



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

МИНКОВ
СТАНИСЛАВ СЕРГЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
ВЫПУСКНИЦУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МЫРИКОВУ ВИКТОРИЮ АНДРЕЕВНУ



Содержание

Лекция 1

| | |
|--|----|
| Определение динамической системы. Орбита. Периодические точки. Омега-предельное множество. | 4 |
| Накрытия окружности. | 5 |
| Подсчет количества периодических точек. Связь с малой теоремой Ферма. | 5 |
| Пример, когда омега-предельное множество есть канторово множество. | 6 |
| Повороты окружности. | 6 |
| Условие плотности и равномерной распределенности орбиты. | 6 |
| Распределение первых цифр степеней двойки. | 7 |
| Инвариантная мера. Примеры. | 7 |
| Доказательство равномерной распределенности иррационального поворота. | 8 |
| Доказательство единственности инвариантной меры иррационального поворота. | 10 |
| Замечания о рациональном повороте окружности. | 10 |

Лекция 2

| | |
|--|----|
| Динамические системы с непрерывным временем. Потоки. | 12 |
| Особые точки. Двумерный линейный случай. | 12 |
| Омега-предельное множество. Теорема Пуанкаре-Бендиксона. | 14 |
| Обмотка двумерного тора. Отображение Пуанкаре первого возвращения. | 15 |
| Надстройка и отображение Пуанкаре. | 17 |
| Топологическая транзитивность и минимальность. | 18 |
| Сдвиг на n -мерном торе. | 18 |

Лекция 3

| | |
|---|----|
| Определение инвариантной меры. Примеры. | 21 |
| Теорема Крылова-Боголюбова о существовании инвариантной меры | 22 |
| Инвариантные меры для северо-южного отображения окружности | 23 |
| Множество инвариантных мер. Теорема Шоке о существовании экстремальных точек. | 24 |
| Эргодичность. Связь эргодичности и экстремальности. | 24 |
| Временные и пространственные средние. Анонс теоремы Биркгофа. Последняя проблема Такенса. | 26 |
| Теорема Пуанкаре о возвращении. Связь эргодичности и топологической транзитивности. Строгая эргодичность и минимальность. | 27 |

Лекция 4

| | |
|--|----|
| Теорема Биркгофа о временных средних. | 29 |
| Следствия теоремы Биркгофа. Эргодическая теорема Биркгофа. | 30 |
| Цепные дроби. Применение теоремы Биркгофа. | 31 |

| | |
|--|----|
| Пример из механики. Связь с эргодической теорией. | 32 |
| Метод усреднения. | 32 |
| О временных и пространственных средних. | 33 |
| Линейные диффеоморфизмы Аносова. Перемешивание. | 33 |
| Лекция 5 | |
| Линейный диффеоморфизм Аносова перемешивает. | 35 |
| Топологическая сопряженность. Структурная устойчивость. | 37 |
| Гиперболические периодические точки. Сохранение гиперболических пе- риодических орбит при возмущении. | 38 |
| Примеры. | 39 |
| Поворот окружности структурно неустойчив. | 39 |
| Северо-южное отображение окружности структурно устойчиво. | 39 |
| Полуустойчивость. Топологический фактор. Степень отображения окруж- ности. | 40 |
| Лекция 6 | |
| Структурная устойчивость растяжения окружности в k раз. | 42 |
| Сдвиг Бернулли. | 44 |
| Подкова Смейла. | 45 |
| Начальное отображение прямоугольника. | 45 |
| Построение ограничения. | 46 |
| Кодирование. | 48 |
| Локально устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболической точки. | 48 |
| Лекция 7 | |
| Гомоклиническое пересечение. | 50 |
| Связь с подковой Смейла. | 51 |
| Гетероклиническое пересечение. Гомоклинический класс. | 52 |
| Гамильтонов хаос. Теорема Мельникова. | 53 |
| Гомоклиническая петля. | 53 |
| Периодическое возмущение гамильтоновой системы. | 54 |
| Теорема Мельникова. Расстояние Мельникова. | 56 |
| Спиральность векторных полей. | 56 |
| Лекция 8 | |
| Спиральность векторного поля. | 58 |
| Коэффициент зацепления. Теорема Гаусса. | 58 |
| Асимптотический коэффициент зацепления и спиральность. | 59 |
| Теорема Арнольда. | 59 |
| Структурная устойчивость линейного диффеоморфизма Аносова. | 61 |
| Разделяющий диффеоморфизм. | 61 |
| Построение первого полусопряжения. | 62 |

Лекция 9

| | |
|---|----|
| Структурная устойчивость линейного диффеоморфизма Аносова. Продол- жение доказательства. | 64 |
| Построение первого полусопряжения. | 64 |
| Построение второго полусопряжения. | 65 |
| Упрощённое выражение для спиральности. | 66 |
| Аттракторы. | 67 |
| Поглощающая область. Максимальный аттрактор. | 67 |
| Неблуждающая точка. | 69 |

Лекция 10

| | |
|---|----|
| Гиперболическое множество. Устойчивое и неустойчивое многообразия. . . | 70 |
| Локально максимальные гиперболические множества. | 70 |
| Критерий структурной устойчивости. | 71 |
| Пример Семейла: открытое множество не структурно устойчивых отобра- жений. | 72 |
| Типичность. | 74 |
| Гомоклинический класс. Ручные и дикие диффеоморфизмы. | 74 |
| Опровержение гипотезы Тома. | 75 |
| Поведение ручной динамической системы. | 75 |
| Универсальная динамика. | 76 |
| Классификация динамических систем. | 77 |
| Метрические свойства гиперболических множеств. | 77 |

Лекция 11

| | |
|---|----|
| Формальная и аналитическая эквивалентности. Нормальная форма. | 78 |
| Формальная нормальная форма. | 79 |
| Формальная нормальная форма при отсутствии резонансов. | 80 |
| Формальная нормальная форма при наличии резонансов. | 81 |
| Мажорантное функциональное пространство. | 82 |
| Аналитическая нормальная форма. | 83 |

Лекция 12

| | |
|--|----|
| Теорема Такенса о вложении для потоков. | 86 |
| Функция лаговых координат. Постановка задачи. Примеры. | 86 |
| Формулировка теоремы. | 87 |
| Пример отсутствия биекции при плохом соотношении размерностей. . . | 88 |
| Теорема Такенса о вложении для диффеоморфизмов. | 88 |
| Формулировка теоремы. | 89 |
| Схема доказательства. | 89 |

Лекция 1

Определение динамической системы. Орбита. Периодические точки. Омега-предельное множество.

Динамической системой обычно называют тройку: фазовое пространство X , отображение $f : X \rightarrow X$, время.

Фазовое пространство X в нашем курсе часто будет просто многообразием. Пространством времени обычно служит $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (итерирование отображений), \mathbb{Z} (итерирование обратимых отображений), \mathbb{R} (потoki) или \mathbb{R}_+ (необратимые потоки).

Мы начнем с изучения дискретных динамических систем, т.е. время задается \mathbb{N}_0 или \mathbb{Z} . Обозначим через $f^{\circ k}$ k -ю итерацию отображения f , т.е., например, $f^{\circ 2}(x) = f(f(x))$, $f^{\circ 3}(x) = f(f(f(x)))$. Здесь значок \circ подчеркивает, что речь идет именно о композиционной степени отображения, а не степени произведения. Хотя формально знак \circ необходим, мы позволим себе его опускать для упрощения записи, так как это не должно вызвать путаницы в нашей теории. Итак, будем обозначать через f^k k -ю композиционную степень отображения f .

Определение 1.1. Пусть $f : X \rightarrow X$ – некоторое отображение. Положительной полуорбитой точки $x \in X$ называется множество $\text{Orb}(x) = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}_0\}$.

Часто положительную полуорбиту называют просто орбитой, если это не вызывает путаницы.

Определение 1.2. Пусть $f : X \rightarrow X$ – некоторое обратимое отображение. Полной орбитой точки $x \in X$ называется множество $\text{Orb}(x) = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$.

Часто полную орбиту называют просто орбитой, если это не вызывает путаницы.

Изучение структуры орбит составляет основу теории динамических систем.

Определение 1.3. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения f , если $f(x) = x$. В этом случае её орбита состоит из одного элемента: $\text{Orb}(x) = \{x\}$.

Определение 1.4. Точка $x \in X$ называется периодической точкой отображения f , если $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x$. В этом случае её орбита состоит из конечного числа элементов. Число n называют периодом точки x .

Конечно, в данном определении периода не требуется, чтобы он был минимальным. Однако, обычно, употребляя термин «период», подразумевают именно минимальный период, так как он наиболее интересен.

Утверждение 1.1. Минимальный период точки делит любой другой период этой точки.

Доказательство. Пусть m – минимальный период точки x , а n – какой-то период точки x . Пусть $n = km + r$, где $k \in \mathbb{N}$ и $0 < r < m$. Тогда $x = f^n(x) = f^r \circ f^{km}(x) = f^r(x)$, т.е. r – тоже период точки x , что противоречит минимальности m . \square

Пусть теперь X – топологическое пространство.

Определение 1.5. ω -предельным множеством точки $x \in X$ относительно f называется множество всех предельных точек её положительной полуорбиты (рассматриваемой как последовательность $\{f^n(x)\}$).

Определение 1.6. Если отображение f обратимо, то α -предельным множеством точки $x \in X$ относительно f называется ω -предельное множество точки x относительно отображения f^{-1} . Обозначение: $\alpha(x)$.

Несложно видеть, что верно следующее

Утверждение 1.2. ω -предельное множество замкнуто. Если X – секвенциальный компакт, то $\omega(x)$ непусто.

Накрытия окружности.

Отображения окружности являются хорошими примерами возможных поведений динамических систем. Под окружностью мы будем понимать $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$. Через $\{x\}$ будем обозначать дробную часть числа x .

Рассмотрим отображение $E_a : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $a \in \mathbb{N}$, где $E_a = \{ax\}$. В частности, при $a = 2$ мы получаем так называемое удвоение E_2 окружности, а при $a = 3$ – утроение E_3 окружности.

Заметим, что каждая точка \mathbb{S}^1 имеет ровно два прообраза при отображении E_2 , ровно три прообраза при отображении E_3 , и ровно a прообразов при отображении E_a . Таким образом, отображение E_a «накрывает» окружность a раз.

Подсчет количества периодических точек. Связь с малой теоремой Ферма.

Зададимся вопросом: сколько у E_a неподвижных точек или n -периодических точек? Решить эту, на первый взгляд, нетривиальную задачу нам поможет следующая хитрость.

Точку $x \in \mathbb{S}^1$ можно мыслить как число из полуинтервала $[0, 1)$. Данное число можно представить в a -ичной системе счисления. Таким образом, $x \sim \{x_1 x_2 x_3 \dots\}$, где $x_i \in \{0, 1, \dots, a-1\}$, и имеется равенство $x = x_1 a^{-1} + x_2 a^{-2} + \dots$. Отображение E_a есть просто сдвиг влево на пространстве последовательностей: $E_a(x)_i = x_{i+1}$. Теперь довольно легко посчитать количество периодических точек. Нужно, однако, помнить, что сопоставление числу его a -ичной записи не является биекцией.

Начнем с подсчета количества неподвижных точек. Ясно, что у такой точки x все числа x_i должны совпадать. Однако последовательность вида $\{a-1, a-1, \dots\}$ соответствует числу 1, что нам не подходит. Поэтому всего имеется $a-1$ неподвижная точка.

Посчитаем теперь все периодические точки периода $n \in \mathbb{N}$ (не обязательно минимального). У такой точки должно быть выполнено $x_{i+n} = x_i$, т.е. она определяется первыми n числами x_1, \dots, x_n . Всего имеется a^n вариантов, но, аналогично предыдущему случаю, последовательность, состоящая из одних чисел $a-1$, нам не подходит. Итого, мы имеем $a^n - 1$ точку периода n .

Пусть теперь $n = p$ – простое число. И мы хотим посчитать количество периодических точек с минимальным периодом p . Для этого из количества всех p -периодических точек необходимо вычесть количество тех из них, у которых минимальный период меньше p . По утверждению 1.1, необходимо вычесть точки периода m , где m делит p . Так как p – простое, вычтем только неподвижные точки. Итого имеем: $a^p - 1 - (a - 1) = a^p - a$ точек минимального периода p .

Давайте теперь увидим, как скучный подсчет периодических точек накрытия окружности приводит нас к малой теореме Ферма. Если x имеет минимальный период p , то все точки $\{x, E_a(x), \dots, E^{p-1}(x)\}$ различны и тоже имеют период p . Таким образом, все p -периодические точки собраны в непересекающиеся пачки по p штук, а всего их $a^p - a$. Таким образом, $a^p - a$ делится на p нацело.

Пример, когда омега-предельное множество есть канторово множество.

Давайте поразмышляем, насколько «плохими» могут быть ω -предельные множества отображений. Например, может ли у какой-то точки множество $\omega(x)$ быть стандартным канторовым множеством?

Мы уже показывали, что $\omega(x)$ замкнуто. Если речь идет об отображении окружности, то дополнение до $\omega(x)$ есть открытое множество, т.е. не более чем счетное объединение интервалов. На первый взгляд, кажется, что канторово множество слишком уж разрывно, и такого никак не бывает. Но отображение E_3 демонстрирует именно такой контринтуитивный пример.

Известный факт, что канторово множество может быть описано как такие точки из отрезка $[0, 1]$, в троичной записи которых присутствуют только числа 0 и 2. Напомним, что утроение окружности, рассматриваемое как отображение на последовательностях троичной записи, действует как левый сдвиг. Поэтому несложно построить такую точку $x \in \mathbb{S}^1$, троичная запись которой содержит все конечные слова из 0 и 2. Для этого нужно просто перечислять их по порядку: сначала все слова длины 1, затем все слова длины 2 и т.д. Ясно, что тогда $\omega(x)$ есть канторово множество.

Повороты окружности.

Условие плотности и равномерной распределенности орбиты.

Рассмотрим теперь другое отображение окружности – поворот. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда поворот $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ на угол α определяется как $R_\alpha(x) = \{x + \alpha\}$.

Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то орбита любой точки $x \in \mathbb{S}^1$ является периодической. Действительно, если $\alpha = \frac{m}{q}$, то $R_\alpha^q(x) = \{x + m\} = x$.

Если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то орбита любой точки $x \in \mathbb{S}^1$ является всюду плотной в \mathbb{S}^1 . Данное утверждение разбиралось на семинаре, поэтому доказательство этого факта мы опустим.

Более того, в случае $\alpha \notin \mathbb{Q}$ любая орбита является равномерно распределенной. Сформулируем этот факт в виде теоремы.

Теорема 1.1. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Пусть $x \in \mathbb{S}^1$ и $I \subset \mathbb{S}^1$ – некоторый интервал. Рассмотрим последовательность чисел

$$A_n(x) = \frac{\#\{m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq n : R_\alpha^m(x) \in I\}}{n+1}, \quad (1.1)$$

где $\#A$ обозначает количество элементов в множестве A . Тогда существует равномерный предел данной последовательности, равный длине интервала I :

$$A_n(x) \Rightarrow |I|, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Распределение первых цифр степеней двойки.

Прежде чем доказывать равномерную распределенность иррационального поворота, посмотрим, как этот факт может решить, на первый взгляд, совершенно стороннюю задачу.

Рассмотрим степени двойки: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 Зададимся вопросом, как часто степень двойки начинается с цифры k ? Чтобы решить эту задачу, нам сперва стоит понять, как определить первую цифру числа N .

Утверждение 1.3. Условие $\log_{10}(k) \leq \{\log_{10} N\} < \log_{10}(k+1)$ эквивалентно тому, что число N начинается с цифры k .

Доказательство. Действительно, $N = 10^{\log_{10} N} = 10^{[\log_{10} N]} 10^{\{\log_{10} N\}}$. Поэтому, числа N и $10^{\{\log_{10} N\}}$ имеют одинаковые первые цифры. При этом, $10^{\{\log_{10} N\}} \in [1, 10)$. \square

Итак, условие, что 2^n начинается с цифры k , эквивалентно условию $\log_{10}(k) \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10}(k+1)$, что эквивалентно условию $R_\alpha^n(0) \in [\log_{10}(k), \log_{10}(k+1))$, где $\alpha = \log_{10} 2$. Несложно видеть, что число $\log_{10} 2$ иррациональное, а потому орбита нуля является равномерно распределенной. Пусть $P(k)$ – вероятность того, что степень двойки начинается с k . Тогда

$$\begin{aligned} P(k) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{0 \leq m \leq n : R_\alpha^m(0) \in [\log_{10}(k), \log_{10}(k+1))\}}{n+1} = \\ &= \log_{10}(k+1) - \log_{10}(k) = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right). \end{aligned}$$

Инвариантная мера. Примеры.

Пусть (X, \mathcal{F}, μ) – пространство с мерой μ , заданной на σ -алгебре \mathcal{F} .

Определение 1.7. Мера μ инвариантна для измеримого отображения $f : X \rightarrow X$, если $\forall A \in \mathcal{F}$ выполнено $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Пример 1.1. Мера Лебега инвариантна для поворота окружности. Это вполне очевидно.

Пример 1.2. Мера Лебега инвариантна для удвоения окружности. На первый взгляд, это кажется контринтуитивным, так как окружность вроде бы растягивается, и длина любого интервала должна увеличиваться. Но в определении меры не зря написан именно прообраз отображения: любой интервал при удвоении имеет ровно два прообраза, длина каждого из которых равна половине длины исходного интервала.

Далее мы увидим, что у иррационального поворота окружности инвариантная мера единственна. А у удвоения и утроения, напротив, существует бесконечное множество инвариантных мер.

Доказательство равномерной распределенности иррационального поворота.

Итак, докажем теорему 1.1. Пусть χ_I – индикаторная функция интервала I . Тогда функции A_n запишутся следующим образом

$$A_n(x) = \frac{1}{n+1}(\chi_I(x) + \chi_I(R_\alpha(x)) + \dots + \chi_I(R_\alpha^n(x))).$$

Введем более общее обозначение:

$$A_{n,\varphi} = \frac{1}{n+1}(\varphi(x) + \varphi(R_\alpha(x)) + \dots + \varphi(R_\alpha^n(x))),$$

где $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция. Для доказательства нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1.4. Пусть M – гладкое компактное многообразие, а $C(M)$ – пространство непрерывных функций на M . Пусть $\Phi \subset C(M)$ – всюду плотное подмножество. Если $\forall \varphi \in \Phi$ верно $A_{n,\varphi} \rightrightarrows C_\varphi$ при $n \rightarrow +\infty$, где C_φ – константа, то $\forall \psi \in C(M)$ верно $A_{n,\psi} \rightrightarrows C_\psi$ при $n \rightarrow +\infty$, где C_ψ – константа.

Доказательство. Пусть $\psi \in C(M)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существует $\varphi \in \Phi$, что $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$.

Тогда $\forall x \in M \forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $|A_{n,\psi}(x) - A_{n,\varphi}(x)| < \frac{1}{n+1}(\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon) = \frac{1}{n+1}((n+1)\varepsilon) = \varepsilon$. Несложно видеть, что отсюда следует $\forall x$ верно

$$\left| \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\psi}(x) - C_\varphi \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\psi}(x) - C_\varphi \right| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, верхний и нижний пределы $A_{n,\psi}(x)$ отличаются не более, чем на 2ε . Ввиду произвольности ε отсюда следует существование предела $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\psi}(x)$ для каждого x . Более того, мы показали, что $\forall \varepsilon \exists C = \text{const}$ что $\forall x$ выполнено $\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\psi}(x) - C \right| < \varepsilon$, откуда следует что предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\psi}(x)$ есть некоторая константа C_ψ . Несложно проверить, что сходимость к C_ψ равномерная. \square

Доказательство теоремы 1.1. Ясно, что если $A_{n,f} \rightrightarrows C_f$, $A_{n,g} \rightrightarrows C_g$, то $A_{n,af+bg} \rightrightarrows aC_f + bC_g$, где a, b константы. Отсюда возникает идея разложить функцию χ_I в ряд Фурье. Мы докажем сходимост к константе для тригонометрических мономов $e^{2\pi imx}$, откуда будет следовать сходимост к константе для тригонометрических полиномов. По теореме Вейерштрасса, тригонометрические полиномы всюду плотны на $C(\mathbb{S}^1)$, откуда, пользуясь утверждением 1.4 сходимост к константе верна для непрерывных функций. Затем, приближая индикаторную функцию гладкими, завершим доказательство.

Пусть $f = e^{2\pi imx}$. Ясно, что $f(R_\alpha^k(x)) = e^{2\pi im(x+k\alpha)}$. Тогда

$$|A_{n,f}(x)| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n e^{2\pi im(x+k\alpha)} \right| \leq \frac{1}{n+1} |e^{2\pi imx}| \left| \sum_{k=0}^n e^{2\pi imk\alpha} \right|.$$

Ясно, что если $m = 0$, то $A_{n,f}(x) = 1$. Поэтому $A_{n,f} \rightrightarrows 1$.

Если же $m > 0$, то последняя сумма есть геометрическая прогрессия, откуда

$$\left| \sum_{k=0}^n e^{2\pi imk\alpha} \right| = \left| \frac{1 - e^{2\pi im(n+1)\alpha}}{1 - e^{2\pi im\alpha}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{2\pi im\alpha}|}.$$

Таким образом, если $m > 0$, то $|A_{n,f}| \leq \frac{\text{const}}{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому $A_{n,f} \rightrightarrows 0$.

Тогда для полиномов $f(x) = a_0 + \sum_{m=0}^n a_m e^{2\pi imx}$ выполнено $A_{n,f} \rightrightarrows a_0$. Заметим, что

$$a_0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Итак, мы установили, что $\forall \varphi \in C(\mathbb{S}^1)$ верно $A_{n,\varphi} \rightrightarrows C_\varphi$. В частности, это верно для функций $\varphi \in C^2(\mathbb{S}^1)$, коэффициенты Фурье которых убывают как $\frac{1}{n^2}$. Причем, частичные суммы Фурье $S_N(x) = a_0 + \sum_{k=0}^N a_k e^{2\pi ikx}$ сходятся к $\varphi \in C^2(\mathbb{S}^1)$ равномерно

на \mathbb{S}^1 (факт из функционального анализа). Так как $\forall N A_{n,S_N} \rightrightarrows a_0 = \int_0^1 S_N(x) dx$

при $n \rightarrow +\infty$, то $A_{n,\varphi} \rightrightarrows a_0 = \int_0^1 \varphi(x) dx$.

Будем приближать индикаторную функцию χ_I последовательностью C^2 -гладких функций. Пусть $\varphi_m \rightrightarrows \chi_I$ и $\psi_m \rightrightarrows \chi_I$, причем $\varphi_m \leq \chi_I \leq \psi_m$ (см. рис. 1.1).

Тогда $A_{n,\varphi_m} \leq A_{n,\chi_I} \leq A_{n,\psi_m}$. Переходя к пределу по n , получаем $\int_0^1 \varphi_m(x) dx \leq$

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\chi_I} \leq \int_0^1 \psi_m(x) dx$. Далее, переходя к пределу по m , с учетом равномер-

ной сходимости, получаем $\int_0^1 \chi_I(x) dx \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\chi_I} \leq \int_0^1 \chi_I(x) dx$. Аналогичное

неравенство справедливо и для нижнего предела, а потому они совпадают. Так как

$\int_0^1 \chi_I(x) dx = |I|$, мы получили требуемое. \square

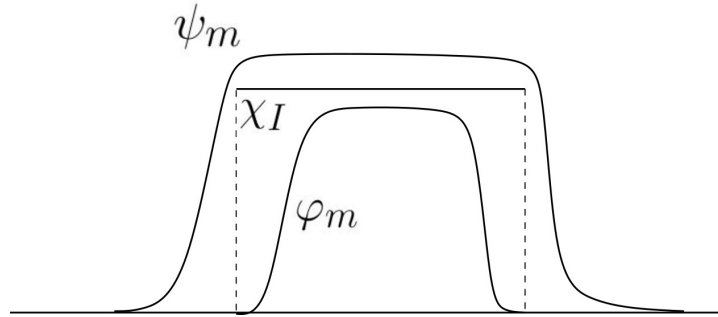


Рис. 1.1. Приближение индикаторной функции последовательностью гладких функций снизу и сверху.

Доказательство единственности инвариантной меры иррационального поворота.

Утверждение 1.5. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Тогда у поворота R_α окружности существует только одна инвариантная борелевская вероятностная мера – мера Лебега.

Доказательство. Очевидно, мера Лебега инвариантна. Докажем, что других нет.

Предположим, что μ – инвариантная борелевская вероятностная мера. Тогда для любого измеримого множества A и любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\mu(A) = \mu(R_\alpha^{-n}(A))$. Запишем это равенство в интегральном виде

$$\int_0^1 \chi_A d\mu = \int_0^1 \chi_{R_\alpha^{-n}(A)} d\mu = \int_0^1 \chi_A \circ R_\alpha^n d\mu.$$

Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $\int_0^1 A_{n, \chi_I} d\mu = \int_0^1 \chi_I d\mu$. С другой стороны, ввиду равномерной распределенности иррационального поворота, имеем $A_{n, \chi_I} \Rightarrow |I|$, откуда $\int_0^1 A_{n, \chi_I}(x) dx \rightarrow |I|$. Тогда получаем $\mu(I) = \int_0^1 \chi_I d\mu = |I|$. \square

Свойство отображения иметь только одну инвариантную меру называется строгой эргодичностью. Подробнее об эргодичности и строгой эргодичности мы еще поговорим на следующих лекциях.

Замечания о рациональном повороте окружности.

Мы доказали, что иррациональный поворот окружности обладает следующими свойствами:

- Все орбиты всюду плотны.
- Равномерная распределенность.
- Строгая эргодичность (существует только одна вероятностная инвариантная мера).

Рассмотрим далее $\alpha \in \mathbb{Q}$. Конечно, поворот R_α не обладает ни одним из указанных свойств. Действительно, все орбиты состоят из конечного числа точек, а потому не могут быть всюду плотны. Нетрудно видеть, что отсутствует и равномерная распределенность. Например, если выбрать интервал I не пересекающимся с орбитой точки x , то $\forall n \in \mathbb{N}$ верно $A_{n, \chi_I}(x) = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n, \chi_I}(x) = 0 \neq |I|$.

У рационального поворота огромное количество инвариантных мер. Например, можно задать равномерную меру на орбите какой-то точки. Пусть $x \in \mathbb{S}^1$ и $\text{Orb}(x) = \{x_1, \dots, x_q\}$ состоит из q элементов. Тогда положим $\mu = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \delta_{x_k}$. Нетрудно убедиться, что такая мера является инвариантной.

Можно построить инвариантную меру следующим образом. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$. Разобьем окружность на n отрезков: $I_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k = 0, \dots, n-1$. Зададим меру λ_0 произвольно на I_0 , чтобы $\lambda_0(I_0) = \frac{1}{n}$. Пусть \mathcal{F}_0 – получившаяся сигма-алгебра измеримых по λ_0 подмножеств отрезка I_0 . Тогда на отрезке I_k зададим меру по формуле $\lambda_k(A) = \lambda_0(R_{\frac{k}{n}}^{-1}(A))$ для $A \in R_{\frac{k}{n}}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_k$. Тогда мера $\mu(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(A \cap I_k)$ будет инвариантной вероятностной для R_α .

Лекция 2

Динамические системы с непрерывным временем. Потоки.

Перейдем к рассмотрению динамических систем с непрерывным временем. Такие системы обычно называют «потоками».

В нашем курсе потоком мы будем называть семейство $\{g^t\}$ гладких отображений $g^t : M \rightarrow M$ некоторого многообразия M со следующими свойствами. Индекс t принадлежит либо \mathbb{R} (обратимые потоки), либо $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ (необратимые потоки) и выполнено групповое свойство: $g^{t+s} = g^t \circ g^s = g^s \circ g^t$.

Пусть M – замкнутое (компактное и без края) многообразие, а V – гладкое векторное поле на M . Пусть $x(t, x_0)$ – решение уравнения $\dot{x}(t) = V(x(t))$ с начальным условием $x(0, x_0) = x_0$. Тогда ясно, что $x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$. Поэтому семейство отображений $g^t(x_0) = x(t, x_0)$ удовлетворяет групповому свойству.

Более того, так как многообразие M замкнуто, любое решение определено при всех $t \in \mathbb{R}$. Действительно, рассмотрим компакт $K = M \times [-T, T]$, где $T > 0$ – произвольное число. По классической теореме теории дифференциальных уравнений, решение $x(t, x_0)$ может быть продолжено на отрезок $[a, b]$ так, что точки $(x(a, x_0), a)$ и $(x(b, x_0), b)$ принадлежат границе компакта K . Но так как граница M пуста, то $a = -T$ и $b = T$. Таким образом, мы можем продолжить решение $x(t, x_0)$ на любой отрезок $[-T, T]$.

Итак, семейство $g^t(x_0) = x(t, x_0)$ является потоком.

Особые точки. Двумерный линейный случай.

Напомним, что точка x_0 векторного поля V называется особой, или неподвижной, если $V(x_0) = 0$. Такой точке соответствует неподвижное решение $x(t) = x_0$. Особые точки очень важны для изучения динамической системы, порожденной потоком векторного поля. Вспомним, что происходит на плоскости.

В курсе дифференциальных уравнений обсуждалась классификация двумерных линейных систем вида $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейный оператор. Ясно, что для данной системы точка $(0, 0)$ является неподвижной. Напомним поведение интегральных кривых в окрестности начала координат при некоторых (наиболее интересных) условиях на собственные значения матрицы A .

Седло. Пусть собственные значения матрицы A есть $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и выполнено $\lambda\mu < 0$. Тогда линейной заменой координат можно привести систему к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Решения имеют вид $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, $y = y_0 e^{\mu t}$, откуда $|y(x)| = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$, где $\frac{\mu}{\lambda} < 0$, а константа C находится из условия $y(x_0) = y_0$. Особая точка $(0, 0)$ такой системы называется седлом (рис. 2.1).

Узел. Пусть собственные значения матрицы A есть $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и выполнено $\lambda\mu > 0$.

Тогда линейной заменой координат можно привести систему к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Решения имеют вид $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, $y = y_0 e^{\mu t}$, откуда $|y(x)| = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$, где $\frac{\mu}{\lambda} > 0$. Особая точка $(0, 0)$ такой системы называется устойчивым узлом при $\lambda < 0$ и неустойчивым узлом при $\lambda > 0$ (рис. 2.2).

Центр. Пусть собственные значения матрицы A есть $i\theta$ и $-i\theta$, где $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда линейной заменой координат можно привести систему к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что функция $x^2 + y^2$ является первым интегралом данной системы. Поэтому интегральные кривые представляют собой окружности с центром в особой точке. Интересно также заметить, что поток системы за время 1 представляет собой поворот окружности на угол $-\theta$. Действительно, несложно проверить, что в полярных координатах система имеет вид $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = -\theta$. Особая точка $(0, 0)$ такой системы называется центром (рис. 2.1).

Фокус. Пусть собственные значения матрицы A есть $\mu + i\theta$ и $\mu - i\theta$, где $\mu, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда линейной заменой координат можно привести систему к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \theta \\ -\theta & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Траектории данной системы совершают вращения, как и у центра, но на этот раз радиус монотонно возрастает или убывает в зависимости от знака μ . Особая точка $(0, 0)$ такой системы называется устойчивым фокусом при $\mu < 0$ и неустойчивым фокусом при $\mu > 0$ (рис. 2.3).

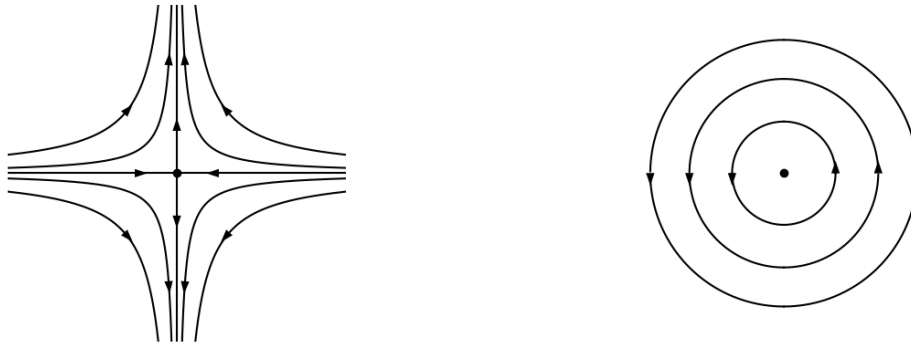


Рис. 2.1. Особые точки типа седло (слева) и центр (справа).

Данные картинки будут часто возникать в нашем курсе в качестве иллюстрирующих примеров. Мы также увидим, что нелинейные автономные системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки могут быть приближены своей линеаризацией.

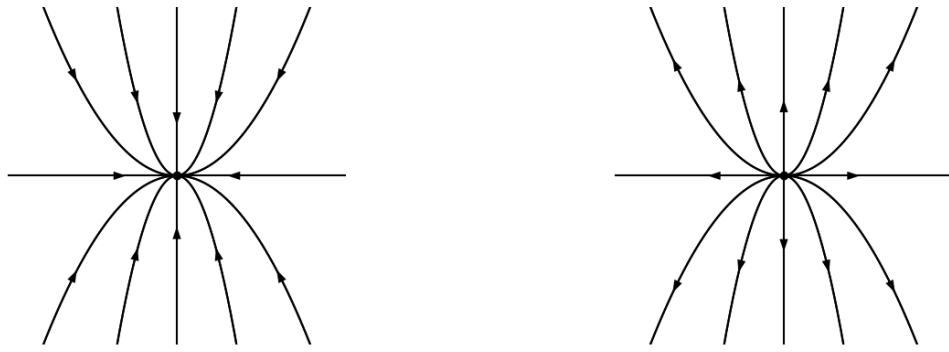


Рис. 2.2. Устойчивый (слева) и неустойчивый (справа) узел.

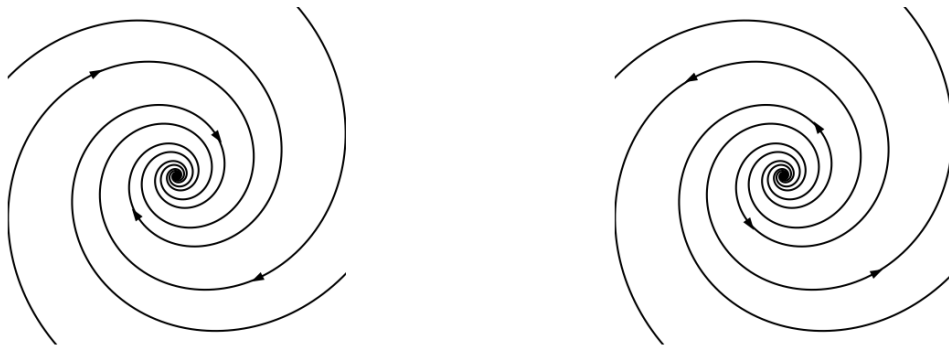


Рис. 2.3. Устойчивый (слева) и неустойчивый (справа) фокус.

Еще один интересный вопрос – какие особые точки векторного поля устойчивы к малым возмущениям. Например, центр является неустойчивым в этом смысле, так как малыми колебаниями его можно превратить в фокус.

Омега-предельное множество. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.

Определим ω -предельное множество для потока g^t аналогично тому, как мы делали это для динамических систем с дискретным временем.

Определение 2.1. ω -предельное множество точки x_0 для потока g^t – это множество таких точек x , что найдется последовательность времен $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, что $g^{t_k}(x_0) \rightarrow x$ при $k \rightarrow +\infty$. Обозначается $\omega(x_0)$.

Если поток обратим, то можно определить α -предельное множество как множество таких точек y , что найдется последовательность времен $t_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, что $g^{t_k}(x_0) \rightarrow y$ при $k \rightarrow +\infty$. Обозначается $\alpha(x_0)$.

Аналогично дискретному случаю, доказывается, что $\omega(x_0)$ замкнуто, непусто на

метризуемом компакте и инвариантно относительно потока g^t .

Сформулируем следующую важную теорему о структуре ω -предельного множества на сфере.

Теорема 2.1 (Пуанкаре-Бендиксона). *Пусть V – гладкое векторное поле на сфере \mathbb{S}^2 , имеющее конечное число особых точек. Пусть g^t – поток этого поля. Тогда для любой точки $x_0 \in \mathbb{S}^2$ множество $\omega(x_0)$ относительно g^t является либо особой точкой, либо циклом, либо полициклом.*

Напомним, что циклом называется периодическая траектория.

Полициклом называют объединение конечного числа особых точек и соединяющих их траекторий с условием существования обхода (рис. 2.4). Говорят, что траектория $g^t(x_0)$ соединяет точки x и y , если либо $g^t(x_0) \rightarrow x$ при $t \rightarrow -\infty$ и $g^t(x_0) \rightarrow y$ при $t \rightarrow +\infty$, либо это верно для $g^{-t}(x_0)$. В этом случае соединяющая траектория $g^t(x_0)$ называется сепаратрисной связкой. Если считать особые точки вершинами, а сепаратрисные связки направленными ребрами, то мы получим некоторый граф. Условие существования обхода можно сформулировать как условие эйлеровости полученного графа.

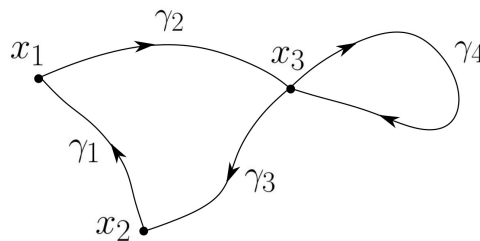


Рис. 2.4. Пример полицикла, образованного особыми точками x_1, x_2, x_3 и сепаратрисными связками $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Данную теорему мы оставим без доказательства, так как частично она уже обсуждалась в курсе дифференциальных уравнений. Более подробно можно прочитать в книге А.И. Буфетов, Н.Б. Гончарук, Ю.С. Ильяшенко «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Обмотка двумерного тора. Отображение Пуанкаре первого возвращения.

Рассмотрим постоянное векторное поле на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Нам будет удобно представлять тор как квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ со склеенными противоположными сторонами.

Векторное поле $V = (a, b)$ задает систему уравнений $\dot{x} \equiv a$ и $\dot{y} \equiv b$, откуда $x(t) = \{at + x_0\}$ и $y(t) = \{bt + y_0\}$. Напомним, что через $\{x\}$ обозначается дробная часть числа x . Таким образом, интегральная траектория является «прямой», наматывающейся на тор (рис. 2.5).

Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Обозначим через β угол наклона «прямой» (x, y) , т.е. $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$. Рассмотрим горизонтальную прямую $L = \{(x, y), y = y_0\}$. Так как

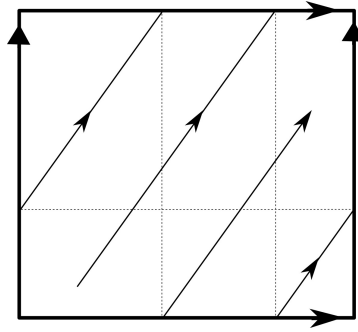


Рис. 2.5. Поток постоянного векторного поля на торе.

векторное поле V не является горизонтальным, то интегральные кривые всюду пересекают L трансверсально (не касаясь). Гиперповерхность, обладающая таким свойством, называется трансверсалью.

Итак, мы выбрали трансверсаль $L \subset \mathbb{T}^2$. Определим отображение $P : L \rightarrow L$ Пуанкаре первого возвращения. Пусть $(x_0, y_0) \in L$, тогда рассмотрим интегральную кривую $\varphi(t) = (x(t, x_0), y(t, y_0))$, т.е. $\varphi(0) = (x_0, y_0)$. Тогда $P(x_0, y_0) = \varphi(s)$, где $s = \min\{t > 0 : \varphi(t) \in L\}$ – время первого возвращения на трансверсаль (рис. 2.6). В разных областях математики также встречаются другие названия отображения Пуанкаре. Например, его называют отображением голономии или отображением монодромии.

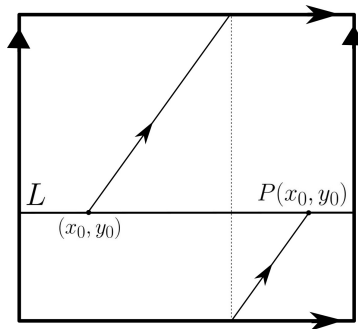


Рис. 2.6. Отображение Пуанкаре первого возвращения на трансверсаль L к постоянному векторному полю на торе.

Несложно видеть, что $P(x, y_0) = (\{x + \frac{1}{\tan(\beta)}\}, y_0)$. Таким образом, мы имеем поворот окружности $R : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ на угол $\frac{1}{\tan(\beta)}$, где отображение $R(x) = \{x + \frac{1}{\tan(\beta)}\}$. Нам уже известно, что при $\tan(\beta) \in \mathbb{Q}$ все орбиты R являются замкнутыми, откуда следует замкнутость всех орбит векторного поля V . Если же $\tan(\beta) \notin \mathbb{Q}$, то любая орбита R всюду плотна в \mathbb{S}^1 и любая орбита P всюду плотна в L , откуда легко следует, что любая орбита поля V всюду плотна в \mathbb{T}^2 .

Заметим, что в случае иррационального $\tan(\beta)$ мы получаем, что $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ верно $\omega(x_0, y_0) = \mathbb{T}^2$. По теореме Пуанкаре-Бендиксона, никакое гладкое векторное поле не могло бы породить подобное поведение на сфере.

Надстройка и отображение Пуанкаре.

В предыдущем разделе, имея гладкое векторное поле на n -мерном многообразии, мы научились строить отображение P Пуанкаре, действующее на трансверсали к этому векторному полю. Таким образом, полученное отображение P действует на многообразии размерности $n - 1$.

Теперь мы предложим конструкцию надстройки, которая является в некотором смысле обратной процедурой. Пусть задан диффеоморфизм f на многообразии M размерности $n - 1$. Мы построим такое многообразие N размерности n и такое векторное поле V на нем, что M является трансверсалью относительно V , а диффеоморфизм f является отображением первого возвращения для потока поля V .

Пусть $\tilde{M} = M \times [0, 1]$. Тогда многообразие N будет получено из \tilde{M} путем склеивания краёв по следующему правилу. Положим $(f(x), 0) = (x, 1)$ для всех $x \in M$. Так мы получим гладкое многообразие N без края.

Векторное поле V на N будет устроено очень просто. Пусть (x, s) – локальные координаты на N , где $x \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $s \in [0, 1]$. Положим $V = \frac{\partial}{\partial s}$. Таким образом, интегральные кривые поля имеют вид $(x(t), s(t)) = (x_0, t)$, и многообразие M является трансверсалью относительно V .

Если мыслить направление поля, как вертикальное, то траектории ведут себя следующим образом. Интегральная кривая, начинающаяся в точке $(x, 0)$, где $x \in M$, поднимается вверх до точки $(x, 1)$, которая склеена с точкой основания $(f(x), 0)$ и так далее (рис. 2.7). Но это и означает, что отображение Пуанкаре $P : M \rightarrow M$ совпадает с диффеоморфизмом f .

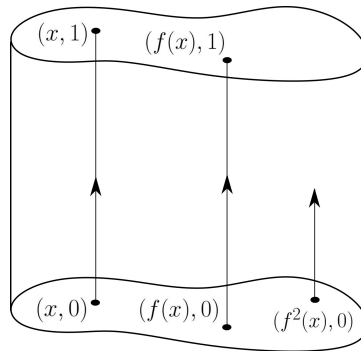


Рис. 2.7. Надстройка для диффеоморфизма f .

Пример 2.1. Как мы видели в предыдущем разделе, двумерный тор является надстройкой для отображения поворота окружности. А поворот окружности, в свою очередь, является отображением первого возвращения для потока постоянного векторного поля на торе.

Пример 2.2. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 1 - x$. Тогда надстройкой является квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$, точки которого склеены по правилу $(x, 1) = (1 - x, 0)$. Несложно видеть, что такой процедурой мы получаем лист Мёбиуса.

Топологическая транзитивность и минимальность.

Определение 2.2. Пусть X – топологическое пространство. Отображение $f : X \rightarrow X$ называется топологически транзитивным, если $\exists x \in X$, что орбита $\text{Orb}(x)$ всюду плотна в X .

Определение 2.3. Пусть X – топологическое пространство. Отображение $f : X \rightarrow X$ называется топологически минимальным, если $\forall x \in X$ орбита $\text{Orb}(x)$ всюду плотна в X .

Определение 2.4. Пусть X – множество, $f : X \rightarrow X$ – отображение. Функция $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется f -инвариантной, если $\varphi \circ f = \varphi$.

Утверждение 2.1. Пусть M – замкнутое многообразие, а $f : M \rightarrow M$ гомеоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны

- 1) Отображение f топологически транзитивно;
- 2) Для любых непустых открытых $U, V \subset M$ найдется $n \in \mathbb{Z}$, что $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть орбита $\text{Orb}(x)$ плотна в M . Тогда $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, что $f^{n_1}(x) \in U$ и $f^{n_2}(x) \in V$. Так как $f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) = f^{n_2}(x) \in V$, то $f^{n_2-n_1}(U) \cap V \neq \emptyset$.

$2 \Rightarrow 1$ (схематично). Пусть U_1, U_2, \dots – счетная база топологии на M . Найдется $n_1 \in \mathbb{Z}$, что $U_1 \cap f^{n_1}(U_2) \neq \emptyset$. Возьмем открытое V_1 , что $\text{Cl}(V_1) \subset U_1 \cap f^{n_1}(U_2)$. Найдется n_2 , что $V_1 \cap f^{n_2}(U_3) \neq \emptyset$. Возьмем открытое V_2 , что $\text{Cl}(V_2) \subset V_1 \cap f^{n_2}(U_3)$. Продолжая по индукции, мы построим последовательность V_i со свойством $\text{Cl}(V_i) \subset V_{i-1} \cap f^{n_i}(U_{i+1})$. Отсюда следует, что множества $\text{Cl}(V_i)$ имеют общую точку x , орбита которой пересекает все U_i . Следовательно, $\text{Orb}(x)$ всюду плотна.

Аккуратное доказательство предоставляется слушателю. □

Утверждение 2.2. Пусть M – многообразие, а $f : M \rightarrow M$ – отображение. Если f топологически транзитивно, то любая f -инвариантная непрерывная функция на M постоянна.

Доказательство. Пусть φ – инвариантная функция. Пусть точка $x \in M$ такая, что $\text{Cl}(\text{Orb}(x)) = M$.

Из инвариантности φ следует, что она постоянна на орбите $\text{Orb}(x)$, а из непрерывности следует, что φ постоянна на $\text{Cl}(\text{Orb}(x)) = M$. □

Замечание 2.1. Обратное утверждение неверно. Чуть позже мы рассмотрим северное отображение окружности, для которого все инвариантные функции постоянны, но, тем не менее, оно не является топологически транзитивным.

Сдвиг на n -мерном торе.

Рассмотрим n -мерный тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Пусть $f_\gamma : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ – отображение сдвига на вектор $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, т.е. для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ выполнено $f_\gamma(x) = (\{x_1 + \gamma_1\}, \dots, \{x_n + \gamma_n\})$.

Если $n = 1$, мы получаем $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$, а $f_\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – поворот окружности на угол γ_1 . Мы уже показывали, что возможны два типа поведения: при $\gamma_1 \in \mathbb{Q}$ все орбиты f_γ периодические, а при $\gamma_1 \notin \mathbb{Q}$ все орбиты f_γ всюду плотны в \mathbb{S}^1 .

Пусть теперь $n \geq 2$. Несложно видеть, что орбиты f_γ периодические тогда и только тогда, когда все $\gamma_i \in \mathbb{Q}$. Но в отличие от поворота окружности, отрицание условия периодичности не влечет плотность орбит на \mathbb{T}^n . Наша задача найти критерий топологической транзитивности отображения f_γ . Прежде всего, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Если отображение f_γ топологически транзитивно, то f_γ топологически минимально.*

Доказательство. Действительно, орбиты любых двух точек отличаются сдвигом, а потому одновременно либо плотны, либо нет. \square

Для формулировки критерия топологической минимальности нам потребуется следующее определение.

Определение 2.5. *Числа $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ рационально зависимы, если найдется такой набор чисел $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, N$, не равных одновременно нулю, что выполнено $\sum_{i=1}^N a_i k_i = 0$. В противном случае, числа a_i называются рационально независимыми.*

Теорема 2.2. *Отображение f_γ топологически минимально тогда и только тогда, когда числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ рационально независимы, т.е. равенство $\sum_{i=1}^n \gamma_i k_i = k \in \mathbb{Z}$ при $k_i \in \mathbb{Z}$ влечет $\forall i k_i = 0$.*

Доказательство.

Минимальность влечет независимость. Пусть отображение f_γ топологически минимально. Предположим, что γ_i и 1 рационально зависимы. Тогда найдется нетривиальный набор чисел $k_i \in \mathbb{Z}$, что $\sum_{i=1}^n \gamma_i k_i = k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \sin\left(2\pi \sum_{i=1}^n k_i x_i\right).$$

Так как не все k_i равны нулю, то функция φ не является постоянной. Но она является инвариантной:

$$\varphi(f_\gamma(x)) = \sin\left(2\pi \sum_{i=1}^n k_i (x_i + \gamma_i)\right) = \sin\left(2\pi \sum_{i=1}^n k_i x_i + 2\pi k\right) = \varphi(x).$$

Это противоречит минимальности f_γ .

Независимость влечет минимальность. Пусть числа γ_i и 1 рационально независимы. Предположим, что f_γ не минимально. Тогда найдутся такие открытые непустые множества \tilde{U} и \tilde{V} , что для любого $m \in \mathbb{Z}$ пересечение $f_\gamma^m(\tilde{U}) \cap \tilde{V}$ пусто.

Построим множества U и V следующим образом:

$$U = \cup_{i=-\infty}^{+\infty} f_\gamma^i(\tilde{U}), \quad V = \cup_{i=-\infty}^{+\infty} f_\gamma^i(\tilde{V}).$$

Ясно, что U и V – непустые открытые инвариантные множества и $U \cap V = \emptyset$. В частности, U и V измеримы по мере μ Лебега, и $\mu(U) > 0$, $\mu(V) > 0$.

Рассмотрим характеристическую функцию χ_U множества U . Из измеримости и инвариантности U следует измеримость и инвариантность функции χ_U .

Разложим χ_U в ряд Фурье:

$$\chi_U(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n} \chi_{k_1, \dots, k_n} \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j x_j\},$$

где равенство выполнено для п.в. $x \in \mathbb{T}^n$, числа χ_{k_1, \dots, k_n} – коэффициенты Фурье. Из инвариантности χ_U имеем равенство

$$\chi_U(x) = \chi_U(f_\gamma(x)) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n} \chi_{k_1, \dots, k_n} \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \gamma_j\} \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j x_j\}.$$

В силу единственности коэффициентов Фурье, для всех $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n$ выполнено

$$\chi_{k_1, \dots, k_n} = \chi_{k_1, \dots, k_n} \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \gamma_j\}. \quad (2.1)$$

При $k_1 = \dots = k_n = 0$ равенство (2.1) выполнено автоматически. Иначе либо $\chi_{k_1, \dots, k_n} = 0$, либо $\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j \in \mathbb{Z}$. Но второй вариант невозможен из предположения рациональной независимости γ_i и 1. Следовательно, $\chi_{k_1, \dots, k_n} = 0$ при нетривиальном наборе k_1, \dots, k_n . Поэтому $\varphi = \chi_{0, \dots, 0}$ для п.в. x . Значит, коэффициент $\chi_{0, \dots, 0}$ равен либо 0, либо 1. Но, так как, χ_U равно 1 на множестве U положительной меры и равно 0 на множестве V положительной меры, мы получаем противоречие. \square

Лекция 3

Определение инвариантной меры. Примеры.

На сегодняшней лекции мы рассмотрим метрические свойства динамических систем.

Пусть X – топологическое пространство, а μ – мера на X . Далее все меры мы будем предполагать борелевскими (согласованными с топологией на X) и вероятностными ($\mu(X) = 1$), если не оговорено противное. Рассматриваемые далее отображения $f : X \rightarrow X$ предполагаются μ -измеримыми, если не оговорено противное.

Определение 3.1. Мера μ называется инвариантной для измеримого отображения $f : X \rightarrow X$, если для любого измеримого $A \subset X$ выполнено: $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Рассмотрим примеры, когда у отображения точно одна инвариантная мера, бесконечно много инвариантных мер и вовсе нет инвариантных мер.

Пример 3.1 (Только одна инвариантная мера). На прошлой лекции мы доказали, что у поворота окружности на иррациональный угол ровно одна инвариантная мера – мера Лебега.

Пример 3.2 (Много инвариантных мер). Вспомним отображение утроения $E_3(\varphi) = \{3\varphi\}$ окружности. Мы можем «посадить» инвариантную меру на орбиту какой-то точки x_0 , а на всех множествах, не пересекающихся с этой орбитой, положить её равной нулю.

Возьмем, например, неподвижную точку $x_0 = 0$, получим инвариантную меру δ_0 . У периодических точек (которые всюду плотны) орбита состоит из конечного числа элементов. Таким образом, мы можем положить μ равномерной на этой орбите. Так, мы уже получили счетное число инвариантных мер.

Ранее мы показывали, что найдется такая точка x_0 , что $\text{ClOrb}(x_0)$ – канторовское множество. Напомним, что троичная запись точки x_0 есть последовательность ω , состоящая только из нулей и двоек и содержащая все возможные конечные слова. Разреживая данную последовательность ω (выкидывая заданный конечный набор слов), можно построить континуум точек x_α , замыкание орбит которых есть (различные) канторовы множества K_α . Можно определить инвариантные меры μ_α , сосредоточенные на K_α . Таким образом, мы получим континуум инвариантных мер.

У всего лишь измеримого (но не непрерывного) отображения f может вовсе не существовать инвариантных мер.

Пример 3.3 (Нет инвариантных мер). Пусть $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда у отображения f нет инвариантной меры. Ясно, что для отображения $x \rightarrow \frac{1}{2}x$ единственная инвариантная мера – это δ_0 (т.к. $\forall n \mu([0, \frac{1}{2^n}] = \mu([0, \frac{1}{2^{n-1}}] \cdots = \mu([0, 1] = 1)$).

Из аналогичных соображений, инвариантная мера f может быть сосредоточена только на орбите нуля: $\text{Orb}(0) = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ – счетное множество. Ввиду инвариантности $\forall a, b \in \text{Orb}(0)$ должно быть выполнено равенство $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\})$. Но на бесконечном множестве не может существовать равномерной вероятностной меры.

Теорема Крылова-Боголюбова о существовании инвариантной меры

Если отображение непрерывно и действует на достаточно «хорошем» пространстве, то существование инвариантной меры гарантируется

Теорема 3.1 (Крылова-Боголюбова). *Пусть X – метризуемый компакт, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Тогда для f существует инвариантная вероятностная борелевская мера.*

Схема доказательства. Зафиксируем произвольную (возможно неинвариантную) борелевскую вероятностную меру μ на X . Далее определим последовательность приближающих мер μ_n следующим образом:

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n+1}(\mu(A) + \mu(f^{-1}(A)) + \dots + \mu(f^{-n}(A))). \quad (3.1)$$

Ясно, что

$$|\mu_n(A) - \mu_{n-1}(A)| = \frac{1}{n+1}|\mu(A) - \mu(f^{-n-1}(A))| \leq \frac{2}{n+1},$$

где последнее неравенство выполняется, так как мера μ вероятностная, и потому мера каждого слагаемого не превосходит 1. Поэтому меры μ_n с ростом n как бы становятся всё более и более «инвариантными». Из данного соотношения возникает идея рассмотреть предел (в каком-то смысле) мер μ_n , который и будет нашей искомой инвариантной мерой μ_∞ . Разумеется, это и есть наиболее сложная часть доказательства. \square

Чтобы провести доказательство более строго, нам потребуется теорема Рисса-Маркова-Какутани из курса функционального анализа. Приведем её в нужной нам формулировке.

Теорема 3.2 (Рисса-Маркова-Какутани). *Пусть X – компактное хаусдорфово пространство. Тогда для любого линейного ограниченного положительного функционала I на $C(X)$ существует и единственная борелевская мера μ , что $I(\varphi) = \int \varphi d\mu$ для любой функции $\varphi \in C(X)$.*

Доказательство теоремы Крылова-Боголюбова. Итак, мы построили последовательность мер μ_n , удовлетворяющих соотношению (3.1). Очевидно, все эти меры борелевские и вероятностные, а потому им соответствуют линейные ограниченные функционалы I_n на $C(X)$:

$$I_n(\varphi) = \int_X \varphi d\mu_n,$$

где $\varphi \in C(X)$.

Давайте найдем какой-нибудь предел I_∞ функционалов I_n в надежде воспользоваться теоремой Рисса-Маркова-Какутани.

X – метризуемый компакт, поэтому пространство $C(X)$ сепарабельно. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ – счетное всюду плотное подмножество $C(X)$. Рассмотрим действие I_n на функции φ_k :

$$I_n(\varphi_k) = \int_X \varphi_k d\mu_n = \frac{1}{n+1} \int_X \varphi_k + \varphi_k \circ f^1 + \dots + \varphi_k \circ f^n d\mu.$$

Так как X компакт, имеем $|I_n(\varphi_k)| \leq \sup |\varphi_k|$. Поэтому при фиксированном k мы имеем ограниченную числовую последовательность $\{I_n(\varphi_k)\}$, из которой можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Диагональным способом (последовательно разряжая первоначальную последовательность) несложно построить такую подпоследовательность $\{n_j\}$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ существует $\lim_{j \rightarrow +\infty} I_{n_j}(\varphi_k) = J_k$.

Таким образом, мы определили предельный функционал I_∞ на всюду плотном множестве: $I_\infty(\varphi_k) = J_k$, который по непрерывности продолжается на всё $C(X)$ (проверьте). Ясно, что I_∞ является линейным ограниченным и положительным, а потому (по теореме Рисса-Маркова-Какутани) ему соответствует единственная борелевская мера μ_∞ , которая к тому же вероятностная и инвариантная (проверьте). \square

Данный процесс построения инвариантной меры называют Крылово-Боголюбовским. Стоит отметить, что таким образом мы можем получить, вообще говоря, много инвариантных мер μ_∞ : ввиду свободы выбора начальной меры μ и частичных пределов J_k .

Инвариантные меры для северо-южного отображения окружности

Обозначим через N – северный полюс окружности, а через S – южный. Северо-южное отображение f окружности устроено следующим образом. Имеется только две неподвижные точки: $f(N) = N$ и $f(S) = S$. Остальные точки окружности как бы «стекают» вниз от северного полюса к южному (см. рис. 3.1). Несложно задать f явно, но нам это не потребуется.

Утверждение 3.1. *Множество инвариантных мер отображения f имеет вид $\alpha\delta_N + (1 - \alpha)\delta_S$, $\alpha \in [0, 1]$.*

Доказательство. Очевидно, δ_N и δ_S , а также их выпуклая комбинация являются инвариантными мерами для f .

Пусть μ – инвариантная мера для f . Пусть $a \in (S, N)$. Имеем $f^{-1}([S, a]) = [S, f^{-1}(a)]$, следовательно, $\mu([S, f^{-1}(a)]) = \mu([S, a])$. Из аддитивности меры получаем, что $\mu([a, f^{-1}(a)]) = 0$. Аналогично, $\mu([f^{-k}(a), f^{-k-1}(a)]) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(\cup_{k \geq 0} [f^{-k}(a), f^{-k-1}(a)]) = \mu([a, N]) = 0$. В силу произвольности a получаем, что носителем меры μ могут быть только точки N и S . \square

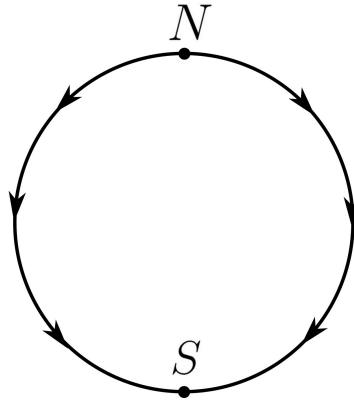


Рис. 3.1. Северо-южное отображение окружности.

Множество инвариантных мер. Теорема Шоке о существовании экстремальных точек.

Как мы уже видели на примере северо-южного отображения окружности, множество всех инвариантных мер отображения f является выпуклым подмножеством в пространстве всех борелевских мер.

Определение 3.2. Пусть $S \subset L$ – выпуклое подмножество вещественного линейного пространства L . Точка $x \in S$ называется экстремальной точкой, если x нельзя разложить в нетривиальную выпуклую комбинацию других двух точек из S . То есть, из соотношения $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, где $y, z \in S$, $y \neq z$, $\alpha \in [0, 1]$ следует $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$.

Есть примеры выпуклых множеств в бесконечномерных пространствах без экстремальных точек. Но для пространства мер существование гарантируется теоремой Шоке (Choquet).

Теорема 3.3 (Шоке). У выпуклого замкнутого (в $*$ -слабой топологии) подмножества S пространства всех борелевских мер множество экстремальных точек S_{ext} непусто. Более того, для любой меры $\mu \in S$ существует мера ν на S_{ext} , что $\mu = \int_{S_{ext}} \theta d\nu(\theta)$.

Данная теорема является обобщением того факта, что в конечномерном пространстве любая точка выпуклого компакта является выпуклой комбинацией его экстремальных точек.

В случае, когда X – метризуемый компакт, множество всех инвариантных мер непрерывного отображения f замкнуто в $*$ -слабой топологии, и, таким образом, удовлетворяет формулировке теоремы Шоке.

Эргодичность. Связь эргодичности и экстремальности.

Определение 3.3. Мера μ называется эргодической для отображения $f : X \rightarrow X$ (или говорят, что отображение f эргодическое относительно меры μ), если она

f -инвариантна и для любого измеримого f -инвариантного подмножества $A \subset X$ (т.е. $f^{-1}(A) = A$) выполнено $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$.

Лемма 3.1. Пусть отображение $f : X \rightarrow X$ эргодично относительно меры μ . Пусть φ – измеримая f -инвариантная (т.е. $\varphi = \varphi \circ f$) функция на X . Тогда $\varphi = \text{const}$ п.в. по мере μ .

Доказательство. Множество $M_a = \{x : \varphi(x) \leq a\}$ измеримо и инвариантно относительно f , поэтому $\mu(M_a)$ равна либо 0, либо 1. Несложно показать, что найдутся такие a, b , что $\mu(M_a) = 0$ и $\mu(M_b) = 1$. Кроме того, из $a_1 \leq a_2$ следует $M_{a_1} \subset M_{a_2}$. Поэтому числа $a_0 = \sup\{a : \mu(M_a) = 0\}$, $a_1 = \inf\{a : \mu(M_a) = 1\}$ конечны и обязаны совпадать. Отсюда следует что $\varphi(x) = a_0 = a_1 = \text{const}$ п.в. \square

Отметим, что данная лемма намного менее содержательна, чем кажется на первый взгляд. Дело в том, что эргодическая мера может быть устроена «плохо», например, с носителем в одной точке (как у северо-южного отображения окружности). И равенство константе почти всюду по такой мере уже не представляется удивительным фактом.

Далее мы покажем, что эргодические меры это в точности экстремальные точки выпуклого множества инвариантных мер.

Утверждение 3.2. Пусть борелевская вероятностная мера μ на X является экстремальной точкой множества всех борелевских вероятностных инвариантных мер отображения $f : X \rightarrow X$. Тогда μ эргодическая для f .

Доказательство. Предположим противное: нашлось измеримое инвариантное подмножество $A \subset X$, что $0 < \mu(A) < 1$. Тогда корректно определены меры $\mu_A(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}$ и $\mu_{\bar{A}}(B) = \frac{\mu(B \cap \bar{A})}{\mu(\bar{A})}$, где $\bar{A} = X \setminus A$. Ясно, что эти две меры также борелевские вероятностные и f -инвариантные. Но получается, что мы можем разложить меру μ в их нетривиальную комбинацию: $\mu(B) = \alpha \mu_A(B) + (1 - \alpha) \mu_{\bar{A}}(B)$, где $\alpha = \mu(A)$. А это противоречит свойству экстремальности. \square

Чтобы показать, что любая эргодичная мера является экстремальной, нам понадобится следующая теорема из функционального анализа.

Теорема 3.4. Пусть λ, μ – две борелевские вероятностные меры на X . Тогда существуют такие борелевские вероятностные меры s_μ и a_μ и число $\alpha \in [0, 1]$, что справедливо равенство $\lambda = \alpha s_\mu + (1 - \alpha) a_\mu$.

Причем, мера a_μ – абсолютно непрерывна относительно μ , то есть существует μ -измеримая функция ρ , что для любой a_μ -интегрируемой функции φ выполнено $\int_X \varphi da_\mu = \int_X \varphi \rho d\mu$. А мера s_μ – взаимно сингулярна с μ , то есть $\exists A \subset X$, что $\mu(A) = 0$, $s_\mu(A) = 1$.

Теорема 3.5. Пусть мера μ эргодическая для отображения $f : X \rightarrow X$. Тогда она является экстремальной точкой множества инвариантных мер отображения f .

Доказательство. Предположим противное: мы разложили меру μ в нетривиальную выпуклую комбинацию инвариантных мер λ_1, λ_2 : $\mu(A) = \beta\lambda_1(A) + (1 - \beta)\lambda_2(A)$, где $\beta \in (0, 1)$.

Воспользуемся теоремой 3.4 и разложим меру λ_1 относительно μ : $\lambda_1 = \alpha s_\mu + (1 - \alpha)a_\mu$, где a_μ – абсолютно непрерывна относительно μ , а s_μ взаимно сингулярна с μ , а число $\alpha \in [0, 1]$. По определению взаимной сингулярности, найдется измеримое множество $A \subset X$, что $\mu(A) = 0$ и $s_\mu(A) = 1$. С другой стороны, $0 = \mu(A) = \beta\lambda_1(A) + (1 - \beta)\lambda_2(A)$. Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, если каждое из них равно нулю. Отсюда следует, что $\lambda_1(A) = 0$. С другой стороны, учитывая, что $s_\mu(A) = 1$, получаем $0 = \lambda_1(A) = \alpha + (1 - \alpha)a_\mu(A)$. Следовательно, $\alpha = 0$, т.е. $\lambda_1 = a_\mu$.

Существует функция ρ , что для любой a_μ -интегрируемой функции φ верно $\int_X \varphi da_\mu = \int_X \varphi \rho d\mu$. Из инвариантности мер μ и a_μ следует инвариантность функции ρ . Но так как μ эргодическая, по лемме 3.1 получаем, что $\rho = \text{const}$ п.в. Значит, $\lambda_1 = c\mu$, $c \in \mathbb{R}$. Но так как обе меры вероятностные, получаем $c = 1$. Но тогда $\beta = 1$, что приводит к противоречию. \square

Временные и пространственные средние. Анонс теоремы Биркгофа. Последняя проблема Такенса.

Пусть $f : X \rightarrow X$ – гомеоморфизм, μ – борелевская вероятностная мера на X , а $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция.

Определение 3.4. *Временным средним функции φ в точке $x \in X$ называют предел (если он существует):*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} (\varphi(x) + \varphi(f(x)) + \dots + \varphi(f^n(x))).$$

Определение 3.5. *Пространственным средним функции φ называют интеграл $\int_X \varphi d\mu$.*

Теорема 3.6 (Биркгофа). *Если μ эргодическая относительно f , то временное среднее равно пространственному для почти всех $x \in X$.*

Это анонс теоремы, которую мы обсудим подробнее и докажем несколько позже. Сформулируем также, пока неформально, следующую гипотезу.

Гипотеза 3.1 (Последняя проблема Такенса). *Для типичного (или открытого, или плотного) множества отображений временные средние существуют почти всюду по мере Лебега.*

Здесь слово «типичный» нам пока неизвестно, но мы обсудим это в дальнейшем.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Связь эргодичности и топологической транзитивности. Строгая эргодичность и минимальность.

Теорема 3.7 (Пуанкаре о возвращении). Пусть μ – борелевская вероятностная мера на X , инвариантная для отображения $f : X \rightarrow X$. Пусть $A \subset X$ – измеримое подмножество. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mu(\{x \in A : \{f^n(x)\}_{n \geq N} \subset X \setminus A\}) = 0.$$

То есть, мера точек из A , не возвращающихся в A после какого-то момента, равна нулю.

Схема доказательства. Пусть для простоты $N = 1$.

- 1) Множество $A_1 = \{x \in A : \{f^n(x)\}_{n \geq 1} \subset X \setminus A\}$ действительно измеримо.
- 2) Множества $A_1, f^{-1}(A_1), f^{-2}(A_1), \dots$ имеют одинаковую меру и не пересекаются.
- 3) Так как мера всего пространства ограничена, мера множества A_1 обязана быть равна нулю.

□

Далее рассмотрим два утверждения о связи эргодичности и топологических свойств динамической системы.

Напомним определение носителя меры.

Определение 3.6. Пусть X – топологическое пространство с борелевской мерой μ . Носителем меры $\text{supp}(\mu)$ называется множество таких точек X , что мера любой их окрестности положительна. То есть,

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in X : \forall U - \text{открытое}, x \in U \Rightarrow \mu(U) > 0\}.$$

Если X метризуемое, то носитель равен всему пространству без объединения всех шаров нулевой меры (такие шары называют несущественными).

Утверждение 3.3. Пусть X – метризуемый компакт. Пусть мера μ на X эргодическая для непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$. Тогда у отображения $f|_{\text{supp}(\mu)} : \text{supp}(\mu) \rightarrow \text{supp}(\mu)$ есть плотная орбита (свойство топологической транзитивности).

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ – счетная база топологии. Не меняя обозначений, оставим из них только множества положительной меры $\mu(U_i) > 0$.

Рассмотрим множество S_i точек X , попадающих в U_i бесконечно много раз:

$$B_i = \{x \in X : \forall N \exists n \geq N : f^n(x) \in U_i\}.$$

Ясно, что B_i инвариантно.

Рассмотрим $A_i = B_i \cap U_i$. По теореме 3.7 Пуанкаре о возвращении, $\mu(A_i) = \mu(U_i) > 0$ (т.к. $A_i = U_i \setminus \cup_N A_{i,N}$, а мера $A_{i,N}$ нулевая по теореме). Но тогда и $\mu(B_i) > 0$, а ввиду эргодичности, $\mu(B_i) = 1$.

Пусть $B = \cap_i B_i$. Ясно, что $\mu(B) = 1$ и любая точка из B попадает в каждую окрестность U_i бесконечно много раз, откуда следует плотность орбиты в $\text{supp}(\mu)$. \square

Замечание 3.1. На самом деле, мы доказали даже больше: почти все точки $\text{supp}(\mu)$ имеют плотную в $\text{supp}(\mu)$ орбиту.

Определение 3.7. *Отображение $f : X \rightarrow X$ называется строго эргодичным, если для него существует только одна борелевская вероятностная инвариантная мера.*

Замечание 3.2. Если μ – единственная борелевская вероятностная инвариантная мера для f , то, очевидно, μ – экстремальная и, следовательно, эргодическая для f .

Утверждение 3.4. *Пусть X – метризуемый компакт, а непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ строго эргодично. Тогда все орбиты $f|_{\text{supp}(\mu)}$ плотны в $\text{supp}(\mu)$ (топологическая минимальность).*

Доказательство. Обозначим через μ единственную вероятностную эргодическую меру для f . Возьмем произвольно $x \in \text{supp}(\mu)$ и рассмотрим $\omega(x)$ – замкнутое инвариантное подмножество. Ясно, что $\omega(x) \subset \text{Cl Orb}(x) \subset \text{Cl supp}(\mu) = \text{supp}(\mu)$. По теореме Крылова-Боголюбова, для отображения $f|_{\omega(x)} : \omega(x) \rightarrow \omega(x)$ существует инвариантная мера ν на $\omega(x)$. Продолжим ν на всё X , полагая $\nu(A) = \nu(A \cap \omega(x))$. Из строгой эргодичности следует, что $\nu = \mu$, откуда получаем, что $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\nu) \subset \omega(x)$, откуда $\text{supp}(\mu) = \omega(x)$. \square

Лекция 4

Теорема Биркгофа о временных средних.

Пусть X – метризуемое топологическое пространство, а μ – борелевская вероятностная мера на X . Пусть $f : X \rightarrow X$ – измеримое отображение с инвариантной мерой μ . Для функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ и точки $x \in X$ рассмотрим числовую последовательность:

$$A_{n,\varphi}(x) = \frac{1}{n+1}(\varphi(x) + \varphi(f(x)) + \dots + \varphi(f^n(x))), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4.1 (Биркгофа о временных средних). *Если $\varphi \in L^1(X)$, то существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\varphi}(x) = A_{\infty,\varphi}(x)$ для п.в. $x \in X$.*

Доказательство. Будем доказывать по шагам.

Шаг 1. Пусть $B_{a,b} = \{x : \limsup A_{n,\varphi}(x) > b \text{ и } \liminf A_{n,\varphi}(x) < a\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Множество $B_{a,b}$ измеримо и инвариантно (доказать инвариантность можно аналогично утверждению 4.2).

Обозначим $B = \cup\{B_{a,b} : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$. Если удастся показать, что $\mu(B) = 0$, то мы докажем теорему. Действительно, если для $x \in X$ не существует предела $A_{n,\varphi}(x)$, то $\liminf A_{n,\varphi}(x) < \limsup A_{n,\varphi}(x)$. Следовательно, найдутся $p, q \in \mathbb{Q}$, что $p < q$ и $x \in B_{p,q}$.

Доказывать будем от противного. Предположим, что $\mu(B) > 0$. Следовательно, $\exists a, b, a < b$, что $\mu(B_{a,b}) > 0$. Придем к противоречию.

Шаг 2. Придем к противоречию, доказав два несовместимых факта: $\int_{B_{a,b}} \varphi d\mu \geq b\mu(B_{a,b})$ и $\int_{B_{a,b}} \varphi d\mu \leq a\mu(B_{a,b})$.

Прежде всего заметим, что второе утверждение следует из первого заменой φ на $-\varphi$. Действительно, $A_{n,-\varphi}(x) = -A_{n,\varphi}(x)$, откуда $\limsup A_{n,-\varphi}(x) = -\liminf A_{n,\varphi}(x)$. Тогда первое утверждение для $-\varphi$ имеет вид $\int_{B_{a,b}} -\varphi d\mu \geq -a\mu(B_{a,b})$, что совпадает со вторым утверждением для функции φ .

Обозначим $\psi = \varphi - b$. Итак, нам осталось доказать, что $\int_{B_{a,b}} \psi d\mu \geq 0$.

Шаг 3. Построим исчерпывания C_n множества $B_{a,b}$. Пусть $C_n = \{x \in B_{a,b} : \max_{j \leq n} A_{j,\varphi}(x) > b\}$. Ясно, что $C_n \subset C_{n+1}$, и $\cup_n C_n = B_{a,b}$.

Покажем, что если для всех n верно $\int_{C_n} \psi d\mu \geq 0$, то выполнено и нужное нам неравенство. Пусть χ_n – характеристическая функция множества C_n . Тогда $0 \leq \int_{C_n} \psi d\mu = \int_{B_{a,b}} \chi_n \cdot \psi d\mu \rightarrow \int_{B_{a,b}} \psi d\mu$, где предельный переход справедлив по теореме Лебега.

Итак, нам осталось доказать, что для всех n верно $\int_{C_n} \psi d\mu \geq 0$.

Шаг 4. Перепишем множество C_n немного по-другому. Во-первых, в терминах функции ψ получаем $C_n = \{x \in B_{a,b} : \max_{j \leq n} A_{j,\psi}(x) > 0\}$. Во-вторых, введем обозначения: $\psi_0(x) = 0$, $\psi_n(x) = (n+1)A_{n,\psi}(x)$ и $\Psi_n(x) =$

$\max_{0 \leq j \leq n} \psi_j(x)$. Тогда $C_n = \{x \in B_{a,b} : \Psi_n(x) > 0\}$. Действительно, пусть $\Psi_n(x) > 0$, тогда $\psi_j(x) > 0$ для некоторого $0 \leq j \leq n$. Но $\psi_0 = 0$, следовательно, $0 < j \leq n$. Но тогда и $A_{j,\psi}(x) > 0$, т.е. $x \in C_n$. Эта же цепочка в обратном направлении доказывает обратное включение.

Шаг 5. Для любого j , что $0 \leq j \leq n$, очевидна следующая цепочка следствий.

$$\Psi_n \geq \psi_j \Rightarrow \Psi_n \circ f \geq \psi_j \circ f \Rightarrow \Psi_n \circ f + \psi \geq \psi_j \circ f + \psi = \psi_{j+1}.$$

Тогда $(\Psi_n \circ f)(x) + \psi(x) \geq \max_{1 \leq j \leq n} \psi_j(x)$. Если при этом $x \in C_n$, то $\Psi_n(x) > 0$, и поэтому $\max_{1 \leq j \leq n} \psi_j(x) = \max_{0 \leq j \leq n} \psi_j(x) = \Psi_n(x)$. Итого при $x \in C_n$ получаем: $(\Psi_n \circ f)(x) + \psi(x) \geq \Psi_n(x)$, что эквивалентно $\psi(x) \geq \Psi_n(x) - (\Psi_n \circ f)(x)$.

Шаг 6. Проинтегрируем по C_n полученное неравенство:

$$\int_{C_n} \psi d\mu \geq \int_{C_n} \Psi_n d\mu - \int_{C_n} (\Psi_n \circ f)(x) d\mu.$$

Так как $\Psi_n(x) = 0$ при $x \in B_{a,b} \setminus C_n$, получаем $\int_{C_n} \Psi_n d\mu = \int_{B_{a,b}} \Psi_n d\mu$. Так как $\Psi_n \geq 0$, имеем неравенство $\int_{C_n} (\Psi_n \circ f)(x) d\mu \leq \int_{B_{a,b}} (\Psi_n \circ f) d\mu$. Тогда, учитывая инвариантность множества $B_{a,b}$ и меры μ , получаем:

$$\int_{C_n} \psi d\mu \geq \int_{B_{a,b}} \Psi_n d\mu - \int_{B_{a,b}} \Psi_n \circ f d\mu = 0.$$

Что и требовалось. □

Следствия теоремы Биркгофа. Эргодическая теорема Биркгофа.

Утверждение 4.1. Функция $A_{\infty,\varphi}$ измерима.

Доказательство. Для каждого n функции $A_{n,\varphi}$ измеримы, а потому $A_{\infty,\varphi}$ измерима как их предел. □

Утверждение 4.2. Функция $A_{\infty,\varphi}$ инвариантна.

Доказательство. Из равенств

$$A_{n,\varphi}(f(x)) = \frac{\varphi(f(x)) + \dots + \varphi(f^{n+1}(x))}{n+1}, \quad A_{n+1,\varphi}(x) = \frac{\varphi(x) + \dots + \varphi(f^{n+1}(x))}{n+2},$$

получаем $A_{n+1,\varphi}(x) = \frac{\varphi(x) + (n+1)A_{n,\varphi}(f(x))}{n+2}$. Тогда для п.в. x существует предел

$$A_{\infty,\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n+1,\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,\varphi}(f(x)) = A_{\infty,\varphi}(f(x)).$$

□

Согласно утверждению с прошлой лекции, если мера μ эргодическая, то инвариантная измеримая функция $A_{\infty, \varphi}$ есть константа $C = \text{const}$ по мере μ . Ясно, что для всех n выполнено $\int_X A_{n, \varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu$, и $\int_X A_{\infty, \varphi} d\mu = C$. Поэтому хочется предположить, что $C = \int_X \varphi d\mu$. Это и утверждает эргодическая теорема Биркгофа, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема 4.2 (Эргодическая теорема Биркгофа.). *В условиях теоремы 4.1 при дополнительном условии эргодичности меры μ , для п.в. $x \in X$ верно $A_{\infty, \varphi}(x) = \int_X \varphi d\mu$.*

Таким образом, если мера эргодическая, то почти всюду временные средние определены и совпадают с пространственным средним.

Цепные дроби. Применение теоремы Биркгофа.

Поговорим о цепных дробях и их связи с эргодической теорией. Начнем с простого примера:

$$\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{5}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}.$$

Таким образом, мы получили разложение числа $\frac{19}{7}$ в цепную дробь.

Рассмотрим отображение Гаусса $g(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$. Пусть для удобства далее $x \in (0, 1)$. Тогда разложение x в цепную дробь можно записать следующим образом:

$$x = \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right] + \frac{1}{\left[\frac{1}{g(x)} \right] + \frac{1}{\left[\frac{1}{g^2(x)} \right] + \dots}}.$$

Зададимся вопросом, как распределены целые числа $\left[\frac{1}{g^n(x)} \right]$? Удивительно, что ответ почти всегда не зависит от самого числа x . Показать это нам поможет следующая теорема.

Теорема 4.3 (Кузьмин). *Отображение Гаусса g эргодично относительно меры μ с плотностью $\rho(x) = \frac{c}{x+1}$, где константа $c = \frac{1}{\ln 2}$ выбрана так, чтобы мера была вероятностной.*

Итак, вычислим $P(k)(x)$ – долю тех чисел в разложении x в цепную дробь, что равны k . Заметим, что если $\frac{1}{k+1} < g^n(x) \leq \frac{1}{k}$, то $\left[\frac{1}{g^n(x)} \right] = k$. Поэтому $P(k)$ – это доля тех n , что $g^n(x) \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$.

Пусть χ_k – индикаторная функция полуинтервала $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$. Тогда для п.в. x

$$P(k)(x) = A_{\infty, \chi_k}(x) = \int_0^1 \chi_k d\mu = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} 1 d\mu = \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right).$$

Асимптотически при больших k эта вероятность ведет себя как $\frac{1}{k^2}$.

Пример из механики. Связь с эргодической теорией.

Физика часто вдохновляется эргодической теорией, хотя формально применить её не всегда удается. Например, какая-то функция может казаться эргодичной, из этих соображений возникают идеи доказать какие-то её свойства (используя сторонние инструменты), а потом оказывается, что изначальная функция вовсе эргодичной не была.

Мы рассмотрим пример того, как это работает. Здесь не удастся применить эргодическую теорему напрямую, но она наводит на некоторые соображение.

Данный пример нужно воспринимать не очень формально, так как это лишь иллюстрация. В глубокие подробности мы вникать не будем.

Метод усреднения.

В механике часто бывает, что $2n$ -мерное фазовое пространство M есть расслоение на n -мерные торы. Пусть φ – координата на торе, а I – координата на базе расслоения. Для консервативной системы (сохраняющей энергию) уравнения Лагранжа в координатах (φ, I) имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I), \\ \dot{I} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где ω – некоторая функция. Систему (4.1) называют невозмущенной системой.

После возмущения система принимает следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \end{cases} \quad (4.2)$$

где f и g являются 2π -периодическими по φ (непрерывны на торе), а ε – малый параметр. Систему (4.2) будем называть возмущенной системой.

Рассмотрим пространственное среднее функции g на торе:

$$G(J) = \frac{\oint g(J, \varphi, 0) d\varphi}{\oint d\varphi},$$

где интеграл берется по тору (слою). Тогда усредненная система имеет вид

$$\dot{J} = \varepsilon G(J).$$

Идея состоит в том, что усредненная система описывает многие свойства поведения переменной I , удовлетворяющей возмущенной системе, но в долгосрочной перспективе.

Пример 4.1. Пусть возмущенная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{I} = \varepsilon(a + b \cos \varphi). \end{cases}$$

Тогда усредненная система имеет вид $\dot{J} = \varepsilon a$. Очевидно, $J(t) = \varepsilon at$. Решение возмущенной системы имеет вид $I(t) = \varepsilon at + \varepsilon \frac{b}{\omega} \sin(\omega t)$. Видно, что I отличается от J лишь малым колеблющимся слагаемым. На картинке 4.1 можно наблюдать, как J описывает поведение I на большом интервале времени.

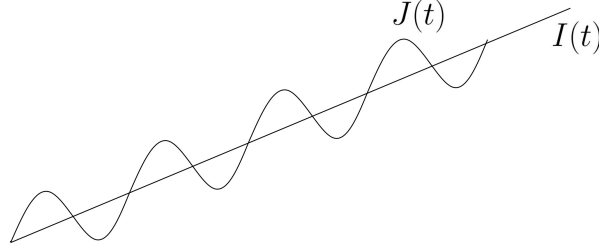


Рис. 4.1. Иллюстрация метода усреднения. Функция J приближает функцию I в долгосрочной перспективе.

О временных и пространственных средних.

Рассмотрим отрезок времени $[0, T]$, где $1 \ll T \ll \frac{1}{\varepsilon}$. Скажем что на этом отрезке $\dot{I} \sim \varepsilon g(I_0, \varphi, 0)$, где I_0 — начальное значение I . Рассмотрим изменение I на $[0, T]$:

$$\Delta I = \int_0^T \varepsilon g(I_0, \varphi(t), 0) dt = \varepsilon T \left(\frac{1}{T} \int_0^T g(I_0, \varphi(t), 0) dt \right) \quad (4.3)$$

Заметим, что $\frac{1}{T} \int_0^T g(I_0, \varphi(t), 0) dt$ — это временное среднее (для непрерывного времени). Введем новое медленное время $\tau = \varepsilon t$, относительно которого усредненная система и система (4.3) имеют примерно такой вид

$$J' = G(J), \quad \frac{\Delta I}{\Delta \tau} \approx \text{Временное среднее } g.$$

Замена I на J есть некоторый аналог замены временного среднего на пространственное.

Линейные диффеоморфизмы Аносова. Перемешивание.

Рассмотрим матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Она возникает, например, из следующего соотношения:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \end{pmatrix},$$

где p_n — это n -е число Фибоначчи.

Обозначим собственные значения матрицы M как φ и $-\frac{1}{\varphi}$. Пусть $\mathcal{A} = M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда собственные значения матрицы \mathcal{A} равны $\varphi^2 > 1$ и $\frac{1}{\varphi^2} < 1$. Так как

матрица \mathcal{A} симметрическая, им соответствуют ортогональные собственные векторы. Таким образом, вдоль одного направления оператор \mathcal{A} растягивает, а вдоль другого, ортогонального первому, – сжимает.

Рассмотрим тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Так как оператор \mathcal{A} переводит целочисленные векторы в целочисленные, то корректно определен оператор на торе (обозначим его той же буквой): $\mathcal{A}(\{x\}) = \{\mathcal{A}x\}$. Более того, обратный оператор \mathcal{A}^{-1} тоже переводит целочисленные векторы в целочисленные (так как $\det \mathcal{A} = 1$), а потому \mathcal{A} – это диффеоморфизм на торе. Данный оператор является простейшим примером линейного диффеоморфизма Аносова.

Изучим некоторые свойства оператора $\mathcal{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Ясно, что $(0, 0)$ – единственная неподвижная точка.

Рассмотрим точку x с рациональными координатами $(\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$. Образы точки x под действием оператора \mathcal{A} также будут рациональными с тем же знаменателем n . Ясно, что таких точек на торе конечное число, а потому найдутся m_1 и m_2 , что $\mathcal{A}^{m_1}(x) = \mathcal{A}^{m_2}(x)$. Так как \mathcal{A} – обратимый оператор, из этого следует, что найдется $m > 0$, что $\mathcal{A}^m(x) = x$. Таким образом, мы показали, что все рациональные точки являются периодическими, а потому множество периодических точек всюду плотно.

У этого отображения возможны и иные типы поведения. Пусть x – некоторая периодическая точка с периодом m . Рассмотрим $y = x + \alpha v$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, а v – собственный вектор, отвечающий сжимающему собственному значению $\frac{1}{\varphi^2}$. Тогда $\mathcal{A}^n(y) = \mathcal{A}^n(x) + \alpha \frac{1}{\varphi^{2n}} v$. В частности, $\mathcal{A}^m(y) = x + \alpha \frac{1}{\varphi^{2m}} v$. Таким образом, $\omega(y) = \text{Orb}(x)$. Если $x = (0, 0)$, то $\mathcal{A}^n(y)$ сходится к началу координат.

Несколько сложнее увидеть, что у данного отображения есть всюду плотная орбита. Мы покажем это, установив для начала, что \mathcal{A} обладает так называемым свойством перемешивания. Дадим точное определение.

Определение 4.1. *Говорят, что отображение $f : X \rightarrow X$ перемешивает (является перемешиванием) относительно инвариантной меры μ , если для любых измеримых множеств A, B выполнено*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Пример 4.2. Поворот окружности не является перемешиванием относительно меры Лебега.

Чуть позже мы докажем, что оператор \mathcal{A} , определенный выше, является перемешиванием. А сейчас покажем, как из этого свойства легко следует эргодичность.

Утверждение 4.3. *Если $f : X \rightarrow X$ – перемешивание относительно инвариантной меры μ , то f – эргодическое относительно μ .*

Доказательство. Действительно, пусть существует измеримое инвариантное множество B . Подставим в условие перемешивания $A = B$. Из инвариантности следует, что $\mu(f^{-n}(B) \cap B) = \mu(B \cap B) = \mu(B)$. Из свойства перемешивания получаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B) = \mu(B)^2$. Отсюда $\mu(B) = \mu(B)^2$, что оставляет возможными только два варианта: $\mu(B) = 0$ или $\mu(B) = 1$. □

Лекция 5

Линейный диффеоморфизм Аносова перемешивает.

Мы рассматривали линейный диффеоморфизм Аносова $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, задающийся формулой

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \{2x_1 + x_2\} \\ \{x_1 + x_2\} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что оператор имеет два собственных значения $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ и соответствующие ортогональные собственные векторы v_1, v_2 . Напомним также определение метрического перемешивания.

Определение 5.1. *Отображение $f : X \rightarrow X$ перемешивает относительно инвариантной меры μ , если для любых измеримых множеств A, B выполнено*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B). \quad (5.1)$$

Утверждение 5.1. *Оператор $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ является метрическим перемешиванием относительно меры Лебега.*

Прежде чем начать доказательство утверждения 5.1 рассмотрим важные следствия из него.

Следствие 5.1. *Оператор f эргодический относительно меры Лебега.*

Доказательство. По утверждению 4.3 прошлой лекции, перемешивание влечет эргодичность. \square

Следствие 5.2. *Оператор f топологически транзитивен.*

Доказательство. Так как носитель меры Лебега совпадает с \mathbb{T}^2 , по следствию 3.1, орбиты почти всех точек из \mathbb{T}^2 всюду плотны в \mathbb{T}^2 . \square

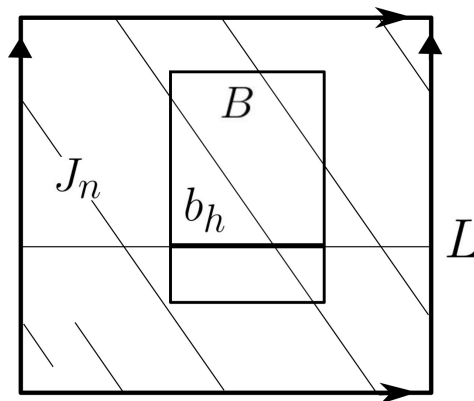


Рис. 5.1. Иллюстрация к доказательству перемешивания линейного диффеоморфизма Аносова.

Доказательство утверждения 5.1. Проведем доказательство по следующему плану.

- 1) Представим тор \mathbb{T}^2 как прямоугольник $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ со склеенными противоположными сторонами.
- 2) Рассмотрим прямоугольники двух типов. Прямоугольники первого типа имеют стороны, параллельные собственным векторам v_1, v_2 . Прямоугольники второго типа имеют стороны, параллельные осям координат.
- 3) Докажем, что оператор f перемешивает прямоугольники двух описанных типов.
- 4) Докажем, что из перемешивания прямоугольников следует перемешивание любых измеримых множеств.

Итак, нам нужно доказать пункты 3 и 4.

Пункт 4. Пусть формула (5.1) верна, если A – прямоугольник первого типа, а B – второго. Покажем, что она верна и для конечных объединений прямоугольников. Пусть $A = \sqcup_{i=0}^k A_i$, $B = \sqcup_{j=0}^m B_j$, где A_i – прямоугольники первого типа, а B_j – второго. Тогда

$$\mu(f^{-n}(A) \cap B) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \mu(f^{-n}(A_i) \cap B_j) \rightarrow \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \mu(A_i) \mu(B_j) = \mu(A) \mu(B), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Пусть теперь \tilde{A} и \tilde{B} – произвольные измеримые множества. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдется множество A – конечное дизъюнктное объединение прямоугольников первого типа и множество B – конечное дизъюнктное объединение прямоугольников второго типа, что $\mu(A \Delta \tilde{A}) < \frac{1}{4} \varepsilon$ и $\mu(B \Delta \tilde{B}) < \frac{1}{4} \varepsilon$.

Оценим разность:

$$\begin{aligned} |\mu(f^{-n}(\tilde{A}) \cap \tilde{B}) - \mu(\tilde{A})\mu(\tilde{B})| &\leq \mu(f^{-n}(A \Delta \tilde{A}) \cap B) + \mu(f^{-n}(A) \cap (B \Delta \tilde{B})) + \\ &+ |\mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| + \mu(A)\mu(B \Delta \tilde{B}) + \mu(\tilde{B})\mu(A \Delta \tilde{A}). \end{aligned}$$

Учитывая инвариантность меры μ , получаем оценку

$$|\mu(f^{-n}(\tilde{A}) \cap \tilde{B}) - \mu(\tilde{A})\mu(\tilde{B})| \leq |\mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| + \varepsilon.$$

Так как выражение под модулем стремится к нулю с ростом n , а ε – произвольно, получаем требуемое.

Пункт 3. Пусть A – прямоугольник первого типа, а B – второго. Рассмотрим множество $f^{-n}(A)$ при больших n . Так как f^{-1} растягивает по направлению вектора v_1 и сжимает по направлению v_2 , то $f^{-n}(A)$ это тоже прямоугольник первого типа, очень узкий вдоль v_2 и длинный вдоль v_1 . Эта узкая полоса наматывается на тор, напоминая его иррациональную обмотку (так как соотношение координат вектора v_1 иррационально).

Пусть $J_n \subset f^{-n}(A)$ – отрезок максимальной длины, параллельный длинной стороне прямоугольника. Пусть $L \subset \mathbb{T}^2$ – горизонтальная прямая. Будем рассматривать точки пересечения J_n и L (см. рис. 5.1). Так как с ростом n отрезок J_n приближается к иррациональной обмотке тора, то точки пересечения J_n и L приближают орбиту иррационального поворота окружности.

Введем обозначение $b_n = L \cap B$. Тогда b_n либо горизонтальный отрезок из B , длина которого равна стороне B , либо пустое множество. Пусть $\#\{J_n \cap b_n\}$ – число точек из пересечения $J_n \cap b_n$, а $\#\{J_n \cap L\}$ – число точек из $J_n \cap L$. Из равномерной распределенности иррационального поворота следует, что

$$\frac{\#\{J_n \cap b_n\}}{\#\{J_n \cap L\}} \rightarrow \mu_1(b_n), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где через μ_1 обозначена одномерная мера Лебега.

Заметим, что здесь L – произвольная горизонтальная прямая, расположенная на некоторой высоте $q \in [0, 1]$. Проинтегрируем полученное выражение по всем возможным $q \in [0, 1]$. Тогда, получим

$$\frac{\mu_1(J_n \cap B)}{\mu_1(J_n)} \rightarrow \mu_1(b_n)\mu_1(b_v) = \mu(B), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где b_v – вертикальная сторона прямоугольника B .

Далее проинтегрируем по всем $J_n \subset f^{-n}(A)$. Так как $\mu(f^{-n}(A)) = \mu(A)$, получим

$$\frac{\mu(f^{-n}(A) \cap B)}{\mu(A)} \rightarrow \mu(B), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Что и требовалось. □

Топологическая сопряженность. Структурная устойчивость.

До этого момента мы в основном рассматривали различные примеры конкретных динамических систем и изучали их свойства. Сейчас мы перейдем на новый уровень изучения динамических систем. Мы будем изучать их не по отдельности, а в целом. Для этого введем несколько определений.

Определение 5.2. Пусть X, Y – два топологических пространства. Пусть $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ – отображения. Мы говорим, что отображения f, g топологически сопряжены, если существует гомеоморфизм $h : X \rightarrow Y$, что верно $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

Иногда полезно думать о гомеоморфизме h как о замене координат. Мы увидим, что у топологически сопряженных отображений действительно много общего. Например, если x – периодическая точка отображения g , то $h(x)$ периодическая точка с тем же периодом для отображения f .

Пример 5.1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – два сжатия прямой: $f(x) = \frac{1}{8}x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$. Тогда $h(x) = x^3$ является сопрягающим гомеоморфизмом. Отображения f, g не могут быть сопряжены диффеоморфизмом, так как в таком случае у них должна была бы совпадать производная в нуле.

Определение 5.3. Пусть M – многообразие, а \mathcal{C} – некоторый класс отображений на M с заданной топологией. Отображение $f \in \mathcal{C}$ называют структурно устойчивым в классе отображений \mathcal{C} , если для любой окрестности $U \subset \mathcal{C}$, $f \in U$ и для любого отображения $g \in U$ верно, что g и f топологически сопряжены.

Например, класс \mathcal{C} – это множество всех диффеоморфизмов или множество всех k -гладких отображений.

На следующих лекциях мы покажем, что диффеоморфизм Аносова является структурно устойчивым в классе всех диффеоморфизмов тора.

Гиперболические периодические точки. Сохранение гиперболических периодических орбит при возмущении.

Пусть M – гладкое многообразие, $f \in \text{Diff}(M)$ – множество диффеоморфизмов на M . Пусть $f^q(x) = x$, $q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим дифференциал $D_x f^p : T_x M \rightarrow T_x M$ отображения f^q в точке x .

Определение 5.4. Собственные значения оператора $D_x f^q$ называются мультипликаторами периодической точки x .

Определение 5.5. Периодическая точка x называется гиперболической, если модуль любого её мультипликатора отличен от 1.

Определение 5.6. Периодическая точка x называется трансверсальной, если любой её мультипликатор отличен от 1.

Утверждение 5.2. Пусть x – гиперболическая периодическая точка с периодом q . Тогда существует такая окрестность $V(x) \subset M$ точки x и такая окрестность $U(f) \subset \text{Diff}(M)$ отображения f , что для любого $g \in U(f)$ существует и единственная $y \in V(x)$ периода q для g .

Доказательство. Пусть $U(f)$ – какая-то малая окрестность f и $g \in U(f)$. Рассмотрим невязку $H = f^q - g^q$ и отображение $F = f^q - \text{id}$. Условие $g^q(y) = y$ равносильно $f^q(y) - H(y) = y$, что равносильно $F(y) + y - H(y) = y$. Это в свою очередь равносильно $F(y) = H(y)$. Так как собственные значения $D_x F$ отличны от 0, отображение F локально обратимо. Тогда для $y \in V(x)$, где $V(x)$ – достаточно малая окрестность точки x , верно $y = F^{-1}(H(y))$.

Выберем $U(f)$ настолько малой, что $F^{-1} \circ H$ является сжатием. Это можно сделать, так как для g из малой $U(f)$ производные H очень малы, и потому само H является сжатием. Сделав производные достаточно малыми, можно добиться того, чтобы композиция $F^{-1} \circ H$ осталась сжатием. Тогда по принципу сжатых отображений, существует и единственное решение $y \in V(x)$, что $g^q(y) = y$. \square

Замечание 5.1. Окрестность $V(x)$ можно выбрать так, что точка x – единственная периодическая точка периода q отображения f в данной окрестности.

Примеры.

Поворот окружности структурно неустойчив.

Любой поворот окружности является структурно неустойчивым в классе $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$. Сначала увидим, что любые два поворота на иррациональный и рациональный угол не могут быть топологически сопряжены. Действительно, топологическое сопряжение переводит периодические точки в периодические. Но у рационального поворота все точки периодичны, а у иррационального поворота периодических точек нет. Осталось заметить, что в любой окрестности $U(R_\alpha) \subset \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ найдется поворот R_β , что одно из чисел α, β рационально, а другое иррационально.

Северо-южное отображение окружности структурно устойчиво.

Пусть f – северо-южное отображение окружности. Вспомним, что f имеет ровно две неподвижные точки: северный полюс N и южный полюс S . Остальные точки под действием f перемещаются от N к S .

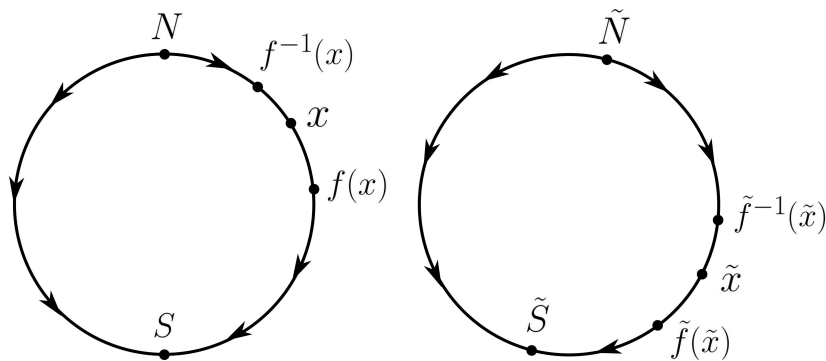


Рис. 5.2. Построение топологического сопряжения между двумя северо-южными отображениями окружности.

Утверждение 5.3. Пусть f гладкое. Если неподвижные точки N и S гиперболические, то северо-южное отображение f структурно устойчиво в классе $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$.

Доказательство. Используя утверждение 5.2 и компактность \mathbb{S}^1 , можно видеть, что найдется такая окрестность отображения f , что любое отображение \tilde{f} из этой окрестности имеет ровно две неподвижные точки \tilde{N} и \tilde{S} . То есть, \tilde{f} также является северо-южным. Осталось показать, что любые два северо-южные отображения топологически сопряжены.

Будем строить сопряжение явно. Для удобства будем обозначать через $\tilde{\mathbb{S}}^1$ окружность, на которой действует возмущенное отображение \tilde{f} . Пусть $x \in \mathbb{S}^1$ – произвольная точка, отличная от N и S . Пусть $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{S}}^1$ – произвольная точка, отличная от \tilde{N} и \tilde{S} . Пусть $h : [x, f(x)] \rightarrow [\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x})]$ – произвольный гомеоморфизм. Достроим гомеоморфизм h до сопрягающего гомеоморфизма с помощью метода разнесения динамикой. Изначальная область определения h , то есть отрезок $[x, f(x)]$, называется фундаментальной областью.

Положим $h(x) = \tilde{f} \circ h \circ f^{-1}(x)$ для $x \in [f(x), f^2(x)]$. Ясно, что $h : [f(x), f^2(x)] \rightarrow [\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}^2(\tilde{x})]$ – гомеоморфизм. Далее действуем аналогично. Пусть гомеоморфизм h построен на отрезках $[0, f(x)], \dots, [f^{n-1}(x), f^n(x)]$, причем $h : [f^{k-1}(x), f^k(x)] \rightarrow [\tilde{f}^{k-1}(\tilde{x}), \tilde{f}^k(\tilde{x})]$. Положим $h(x) = \tilde{f} \circ h \circ f^{-1}(x)$ на $[f^k(x), f^{k+1}(x)]$.

Тогда $h : [f^k(x), f^{k+1}(x)] \rightarrow [\tilde{f}^k(\tilde{x}), \tilde{f}^{k+1}(\tilde{x})]$ – гомеоморфизм. Таким образом, мы определили h на $[x, S)$. Действуя в обратном времени, можно определить h на $(N, x]$. Полагая $h(N) = \tilde{N}$ и $h(S) = \tilde{S}$, мы определили гомеоморфизм h на $[N, S]$.

Далее выберем точки y из второй полуокружности \mathbb{S}^1 и \tilde{y} из второй полуокружности $\tilde{\mathbb{S}}^1$ и построим h совершенно аналогично. Так мы получим гомеоморфизм на всей окружности $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \tilde{\mathbb{S}}^1$. Очевидно, h сопрягает f и \tilde{f} по построению. \square

Отметим существенность условия гиперболичности неподвижных точек для структурной устойчивости. На самом деле, это справедливо и в более общих ситуациях. Однако критерий структурной устойчивости гораздо более сложная вещь, и гиперболичность точек не является достаточным условием.

Полуустойчивость. Топологический фактор. Степень отображения окружности.

Утверждение 5.4. *Удвоение E_2 окружности структурно устойчиво в классе всех непрерывно дифференцируемых отображений окружности.*

Для доказательства этого факта нам понадобится еще одно определение.

Определение 5.7. *Пусть X, Y – два топологических пространства. Пусть $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ – отображения. Мы говорим, что отображения f, g топологически полусопряжены, если существует непрерывное сюръективное отображение $h : X \rightarrow Y$, что верно $h \circ f = g \circ h$. В этом случае g называется топологическим фактором отображения f .*

Замечание 5.2. Если f есть прямое произведение отображений $f : X \rightarrow X$, где $X = Y \times Z$, $f(y, z) = (g(y), r(z))$, то g есть топологический фактор для f . Отображение $h : X \rightarrow Y$ – проекция на Y .

Сформулируем вспомогательное утверждение, которое докажем на следующей лекции.

Утверждение 5.5. *Пусть отображение g окружности имеет степень 1 и выполнено $g \circ E_k = E_k \circ g$, $k \neq 1$. Тогда $g = \text{id}$.*

Напомним, что такое степень отображения окружности. Обозначим $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ – универсальное накрытие окружности: $\pi(x) = \{x\}$.

Определение 5.8. *Пусть $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – непрерывное отображение окружности. Непрерывное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется поднятием отображения f , если выполнено $\pi \circ F = f \circ \pi$.*

Утверждение 5.6. *Пусть $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – непрерывное отображение, а F – его поднятие на \mathbb{R} . Тогда $F(1) - F(0) = z \in \mathbb{Z}$. Причем, число z не зависит от выбора поднятия F .*

Определение 5.9. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – непрерывное отображение, а F – его поднятие на \mathbb{R} . Число $F(1) - F(0)$ называется степенью отображения f .

Лекция 6

Структурная устойчивость растяжения окружности в k раз.

Пусть далее $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Мы будем рассматривать пространство $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ с нормой $\|f - g\| = \max_{\mathbb{S}^1} |f(x) - g(x)| + \max_{\mathbb{S}^1} |f'(x) - g'(x)|$.

Утверждение 6.1. *Отображение E_k растяжения окружности \mathbb{S}^1 в k раз является структурно устойчивым в классе $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$.*

Напомним, что E_k структурно устойчиво, если найдется его окрестность $U(E_k) \subset C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$, что любое отображение $f \in U(E_k)$ топологически сопряжено E_k . Поэтому, сперва изучим свойства близких к E_k отображений.

Утверждение 6.2. *Существует окрестность $U(E_k) \subset C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ отображения E_k , что любое отображение $f \in U(E_k)$ является сохраняющим ориентацию растяжением (т.е. $f' > 1$) степени k .*

Доказательство. Так как $E'_k = k > 1$, то и у близкого в C^1 -топологии отображения производная будет больше 1. Несложно видеть, что функция, сопоставляющая непрерывному отображению окружности его степень, непрерывно зависит от отображения в пространстве $C(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$. Так как эта функция принимает только целые значения, она локально постоянна. \square

Таким образом, утверждение 6.1 будет доказано, если мы докажем следующее

Утверждение 6.3. *Пусть $f \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$. Пусть $f' > 1$ и f является отображением степени $k \geq 2$. Тогда f и E_k топологически сопряжены.*

Доказательство. Будем доказывать наше утверждение в три шага.

- 1) Построим полусопряжение $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, что $E_k \circ h = h \circ f$, где h – сюръективное непрерывное отображение степени 1.
- 2) Построим полусопряжение $\tilde{h} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, что $\tilde{h} \circ E_k = f \circ \tilde{h}$, где \tilde{h} – сюръективное непрерывное отображение степени 1.
- 3) Покажем, что $h \circ \tilde{h} = \text{id}$, откуда следует сопряженность E_k и f .

Пункт 3. Пусть мы уже построили h и \tilde{h} из пунктов 1 и 2 соответственно. Тогда имеем

$$h \circ \tilde{h} \circ E_k = h \circ f \circ \tilde{h} = E_k \circ h \circ \tilde{h}.$$

Таким образом, E_k коммутирует с некоторым непрерывным отображением $h \circ \tilde{h}$ степени 1. Из леммы 6.1, которую удобно сформулировать и доказать отдельно, следует, что $h \circ \tilde{h} = \text{id}$. Таким образом, h – диффеоморфизм, $\tilde{h} = h^{-1}$. Поэтому $E_k = h \circ f \circ h^{-1}$.

Пункт 1. По лемме 6.2, отображение f имеет неподвижную точку x_0 . Без ограничения общности, будем считать, что $x_0 = 0$.

Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – поднятие f . Тогда $\pi(F(0)) = f(\pi(0)) = f(0) = 0$, т.е. $F(0) \in \mathbb{Z}$. Так как F – непрерывно и $F(1) = F(0) + k$, то найдутся точки $a_j \in [0, 1]$, $0 \leq j \leq k$, что $F(a_j) = F(0) + j$. Ясно, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Так как f сохраняет ориентацию, поднятие F строго возрастает, откуда следует, что $0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < 1$. Заметим, что образ $f([a_m, a_{m+1})) = [0, 1)$ есть вся окружность. А ограничение $f|_{[a_m, a_{m+1})}$ является биекцией.

Будем искать функцию H – поднятие полусопряжения h . Чтобы степень h получилась равной 1, потребуем $H(x+1) - H(x) = 1$. Поэтому нам достаточно найти функцию H на отрезке $[0, 1]$. Для простоты положим $H(0) = 0$, откуда $H(1) = 1$. Пусть $Z = \{H \in C([0, 1], [0, 1]) : H(0) = 0, H(1) = 1\}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{F} : Z \rightarrow Z$, заданный формулой

$$\mathcal{F}(H)(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}H(\{F(x)\}) + \frac{m}{k}, & x \in [a_m, a_{m+1}); \\ 1, & x = 1, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $0 \leq m \leq k-1$.

Покажем, что оператор \mathcal{F} является сжимающим в метрическом пространстве Z с метрикой $\rho(H_1, H_2) = \max_{[0,1]} |H_1(x) - H_2(x)|$. Действительно,

$$\rho(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2)) \leq \frac{1}{k} \max_{[0,1]} (H_1(\{F(x)\}) - H_2(\{F(x)\})) = \frac{1}{k} \rho(H_1, H_2).$$

Так как метрическое пространство Z полное, то оператор \mathcal{F} имеет неподвижную точку $\hat{H} \in Z$. Покажем, что тогда функция $h(x) = \{\hat{H}(x)\} = \{\mathcal{F}(\hat{H})(x)\}$ является искомым полусопряжением. Обозначим через $\hat{E}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – поднятие E_k . Тогда для $x \in [0, 1)$ выполнено

$$E_k \circ h = E_k \circ \{\mathcal{F}(\hat{H})\} = E_k \circ \pi \circ \mathcal{F}(\hat{H}) = \pi \circ \hat{E}_k \circ \mathcal{F}(\hat{H}).$$

Из явного вида (6.1) оператора \mathcal{F} следует, что при $x \in [0, 1)$ выполнено

$$\pi \circ \hat{E}_k \circ \mathcal{F}(\hat{H})(x) = \{\hat{H}(\{F(x)\})\} = h(\{F(x)\}) = h \circ f(x).$$

Что и требовалось.

Пункт 2. Доказывается аналогично пункту 1. Поднятие полусопряжения \tilde{h} ищется как неподвижная точка оператора $\tilde{\mathcal{F}} : Z \rightarrow Z$, заданного формулой

$$\tilde{\mathcal{F}}(H)(x) = \begin{cases} f_m^{-1}(H(\{kx\})), & x \in [\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}); \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

где $0 \leq m \leq k-1$ и $f_m^{-1} = (f|_{[a_m, a_{m+1})})^{-1}$.

Несложно проверить аналогично, что $\tilde{\mathcal{F}}$ сжимает и его неподвижная точка есть искомое поднятие. □

Лемма 6.1. Пусть $E_k \circ g = g \circ E_k$, где $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – непрерывное отображение степени 1. Тогда $g = \text{id}$.

Доказательство. Пусть $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – поднятие отображения g . Тогда функция $\tilde{G}(x) = G(x) - x$ является периодической с периодом 1, т.к. $\tilde{G}(x+1) - \tilde{G}(x) = G(x+1) - G(x) - x - 1 + x = G(x+1) - G(x) - 1 = 0$.

Несложно видеть, что из коммутирования g и E_k следует коммутирование их поднятий G и $x \mapsto kx$, т.е.

$$G(kx) = kG(x) \Rightarrow \tilde{G}(kx) + kx = k\tilde{G}(x) + kx \Rightarrow \tilde{G}(kx) = k\tilde{G}(x).$$

Индуктивно получаем равенство $\tilde{G}(k^n x) = k^n \tilde{G}(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что если $\tilde{G}(x_0) \neq 0$, то $|\tilde{G}(k^n x_0)| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Напомним, что \tilde{G} – непрерывная периодическая функция на \mathbb{R} , а потому ограничена. Значит, $\tilde{G} \equiv 0$, откуда следует, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $G(x) = x$. Тогда, как и требовалось, $g = \text{id}$. \square

Лемма 6.2. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – непрерывное отображение степени $k \geq 2$. Тогда у f существует неподвижная точка.

Доказательство. Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – поднятие f . Покажем, что найдется $x \in [0, 1)$, что $\tilde{F}(x) = F(x) - x \in \mathbb{Z}$. Отсюда будет следовать утверждение леммы.

Рассмотрим $\tilde{F}(1) - \tilde{F}(0) = k - 1 \geq 1$. Таким образом, под действием \tilde{F} полуинтервал $[0, 1)$ переходит в полуинтервал длины не менее, чем 1. А значит, найдется точка с целым значением. \square

Пример 6.1. Лемма 6.2 неверна для отображений степени 1. Для примера можно взять поворот.

Замечание 6.1. Следует, отметить, что, вообще говоря, существуют отображения, являющиеся полусопряженными с двух сторон, но не сопряженными. Поэтому прием, используемый в доказательстве утверждения 6.3, не всегда работает.

Сдвиг Бернулли.

Пусть $\Sigma^2 = 2^{\mathbb{Z}} = \{\omega = (\dots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots), \omega_j \in \{0, 1\}\}$ – множество всех двусторонних последовательностей, состоящих из 0 и 1.

И пусть $\Sigma_+^2 = 2^{\mathbb{Z}_+} = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots), \omega_j \in \{0, 1\}\}$ – множество всех односторонних последовательностей, состоящих из 0 и 1.

На Σ^2 и Σ_+^2 можно задать метрику $\rho(\omega, \tilde{\omega}) = 2^{-|n|}$, где n – это наименьший по модулю номер, что $\omega_n \neq \tilde{\omega}_n$.

Рассмотрим $\sigma : \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$ – отображение левого сдвига: $(\sigma(\omega))_j = \omega_{j+1}$. Ясно, что σ – биекция. Аналогично можно определить левый сдвиг $\sigma_+ : \Sigma_+^2 \rightarrow \Sigma_+^2$, который, конечно, уже биекцией не является. Действительно, σ_+ переводит последовательность $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ в $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$, теряя информацию об ω_0 .

Определение 6.1. Отображения σ и σ_+ называют сдвигами Бернулли.

На самом деле, мы уже использовали сдвиг σ_+ , когда изучали поведение удвоения окружности. Теперь мы можем сформулировать эту связь точно.

Утверждение 6.4. *Сдвиг Бернулли σ_+ и удвоение окружности E_2 полусопряжены: $\sigma_+ \circ h = h \circ E_2$, где отображение $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma_+$ сопоставляет углу (рассматриваемому как число из $[0, 1)$) его двоичную запись. Отображение h называют отображением судьбы.*

Заметим, что h не является биекцией. Например, последовательности из одних нулей и последовательности из одних единиц соответствует одно и тоже число. Ясно, что σ_+ и E_2 не могут быть топологически сопряжены, так как пространства Σ_+ и \mathbb{S}^1 не гомеоморфны.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{E_2} & \mathbb{S}^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Sigma_+ & \xrightarrow{\sigma_+} & \Sigma_+ \end{array}$$

Рис. 6.1. Полусопряжение h удвоения окружности E_2 и сдвига Бернулли σ_+ .

Итак, сдвиг σ_+ является топологическим фактором отображения E_2 . Хотелось бы найти отображение, для которого сдвиг σ был бы топологическим фактором.

Подкова Смейла.

Мы рассмотрим отображение, называемое подковой Смейла. Обсудим его, не вдаваясь в глубокую формализацию, но идея будет ясна из картинок.

Начальное отображение прямоугольника.

Пусть X – прямоугольник на каком-нибудь двумерном римановом многообразии M . Для простоты изложения будем считать, что $M = \mathbb{R}^2$, а прямоугольник X имеет стороны, параллельные осям координат.

Определим отображение $f : X \rightarrow M$, действующее на X следующим образом. Сначала f сжимает X по горизонтали и вытягивает по вертикали, таким образом превращая наш прямоугольник в узкую полосу. А затем скручивает полученную полосу, как показано на рисунке 6.2. Следует обратить внимание на взаимное расположение X и его образа $f(X)$: они пересекаются по двум прямоугольникам. Также требуется, чтобы $f : X \rightarrow f(X)$ было диффеоморфизмом. Можно считать, что в дополнении $M \setminus X$ отображение f доопределено до диффеоморфизма на M , но поведение вне прямоугольника нас не будет волновать.

Как видно из рисунка, некоторые точки образа $f(X)$ лежат вне X . Чтобы это исправить, мы построим инвариантное подмножество $\Lambda \subset X$ и рассмотрим ограничение $f|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$, которое и называется отображением подковы Смейла.

Прежде чем перейти к построению, давайте обсудим название «подкова». Конечно, на рисунке 6.2 образ прямоугольника напоминает скорее какую-нибудь скрепку. Дело в том, что сам Смейл первоначально предлагал отображение, преобразующее

X в именно подкову (рис. 6.3), но этот пример был позднее модернизирован, а название «подкова» сохранилось. Отметим, что динамика в обоих примерах получается совершенно одинаковая, однако модернизированный пример оказывается более простым для изложения.

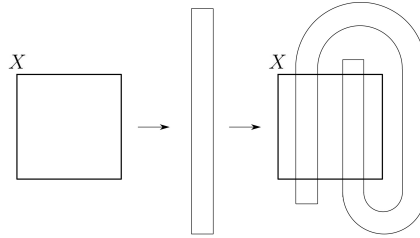


Рис. 6.2. Преобразование f прямоугольника X .

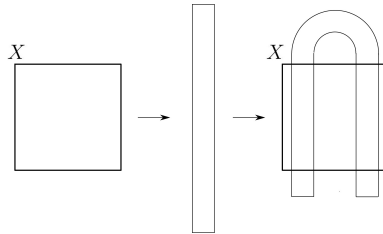


Рис. 6.3. Первоначальный пример Смейла преобразования прямоугольника X .

Для более формального описания потребуем от отображения f следующее. Дифференциал $D_x f$ для $x \in X \cap f(X)$ должен иметь одно собственное значение больше 1 по модулю, а второе – меньше 1 по модулю. Причем, собственный вектор, соответствующий большему собственному значению, должен быть вертикальным, а собственный вектор, соответствующий меньшему собственному значению – горизонтальным. Т.е. при $x \in X \cap f(X)$ дифференциал f растягивает по вертикали и сжимает по горизонтали.

Построение ограничения.

Наша задача – построить и описать множество $\Lambda \subset X$ тех точек x , что $\forall n \in \mathbb{Z}$ верно $f^n(x) \in X$. Ясно, что Λ – инвариантное множество. Это позволяет нам рассматривать настоящую динамическую систему $f|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$. Несложно видеть, что $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(X)$.

Определение 6.2. *Отображение $f|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ называется отображением подковы Смейла.*

Попробуем понять, как устроено множество Λ .

Покажем, что множество $\bigcap_{n=0}^N f^n(X)$ состоит из 2^N вертикальных прямоугольников. Действительно, $X \cap f(X)$ состоит из двух непересекающихся прямоугольников R_l и R_r . Рассмотрим теперь $X \cap f(X) \cap f^2(X)$. Ясно, что достаточно рассмотреть пересечение $X \cap f(X) \cap f(R_l) \cap f(R_r) = (R_l \sqcup R_r) \cap f(R_l) \cap f(R_r)$. Мы имеем $f(R_j) \subset f(X)$,

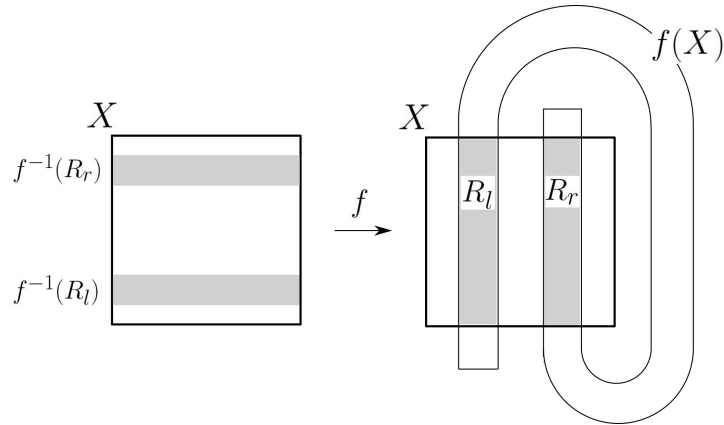


Рис. 6.4. Множества $f(X) \cap X = R_l \sqcup R_r$ и $f^{-1}(R_j)$.

причем $R_l \cap f(R_j)$ состоит из одного прямоугольника R_{jl} , и $R_r \cap f(R_j)$ состоит из одного прямоугольника R_{jr} (рис. 6.5 и 6.6). Итого имеем 2^2 прямоугольника: R_{ll} , R_{lr} , R_{rl} , R_{rr} . Продолжая индуктивно, получаем требуемое.

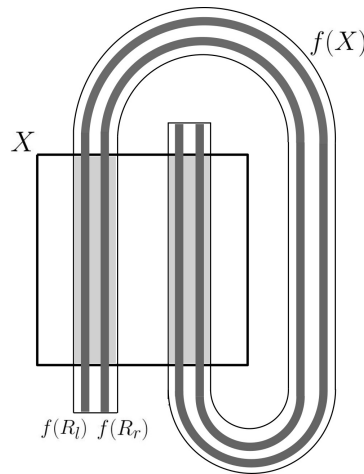


Рис. 6.5. Примерный вид множеств $f(R_l)$ и $f(R_r)$.

Заметим, что при каждом новом пересечении мы действуем аналогично построению множества Кантора. При нахождении $X \cap f(X) \cap f^2(X)$, прямоугольник R_j разбивается на 5 прямоугольников, из которых 3 прямоугольника выбрасываются, а 2 остаются. Поэтому при $N \rightarrow +\infty$ мы получаем множество вида $K_1 \times I_1$, где K_1 – канторовское множество, а I_1 – вертикальный отрезок.

Аналогично, множество $\bigcap_{n=-N}^0 f^n(X)$ состоит из 2^N горизонтальных прямоугольников. В пределе $N \rightarrow +\infty$ мы получим множество вида $I_2 \times K_2$, где I_2 – горизонтальный отрезок, а K_2 – канторовское множество.

Отсюда можно видеть, что $\Lambda = K_1 \times K_2$ – декартово произведение двух канторовских множеств.

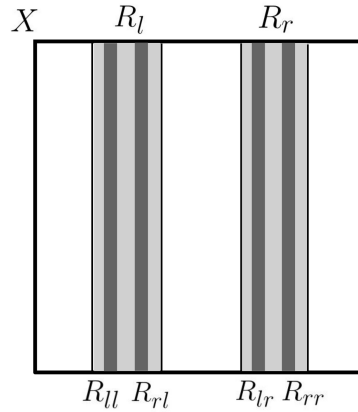


Рис. 6.6. Примерный вид прямоугольников R_{ll} , R_{lr} , R_{rl} и R_{rr} .

Кодирование.

Пусть $x \in \Lambda$. Тогда $f(x) \in R_l \sqcup R_r$. Пусть, для примера, $x \in R_l$. Тогда далее $f^2(x) \in R_{ll} \sqcup R_{lr}$. Таким образом, каждый раз при итерации f точка $f^n(x)$ попадает либо в левый, либо в правый прямоугольник. Сопоставим каждому $x \in \Lambda$ последовательность $\omega(x)$ из $2^{\mathbb{N}}$ по правилу $\omega_j = 0$, если точка $f^j(x)$ попала в левый прямоугольник, и $\omega_j = 1$, если точка $f^j(x)$ попала в правый прямоугольник.

Аналогично, прообразы $f^{-n}(x)$, $0 \leq n \leq +\infty$ будут попадать либо в нижний, либо в верхний прямоугольники. Пусть нижнему соответствует 0, а верхнему соответствует 1. Тогда мы также сопоставим x последовательность $\tilde{\omega}(x)$ из $2^{\mathbb{Z}^+}$.

Объединим две односторонних последовательности $\omega(x)$ и $\tilde{\omega}(x)$ в одну двустороннюю. Таким образом, определено отображение $h : \Lambda \rightarrow \Sigma$. Мы не будем это строго доказывать, но отображение h – гомеоморфизм. Более того, h – сопрягает сдвиг Бернулли и f_Λ , т.е. $\sigma = h \circ f|_\Lambda \circ h^{-1}$.

Проведенный нами процесс сопоставления точкам фазового пространства последовательности чисел в зависимости от динамики называется кодированием. Отображение h называется отображением судьбы или отображением кодирования.

Из сопряжения подковы Смейла сдвигу Бернулли можно получить такое следствие. Если \tilde{f} – близкое к f отображение, то $\tilde{f}|_\Lambda$ также сопряжено σ (без доказательства). Отсюда следует, что $\tilde{f}|_\Lambda$ и $f|_\Lambda$ сопряжены между собой. Отсюда можно получить и структурную устойчивость $f|_\Lambda$, но мы оставим этот факт без доказательства.

Локально устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболической точки.

Пусть $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Пусть $p \in M$ – неподвижная гиперболическая точка f , т.е. $f(p) = p$ и модули собственных значений дифференциала $D_p f$ отличны от 1.

Определение 6.3. Локально устойчивым многообразием в окрестности U точки

p называют множество

$$W^s = \{x \in U : \exists \lambda < 1 \exists C \in \mathbb{R} : \text{dist}(f^n(x), p) \leq C \text{dist}(x, p)\lambda^n\}.$$

Из определения устойчивого многообразия совершенно не очевидно, что множество W^s имеет структуру гладкого многообразия. Однако, это действительно выполнено для гиперболических точек по теореме Адамара-Перрона, которую мы рассмотрим несколько позже. Также в определении не требуется, чтобы для всех $x \in U$ число λ было одним и тем же. Тем не менее, мы сможем показать, что λ может быть выбрана независимо от точки.

Буква «s» в обозначении W^s происходит от английского «stable». Аналогично определим неустойчивое многообразие W^u , где u означает «unstable».

Определение 6.4. *Локально неустойчивым многообразием в окрестности U точки p называют множество*

$$W^u = \{x \in U : \exists \mu < 1 \exists C \in \mathbb{R} : \text{dist}(f^{-n}(x), p) \leq C \text{dist}(x, p)\mu^n\}.$$

Множества W^s и W^u инвариантны по модулю того, что они могут вылезти за пределы U . Ясно, что $f^n(W^s) \subset W^s \subset f^{-n}(W^s)$ и $f^{-n}(W^u) \subset W^u \subset f^n(W^u)$ для больших n . Что происходит за пределами этой окрестности – отдельный интересный вопрос.

Для наглядности рассмотрим $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – диффеоморфизм плоскости с седловой неподвижной точкой p . Т.е. $D_p f$ в подходящих координатах имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, где $\lambda < 1$ и $\mu > 1$ – действительные собственные значения. В достаточно малой окрестности W^s – это кривая, близкая к вертикальному лучу, а W^u – кривая, близкая к горизонтальному лучу (см. 6.7).

Обозначим $\hat{W}^s = \cup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s)$ – глобально устойчивое многообразие и $\hat{W}^u = \cup_{n=0}^{+\infty} f^n(W^u)$ – глобально неустойчивое многообразие. Таким образом, \hat{W}^s – это максимальное продолжение W^s назад по времени, а \hat{W}^u – продолжение W^u вперед по времени. Множества \hat{W}^s и \hat{W}^u представляют собой кривые на плоскости, которые в теории могут пересечься в некоторой точке q . Точка q их трансверсального пересечения называется гомоклиническим пересечением. На следующей лекции мы увидим, как гомоклиническое пересечение порождает подкову Смейла.

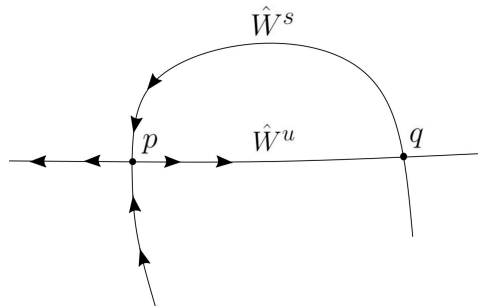


Рис. 6.7. Пример гомоклинического пересечения в точке q .

Лекция 7

Гомоклиническое пересечение.

Пусть $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Пусть $s \in M$ – неподвижная гиперболическая точка f . Пусть U – некоторая малая окрестность точки s .

На прошлой лекции мы определили локально устойчивое многообразие $W^s \subset U$ и локально неустойчивое многообразие $W^u \subset U$.

Теорема Адамара-Перрона утверждает, что для гиперболических точек локально устойчивое и неустойчивое многообразия существуют (в малой окрестности U) и действительно являются гладкими многообразиями. Более того, если $f \in C^k$, $k \in [0, +\infty]$, то и многообразия W^s , W^u будут C^k гладкими. Также верен факт, что $\dim W^s + \dim W^u = \dim M$. Эти утверждения мы пока оставим без доказательства.

Также мы рассмотрели глобальное устойчивое многообразие $\hat{W}^s = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s)$ и глобально неустойчивое многообразие $\hat{W}^u = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^n(W^u)$. Так как f – диффеоморфизм, множества \hat{W}^s, \hat{W}^u действительно имеют структуру многообразия.

Для наглядности рассмотрим случай, когда $M = \mathbb{R}^2$. Пусть для определенности собственный вектор $D_s f$, отвечающий сжимающему собственному значению, вертикальный, а растягивающему – горизонтальный.

Предположим, что многообразия \hat{W}^s и \hat{W}^u трансверсально пересекаются в некоторой точке p вне окрестности U . Такая точка p называется гомоклиническим пересечением (рис. 7.1).

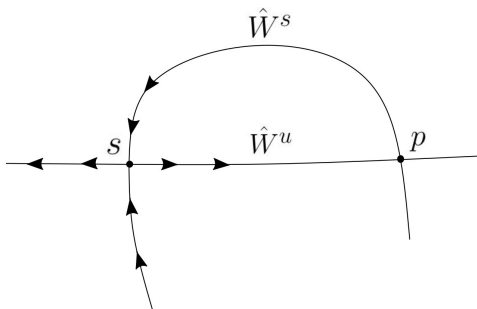


Рис. 7.1. Пример гомоклинического пересечения в точке p .

Рассмотрим теперь $f(p)$. Так как \hat{W}^s – инвариантное множество, то $f(\hat{W}^s) \subset \hat{W}^s$. Поэтому для всех $n \in \mathbb{N}$ точка $f^n(p) \in \hat{W}^s$ и $f^n(p) \rightarrow s$ при $n \rightarrow +\infty$ по определению \hat{W}^s . Но так как \hat{W}^u инвариантно, $f^n(p) \in \hat{W}^u$. Получается, что многообразие \hat{W}^u как бы «наматывается» на многообразии \hat{W}^s (рис. 7.2).

Рассмотрим аналогично $f^{-n}(p) \in \hat{W}^u$ при $n \in \mathbb{N}$ и $f^{-n}(p) \rightarrow s$ при $n \rightarrow +\infty$. Имеем также $f^{-n}(p) \in \hat{W}^s$, то есть \hat{W}^s аналогично «наматывается» на \hat{W}^u .

Таким образом, гомоклиническое пересечение порождает бесконечно много пересечений глобальных многообразий \hat{W}^s и \hat{W}^u . Эти многообразия наматываются друг на друга, образуя довольно сложную картину (рис. 7.3).

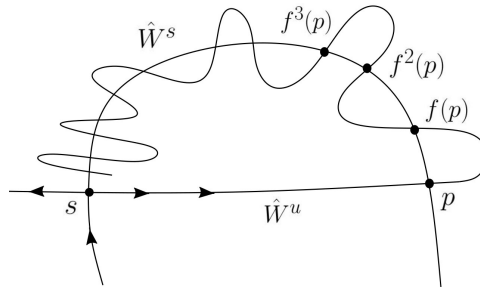


Рис. 7.2. Многообразия \hat{W}^u «наматывается» на многообразии \hat{W}^s .

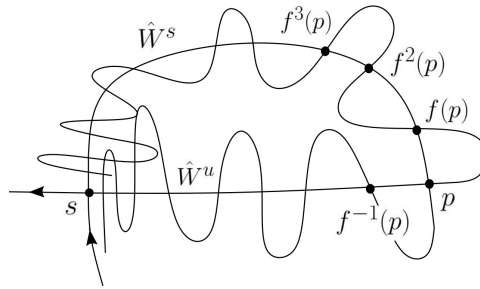


Рис. 7.3. Примерное поведение \hat{W}^s и \hat{W}^u при гомоклиническом пересечении.

Связь с подковой Смейла.

Рассмотри участок L многообразия \hat{W}^u от точки s до точки p . В нашем примере это некоторая плоская кривая. Выбрав подходящие координаты, можно считать, что L – отрезок прямой.

Рассмотрим узкий многоугольник B , содержащий L во внутренней части. Рассмотрим его прообраз $f^{-N}(B)$ при большом N . Точки, близкие к s будут растягиваться вдоль многообразия \hat{W}^s , а точки, близкие к p будут сжиматься вдоль \hat{W}^u . Таким образом, $f^{-N}(B)$ будет походить на подкову, пересекающую B по двум «прямоугольникам» (рис. 7.4). Это и есть уже знакомое нам отображение подковы Смейла.

Можно рассмотреть более короткий прямоугольник \tilde{B} , содержащий во внутренней части участок между точками s и $f^{-1}(p)$, но не содержащий L . Проитерировать \tilde{B} назад по времени до тех пор, пока полоса $f^{-N}(\tilde{B})$ не пересечет $f^{-1}(p)$. Таким образом, мы получим более привычную нам модернизированную подкову, или скрепку (рис. 7.5).

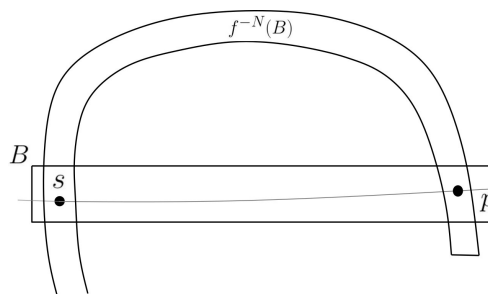


Рис. 7.4. Поликлиническое пересечение порождает отображение подковы Смейла.

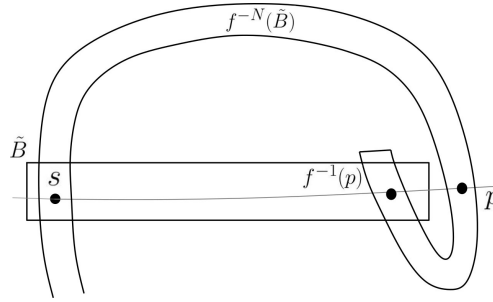


Рис. 7.5. Поликлиническое пересечение порождает модернизированное отображение подковы Смейла.

Итак, пусть N – достаточно большое. Обозначим $\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(B)$. Тогда $f^{-N}|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ есть отображение подковы Смейла.

Мы показывали, что отображение подковы сопряжено сдвигу Бернулли. Так как сдвиг Бернулли имеет бесконечно много периодических точек, то бесконечно много периодических точек имеется и у отображения $f^{-N}|_{\Lambda}$. Следовательно, отображение f имеет бесконечно много периодических точек из $\Lambda \subset B$. Ясно, что эти точки являются седлами, так как дифференциал f в этих точках имеет одно сжимающее и одно растягивающее направления.

Гетероклиническое пересечение. Гомоклинический класс.

Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – диффеоморфизм. Пусть $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$ две седловые точки f . Пусть $\hat{W}^s(s_1)$ и $\hat{W}^u(s_1)$ – глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки s_1 , а $\hat{W}^s(s_2)$ и $\hat{W}^u(s_2)$ – глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки s_2 . Предположим, что $\hat{W}^s(s_1)$ трансверсально пересекается с $\hat{W}^u(s_2)$ и $\hat{W}^u(s_1)$ трансверсально пересекается с $\hat{W}^s(s_2)$. Такая ситуация называется гетероклиническим пересечением (рис. 7.6).

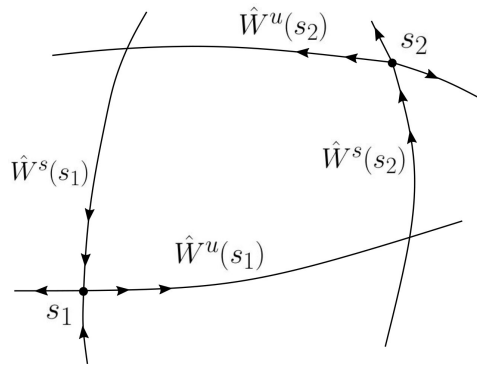


Рис. 7.6. Гетероклиническое пересечение.

Введем отношение эквивалентности на седловых точках отображения f . А именно, два седла являются эквивалентными, если между ними имеет место гетероклиническое пересечение. Замыкание класса эквивалентности называется гомоклиническим классом.

Зачастую изучение динамической системы сводится к пониманию взаимного расположения гомоклинических классов и описанию динамики на каждом из них.

Гамильтонов хаос. Теорема Мельникова.

Гомоклиническая петля.

Пусть поведение некоторой механической системы описывается двумерной гамильтоновой системой с гамильтонианом H :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (7.1)$$

Предположим, что гамильтониан H имеет точку локального минимума q и седловую точку s , как показано на рисунке 7.7. Так как функция H постоянна вдоль системы (7.1), то решения (x, y) являются подмножествами проекций линий уровня H . Примерный их вид изображен на рисунке 7.8. Локальный аргминимум q гамильтониана является особой точкой гамильтонового векторного поля типа центр, а седловая точка s – особой точкой типа седло. Точка s в нашем примере примечательна тем, что ее устойчивое и неустойчивое многообразия совпадают, образуя, так называемую, гомоклиническую петлю.

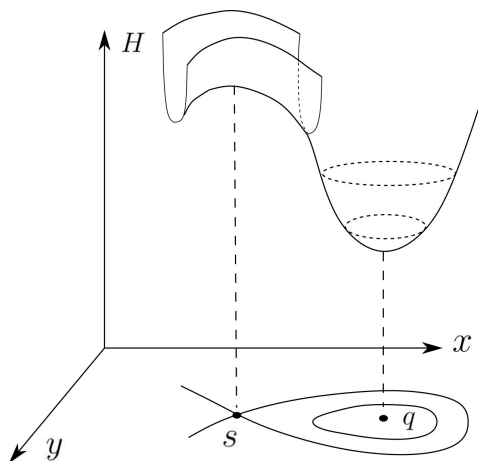


Рис. 7.7. Критические точки гамильтониана и особые точки гамильтонового векторного поля.

Такую картину гомоклинической петли можно наблюдать довольно часто среди потоков векторных полей. Однако, если мы рассматриваем сёдла произвольных диффеоморфизмов (которые не обязательно являются потоками), то гомоклиническая петля становится редкостью. Действительно, в этом случае теорема единственности не запрещает многообразиям (устойчивому и неустойчивому) пересекаться, что намного вероятнее, чем их совпадение.

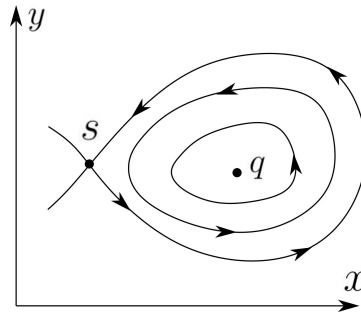


Рис. 7.8. Поликлиническая петля гамильтонового векторного поля.

Периодическое возмущение гамильтоновой системы.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t, \varepsilon), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t, \varepsilon), \end{cases} \quad (7.2)$$

где g_i – периодические по t функции с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а ε – малый параметр.

Введем угловую координату $\varphi = \omega t \pmod{2\pi}$. Таким образом, $\varphi(t + T) = \varphi(t)$.

Пусть сначала $\varepsilon = 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases} \quad (7.3)$$

Так как s – неподвижная точка гамильтоновой системы, то $(s, \omega t)$ является периодическим решением системы (7.3) с периодом T .

Примерный вид траекторий системы (7.3) представлен на рисунке 7.9.

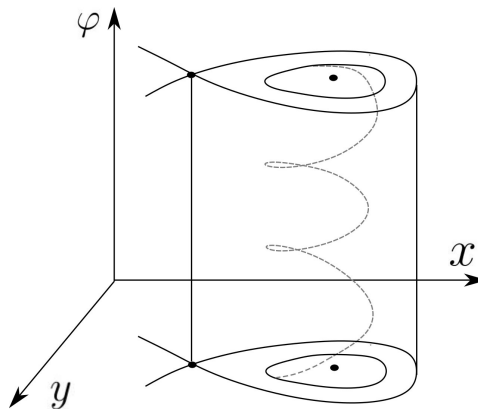


Рис. 7.9. Примерный вид траекторий системы (7.3).

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$ мало. Гиперболические точки устойчивы к малым возмущениям. Т.е, для достаточно малого ε найдется близкая к s гиперболическая особая

точка s_ε системы (7.2). Пусть $W^s(s_\varepsilon)$ и $W^u(s_\varepsilon)$ – её устойчивое и неустойчивое многообразия соответственно. Тогда в достаточно малой окрестности s многообразия $W^s(s_\varepsilon)$, $W^u(s_\varepsilon)$ близки к $W^s(s)$ и $W^u(s)$ соответственно (этот факт пока оставим без доказательства). Однако глобальные многообразия $\hat{W}^s(s_\varepsilon)$ и $\hat{W}^u(s_\varepsilon)$ могут отличаться от $\hat{W}^s(s)$ и $\hat{W}^u(s)$ довольно сильно. В частности, $\hat{W}^s(s_\varepsilon)$ и $\hat{W}^u(s_\varepsilon)$ перестают совпадать.

Рассмотрим теперь следующую систему при $\varepsilon \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t, \varepsilon), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases} \quad (7.4)$$

Ясно что решение $(s_\varepsilon, \omega t)$ является периодическим с периодом T . И в малой окрестности этого решения траектории системы (7.4) устроены так же, как и у системы (7.3). Но вне этой окрестности поведение полностью меняется.

Пусть $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Выберем горизонтальную плоскость $\Sigma_{\varphi_0} = \{(x, y, \varphi_0)\}$ и рассмотрим отображение $P_\varepsilon : \Sigma_{\varphi_0} \rightarrow \Sigma_{\varphi_0}$ первого возвращения Пуанкаре. Ясно, что $S_\varepsilon = (s_\varepsilon, \varphi_0)$ – гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма P_ε . Рассмотрим локально устойчивое $\hat{W}_{P_\varepsilon}^s(S_\varepsilon)$ и неустойчивое $\hat{W}_{P_\varepsilon}^u(S_\varepsilon)$ многообразия точки S_ε под действием диффеоморфизма P_ε .

При $\varepsilon = 0$ многообразия $\hat{W}_{P_0}^s(S)$ и $\hat{W}_{P_0}^u(S)$ совпадают, образуя гомоклиническую петлю. При $\varepsilon \neq 0$ возможны два случая: либо многообразия размыкаются без пересечений (хороший случай), либо пересекаются (рис. 7.10). Заметим, что P_ε – это диффеоморфизм (а не поток), а потому многообразия $\hat{W}_{P_\varepsilon}^s(S_\varepsilon)$ и $\hat{W}_{P_\varepsilon}^u(S_\varepsilon)$ действительно могут пересекаться.

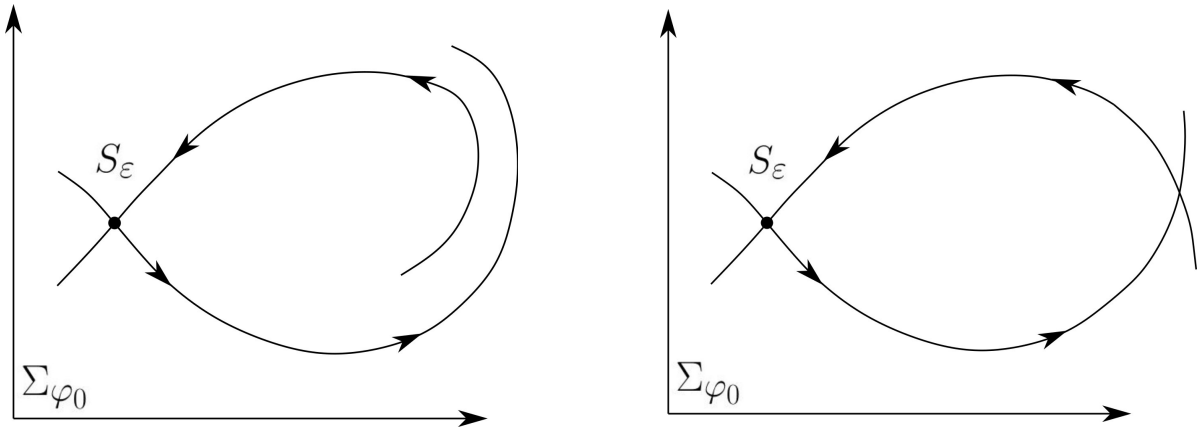


Рис. 7.10. Возмущенные многообразия $\hat{W}_{P_\varepsilon}^s(S_\varepsilon)$ и $\hat{W}_{P_\varepsilon}^u(S_\varepsilon)$.

Рассмотрим случай, когда многообразия $\hat{W}_{P_\varepsilon}^s(S_\varepsilon)$ и $\hat{W}_{P_\varepsilon}^u(S_\varepsilon)$ пересекаются трансверсально. Таким образом они образуют гомоклиническое пересечение, которое образует бесконечно много гиперболических периодических орбит отображения P_ε . Такая ситуация называется «гамильтоновым хаосом», так как действительно порождает довольно сложное и хаотичное поведение системы. Потому нам хотелось бы уметь проверять, когда при возмущении системы имеет место гомоклиническое пересечение многообразий $\hat{W}_{P_\varepsilon}^s(S_\varepsilon)$ и $\hat{W}_{P_\varepsilon}^u(S_\varepsilon)$.

Теорема Мельникова. Расстояние Мельникова.

Для формулировки теоремы введем несколько обозначений.

Пусть $q_0(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ – решение системы (7.1), соответствующее гомоклинической петле в точке s . Пусть $\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)$, $g = (g_1, g_2)$.

Определение 7.1. Введем функцию \mathcal{M} Мельникова

$$\mathcal{M}(\tau_0, \varphi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \nabla H(q_0(t)), g(q_0(t), \omega t + \omega \tau_0 + \varphi_0, 0) \rangle dt,$$

где $\tau_0 \in (-\infty, +\infty)$ и $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение.

Заметим, что функция Мельникова не зависит от параметра возмущения ε .

Теорема 7.1. Если существует такая точка $(\hat{\tau}, \hat{\varphi})$, что $\mathcal{M}(\hat{\tau}, \hat{\varphi}) = 0$, но $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \tau_0}(\hat{\tau}, \hat{\varphi}) \neq 0$, то для всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ имеет место гамильтонов хаос.

Определение функции Мельникова происходит из идеи измерять «расстояние» между устойчивым и неустойчивым многообразиями, которое равно нулю в случае пересечения. Условие $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \tau_0}(\hat{\tau}, \hat{\varphi}) \neq 0$ нужно, чтобы это пересечение было трансверсальным. Расстояние, задающееся функцией Мельникова, называют расстоянием Мельникова. К сожалению, более подробное построение расстояния Мельникова выходит за рамки нашего курса.

Спиральность векторных полей.

В оставшееся время мы кратко анонсируем тему обсуждения следующей лекции.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ – область, граница ∂M которой есть гладкая поверхность. Пусть ξ – гладкое векторное поле в \mathbb{R}^3 . Мы предполагаем, что ξ бездивергентное, т.е. сохраняет объем. Также предполагаем, что ξ касается границы ∂M области, т.е. $\forall x \in \partial M$ выполнено $\xi(x) \in T_x \partial M$.

Мы хотим определить спиральность поля ξ . Для этого сперва определим асимптотический коэффициент зацепления.

Пусть g^t – поток векторного поля ξ . Зафиксируем $x_1 \in M$ и $T_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Рассмотрим кривую $\{g^t(x_1), t \in [0, T_1]\}$. Замкнем эту кривую, соединив ломаной точки x_1 и $g^{T_1}(x_1)$ так, чтобы итоговая кривая не имела самопересечений. Получим некоторое вложение γ_1 окружности в \mathbb{R}^3 . Зафиксируем $x_2 \in M$ и $T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и построим вложение γ_2 окружности аналогично. Тогда у кривых γ_1 и γ_2 определен коэффициент зацепления $k(x_1, x_2, T_1, T_2)$. Как его определить, обсудим на следующей лекции.

Рассмотрим предел $\lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{k(x_1, x_2, T_1, T_2)}{T_1 T_2} = \lambda(x_1, x_2)$. Данный предел действительно существует, а его значение называется асимптотическим коэффициентом зацепления.

Определение 7.2. Спиральностью (*helicity*) векторного поля ξ называется величина

$$H(\xi) = \int_M \int_M \lambda_\xi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

На следующей лекции мы подробнее поговорим о коэффициенте зацепления и сформулируем теорему существования спиральности векторного поля.

Лекция 8

Спиральность векторного поля.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ – область, граница ∂M которой есть гладкая поверхность. Пусть ξ – гладкое векторное поле в \mathbb{R}^3 . Мы предполагаем, что ξ бездивергентное, т.е. сохраняет объем. Также предполагаем, что ξ касается границы ∂M области, т.е. $\forall x \in \partial M$ выполнено $\xi(x) \in T_x \partial M$.

Наша цель определить и обосновать существование понятия спиральности векторного поля ξ . Для начала введем несколько вспомогательных конструкций.

Коэффициент зацепления. Теорема Гаусса.

Пусть γ_1 и γ_2 – вложения окружности в \mathbb{R}^3 . Тогда можно определить их коэффициент зацепления. Не вдаваясь в детали, кратко поясним, как он считается.

Зафиксируем на γ_1 и γ_2 ориентацию и последовательно спроецируем кривые на произвольную плоскость. Получим плоские кривые ψ_1 и ψ_2 . Нас интересуют точки пересечения этих кривых с учетом того, какая кривая в окрестности пересечения оказывается «сверху». На рисунке 8.1 представлены все возможные типы пересечения. Первому и второму типам мы сопоставим знак $+$, а третьему и четвертому сопоставим знак $-$. Обозначим через n_k количество пересечений типа k , где $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда коэффициент зацепления можно посчитать по формуле

$$k(\gamma_1, \gamma_2) = n_1 - n_4 = n_2 - n_3 = \frac{(n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)}{2}.$$

Предположим, что кривая γ_1 параметризована параметром $t \in [0, \tau_1)$, а кривая γ_2 параметром $t \in [0, \tau_2)$. Пусть $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ – гладкие функции. Тогда коэффициент зацепления можно посчитать следующим образом.

Теорема 8.1 (Гаусса).

$$k(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \frac{(\dot{\gamma}_1(t_1); \dot{\gamma}_2(t_2); \gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2))}{\|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2, \quad (8.1)$$

где через $(x; y; z)$ обозначено смешанное произведение векторов x, y, z .

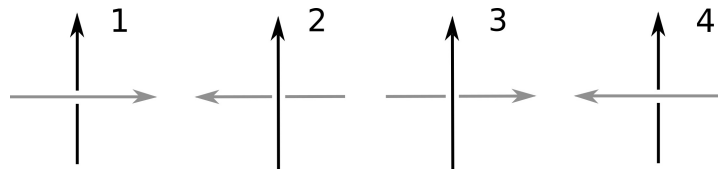


Рис. 8.1. Четыре типа пересечения кривых ψ_1 и ψ_2 . Кривые обозначены разным цветом.

Асимптотический коэффициент зацепления и спиральность.

Пусть g^t – поток векторного поля ξ . Зафиксируем $x_1 \in M$ и $T_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Рассмотрим кривую $\{g^t(x_1), t \in [0, T_1]\}$. Замкнем эту кривую, соединив ломаной точки x_1 и $g^{T_1}(x_1)$ так, чтобы итоговая кривая не имела самопересечений. Получим вложение γ_1 окружности в \mathbb{R}^3 . Зафиксируем $x_2 \in M$ и $T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и построим вложение γ_2 окружности аналогично. Тогда у кривых γ_1 и γ_2 определен коэффициент зацепления $k(x_1, x_2, T_1, T_2)$.

Определение 8.1. *Асимптотическим коэффициентом зацепления называется следующий предел*

$$\lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{k(x_1, x_2, T_1, T_2)}{T_1 T_2}.$$

Определение 8.2. *Спиральностью векторного поля ξ называется величина*

$$H(\xi) = \int_M \int_M \lambda_\xi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Из приведенных определений не следует существование ни асимптотического коэффициента зацепления, ни спиральности. Мы посвятим следующий раздел доказательству теоремы Арнольда, утверждающей корректность этих определений.

Теорема Арнольда.

Пусть $X_1(t) = g^t(x_1)$ и $X_2(t) = g^t(x_2)$. Введем в рассмотрение следующую функцию

$$\Lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \frac{(\dot{X}_1(t_1); \dot{X}_2(t_2); X_1(t_1) - X_2(t_2))}{\|X_1(t_1) - X_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2,$$

где коэффициент $k = 4\pi T_1 T_2$, а через $(x; y; z)$ обозначено смешанное произведение векторов x, y, z .

Теорема 8.2 (Арнольда). *Для почти всех пар $(x_1, x_2) \in M \times M$ величина $\Lambda_\xi(x_1, x_2)$ существует и выполнено $\Lambda_\xi(x_1, x_2) = \lambda_\xi(x_1, x_2)$. Более того, $\Lambda_\xi(x_1, x_2) \in L_1(M \times M)$, т.е. спиральность $H(\xi)$ корректно определена.*

Доказательство. Введем обозначения

$$\alpha_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = \frac{(\dot{X}_1(t_1); \dot{X}_2(t_2); X_1(t_1) - X_2(t_2))}{\|X_1(t_1) - X_2(t_2)\|^3}, \quad \varphi(x_1, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha_{x_1, x_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Можно проверить, что $\varphi \in L_1(M \times M)$. Существование интеграла $H(\xi)$ будет следовать из интегрируемости φ и существования предела Λ_ξ . Мы не будем останавливаться на этом моменте подробно, а перейдем к доказательству существования Λ_ξ , в котором удивительно возникает теорема Биркгофа.

Существование Λ_ξ . Рассмотрим отображения $f_1(x_1, x_2) = (g^1(x_1), x_2)$ и $f_2(x_1, x_2) = (x_1, g^1(x_2))$. Таким образом, $f_i : M \times M \rightarrow M \times M$.

Ясно, что

$$(\varphi \circ f_1^n)(x_1, x_2) = \int_0^1 \int_n^{n+1} \alpha_{x_1, x_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Предположим, что $T_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда верно соотношение

$$\frac{1}{T_1 + 1} \sum_{n=0}^{T_1} (\varphi \circ f_1^n)(x_1, x_2) = \frac{1}{T_1 + 1} \int_0^1 \int_0^{T_1+1} \alpha_{x_1, x_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Но с другой стороны, стоящая слева сумма есть временное среднее функции φ относительно отображения f_1 . Так как поле ξ бездивергентное, то поток g^t сохраняет меру Лебега, а потому мера Лебега является инвариантной для отображения f_1 . По теореме Биркгофа о временных средних, для п.в. (x_1, x_2) существует предел

$$\lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_1 + 1} \int_0^1 \int_0^{T_1+1} \alpha_{x_1, x_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \psi(x_1, x_2).$$

Заметим, что так как мера Лебега не является эргодичной относительно f_1 , то функция ψ не является константой.

Предположим, $T_2 \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим временные средние функции ψ относительно отображения f_2 :

$$A_{T_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{T_2 + 1} \sum_{n=0}^{T_2} (\psi \circ f_2^n)(x_1, x_2).$$

Из аналогичных рассуждений теорема Биркгофа гарантирует существование предела $\lim_{T_2 \rightarrow +\infty} A_{T_2}(x_1, x_2)$ для п.в. (x_1, x_2) . Ясно, что этот предел совпадает с $4\pi\Lambda_\xi(x_1, x_2)$, а потому величина $\Lambda_\xi(x_1, x_2)$ определена п.в.

Заметим, что мы доказали существование предела Λ_ξ только для целых последовательностей T_1 и T_2 . Но из этого случая несложно выводится общий, что мы оставляем без доказательства.

Равенство $\Lambda_\xi = \lambda_\xi$. Чтобы посчитать λ_ξ , нам необходимо замкнуть кривые $X_1(t)$ и $X_2(t)$ ломаной, чтобы получились вложения γ_1, γ_2 окружности в \mathbb{R}^3 . Мы можем считать, что из точки $X_1(T_1)$ в точку x_1 мы попадаем за время 1, т.е. вложение γ_1 параметризовано $t \in [0, T_1 + 1]$ и $\gamma_1(t) = X_1(t)$ при $t \in [0, T_1]$. Аналогично вложение γ_2 параметризовано $t \in [0, T_2 + 1]$ и $\gamma_2(t) = X_2(t)$ при $t \in [0, T_2]$. Тогда, используя теорему 8.1 Гаусса, получаем

$$\lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi T_1 T_2} \left(\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \alpha_{x_1, x_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{T_1}^{T_1+1} \int_{T_2}^{T_2+1} \frac{(\dot{\gamma}_1(t_1); \dot{\gamma}_2(t_2); \gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2))}{\|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2 \right).$$

Осталось только показать, что второе выражение в скобках есть $\bar{o}(T_1 T_2)$. Действительно, его вклад можно оценить как $C(T_1 + T_2)$, где C – некоторая константа. Мы оставим эту оценку без строгого доказательства. □

Структурная устойчивость линейного диффеоморфизма Аносова.

В этом разделе мы докажем, что линейный диффеоморфизм Аносова является структурно устойчивым в классе C^1 -гладких отображений.

Напомним, что диффеоморфизмом Аносова мы называли оператор $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, задающийся матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, $F(x, y) = (\{2x + y\}, \{x + y\})$. Матрица A имеет вещественные собственные значения $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$. Обозначим соответствующие им собственные векторы через v_1 и v_2 .

Идея доказательства будет схожа с идеей, что мы использовали при доказательстве структурной устойчивости растяжения окружности в k раз. Пусть G – некоторое C^1 -близкое к F отображение тора в себя. Тогда, в силу компактности \mathbb{T}^2 , можно считать, что G – диффеоморфизм. Докажем топологическую сопряженность F и G по шагам:

- 1) Построим непрерывное сюръективное полусопряжение $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что $h \circ G = F \circ h$;
- 2) Построим непрерывное сюръективное полусопряжение $\tilde{h} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что $G \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ F$;
- 3) Докажем, что $h \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ h = \text{id}$. Отсюда следует, что h – гомеоморфизм, т.е. топологическое сопряжение.

Прежде чем искать h и \tilde{h} , необходимо понять, какими свойствами они должны обладать для возможности выполнения шага 3. Предположим, что выполнены шаги 1 и 2, тогда $h \circ \tilde{h} \circ F = h \circ G \circ \tilde{h} = F \circ h \circ \tilde{h}$. Таким образом, отображение $h \circ \tilde{h}$ коммутирует с F . Можно ли придумать условия на коммутирующее с F отображение, из которого бы следовало его равенство тождественному?

Разделяющий диффеоморфизм.

Определение 8.3. Пусть M – гладкое риманово многообразие, и $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Говорят, что f разделяющий, если существует $\delta > 0$, что из условия $\forall k \in \mathbb{Z} \rho(f^k(x), f^k(y)) < \delta$ следует $x = y$. Число δ называют константой разделения.

Утверждение 8.1. Пусть диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ разделяющий с константой δ . Пусть $h : M \rightarrow M$ – непрерывное отображение со следующими свойствами: $h \circ f = f \circ h$ и $\forall x \in M$ выполнено $\rho(x, h(x)) < \delta$. Тогда $h = \text{id}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть точка $x \in M$ такая, что $h(x) = y \neq x$. Так как f разделяющий, то $\exists k \in \mathbb{Z}$, что $\rho(f^k(x), f^k(y)) \geq \delta$.

Из коммутирования f и h следует, что $f^k(y) = f^k(h(x)) = h(f^k(x))$. Но тогда $\rho(f^k(x), f^k(y)) = \rho(f^k(x), h(f^k(x))) < \delta$ по свойству отображения h . Противоречие. \square

Утверждение 8.2. *Диффеоморфизм Аносова F является разделяющим.*

Схема доказательства. Пусть $x, y \in \mathbb{T}^2$, $x \neq y$ – достаточно близкие точки. Рассмотрим три возможных случая расположения точек x и y :

- 1) Вектор $x - y$ сонаправлен с собственным вектором v_2 , соответствующим собственному значению $\lambda_1 > 1$;
- 2) Вектор $x - y$ сонаправлен с собственным вектором v_1 , соответствующим собственному значению $\lambda_2 < 1$;
- 3) Вектор $x - y$ не сонаправлен ни с v_1 , ни с v_2 .

Пусть выполнен случай 1. Тогда можно показать, что расстояние $\rho(F^n(x), F^n(y))$ при $n > 0$ увеличится хотя бы до $\frac{1}{2\lambda_1}$.

Пусть выполнен случай 2. Тогда можно показать, что расстояние $\rho(F^n(x), F^n(y))$ при $n < 0$ увеличится хотя бы до $\frac{1}{2\lambda_2}$.

В общем случае 3 проведем через одну точку прямую L_1 , с направляющим вектором v_1 , а через другую точку – прямую L_2 с направляющим вектором v_2 . Эти прямые пересекутся в некоторой точке z . Прямые L_1 и L_2 выбираются так, чтобы точка z была близка к x, y . Пусть, к примеру, L_1 проходит через x , а L_2 через y . Тогда, из доказанного в пунктах 1 и 2, мы получаем, что итерации $F^n(x)$ и $F^n(z)$ при $n > 0$ будут «отдаляться», а итерации $F^n(y)$ и $F^n(z)$ при $n > 0$, наоборот, будут «сближаться». Отсюда, по неравенству треугольника, расстояние $\rho(F^n(x), F^n(y))$ можно сделать достаточно большим.

Аккуратное доказательство оставляется слушателю. \square

Таким образом, для реализации шага 3 мы попробуем построить полусопряжения h и \tilde{h} достаточно близкие к тождественному отображению. Отсюда будет следовать, что их композиция $h \circ \tilde{h}$ достаточно близка к тождественному отображению и коммутирует с F , а потому $h \circ \tilde{h} = \text{id}$.

Построение первого полусопряжения.

Итак, нам необходимо построить такое непрерывное сюръективное $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что $h \circ G = F \circ h$ и $\rho(h, \text{id}) < \delta$ для некоторого малого числа $\delta > 0$.

Обозначим через $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ стандартное накрытие тора: $\pi(x_1, x_2) = (\{x_1\}, \{x_2\})$.

Определение 8.4. Пусть $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – произвольное непрерывное отображение. Поднятие $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – это такое непрерывное отображение, что $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$. Ясно, что $\hat{f}(x_1 + 1, x_2 + 1) - \hat{f}(x_1, x_2) = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$, где точка (z_1, z_2) одна и та же для всех пар (x_1, x_2) .

По определению диффеоморфизма Аносова, $F = \pi \circ L$, где $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейный оператор, заданный матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что оператор L является поднятием F .

Обозначим через \hat{G} такое поднятие диффеоморфизма G , что $\hat{G}(x, y) = G(x, y)$ при $((x, y) \in [0, 1) \times [0, 1))$. Тогда отображение $\bar{g} = \hat{G} - L$ близко к нулю в пространстве $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ и периодически по каждому аргументу.

Пусть \hat{h} – поднятие отображения h . Так как из равенства $\hat{h} \circ \hat{G} = L \circ \hat{h}$ следует равенство $h \circ G = F \circ h$, то нам достаточно найти \hat{h} . Обозначим $\bar{h} = \hat{h} - \text{id}$. Подставим выражения $\hat{G} = L + \bar{g}$ и $\hat{h} = \text{id} + \bar{h}$ в уравнение $\hat{h} = L^{-1} \hat{h} \circ \hat{G}$:

$$(\text{id} + \bar{h}) = L^{-1} \circ (\text{id} + \bar{h}) \circ (L + \bar{g}).$$

После раскрытия скобок и сокращения одинаковых слагаемых, получим

$$\bar{h} = L^{-1} \circ \bar{g} + L^{-1} \circ \bar{h} \circ (L + \bar{g}) = \mathcal{F}(\bar{h}).$$

Так как мы ищем h близкое к id , то отображение \bar{h} будем искать близким к нулю в пространстве $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

К сожалению, оператор \mathcal{F} не является сжимающим. Поэтому доказывать существование неподвижной точки придется немного сложнее. Мы покажем, как это можно сделать, на следующей лекции.

Лекция 9

Структурная устойчивость линейного диффеоморфизма Аносова. Продолжение доказательства.

Напомним, что диффеоморфизмом Аносова мы называли оператор $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, задающийся матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, $F(x, y) = (\{2x + y\}, \{x + y\})$. Матрица A имеет вещественные собственные значения $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$. Обозначим соответствующие им собственные векторы через v_1 и v_2 .

На прошлой лекции мы начали доказательство структурной устойчивости F в классе $C^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$. Для завершения доказательства нам осталось построить два непрерывных сюръективных полусопряжения h, \tilde{h} , что $h \circ G = F \circ h$ и $G \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ F$, причем h и \tilde{h} близки к тождественному отображению.

Мы показали, что линейный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданный матрицей A , является поднятием диффеоморфизма F . Обозначим через \hat{G} такое поднятие диффеоморфизма G , что $\hat{G}(x, y) = G(x, y)$ при $((x, y) \in [0, 1) \times [0, 1))$. Тогда отображение $\bar{g} = \hat{G} - L$ близко к нулю в пространстве $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ и периодически по каждому аргументу.

Построение первого полусопряжения.

Построим такое непрерывное сюръективное $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что $h \circ G = F \circ h$ и $\rho(h, \text{id}) < \delta$ для некоторого малого числа $\delta > 0$.

Пусть \hat{h} – поднятие отображения h . Так как из равенства $\hat{h} \circ \hat{G} = L \circ \hat{h}$ следует равенство $h \circ G = F \circ h$, то нам достаточно найти \hat{h} . Обозначим $\bar{h} = \hat{h} - \text{id}$ – непрерывная периодическая по каждому аргументу функция. Подставим выражения $\hat{G} = L + \bar{g}$ и $\hat{h} = \text{id} + \bar{h}$ в уравнение $\hat{h} = L^{-1} \hat{h} \circ \hat{G}$:

$$(\text{id} + \bar{h}) = L^{-1} \circ (\text{id} + \bar{h}) \circ (L + \bar{g}).$$

После раскрытия скобок и сокращения одинаковых слагаемых, получим

$$\bar{h} = L^{-1} \circ \bar{g} + L^{-1} \circ \bar{h} \circ (L + \bar{g}) = \mathcal{F}(\bar{h}). \quad (9.1)$$

Так как мы ищем h близкое к id , то отображение \bar{h} будем искать близким к нулю в пространстве $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Заметим также, что отсюда следует сюръективность h , так как \bar{h} ограничена на \mathbb{R}^2 .

Оператор \mathcal{F} , к сожалению, не является сжимающим.

Пусть $\bar{h} = (h_1, h_2)$ в базисе v_1, v_2 , т.е. $\bar{h}(x, y) = h_1(x, y)v_1 + h_2(x, y)v_2$. Аналогично $\bar{g} = (g_1, g_2)$ в базисе v_1, v_2 . Тогда уравнение (9.1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} h_1 = \lambda_1^{-1} g_1 + \lambda_1^{-1} h_1 \circ (L + \bar{g}) = \mathcal{F}_1(h_1); \\ h_2 = \lambda_2^{-1} g_2 + \lambda_2^{-1} h_2 \circ (L + \bar{g}) = \mathcal{F}_2(h_2). \end{cases} \quad (9.2)$$

Решение первого уравнения.

Покажем, что оператор $\mathcal{F}_1 : D \rightarrow D$ является сжимающим на пространстве $D \subset C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ непрерывных функций с периодом 1 по каждому аргументу. Пусть $a, b \in D$, тогда

$$\rho(\mathcal{F}_1(a), \mathcal{F}_1(b)) = \rho(\lambda_1^{-1}a \circ (L + \bar{g}), \lambda_1^{-1}b \circ (L + \bar{g})) = \lambda_1^{-1}\rho(a, b).$$

Так как $\lambda_1^{-1} < 1$, то \mathcal{F}_1 , действительно, сжимает. Поэтому, по принципу сжимающих отображений, существует и единственная неподвижная точка $\mathcal{F}_1(h_1) = h_1$.

Проверим, насколько h_1 близко к нулю. Так как к неподвижной точке h_1 сходятся итерации любой точки из D , то, в частности, $h_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_1^n(0)$. Пользуясь представ-

лением $\mathcal{F}_1^n(0) = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathcal{F}_1^{i+1}(0) - \mathcal{F}_1^i(0))$, имеем $h_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{F}_1^{i+1}(0) - \mathcal{F}_1^i(0))$. Тогда

$$|h_1| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\mathcal{F}_1^{i+1}(0) - \mathcal{F}_1^i(0)| = |\mathcal{F}_1(0)| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^{-n} = \lambda_1^{-1}|g_1| \frac{1}{1 - \lambda_1^{-1}} = \frac{1}{\lambda_1 - 1}|g_1|.$$

Таким образом, если G достаточно близко к F , то $|h_1|$ достаточно близко к нулю.

Решение второго уравнения. Умножим обе части второго уравнения системы (9.2) на λ_2 , получим уравнение

$$\lambda_2 h_2 = g_2 + h_2 \circ (L + \bar{g}).$$

Далее применим к обеим частям слева оператор $\hat{G}^{-1} = (L + \bar{g})^{-1}$. Получим

$$\lambda_2 h_2 \circ \hat{G}^{-1} = g_2 \circ \hat{G}^{-1} + h_2.$$

Выражая h_2 , имеем

$$h_2 = -g_2 \circ \hat{G}^{-1} + \lambda_2 h_2 \circ \hat{G}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}(h_2).$$

Т.к. $|\lambda_2| < 1$, оператор $\tilde{\mathcal{F}}$ является сжимающим на пространстве $D \subset C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ непрерывных функций с периодом 1. Поэтому существует и единственная неподвижная точка $h_2 \in D$. Можно убедиться, что норма функция $|h_2|$ в $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ достаточно мала, если норма $|g_2|$ достаточно мала. Оценить $|h_2|$ можно аналогично тому, как мы оценивали $|h_1|$.

Построение второго полусопряжения.

Построим такое непрерывное сюръективное $\tilde{h} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что $G \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ F$ и $\rho(\tilde{h}, \text{id}) < \delta$ для некоторого малого числа $\delta > 0$.

Пусть \hat{h} – поднятие отображения \tilde{h} . Так как из равенства $\hat{G} \circ \hat{h} = \hat{h} \circ L$ следует равенство $G \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ F$, то нам достаточно найти \hat{h} . Обозначим $\bar{h} = \hat{h} - \text{id}$. Подставим выражения $\hat{G} = L + \bar{g}$ и $\hat{h} = \text{id} + \bar{h}$ в уравнение $\hat{G} \circ \hat{h} = \hat{h} \circ L$:

$$(L + \bar{g}) \circ (\text{id} + \bar{h}) = (\text{id} + \bar{h}) \circ L.$$

После раскрытия скобок и сокращения одинаковых слагаемых, получим

$$\bar{g} \circ (\text{id} + \bar{h}) = \bar{h} \circ L - L \circ \bar{h}. \quad (9.3)$$

Так как мы ищем \tilde{h} близкое к id , то отображение \bar{h} будем искать близким к нулю в пространстве $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Заметим также, что отсюда следует сюръективность \tilde{h} , так как \bar{h} ограничена на \mathbb{R}^2 .

Обозначим $T(\bar{h}) = \bar{g} \circ (\text{id} + \bar{h})$ и $\mathcal{L}(\bar{h}) = \bar{h} \circ L - L \circ \bar{h}$.

Пусть $\bar{h} = (h_1, h_2)$ в базисе v_1, v_2 , т.е. $\bar{h}(x, y) = h_1(x, y)v_1 + h_2(x, y)v_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{h} \circ L &= (h_1 \circ L)v_1 + (h_2 \circ L)v_2; \\ L \circ \bar{h} &= L(h_1v_1 + h_2v_2) = \lambda_1 h_1 v_1 + \lambda_2 h_2 v_2.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{L}(\bar{h}) = (h_1 \circ L - \lambda_1 h_1)v_1 + (h_2 \circ L - \lambda_2 h_2)v_2 = \mathcal{L}_1(h_1)v_1 + \mathcal{L}_2(h_2)v_2,$$

где $\mathcal{L}_1(h_1) = h_1 \circ L - \lambda_1 h_1$ и $\mathcal{L}_2(h_2) = h_2 \circ L - \lambda_2 h_2$.

Покажем, что оператор \mathcal{L}_1 имеет обратный $\mathcal{L}_1^{-1}(h_1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{-n-1}(h_1 \circ L^n)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1^{-1}(h_1)) &= \mathcal{L}_1^{-1}(h_1) \circ L - \lambda_1 \mathcal{L}_1^{-1}(h_1) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{-n-1}(h_1 \circ L^{n+1}) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{-n}(h_1 \circ L^n) = h_1.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что \mathcal{L}_2 имеет обратный $\mathcal{L}_2^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_2^n(h_2 \circ L^{-n-1})$. Из обратимости операторов \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 следует обратимость оператора \mathcal{L} . Тогда уравнение (9.3) эквивалентно следующему

$$\bar{h} = \mathcal{L}^{-1} \circ T(\bar{h}).$$

Покажем, что оператор $\mathcal{F} = \mathcal{L}^{-1} \circ T$ является сжимающим на пространстве $D^2 \subset C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ непрерывных функций с периодом 1 по каждому аргументу. Пусть $a, b \in D^2$, тогда

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(b)\| &\leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \|T(a) - T(b)\| \leq \\ &\leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \sup_x \|\bar{g}(x + a(x)) - \bar{g}(x + b(x))\| \leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \sup_x \|D_x \bar{g}\| \|a - b\|.\end{aligned}$$

Так как отображение \bar{g} мало в C^1 -метрике, то число $\|\mathcal{L}^{-1}\| \sup_x \|D_x \bar{g}\|$ меньше 1. Значит, когда G достаточно близко к F , отображение \mathcal{F} сжимающее, и потому имеет единственную неподвижную точку $\bar{h} \in D^2$. Можно показать, что отображение \bar{h} достаточно близко к нулю в пространстве $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ аналогично тому, как мы делали при построении первого полусопряжения.

Упрощённое выражение для спиральности.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ – область, граница ∂M которой есть гладкая поверхность. Пусть ξ – бездивергентное векторное поле в \mathbb{R}^3 . Мы предполагаем, что ξ касается границы ∂M области, т.е. $\forall x \in \partial M$ выполнено $\xi(x) \in T_x \partial M$.

На прошлых лекциях мы ввели понятие спиральности $H(\xi)$ векторного поля ξ и доказали корректность этого определения. Сейчас мы рассмотрим более простое выражение для подсчета спиральности.

Мы установили, что

$$H(\xi) = \int_M \int_M \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где

$$\varphi(x_1, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\dot{X}_1(t_1); \dot{X}_2(t_2); X_1(t_1) - X_2(t_2))}{\|X_1(t_1) - X_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2.$$

Похожими рассуждениями (мы не будем вдаваться в подробности) можно получить

$$H(\xi) = \int_M \int_M \frac{(\xi(x_1), \xi(x_2), (x_1 - x_2))}{\|x_1 - x_2\|^3} dx_1 dx_2.$$

Так как ξ – бездивергентное векторное поле, то оно является ротором некоторого другого поля A , которое можно определить по формуле Био-Савара (это частный случай так называемого разложения Гельмгольца):

$$A(x_1) = \int_M \frac{[\xi(x_2), x_1 - x_2]}{\|x_1 - x_2\|^3} dx_2.$$

Поскольку $\operatorname{rot} A = \xi$, пишут, что $A = \operatorname{rot}^{-1} \xi$. В этих обозначениях спиральность можно выразить совсем просто:

$$H(\xi) = \int_M \langle \xi(x), \operatorname{rot}^{-1} \xi(x) \rangle dx.$$

Аттракторы.

Понятие аттрактора пришло из физики и долгое время оставалось чисто интуитивным. Когда встал вопрос о строгой формализации, оказалось, что можно ввести много разумных неэквивалентных определений аттрактора. Мы рассмотрим несколько из них.

Пусть X – топологическое пространство, $f : X \rightarrow X$ – отображение.

Определение 9.1. Область $U \subset X$ называется поглощающей для f , если $\operatorname{Cl}(f(U)) \subset U$.

Определение 9.2. Пусть U – поглощающая область для f . Тогда максимальным аттрактором $A_{\max, U}$ для U называют множество $A_{\max, U} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U)$.

Утверждение 9.1. Пусть $X = M$ – гладкое многообразие. Если U – ограниченная поглощающая область, то множество $A_{\max, U}$ компактно и непусто.

Пусть X – топологическое пространство с борелевской мерой μ , $f : X \rightarrow X$ – измеримое отображение.

Определение 9.3. *Аттрактором Милнора A_m отображения f называют минимальное по вложению замкнутое множество, содержащее ω -предельное множество п.в. точек X относительно меры μ .*

Теорема 9.1 (Милнора). *Пусть $X = M$ – замкнутое многообразие, а $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Тогда аттрактор Милнора существует.*

Рассмотрим несколько примеров. В качестве меры μ будем рассматривать меру Лебега.

Пример 9.1. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – северо-южное отображение окружности. Тогда, очевидно, аттрактор Милнора равен южному полюсу $A_m = \{S\}$. Ясно, что поглощающей областью является окрестность U точки S , откуда $A_{\max, U} = \{S\}$.

Пример 9.2. Пусть $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – линейный диффеоморфизм Аносова. Мы доказывали, что F является перемешивающим, откуда следует его эргодичность, откуда следует, что орбиты п.в. точек всюду плотны. Отсюда следует, что $A_m = \mathbb{T}^2$. В качестве поглощающей области U подходит только сам тор, и $A_{\max, U} = \mathbb{T}^2$.

Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий разницу двух определений аттрактора.

Пример 9.3. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано в полярных координатах (φ, r) следующим образом: $f((\varphi, r)) = (SN(\varphi), 1 + \frac{1}{2}(r - 1))$, где $SN : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – северо-южное отображение. Тогда окружности любого радиуса стягиваются к окружности \mathbb{S}^1_1 единичного радиуса, при этом точки на окружностях двигаются от северного полюса к южному (рис. 9.1). Таким образом, $A_m = \{S\}$. Однако максимальный аттрактор сильно зависит от выбора поглощающей области. Если U – окрестность S , то $A_{\max, U} = A_m = \{S\}$. Однако в качестве U можно взять окрестность единичной окружности \mathbb{S}^1_1 , и тогда $A_{\max, U} = \mathbb{S}^1_1$.

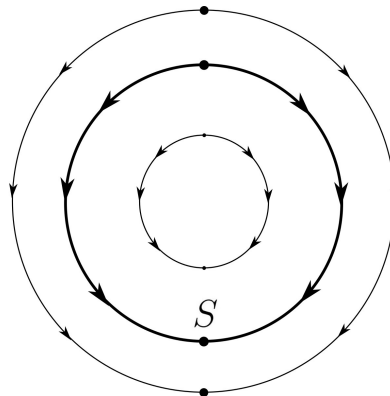


Рис. 9.1. Примерный вид отображения f из примера 9.3.

Неблуждающая точка.

Пусть X – топологическое пространство, $f : X \rightarrow X$ – отображение.

Определение 9.4. Точка $x \in X$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности $V \subset X$ точки x и для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $y \in V$ и $n > N$, что $f^n(y) \in V$.

Ясно, что, например, любая периодическая точка x является неблуждающей, так как всегда можно положить $y = x$.

Определение 9.5. *Неблуждающее множество отображения f – это множество всех его неблуждающих точек. Обозначение NW (non-wandering).*

Пример 9.4. Рассмотрим окрестность особой точки типа фокус. Тогда блуждающим множеством отображения потока (за время 1) является только сама неподвижная точка.

Пример 9.5. Рассмотрим поворот окружности на угол α . Тогда для любого α множество неблуждающих точек совпадает со всей окружностью.

Обычно наиболее нетривиальные явления динамических систем сосредоточены именно на неблуждающих множествах. Поэтому неблуждающие точки так интересны для изучения. К примеру, можно сформулировать явный критерий структурной устойчивости отображения в терминах неблуждающих множеств. Сформулируем это утверждение пока что не очень формально. Мы уточним формулировку на следующей лекции.

Пусть M – замкнутое многообразие, $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Отображение f структурно устойчиво тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия

- 1) Все периодические точки f являются гиперболическими;
- 2) Отсутствуют касания устойчивого и неустойчивого многообразий периодических точек;
- 3) Периодические орбиты всюду плотны в неблуждающем множестве.

Несложно проверить, что данный критерий выполнен для линейного диффеоморфизма Аносова, что влечет его структурную устойчивость. Однако, доказательство самого критерия довольно сложно и выходит за рамки программы нашего курса.

Лекция 10

Гиперболическое множество. Устойчивое и неустойчивое многообразие.

Пусть M – замкнутое многообразие, $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм.

Определение 10.1. *Инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется гиперболическим множеством f , если имеет место разложение в прямую сумму, так называемых, полей плоскостей или распределений: $T\Lambda = E^s \oplus E^u$. То есть, $\forall x \in \Lambda$ верно $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$, где E_x^s и E_x^u – инвариантные подпространства $T_x M$, непрерывно зависящие от точки x . При этом, существуют константы $C > 0$, $0 < \lambda < 1$, что при $n \in \mathbb{N}$ верно $\|Df^n|_{E^s}\| < C\lambda^n$ и $\|Df^{-n}|_{E^u}\| < C\lambda^n$. Распределение E^s называют устойчивым, а E^u неустойчивым.*

Пример 10.1. Мы строили отображение f подковы Смейла, которое действовало на инвариантном множестве $\Lambda = K_1 \times K_2$, где K_i – канторовские множества. Само множество Λ и есть гиперболическое множество для f : в каждой точке $x \in \Lambda$ дифференциал $D_x f$ растягивает по вертикали и сжимает по горизонтали.

Пример 10.2. Пусть $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – линейный диффеоморфизм Аносова. Тогда гиперболическим множеством является весь тор \mathbb{T}^2 , так как в каждой точке отображение F растягивает вдоль одного собственного вектора и сжимает вдоль другого.

Понятие гиперболического множества и пример 10.2 позволяют нам сформулировать общее определение диффеоморфизма Аносова (не обязательно линейного).

Определение 10.2. *Пусть M – замкнутое многообразие. Диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ называется диффеоморфизмом Аносова, если M – гиперболическое множество для f .*

Распределения E^s , E^u для гладких динамических систем обычно являются интегрируемыми. Таким образом, распределения порождают интегральные устойчивое многообразие W^s и неустойчивое многообразие W^u соответственно. Данные многообразия также называют устойчивым и неустойчивым слоями. Гладкость W^s , W^u тем выше, чем выше гладкость отображения f . Например, для бесконечно гладкого f многообразия W^s , W^u также бесконечно гладкие, а для аналитического f – аналитические.

Локально максимальные гиперболические множества.

Определение 10.3. *Локально максимальное гиперболическое множество Λ – это такое гиперболическое множество $\Lambda \subset M$, что существует окрестность $\Lambda \subset U$, что $\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(U)$.*

Определение 10.4. *Если U – поглощающая область, и $\Lambda = \bigcap_{k=0}^{+\infty} f^k(U)$ (т.е. Λ – максимальный аттрактор U), то множество Λ называется притягивающим.*

Пусть M – замкнутое многообразие, $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм.

На прошлой лекции мы определили неблуждающее множество NW отображения f . Ясно, что все периодические точки f являются неблуждающими. Также ω -предельные множество любой орбиты лежат в неблуждающем множестве. Отсюда следует, что множество неблуждающих точек непусто (так как ω -предельное множество любой точки непусто на метризуемом компакте.)

Несколько полезных утверждений приведем без доказательства.

Утверждение 10.1. Пусть Λ – локально максимальное гиперболическое множество. Тогда периодические точки отображения f плотны в $NW(f|_{\Lambda})$ (неблуждающая часть множества Λ).

Утверждение 10.2. Пусть Λ – компактное локально максимальное гиперболическое множество. Тогда Λ обладает локальной структурой прямого произведения.

Под локальной структурой прямого произведения подразумевается существование $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых выполнены следующие три утверждения. Пусть $B_{\varepsilon} \subset M$ – шар радиуса ε . Тогда

- 1) Для любых $x, y \in B_{\varepsilon} \cap \Lambda$ множество $Z = W^s(x) \cap W^u(y) \cap B_{\varepsilon}$ состоит из не более чем одной точки.
- 2) При условии, что расстояние между x и y меньше δ , множество Z состоит ровно из одной точки.
- 3) Единственная точка множества Z принадлежит Λ .

На интуитивном уровне утверждение 10.2 означает, что все компактные локально максимальные гиперболические множества устроены одинаково и напоминают подкову Смейла.

Критерий структурной устойчивости.

Пусть M – замкнутое многообразие, $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм.

Определение 10.5. Говорят, что f удовлетворяет аксиоме A , если

- $NW = \sqcup \Lambda_i$, где Λ_i – компактное гиперболическое множество f .
- Периодические орбиты f всюду плотны в NW .

Если отображение f обладает аксиомой A , то устойчивый и неустойчивый слой можно определить следующим эквивалентным образом

$$W^s(z) = \{z' \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(f^n(z), f^n(z')) = 0\},$$

$$W^u(z) = \{z' \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} \rho(f^n(z), f^n(z')) = 0\},$$

где $W^s(z)$, $W^u(z)$ – устойчивое и неустойчивое многообразия, проходящие через гиперболическую точку z .

Определение 10.6. Говорят, что f сильно трансверсально, если для любой гиперболической точки z устойчивый $W^s(z)$ и неустойчивый $W^u(z)$ слои пересекаются трансверсально, т.е. $T_z W^s \oplus T_z W^u = T_z M$.

Теорема 10.1 (Робинсон, Мане). Диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ структурно устойчив в классе C^1 тогда и только тогда, когда f обладает двумя свойствами:

- 1) Аксиома A .
- 2) Сильная трансверсальность.

Пример 10.3. Пусть $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – линейный диффеоморфизм Аносова. Мы знаем, что периодические точки всюду плотны в \mathbb{T}^2 . Тогда $NW = \mathbb{T}^2$ и, кроме того, \mathbb{T}^2 – гиперболическое множество для F . Отсюда следует, что для F выполнена аксиома A . Сильная трансверсальность тоже выполнена, так как устойчивый и неустойчивый слои касаются собственных векторов, а потому пересекаются под углом $\pi/2$.

Пример 10.4. Неблуждающее множество любого поворота совпадает с самой окружностью. Иррациональный поворот не имеет периодических орбит, и поэтому они не могут быть всюду плотны. Для рационального поворота все точки периодические, однако не являются гиперболическими. Так как аксиома A не выполнена, поворот окружности структурно неустойчив.

Пример Смейла: открытое множество не структурно устойчивых отображений.

Рассмотрим пример Смейла, иллюстрирующий, что множество структурно устойчивых отображений не всюду плотно. Для этого мы построим открытое множество структурно не устойчивых отображений. Дальнейшие рассуждения нужно воспринимать как эскиз доказательства, так как строгие выводы были бы достаточно обременительны, хотя геометрические соображения интуитивно понятны.

Пусть M – компактное трехмерное многообразие (например, $M = S^3$). Пусть $\mathbb{T}^2 \subset M$ – некоторый тор. От диффеоморфизма $f : M \rightarrow M$ потребуем следующие условия.

Пусть ограничение $f|_{\mathbb{T}^2}$ совпадает с линейным диффеоморфизмом Аносова. При этом, тор \mathbb{T}^2 является максимальным аттрактором для некоторой своей окрестности U , являющейся поглощающей областью. Мы знаем, что для любой точки на торе есть одномерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия относительно линейного диффеоморфизма Аносова. Если же смотреть на динамическую систему в трехмерном пространстве относительно f , мы получим для каждой точки $x \in \mathbb{T}^2$ устойчивое двумерное многообразие $W^s(x)$ и одномерное неустойчивое многообразие.

Пусть имеется $s \in M \setminus \text{Cl}(U)$ – такая седловая точка f , что $W^u(s)$ одномерно, и $W^s(s)$ двумерно. Кроме того, мы предполагаем, что одномерное $W^u(s)$ касается некоторого двумерного слоя $W^s(x)$ над $x \in \mathbb{T}^2$ в точке y , образуя, так называемый, крючок (рис. 10.1). В остальном выбор диффеоморфизма f произволен.

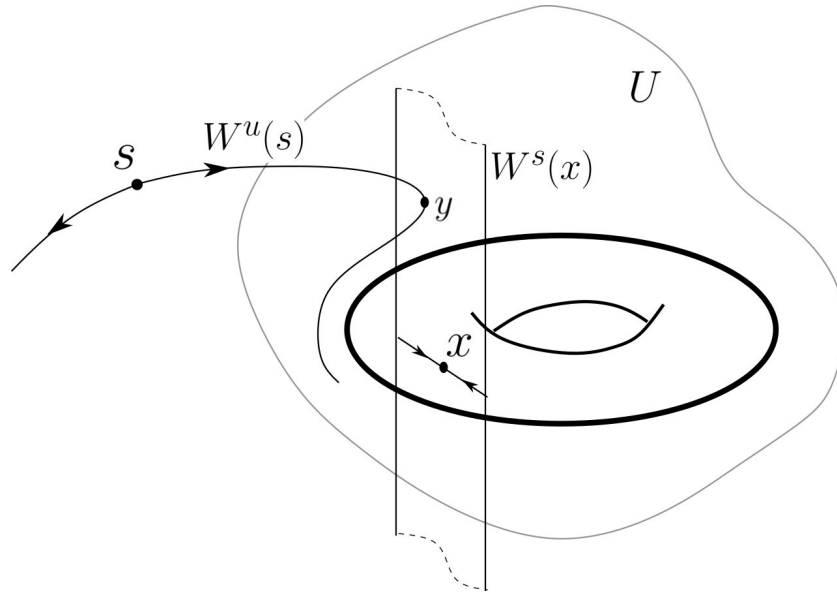


Рис. 10.1. Пример Смейла открытого множества структурно не устойчивых диффеоморфизмов.

Пусть f_O – диффеоморфизм с вышеописанными свойствами и дополнительным условием, что касание происходит в слое над $x = O$, где $O = (0, 0) \in \mathbb{T}^2$ – неподвижная точка диффеоморфизма Аносова. Покажем, что f_O не может быть структурно устойчивым. Действительно, пусть g – близкий к f_O диффеоморфизм. Так как седловая точка и диффеоморфизм Аносова структурно устойчивы, то g обладает теми же самыми свойствами: имеет седловую точку \tilde{s} , близкую к s , и одномерное неустойчивое многообразие $W^u(\tilde{s})$ касается некоторого двумерного слоя $W^s(\tilde{x})$, где точка \tilde{x} близка к O .

Обозначим точку касания через $\tilde{y} \in W^u(\tilde{s}) \cap W^s(\tilde{x})$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(\tilde{y}) = \tilde{x}$. Если $g = h \circ f_O \circ h^{-1}$ для некоторого гомеоморфизма $h : M \rightarrow M$, то \tilde{x} должна быть неподвижной точкой для g (так как касающийся слой топологически выделен). Но с другой стороны, мы можем возмутить f_O только в окрестности седла s , сделав касание над точкой \tilde{x} , которая не обязательно неподвижна. Противоречие.

Совершенно аналогичное рассуждение можно провести для диффеоморфизма f_p , для которого многообразие $W^u(s)$ касается слоя $W^s(p)$ над периодической точкой p . С одной стороны, близкий топологически сопряженный с f_p диффеоморфизм должен иметь касание соответствующих многообразий снова в своей периодической точке того же периода. Но с другой стороны, можно возмутить f_p только в окрестности седла и сместить точку касания p в непериодическую. Следовательно, диффеоморфизм f_p не является структурно устойчивым.

Рассмотрим малую окрестность $U(f_O)$ диффеоморфизма f_O и покажем, что любой диффеоморфизм $g \in U(f_O)$ структурно неустойчив. Возьмем любую окрестность $V(g) \subset U(f_O)$ отображения g . Так как множество периодических точек диффеоморфизма Аносова всюду плотно, то найдется $\hat{g} \in V(g)$ с касанием в слое над периодической точкой. По доказанному выше, \hat{g} не структурно устойчиво, т.е. най-

дется $\bar{g} \in V(g)$ не сопряженный \hat{g} . Но тогда и g не является структурно устойчивым, иначе все отображения из достаточно малой окрестности были бы ему сопряжены, а потому сопряжены и между собой.

Таким образом, малая окрестность $U(f_0)$ является открытым множеством структурно не устойчивых диффеоморфизмов.

Типичность.

Пусть X – топологическое пространство.

Определение 10.7. Множество $Y \subset X$ называется остаточным в X если $Y \supset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, где $A_k \subset X$ – открытые всюду плотные в X .

Определение 10.8. Пусть $U \subset X$ – открытое множество. Множество $Y \subset U$ называется локально остаточным в U если $Y \supset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, где $A_k \subset U$ – открытые всюду плотные в U .

Определение 10.9. Говорят, что свойство типично (или X -типично), если оно выполнено на некотором остаточном множестве.

Определение 10.10. Говорят, что свойство локально типично, если оно выполнено на некотором локально остаточном множестве Y . Т.е., существует открытое $U \subset X$, что Y – локально остаточно в U .

Пример 10.5. Пусть $X = \mathbb{R}$. Тогда множество Y всех иррациональных чисел остаточно в X , т.к. в качестве A_k можно взять $\mathbb{R} \setminus \{p_k\}$, где $p_k \in \mathbb{Q}$.

Определение 10.11. Отображение $f \in X$, где X – некоторое функциональное пространство, называется типичным, если оно принадлежит некоторому остаточному множеству $Y \subset X$.

Утверждение 10.3. Пусть $X = C^1(M, M)$, где M – компактное многообразие. Тогда типичное $f \in X$ имеет только гиперболические периодические точки.

Данное предложение оставляем без доказательства. Интуитивно понятно, что малыми возмущениями можно сместить собственные значения с единичной окружности, хотя это требует более строгих рассуждений.

Гомоклинический класс. Ручные и дикие диффеоморфизмы.

Напомним понятие гомоклинического класса.

Пусть $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Пусть $s_1, s_2 \in M$ две седловые точки f . Пусть $W^s(s_1)$ и $W^u(s_1)$ – глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки s_1 , а $W^s(s_2)$ и $W^u(s_2)$ – глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки s_2 . Предположим, что $W^s(s_1)$ трансверсально пересекается с $W^u(s_2)$ и $W^u(s_1)$ трансверсально пересекается с $W^s(s_2)$. Такая ситуация называется гетероклиническим пересечением.

Введем отношение эквивалентности на седловых точках отображения f . А именно, два седла являются эквивалентными, если между ними имеет место гетероклиническое пересечение. Замыкание класса эквивалентности называется гомоклиническим классом. Обозначение $HCl(s)$ – гомоклинический класс седла s .

Утверждение 10.4. *Неблуждающее множество NW типичного диффеоморфизма $f \in \text{Diff}(M, M)$ есть объединение по всем гомоклиническим классам $NW = \sqcup HCl_i$. Более того, любой класс HCl_i транзитивен (т.е. ограничение $f|_{HCl_i}$ топологически транзитивно).*

Подобное разложение называется разложением на максимальные транзитивные компоненты.

Определение 10.12. *Диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ называется ручным (tame), если число гомоклинических классов конечно. Иначе диффеоморфизм называется диким (wild).*

Опровержение гипотезы Тома.

Долгое время специалистов по динамическим системам мучил вопрос о существовании диких диффеоморфизмов. Еще на заре теории была предложена следующая гипотеза, формулирующая, на самом деле, тот же самый вопрос.

Гипотеза 10.1 (Том). *У типичного диффеоморфизма конечное число притягивающих орбит.*

Данная гипотеза была опровергнута (Ньюхаус, Шильников). Так как притягивающая орбита порождает гомоклинический класс, то построенные контрпримеры как раз иллюстрируют дикую динамику.

Рассмотрим очень схематично идею Ньюхауса. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – диффеоморфизм, и $s \in \mathbb{R}^2$ – его седло. Ситуация, когда $W^s(s)$ касается $W^u(s)$ называется гомоклиническим касанием (рис.10.2). Если у диффеоморфизма f имеется одно изолированное седло, то малым возмущением гомоклиническое касание легко либо разомкнуть, либо перевести в гомоклиническое пересечение (рис. 10.3). Однако ситуация осложняется, если седло s является частью канторовского множества седел диффеоморфизма f : возмущение, размыкающее одно седло, создаёт касание другого седла. Ньюхаус показал, что диффеоморфизмы с подобной картиной расположения седел локально плотны. Далее было показано, что при размыкании гомоклинического касания в области размыкания порождается сильное притяжение, т.е. возникает притягивающая орбита. Таким образом, ввиду локальной плотности, для типичного отображения малым возмущением можно породить бесконечное число притягивающих орбит.

Следует отметить, что Ньюхаус работал с C^2 -гладкими диффеоморфизмами. Пример же C^1 -гладкого дикого диффеоморфизма на плоскости до сих пор неизвестен.

Поведение ручной динамической системы.

Пусть $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм.

Определение 10.13. *Гомоклинический класс HCl называется притягивающим, если существует окрестность $U \subset M$ этого класса, что $HCl = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(U)$, т.е. HCl – максимальный аттрактор своей окрестности.*

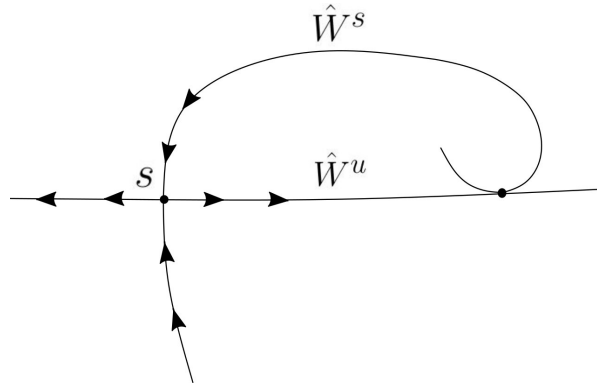


Рис. 10.2. Гомоклиническое касание.

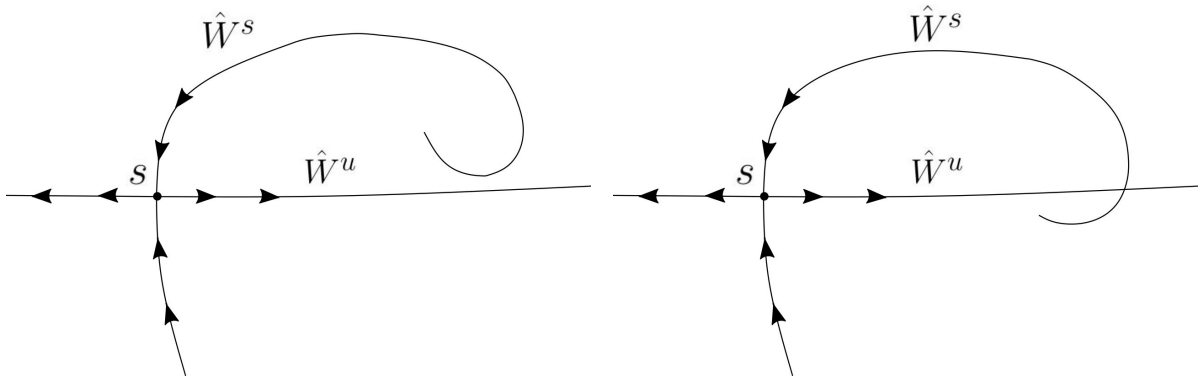


Рис. 10.3. Возмущения гомоклинического касания.

Теорема 10.2 (Carballo, Morales). *Для типичного ручного C^1 -диффеоморфизма f существует открытое всюду плотное в M множество V , что для любой точки $x \in V$ найдется нигде не плотный притягивающий гомоклинический класс HCl , что $\omega(x) \in HCl$.*

Всё еще остается открытым вопрос, можно ли выбрать множество V полной меры (по Лебегу).

Универсальная динамика.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутый единичный шар. Обозначим через $\text{Diff}^+(\mathbb{R}^n)$ множество таких диффеоморфизмов f шара B , что f сохраняет ориентацию и $f(B) \subset \text{int}(B)$. Пусть $\mathcal{O} \subset \text{Diff}^+(\mathbb{R}^n)$ – некоторое открытое множество.

Определение 10.14. *Диффеоморфизм $g : M \rightarrow M$ обладает свойством универсальной динамики, если существует диск $D \subset M$ и число $n \in \mathbb{N}$, что $g^n(\text{Cl}(D)) \subset D$, причем все $g^i(D)$ не пересекаются при $0 \leq i \leq n$, а отображение $g^n|_D$ гладко сопряжено некоторому диффеоморфизму $f \in \mathcal{O}$.*

Пусть $\text{Diff}^1(M, M)$ – множество C^1 -гладких диффеоморфизмов M .

Теорема 10.3 (Bonatti, Diaz). *Существует $\text{Diff}^1(M, M)$ -типичное множество диких диффеоморфизмов с универсальной динамикой.*

Классификация динамических систем.

Таким образом, динамические системы делятся на ручные и дикие. При этом, универсальная динамика присуща только диким диффеоморфизмам, а структурно устойчивы могут быть только ручные диффеоморфизмы (рис. 10.4).

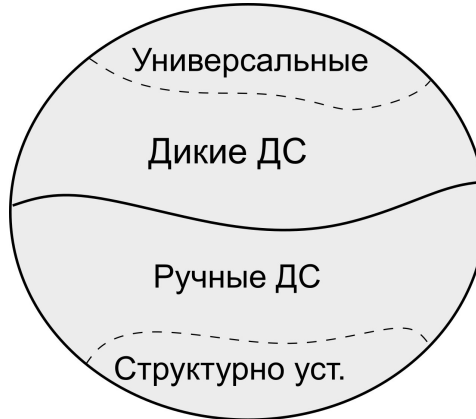


Рис. 10.4. Классификация динамических систем.

Для более глубокого изучения данной тематики рекомендуется книга Bonatti, Díaz, Viana «Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity».

Метрические свойства гиперболических множеств.

Теорема 10.4 (Боуэн, Синай, Рюэлль). Пусть $f : M \rightarrow M$ — C^2 -гладкий диффеоморфизм, а Λ — локально максимальное гиперболическое множество с поглощающей окрестностью U (т.е. $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U)$). Тогда существует f -инвариантная вероятностная борелевская мера μ на Λ , что

- 1) На неустойчивых многообразиях условные меры абсолютно непрерывны.
- 2) Для всякой непрерывной функции $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ для п.в. точек $x \in U$ по мере Лебега выполнено

$$A_{n,\varphi}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \rightarrow \int \varphi d\mu.$$

Такая мера μ называется *SRB-мерой*. В частности, носитель $\text{supp } \mu = \Lambda$.

Теорема 10.5 (Bonatti, Минков, Окунев, Шилин). Существует C^1 -гладкий диффеоморфизм Аносова $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, что для п.в. точек $x \in \mathbb{T}^2$ выполнено $\omega(x) = \mathcal{H}$, где \mathcal{H} — некоторая фиксированная подкова. При этом, на множестве \mathcal{H} существует *SRB-мера*.

Под подковой \mathcal{H} подразумевается инвариантное множество, гомеоморфное произведению двух канторовских, что $f|_{\mathcal{H}}$ — отображение подковы Смейла.

Лекция 11

Формальная и аналитическая эквивалентности. Нормальная форма.

На этой лекции мы будем рассматривать отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, аналитические в окрестности своей неподвижной точки. Для определенности будем полагать, что начало координат O неподвижно относительно f (т.е. $f(O) = O$) и отображение f аналитично в некоторой окрестности O .

Рассмотрим два отображения $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с неподвижной точкой O и аналитические в некоторой окрестности O . Введем понятия локальной аналитической эквивалентности.

Определение 11.1. *Отображения f и g аналитически эквивалентны в точке O , если существует такой аналитический диффеоморфизм h с неподвижной точкой O , что в достаточно малой окрестности O выполнено равенство $f \circ h = h \circ g$.*

Замечание 11.1. В определении 11.1, конечно, подразумевается, что отображение h определено в такой окрестности точки O , что равенство $f \circ h = h \circ g$ имеет смысл. Мы опустим строгую формализацию областей определения и значения для отображения h , которые интуитивно понятны. Читатели, знакомые с понятием ростка функции, могут воспринимать данное определение как определение аналитической эквивалентности ростков в точке O .

Изучение классов эквивалентности очень важно, так как эквивалентные отображения имеют ряд одинаковых свойств. Один из вопросов, которыми можно задаться, является поиск наиболее «простой» формы отображения в его классе эквивалентности. Обычно такая форма называется нормальной формой отображения. Это понятие скорее интуитивное и остается без строгого определения. Наша основная цель: сформулировать и доказать теорему о приведении к аналитической нормальной форме, т.е. к наиболее простому виду в классе аналитической эквивалентности. Для этого нам потребуется еще одно (более слабое) определение эквивалентности.

Пусть $\mathbb{R}^n[[x]]$ – множество всех вещественных формальных рядов переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Формальным рядом называется сумма вида $\sum_{k=0}^{+\infty} V_k(x)$, где $V_k(x)$ является вещественным однородным вектор-многочленом степени k переменной x . В отличие от обычных рядов, здесь мы не рассматриваем вопросы сходимости. Тем не менее, формальные ряды можно складывать: суммой является ряд, коэффициенты которого при каждом мономе равны сумме коэффициентов слагаемых рядов при тех же мономах. Аналогично можно умножать формальные ряды на числа, дифференцировать, брать композицию и т.д.

Определение 11.2. *Отображения f и g формально эквивалентны в точке O , если существует такой формальный ряд $h \in \mathbb{R}^n[[x]]$ без свободного члена, что выполнено равенство $f \circ h = h \circ g$, рассматриваемое как равенство для формальных рядов в точке O (в качестве f и g необходимо подставить их разложение в ряд в точке O).*

Ясно, что из аналитической эквивалентности отображений следует их формальная эквивалентность. Т.е., если два отображения не формально эквивалентны, то они и не аналитически эквивалентны. Поэтому мы начнем с поиска формальной нормальной формы, а затем уточним, когда она является аналитической нормальной формой.

Формальная нормальная форма.

Пусть отображение f в окрестности U неподвижной точки O имеет вид:

$$f(x) = Ax + \sum_{k=2}^{+\infty} V_k(x) = Ax + V(x), \quad (11.1)$$

где A – линейный оператор, V_k есть однородный вектор-полином степени k , а $V(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} V_k(x)$.

Можно ли с помощью формальной замены привести f к отображению $\tilde{f}(x) = x$? Следующее утверждение показывает, что это возможно, только если операторы A и id сопряжены.

Утверждение 11.1. Пусть отображения f, g формально эквивалентны в неподвижной точке O . Тогда операторы $d_O f$ и $d_O g$ сопряжены. В частности, операторы $d_O f$ и $d_O g$ имеют одинаковый набор собственных значений.

Доказательство. Пусть аналитический диффеоморфизм $h \in \mathbb{R}^n[[x]]$ такой, что $f \circ h = h \circ g$ и $h(O) = O$. Несложно проверить, что тогда $d_O(f \circ h) = d_O f \circ d_O h$ и $d_O(h \circ g) = d_O h \circ d_O g$, откуда $d_O f = d_O h \circ d_O g \circ (d_O h)^{-1}$. \square

Следующий вопрос: можно ли формальной заменой привести отображение f к виду $\tilde{f}(x) = Ax$? Оказывается, ответ зависит от свойств набора собственных значений оператора A . Для формулировки теоремы нам потребуются следующие определения.

Пусть $\mathbb{R}_{>0}^n = \{v \in \mathbb{R}^n : v_i > 0\}$ и $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n = \{v \in \mathbb{Z}^n : v_i \geq 0\}$. Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ введем обозначение: $\mu^\alpha = \mu_1^{\alpha_1} \cdots \mu_n^{\alpha_n}$.

Определение 11.3. Набор чисел $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ называется мультипликативно резонансным, если существует такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, что

$$1) |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k \geq 2;$$

$$2) \exists i \in \{1, \dots, n\}, \text{ что } \mu_i = \mu^\alpha.$$

Формальная нормальная форма при отсутствии резонансов.

Теорема 11.1. Пусть отображение f имеет вид 11.1. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ – набор собственных значений матрицы A . Тогда, если набор μ НЕ мультипликативно резонансный, то отображение f формально эквивалентно в точке O своей линейной части, т.е. отображению $\tilde{f}(x) = Ax$.

Для доказательства нам потребуются следующие определения.

Определение 11.4. Для $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ через x^α будем обозначать моном от n переменных вида $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Определение 11.5. Для $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ обозначим через $\varphi_{j,\alpha}$ – такой базисный моном, что $\varphi_{j,\alpha}^j = x^\alpha$ и $\varphi_{j,\alpha}^i = 0$ при $i \neq j$.

Доказательство. Мы докажем теорему для случая диагоналируемого оператора A . Доказательство общего случая можно получить, несколько модернизировав предложенное дальше доказательство, но оно опускается ввиду нехватки времени.

Далее все рассуждения будем проводить в базисе из собственных векторов оператора A , обозначая диагональную матрицу оператора тем же символом A .

План доказательства. Будем индуктивно «убивать» слагаемые V_k в разложении отображения f . Сначала мы построим ряд \hat{h}_2 , формально приводящий f к виду $f_2(x) = Ax + o(x^2)$, затем ряд \hat{h}_3 , формально приводящий f_2 к виду $f_3(x) = Ax + o(x^3)$ и т.д. В итоге, мы построим счетное число формальных рядов $\hat{h}_2, \hat{h}_3, \dots$. Композиция $\hat{h}_k \circ \cdots \circ \hat{h}_2$ формально приводит f к виду $f_k = Ax + o(x^k)$.

Важно отметить, что на самом деле мы построим не бесконечные ряды, а многочлены \hat{h}_k вида $\hat{h}_k = \text{id} + h_k$, где h_k – однородный многочлен степени k . Покажем, что из этого следует корректная определенность счетной композиции $h = \cdots \circ \hat{h}_3 \circ \hat{h}_2$ как формального ряда. Действительно, ввиду явного вида \hat{h}_k , для любого j найдется такое N , что все композиции $\hat{h}_k \circ \cdots \circ \hat{h}_2$ при $k \geq N$ имеют одни и те же коэффициенты при мономах степени j . Таким образом, для любого фиксированного монома, мы можем посчитать коэффициент при нём у композиции h за конечное число шагов. Значит h можно рассматривать как формальный ряд. Ясно, что h формально приводит f к виду $\tilde{f}(x) = Ax$. Осталось построить многочлены \hat{h}_k .

Вывод уравнения на h_k . Предположим, что нам уже удалось привести f к виду

$$f(x) = Ax + V_k(x) + o(x^k),$$

где $k \geq 2$, V_k – однородный многочлен степени k .

Найдем сопрягающий многочлен \hat{h}_k такой, что $f \circ \hat{h}_k = \hat{h}_k \circ f_k$, где $f_k = Ax + o(x^k)$. Таким образом, должно быть выполнено

$$f \circ \hat{h}_k = \hat{h}_k \circ (A + o(x^k)). \quad (11.2)$$

Как уже было отмечено выше, многочлен \hat{h}_k мы ищем в виде $\hat{h}_k = \text{id} + h_k$, где h_k есть однородный вектор-многочлен степени k . Поэтому существует \hat{h}_k^{-1} – аналитическое отображение, сохраняющее O . Кроме того, из явного вида \hat{h}_k следует, что $\hat{h}_k \circ (A + o(x^k)) = \hat{h}_k \circ A + o(x^k)$. Несложно видеть, что тогда уравнение (11.2)

эквивалентно уравнению $f \circ \hat{h}_k - \hat{h}_k \circ A = o(x_k)$. Таким образом, нам необходимо и достаточно найти такой многочлен \hat{h}_k , что все члены формального ряда $f \circ \hat{h}_k - \hat{h}_k \circ A$ порядка $\leq k$ равны нулю.

Используя явный вид f и \hat{h}_k , имеем $f \circ \hat{h}_k - \hat{h}_k \circ A = A \circ h_k - h_k \circ A + V_k + o(x^k)$. Тогда наше итоговое уравнение имеет вид:

$$h_k \circ A - A \circ h_k = V_k. \quad (11.3)$$

Решение уравнения на h_k . Обозначим через R_A линейный оператор, действующий на пространстве всех однородных вектор-многочленов степени k по правилу $R_A(\varphi) = \varphi \circ A - A \circ \varphi$.

Так как матрица A диагональна, то $Ax = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n)$. Отсюда получаем $(\varphi_{j,\alpha} \circ A)^j(x) = \mu^\alpha x^\alpha$ и $(\varphi_{j,\alpha} \circ A)^i(x) = 0$ при $i \neq j$. Аналогично имеем $(A \circ \varphi_{j,\alpha})^j(x) = \mu_j x^\alpha$ и $(A \circ \varphi_{j,\alpha})^i(x) = 0$ при $i \neq j$. Итого мы получили $R_A(\varphi_{j,\alpha})^j(x) = (\mu^\alpha - \mu_j)x^\alpha$ и $R_A(\varphi_{j,\alpha})^i(x) = 0$ при $i \neq j$. Другими словами, $R_A(\varphi_{j,\alpha}) = (\mu^\alpha - \mu_j)\varphi_{j,\alpha}$, т.е. оператор R_A диагональный.

Так как набор (μ_1, \dots, μ_n) не резонансный, то диагональный оператор R_A обратим. Значит уравнение 11.3 имеет и единственное решение $h_k = R_A^{-1} \circ V_k$ – однородный многочлен степени k . \square

Формальная нормальная форма при наличии резонансов.

Определение 11.6. Пара (j, α) , где $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $|\alpha| = k$ называется резонансной степени k , если $\mu^\alpha = \mu_j$.

Определение 11.7. Базисный моном $\varphi_{j,\alpha}$ (см. опр. 11.5) называется резонансным степени $|\alpha|$, если (j, α) – резонансная пара.

Теорема 11.2. Пусть отображение f имеет вид 11.1. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ – набор собственных значений матрицы A . Тогда отображение f формально эквивалентно в точке O отображению $\tilde{f}(x) = Ax + \sum_{k=2}^{+\infty} \tilde{V}_k$, где \tilde{V}_k – однородный многочлен степени k с ненулевыми коэффициентами только при резонансных мономах.

Частичное доказательство. Как и при доказательстве теоремы 11.1 мы будем считать оператор A диагонализуемым. Дальнейшие рассуждения проводим в базисе из собственных векторов A .

Доказательство устроено совершенно аналогично доказательству теоремы 11.1: мы будем последовательно «убивать» коэффициенты при всех мономах в V_k , за исключением резонансных, с помощью многочленов $\hat{h}_k = \text{id} + h_k$, где h_k – однородный многочлен степени k . Тогда счетная композиция $\dots \circ \hat{h}_3 \circ \hat{h}_2$ определена как формальный ряд и приводит f к нужному виду.

Пусть f имеет вид $f = A + \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{V}_j + V_k + o(x^k)$, где однородные многочлены \tilde{V}_j содержат только резонансные мономы. Обозначим для краткости $\tilde{V}_{2,k-1} = \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{V}_j$.

Найдем такой многочлен $\hat{h}_k = \text{id} + h_k$, что

$$f \circ \hat{h}_k = \hat{h}_k \circ (A + \tilde{V}_{2,k-1} + W_k + o(x^k)),$$

где W_k – однородный многочлен степени k , содержащий только резонансные мономы многочлена V_k с теми же коэффициентами. Ввиду явного вида \hat{h}_k это уравнение эквивалентно

$$f \circ \hat{h}_k - \hat{h}_k \circ (A + \tilde{V}_{2,k-1} + W_k) = o(x^k).$$

Выпишем члены левой части порядка $\leq k$ и приравняем их к нулю. Получим итоговое уравнение на h_k :

$$h_k \circ A - A \circ h_k = V_k - W_k. \quad (11.4)$$

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 11.1, несложно убедиться, что решение (11.4) существует (хотя и не единственно), благодаря тому, что коэффициенты многочлена $V_k - W_k$ при резонансных мономах равны нулю. \square

Замечание 11.2. Отметим, что коэффициенты многочленов \tilde{V}_k , вообще говоря, отличаются от коэффициентов при резонансных мономах многочленов V_k .

Мажорантное функциональное пространство.

Пусть $O \in \mathbb{C}^n$ – начало координат. В этом разделе все функции предполагаются голоморфными в некоторой окрестности начала координат, если не оговорено противное. Также использование разложения функции в ряд предполагается в окрестности начала координат.

Определение 11.8. Пусть $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфная функция. Пусть $f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$, где $z \in \mathbb{C}^n$, $a_{\alpha} \in \mathbb{C}$. Тогда мажорантой функции f называется голоморфная функция $Mf : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ вида $Mf(z) = \sum_{\alpha} |a_{\alpha}| z^{\alpha}$.

Пусть далее $\rho > 0$.

Определение 11.9. Мажорантная ρ -норма голоморфной функции $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ определяется следующим образом

$$\|f\|_{\rho} = \sup\{|Mf(z)| : |z| < \rho\} = Mf(\rho, \dots, \rho).$$

Мажорантная ρ -норма голоморфной функции $f = (f^1, \dots, f^n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ определяется следующим образом

$$\|f\|_{\rho} = \sum_{k=1}^n \|f^k\|_{\rho}.$$

Определение 11.10. Мажорантным функциональным пространством $\mathcal{B}_{\rho}^{(n,n)} = \mathcal{B}_{\rho}^n$ называется множество всех голоморфных в окрестности O функций $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, имеющих конечную мажорантную ρ -норму.

Утверждение 11.2. Пространство \mathcal{B}_{ρ}^n банахово.

Доказательство. Заметим, что пространства \mathcal{B}_ρ^n и \mathcal{B}_1^n изометричны (преобразование $f(z) \mapsto f(\rho z)$). Поэтому достаточно доказать полноту \mathcal{B}_1^n . Более того, из определения 11.9 следует, что достаточно доказать полноту пространства $\mathcal{B}_1^{(n,1)}$ голоморфных функций $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с ограниченной мажорантной нормой $\|f\|_\rho$.

Покажем, что пространство $\mathcal{B}_1^{(n,1)}$ изометрично пространству бесконечных последовательностей l^1 , которое, как известно, полно. На этом доказательство утверждения будет закончено.

Занумеруем все $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ и получим таким образом последовательность $\{\alpha_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное отображение $L : \mathcal{B}_1^{(n,1)} \rightarrow l^1$, действующее по правилу $L(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\alpha_k} z^{\alpha_k}) = a = \{\alpha_k\}$. Ясно, что L – изометрия, так как $\|\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\alpha_k} z^{\alpha_k}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{\alpha_k}| = \|a\|_{l^1}$. \square

Определение 11.11. Пусть $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – аналитические в области U функции. Пусть $f^k(x) = \sum a_\alpha^k x^\alpha$ и $g^k(x) = \sum b_\alpha^k x^\alpha$, $k \in \{1, \dots, n\}$ в области U . Будем говорить, что f меньше или равно g (обозначение $f \ll g$) в U , если $\forall k \forall \alpha$ выполнено $a_\alpha^k \leq b_\alpha^k$.

Лемма 11.1.

- 1) Пусть $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфные функции. Тогда $\|fg\|_\rho \leq \|f\|_\rho \|g\|_\rho$.
- 2) Пусть $f, g, \tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – аналитические в области U и $g \ll \tilde{g}$. Тогда $f \circ g \ll f \circ \tilde{g}$.
- 3) Пусть $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ – голоморфные функции и $f(O) = g(O) = O$. Тогда $\|f \circ g\|_\rho \leq \|f\|_\sigma$, где $\sigma = \|g\|_\rho$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 леммы несложно проверить непосредственно, аккуратно расписав коэффициенты произведения и композиции отображений при каждом мономе. Мы докажем несколько менее очевидное утверждение 3.

Пусть $n = 1$. Тогда $\|f \circ g\|_\rho = M(f \circ g)(\rho) \leq (Mf \circ Mg)(\rho) = Mf(Mg(\rho)) = Mf(\sigma) = \|f\|_\sigma$.

Пусть $n > 1$. Пусть $f = (f^1, \dots, f^n)$ и $g = (g^1, \dots, g^n)$. Тогда $\|f \circ g\|_\rho = \sum_{k=1}^n M(f^k \circ g)(\rho, \dots, \rho) \leq \sum_{k=1}^n Mf^k \circ (Mg^1, \dots, Mg^n)(\rho, \dots, \rho) \leq \sum_{k=1}^n Mf^k(\sigma, \dots, \sigma) = \|f\|_\sigma$. \square

Аналитическая нормальная форма.

Определение 11.12. Областью Пуанкаре $P^n \subset \mathbb{R}_{>0}^n$ называют объединений двух множеств:

$$\{v \in \mathbb{R}_{>0}^n : \forall i v_i < 1\} \cup \{v \in \mathbb{R}_{>0}^n : \forall i v_i > 1\}.$$

Теорема 11.3. Пусть отображение f имеет вид 11.1. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in P^n$ – набор собственных значений матрицы A . Тогда, в терминах теоремы 11.2, отображения f и \tilde{f} аналитически эквивалентны.

Доказательство. Мы докажем теорему 11.3 в предположении, что набор μ не резонансный. Общий случай доказывается аналогично, но опускается ввиду нехватки времени.

Мы также будем полагать, что все $\mu_i < 1$. Случай, когда все $\mu_i > 1$ сводится к предыдущему рассмотрением отображения f^{-1} вместо f .

Итак, будем искать аналитический диффеоморфизм h , сохраняющий O и такой, что $f \circ h = h \circ A$. Пусть h имеет вид $h = \text{id} + H$, где $H(x) = O(x^2)$. Тогда получим следующее уравнение

$$H \circ A - A \circ H = V \circ (\text{id} + H). \quad (11.5)$$

Оператор слева нам уже знаком: это диагональный оператор $R_A(H) = H \circ A - A \circ H$. Оператор справа обозначим $S_V(H) = V \circ (\text{id} + H)$. Так как резонансы отсутствуют, оператор R_A обратим. Поэтому решение уравнения (11.5) эквивалентно поиску неподвижной точки оператора $R_A^{-1} \circ S_V$:

$$H = R_A^{-1} \circ S_V(H). \quad (11.6)$$

Для поиска неподвижной точки мы воспользуемся мажорантным функциональным пространством \mathcal{B}_ρ^n . Пусть $Z = \{f \in \mathcal{B}_\rho^n : f(O) = O\}$ – полное подпространство. Тогда ясно, что операторы R_A^{-1} , S_V и $R_A^{-1} \circ S_V$ действуют из Z в Z .

Оператор R_A^{-1} ограничен в Z для любого ρ (см. лемма 11.2), а оператор S_V сильно сжимающий для достаточно малого ρ (см. лемма 11.3). Отсюда следует, что композиция $R_A^{-1} \circ S_V$ есть сжимающий оператор на банаховом пространстве Z для достаточно малого ρ . Значит, существует и единственное отображение $H \in Z$, удовлетворяющее (11.6).

Несложно убедиться, что $H|_{\mathbb{R}^n}$ – аналитическая функция в окрестности O и $H|_{\mathbb{R}^n}(x) = O(x^2)$. По построению, $h = \text{id} + H$ искомый аналитический диффеоморфизм. \square

Лемма 11.2. Пусть выполнены условия теоремы 11.3. Пусть, кроме того, у оператора A отсутствуют резонансы, и все собственные значения $\mu_i < 1$. Тогда существует $C > 0$, что $\forall \rho > 0$ выполнено $\|R_A^{-1}\|_\rho \leq C$.

Доказательство. Собственные значения оператора R_A равны $\lambda_{i,\alpha} = \mu^\alpha - \mu_i$. Из предположения отсутствия резонансов следует, что все $\lambda_{i,\alpha} \neq 0$. Из предположения, что все $\mu_i < 1$, следует, что $|\mu^\alpha| \rightarrow 0$ при $|\alpha| \rightarrow +\infty$. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$, что все $|\lambda_{i,\alpha}| > \varepsilon$. Значит, $\|R_A^{-1}\|_\rho \leq \frac{1}{\varepsilon}$. \square

Лемма 11.3. Пусть выполнены условия теоремы 11.3. Пусть, кроме того, у оператора A отсутствуют резонансы, и все собственные значения $\mu_i < 1$. Тогда оператор S_V сильно сжимает при малых ρ , т.е. $\|S_V(O)\|_\rho = O(\rho^2)$ и $\|S_V(H) - S_V(\tilde{H})\|_\rho = O(\rho)\|H - \tilde{H}\|_\rho$ при $\rho \rightarrow 0$.

Доказательство. Так как $S_V(O)(x) = V(x) = O(x^2)$, то $\|S_V(O)\|_\rho = O(\rho^2)$.

Ясно, что $S_V(H)(x) - S_V(\tilde{H})(x) = (V(x + tH(x) + (1-t)\tilde{H}(x))) \Big|_0^1$. Тогда левую часть можно записать через интеграл следующим образом:

$$S_V(H)(x) - S_V(\tilde{H})(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x + tH(x) + (1-t)\tilde{H}(x)) [H(x) - \tilde{H}(x)] \right) dt.$$

Так как $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = O(x)$, то $\|\frac{\partial V}{\partial x}\|_\rho = O(\rho)$. Для $t \in [0, 1]$ обозначим $G_t(x) = x + tH(x) + (1-t)\tilde{H}(x)$. Тогда $\|G_t\|_\rho = O(\rho)$. Применяя пункт 3 леммы 11.1 к отображениям $\frac{\partial V}{\partial x}$ и G_t , получаем, что $\|\frac{\partial V}{\partial x} \circ G_t\|_\rho = O(\rho)$.

Далее из пункта 1 леммы 11.1 следует, что $\|\frac{\partial V}{\partial x} \circ G_t[H - \tilde{H}]\|_\rho \leq O(\rho)\|H - \tilde{H}\|_\rho$. Следовательно, $\|S_V(H) - S_V(\tilde{H})\|_\rho \leq O(\rho)\|H - \tilde{H}\|_\rho$. \square

Лекция 12

Ввиду нехватки времени некоторые доказательства приведены лишь схематично. Для более глубокого изучения данной темы лектор рекомендует статью «Embedology» авторов Tim Sauer, James A. Yorke, Martin Casdagli.

Теорема Такенса о вложении для потоков.

Функция лаговых координат. Постановка задачи. Примеры.

Пусть M – гладкое многообразие, и $\{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\}$ – поток на M . Введем $T > 0$ – лаг (delay). Пусть $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая наблюдаемая функция.

Определение 12.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция лаговых координат $F_{h,\Phi,T} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом

$$F_{h,\Phi,T}(x) = (h(x), h(\Phi^{-T}(x)), \dots, h(\Phi^{-(n-1)T}(x))).$$

Наша задача – определить, когда $F_{h,\Phi,T} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ является вложением. Ответ на данный вопрос важен с практической точки зрения: мы хотим, чтобы близким значениям функции лаговых координат соответствовали близкие состояния динамической системы.

Прежде всего, отметим, что слабая теорема Уитни никак не облегчает нам задачу.

Теорема 12.1 (Уитни). Типичное гладкое отображение $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, где $n = \dim M$, является диффеоморфизмом M на образ $F(M)$.

Дело в том, что нам бы хотелось сформулировать условия, при которых для почти всех (в некотором хорошем смысле, например, по мере типа Лебега) функций h и для достаточно большого лага T отображение $F_{h,\Phi,T}$ было бы вложением. Но, во-первых, $F_{h,\Phi,T}$ имеет специфический вид и потому изменение h порождает специфический класс отображений $F_{h,\Phi,T}$. Во-вторых, «типичное» отображение из формулировки теоремы означает принадлежность не более чем счетному пересечению открытых всюду плотных множеств, что может иметь нулевую меру Лебега и потому не отвечает нашему требованию «почти все».

Рассмотрим два примера отсутствия вложения в случае периодической траектории.

Пример 12.1. Пусть $A \subset M$ – периодическая траектория периода T для потока Φ . Тогда для $x \in A$ выполнено $F_{h,\Phi,T}(x) = (h(x), \dots, h(x))$. Отсюда следует, что $F_{h,\Phi,T}(A) \subset \text{Diag}(\mathbb{R}^n)$ есть отрезок. Так как A – топологическая окружность, получаем, что $F_{h,\Phi,T}(A)$ не диффеоморфно A .

Пример 12.2. Пусть $A \subset M$ – периодическая траектория минимального периода $2T$ для потока Φ . Рассмотрим функцию $d(x) = h(x) - h(\Phi^{-T}(x))$. Тогда при $x \in A$ имеем $d(\Phi^{-T}(x)) = h(\Phi^{-T}(x)) - h(\Phi^{-2T}(x)) = -d(x)$. Таким образом, $d|_A : A \rightarrow A$ есть непрерывное отображение топологической окружности, меняющее знак. Отсюда следует, что существует такая точка $x_0 \in A$, что $d(x_0) = 0$. Т.е., $h(x_0) = h(\Phi^{-T}(x_0))$.

Другими словами, найдутся две точки $x_0, x_1 \in A$, что $h(x_0) = h(x_1)$. Заметим, что, т.к. минимальный период A равен $2T$, то $x_1 = \Phi^{-T}(x_0) \neq x_0$. Как несложно видеть, тогда $F_{h, \Phi, T}(x_0) = F_{h, \Phi, T}(x_1)$, что нарушает биекцию.

Формулировка теоремы.

Конечно, рассмотренные нами примеры 12.1, 12.2 довольно специфичны. Оказывается, уже при периоде $3T$ ситуация качественно меняется. Ниже мы сформулируем теорему Такенса о вложении для потоков. Новые понятия, задействованные в формулировке, мы объясним далее.

Теорема 12.2 (Такенс). Пусть $A \subset M$ – компактное множество размерности d по Минковскому (опр. 12.2). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2d$. Предположим, что на множестве A поток Φ удовлетворяет следующим условиям

- 1) Число неподвижных точек конечно.
- 2) Отсутствуют периодические орбиты периода T и $2T$.
- 3) Число периодических траекторий минимального периода kT , $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ конечно. При этом, собственные значения дифференциала отображения Пуанкаре в периодических точках различны.

Тогда для почти всех (опр. 12.3) гладких функций h отображение $F_{h, \Phi, T} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть

- 1) Биекция.
- 2) Вложение на компактных многообразиях из A .

Определение 12.2 (Размерность Минковского). Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество. Обозначим через $N(\varepsilon)$ минимальное число кубов со стороной $\varepsilon > 0$, объединение которых покрывает S . Тогда размерностью Минковского $\dim(S)$ называют следующий предел

$$\dim(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Определение 12.3 (Почти все функции). Дадим определение в случае, когда $M = U$ – область в \mathbb{R}^m .

Пусть h_1, \dots, h_t – базис многочленов степени $\leq 2n$, а h_0 – произвольная гладкая функция. Тогда в формулировке теоремы Такенса фраза «для почти всех функций» означает, что для почти всех $\alpha \in \mathbb{R}^t$ по мере Лебега теорема верна для функции

$$h_\alpha = h_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i h_i.$$

Пример отсутствия биекции при плохом соотношении размерностей.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий необходимость условия $n > 2d$ в теореме 12.2.

Пример 12.3. Пусть $M = \mathbb{R}$, и $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – поток. В качестве A мы рассмотрим орбиту Orb потока Φ с описанными ниже свойствами. Таким образом, $d = 1$. Мы покажем, что при $n = 2$ для открытого множества функций отображение $F_{h,\Phi,T}$ не является биекцией.

Пусть орбита Orb потока Φ устроена как на рисунке 12.1. Координаты на плоскости будем обозначать через x_1, x_2 . Введем также одноименные функции $x_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющее точке её соответствующую координату.

Мы предполагаем, что существуют такие различные точки $a, b, c, d \in \text{Orb}$, что

$$x_1(b) < x_1(d), x_1(a) < x_1(c), x_2(b) < x_2(a), x_2(d) < x_2(c), \\ x_1(a) = x_1(b), x_1(c) = x_1(d).$$

Более того, потребуем, что существует такое $T > 0$, что выполнено

$$x_1(\Phi^{-T}(b)) < x_1(\Phi^{-T}(a)) < x_1(a), x_1(\Phi^{-T}(c)) < x_1(\Phi^{-T}(d)) < x_1(c).$$

Несложно убедиться, что поток Φ с указанными свойствами существует.

В качестве наблюдаемой функции возьмем первую координату: $h = x_1$. Тогда для $y \in \text{Orb}$ имеем $F_{h,\Phi,T}(y) = (x_1(y), x_1(\Phi^{-T}(y)))$. Рассмотрим точки $A = F_{h,\Phi,T}(a)$, $B = F_{h,\Phi,T}(b)$, $C = F_{h,\Phi,T}(c)$ и $D = F_{h,\Phi,T}(d)$. Они составляют трапецию (рис. 12.2). Кривая $F_{h,\Phi,T}(y)$ при $y \in \text{Orb}$ имеет вид «бантика», соединяющего вершины трапеции в порядке B, D, A, C . Отсюда ясно, что найдутся различные точки $y, z \in \text{Orb}$, что $F_{h,\Phi,T}(y) = F_{h,\Phi,T}(z)$. Но это нарушает биекцию.

Несложно видеть, что малое шевеление h оставит «бантик» на месте. Отсюда следует, что для целой окрестности $h = x_1$ отображение $F_{h,\Phi,T}$ не является биекцией.

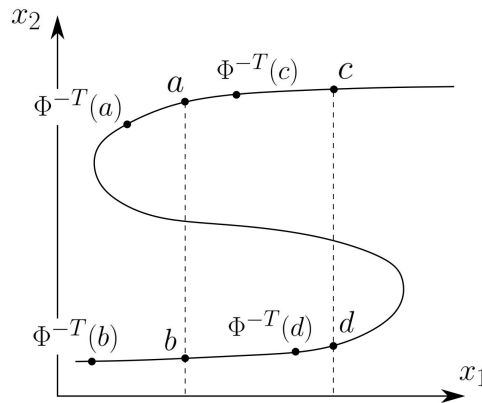


Рис. 12.1. Примерный вид орбиты потока Φ

Теорема Такенса о вложении для диффеоморфизмов.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ – область, и $g : U \rightarrow U$ – диффеоморфизм. Для $n \in \mathbb{N}$ введем функцию

$$F_{h,g}(x) = (h(x), h(g(x)), \dots, h(g^{n-1}(x))).$$

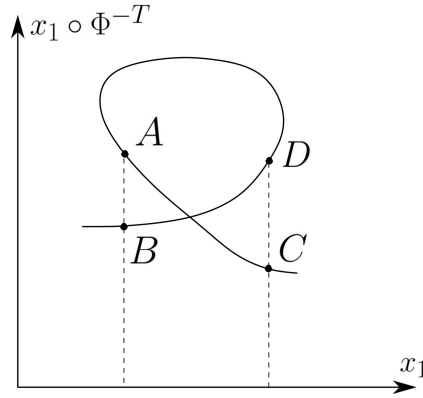


Рис. 12.2. Примерный вид кривой $F_{h,\Phi,T}(y)$, $y \in \text{Orb}$.

Определение 12.4. Для множества $A \subset U$ через A^p , $p \in \mathbb{N}$ будем обозначать множество периодических относительно g точек из A периода p .

Формулировка теоремы.

Теорема 12.3 (Такенс). Пусть $A \subset U$ – компактное множество размерности d по Минковскому (опр. 12.2). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2d$. Предположим, что для любого $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ выполнены следующие условия

- 1) $\dim A^p < \frac{p}{2}$.
- 2) Дифференциал $D_x g^p$ для $x \in A^p$ имеет различные собственные значения.

Тогда для почти всех (опр. 12.3) гладких функций h отображение $F_{h,g} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть

- 1) Биекция.
- 2) Вложение на компактных многообразиях из A .

Схема доказательства.

Условия теоремы 12.3 можно переформулировать в виде трёх условий: A_1 , A_2 , A_3 . Далее, из условий A_1 , A_2 следует биекция, а из условий A_2 , A_3 следует погружение на многообразиях из A , откуда и получаем вложение.

Мы рассмотрим немного более подробно идею доказательства биекции. Оно опирается на следующую лемму, связывающую сингулярные значения матриц и размерность Минковского.

Лемма 12.1. Пусть F_0, F_1, \dots, F_t – липшицевы отображения из A в \mathbb{R}^n . Пусть $M_{x,y}$ – матрица размера $n \times t$, состоящая из столбцов $\{F_1(x) - F_1(y), \dots, F_t(x) - F_t(y)\}$.

Для $r \in \mathbb{N}$ определим множество $S_r \subset A \times A$ как множество всех пар (x, y) , что $\text{rk } M_{x,y} = r$. Обозначим $d_r = \dim(\text{Cl}(S_r))$.

Для $\alpha \in \mathbb{R}^t$ рассмотрим $F_\alpha = F_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i F_i$. Если $\forall r$ выполнено $d_r < r$, то для п.в. α отображение F_α есть биекция.

Пусть E_k – единичная матрица размера $k \times k$. Определим матрицу $C_{p,q}$ размера $(p - \text{НОД}(p, q)) \times p$ следующим образом

$$C_{p,q} = \begin{pmatrix} E_{p-\text{НОД}(p,q)} \\ -E_{\text{НОД}(p,q)} \cdots -E_{\text{НОД}(p,q)} \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу $C_{p,q}^n$ размера $(p - \text{НОД}(p, q)) \times n$. Для этого возьмем столько строчек матрицы $C_{p,q}$, пока не наберем n штук: если $p < n$, то продублируем матрицу $C_{p,q}$ саму под собой несколько раз, возможно нецелое.

Далее переформулируем условия теоремы 12.3 в новых терминах.

Условие A_1 : для $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ выполнено $\text{rk } C_{p,0}^n > 2 \dim(A^p)$. Здесь подразумевается, что $\text{НОД}(p, 0) = 0$. Поэтому $C_{p,0} = E_p$, и $\text{rk } E_p = p$. Так как $p \leq n$, то $\text{rk } C_{p,0}^n = p$. Таким образом, условие A_1 эквивалентно условию $p > 2 \dim(A^p)$, что эквивалентно условию 1 теоремы 12.3.

Условие A_2 : для $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < p \leq n$ выполнено $\text{rk } C_{p,q}^n > \dim(A^p)$.

Их данных условий можно вывести, что для п.в. α отображение $F(h_\alpha, g)$ есть биекция A на $F(A)$ при $n > 2d$. Для этого необходимо применить лемму 12.1 к отображениям $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенным ниже.

Пусть h_1, \dots, h_t есть базис многочленов на U степени $\leq 2n$, а h_0 – произвольная функция на U . Для $i = 1, \dots, t$ определим отображения $F_i = (h_i(g^0(x)), \dots, h_i(g^{n-1}(x)))^{tr}$, где tr – знак транспонирования. Для $\alpha \in \mathbb{R}^t$ имеем

$$F_\alpha = F_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i F_i = (h_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i h_i, \dots, (h_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i h_i) \circ g^{n-1})^{tr} = F_{h_\alpha, g}.$$

Осталось лишь проверить условия леммы для матрицы $M_{x,y}$. Мы опустим выкладки ввиду нехватки времени.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ