$

Полная интенсивность излучения в дипольном приближении:

$$\langle I_1\rangle = \langle\frac{2\ddot{\vec{p}}^2}{3c^3}\rangle = \langle\frac{2e^2\omega^4a^2\cos^2\omega t}{3c^3}\rangle = \frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3} \tag{9.68}$$

Найдем третью производную (9.67):

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = \frac{e^2a^2}{2}\cos 2\omega t\cdot(2\omega)^3\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{9.69}$$

Полная интенсивность квадрупольного излучения составит

$$\langle I_2\rangle = \langle\frac{4e^2a^4\omega^6}{180c^5}\cos^2(2\omega t)\cdot 6\rangle = \frac{2\cdot 6}{180}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5} \tag{9.70}$$

Сравним интенсивности квадрупольного и дипольного излучений:

$$\frac{\langle I_2\rangle}{\langle I_1\rangle} \cong \frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}\cdot\frac{c^3}{e^2a^2\omega^4} = \frac{a^2\omega^2}{c^2} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \tag{9.71}$$

Поскольку мы находимся в волновой зоне $a \ll \lambda$, квадрупольное излучение оказывается на порядок слабее.

Квадрупольное излучение осуществляется на удвоенной частоте. Но это не всегда так, например, если рассмотреть излучение диполя, который колеблется, оставаясь параллельным самому себе, квадрупольное излучение происходит на частоте колебаний.

Итак, мы получили следующее разложение по мультиполям для интенсивности:

$$I = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\vec{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha}}{180c^5}, \tag{9.72}$$

и для углового распределения интенсивности:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\left[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}\right]^2}{4\pi c^3} + \frac{\left[\ddot{\vec{\mu}}, \vec{n}\right]^2}{4\pi c^3} + \frac{\left[\dddot{\vec{D}}(\tau), \vec{n}\right]^2}{144\pi c^5} \tag{9.73}$$

Лекция 10. Сила лучистого трения

Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{10.1}$$

Теорема о кинетической энергии:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\vec{F}\vec{v}) \tag{10.2}$$

В случае, когда заряженная частица движется с ускорением, часть энергии тратится на излучение, поэтому мы учитываем, так называемую, силу радиационного трения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{rad} \tag{10.3}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\vec{F}\vec{v}) + (\vec{F}_{rad}\vec{v}) \tag{10.4}$$

В дипольном приближении мощность радиационных сил равна

$$(\vec{F}_{rad}\vec{v}) = -I = -\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}}^2 \tag{10.5}$$

Потребуем, чтобы интегральное соотношение выполнялось на некотором промежутке времени (t_1, t_2), т.е. чтобы работа силы лучистого трения была равна потерям на излучение:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{rad}\vec{v})dt = -\int_{t_1}^{t_2} I dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\vec{a}^2 dt \tag{10.6}$$

Мы будем рассматривать квазипериодическое движение, то есть

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_2) \tag{10.7}$$

$$\vec{a}(t_1) = \vec{a}(t_2) \tag{10.8}$$

Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{a}\frac{d\vec{v}}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\vec{a}\vec{v}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{v}\frac{d\vec{a}}{dt}\right) dt$$

$$= (\vec{a}\vec{v})(t_2) - (\vec{a}\vec{v})(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v}\dot{\vec{a}})dt = 0 - \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v}\dot{\vec{a}})dt \tag{10.9}$$

Подставим (10.9) в (10.6):

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{rad}\vec{v})dt = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} (\vec{v}\dot{\vec{a}})dt \tag{10.10}$$

Сравнивая левую и правую части (10.10), получим выражение для силы лучистого трения:

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \tag{10.11}$$

Поскольку теперь в уравнение движения будет входить $\dddot{\vec{r}}$, нам нужно будет задавать не только начальные координату и импульс, но еще и начальное ускорение

$$\vec{a}(t_0) = \vec{a}_0 \tag{10.12}$$

Для примера предположим, что в системе нет никаких сил, кроме силы лучистого трения, тогда

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \tag{10.13}$$

Будем искать решение в виде

$$\vec{r} = \vec{R}e^{\alpha t} \tag{10.14}$$

Подставим (10.14) в (10.13):

$$m\alpha^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\alpha^3 \Longrightarrow \tag{10.15}$$

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = \frac{3c^3 m}{2e^2} \end{gathered} \tag{10.16}$$

Тогда решение уравнения (10.13) можно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_2 e^{\alpha t} \tag{10.17}$$

$$\vec{r}_0 = \vec{a}_0 + \vec{a}_2 \tag{10.18}$$

Для скорости получим соотношения:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2 e^{\alpha t} \tag{10.19}$$

$$\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}\Big|_{t=0} = \vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2 \tag{10.20}$$

Для ускорения:

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \alpha^2\vec{a}_2 e^{\alpha t} \tag{10.21}$$

$$\vec{w}_0 = \dot{\vec{v}}\Big|_{t=0} = \alpha^2\vec{a}_2 \tag{10.22}$$

Выразим вектора $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ через заданные величины:

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{w}_0}{\alpha^2} \tag{10.23}$$

$$\vec{a}_1 = \vec{v}_0 - \frac{\vec{w}_0}{\alpha} \tag{10.24}$$

$$\vec{a}_0 = \vec{r}_0 - \frac{\vec{w}_0}{\alpha^2} \tag{10.25}$$

Подставив $(10.23) - (10.25)$ в (10.17), получим

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \frac{\vec{w}_0}{\alpha^2} + \left(\vec{v}_0 - \frac{\vec{w}_0}{\alpha}\right)t + \frac{\vec{w}_0}{\alpha^2}e^{\alpha t}, \tag{10.26}$$

где

$$\alpha = \frac{3c^3 m}{2e^2} \tag{10.27}$$

Если на частицу не действуют никакие силы, то она должна двигаться равномерно и прямолинейно по закону

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \tag{10.28}$$

В формуле (10.26) слагаемое $\frac{\vec{w}_0}{\alpha^2}e^{\alpha t}$ говорит об ускорении частицы. Если формально вписать в уравнение движения силу лучистого трения, мы получим результат (10.26). Следует потребовать, чтобы сила лучистого трения была много меньше, чем любые силы, действующие в системе:

$$\vec{F} \gg \vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \tag{10.29}$$

При условии (10.29) нам удастся избежать казуса с саморазгоняющейся частицей.

Можем записать

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Longrightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{10.30}$$

$$\dddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}\omega}{m} \quad (10.31)$$

Требование (10.29) сводится к следующему

$$\vec{F} \gg \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\omega}{m}\vec{F} \quad (10.32)$$

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega}{c} \ll 1 \quad (10.33)$$

$$\frac{a_0}{\lambda} \ll 1 \quad (10.34)$$

Как правило, для реальных заряженных частиц соотношение (10.34) выполняется в довольно широком диапазоне вплоть до рентгена.

Роль силы лучистого трения

Сила лучистого трения играть большую роль при рассмотрении процесса рассеяния волны. Если считать, что волна рассеивается на атоме, как на гармоническом осцилляторе (электрон осциллирует около тяжелого ядра), то в таком случае осциллятор можно считать изотропным, а волна есть

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}\right) \quad (10.35)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}\right) \quad (10.36)$$

Уравнение движения гармонического осциллятора во внешнем электромагнитном поле:

$$m\ddot{\vec{R}} = -m\omega_0^2\left(\vec{R} - \vec{R}_0\right) + e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{R}}, \vec{H}\right]\right\}\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}\right) + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{R}} \quad (10.37)$$

В правой части (10.37) мы видим вклад возвращающей силы, силы Лоренца и силы лучистого трения. Введем вектор смещения от положения равновесия $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0$ и перепишем (10.37) в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} + e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{r}}, \vec{H}\right]\right\}\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \vec{k}\vec{R}_0\right) + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \quad (10.38)$$

В дальнейшем будем считать, что рано или поздно осцилляции установятся и что сила лучистого трения много меньше всех сил, действующих в системе, то есть

$$\ddot{\vec{r}} \cong -\omega_0^2\vec{r} \Longrightarrow \quad (10.39)$$

$$\dddot{\vec{r}} \cong -\omega_0^2\dot{\vec{r}} \quad (10.40)$$

Введем обозначение

$$\gamma = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\omega_0^2}{m} = \frac{2}{3}\vec{r}_0\frac{\omega_0^2}{c} > 0 \tag{10.41}$$

Перепишем (10.38) в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{r}}, \vec{H}_0\right]\right\}\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \vec{k}\vec{R}_0\right) \tag{10.42}$$

Заметим, что мы рассматриваем нерелятивистскую частицу, для которой

$$\frac{\dot{\vec{r}}}{c} \ll 1, \tag{10.43}$$

поэтому можем пренебречь слагаемым $\frac{e}{mc}\left[\dot{\vec{r}}, \vec{H}_0\right]$. В плоской электромагнитной волне выполняется соотношение

$$\left|\vec{E}_0\right| = \left|\vec{H}_0\right| \tag{10.44}$$

Также мы можем пренебречь следующим слагаемым внутри косинуса, поскольку

$$kr \sim \frac{|\vec{r}|}{\lambda} \ll 1 \tag{10.45}$$

Перепишем (10.42) в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right) \tag{10.46}$$

Найдем решение однородного уравнения и прибавим к нему частное решение неоднородного. Решение однородного уравнения

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = 0 \tag{10.47}$$

будем искать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{\alpha t} \tag{10.48}$$

Подставим (10.48) в (10.47):

$$(\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2)\vec{r} = 0 \tag{10.49}$$

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \tag{10.50}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{10.51}$$

Общее решение принимает вид

$$\vec{r}_{\text{общ}} = \vec{r}_1 e^{\alpha_1 t} + \vec{r}_2 e^{\alpha_2 t} \tag{10.52}$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)\right\} \tag{10.53}$$

будем искать в виде

$$\vec{r}_ч = \vec{r}_3 \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)\right\} \tag{10.54}$$

Подставим (10.54) в (10.53):

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)\vec{r}_3 = \frac{e}{m}\vec{E}_0 \tag{10.55}$$

$$\vec{r}_3 = \frac{\frac{e}{m}\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \tag{10.56}$$

Частное решение принимает вид

$$\vec{r}_ч = \frac{\frac{e}{m}\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)\right\} \tag{10.57}$$

Найдем действительную часть (10.57):

$$\mathrm{Re}\,\vec{r}_ч = \mathrm{Re}\left[\frac{e}{m}\vec{E}_0\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\left\{\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right) - i\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right) + \gamma\omega\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$= \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{\sqrt{}\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right) + \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$= \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{\left(\cos\psi\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right) + \sin\psi\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0\right)\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

$$= \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}, \tag{10.58}$$

где

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{10.59}$$

Полное решение:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 e^{\alpha_1 t} + \vec{r}_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{e\vec{E}_0}{m} \frac{\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \tag{10.60}$$

Для того, чтобы определить $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, нам нужно задать граничные условия, например, координату смещения и скорость в начальный момент времени. Но поскольку экспоненты в (10.60) отрицательные, мы будем рассматривать установившиеся режимы, в этом случае влиянием начальных режимов можно пренебречь. Тогда

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}_0}{m} \frac{\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \tag{10.61}$$

Дипольный момент:

$$\vec{d} = e\vec{r} = \frac{e^2\vec{E}_0}{m} \frac{\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \tag{10.62}$$

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{\omega^2 e^2\vec{E}_0}{m} \frac{\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \tag{10.63}$$

Можем найти полную интенсивность и угловое распределение интенсивности дипольного излучения:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2 = \frac{2}{3c^3} \frac{\omega^4 e^4 \vec{E}_0^{\,2} \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)} \tag{10.64}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\left[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}\right]^2}{4\pi c^3} = \frac{\omega^4 e^4 \left[\vec{E}_0, \vec{n}\right]^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}_0 - \psi\right)}{4\pi c^3 m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)} \tag{10.65}$$

$$\langle\frac{dI}{d\Omega}\rangle = \frac{\omega^4 e^4 \left[\vec{E}_0, \vec{n}\right]^2}{8\pi c^3 m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)} \tag{10.66}$$

Пусть на гармонический осциллятор падает электромагнитная волна, которая характеризуется вектором Пойнтинга $\vec{\sigma}$. Вводят понятие дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dI}{d\Omega}}{|\vec{\sigma}|}, \tag{10.67}$$

где для плоской волны

$$|\vec{\sigma}| = \frac{c}{4\pi}\left|\left[\vec{E}, \vec{H}\right]\right| = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}\right) \tag{10.68}$$

$$\overline{|\vec{\sigma}|} = \overline{\frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}\right|^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{R}\right)} = \frac{c}{8\pi}\left|\vec{E}\right|^2 \tag{10.69}$$

Подставим (10.69) в (10.67):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi\omega^4 e^4}{4\pi c^4 m^2}\frac{\left[\vec{E},\vec{n}\right]^2}{\left|\vec{E}\right|^2}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = \frac{\omega^4 e^4}{m^2c^4}\frac{\sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{10.70}$$

Полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{I}{|\vec{\sigma}|} = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4 e^4}{m^2c^4}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{10.71}$$

Используем обозначение для классического радиуса заряженной частицы

$$a_0 = \frac{e^2}{mc^2} \tag{10.72}$$

Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\sin^2\theta \tag{10.73}$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}a_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{10.74}$$

Если частоты очень маленькие $\omega \to 0$, то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \to \frac{a_0^2}{\omega_0^4}\omega^4 \tag{10.75}$$

$$\sigma \to \frac{8\pi}{3}\frac{a_0^2}{\omega_0^4}\omega^4 \tag{10.76}$$

Выражение (10.76) называют сечением Резолье. Если частоты очень большие $\omega \to \infty$, то получаем формулу Томсона:

$$\sigma \to \frac{8\pi}{3}a_0^2 \tag{10.77}$$

Пример

Рассмотрим рассеяние света частотой ω на двух независимых осцилляторах, у каждого из которых собственная частота ω_0, в зависимости от расстояния $\vec{R}$ между ними. Пусть амплитуда колебаний осцилляторов будет мала по сравнению с длиной волны. Найдем дифференциальное и полное сечения рассеяния.

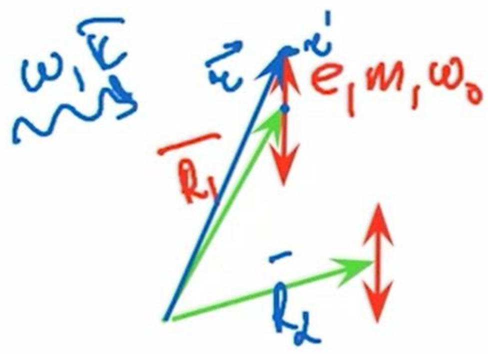

Рис. 10.1. Пример.

Радиус-векторы колеблющихся зарядов:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 + \vec{r}_1{}' \tag{10.78}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 + \vec{r}_2{}' \tag{10.79}$$

Уравнения движения осцилляторов:

$$m\ddot{\vec{r}}_i = -m\omega_0^2\vec{r}_i - m\gamma\dot{\vec{r}}_i + \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\left(\vec{R}_i + \vec{r}_i{}'\right) - i\omega t}, \tag{10.80}$$

где

$$\gamma = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\omega_0^2}{m} \tag{10.81}$$

$$\gamma\omega \ll 1 \tag{10.82}$$

Вспомним, что амплитуда колебаний много меньше длины волны, поэтому пренебрегаем $\vec{k}\vec{r}_i{}'$ в экспоненте. Преобразуем дальше (10.80):

$$-\omega^2\vec{r}_i = -\omega_0^2\vec{r}_i + i\omega m\gamma\vec{r}_i + \frac{\vec{E}_0}{m} e^{i\vec{k}\vec{R}_i - i\omega t} \tag{10.83}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)\vec{r}_i = \frac{\vec{E}_0}{m} e^{i\vec{k}\vec{R}_i - i\omega t} \tag{10.84}$$

$$\vec{r}_i = \frac{e}{m}\frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{R}_i}}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \tag{10.85}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\omega^2\frac{e}{m}\frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{R}_i}}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \tag{10.86}$$

Дипольный момент:

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_i e\ddot{\vec{r}}_i = -\omega^2 \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\left(e^{i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\vec{R}_2}\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \tag{10.87}$$

Полная интенсивность излучения:

$$I = \frac{2}{3c^3} \frac{e^4 \left|\vec{E}_0\right|^2 \omega^4}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)} \left|e^{i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\vec{R}_2}\right|^2 \tag{10.88}$$

Полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{I}{|\vec{\sigma}|} = \frac{\frac{2}{3c^3} \frac{e^4 \left|\vec{E}_0\right|^2 \omega^4}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)} \left|e^{i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\vec{R}_2}\right|^2}{\frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}_0\right|^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\left(2 + 2\cos\vec{k}\left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right)\right), \tag{10.89}$$

где мы учли, что

$$\left|e^{i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\vec{R}_2}\right|^2 = \left(e^{i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\vec{R}_2}\right)\left(e^{-i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{-i\vec{k}\vec{R}_2}\right) = 1 + 2\frac{e^{i\vec{k}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)} + e^{-i\vec{k}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)}}{2} + 1$$

$$= 2 + 2\cos\vec{k}\left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right) \tag{10.90}$$

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dI}{d\Omega}}{|\vec{\sigma}|} = \frac{\frac{\left[\vec{n}, \vec{E}_0\right]^2}{4\pi c^3} \frac{e^4}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \left|e^{i\vec{k}\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\vec{R}_2}\right|^2}{\frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}_0\right|^2}$$

$$= \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\left(2 + 2\cos\vec{k}\left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right)\right)\left[\vec{n}, \frac{\vec{E}_0}{\left|\vec{E}_0\right|}\right]^2 \tag{10.91}$$

Выражение (10.90) меняется от 0 до 4 и зависит от сдвига фаз при распространении световой волны от одного осциллятора к другому. Если $\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right| \ll \lambda$, то этим сдвигом фаз можно пренебречь, и осцилляторы излучают синхронно.

Лекция 11.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ