МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. СЕМИНАРЫ

ГАШКОВ
СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

# Содержание

**1. Семинар 1. Простейшие комбинаторные задачи. Изучение комбинаторных тождеств с помощью $n$-мерного куба** **4**
1.1. Перечислительная комбинаторика . . . . . 4
1.2. Представление биномиальных коэффициентов разными способами . . . . . 5
1.3. Комбинаторные тождества с биномиальными коэффициентами . . . . . 6
1.4. Интерпретация факториала через $n$-мерный куб . . . . . 8
1.5. Задача о максимальной мощности антицепи. Неравенство Любеля-Мешалкина-Ямамото . . . . . 9

**2. Семинар 2. Задачи на решетке** **11**
2.1. Рисование $n$-мерного куба. Дополнение . . . . . 11
2.2. Некомбинаторная задача на $n$-мерный куб . . . . . 11
2.3. Задачи о числе кратчайших путей . . . . . 11
2.4. Свертка Вандермонда . . . . . 12
2.5. Задача Эйлера о перестановках и "честная" карточная игра . . . . . 13
2.6. Задачи на тождества с биномиальными коэффициентами . . . . . 15

**3. Семинар 3. Числа Каталана** **19**
3.1. Задачи на перемещение вдоль ломаной . . . . . 19
3.2. Метод зеркального отражения . . . . . 21
3.3. Другая формулировка задачи . . . . . 22
3.4. Другой способ решения. . . . . 23

# 1. Семинар 1. Простейшие комбинаторные задачи. Изучение комбинаторных тождеств с помощью $n$-мерного куба

Курс состоит из 3 частей:

- комбинаторика (только перчислительная комбинаторика – решение задач на вычисление числа элементов в различных множествах);
- теория графов;
- теория кодирования.

## 1.1. Перечислительная комбинаторика

Существует 12 наиболее известных задач о размещениии шаров по ящикам.

Типы размещений:

- произвольный;
- с ограничением (напр.: в каждый ящик помещается макс. один шар);
- заполнение шарами всех ящиков.

Важно уточнить, отличаются ли рассматриваемые объекты, или считаются одинаковыми.

**Задача.** Разместите $k$ одинаковых шаров по $n$ различным ящикам так, чтобы в каждый ящик помещался максимум один шар.

**Решение.**
$n \leq k$
Любое такое размещение однозначно определяется, если выбрать те $k$ ящиков, в которых лежит по одному шару. Количество выборок $k$ элементов из данных $n$ элементов равно

$$C_n^k = \frac{[n]_k}{k!}$$

**Обозначение.** $[n]_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ – убывающий субфакториал

**Обозначение.** $[n]^k = n(n+1)\ldots(n+k-1)$ – возрастающий субфакториал

**Обозначение.** $\binom{n}{k} = C_n^k$ – биномиальный коэффициент

**Задача.** Разместите $k$ одинаковых шаров по $n$ различным ящикам, в ящики можно класть любое количество шаров.

**Решение.** Любое такое размещение однозначно задается набором из $n$ чисел $x_i$, каждое из которых указывает, сколько шаров попало в данный ящик.

$$x_1 + ... + x_n = k$$

Число таких размещений совпадает с количеством упорядоченных наборов наборов из $n$ чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, сумма элементов которых равна $k$. Такие размещения можно назвать сочетания с повторениями, а числа $x_i$ – кратностями. Для числа сочетаний с повторениями $H_n^k$ справедливы равенства:

$$H_n^k \;=\; \frac{[n]^k}{k!} \;=\; \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} \;=\; C_{n+k-1}^k$$

**Обозначение.** $H_n^k \;=\; \dfrac{[n]^k}{k!} \;=\; C_{n+k-1}^k$ – число сочетаний с повторениями

Данная задача равносильна следующей:

**Задача.** Сколько существует монотонных неубывающих последовательностей из $k$ чисел от 1 до $n$?

**Решение.** Для монотонной неубывающей последовательности

$$i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k;\; 1 \le \; i_1, i_k \le \; n$$

рассмотрим возрастающую строго монотонную последовательность

$$i_1 \le \; i_2 + 1 \le \; i_3 + 2 \; \le \; \ldots \; \le \; i_k + k - 1;\; i_k + k - 1 \le n + k - 1$$

Благодаря обратимости преобразования очевидно, что число заданных нестрого монотонных последовательностей равно числу заданных строго монотонных последовательностей. Число последних равно $C_{n+k-1}^k$.

**Определение.** *Мультимножество* – модификация множества, допускающая включение одного и того же элемента в совокупность несколько раз.

Чтобы задать мультимножество в виде обыкновенного множества, нужно перечислить все его элементы по одному разу и для каждого элемента указать его кратность.

## 1.2. Представление биномиальных коэффициентов разными способами

Число $k$-элементных подмножеств $i_1, \ldots, i_k$ в $n$-элементном множестве $x_1, \ldots, x_n$ равно $C_n^k$.

Задание подмножеств может быть произведено с помощью булева (то есть состоящего из нулей и единиц) вектора (то есть набора) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ длины $n$.

Число $k$-элементных подмножеств $i_1, \ldots, i_k$ в $n$-элементном множестве $x_1, \ldots, x_n$ есть число таких булевых векторов длины $n$, у которых число единиц равно $k$.

**Обозначение.** $\widetilde{\alpha}$ – набор

**Обозначение.** $\|\widetilde{\alpha}\|$ – вес (норма) набора

**Обозначение.** $B^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \ \alpha_i \in \{0, 1\}\}$ – бинарный $n$-мерный куб

**Обозначение.** $B^n_k = \{\widetilde{\alpha} : \|\widetilde{\alpha}\| = k\}$ – множество всех вершин куба, у которых норма равна $k$; $k$-й слой $n$-мерного куба

**Обозначение.** $|A|$ – число элементов множества $A$

$$|B^n_k| = C^k_n$$

$$|B^n| = 2^n$$

$$B^n = \bigcup_{k=0}^{n} B^n_k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C^k_n$$

Геометрическое изображение $n$-мерного куба:

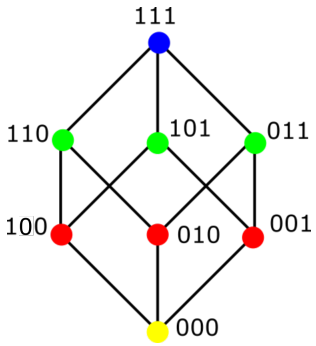


Рис. 1.1. $B^3$.

Два набора соединены отрезком тогда и только тогда, когда они отличаются в одной $i$-й позиции. Эту пару наборов называют ребром, а число $i$ – направлением этого ребра. Все ребра одного направления изображаются равными параллельными отрезками.

*Вершины, отмеченные одним цветом, являются элементами одного и того же слоя (синий – $B^3_3$, зеленый – $B^3_2$, красный – $B^3_1$, желтый – $B^3_0$).*

Ребра в $n$-мерном кубе всегда соединяют вершины из соседних слоев.

## 1.3. Комбинаторные тождества с биномиальными коэффициентами

Количество вершин на каждом из слоев есть биномиальный коэффициент.

$$B^n_k = B^{n-1}_k x\{0\} \cup B^{n-1}_{k-1} x\{1\}$$

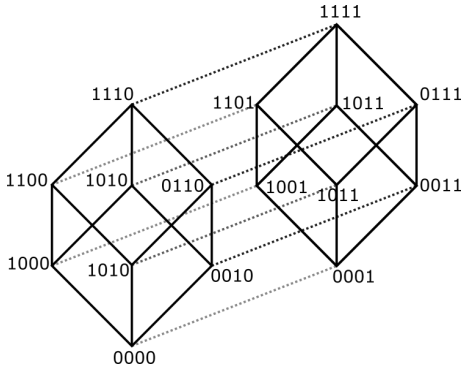


Рис. 1.2. $B^4$.

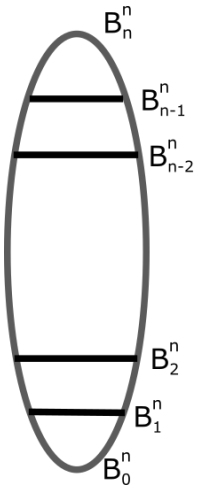


Рис. 1.3. Произвольный $n$-мерный куб $B^n$.

Тождество Паскаля для биномиальных коэффициентов, с помощью которого можно записывать биномиальные коэффициенты в виде треугольника Паскаля:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & & & \dots & & & & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & \dots & & C_n^{n-1} & & C_n^n
\end{array}$$

Каждое ребро имеет по $n$ различных направлений. Общее число ребер $n \cdot 2^{n-1}$.

Из каждой вершины $k$-го слоя вниз выходит $k$ ребер, а вверх – $n-k$, потому из каждой вершины всего вызодит $n$ ребер. Всего вершин $2^n$, поэтому общее число ребер $\dfrac{n \cdot 2^n}{2}$, (делим на 2, т.к. каждое ребро было посчитано дважды).

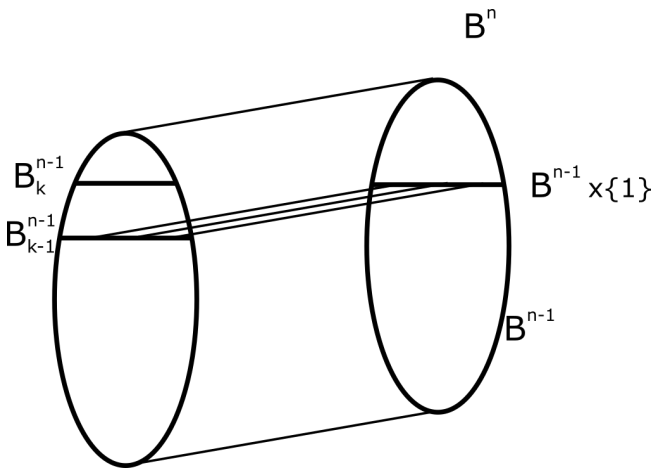


Рис. 1.4. Тождество Паскаля для биномиальных коэффициентов.

Вершин в $k$-ом слое $C_n^k$, из каждой вниз выходит $k$ ребер, поэтому общее число ребер, выходящее вниз из $k$-го слоя, равно $C_n^k \cdot k$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k = n \cdot 2^{n-1}$.

Продифферецируем формулу $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$:

$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \cdot kx^{n-1}$.

## 1.4. Интерпретация факториала через $n$-мерный куб

Если $k$ разлачных шаров размещаются по $n$ различным ящикам, причем в каждый ящик помещается не более одного шара, то число таких размещений равно $[n]_k$ (ранее это называлось числом размещений).

Попробуем найти число цепей, соединяющих нижнее ребро куба с верхним.

**Определение.** Цепь – монотонно возрастающая последовательность вершин и ребер. Каждая следующая вершина выбрается на следующем слое так, чтобы она соединялась с предыдущей вершиной ребром.

**Задача.** Найти количество цепей, соединяющих нижнюю вершину куба с верхней.

**Решение.** Первое ребро можно выбрать $n$ способами, второе – $n-1$ способом и т.д. Их аершины $k$-го слоя вверх выходит. *Ответ:* $n!$

Формулу для числа биномиальных коэффициентов можно доказать через $n$-мерный куб. Рассмотрим вершину $\alpha$ в $k$-ом слое и посчитаем число цепей, проходящих через нее. В этой вершине $k$ единиц. В любой цепи, идущей из нулевой вершины в вершину $\alpha$, все ребра имеют направления, соответствующие позициям этих единиц. Рассмотрим $k$-мерный подкуб, у которого нижняя вершина будет вершиной из нулей, а верхняя будет вершиной $\alpha$. Этот подкуб будет состоять из всех вершин $n$-мерного куба, в которых единицы встречаются только в данных $k$ позициях(если стереть оставшиеся $n-k$ нулей, то все вершины будут изображаться наборами длины $k$ из нулей и единиц). Правило нумерования: соседние вершины исходного $n$-мерного куба остаются соседними в $k$-мерном подкубе. Начальный отрезок цепи, соединяющий нулевую вершину с вершиной $\alpha$, находится в $k$-мерном

подкубе. Поэтому число таких начальных отрезков цепей $k!$. Аналогичные рассуждения для нулей в $(n-k)$-мерном подкубе от вершины $\alpha$ куба до вершины куба, состоящей из единиц, позволяют получить количество конечных отрезков цепей: $(n-k)!$. Согласно правилу умножения, общее число цепей, проходящих через заданную верщину $k$-го слоя, равно $k!(n-k)!$. Пусть $|C(\widetilde{\alpha})|$–количество цепей, проходящих через вершину $\alpha$. Выполним подсчет двумя способами: $n! = \left|\begin{matrix}\cup C(\widetilde{\alpha}) \\ \alpha \in B_k^n\end{matrix}\right| = \sum C(\widetilde{\alpha}),\ \alpha \in B_k^n$. $n! = |B_k^n| \cdot k!(n-k)!$. Разделив обе части на $k!(n-k)!$, получим формулу для числа сочетаний.

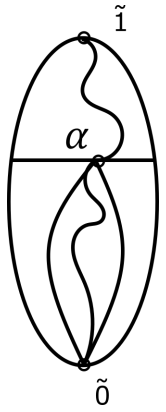


Рис. 1.5. Куб и подкуб.

## 1.5. Задача о максимальной мощности антицепи. Неравенство Любеля-Мешалкина-Ямамото

Выделим в $n$-мерном кубе произвольное множество вершин, среди которых нет сравнимых друг с другом.

Сравнимость вершин: $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$, если для любого $i$ выполнено $\alpha_i \geq \beta_i$. Сравнимость транзитивна и рефлексивна.

Если $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$, то $\|\widetilde{\alpha}\| \geq \|\widetilde{\beta}\|$.

Относительно такой операции сравнения куб превращается в частично упорядосенное множество (ч.у.м.). Цепь – последовательность элементов $\alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$.

**Определение.** Антицепь – множество попарно несравнимых вершин в произвольном частично упорядоченном множестве.

Любой слой куба является антицепью.

**Задача.** Какую максимальную мощность может иметь антицепь в кубе? *Ответ:* $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

**Доказательство.** Пусть есть антицепь $A \subset B^n$. $A_k = A \cap B_n^k$. $\dfrac{|A_k|}{C_n^k}$ – доля принадлежащих антицепи вершин среди вершин $k$-го слоя.

**Неравенство Любеля-Мешалкина-Ямамото**: $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{|A_k|}{C_n^k} \leq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| = |A| \leq \max C_n^k = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Рассмотрим $\cup C(\widetilde{\alpha}),\ \widetilde{\alpha} \in A$:

$$C(\widetilde{\alpha}) \cap C(\widetilde{\beta}) = \varnothing$$

$$\sum_{\alpha \in A} C(\widetilde{\alpha}) = |A_k| \cdot k!(n-k)!$$

$$\sum_{\alpha \in A} |C(\widetilde{\alpha})| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\alpha \in A_k} C(\widetilde{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} |A_k| \cdot k!(n-k)!,\ \alpha \in A$$

$$\left| \bigcup_{\alpha \in A} C(\widetilde{\alpha}) \right| \leq n!$$

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| \cdot k!(n-k)! \leq n!$$

Разделим обе части последнего неравенства на $n!$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|A_k|}{C_n^k} \leq 1$$

ч.т.д.

# 2. Семинар 2. Задачи на решетке

## 2.1. Рисование $n$-мерного куба. Дополнение

Можно взять любые $n$ выходящих из одной точки векторов, и по ним построить плоское изображение $n$-мерного куба. Концы всевозможных сумм этих векторов будут вершинами куба.

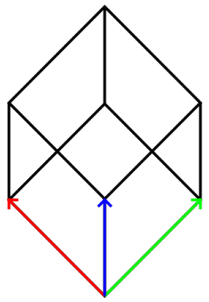

Рис. 2.1. 3-мерный куб, построенный по 3-м векторам.

## 2.2. Некомбинаторная задача на $n$-мерный куб

**Задача.** Покажите, что на плоскости можно выбрать $2^n$ точек так, чтобы для каждой из этих точек среди выбранных $2^n$ точек имелось бы ровно $n$ точек на расстоянии 1 от данной.

**Решение.** Возьмем произвольную точку и нарисуем $n$ векторов единичной длины из нее и дорисовать их до куба.

**Задача.** Рассмотим 3 произвольных вектора, исходящих из одной точки.

## 2.3. Задачи о числе кратчайших путей

**Задача.** Рассмотрим систему улиц – прямоугольник $n \times m$. Сколько различных кратчайших путей ведут из левого нижнего перекрестка в правый верхний?

**Решение.** Любой кратчайший путь состоит из $n+m$ отрезков. Нужно из $n+m$ позиций выбрать $n$ позиций, которые будут вертикальными. Число таких способов равно $C_{n+m}^{n}$.

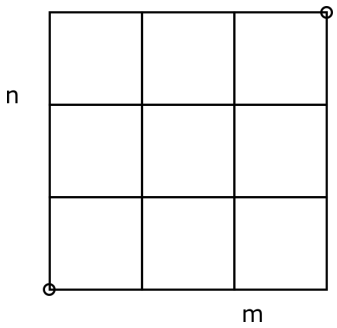


Рис. 2.2. Сетка $m \times n$

Аналогичная задача:

**Задача.** Рассмотрим шахматную доску $n \times n$. Сколько различных кратчайших путей ходом ладьи ведут из левого нижнего угла в правый верхний? *Ответ:* $C_{2n}^n$.

Запишем в каждой клетке шахматной доски количество кратчайших путей ходом ладьи, ведущих в нее.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | | |
| | 1 | 5 | | | | |
| | 1 | 4 | 10 | | | |
| n | 1 | 3 | 6 | 10 | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | m | | | |

Рис. 2.3. Шахматная доска.

В общем случае на диагонали $n$-ая строчка треугольника Паскаля; все, что ниже диагонали, – треугольник Паскаля.

**Задача.** Найти количество $C(i,j)$ кратчайших путей, проходящих через перекресток с координатами $(i,j)$.

**Решение.** Рассмотрим любой путь, проходящий через нужную вершину. Этой вершиной он разбивается на 2 участка. До этой вершины можно дойти $C_{i+j}^i$. От этой вершины до конечной можно дойти $C_{n-i+n-j}^{n-i}$ способами. *Ответ:* $C_{i+j}^i \cdot C_{n-i+n-j}^{n-i}$.

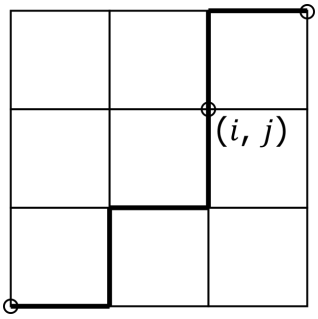


Рис. 2.4. Один из кратчайших путей, проходящих через перекресток с координатами $i, j$.

Рассмотрим узлы, составляющие диагональ квадратного поля. Любой кратчайший путь проходит ровно чрез один из этих узлов. Общее число путей можно посчитать двумя способами. С одной стороны, число всех путей равно $C_{2n}^n$, а с другой – $\sum\limits_{i=0}^{n} C(i, n-i) = \sum\limits_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$ (для каждого узла, лежащего на диагонали, с координатами $(i, n-i)$, посчитаем число путей, идущих через него, и просуммируем по всем $i$).

## 2.4. Свертка Вандермонда

**Свертка Вандермонда.** $C_{n+m}^k = \sum\limits_{l=0}^{k} C_n^l C_m^{k-l}$, $k \le m, n$

**Доказательство.** Рассмотрим множество из $n+m$ элементов. Разобьем их на два подмножества: $n$-элементное и $m$-элементное. $C_{n+m}^k$ – число $k$-элементных подмножеств. В произвольном $k$-элементном подмножестве выбирается $l$ элементов из первого подмножества (можно сделать $C_n^l$ способами), а остальные $k-l$ – из второго (можно сделать $C_m^{k-l}$ способами). Число $l$ может быть любым от 0 до $k$.

## 2.5. Задача Эйлера о перестановках и "честная" карточная игра

**Задача Эйлера о перестановках.** Рассмотрим всевозможные перестановки $\pi \in S_n$ на $n$ элементах. Каждая перестановка есть отображение множества в себя.

$$\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

Элемент $i$ назовем неподвижной точкой, если он переходит сам в себя, то есть $\pi(i) = i$. Рассмотрим множество перестановок, которые имеют заданное кол-во $k$ неподвижных точек. Пусть $t(\pi) = \{i : \ \pi(i) = i\}$ (то есть $t(\pi)$ – множество всех таких $i$, что $\pi(i) = i$). Обозначим $D(n, k)$ - число таких перестановок, что $D(n, k) = |\{\pi \in S_n : \ |t(\pi) = k|\}|$. Попробуем вычислить $D(n, 0)$ (или просто $D(n)$), то есть количество перестановок, не имеющих неподвижных точек. Такие перестановки можно назвать беспорядочными. Выбрать $k$ неподвижных точек можно $C_n^k$ способами. Переставляются $n-k$ точек, количество способов их переставить $D(n-k)$. Перемножим эти числа по правилу умножения, получим $C_n^k \cdot D(n-k)$.

$$C_n^k \cdot D(n-k) = D(n, k)$$

$$\sum_{k=0}^{n} D(n, k) = n!$$

Определим $n$ множеств $A_i = \{\pi \in S_n : \ \pi(i) = i\}$, т.е. $A_i$ – множество всех перестановок порядка $n$, у которых точка $i$ является неподвижной (некоторые другие точки также могут быть неподвижными), $i = \overline{1, n}$. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ – множество всех перестановок, которые имеют хотя бы одну неподвижную точку, то есть множество всех небеспорядочных перестановок.

$$n! \backslash \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = D(n)$$

**Формула включений и исключений.** $\left| \bigcup\limits_{i \in M} A_i \right| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{|M|=k} \left| \bigcap\limits_{i \in M} A_i \right| \cdot (-1)^{k+1}$

Возьмем множество индексов $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим все множества $A_i$, у которых $i \in M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Возьмем их пересечение $\bigcap\limits_{i \in M} A_i$. Просуммируем мощности множеств $\left| \bigcap\limits_{i \in M} A_i \right|$ по всем множествам $M$ мощности $k$, то есть перебираем все $k$-элементные подмножества этого множества и для каждого из них вычисляем мощность такого пересечения и складываем эти числа, получаем $\sum\limits_{|M|=k} \left| \bigcap\limits_{i \in M} A_i \right|$. Далее умножаем на $(-1)^{k+1}$ и суммируем эти суммы по всем $k$ от 1 до $n$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{|M|=k} \left| \bigcap\limits_{i \in M} A_i \right| \cdot (-1)^{k+1}$.

При $k = 1$ $M = \{i\}$ – одноэлементное множество, пересечение $\bigcap\limits_{i \in M} A_i$ состоит из одного множества $A_i$ и формула принимает вид $\sum\limits_{i-1}^{n} |A_i|$.

Рассмотрим множество $M = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Пересечение $\bigcap\limits_{i \in M} A_i$ принимает вид $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, согласно определению оно является множеством всех подстановок, у которых все числа $i_1, \ldots, i_k$ являются неподвижными точками.

$$\bigcap_{i \in M} = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \left\{ \pi \in S_n : \begin{array}{c} \pi(i_1) = i_1 \\ \ldots \\ \pi(i_k) = i_k \end{array} \right\}$$

Посчитаем $|A_{i_1} \cap \ \ldots \ \cap A_{i_k}|$. Уже задано $k$ неподвижных точек, остается $n - k$ точек, в которых эту подстановку (или перестановку) можно определить произвольным образом $(n-k)!$ способами.

$$\left| \left\{ \pi \in S_n : \begin{array}{c} \pi(i_1) = i_1 \\ \ldots \\ \pi(i_k) = i_k \end{array} \right\} \right| = (n-k)!$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{|M|=k} \left| \bigcap_{i \in M} A_i \right| \cdot (-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (n-k)! = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

$$C_n^k \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!} = n(n-1)\ldots(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!} = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

$$D(n) = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!} = n! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

В скобках первые $n+1$ членов ряда для функции $e^{x=-1}$. Ряд для экспоненты есть $e^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\frac{D(n)}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots \to \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n!}$$

$\frac{D(n)}{n!}$ можно интерпретировать так: выбираем перестановку случайным образом, все перестановки считаем равновероятными. Тогда $\frac{D(n)}{n!}$ – вероятность того, что выбранная случайная перестановка будет беспорядочной. Эта величина меньше половины, то есть в случайной перестановке скорее будут неподвижные точки, чем нет.

## 2.6. Задачи на тождества с биномиальными коэффициентами

Иногда подсчет двумя способами не помогает, в некоторых случаях приходится применять соображения, связанные с производящими функциями.

**Задача.** Найти сумму биномиальных коэффициентов, у которых верхние индексы образуют арифметическую прогрессию.

*Простейшая задача.* Найти сумму биномиальных коэффициентов, у которых верхние индексы нечетны.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2k+1} = 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k$$

Тождество можно доказать и комбинаторно, например, используя $n$-мерный куб. Сумма биномиальных коэффициентов, у которых верхние индексы нечетны, есть число вершин $n$-мерного куба, лежащих на нечетных слоях.

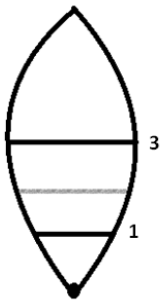


Рис. 2.5. Нечетные слои $n$-мерного куба.

Докажем, что вершин на четных слоях столько же, скольок и на нечетных. Рассмотрим все ребра в фиксированном направлении $n$. Каждое такое ребро соединяет две вершины куба, отличающиеся в $n$-й позиции. Это семейство параллельных ребер устанавливает взаимно-однозначное соответствие между четными и нечетными вершинами, т.к. в каждом из ребер одна вершина четная, а другая – нечетная.

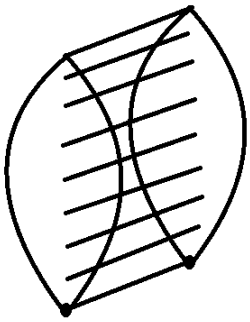

Рис. 2.6. Параллельные ребра $n$-мерного куба.

Рассмотрим суммы $A = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} C_n^{3k}, B = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} C_n^{3k+1}, C = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} C_n^{3k+2}$ всех биномиальных коэффициентов, у которых верхние индексы дают остатки 0, 1 и 2 по модулю 3 соответственно.

$$A + B + C = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Воспользуемся формулой бинома $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ и в качестве $x$ выберем число $\varepsilon$ такое, что $\varepsilon^3 = 1$, то есть $\varepsilon$ есть первообразный кубический корень из 1.

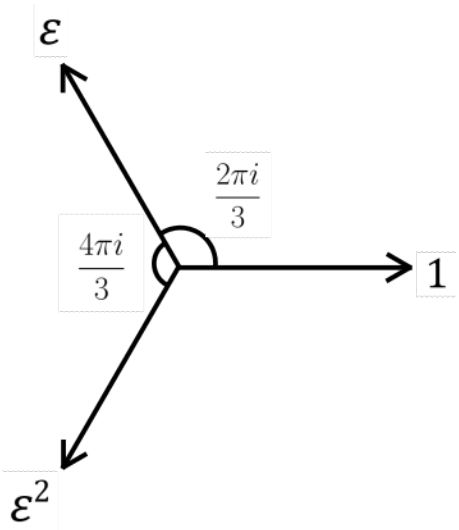


Рис. 2.7. Корни из единицы.

В качестве $\varepsilon$ можно взять число, у которого модуль равен единице, а аргумент равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

$$x = \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\varepsilon^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$\varepsilon$ является первообразным корнем, так как все остальные корни получаются из него возведением в степень.

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varepsilon^k$$

Рассмотрим только слагаемые с номерами, кратными 3.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} C_n^{3k} \varepsilon^{3k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} C_n^{3k} = A$$

У следующей суммы рассмотрим только слагаемые с номерами вида $3k+1$.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{3}\rfloor} C_n^{3k+1}\varepsilon^{3k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{3}\rfloor} C_n^{3k+1}\varepsilon = B\cdot\varepsilon$$

Осталось рассмотреть слагаемые с номерами вида $3k+2$.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{3}\rfloor} C_n^{3k+2}\varepsilon^{3k+2} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{3}\rfloor} C_n^{3k+2}\varepsilon^{2} = C\cdot\varepsilon^2$$

$$A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 = (1+\varepsilon)^n$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} C_n^{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{3}\rfloor} C_n^{3k+1}\varepsilon + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{3}\rfloor} C_n^{3k+2}\varepsilon^2 = (1+\varepsilon)^n$$

Для $A, B, C$ получилось два линейных уравнения. Попробуем получить третье, подставляя $\varepsilon^2$ вместо $\varepsilon$ в выражение $(1+\varepsilon)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\varepsilon^k$ и проводя аналогичные рассуждения.

$$(1+\varepsilon^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\varepsilon^2 k$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} C_n^{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{3}\rfloor} C_n^{3k+1}\varepsilon^2 + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{3}\rfloor} C_n^{3k+2}\varepsilon^4 = (1+\varepsilon^2)^n$$

$\varepsilon^4 = \varepsilon$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} C_n^{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{3}\rfloor} C_n^{3k+1}\varepsilon^2 + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{3}\rfloor} C_n^{3k+2}\varepsilon = (1+\varepsilon^2)^n$$

$$A + B\varepsilon^2 + C\varepsilon = (1+\varepsilon^2)^n$$

Решим систему уравнений.

$$\begin{cases} A + B + C = 2^n \\ A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 = (1+\varepsilon)^n \\ A + B\varepsilon^2 + C\varepsilon = (1+\varepsilon^2)^n \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения третье.

$$B(\varepsilon - \varepsilon^2) + C(\varepsilon^2 - \varepsilon) = (1+\varepsilon)^n - (1+\varepsilon^2)^n$$

Вычтем из первого уравнения второе.

$$B(1-\varepsilon) + C(1-\varepsilon^2) = 2^n - (1+\varepsilon)^n$$

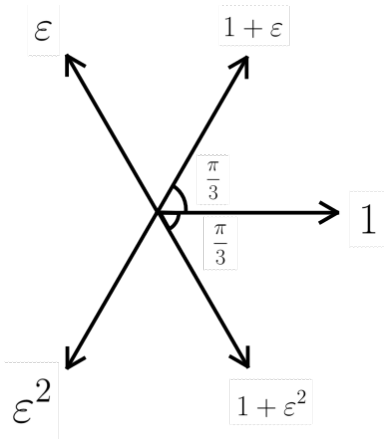


Рис. 2.8. Комплексное сопряжение чисел $(1+\varepsilon)$ и $(1+\varepsilon^2)$.

Коэффициенты непропорциональны, значит, систему можно решить. Числа $A$, $B$, $C$ будут иметь вид $k_1 \cdot (1+\varepsilon^n) + k_2 \cdot (1+\varepsilon^2) + k_3 \cdot 2^n$, где $k_1, k_2, k_3$ – некоторые коэффициенты, различные для $A$, $B$, $C$. Числа $A$, $B$, $C$ будут действительными, потому что $(1+\varepsilon)$ и $(1+\varepsilon^2)$ – числа комплексно-сопряженные. При возведении в $n$-ю степень они остаются комплексно-сопряженными.

$$1+\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$(1+\varepsilon)^n = e^{\frac{n\pi i}{3}}$$

У числа $e^{\frac{n\pi i}{3}}$ модуль равен 1, а аргумент равен $\frac{n\pi}{3} \mod 2\pi$. $k_3 = \frac{1}{3}$, так как числа $A$, $B$, $C$ не сильно отличаются друг от друга, а их сумма равна $2^n$.

**Задача.** Найти суммы $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} C_n^{4k}$, $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} C_n^{4k+1}$, $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} C_n^{4k+2}$, $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} C_n^{4k+3}$. В этой задаче нужно брать первообразый корень $\varepsilon_4$ четвертой степени из единицы.

$$\varepsilon_4 = i$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} C_n^{4k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} C_n^{4k+2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = 2^{n-1}$$

Аналогичные суммы можно находить и для других верхних индексов биномиальных коэффициентов $mk$, тогда нужно будет взять первообразный корень степени $m$ из единицы $\varepsilon_m$ и повторять рассуждения.

# 3. Семинар 3. Числа Каталана

## 3.1. Задачи на перемещение вдоль ломаной

**Условия задач.** Попасть из точки $(0;0)$ в точку $(2n;0)$, двигаясь по узлам целочисленной решетки под углом в $45°$ в соседнюю целочисленную точку.

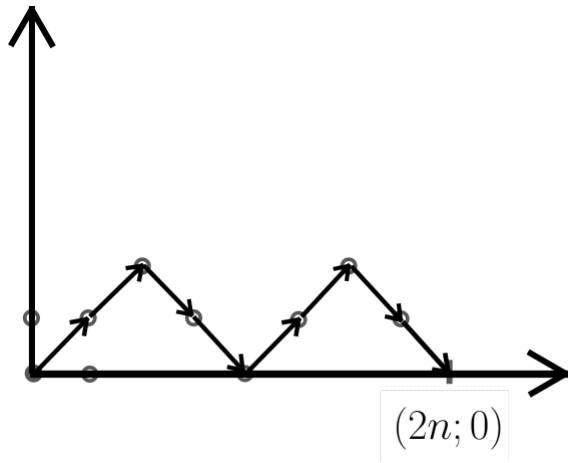


Рис. 3.1. Пример пути.

При движении по каждой стрелке перемещение происходит вправо всегда на единицу, и на единицу вверх или вниз. Конечная $y$-координата равна нулю, поэтому стрелок вверх столько же, сколько стрелок вниз. Тогда общее число стрелок четно.

Вопрос о том, сколько всего существует таких путей, решается так же, как и для решетки. Всего отрезков $2n$, из них $n$ направлены вверх и $n$ – вниз. Различных комбинаций путей будет $C_{2n}^n$

**Задача.** Найти число таких путей, что ни в какой момент $y$-координата не становится меньше 0.

*Алгебраическая интерпретация.* На каждом шаге $y$-координата либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1. Каждому отрезку можно сопоставить $+1$ или $-1$, и задать маршрут упорядоченным набором $(x_1, \ldots, x_{2n})$ из $2n$ чисел, где $x_i = \pm 1$, и $\sum\limits_{i=0}^{2n} x_i = 0$.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{2n} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geq 0, k = 1, \ldots, 2n \end{cases}$$

*Вариация задачи.* Найти число таких путей, что в любой момент, кроме начальной и конечной точек, $y$-координата строго больше 0.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{2n} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i > 0, k = 1, \ldots, 2n-1 \end{cases}$$

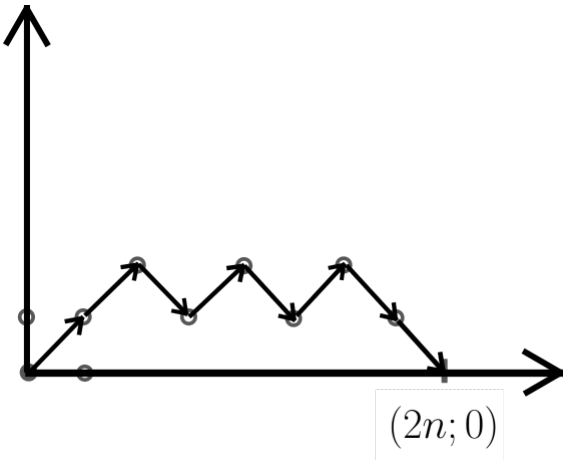


Рис. 3.2. Пример пути для вариации задачи.

Задачи сводятся одна к другой. На первом шаге нужно обязательно переместиться вверх, а на последнем – вниз. Если отбросить эти шаги, то вариация сводится к исходной задаче. Между исходной задачей для длины отрезка $2n-2$ и вариацией задачи для длины отрезка $2n$ взаимно-однозначное соответствие, поэтому ответы в задачах одинаковые.

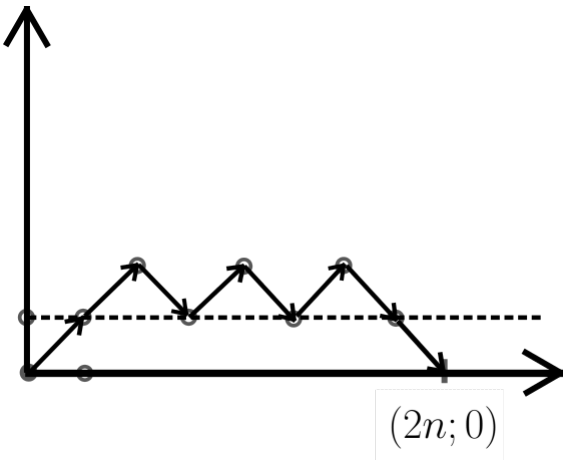


Рис. 3.3. Сведение вариации задачи к исходной задаче.

*Вариации задачи.* Найти число путей из точки $(0;0)$ в точку $(2n-1;1)$ таких, что в любой момент, кроме начальной точки, $y$-координата строго или нестрого больше 0.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{2n-1} x_i = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geq 0, k = 1, \ldots, 2n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{2n-1} x_i = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i > 0, k = 1, \ldots, 2n-1 \end{cases}$$

*Бытовая формулировка задачи.* По шахматной доске перемещается шашка (шашка ходит по диагонали). Найти число путей из левой нижней клетки в левую верхнюю.

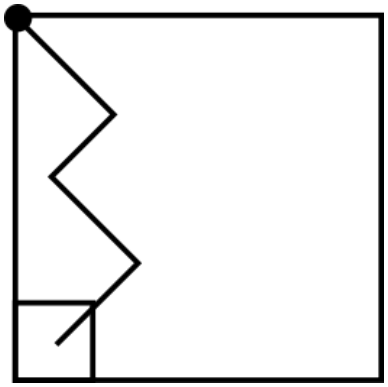

Рис. 3.4. Бытовая формулировка задачи.

## 3.2. Метод зеркального отражения

**Решение.** Найдем число путей, которые могут касаться ось абсцисс, но не пересекать ее. Возьмем общее число путей $C_{2n}^n$, и отнимем число тех, что пересекают ось. Рассмотрим какой-нибудь путь, который пересекает ось $x$. Найдем первую точку пересечения и сделаем такое зеркальное отражение, что точка $(0;0)$ перейдет в точку $(-2;0)$. Отразим относительно прямой $y=-1$ участок пути из точки $(0;0)$ в первую из точек, лежащих ниже оси абсцисс, а остальную часть маршрута оставим без изменений. Такое преобразование взаимно-однозначное. Установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством всех путей из точки $(0;0)$ в точку $(2n;0)$, пересекающих ось $x$, и множеством всех путей из точки $(-2;0)$ в точку $(2n;0)$. Посчитаем число путей из точки $(-2;0)$ в точку $(2n;0)$. Всего отрезков в пути $2n$, идущих вверх на 2 больше, чем идущих вниз. Значит, вверх направлен $n+1$ отрезок, а вниз – $n-1$. Напишем угловые коэффициенты $x_i=\pm 1$ звеньев пути, получится такой набор из $2n$ чисел, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 2$. Число путей есть $C_{2n}^{n-1}$, они взаимно-однозначно соответствуют путям из точки $(0;0)$ в точку $(2n;0)$, пересекающим ось абсцисс, поэтому всего путей, пересекающих ось $x$, тоже $C_{2n}^{n-1}$. Общее число путей $C_{2n}^n$; путей, пересекающих ось $x$, $C_{2n}^{n-1}$; поэтому путей, что не пересекают ось (но могут касаться), $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n!}$$

$$C_{2n}^{n-1} = \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)!}$$

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n!} - \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)!}$$

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n!} - \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)!} = \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{n+1}{n}-1\right)$$

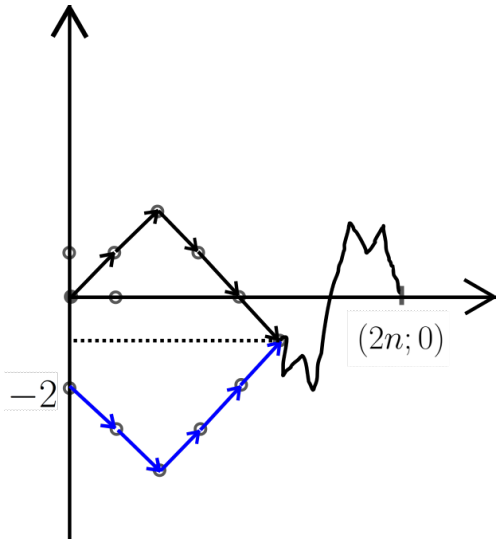


Рис. 3.5. Метод зеркального отражения.

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{n+1}{n}-1\right)=\frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{n!}$$

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{n!}=\frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

*Ответ:* $\dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$.

Ответ похож на биномиальный коэффициент. Такие числа и называются числами Каталана.

## 3.3. Другая формулировка задачи

**Задача.** Найти число всех наборов $(x_1,\dots,x_{2n-1})$ длины $2n-1$, состоящих из $\pm1$, таких, что $x_1+\dots+x_{2n-1}=1$ и $x_1+\dots+x_k>0$.

Задачу можно свести к предыдущей. Взаимно-однозначное соответствие есть между наборами $(x_1,\dots,x_{2n-1})$ и ломаными из $2n-1$ звеньев с угловыми коэффициентами $\pm1$, соединяющими точки $(0;0)$ и $(2n;1)$, и никогда не достигающими ось $x$ (кроме точки $(0;0)$). Поэтому число таких наборов равно числу таких ломаных.

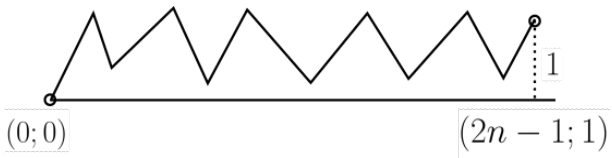


Рис. 3.6. Пример ломаной.

Первое звено можно отбросить, так как для выполнения условия задачи первый отрезок должен быть направлен вверх.

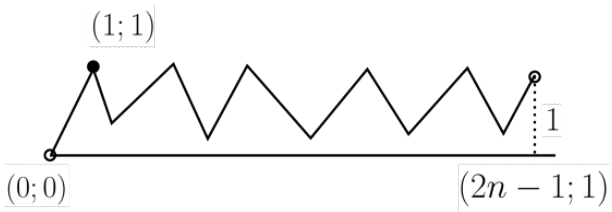


Рис. 3.7. Отбрасывание первого звена.

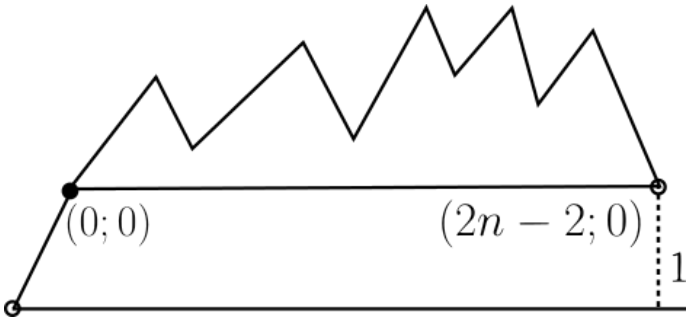


Рис. 3.8. Новая система координат.

Можно ввести новую систему координат, смещенную на 1 вверх и на 1 вправо относительно существующей системы координат.

*Ответ:* $\dfrac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}$.

## 3.4. Другой способ решения.

Возьмем произвольное решение системы

$$\begin{cases} (x_1, \ldots, x_{2n-1}) \\ x_1 + \cdots + x_{2n-1} = 1 \\ x_1 + \cdots + x_k > 0 \end{cases}$$

и рассмотрим всевозможные его циклические сдвиги $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_1, \ldots, x_{k-1})$. Всего циклических сдвигов (включая сам набор) $2n-1$.

Любой нетривиальный циклический сдвиг не будет решением данной задачи. Другими словами, возьмем произвольный набор длины $2n-1$, состоящий из $\pm 1$, у которого сумма равна 1 (то есть в нем $n$ единиц и $n-1$ минус единиц). Таких наборов $C_{2n-1}^{n-1}$. Можно взять любое решение системы, рассмотреть все его циклические сдвиги, в том числе само это решение, и из этих циклических сдвигов ровно один будет удовлетворять системе. Все эти циклические сдвиги будут разные, так как совпадение какого-то циклического сдвига с исходным означает возможность разбить все эти $2n-1$ чисел на блоки одинаковой длины, и эта последовательность будет периодической, то есть все блоки будут одинаковыми. Какой-то циклический сдвиг совпадает с исходным только тогда, когда исходная последовательность периодическая с каким-то периодом, и сдвиг совершен на этот период. Но это противоречит тому, что сумма равна единице, так как полная сумма равна произведению суммы периода на количество периодов. Если сумма периода равна нулю, то и полная

сумма равна нулю. Если сумма периода не равна нулю, то и полная сумма не равна нулю, так как периодов хотя бы два. Таким образом, все сдвиги разные.

Покажем, что только у одного из сдвигов все начальные отрезки положительны. Пусть есть еще какой-то сдвиг $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_1, \ldots, x_{k-1})$, у которого все начальные отрезки положительны. Тогда и у отрезка до $x_{2n-1}$ сумма положительна. У исходного сдвига тоже все начальные отрезки положительны, то есть отрезок $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ тоже имеет положительную сумму. Значит полная сумма хотя бы 2, так как периодов хотя бы два и суммы целые. Противоречие.

Докажем, что всегда есть один циклический сдвиг, у которого все начальные суммы положительны. Для этого рассмотрим задачу.

**Задача.** На кольцевой дороге стоит $n$ бензозаправочных станций. На $i$-ой станции есть какое-то количество бензина. Пусть $x_i$ – разность между длиной пути, который мы можем проехать на бензине с $i$-ой заправки, и расстоянием до следующей автозапраки. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – расстояния, которые машина может проехать, если заправится на данной станции. Выполнено неравенство $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$. Нужно доказать, что есть такая автозаправка, что если начать с нее движение по часовой стрелке, то можно проехать все кольцо.

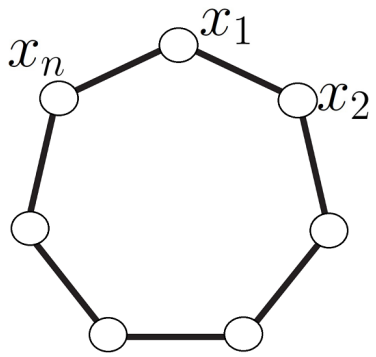


Рис. 3.9. Иллюстрация к задаче.

**Доказательство.** Начнем движение с произвольной заправки, проедем по часовой стрелке до первой остановки из-за закончившегося бензина. Для каждой бензозаправки найдем максимальную дугу, для которой сумма чисел на этой дуге положительна. Возможно, что дуга сразу замкнется и задача решена. Эти дуги не могут пересекаться, так как при пересечении дуги можно объединить в одну и получить дугу большей длины. Это означает, что дуга всего одна.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ