



ФАКУЛЬТЕТ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
МАТЕМАТИКИ И  
КИБЕРНЕТИКИ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛЕКЦИИ. ЧАСТЬ 2

РАЗГУЛИН  
АЛЕКСАНДР ВИТАЛЬЕВИЧ

ВМК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**МЕДВЕДЕВУ ЕЛЕНУ ВЛАДИМИРОВНУ**



## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ.....</b>	<b>5</b>
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ .....	5
ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....	7
РЕДУКЦИЯ К НУЛЕВОМУ РЕШЕНИЮ .....	9
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ .....	10
<b>ЛЕКЦИЯ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ОДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ .....</b>	<b>12</b>
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ ....	12
ТЕОРЕМА ОБ АССИМЕТРИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ .....	14
ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ .....	15
ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ.....	17
<b>ЛЕКЦИЯ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ. ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА.....</b>	<b>19</b>
ФОРМУЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ .....	19
ЛЕММА 1.....	19
ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ (ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА) ..	22
<b>ЛЕКЦИЯ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА.....</b>	<b>24</b>
ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ (ПОФ).....	24
ТЕОРЕМА 1 (О СВОЙСТВАХ ПОФ) .....	24
ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА .....	26
ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ .....	27
ТЕОРЕМА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ.....	28
<b>ЛЕКЦИЯ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ. ТЕОРЕМА ЧЕТАЕВА. ...</b>	<b>31</b>
ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ.....	31
ТЕОРЕМА ЧЕТАЕВА .....	32
<b>ЛЕКЦИЯ 6. ТОЧКИ ПОКОЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. ....</b>	<b>35</b>
КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТЬ ( $n = 2$ ) .....	36
КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ.....	43
<b>ЛЕКЦИЯ 7. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ....</b>	<b>45</b>
ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ 2-ГО ПОРЯДКА.....	47
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДУ К ДИВЕРГЕНТНОМУ ВИДУ .....	47
РЕДУКЦИЯ К ОДНОРОДНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЯМ $u(0,1) = 0$ .....	48
ТОЖДЕСТВО ЛАГРАНЖА .....	49

ФОРМУЛА ГРИНА.....	49
<b>ЛЕКЦИЯ 8. ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ....</b>	<b>51</b>
Функция Грина краевой задачи (1), (2).....	51
ТЕОРЕМА (О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА) .....	52
<b>ЛЕКЦИЯ 9. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ....</b>	<b>56</b>
Применение функции Грина.....	56
РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОДУ 2-ГО ПОРЯДКА.....	56
ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛА ГРИНА К НЕЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ.....	58
<b>ЛЕКЦИЯ 10. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....</b>	<b>62</b>
Задача Штурма-Лиувилля.....	62
ТЕОРЕМА 1 .....	62
ТЕОРЕМА 2 .....	63
ТЕОРЕМА 3 .....	64
ТЕОРЕМА 4 (О ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ)....	64
<b>ЛЕКЦИЯ 11. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.....</b>	<b>67</b>
Первые интегралы нормальной системы ОДУ 1-го порядка .....	67
ЛЕММА 1.....	67
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПИ.....	68
НЕЗАВИСИМЫЕ ПИ .....	68
ТЕОРЕМА 1 .....	69
ТЕОРЕМА 2 (О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ) .....	70
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (УЧП).....	70
ЛЕММА 2.....	71
ТЕОРЕМА 3 (ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УЧП) .....	71
<b>ЛЕКЦИЯ 12. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ....</b>	<b>73</b>
ТЕОРЕМА .....	73
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УЧП 1-ГО ПОРЯДКА .....	74
ТЕОРЕМА 2 .....	74
Задача Коши для квазилинейного УЧП .....	76

---

ТЕОРЕМА .....	76
<b>ЛЕКЦИЯ 13. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ....</b>	<b>79</b>
ФУНКЦИОНАЛ.....	79
ПРИМЕРЫ ФУНКЦИОНАЛОВ .....	80
ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА .....	82
ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА.....	83
ТЕОРЕМА 1 (НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА) .....	83
<b>ЛЕКЦИЯ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОБХОДИМОГО УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ.....</b>	<b>85</b>
УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА В ЗАДАЧЕ ВИ.....	86
ТЕОРЕМА 1 .....	86
НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.....	88
ТЕОРЕМА 2 .....	88
<b>ЛЕКЦИЯ 15. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ....</b>	<b>91</b>
ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ФУНКЦИИ 2-Х АРГУМЕНТОВ .....	91
ОЛВИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ .....	91
ТЕОРЕМА 1 .....	92
<b>ЛЕКЦИЯ 16. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.</b>	<b>95</b>
ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ .....	95
ТЕОРЕМА (НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА) .....	95
ВАРИАЦИОННОЕ СВОЙСТВО СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.....	97

## Лекция 1. Основные понятия теории устойчивости

### Решение задачи Коши от начальных данных на бесконечном полуинтервале

Рассмотрим, что есть устойчивость и чем она отличается от других понятий, которые уже были рассмотрены в первой части курса. Зафиксируем, что когда идет речь об устойчивости, мы говорим о фиксированности:

устойчивость – зависимость

Поскольку зависимость решения от начальных данных как частный случай зависимости решения задачи Коши от параметров уже обсуждалось в прошлой части, то в первую очередь следует выяснить, в чем заключаются отличия этих двух понятий. Рассмотрим пример:

$$y = y(t), a \in \mathcal{R} \quad (1.1)$$

$$y'(t) = ay(t), y(0) = y_0 \quad (1.2)$$

Если мы исследуем зависимость от начальных данных, то такую зависимость принято в записи функции указывать в качестве дополнительного параметра:

$$y(t) = y(t; y_0) \quad (1.3)$$

Найдем ответ методом разделения переменных:

$$y(t; y_0) = y_0 e^{at} \quad (1.4)$$

Если мы исследуем зависимость от начальных данных на фиксированном отрезке  $([0, T], 0 < T < +\infty) \forall a \in \mathcal{R}$ , то

$$\tilde{y}_0 \Rightarrow y(t; \tilde{y}_0) \Rightarrow |y(t; y_0) - y(t; \tilde{y}_0)| = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{at} \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{|a|T} \quad (1.5)$$

$$y_0 - \tilde{y}_0 \rightarrow 0 \Rightarrow y(t; y_0) - y(t; \tilde{y}_0) \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

Как изменится ситуация, если необходимо отслеживать зависимость двух решений от начальных данных уже не на конечном, а на бесконечном отрезке? Рассмотрим зависимость  $[0, +\infty)$  – так мы вынуждены рассматривать разные случаи. Разность соответствующих решений связана с разностью начальных данных с помощью экспоненты, а поскольку  $t$  уже на неограниченном множестве, то важно поведение экспоненты. Так, возникают три случая:

$$1) a < 0, e^{at} < 1$$

$$|y(t; y_0) - y(t; \tilde{y}_0)| < |y_0 - \tilde{y}_0| \quad (1.7)$$

$$\forall t \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon), \quad (1.8)$$

где  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$|y_0 - \tilde{y}_0| < \varepsilon \Rightarrow |y(t; y_0) - y(t; \tilde{y}_0)| < \varepsilon \quad (1.9)$$

Дополнительно, исходя из ранее записанной нами оценки,

$$|y(t; y_0) - y(t; \tilde{y}_0)| \rightarrow 0, \quad (1.10)$$

когда  $t \rightarrow +\infty$ . Рассмотрим следующий случай:

2)  $a = 0 \Rightarrow$  справедливо неравенство (1.7), (1.8), (1.9)

Однако, нельзя утверждать, что концы траектории сближаются на бесконечности, так как на всех точках  $t$  они равны одному и тому же значению:

$$|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)| \neq 0 \quad (1.11)$$

3)  $a > 0$

Так, как близко мы бы не брали начальные данные, всегда найдется момент времени, начиная с которого разность решений выходит за окрестность  $\varepsilon$ :

$$\exists \varepsilon > 0 (\varepsilon = 1): \forall \delta > 0 \quad (1.12)$$

$$\exists \tilde{y}_0 |y_0 - \tilde{y}_0| < \delta^-, \exists T = T(\delta) \quad (1.13)$$

$$|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)| > \varepsilon \quad (1.14)$$

Тогда разность решений

$$|y|t, y_0) - y|t, \tilde{y}_0)| = |y_0 - \tilde{y}_0| \quad (1.15)$$

$$\tilde{y}_0 = y_0 + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} e^{at} > 1 \quad (1.16)$$

$$at > \lg \frac{2}{\delta} \quad (1.17)$$

$$t(\delta) > \frac{1}{a} \lg \left( \frac{2}{\delta} \right) \quad (1.18)$$

Для того, чтобы понять, какие геометрические свойства стоят за приведенными выкладками, изобразим графики для каждого из случаев.

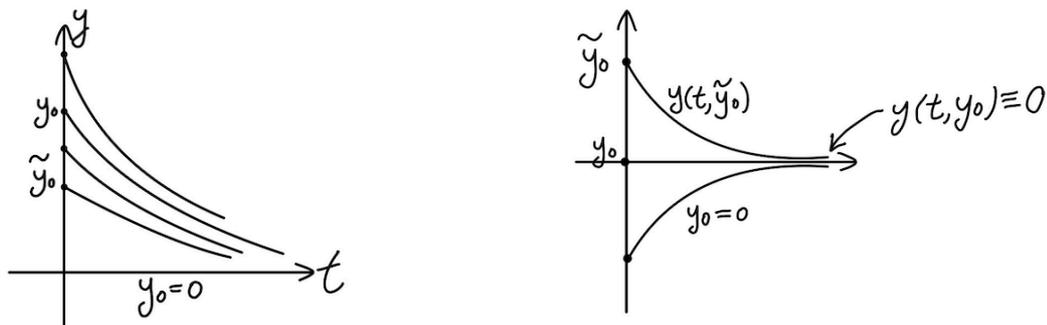


Рис. 1.1. Графическое изображение первого случая.

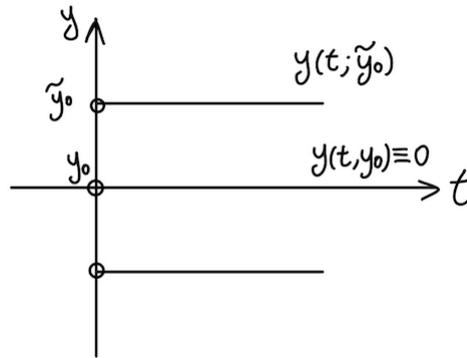


Рис. 1.2. Графическое изображение второго случая.

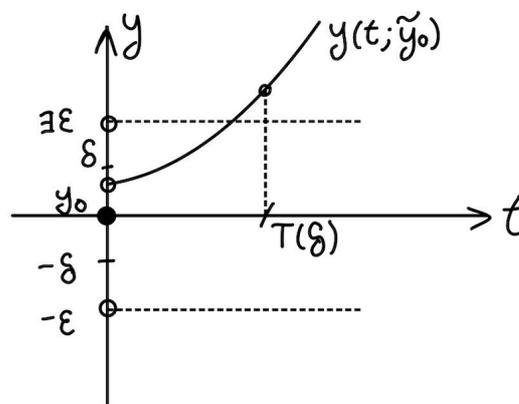


Рис. 1.3. Графическое изображение третьего случая.

Так, переход в рассмотрении свойства зависимости решений от начальных данных на бесконечном отрезке более разнообразен и более сложен.

### Основные определения

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений для вектор-функции

$$\bar{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T \quad (1.19)$$

Так, задача Коши для нормальной системы:

$$(1) = \begin{cases} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases}, \quad (1.20)$$

где  $\bar{f}(t, \bar{y}) = (f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n))^T$ . Будем предполагать, что  $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$  и  $\frac{df_1}{dy_j}(t, y_1, \dots, y_n)$  определены непрерывно на  $[t_0, +\infty] \times \mathcal{R}^n$ . Тогда можно сослаться на теорему существования и единственности решений (Э!) на некотором отрезке  $[t_0, T]$ . Если мы хотим исследовать зависимость от начальных данных, то необходимо уметь

сравнивать решения. Так, в рассмотренном ранее примере мы сравнивали скалярные функции. Воспользуемся Евклидовой нормой:

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \quad (1.21)$$

Определение устойчивости Ляпунова тесно связано с нашим соотечественником, Ляпуновым Александром Михайловичем (свою докторскую диссертацию он защищал в МГУ в 1892 г.) Так, зависимость решений начальных данных на бесконечном отрезке (где  $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$  – решение задачи Коши (первое), отвечающее начальным данным  $\bar{y}_0$ ) может быть определена следующим образом: решение  $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$  задачи Коши (1), определенное на  $[t_0, +\infty)$  называется устойчивым по Ляпунову, если:

1)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$$\forall \text{ решение } \bar{y}(t; \tilde{y}_0) \text{ определено для } t \in [t_0, +\infty), \|\bar{y}_0 - \tilde{y}_0\| < \delta$$

2)  $\forall t \geq t_0$  будет иметь место неравенство

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}_0) - \bar{y}(t; \tilde{y}_0)\| < \varepsilon \quad (1.22)$$

Проиллюстрируем, что это будет означать в двумерном случае:

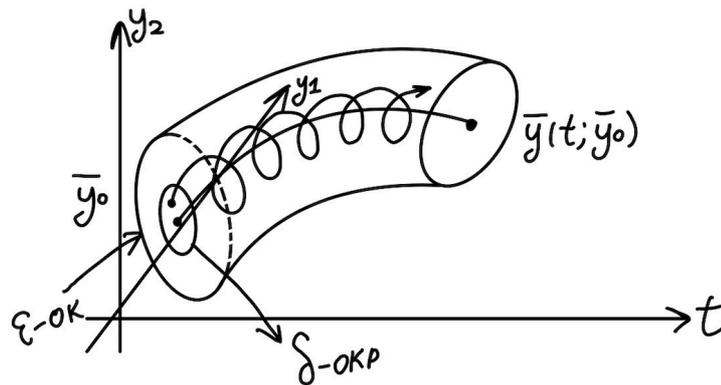


Рис. 1.4. Графическое изображение рассматриваемого случая ( $\varepsilon$  – трубка).

По определению, если решение не является устойчивым по Ляпунову, то оно называется неустойчивым. Так, согласно этому описанию,

$$\forall \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \quad \forall T = T(\delta) \quad (1.23)$$

$$\|\bar{y}_0 - \tilde{y}_0\| < \delta, \text{ но } \|\bar{y}(t; \bar{y}_0) - \bar{y}(t; \tilde{y}_0)\| \geq \varepsilon, t = T(\delta) \quad (1.24)$$

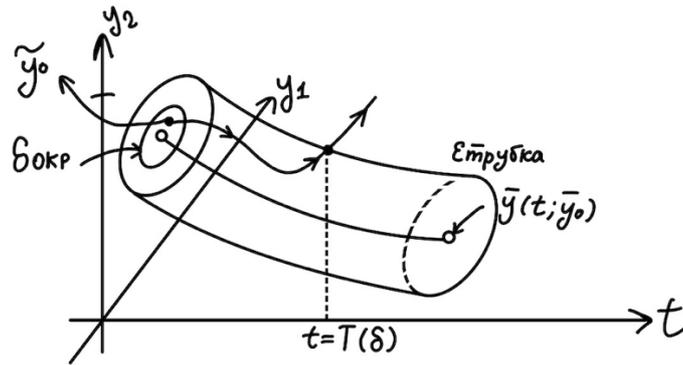


Рис. 1.5. Графическое изображение рассматриваемого случая ( $\epsilon$  – трубка).

Рассмотрим третий случай – определение асимптотической устойчивости:

3) Решение  $\bar{y}(t; \tilde{y}_0)$  задачи Коши (1) называется асимптотически устойчивым, если выполнены следующие условия:

– решение  $\bar{y}(t; \tilde{y}_0)$  – устойчиво по Ляпунову;

– существует  $\forall \delta_1 > 0$ :  $\forall \tilde{y}_0: \|\bar{y}_0 - \tilde{y}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{y}(t; \bar{y}_0) - \bar{y}(t; \tilde{y}_0)\| = 0$ ;

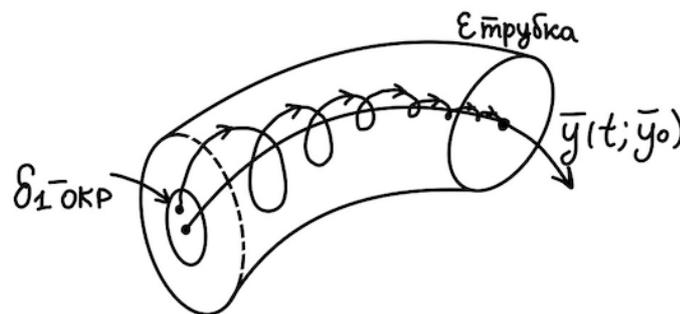


Рис. 1.6. Графическое изображение рассматриваемого случая ( $\epsilon$  – трубка).

Теперь мы располагаем достаточным инструментарием для того, чтобы охарактеризовать случай, возникший в примере. Так,

$a < 0$  – асимптотическая устойчивость

$a = 0$  – не асимптотическая устойчивость по Ляпунову

$a > 0$  – неустойчивость

Рассмотрим некоторые упрощения.

### Редукция к нулевому решению

Будем предполагать, что

$$(1') = \begin{cases} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\bar{\theta} = (0, \dots, 0)^T \quad (1.26)$$

Пусть  $\bar{f}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta} \Rightarrow \bar{y}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  – нулевое решение (1).

Рассмотрим первое определение: нулевое решение (1) устойчивое по Ляпунову, если

1)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ :

$$\forall \tilde{y}_0, \|\tilde{y}_0\| < \delta \Rightarrow \bar{y}|t; \tilde{y}_0 \text{ определен на } \forall t \geq t_0$$

2)  $\forall t > t_0 \Rightarrow \|\bar{y}|t; \tilde{y}_0\| < \varepsilon$

Нулевое решение асимптотически устойчиво, если

1) Оно устойчиво по Ляпунову

2) Существует  $\delta_1 > 0: \forall \|\tilde{y}_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|\bar{y}|t; \tilde{y}_0\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$

Пусть  $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$  – фиксированное решение задачи (1). Обозначим  $\bar{y}(t)$  – другое решение (1). Введем  $\bar{x}|t = \bar{y}(t) - \bar{y}(t; \bar{y}_0)$  и возьмем производную:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \frac{d\bar{y}(t)}{dt} - \frac{d\bar{y}(t; \bar{y}_0)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) - \bar{f}(t, \bar{y}(t; \bar{y}_0)) \Rightarrow \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{g}(t, \bar{x}(t)), \quad (1.27)$$

где

$$\bar{y}(t) = \bar{x}(t) + \bar{y}(t; \bar{y}_0) \quad (1.28)$$

$$\bar{g}(t, \bar{x}) = \bar{f}(t, \bar{x} + \bar{y}(t; \bar{y}_0)) - \bar{f}(t, \bar{y}(t; \bar{y}_0)) \quad (1.29)$$

$\bar{y}(t; \bar{y}_0)$  – известная функция  $t$

При этом справедливо свойство функции:

$$\bar{g}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta} \quad (1.30)$$

Если  $\bar{x}(t) \equiv 0 \Rightarrow \bar{x}(t_0) = \bar{y}(t_0) - \bar{y}(t_0; \bar{y}_0)$

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \quad (1.31)$$

Решение  $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$  в (1) соответствует решению  $\bar{x}(t; \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  в задаче

$$(2) = \begin{cases} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{g}(t, \bar{x}(t)) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (1.32)$$

## Вспомогательные леммы

Лемма 1

Пусть  $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ ,  $b_{ij}(t) \in \mathcal{R}$ .

$$|b_{ij}(t)| \leq b(t), \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (1.33)$$

Если  $\bar{x}(t) = ((x_1(t)), \dots, (x_n(t)))^T$ ,  $\bar{y}(t) = ((y_1(t)), \dots, (y_n(t)))^T$

$$\bar{y}(t) = B(t)\bar{x}(t), \quad (1.34)$$

То есть оценка, связывающая Евклидовы нормы и  $x(t)$ :

$$\|\bar{y}(t)\| \leq nb(t)\|\bar{x}(t)\| \quad (1.35)$$

Для доказательства леммы вспомним правила, которым вычисляется произведение матрицы на вектор и найти  $y_j(t)$ :

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^n b_{jk}(t)x_k(t) \quad (1.36)$$

Воспользуемся неравенством Коши — Буняковского:

$$|y_j(t)| \leq \sum_{k=1}^n |b_{jk}(t)| |x_k(t)| \leq b(t) \sum_{k=1}^n 1 * |x_k(t)| \leq \quad (1.37)$$

$$\leq b(t) (\sum_{k=1}^n 1^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n x_k^2(t))^{\frac{1}{2}} = b(t) \sqrt{n} |x(t)|$$

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2(t) \leq \sum_{j=1}^n b^2(t)n \|x(t)\|^2 \quad (1.38)$$

$$= n^2 b^2(t) \|x(t)\|^2 \Rightarrow \|y(t)\| \leq nb(t) \|x(t)\|,$$

где  $\sum_{j=1}^n = n$ . Вторая лемма показывает, как пересчитать функции, если она связаны операцией интегрирования.

Лемма 2

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \left( (y_1(t)), \dots, (y_n(t)) \right)^T - \text{непрерывный при } t \geq 0$$

Тогда  $\left\| \int_0^t \bar{y}(\xi) d\xi \right\| \leq \sqrt{n} \int_0^t \|\bar{y}(\xi)\| d\xi$ . Докажем лемму:

$$\int_0^t \bar{y}_j(\xi) = (I_1(t), \dots, I_n(t))^T, \quad (1.39)$$

где  $I_j(t) = \int_0^t y_j(\xi) d\xi$ . Оценим норму компонента:

$$\Rightarrow |I_j(t)| = \left| \int_0^t y_j(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^t |y_j(\xi)| d\xi \leq \int_0^t \|y(\xi)\| d\xi \quad (1.40)$$

$$|y_j(\xi)| = \sqrt{y_j^2(\xi)} \leq \sqrt{\sum_{m=1}^n y_m^2(\xi)} = \|y(\xi)\| \quad (1.41)$$

Оценим норму:

$$\|I(t)\|^2 = \sum_{j=1}^n I_j^2(t) \leq \sum_{j=1}^n 1 * \left( \int_0^t \|y(\xi)\| d\xi \right)^2 = \sqrt{n} \left( \int_0^t \|y(\xi)\| d\xi \right) \quad (1.42)$$

## Лекция 2. Исследование на устойчивость по Ляпунову ОДУ с постоянными коэффициентами

### Решение задачи Коши от начальных данных на бесконечном полуинтервале

Будем обозначать  $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ . Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается в следующем виде (будем считать, что начальное условие ставится в точке  $t_0 = 0$ ):

$$(3) = \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt}(t) = A\bar{x}(t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Матрица  $A$ :

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{R}^{n \times n} \quad (2.2)$$

Решение задачи Коши (3) с начальным условием в точке  $t = 0$  ( $\bar{x}_0$ ) и условием прохождения через точку  $x_0$  обозначается как  $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ . Для того, чтобы учесть специфику линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3

Пусть  $Y(t)$  – ФМ (фундаментальная матрица) однородной системы.

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) \quad (2.3)$$

С ее помощью можно составить матрицант:

$$Z(t, \tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau) \quad (2.4)$$

Будем считать, что матрица  $A$  обладает следующими свойствами:

$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы

$$p = \max \operatorname{Re} \lambda_k,$$

где  $p$  – максимальная вещественная часть собственных значений. Тогда имеют место утверждения:

- 1) Коэффициенты уравнения не зависят от  $t$  (система является автономной). В этом случае матрицант удовлетворяет следующему условию:

$$Z(t, \tau) = Z(t - \tau, 0) \quad (2.5)$$

- 2) Для любой неотрицательной  $\gamma$  найдется такая константа, что компоненты матрицанта оцениваются через экспоненту:

$$\forall \gamma > 0 \exists c_\gamma > 0: \quad (2.6)$$

$$|Z_{ij}(t, \tau)| \geq c_\gamma e^{(p+\gamma)(t-\tau)}, \quad t \geq \tau \quad (2.7)$$

Второе свойство позволяет оценить модуль комплексно значащих элементов. Докажем лемму:

- 1) Для доказательства первой части заметим, что матрицант является решением задачи Коши для матричного дифференциального уравнения.

$$Y(t) - \text{ФМ}, Y(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)), \quad (2.8)$$

где  $(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t))$  ФСР (фундаментальная система решений).  $Z(t, \tau)$  является решением задачи Коши ФСР для матричного уравнения. Тогда

$$\frac{dZ(t, \tau)}{dt} = AZ(t, \tau), \quad Z(t, \tau) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Произведем замену переменных:

$$s = t - \tau, \quad t = s + \tau \quad (2.10)$$

Это позволяет перейти к дифференцированию по переменной  $s$  и ввести функцию  $\tilde{Z}$ . Рассмотрим

$$\tilde{Z}(s) = Z(s + \tau, \tau) \Rightarrow \frac{d\tilde{Z}(s)}{ds} = A\tilde{Z}(s), \quad \tilde{Z}(0) = E \quad (2.11)$$

Сравним (1.9) при  $\tau = 0$ :

$$\frac{dZ(t, 0)}{dt} = AZ(t, 0), \quad Z(0, 0) = E \quad (2.12)$$

Сравнивая задачи Коши (1.11) и (1.12), получаем, что это одна и та же задача, где искомые функции обозначены разными символами. Воспользуемся единственностью решения задачи Коши:

$$\tilde{Z}(s) \equiv Z(s, 0) \Leftrightarrow Z(t, \tau) = Z(t - \tau, 0) \quad (2.13)$$

- 2) Для доказательства второй части понадобится вид фундаментальной матрицы.

Помня, что  $Z_{ij}(t, \tau) = Z_{ij}(s, 0)$  и  $(t - \tau) = s$ , рассмотрим  $Z(s, 0) = Y(s)Y^{-1}(0)$ . Фундаментальная матрица состоит из функции фундаментальной системы решений. Согласно построению ФСР, это есть

$$Y(s) \text{ вект. многочлен } * e^{\lambda_n t}$$

Умножение на  $Y^{-1}(0)$  не изменяет коэффициент:

$$Y_{ij}(s) = q_{ij}(s)e^{\lambda_k s}, \quad \deg q_{ij}(s) \leq n - 1 \quad (2.14)$$

$$|Y_{ij}(s)| = |q_{ij}(s)| * |e^{\lambda_k s}| \quad (2.15)$$

Рассмотрим комплексную экспоненту:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \ni \lambda_k &= \delta_k + i\omega_k, \quad e^{\lambda_k s} = e^{\delta_k s + i\omega_k s} = e^{\delta_k s} * e^{i\omega_k s} = \\ &= e^{\delta_k s} [\cos \omega_k s + i \sin \omega_k s] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\delta_k = \operatorname{Re} \lambda_k, \quad \omega_k = \operatorname{Im} \lambda_k \quad (2.17)$$

$$|e^{\lambda_k s}| = e^{\delta_k s} |e^{i\omega_k s}| = e^{\delta_k s}, \quad s \geq 0 \quad (2.18)$$

$$|Y_{ij}(s)| \leq |q_{ij}(s)| e^{\delta_k s} \leq |q_{ij}(s)| e^{ps}, \quad (2.19)$$

так как  $\delta_k \leq p$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$ . Из курса математического анализа можно прийти к тому, что

$$\forall \gamma > 0 \quad \exists C_{ij}: \quad |q_{ij}(s)| \leq e^{\gamma s}, \quad s \geq 0 \quad (2.20)$$

Так, многочлен не может расти быстрее экспоненты. Таким образом,

$$|Y_{ij}(s)| \leq c_{ij} e^{(p+\gamma)s} \leq c'_\gamma e^{(p+\gamma)s} \quad (2.21)$$

Так как набор индексов конечен,

$$c = c'_\gamma = \max c_{ij}, \quad ij = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

Таким образом, каждый элемент фундаментальной матрицы оценивается через  $c'_\gamma$  на соответствующую экспоненту.

$$\Rightarrow \forall \gamma > 0 \quad \exists c_\gamma > 0: \quad |Z_{ij}(s, 0)| \leq c_\gamma e^{(p+\gamma)s} \quad (2.23)$$

$$s = t - \tau \geq 0 \quad (2.24)$$

### Теорема об асимметричной устойчивости

Пусть матрица  $A$  такая, как в условии задачи,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  обозначают собственные значения матрицы и выполнено условие

$$\square \forall k = 1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (2.25)$$

Тогда утверждается, что нулевое решение  $\bar{x}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  асимптотически устойчиво. Повторно зафиксируем систему:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{x}^0 \\ \bar{x}(0) \end{cases} \quad (2.26)$$

Согласно определению устойчивости необходимо выяснить, как ведет себя решение  $x_0$ . Оценим норму решения:

$$\bar{x}(t; \bar{x}^0) = Z(t, 0) \bar{x}^0 \quad (2.27)$$

Используем Лемму 1

$$Z(t, 0) = B(t), \quad b(t) = c_\gamma e^{(p+\gamma)t}, \quad (2.28)$$

где  $\forall \gamma > 0, \exists c_\gamma > 0$ . Осуществим выбор  $\gamma > 0$  таким образом, чтобы  $p + \gamma < 0$ . Это возможно, так как

$$p = \max \operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

Обозначим  $p + \gamma = -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Таким образом, выбор состоит в том, чтобы

$$b(t) = c_\gamma e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad t \geq 0 \quad (2.30)$$

Тогда в силу Леммы 1

$$\|\bar{x}(t; \bar{x}^0)\| \leq nb(t)\|\bar{x}^0\| \leq nc_\gamma e^{-\alpha t}\|\bar{x}^0\| \quad (2.31)$$

Согласно определению, необходимо доказать два факта:

1) Устойчивость  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2nc_\gamma}$

$$\Rightarrow \|\bar{x}^0\| < \delta(\varepsilon) \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}(t; \bar{x}^0)\| \leq \frac{nc_\gamma e^{-\alpha t} \varepsilon}{2nc_\gamma} < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.33)$$

2) Для доказательства асимптотической устойчивости фиксируем  $\delta_1 = 1$ . Тогда используя то, что  $\|\bar{x}^0\| \leq \delta_1 = 1$ :

$$\Rightarrow \|\bar{x}(t; \bar{x}^0)\| \leq nc_\gamma e^{-\alpha t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \text{ т. к. } \alpha > 0 \quad (2.34)$$

### Теорема об устойчивости

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  по-прежнему обозначают собственные значения матрицы,  $Re \lambda_k \leq 0$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$ . Также пусть для  $m$ :  $Re \lambda_m = 0$ , размерность собственного подпространства совпала с его кратностью  $\lambda_m$ . Тогда нулевое решение  $\bar{x}(t; \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  устойчиво (1) по Ляпунову, но не асимптотически (2).

1) Рассмотрим матрицант  $Z(t, 0) = Y(t)Y^{-1}(0)$  и уточним зависимость  $Y_{ij}(t)$ .

Так, можно ввести следующие случаи: если  $Y_{ij}(t)$  – компонент функции с ФРС, соответствующей  $\lambda_k$  с  $Re \lambda_k < 0$ , то

$$\Rightarrow |Y_{ij}(t)| \leq c_{ij} e^{(Re \lambda_k + \gamma)t} \quad (2.35)$$

Так, всегда можно выбрать, насколько  $\gamma > 0$ ,  $Re \lambda_k + \gamma \leq 0$ .

$$\Rightarrow |Y_{ij}(t)| \leq c_{ij}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.36)$$

Рассмотрим второй случай, когда  $Y_{ij}(t)$  соответствует  $\lambda_m$  так, что  $Re \lambda_m = 0$ ,  $\lambda_m = i\omega_m$ . Тогда

$$\text{часть ФРС, отвечающая } \lambda_m \Rightarrow \bar{h}_m e^{\lambda_m t}, \quad (2.37)$$

где  $\bar{h}_m$  – собственный вектор. В этом случае,

$$|Y_{ij}(t)| = |h_{ij}| |e^{\lambda_m t}| = |h_{ij}| |e^{i\omega_m t}| \leq |h_{ij}| = c_{ij} \quad (2.38)$$

Так, во всех рассмотренных случаях имеет место оценка для элементов фундаментальной матрицы.

$$|Y_{ij}(t)| \leq c_{ij} \quad (2.39)$$

Вспоминая, что  $Z(t, 0) = Y(t)Y^{-1}(0)$ , где  $Y^{-1}(0)$  – матрица с постоянными коэффициентами,

$$\Rightarrow |Z_{ij}(t, 0)| \leq c \quad \forall t \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.40)$$

$$c = \max c_{ij} \quad (2.41)$$

Оценим норму через Лемму 1:

$$\|\bar{x}(t; \bar{x}^0)\| = \|Z(t, 0)\bar{x}^0\| \leq nb(t)\|\bar{x}^0\| = nc\|\bar{x}^0\|, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.42)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2nc}: \|\bar{x}^0\| < \delta(\varepsilon) \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}(t; \bar{x}^0)\| \leq \frac{nc*\varepsilon}{2nc} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (2.44)$$

Так, доказана устойчивость по Ляпунову. Важно также доказать, что нет асимптотической устойчивости (2).

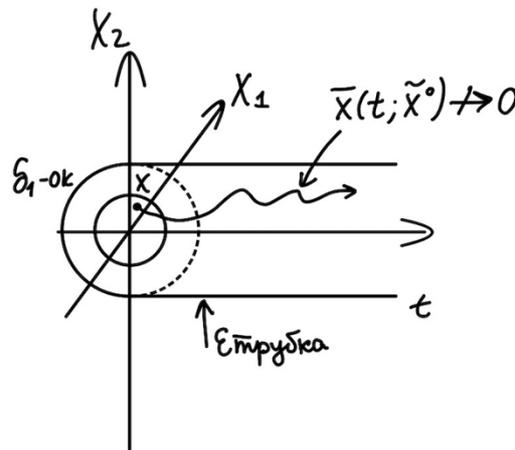


Рис. 2.1. Графическое изображение отсутствия асимптотической устойчивости.

- 2) Рассмотрим  $\lambda_m$  такое, что  $Re \lambda_m = 0$ , соответствующее собственный вектор  $\bar{h}_m$ ,  $\|\bar{h}_m\| = 1$ . Тогда  $\bar{h}_m e^{\lambda_m t}$  – решение системы (2.1). Рассмотрим

$$\bar{x}(t; \bar{x}^0) = \frac{\delta_1}{2} Re(\bar{h}_m e^{\lambda_m t}), \quad (2.45)$$

что также является решением системы

$$t = 0 \Rightarrow \bar{x}^0 = \frac{\delta_1}{2} Re(\bar{h}_m) \Rightarrow \|\bar{x}^0\| < \delta_1 \quad (2.46)$$

Возьмем случай, когда

$$\lambda_m = i\omega_m, \quad \omega_m \neq 0 \quad (2.47)$$

Тогда можно рассмотреть последовательность

$$t_k = \frac{2\pi}{\omega_m} k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty \quad (2.48)$$

$$\bar{x}(t_k; \bar{x}^0) = \frac{\delta_1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{h}_m e^{i\omega_m^* \frac{2\pi}{\omega_m} k} \right) = \frac{\delta_1}{2} \operatorname{Re}(\bar{h}_m) \rightarrow 0 \quad (2.49)$$

### Теорема о неустойчивости нулевого решения

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $A$  и выполнено хотя бы одно из условий:

- 1) Существует собственное значение с положительной вещественной частью:

$$\exists m \in \{1, \dots, n\}: \operatorname{Re} \lambda_m > 0$$

- 2) Существует такое собственное значение матрицы  $A$ , что

$$\exists m \in \{1, \dots, n\}: \operatorname{Re} \lambda_m = 0,$$

причем размерность собственного подпространства меньше кратности  $\lambda_m$ . Тогда нулевое решение  $\bar{x}(t; \bar{\theta}) \equiv \theta$  неустойчиво по Ляпунову. Рассмотрим доказательства обоих условий:

- 1) Обозначим  $\lambda_m = p + iq, p > 0$ . Соответствующий  $\lambda_m$  собственный вектор

$$\bar{h}_m = \bar{h}_R + i\bar{h}_I, \quad \bar{R}_{R,I} \in \mathcal{R}^n, \quad (2.50)$$

причем  $\bar{R}_{R,I}$  линейно независимы. Будем считать, что  $\|\bar{h}_m\| = 1$  и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \bar{x}(t; \bar{x}^0) &= \frac{\delta}{2} \operatorname{Re}[\bar{h}_m e^{\lambda_m t}] = \frac{\delta}{2} \operatorname{Re}[(\bar{h}_R + i\bar{h}_I)^{pt} e^{(\cos qt + i \sin qt)}] = \\ &= \frac{\delta}{2} \operatorname{Re}[\bar{h}_R \cos qt - \bar{h}_I \sin qt] \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$e^{\lambda_m t} = e^{(p+iq)t} = e^{pt} e^{iqt} = e^{pt} (\cos qt + i \sin qt) \quad (2.52)$$

Возьмем  $\varepsilon = 1$ :  $\forall \delta > 0 \exists \bar{x}^0, \|\bar{x}^0\| < \delta$  и  $T(\delta): \|\bar{x}(T(\delta), \bar{x}^0)\| > 1$ . Рассмотрим

$$t_k = \frac{2\pi k}{q}, \quad q \neq 0 \quad (2.53)$$

$$\bar{x}(t, \bar{x}^0) = \frac{\delta}{2} e^{pt_k} \bar{h}_R * 1 \quad (2.54)$$

$$\cos t_k = 1, \quad \sin t_k = 0, \quad t_k \rightarrow \infty \quad (2.55)$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}(t_k, \bar{x}^0)\| = \frac{\delta}{2} e^{pt_k} \|\bar{h}_R\| \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty \quad (2.56)$$

С другой стороны,

$$\|\bar{x}^0\| = \frac{\delta}{2} \|\operatorname{Re} \bar{h}_m\| \leq \frac{\delta}{2} \|\bar{h}_m\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \quad (2.57)$$

- 1) По правилу построения ФСР задачи,  $\bar{h}_m$  – собственный вектор (СВ),  $\bar{h}^{(1)}_m$  – присоединенный. Одна из функций будет иметь вид

$$\left( h_m^{(1)} + \frac{t}{1!} \bar{h}_m \right) e^{\lambda_m t} \quad (2.58)$$

Сделаем нормировку и рассмотрим функцию

$$\bar{x}(t; \bar{x}_0) = \frac{\delta}{2} \operatorname{Re} \left( h_m^{(1)} + \frac{t}{1!} \bar{h}_m \right) e^{\lambda_m t} \quad (2.59)$$

Если вещественная часть равна нулю, то

$$\lambda_m = iq \quad (2.60)$$

Пусть  $q > 0$ . Если  $q = 0$ , решение аналогично. Тогда

$$e^{iqt} = \cos qt + i \sin qt \quad (2.61)$$

$$\bar{h}_m = \bar{h}_R + i\bar{h}_I, \quad \bar{h}^{(1)} = \bar{h}_R^{(1)} + i\bar{h}_I^{(1)} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \bar{x}^0) &= \frac{\delta}{2} \left[ (\bar{h}_R^{(1)} + t\bar{h}_R) \cos qt - (\bar{h}_I^{(1)} + t\bar{h}_I) \sin qt \right] = \\ &= t \frac{\delta}{2} \left[ (h_R \cos qt - h_I \sin qt) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right], \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.63)$$

Рассмотрим  $t_k = \frac{2\pi k}{q}, q > 0, t_k \rightarrow +\infty$ :

$$\bar{x}(t, \bar{x}^0)|_{t=t_k} = t_k \frac{\delta}{2} h_R \quad (2.64)$$

и неограниченно, когда  $t \rightarrow \infty$ .

$$\|\bar{x}^0\| = \frac{\delta}{2} \|\bar{h}_R\| < \delta \quad (2.65)$$

Так, теоремы 1,2,3 охватывают все возможные случаи, существующие относительно собственных значений, присоединенных к матрице  $A$ .

### Лекция 3. Исследование на устойчивость по первому приближению. Первый метод Ляпунова

#### Формулирование условий

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{y}(t)) \quad (3.1)$$

$$\bar{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T \quad (3.2)$$

$$\bar{f}(\bar{y}) = (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n))^T, \quad \bar{f}(\bar{\theta}) = \bar{\theta} \quad (3.3)$$

Относительно компонентов правой части будем предполагать, что функции непрерывно дифференцируемые. Пусть  $\exists f_i, \frac{df_i}{dy_i}(\bar{y})$  непрерывны в некоторой окрестности нуля:  $\bar{\theta} = (0, \dots, 0)^T$ . Рассматривается нулевое решение  $(y(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta})$  и исследуется его устойчивость. Тогда

$$\bar{f}(\bar{y}) = f(\bar{\theta}) + A\bar{y} + R(\bar{y}) \quad (3.4)$$

$$f(\bar{\theta}) = \bar{\theta}, \quad A = \left( \frac{df_i}{dy_j}(\bar{\theta}) \right)_{ij=1, \dots, n}, \quad R(\bar{y}) = o(\|\bar{y}\|) \quad (3.5)$$

$$\forall \sigma > 0, \exists \rho > 0: \|\bar{y}\| < \rho \Rightarrow \|R(\bar{y})\| < \sigma \|\bar{y}\| \quad (3.6)$$

Иными словами, это условие можно выразить так:

$$\frac{\|R(\bar{y})\|}{\|\bar{y}\|} \rightarrow 0, \quad \bar{y} \rightarrow \bar{\theta} \quad (3.7)$$

Перед тем как сформулировать теорему, докажем вспомогательную Лемму:

#### Лемма 1

Пусть выполнены условия относительно  $\bar{f}$  и собственные значения матрицы  $A$   $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  таковы, что  $Re \lambda_k < 0, k = 1, \dots, n$ . Тогда существуют  $\exists \delta_0 > 0, \rho_0 \geq \delta_0 > 0$  такие, что если решение стартует из

$$\|\bar{y}^0\| < \delta_0 \Rightarrow \bar{y}(t; \bar{y}^0), \quad (3.8)$$

то решение задачи Коши

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + R(\bar{y}(t)) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \end{cases} \quad (3.9) \text{лю}$$

$$\exists \forall t \geq 0, \|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| < \rho_0 \quad (3.10)$$

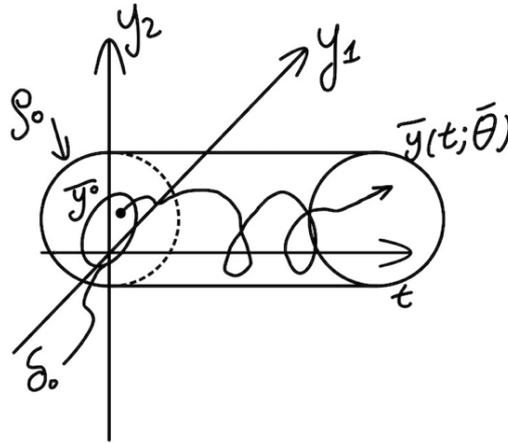


Рис. 3.1. Графическое изображение рассматриваемой Леммы.

Докажем рассматриваемую Лемму. Согласно теореме существования и единственности решения, существует решение задачи  $\bar{y}(t; \bar{y}^0)$  на некотором отрезке  $[0, T]$ . Проведем редукцию к интегральному уравнению:

$$\bar{f}(t) = R(\bar{y}(t; \bar{y}^0)) \Rightarrow \bar{y}(t; \bar{y}^0) \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + R(\bar{y}(t)) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Воспользуемся формулой, рассмотренной на прошлых лекциях:

$$\bar{y}(t) = Z(t, 0)\bar{y}^0 + \int_0^t Z(t, \tau) dt, \quad (3.13)$$

где первое слагаемое отвечает решению однородного уравнения с начальным данным  $\bar{y}^0$ , а второе – решению неоднородного уравнения с нулевым начальным условием. Запишем формулу, задающую решение уравнения в интегральном виде:

$$(2) \quad \bar{y}(t; \bar{y}^0) = Z(t, 0)\bar{y}^0 + \int_0^t Z(t, \tau)R(\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)) d\tau \quad (3.14)$$

$$Z(t) = Y(t)Y^{-1}(\tau), \quad (3.15)$$

где  $Y(t)$  – фундаментальная матрица линейной системы  $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$ . Из доказательства теоремы 1 об асимптотической устойчивости линейной системы можно сделать вывод, что в условиях задачи все вещественные части отрицательны. Воспользуемся полученной в той теореме оценкой:

$$\exists M_1 > 0, \alpha < 0: \forall \bar{y}^0 \Rightarrow Z(t, 0)\bar{y}^0 \leq M_1 e^{\alpha t} \|\bar{y}^0\| \quad (3.16)$$

Аналогичным образом можно оценить норму выражения под знаком интеграла  $((t, \tau)R(\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)))$ :

$$\exists M_2 > 0, \alpha < 0: \|Z(t, \tau)\bar{r}\| \leq M_2 e^{\alpha(t-\tau)} \|\bar{r}\|, \quad t - \tau \geq 0 \quad (3.17)$$

Применим неравенство и для всех  $t$ :  $\exists$  решение, запишем оценку:

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq \|Z(t; 0)\bar{y}^0\| + \sqrt{n} \int_0^t \|Z(t, \tau)R(\bar{y}(\tau; \bar{y}^0))\| d\tau \quad (3.18)$$

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq M_1 e^{\alpha t} \|\bar{y}^0\| + M_2 \sqrt{n} \int_0^t e^{(t-\tau)} \|R(\bar{y}(\tau; \bar{y}^0))\| d\tau \quad (3.19)$$

Обозначим  $M = \max\{M_1, M_2 \sqrt{n}\}$ , тогда

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq M e^{\alpha t} \|\bar{y}^0\| + M \int_0^t e^{(t-\tau)} \|R\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)\| d\tau \quad (3.20)$$

Зафиксируем выбор констант:  $\sigma > 0$ :  $\frac{M\delta}{|\alpha|} \leq \frac{1}{4}$ . Тогда согласно условию (3.6):

$$\exists \rho_0 > 0: \forall \bar{y}: \|\bar{y}\| < \rho_0 \quad (3.21)$$

Положим

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{\rho_0}{2}, \frac{\rho_0}{4M}\right\} \quad (3.22)$$

Зафиксируем  $\forall \bar{y}^0: \|\bar{y}^0\| < \delta_0 \leq \rho_0$ . Тогда соответствующее решение:  $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$ .

$$\Rightarrow \|\bar{y}(0; \bar{y}_0)\| \leq \rho_0, \|\bar{y}(t; \bar{y}_0)\| \quad (3.23)$$

По теореме сохранения знака непрерывной функции,

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq \rho_0, t \in [0, t_1) \quad (3.24)$$

Если  $t_1 = +\infty$ , то решение существует на бесконечном полуинтервале и удовлетворяет оценке, следовательно, Лемма доказана.

Если  $t_1 < +\infty$  и  $\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| = \rho_0$ . Рассмотрим (3.20):  $\|\bar{y}^0\| \leq \rho_0$ ,  $\|R\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)\| \leq \sigma \|\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)\|$ ,  $\|\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)\| \leq \rho_0$ ,  $\sigma \|\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)\| \leq \sigma \rho_0$ . Тогда

$$\Rightarrow S_0 = \|\bar{y}(t_1; \bar{y}^0)\| \leq M \|\bar{y}^0\| e^{\alpha t_1} + M \sigma \rho_0 \int_0^{t_1} e^{\alpha(t_1-\tau)} d\tau \leq \quad (3.25)$$

$$\leq \frac{\rho_0}{4} e^{\alpha t_1} + \frac{M \sigma \rho_0}{|\alpha|} (1 - e^{\alpha t_1}) \leq \frac{\rho_0}{4} e^{\alpha t_1} + \frac{\rho_0}{4} - \frac{\rho_0}{4} e^{\alpha t_1},$$

где  $\|\bar{y}^0\| \leq \delta_0 \leq \frac{\rho_0}{4M}$ ,  $\frac{M \sigma \rho_0}{|\alpha|} \leq \frac{1}{4}$ . Таким образом,

$$0 < \rho_0 \leq \frac{\rho_0}{4}, t_1 \rightarrow +\infty \quad (3.26)$$

что означает, что мы пришли к противоречию. Тогда исходное предположение о том, что  $t_1 = +\infty$  неверно, а значит,  $t_1 = \infty$  и Лемма доказана.

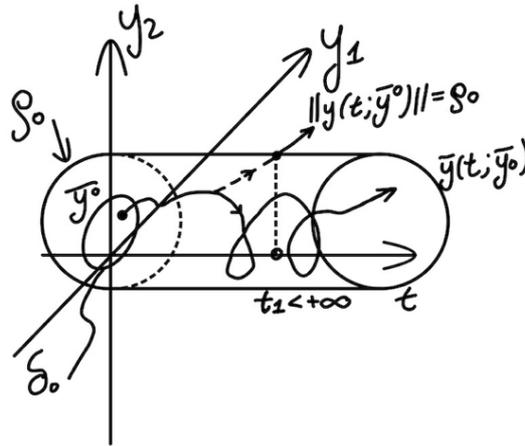


Рис. 3.2. Графическое изображение рассматриваемого случая.

### Теорема об устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова)

Пусть  $\exists \bar{f}(\bar{y})$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $\bar{\theta}$ .

- 1) Собственные значения матрицы  $A$   $\lambda_1, \dots, \lambda_n: \text{Re} \lambda_k < 0, \forall k = 1, \dots, n$ . Тогда нулевое решение  $\bar{y}(t; \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  асимптотически устойчиво по Ляпунову.
- 2) Если при тех же условиях существует  $k \in \{1, \dots, n\}: \text{Re} \lambda_k > 0$ , то нулевое решение  $\bar{y}(t; \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  неустойчиво по Ляпунову.

Ограничимся доказательством первой части. Воспользуемся Леммой:

$$\|\bar{y}^0\| < \delta_0 \Rightarrow \|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| < \rho_0, \forall t \geq 0 \quad (3.27)$$

Из  $\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| < \rho_0$  следует, что

$$R \Rightarrow \exists \sigma > 0 \|R(\bar{y}(\tau; \bar{y}^0))\| \leq \sigma \|\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)\|, \forall \tau \geq 0 \quad (3.28)$$

Перепишем интегральное соотношение через матрицант:

$$\bar{y}(t; \bar{y}^0) = Z(t, 0)\bar{y}^0 + \int_0^t Z(t, \tau)R(\bar{y}(\tau; \bar{y}^0)) d\tau \quad (3.29)$$

Возьмем нормы:

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq \|Z(t, 0)\bar{y}^0\| + \sqrt{n} \int_0^t \|Z(t, \tau)R(\cdot)\| d\tau \leq \quad (3.30)$$

$$\leq M e^{\alpha t} \|\bar{y}^0\| + M \sqrt{n} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \|R(y(\tau, y^0))\| d\tau \leq$$

$$\leq M e^{\alpha t} \|\bar{y}^0\| + \sigma M \sqrt{n} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \|\bar{y}(\tau, \bar{y}^0)\| d\tau$$

$$M e^{\alpha t} \|\bar{y}^0\| + \sigma M \sqrt{n} e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} \|\bar{y}(\tau, \bar{y}^0)\| d\tau \quad (3.31)$$

Обозначим  $e^{-\alpha \tau} \|\bar{y}(\tau, \bar{y}^0)\| = u(\tau)$ . Тогда

$$e^{-\alpha t} \|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq M \|\bar{y}^0\| + \sigma M * \int_0^t e^{-\alpha \tau} \|\bar{y}(\tau, \bar{y}^0)\| d\tau \quad (3.32)$$

Так,  $u(\tau) \geq 0$ , а (3.32) – интегральное неравенство, для таких неравенств применяем Лемму Грануолла-Беллмана:

$$0 \leq u(t) \leq M \|\bar{y}^0\| e^{\sigma M t} \quad (3.32)$$

Перейдем к старым обозначениям:

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq M \|\bar{y}^0\| e^{(\alpha + \sigma M)t} \leq M \|\bar{y}^0\| e^{\frac{3}{4}\alpha t}, \quad (3.33)$$

так как  $\left\{ M\sigma \leq \frac{|\alpha|}{4} \right\}$ .

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| \leq M e^{\frac{3}{4}\alpha t} \|\bar{y}^0\|, \quad \alpha < 0 \quad (3.34)$$

Так, мы получили оценку

$$\forall \|\bar{y}^0\| < \delta_0 \Rightarrow \text{устойчивость} \quad (3.35)$$

$$e^{\frac{3}{4}\alpha t} \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{асимптотическая устойчивость} \quad (3.36)$$

Теорема доказана. Рассмотрим пример ( $n = 2$ ):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 - ay_2 + y_2^4 = f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_1^5 + y_2^3 = f_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (3.37)$$

$$f_{1,2}(0,0) = 0 \Rightarrow \theta - \text{решение}$$

Исследуем решение на устойчивость по первому приближению. Для этого найдем матрицу производных:

$$A = \left( \frac{df_i}{dy_j}(0,0) \right) = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Вычислим определитель:

$$0 = M(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + a \quad (3.39)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \quad (3.40)$$

Исследуем разные значения  $a$ :

1)  $a > 0$

$$Re \lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow \bar{\theta} \text{ асимптотически устойчиво}$$

2)  $a = 0$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow \text{теорема неприменима}$$

3)  $a < 0$

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0 \Rightarrow \bar{\theta} \text{ неустойчиво}$$

Так, типичные примеры показывают, что метод исследования устойчивости по первому приближению не охватывает все возможные ситуации.

## Лекция 4. Исследование на устойчивость с помощью второго метода Ляпунова.

Ранее мы полностью исследовали случай устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами. Следующим этапом обобщения являлась нелинейная система устойчивости нулевого решения, исследуемая с помощью первого метода Ляпунова (от нелинейности от правой части выделяем главную линейную составляющую).

Сегодня разберем, как исследовать самые «тонкие» случаи. Давая определения неустойчивости, устойчивости и асимптотической устойчивости, в качестве траектории меры близости к нулю мы использовали Евклидову норму (идейное свойство непрерывной зависимости от начальных данных на бесконечном промежутке времени связано с необходимостью обеспечения близости траектории к нулю на бесконечном промежутке). Возникает вопрос, не слишком ли избыточны требования к норме как к мере близости двух функций/ функции к нулю.

Далее мы обсудим способы ослабления свойств функции, при помощи которой измеряется близость, и получения возможность выбора удобной для работы меры близости решения к нулю (и использовать это удобство для учета специфики правой части).

### Положительно определенные функции (ПОФ)

Положительно определенные функции могут быть определены следующим образом:

$$V(\bar{y}): \Omega \rightarrow \mathcal{R}, \Omega \subseteq \mathcal{R}^n, \theta \in \Omega \quad (4.1)$$

Функция называется положительно определенной, если выполняются условия:

- 1)  $V(\bar{y}) \geq 0, \forall \bar{y} \in \Omega$
- 2)  $V(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$

В дальнейшем будем считать

$$\Omega = \{\bar{y} \in \mathcal{R}^n: \|\bar{y}\| \leq R\}, R > 0 \quad (4.2)$$

### Теорема 1 (о свойствах ПОФ)

Пусть  $V(\bar{y})$  – непрерывная в  $\Omega$  ПОФ. Тогда выполняются следующие свойства:

- 1)  $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \varepsilon_2 > 0$ : из  $\bar{y} \in \Omega, \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$
- 2)  $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \varepsilon_3 > 0$ : из  $\bar{y} \in \Omega, \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_2 \Rightarrow V\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_3$

Используя тот факт, что

$$\begin{aligned} \text{ГМТ } \|\bar{y}\| = \varepsilon & - \text{ сфера } \varepsilon \\ \|\bar{y}\| > \varepsilon & - \text{ внешность сферы} \end{aligned}$$

$$\|\bar{y}\| < \varepsilon - \text{шар,}$$

введем геометрическую иллюстрацию:

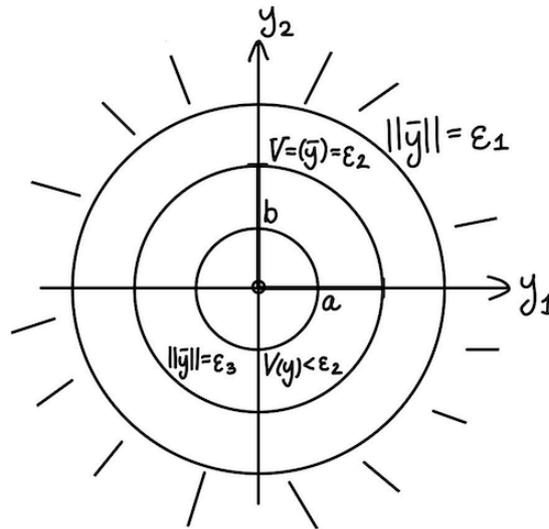


Рис. 4.1. Геометрическая иллюстрация различных  $\|\bar{y}\|$  относительно  $\varepsilon$ .

Докажем оба свойства:

1) От противного

$$\exists \varepsilon_1 > 0: \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \bar{y}, \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) < \varepsilon_2 \quad (4.3)$$

Рассмотрим  $\varepsilon_{2k} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists \bar{y}_k$  такое, что  $\varepsilon_1 \leq \|\bar{y}_k\| \leq R$  – замкнутое ограниченное множество. Выполняется неравенство

$$V(\bar{y}_k) < \varepsilon_{2k} \quad (4.4)$$

По теореме Вейерштрасса существует последовательность  $\bar{y}_{k_m} \rightarrow \bar{y}^0$ , что также удовлетворяет  $\|\bar{y}^0\| \geq \varepsilon_1 > 0$ . В силу непрерывности функции,

$$V \Rightarrow V(\bar{y}_{k_m}) \rightarrow V(\bar{y}^0), V(\bar{y}_{k_m}) > \varepsilon_{2k_m} \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

Следовательно,  $V(\bar{y}^0) = 0$ . Воспользовавшись пунктом 2 определения ПОФ делаем вывод, что  $\bar{y}^0 = \bar{\theta}$ . С другой стороны, полученное соотношение противоречит полученной нижней оценке. Так, исходная посылка неверна и первое условие доказано.

2) От противного

$$\exists \varepsilon_1 > 0: \forall \varepsilon_3 > 0 \exists \bar{y} \in \Omega, V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \|\bar{y}\| \leq \varepsilon_3 \quad (4.6)$$

Рассмотрим  $\varepsilon_{3k} \rightarrow 0$ :

$$\bar{y}_k \in \Omega: V(\bar{y}_k) \geq \varepsilon_2, \bar{y}_k \rightarrow \bar{\theta} \Leftarrow \|\bar{y}_k\| < \varepsilon_{3k} \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

Воспользуемся непрерывностью функции:

$$V(\bar{y}_k) \rightarrow V(\bar{\theta}) = 0, 0 \geq \varepsilon_2, \quad (4.8)$$

что неверно, а значит, теорема доказана.

В качестве следствия можно сформулировать следующее утверждение:

1)  $\exists \bar{y}_k \in \Omega$ :

$$\bar{y}_k \rightarrow \bar{\theta} \Leftrightarrow V(\bar{y}_k) \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty \quad (4.9)$$

2) Пусть вектор функции (ВТ)  $\bar{y}(t), t \geq 0, \bar{y}(t) \in \Omega$ :

$$\bar{y}(t) \rightarrow \bar{\theta}, t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow V(\bar{y}(t)) \rightarrow 0 t \rightarrow +\infty \quad (4.10)$$

Пример 1

$$V(\bar{y}) = \|\bar{y}\| \quad (4.11)$$

– непрерывная ПОФ, Линия уровня –  $V(\bar{y})$  – сфера.

Пример 2

$$V(\bar{y}) = \|\bar{y}\|^2 \quad (4.12)$$

– непрерывная ПОФ, однако уже не является нормой.

Пример 3

$$V(y_1, y_2) = \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}, 0 < a \neq b \quad (4.13)$$

– непрерывная ПОФ, не является нормой. Линия уровня – эллипс с полуосями  $a, b$ .

### Функция Ляпунова

Функция Ляпунова непосредственно связана с постановкой задачи Коши и исследованием на устойчивость. Запишем постановку:

$$(1) \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \quad (4.14)$$

Относительно правых частей будем предполагать, что те определены и непрерывны:

$$f_1(t, y_1, \dots, y_n) \dots f_n(-//-), (t, \bar{y}) \in [0, +\infty) \times \Omega, \quad (4.15)$$

где  $\Omega$  – шар радиуса  $R$ . Также пусть

$$\bar{f}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta} \Rightarrow \exists \text{реш } \bar{y}(t, \bar{\theta}) \quad (4.16)$$

Функция  $V(\bar{y})$  называется функцией Ляпунова системы (1), если

- 1)  $V(\bar{y})$  – непрерывно дифференцируема в  $\Omega$
- 2)  $V(\bar{y})$  – ПОФ в  $\Omega$
- 3)  $\sum_{j=1}^n \frac{dV}{dy_j}(\bar{y}) f_j(t, \bar{y}) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall \bar{y} \in \Omega$

### Теорема об устойчивости

Пусть выполнены условия на функцию  $f_j$  и на  $\Omega \ni$  функция Ляпунова для (1). Тогда  $\bar{y}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  устойчиво по Ляпунову.

Докажем теорему. Зафиксируем  $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_1 < R$ . Тогда по определению теоремы о ПОФ:

$$\exists \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1): \text{из } \bar{y} \in \Omega, \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2 \quad (4.17)$$

По определению,  $V(\bar{y})$  непрерывна в  $\Omega$ , следовательно для

$$\varepsilon_2(\varepsilon_1) \exists \delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1)): \text{из } \|\bar{y}\| < \delta \Rightarrow V(\bar{y}) \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \quad (4.18)$$

Докажем, что для  $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon_1)$ , выбранной из приведенных соображений о положительной определенности функции и непрерывности в нуле,

$$\|\bar{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1, \|\bar{y}(t)\| \equiv \bar{y}(t, \bar{y}^0) \quad (4.19)$$

При  $t = 0, \bar{y}(0) = \bar{y}^0$

$$\|\bar{y}(t)\| = \|\bar{y}^0\| < \delta \leq \varepsilon_1, \quad (4.20)$$

так как  $\|\bar{y}(t)\|$  – непрерывная функция при  $t \geq 0$ .

$$\|\bar{y}(0)\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1, \forall t \in [0, +\infty) \quad (4.21)$$

Если  $t_1 = +\infty$ , то устойчивость доказана.

Пусть  $t_1 < +\infty, \|\bar{y}(t_1)\| \geq \varepsilon_1$ .

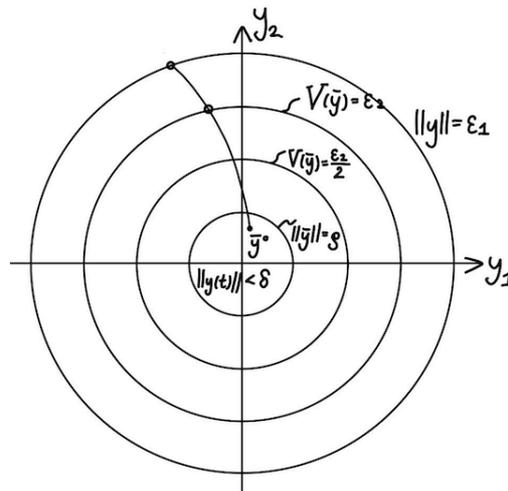


Рис. 4.2. Графическое изображение рассматриваемых условий.

Из  $(\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1)$  следует, что

$$V(\bar{y}(t)) \geq \varepsilon_2 \quad (4.22)$$

Так как  $\|\bar{y}(0)\| < \delta$ , то  $V(\bar{y}(0)) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}$ . Тогда

$$V(\bar{y}(t)) - V(\bar{y}(0)) \geq \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt} V(\bar{y}(t_1)) = \sum_{j=1}^n \frac{dV}{dy_j}(\bar{y}(t)) \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dV}{dy_j}(\bar{y}(t)) f_j(t, \bar{y}(t)) \leq 0 \quad (4.24)$$

$$t \in [0, t_1), \quad \bar{y}(t) \in \Omega$$

Следовательно,  $V(\bar{y}(t))$  не возрастает на  $[0, t_1]$ , что противоречит с тем, что  $V(\bar{y}(t_1)) > V(\bar{y}(0))$ . Следовательно, исходная посылка ( $t_1 < +\infty$ ) неверна и

$$\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| < \varepsilon_1, \quad \forall t \geq 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta), \quad (4.25)$$

как только  $\|\bar{y}^0\| < \delta$ . Теорема доказана. Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 y_2^4 = f_1(0,0) - \text{решение} \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1^4 y_2 = f_2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Применим первый метод Ляпунова:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dy_1} \\ \frac{df_2}{dy_2} \end{pmatrix} (0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \quad (4.27)$$

Следовательно, первый метод Ляпунова неприменим.

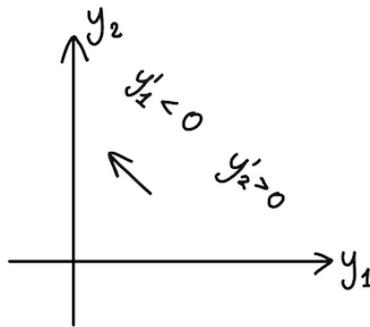


Рис. 4.3. Графическое изображение знаков производной.

Применим метод функции Ляпунова:

$$\Rightarrow V(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4, \quad (4.28)$$

что является непрерывно дифференцируемой ПОФ.

$$\frac{dV}{dy_1} * f_1 + \frac{dV}{dy_2} f_2 = 4y_1^3(-y_1 y_2^4) + 4y_2^3(y_1^4 y_2) \equiv 0 \quad (4.29)$$

Условия удовлетворяются, и мы получаем устойчивость по Ляпунову.

### Теорема об асимптотической устойчивости

Пусть на  $\Omega$   $\exists$  функция Ляпунова  $V(\bar{y})$  и дополнительно к свойству выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^n \frac{dV}{dy_j}(\bar{y}) f_j(t, \bar{y}) \leq -W(\bar{y}), \quad \forall \bar{y} \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (4.30)$$

где  $W(\bar{y})$  – другая непрерывная ПОФ. Тогда  $\bar{y}(t; \bar{\theta})$  асимптотически устойчиво. Докажем теорему:

- 1)  $W(\bar{y})$  – ПОФ  $\Rightarrow W(\bar{y}) \geq 0$ , следовательно, выполнены условия теоремы 1 об устойчивости. Тогда  $\bar{y}(t; \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}$  устойчиво по Ляпунову.
- 2) Докажем, что  $\bar{y}(t; \bar{y}^0) \rightarrow \bar{\theta}, \quad t \rightarrow +\infty$

Из теоремы 1 можно доказать, что  $\|\bar{y}(t, \bar{y}^0)\| < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta)$ , если  $\|\bar{y}^0\| < \delta$ . Тогда  $V(\bar{y}(t))$  непрерывна и ограничена. Вычислим производную:

$$\frac{dV(\bar{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dV}{dy_j}(\bar{y}(t)) f_j(t, \bar{y}(t)) \leq -W(\bar{y}(t)) \leq 0 \quad (4.31)$$

Следовательно,  $V(\bar{y}(t))$  не возрастает. Комбинируя свойства ограниченности и «не возрастания» функции можно сделать вывод о существовании предела:

$$\exists \lim V(\bar{y}(t)) = \alpha, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \alpha \geq 0, \quad (4.32)$$

так как  $V(\bar{y}(t)) > 0$ . Если  $\alpha = 0$ , то все доказано, так как

$$V(\bar{y}(t)) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \bar{y}(t) \rightarrow \bar{\theta}, \quad (4.33)$$

следовательно, есть асимптотическая устойчивость.

Если предположить, что  $\alpha > 0$ , то, в силу «не возрастания»,  $V(\bar{y}(t)) \geq 0, V$  – ПОФ.

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha) > 0: \|\bar{y}(t)\| \geq \varepsilon_3, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.34)$$

Воспользуемся тем, что  $W(\bar{y})$  – ПОФ. Тогда

$$\Rightarrow \exists \beta = \beta(\varepsilon_3): W(\bar{y}(t)) \geq \beta, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.35)$$

Таким образом,

$$V(\bar{y}(t)) - V(\bar{y}(0)) = \{\exists \xi \in (0, t): \} = (t - 0) \frac{dV}{dt}(\bar{y}(\xi)) = t \frac{dV}{dt}(\bar{y}(\xi)) = \quad (4.36)$$

$$= t \sum_{j=1}^n \frac{dV}{dy_j}(\bar{y}(\xi)) f_j(t, \bar{y}(t)) \leq -tW(\bar{y}(t)) \leq -\beta t \rightarrow -\infty, \quad \forall t \geq 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow V(\bar{y}(t)) \rightarrow -\infty, \quad (4.37)$$

что противоречит ПОФ  $V(y)$ . Следовательно, предположение о том, что  $\alpha > 0$  – неверно и  $\alpha = 0$ .

Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту ситуацию:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 - y_1^3 = f_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2^3 = f_2 \end{cases} \quad (4.38)$$

$$A = \left( \frac{df_i}{dy_j}(0,0) \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0 \quad (4.39)$$

Так, первый метод Ляпунова неприменим. Проанализируем направление движения траектории и попробуем доказать устойчивость:

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \quad (4.40)$$

$$\frac{dV}{dy_1} f_1 + \frac{dV}{dy_2} f_2 = y_1(-y_2 - y_1^3) + y_2(y_1 - y_2^3) = -(y_1^4 + y_2^4) = -W(y_1, y_2), \quad (4.41)$$

где  $\frac{dV}{dy_1} = y_1, \frac{dV}{dy_2} = y_2$ .

$$W(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4, \quad (4.42)$$

что является ПОФ, следовательно  $\bar{\theta}$  асимптотически устойчиво.

## Лекция 5. Исследование неустойчивости. Теорема Четаева.

### Исследование неустойчивости

На прошлых лекциях мы подробно исследовали устойчивость решений дифференциальных уравнений: в максимальной полноте это было выполнено для случая систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, также была сформулирована и доказана теорема об исследовании на устойчивость по первому приближению (оно дает информацию о том, в какие условия асимптотической устойчивости и неустойчивости достаточные). Мы также выяснили, что условия теоремы не покрывают полностью все возможные ситуации и рассмотрели исследования на устойчивость при помощи функции Ляпунова (второй метод Ляпунова).

Однако остается вопрос о том, что делать, если попытки найти функцию Ляпунова и доказать устойчивость неудачны, первый метод Ляпунова не работает ввиду нахождения вне условий применения метода, – в таком случае следует доказывать неустойчивость. Обсудим, существуют ли конструктивные подходы к исследованию неустойчивости. Для начала вспомним определение неустойчивости:

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \quad (5.1)$$

$$\exists \bar{y}^0: \|\bar{y}^0(\delta)\| < \delta, \quad T = T(\delta) \quad (5.2)$$

$$\|\bar{y}(t = T(\delta); \bar{y}^0)\| \geq \varepsilon \quad (5.3)$$

Так, из определения можно прийти к выводу о том, что при необходимости исследования неустойчивости следует локализовать ее не в окрестности, а в некоторой части окрестности нуля, которая имеет точку ноль как граничную.

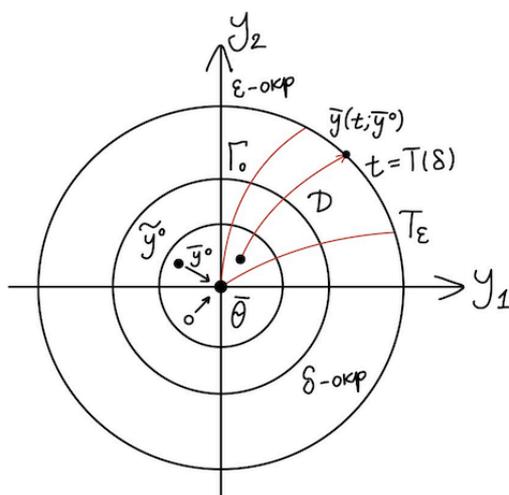


Рис. 5.1. Графическое изображение определения неустойчивости.

Обозначим  $\Omega_\varepsilon = \varepsilon$  – окрестность  $\bar{\theta} = \{\bar{y} \in \mathcal{R}^n: \|\bar{y}\| < \varepsilon\}$  и сформулируем теорему о неустойчивости.

## Теорема Четаева

$\exists \varepsilon > 0$ : в шаре  $\Omega_\varepsilon \exists$  область  $D \subset \Omega_\varepsilon$ ,

где граница  $dD = \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon$ ,  $\bar{\theta} \in \Gamma_0$ ,  $\|\bar{y}\| = \varepsilon$  при  $\bar{y} \in \Gamma_\varepsilon$ . Пусть в  $\bar{D} = D \cup dD$  определена функция  $U(\bar{y})$ , которая непрерывно дифференцируема в  $\bar{D}$  и удовлетворяет следующим свойствам:

- 1)  $U(\bar{y}) = 0$  при  $\bar{y} \in \Gamma_0$ ,  $U(\bar{y}) > 0$ ,  $\bar{y} \in D$
- 2)  $\forall \alpha > 0 \exists \beta = \beta(\alpha) > 0$ : из  $\bar{y} \in D$ ,  $U(\bar{y}) \geq \alpha$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{dU(\bar{y})}{dy_j} f_j(t, \bar{y}) \geq \beta, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.4)$$

В таком случае,

$$\bar{y}(t, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta} \text{ задачи } \begin{cases} d\bar{y}(t) = f(t, \bar{y}(t)) \\ \bar{y}(0) = \bar{\theta} \end{cases} \text{ неустойчиво} \quad (5.5)$$

Изобразим условия теоремы графически:

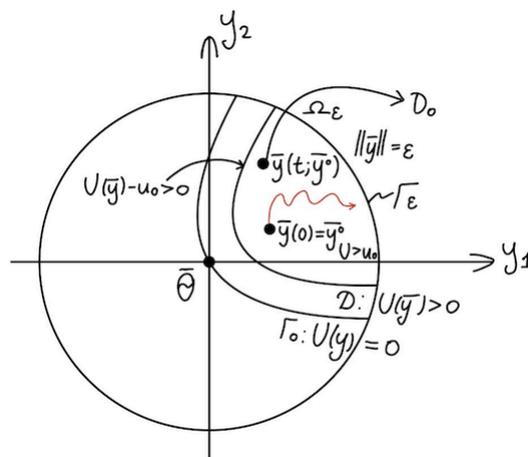


Рис.5.2. Графическое изображение условий теоремы Четаева.

Докажем теорему от противного. Предположим, что  $\bar{\theta}$  – устойчиво по Ляпунову. Тогда возьмем  $\varepsilon$  из условий теоремы  $\Rightarrow \delta(\varepsilon)$  такое, что из  $\|\bar{y}^0\| < \delta \Rightarrow t \geq 0$ ,  $\|\bar{y}(t; \bar{y}^0)\| < \varepsilon$ . Обозначим  $\bar{y}(t; \bar{y}^0) = \bar{y}(t)$  т.е.  $\bar{y}(t) \in \Omega_\varepsilon$ . Пусть  $\|\bar{y}^0\| \in D$ ,  $\bar{y}^0 < \delta$ , тогда  $U(\bar{y}) = u_0 > 0$ . Аналогично предыдущим доказательствам рассмотрим  $U(\bar{y}(t))$  – непрерывна  $t \geq 0$ .

$$U(\bar{y}(0)) = u_0 > 0, \quad \bar{y}(0) = \bar{y}^0 \quad (5.6)$$

Запишем производную функции:

$$\frac{dU}{dt}(\bar{y}(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{dU}{dy_j}(\bar{y}(t)) * f_j(t, \bar{y}(t)) \quad (5.7)$$

При  $t = 0$ ,  $U(\bar{y}(0)) > 0$ , следовательно

$$\frac{dU}{dt}(\bar{y}(t))|_{t=0} > 0 \quad (5.8)$$

Так как  $\frac{dU}{dt}$  – непрерывная функция, то, пока  $\bar{y}(t) \in D$ ,

$$\frac{dU(\bar{y}(t))}{dt} > 0 \Rightarrow U(\bar{y}(t)) \uparrow \text{ (возрастает)} \quad (5.9)$$

Тогда для  $\bar{y}(t) \in D \Rightarrow U(\bar{y}(t)) > U(\bar{y}(0)) = u_0 > 0$ . Таким образом, если рассмотреть ГМТ (геометрическое место точек)  $U(\bar{y}) \geq u_0$ , то получим следующее множество (рис.5.2).

Рассмотрим, что происходит с траекторией  $\bar{y}(t)$  при  $t \geq 0$ . Так как  $U(\bar{y}) \geq u_0$ , то

$$\bar{y}(t) \cap \Gamma_0 = \emptyset, \bar{y}(t) \cap \Gamma_\varepsilon = \emptyset \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) \in D, \forall t \geq 0 \quad (5.11)$$

$$\bar{y}(t) \in D_0 = \{\bar{y} \in D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon : U(\bar{y}) \geq u_0\}, \quad (5.12)$$

где  $D_0$  – замкнутое ограниченное множество, следовательно, компакт. Из  $\bar{y}(t) \in D_0$ ,  $U(\bar{y}(t)) \geq u_0 (= \alpha)$  по условию (2). Тогда  $\exists \beta_0 > 0$  такое, что

$$\frac{dU}{dt}(\bar{y}(t)) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{dU}{dy_j}(\bar{y}(t)) * f_j(t, \bar{y}(t)) \geq \beta_0 > 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt} U(\bar{y}(t)) \geq \beta_0 > 0, \forall t \geq 0 \quad (5.14)$$

Проинтегрируем выражение

$$\int_0^\tau \frac{d}{d\tau} \Rightarrow U(\bar{y}(\tau)) - \frac{U(\bar{y}(0))}{u_0} \geq \tau \beta_0, \forall \tau \geq 0 \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow U(\bar{y}(\tau)) \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow +\infty, \quad (5.16)$$

Что является противоречием, так как непрерывная  $U(\bar{y})$  на компакте  $D_0$  по теореме Вейерштрасса должна достигать конечных верхних/нижних граней (*max/min*). Теорема доказана.

Рассмотрим следующий пример:

$$\bar{\theta} = (0,0)^T \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} dy_1 = y_1 y_2^4 = f_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1^4 y_2 = f_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

Попробуем применить первый метод Ляпунова:

$$1) A = \left( \frac{df_i}{dy_j} \right) (0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 0$ , следовательно, первый метод не работает (условия его применимости не выполняются).

- 2) Проанализируем знаки  $\frac{dy_{1,2}}{dt}$  в I, III четвертях. Так, I характеризуется ( $f_1 > 0, f_2 > 0$ ), III ( $f_1, f_2 < 0$ ). Так, гипотеза состоит в том, что

$D = IUIII$  – неустойчиво

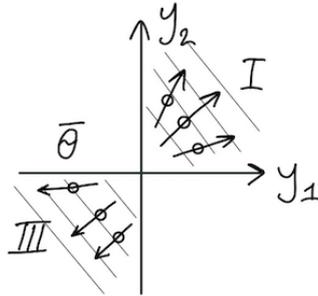


Рис.5.3. Анализ знаков.

Согласно доказанной теореме, необходимо описать границы множества: граница  $(y_1, 0), (y_2, 0), \forall y_{1,2}$ .

$$U(y_1, y_2) = y_1 y_2 \quad (5.19)$$

$$U(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} \in dD \quad (5.20)$$

$$U(\bar{y}) > 0 \text{ при } \bar{y} \in D \quad (5.21)$$

Преобразуем выражения:

$$\frac{dV}{dy_1} f_1 + \frac{dU}{dy_2} f_2 = y_2 * y_1 y_2^4 + y_1 * y_1^4 y_2 = y_1 y_2 [y_1^4 + y_2^4] = \quad (5.22)$$

$$= y_1 y_2 [(y_1^2 - y_2^2)^2 + 2(y_1 y_2)^2] \geq 2(y_1 y_2)^3 = 2U^3(y) \\ \Rightarrow \forall \alpha > 0 \exists \beta(\alpha) = 2\alpha^3 \quad (5.23)$$

Из  $U(\bar{y}) \geq \alpha \Rightarrow \sum \frac{dU}{dy_j} f_j \geq \beta(\alpha)$ . Так, можно сделать вывод о неустойчивости нулевого решения  $(0,0)$ .

## Лекция 6. Точки покоя и их классификация.

### Точки покоя

В первую очередь дадим определение точкам покоя, это понятие будет использоваться для исследования системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$(1) \quad \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{y}(t)) \quad (6.1)$$

$$\bar{f}(\bar{y}) = (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n))^T \quad (6.2)$$

Такие системы называются автономными. Автономная система характеризуется тем, что в каждой точке плоскости  $(y_1, \dots, y_n)$  направление движения траектории при прохождении через данную точку определяется только самой точкой и не зависит от того момента времени, в котором траектория зашла в эту точку. Поэтому для того, чтобы представить динамику системы дифференциальных уравнений, являющейся автономной, удобно использовать фазовую плоскость.

Фазовая плоскость (фазовое пространство) – пространство  $(y_1, \dots, y_n)$ , соответствующее фазовой траектории  $\{\bar{y}(t, \bar{y}^0)\}_{t>0}$  (для сравнения,  $\{t, \bar{y}(t, \bar{y}^0)\}_{t>0}$  – интегральная кривая). Под  $\bar{y}^0$  будет понимать точку покоя (положение равновесия) (1), если  $\bar{f}(\bar{y}^0) = \bar{\theta}$ . Так,  $\bar{y}^0$  – решение системы функциональных уравнений

$$\begin{cases} f_1(y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Важность точек покоя объясняется тем, что они задают некие стационарные режимы функционирования различных устройств. Если  $\bar{y}^0$  – точка покоя, то

$$\frac{d\bar{y}}{dt}(t, \bar{y}^0) \equiv \bar{\theta} \quad (6.1)$$

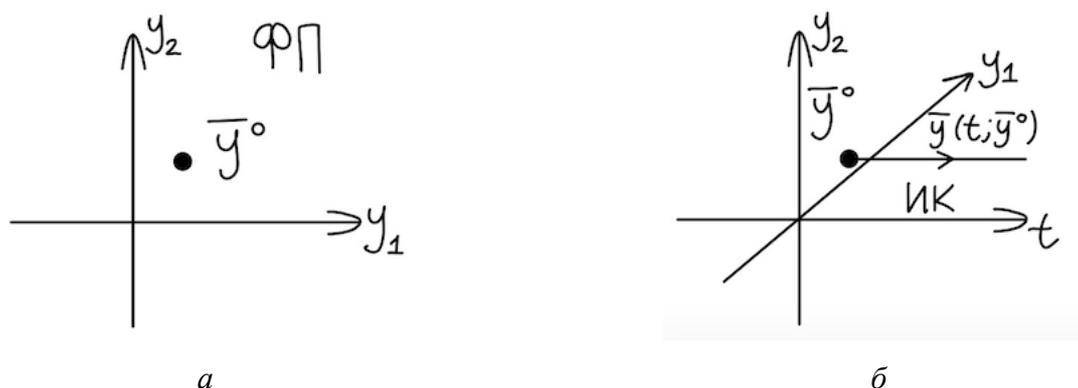


Рис 6.1. Поведение фазовой точки в а) фазовом пространстве б) полном пространстве.

Важный момент заключается в том, чтобы понять, что будет с точками, находящимися рядом. В самом простом случае эту информацию можно получить на основе исследования устойчивости: если устойчивость асимптотическая, то точки, стартующие из окрестности положения равновесия, стремятся к ней. Если неустойчивость, - то выходят из произвольной фиксированной  $\varepsilon$ - окрестности за конечное время. Если же просто устойчивость, то точки приближаются, но не сходятся.

Переформулируем, как исследовать точки покоя на устойчивость. В первую очередь проведем замену:  $\bar{y}(t) = \bar{x}(t) + \bar{y}^0$ . Тогда решение  $\bar{y}(t) \equiv \bar{y}^0$  соответствует  $\bar{x}(t) \equiv \bar{\theta}$ .

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{x}(t) + \bar{y}^0) = \tilde{f}(\bar{x}(t)) \quad (6.4)$$

Для исследования устойчивости по первому методу Ляпунова следует вычислить матрицу производных:

$$A = \left( \frac{d\tilde{f}_i}{dx_j}(\bar{\theta}) \right) = \left( \frac{d\tilde{f}_i}{dy_j}(\bar{y}^0) \right) \quad (6.5)$$

Рассмотрим терему: пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $A$ :

$$A = \left( \frac{df_i}{dy_j}(\bar{y}^0) \right) \quad (6.6)$$

$\bar{y}^0$  – точка покоя. Тогда

- 1) Если  $\forall k = 1, \dots, n \Rightarrow \text{Re}\lambda_k < 0$ , то  $\bar{y}^0$  – асимптотически устойчивая точка покоя.
- 2) Если  $\exists k \in \{1, \dots, n\}: \text{Re}\lambda_k > 0$  то  $\bar{y}^0$  – неустойчивая точка покоя.

Таким образом, теорема, являющаяся переформулировкой первого метода Ляпунова, показывает, что уже с точки зрения устойчивости точки покоя можно классифицировать.

### Классификация точек покоя линейной системы на плоскость ( $n = 2$ )

$$(1) \quad \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = a\bar{y}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\bar{y}(t) = (y_1(t)y_2(t))^T \quad (6.8)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times 2} \quad (6.9)$$

$$\bar{y}^0 = (0,0)^T = \bar{\theta} \quad (6.10)$$

$$(y_1, y_2) \Rightarrow (1') \quad (6.11)$$

Учитывая (6.7), запишем уравнение в фазовом пространстве (ФП):

$$(1') \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2} \quad (6.12)$$

$(0,0)$  – особая точка  $(1')$ , поэтому условия теоремы единственности решения в ФП нарушаются, что означает, что через точку  $(0,0)$  может проходить несколько решений (либо ни одного). Обозначим собственные векторы  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ :

$$\bar{h}_1 = (h_{11}, h_{21})^T \quad (6.13)$$

$$\bar{h}_2 = (h_{12}, h_{22})^T \quad (6.14)$$

$\lambda_{1,2}$  – собственные значения. Рассмотрим первый случай:

1) Узел

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathcal{R}, \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \exists \quad (6.15)$$

Поскольку мы рассматриваем двумерный случай с различными собственными значениями, то существует два линейно-независимых собственных вектора  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ . По правилу записи общего решения,

$$\bar{y}(t) = c_1 \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{h}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.16)$$

Для исследования поведения траекторий рассмотрим не только решение, но и то, как выглядят соответствующие производные:

$$y_1(t) = c_1 h_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 h_{12} e^{\lambda_2 t} \quad (6.17)$$

$$y_2(t) = c_1 h_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 h_{22} e^{\lambda_2 t} \quad (6.18)$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{c_1 h_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 h_{12} e^{\lambda_2 t}}{c_1 h_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 h_{22} e^{\lambda_2 t}} \quad (6.19)$$

Рассмотрим ситуацию, где  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Тогда  $(0,0)^T$  – асимптотически устойчиво и  $\bar{y}(t) \rightarrow \bar{\theta}, t \rightarrow +\infty$ . Проведем анализ в случае, когда траектории в окрестности  $\bar{\theta}(t \rightarrow +\infty)$ . Разделим (6.19) на  $e^{\lambda_1 t}$ :

$$(*) \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{c_1 h_{11} + c_2 h_{12} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{c_1 h_{21} + c_2 h_{22} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 < 0 \quad (6.20)$$

Рассмотрим различные случаи и изобразим их графически. Если  $c_1 = 0$ , то  $\bar{y}(t) \equiv c_2 \bar{h}_2 e^{\lambda_2 t}$ . Движение происходит по  $\bar{h}_2$  в пределе касания  $\bar{h}_1$ .

Если  $c_1 \neq 0$ :  $\frac{dy_1}{dy_2} \rightarrow \frac{h_{11}}{h_{21}} \Rightarrow \bar{y}(t) \uparrow \bar{h}_1, t \rightarrow +\infty$ .

Если  $c_2 = 0 \Rightarrow \bar{y}(t) \equiv c_1 \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t}$ . Траектория – прямая линия на  $\bar{h}_1$ .

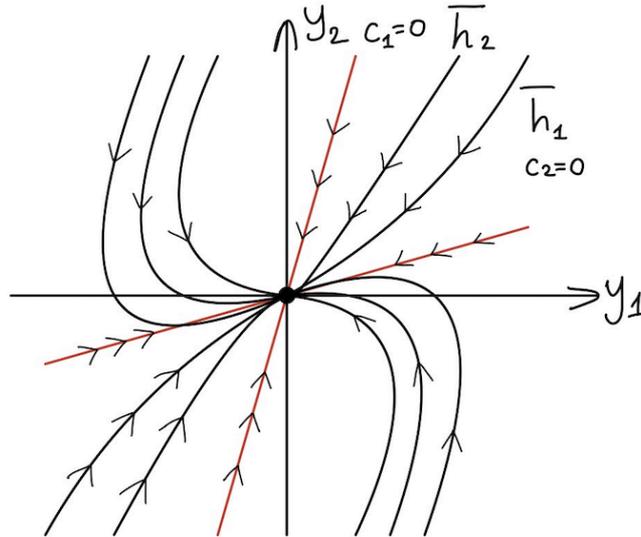


Рис.6.2. Графическое изображение траекторий движения при  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

Проведем анализ случая, когда  $t \rightarrow -\infty$ , " $\bar{y}(t) \rightarrow \infty$ ". Тогда разделим (6.19) на  $e^{\lambda_2 t}$ :

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{c_1 h_{11} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 h_{21}}{c_1 h_{21} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 h_{22}} \quad (6.21)$$

$$c_{1,2} \neq 0 \Rightarrow \frac{dy_1}{dy_2} \rightarrow \frac{h_{21}}{h_{22}}, \text{ т. е. } \bar{y}(t) \uparrow \bar{h}_2, \bar{y}(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty \quad (6.22)$$

Аналогичным образом происходит анализ при  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

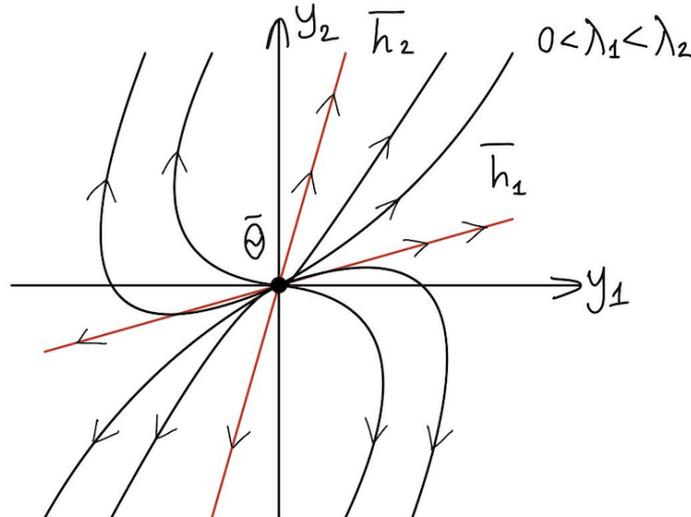


Рис.6.3. Графическое изображение траекторий движения при  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

Для того, чтобы запомнить поведение траекторий движения, используют следующее «Правило Узла»: в нуле траектории касаются собственного вектора, отвечающего наименьшему по модулю собственному значению.

2) Дискретический узел

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \ker(A - \lambda E) = 2 \quad (6.23)$$

Обозначим  $\lambda = \lambda_{1,2}$ . Подобная размерность собственного пространства означает, что существует два собственных линейно независимых вектора  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ . Тогда решение может быть записано в виде

$$\bar{y}(t) = (c_1 \bar{h}_1 + c_2 \bar{h}_2) e^{\lambda t}, \quad \forall t \in \mathcal{R}^2 \quad (6.24)$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{c_1 h_{11} + c_2 h_{12}}{c_1 h_{21} + c_2 h_{22}} \quad (6.25)$$

Поскольку  $\frac{c_1 h_{11} + c_2 h_{12}}{c_1 h_{21} + c_2 h_{22}}$  не зависит от  $t$ ,  $\bar{y}(t)$  – прямая линия,  $c_{1,2}$  задают конкретную траекторию.

$\lambda > 0 \Rightarrow \bar{\theta}$  неустойчива

$\lambda < 0 \Rightarrow \bar{\theta}$  асимптотически устойчива

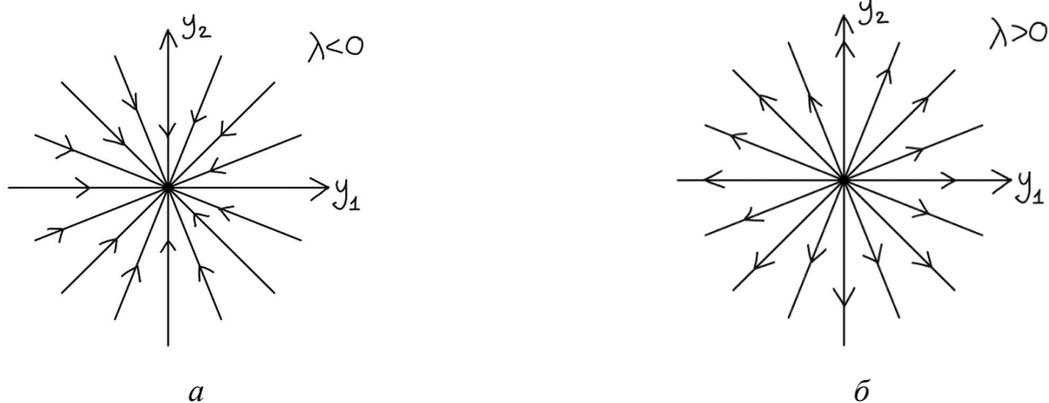


Рис. 6.3. Графическое изображение траекторий движения при а)  $\lambda < 0$  б)  $\lambda > 0$ .

### 3) Вырожденный узел

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \ker(A - \lambda E) = 1 \quad (6.26)$$

Следовательно, есть один линейно независимый собственный вектор  $\bar{h}$  и присоединенный к нему вектор  $\bar{p}$ . Тогда общее решение системы

$$\bar{y}(t) = c_1 \bar{h} e^{\lambda t} + c_2 (t \bar{h} + \bar{p}) e^{\lambda t} \quad (6.27)$$

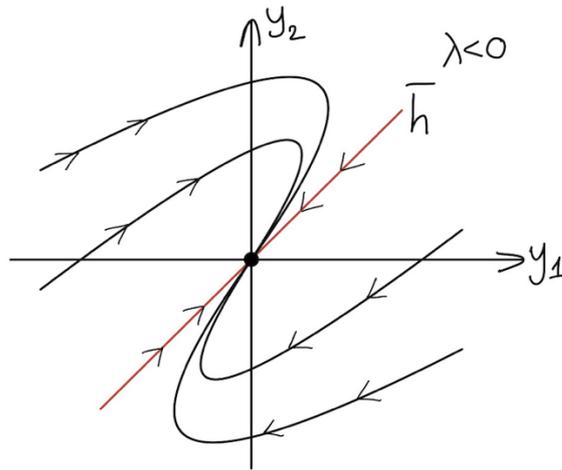


Рис.6.4. Графическое изображение траекторий движения при  $\lambda < 0$ .

Если  $c_2 = 0$ , то  $\bar{y}(t) = c_1 \bar{h} e^{\lambda t}$  – фазовая траектория прямая и проходит через собственный вектор. При этом  $\bar{y}(t) \rightarrow \bar{\theta}$ , при  $t \rightarrow +\infty$ .

Если  $c_2 \neq 0$ : вынесем  $t$  за скобки. Тогда

$$\bar{y}(t) = t \left[ c_2 \bar{h} e^{\lambda t} + \frac{1}{t} [c_1 h e^{\lambda t} + c_2 p e^{\lambda t}] \right] = (t c_2 \bar{h} + \bar{0}(1)) \Rightarrow \bar{y}(t) \parallel \bar{h}, \quad (6.28)$$

При этом  $\bar{0}(1) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Также  $t > 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t < 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Этот случай означает разворот траекторий в противоположном направлении. При  $t \rightarrow \pm\infty$ :  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\bar{y}(t) \rightarrow \infty$ ,  $\parallel \bar{h}$ . Аналогичные действия можно проделать для  $\lambda > 0$ : тогда  $\bar{\theta}$  неустойчиво в направлении по траекториям в обратную сторону.

4) Седло

$$\lambda_{1,2} \in \mathcal{R} \quad (6.29)$$

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \quad (6.30)$$

Так, различным собственным значениям соответствуют линейно независимые собственные векторы  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ . Тогда общее решение для системы

$$\bar{y}(t) = c_1 \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{h}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.31)$$

Различные знаки собственного значения говорят о том, что в общем случае узел является неустойчивым ( $\bar{\theta}$  – неустойчивая точка покоя). Если

$$t \rightarrow +\infty: \text{определяющая роль } e^{\lambda_1 t}$$

$$t \rightarrow -\infty: \text{определяющая роль } e^{\lambda_2 t}$$

Рассмотрим первый случай:  $t \rightarrow +\infty$ .

$$c_1 = 0 \Rightarrow \bar{y}(t) = c_2 \bar{h}_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \bar{\theta} \quad (6.32)$$

$\bar{y}(t)$  лежит на собственном векторе  $\bar{h}_2$ .

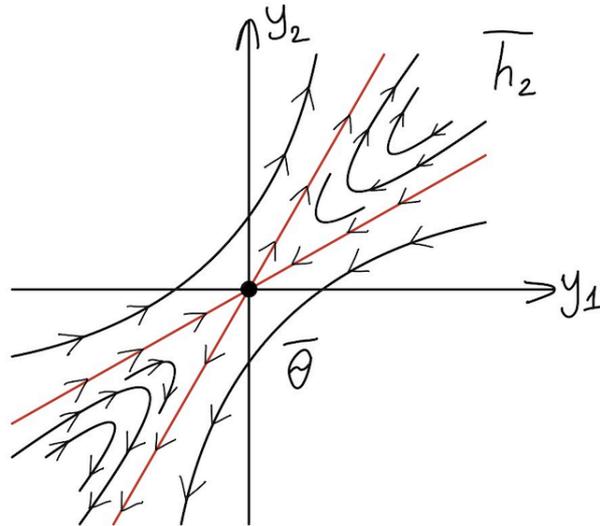


Рис.6.5. Графическое изображение траекторий движения «Седло».

Если  $c_2 = 0 \Rightarrow \bar{y}(t) = c_1 \bar{h}_1 e^{\lambda t} \rightarrow \infty$ .  $\bar{y}(t)$  лежит на собственном векторе  $\bar{h}_1$ . В общем случае ( $c_{1,2} \neq 0$ ):

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 \bar{h}_1 + c_2 \bar{h}_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \quad (6.33)$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} \rightarrow \frac{h_{11}}{h_{21}} \Rightarrow \bar{y}(t) \rightarrow \infty, \bar{y}(t) \parallel \bar{h}_1 \quad (6.34)$$

Если  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 \bar{h}_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \bar{h}_2] \quad (6.35)$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} \rightarrow \frac{h_{12}}{h_{22}}, \text{ т. е. } \bar{y}(t) \parallel \bar{h}_2, \bar{y}(t) \rightarrow \infty \quad (6.36)$$

В случае с седлом, направления  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  называются сепаратрисами и направление движения по этим сепаратрисам различно.

### 5) Фокус

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega, \delta \neq 0, \omega > 0 \quad (6.37)$$

$$Re \lambda_{1,2}, \omega = I_M \lambda_{1,2} \quad (6.38)$$

Рассмотрим  $\lambda = \delta + i\omega$  – собственные значения вещественной матрицы  $A$ . Соответствующий собственный вектор:

$$\bar{h} = \bar{h}_1 + i\bar{h}_2, \bar{h}_{1,2} - \text{вещественные ЛНЗ} \quad (6.39)$$

Решение в комплексном виде:

$$\bar{f}(t) = \bar{h} e^{\lambda t} = (\bar{h}_1 + i\bar{h}_2) e^{\lambda t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (6.40)$$

$$e^{\lambda t} + e^{\delta t + i\omega t} = e^{\delta t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (6.41)$$

Тогда фундаментальная система решений в вещественной форме:

$$\begin{cases} \bar{y}_1(t) = \operatorname{Re} \bar{f}(t) = e^{\delta t} [\bar{h}_1 \cos \omega t - \bar{h}_2 \sin \omega t] \\ \bar{y}_2(t) = \operatorname{Im} \bar{f}(t) = e^{\delta t} [\bar{h}_1 i \sin \omega t + \bar{h}_2 \cos \omega t] \end{cases} \quad (6.42)$$

Тогда общее решение:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = c_1 \bar{y}_1(t) + c_2 \bar{y}_2(t) = e^{\delta t} [c_1 \cos \omega t - c_2 \sin \omega t] \bar{h}_1 + \\ + e^{\delta t} [c_2 \cos \omega t + c_1 \sin \omega t], \quad \forall c_{1,2} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Пусть угол  $\psi$  определяется следующим образом:

$$\sin \psi = \frac{c_1}{c}, \quad \cos \psi = \frac{c_2}{c}, \quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (6.44)$$

Преобразуем (6.43):

$$\bar{y}(t) = ce^{\delta t} \sin(\omega t + \psi) \bar{h}_1 + ce^{\delta t} \cos(\omega t + \psi) \bar{h}_2 \quad (6.45)$$

Пусть  $e^{\delta t} \sin(\omega t + \psi) = \xi_1$ ,  $ce^{\delta t} \cos(\omega t + \psi) = \xi_2$ , тогда

$$\bar{y}(t) = \xi_1(t) \bar{h}_1 + \xi_2(t) \bar{h}_2$$

В системе координат, которые задаются  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ , можно получить следующие траектории (рис. 6.6):

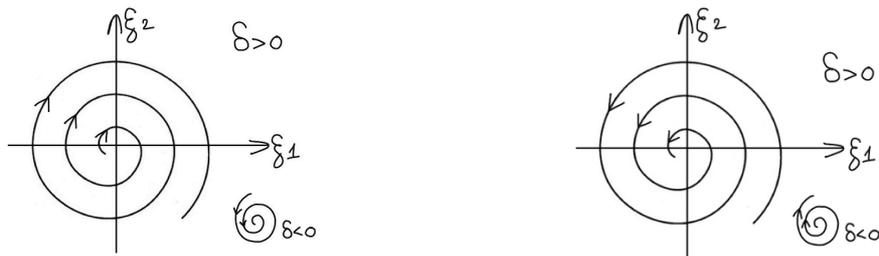


Рис. 6.6. Графическое изображение траекторий движения «Фокус» в системе координат, заданной  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ .

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\delta t} \sin(\omega t + \psi) \\ \xi_2(t) = e^{\delta t} \cos(\omega t + \psi) \end{cases}$$

Соответствующая кривая называется спиралью, суперпозиция движений

$$\delta > 0 \Rightarrow \xi_{1,2} \rightarrow \infty$$

$$\left( \frac{\xi_1}{e^{\delta t}} \right)^2 + \left( \frac{\xi_2}{e^{\delta t}} \right)^2 = 1$$

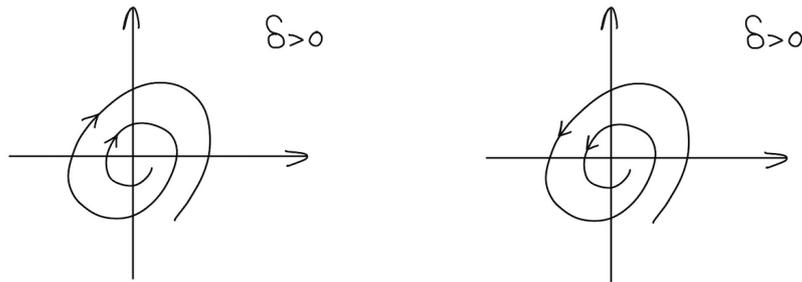


Рис.6.7. Графическое изображение траекторий движения «Фокус» в исходных координатах.

При исходных координатах,  $\delta > 0$  – неустойчивый фокус,  $\delta < 0$  – устойчивый фокус.

б) Центр

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega > 0$$

Анализ, аналогичный случаю 5 ( $\delta = 0$ ), показывает, что

$$\bar{y}(t) = \xi_1 \bar{h}_1 + \xi_2 \bar{h}_2$$

$$\bar{\xi}_1(t) = c \sin(\omega t + \psi)$$

$$\bar{\xi}_2(t) = c \cos(\omega t + \psi)$$

$$\bar{\xi}_1^2(t) + \bar{\xi}_2^2(t) = c^2,$$

что является уравнением концентрических окружностей радиуса  $c$  в координатах. В исходных координатах это эллипсы.

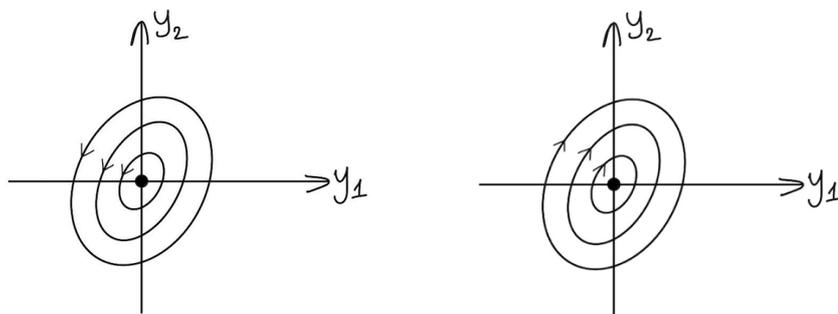


Рис.6.8. Графическое изображение траекторий движения «Центр».

**Классификация точек покоя нелинейной системы**

Согласно первому методу Ляпунова, устойчивость определяется по анализу матрицы  $A$ :

$$A = \frac{dg_i}{dy_j}(\bar{y}^0)$$

$$(*) \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y})$$

Точка покоя  $\bar{y}^0$  называется грубой, если матрица главной линейной части  $A = \left( \frac{dg_i}{dy_j}(\bar{y}^0) \right)$  имеет ровно  $n$  попарно различных собственных значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n: \operatorname{Re} \lambda_k \neq 0, \quad \forall k = 1 - n$$

Для случая ( $n = 2$ ) этой ситуации удовлетворяют узел, седло, фокус. Тогда по определению, точка покоя  $\bar{y}^0$  системы (\*) называется узлом, седлом, фокусом, если соответствующей точкой покоя является  $\bar{\theta}$  в  $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$ .

Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 - 1 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1^2 - y_2^2 \end{cases}$$

Тогда точки покоя определяются из системы

$$\begin{cases} y_1 - 1 = 0 \\ y_1^2 - y_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

1)  $(1, 1)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения имеют разные знаки, следовательно речь идет о ситуации «седло».

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

2)  $(1, -1)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Оба собственных значения положительны, значит мы имеем дело с неустойчивым узлом.

## Лекция 7. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Как известно, дифференциальные уравнения возникают в многочисленных приложениях и для того, чтобы получить единственное решение, кроме самого дифференциального уравнения необходимо также задать дополнительные условия. В предыдущих лекциях мы познакомились с постановкой и результатами о существовании единственности решений задачи Коши, которая характеризуется тем, что дополнительные условия задаются в одной точке. Значит, для получения ОДУ необходимо помимо дифференциального уравнения задать дополнительные условия.

В случае с задачами Коши мы знаем, что для ОДУ  $n$ -ого порядка, разрешенного относительно старшей производной  $y^{(n)}$ , с дополнительными  $n$  – условиями в некоторой точке  $t_0$ :

$$y(t_0) = y_0^0, y'(t_0) = y_0^1, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}(t_0) \quad (7.1)$$

дает существование единственного решения задачи Коши. Так, задача Коши представляет один тип дополнительных условий.

Сегодня мы познакомимся с другим типом дополнительных условий. В отличие от задачи Коши, в краевой задаче дополнительные условия задаются в разных точках изменения независимой переменной. Мы в большей степени будем фокусироваться на ОДУ II-го порядка. Рассмотрим несколько примеров:

Пусть материальная точка единичной массы ( $m = 1$ ) движется по прямой  $y$  под действием силы  $F(t, y(t)), y'(t)$ ,  $t_0 < t < t_1$ . Тогда, согласно первому закону Ньютона, отклонение  $y(t)$  удовлетворяет

$$y''(t) = F(t, y(t), y'(t)) \quad (7.2)$$

Допустим задача – перевести тело из  $y_0; t = t_0$  в  $y_1; t = t_1$ . Задача формализуется в виде постановки двух дополнительных условий  $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$ .

$$-\infty < t_0 < t_1 < +\infty \quad (7.3)$$

Второй пример описывает ситуацию, когда искомая функция зависит от пространственной переменной, и соответствующая модель возникает как модель стационарного распределения температуры  $u = u(x)$  в бесконечно тонком стержне  $0 \leq x \leq l$ .

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7.4)$$

где  $k(x), q(x)$  – известные коэффициенты,  $f(x)$  имеет смысл внешнего источника тепла. Записанный закон задает стационарное распределение температуры, когда под действием внешнего источника  $f(x)$  температура остановилась и от времени не зависит. Так,  $x$  играет роль пространственной переменной.

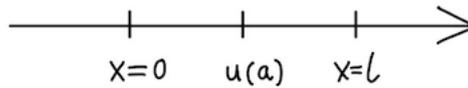


Рис.7.1. Графическое изображение ограничений пространственной переменной  $x$ .

С физической точки зрения можно поставить различные граничные условия, например,  $u(0) = u_0$  – на конце  $x = 0$  поддерживается температура  $u_0$ . Добавим еще одно условие:  $u'(l) = 0$ , подразумевающее отсутствие теплового потока через  $x = l$ .

Далее для того, чтобы введенные обозначения дополнительно подчеркивали отличия задачи Коши от краевой задачи, при описании дифференциальных уравнений краевой задачи будем использовать формулировку, где независимая переменная имеет смысл пространственной переменной и обозначается  $x$ .

Зафиксируем, что в задаче Коши при некоторых достаточно общих условиях основной результат состоит в том, что существует единственное решение задачи. Для краевой задачи характерны все три возможности: решение может не существовать, а если существует, то может быть не единственным. Рассмотрим пример – краевую задачу:

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad l = \pi \quad (7.5)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = y_1 \in \mathcal{R} \quad (7.6)$$

Прежде всего для решения необходимо записать соответствующий характеристический многочлен

$$\mu^2 + 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm i, \quad i^2 = -1 \quad (7.7)$$

Тогда вещественное общее решение

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (7.8)$$

Подставим граничные условия:

$$x = 0: 0 = y(0) = c_1 * 1 + c_2 * 0 = c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (7.9)$$

$$x = l: y_1 = y(l)|_{l=\pi} = c_2 \sin l |_{l=\pi} = c_2 * \sin \pi = 0 \quad (7.10)$$

$$c_2 * 0 = y_1 \quad (7.11)$$

Так, линейное уравнение требует рассмотрения двух вариантов:

- 1)  $y_1 \neq 0 \Rightarrow$  нет решений, следовательно, не существует решения краевой задачи.
- 2)  $\exists y_1 = 0 \Rightarrow c_2 * 0 = 0 \Rightarrow \forall c_2 \in \mathcal{R}$  – решение. Тогда решение краевой задачи задается в виде

$$y(x) = c_2 \sin x \quad (7.12)$$

Рассмотрим случай, когда может возникнуть единственное решение: решим задачу с параметром

$$y''(x) + a^2 y(x) = 0, \quad a \in \mathcal{R}, \quad x \in \mathcal{R}[0, \pi] \quad (7.13)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (7.14)$$

Тогда общее решение однородной задачи:

$$y_{00}(x) = c_1 \cos(ax) + c_2(ax) \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (7.15)$$

$$0 = y(\pi) = c_2 \sin(\pi a) \quad (7.16)$$

Если  $\sin(\pi a) \neq 0$ ,  $\pi a \neq \pi n$ ,  $a \neq n$ ,  $n \in \mathcal{Z}$ , то единственная возможность удовлетворить второму краевому условию, это

$$c_2 = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0 \text{ \textcircled{!} решение} \quad (7.17)$$

Если  $\sin(\pi a) = 0$ , ( $a = n \in \mathcal{Z}$ ), то  $\forall c_2$ .

### Постановка краевой задачи для линейных ОДУ 2-го порядка

Запишем дифференциальное уравнение в общей форме:

$$(1) \quad a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f_1(x), \quad x \in [0, l] \quad (7.18)$$

Краевые условия:

$$(2) \quad \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1 \quad (7.19)$$

Зафиксируем ограничения относительно функции:

$$a_j(x), f_1(x) \text{ непрерывно на } [0, l] (\in C[0, l]), \quad j = 0, 1, 2 \quad (7.20)$$

$$a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in [0, l] \quad (7.21)$$

$$\alpha_j, \beta_j \in \mathcal{R}, \quad j = 1, 2, \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0 \quad (7.22)$$

Решением краевой задачи называется функция

$$y(x) \in C^2[0, l], \quad (7.23)$$

т.е. два раза непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[0, l]$ . Такая функция называется решением краевой задачи (1), (2), если

- 1) На  $[0, l]$  в каждой точке удовлетворяется ОДУ (1);
- 2) Удовлетворяются краевые условия (2) при  $x = 0, x = l$ ;

Постановка краевой задачи выполняется при удовлетворении следующих условий:

$$y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} y'(x), \quad (7.24)$$

$$y(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} y(x), \quad (7.25)$$

### Преобразование ОДУ к дивергентному виду

Воспользуемся тем, что  $a_0(x) \neq 0$ , и поделим обе части на эту функцию:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y = \frac{f_1(x)}{a_0(x)} \quad (7.26)$$

Рассмотрим функцию  $p(x)$ :

$$p(x) = e^{\int_0^x \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi} \quad (7.27)$$

$$p'(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} e^{\int_0^x \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} p(x) \quad (7.28)$$

Домножим на  $p(x)$ :

$$p(x)y'' + p'(x)y' + \frac{p(x)a_2(x)}{a_0(x)}y = \frac{f_1(x)p(x)}{a_0(x)} \quad (7.29)$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x) = f_2(x) \quad (7.30)$$

Запишем уравнение в наиболее удобном виде:

$$(1') \frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x) = f_2(x) \quad (7.31)$$

$$q(x) \in c[0, l], \quad 0 < p(x) \in c^1[0, l] \quad (7.32)$$

### Редукция к однородным краевым условиям ( $u_{0,1} = 0$ )

Представим искомую функцию в виде

$$y(x) = v(x) + z(x), \quad v(x) \in c^2[0, l], \quad (7.33)$$

где  $y(x)$  – старая искомая функция,  $z(x)$  – новая искомая функция,  $v(x)$  подлежит определению. Как выбрать  $v(x) \in c^2[0, l]$ :  $z(x)$  удовлетворяло однородным граничащим условиям? Пусть  $v(x)$  удовлетворяет неоднородным граничащим условиям:

$$v(x): \begin{cases} \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = u_0 \\ \alpha_2 v'(l) + \beta_1 v(l) = u_1 \end{cases} \implies z(x) = y(x) - v(x) \quad (7.34)$$

Таких функций можно найти достаточно много, главное искать их в виде

$$v(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (7.35)$$

Рассмотрим граничные условия:

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) - (\alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0)) = u_0 - u_0 = 0 \quad (7.36)$$

$$\alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0 \quad (7.37)$$

Рассмотрим ОДУ:

$$\frac{d}{dx}[p(x)z'(x)] - q(x)z(x) = \frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x) - \quad (7.38)$$

$$- \left\{ \frac{d}{dx}[p(x)v'(x)] - q(x)v(x) \right\} = f(x), \quad f(x) = f_2(x) - \tilde{f}_2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x) = f_2(x), \quad \frac{d}{dx}[p(x)v'(x)] - q(x)v(x) = \tilde{f}_2(x) \quad (7.39)$$

Так, функция удовлетворяет однородным краевым условиям и относится к тому же классу уравнений в дивергентной форме

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)z'(x)] - q(x)z(x) = f(x) \\ \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0 \\ \alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0 \end{cases} \quad (7.40)$$

$$(3) \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y(x) = f(x) \quad (7.41)$$

$$x \in [0, l], 0 < p(x) \in C^1[0, l], q(x) \in C[0, l], f(x) \in C[0, l] \quad (7.42)$$

$$(4) \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, j = 1, 2 \quad (7.43)$$

### Тождество Лагранжа

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L: y(x) \in C^2[0, l] \rightarrow Ly(x) = \frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x), Ly(x) \in C[0, l] \quad (7.44)$$

Пусть  $y(x) \in C^2[0, l], z(x) \in C^2[0, l]$ :

$$z(x)(Ly)(x) - y(x)(Lz)(x) = z[py'] - qzy - y[pz']' + qyz = \quad (7.45)$$

$$= z[py']' - y[pz']' = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \left( z(x) \frac{dy}{dx}(x) - y(x) \frac{dz}{dx}(x) \right) \right] = 0$$

$$z[py']' = (zpy')' - z'py', y[pz']' = (ypz') - y'pz' \quad (7.46)$$

Следствие:  $\exists y_1(x), y_2(x)$  – линейно независимое решение однородного уравнения  $Ly(x) = 0$  (т.е.  $Ly_{1,2}(x) = 0$ ). Тогда

$$y = y_2(x), z = y_1(x) \quad (7.47)$$

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \quad (7.48)$$

$$z(x) \frac{dy}{dx}(x) - y(x) \frac{dz}{dx}(x) = W[y_1, y_2](x) \quad (7.49)$$

$$0 = \frac{d}{dx} [p(x)W[y_1, y_2](x)], x \in [0, l] \quad (7.50)$$

$$\Leftrightarrow \exists c: p(x)W[y_1, y_2](x) = c \text{ или } W[y_1, y_2](x) = \frac{c}{p(x)} \quad (7.51)$$

### Формула Грина

Интегрируем формулу Лагранжа на  $[0, l]$ :

$$(y(x), z(x) \in C^2[0, l]) \quad (7.52)$$

$$\int_0^l (z(x)y(x) - y(x)Lz(x))L dx = \int_0^l \frac{d}{dx} [zy' - yz'] dx = \quad (7.53)$$

$$= (z(x)y'(x) - y(x)z'(x)) \Big|_{x=0}^{x=l}$$

Следствие: пусть  $y(x), z(x)$  дополнительно удовлетворяют краевым условиям (4), тогда

$$\int_0^l (z(x)Ly(x) - y(x)Lz(x)) dx = 0 \quad (7.54)$$

$$\int_0^l zLy \, dx = \int_0^l yLz \, dx, \quad (7.55)$$

что есть симметричность оператора  $l$  относительно скалярного произведения, задаваемого с помощью интеграла.

Докажем, что каждая постановка по отдельности обращается в ноль:

$$(*) \quad z(0)y'(0) - y(0)z'(0) \stackrel{?}{=} 0 \quad (7.56)$$

Если  $\alpha_1 = 0$ , то  $\beta_1 \neq 0$ . Тогда граничное условие  $z(0), y(0) = 0$  и (\*) верно.

Если  $\alpha_1 \neq 0$ , то граничные условия могут быть записаны как

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0 \end{cases} \quad (7.57)$$

Вычтем одно из другого:

$$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 [z(0)y'(0) - y(0)z'(0)] = 0 \quad (7.58)$$

## Лекция 8. Функция Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим постановку задачи. Пусть имеется дифференциальный оператор второго порядка, приведенный к дивергентному виду для дифференциального уравнения второго порядка, и краевые условия при  $x = 0, l$ .

$$(1) Ly \equiv \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx}(x) \right] - q(x)y(x) = f(x), \quad (8.1)$$

$$x \in [0, l], \quad 0 < p(x) \in C^1[0, l], \quad q(x) \in C[0, l], \quad q(x) \in C[0, l] \quad (8.2)$$

$$(2) \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, \quad j = 1, 2 \quad (8.3)$$

Если записывать задачу в форме операторного уравнения, то она будет иметь следующий вид:

$$Ly = f, \quad y(x) \in C^2[0, l], \quad (8.4)$$

где  $y(x)$  удовлетворяет граничным условиям (2). Такая запись возникала в курсе линейной алгебры в случае, когда  $L$  – некая матрица,  $f$  – вектор правых частей. Имея такую аналогию, можно поставить вопрос, а нельзя ли попытаться записать решение в форме, принятой в линейной алгебре ( $y = L^{-1}f$ ). Также возникают вопросы:

- 1) Когда  $\exists L^{-1} (Ly = 0 \Leftrightarrow y = 0)$
- 2) Вид  $L^{-1}$  ( $L^{-1}$  – интегральный оператор)
- 3) Доказательство формулы (из явного вида  $L^{-1}$ )

### Функция Грина краевой задачи (1), (2)

Определение:  $G(x, \xi)$  называется функцией Грина (1), (2), если она определена на  $(x, \xi) \in [0, l] \times [0, l]$  и удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\forall \xi \in (0, l)$  функция

$$G(x, \xi) \in C^2[0, \xi) \cup (\xi, l] \text{ (по } x \neq \xi) \quad (8.5)$$

и удовлетворяет ОДУ

$$L_x G(x, \xi) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad x \neq \xi \quad (8.6)$$

- 2) Функция  $G(x, \xi)$  удовлетворяет краевым условиям по  $x, x = 0, x = l$

$$\alpha_1 G_x(0, \xi) + \beta_1 G(0, \xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l, \xi) + \beta_2 G(l, \xi) = 0 \quad (8.7)$$

$$G_x = \frac{dG}{dx}(0, \xi), \quad \forall \xi \in (0, l) \quad (8.8)$$

- 3) Функция  $G(x, \xi)$  непрерывна в  $[0, l] \times [0, l]$

$$3.1) G(\xi + 0, \xi) = G(\xi - 0, \xi)$$

$$G_x(y, \xi) \text{ терпит разрыв } x = \xi$$

$$3.2) G_x(\xi + 0, \xi) - G_x(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p(\xi)}, \quad \forall \xi \in (0, l)$$

$$G_x(\xi \pm 0, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi \pm 0} G(x, \xi), \quad (8.9)$$

$$G_x(\xi \pm 0, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi \pm 0} G_x(x, \xi), \quad (8.10)$$

### Теорема (о существовании функции Грина)

$\square$  однородная краевая задача имеет только тривиальное решение  
 (из  $\left\{ \begin{array}{l} Ly(x) = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0 \\ \text{гр. усл. } y \text{ при } y = 0, y = l \end{array} \right\}$ ).  $\exists!$  Функция Грина, удовлетворяющая (1)-(3). Докажем теорему:

1) Определим  $y_1(x) \in C^2[0, l]$  – решение задачи Коши

$$Ly_1(x) = 0, \quad y_1(0) = -\alpha_1, \quad y_1'(0) = \beta_1 \quad (8.11)$$

$$\exists! y_1(x) - \text{решение задачи Коши, } y_1(x) \neq 0, \quad (8.12)$$

$$\text{т. к. иначе по т. единственности } y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0 \quad (8.13)$$

$$\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0 \quad (8.14)$$

2)  $\square y_2(x) \in C^2[0, l]$

$$Ly_2(x) = 0, \quad y_2(l) = -\alpha_2, \quad y_2'(l) = \beta_2 \quad (8.15)$$

$$\exists! y_2(x) \neq 0 \quad (8.16)$$

$$\alpha_2 y_2'(0) + \beta_2 y_2(0) = 0 \quad (8.17)$$

$$\{y_1(x), y_2(x)\} - \text{ЛНЗ на } [0, l] \quad (8.18)$$

$$W[y_1, y_2](x=0) = -(\alpha_1 y_2'(0) + \beta_1 y_2(0)) \neq 0 \quad (8.19)$$

т. к. иначе  $y_2(x)$  – решение  $Ly = 0$  и удовл – т гр. усл.  $x = 0, x = l \Rightarrow y_2(x) \equiv 0$ ,

3) Определим  $G(x, \xi)$  в следующем виде:

$$\begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & 0 \leq x \leq \xi \\ c_2(\xi)y_2(x), & \xi \leq x \leq l \end{cases}, \quad c_{1,2}(\xi) \in C[0, l] - \text{неизвестно} \quad (8.20)$$

Приступим к проверке условий:

1)  $G \in C_x^2$ , т. к.  $y_{1,2}(x) \in C^2[0, l]$

$$L_x G(x, \xi) = 0, \quad Ly_{1,2}(x) = 0, \quad x \in [0, l] \quad (8.21)$$

2)  $x = 0: G(x, \xi)|_{x=0} = c_1(\xi)y_1(x)$

$$\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0 \quad (8.22)$$

3) 1.  $c_2(\xi)y_2(\xi) - c_1(\xi)y_1(\xi) = 0$

$$2. c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \begin{cases} c_2(\xi)y_2(\xi) - c_1(\xi)y_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \end{cases} \quad (8.23)$$

$$\forall \xi \in (0, l) \Rightarrow \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \text{СЛАУ относительно } (c_1(\xi), c_2(\xi)) \quad (8.23)$$

$$\text{матрица } A(\xi) = \begin{pmatrix} -y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ -y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

$$\det A(\xi) = -[y_1y_2' - y_2y_1'] = -W[y_1, y_2](\xi) \neq 0 \quad (8.26)$$

$$\text{матрица } A(\xi) \text{ невырождена} \Rightarrow \exists! \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W[y_1, y_2](\xi)p(\xi)} \quad (8.27)$$

$$c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W[y_1, y_2](\xi)p(\xi)} \quad (8.28)$$

Следствие из формулы Лагранжа:

$$W[y_1, y_2](\xi)p(\xi) \equiv g_0 - \text{константа} \quad (8.29)$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (8.30)$$

Так, мы получили соотношение, доказывающее существование функции Грина. С логической точки зрения мы предложили некую конструктивную формулу, которая привела к некоторому результату (определили одну из функций Грина, которая удовлетворяет аксиомам). Соответственно, возникает вопрос о единственности функции Грина.

Покажем единственность функции Грина.  $\square \tilde{G}(x, \xi)$  – другая функция Грина, удовлетворяющая аксиомам (1)-(3). Докажем, что  $G(x, \xi) = \tilde{G}(x, \xi)$ ,  $(x, \xi) \in [0, l] \times [0, l]$ . Зафиксируем  $\forall \xi \in [0, l]$  и обозначим  $z(x) = G(x, \xi) - \tilde{G}(x, \xi)$ . Необходимо доказать, что  $z(x) \equiv 0, [0, l]$ . По построению,  $z(x)$  – непрерывна на  $[0, l]$ ,  $z(x) \in C^2[0, \xi) \cup (\xi, l]$ .

$$Lz(x) = LG(x, \xi) - L\tilde{G}(x, \xi) = 0, \quad x \in [0, \xi) \cup (\xi, l] \quad (8.31)$$

Краевые условия

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = \alpha_1 G_x(0, \xi) + \beta_1 G(0, \xi) - (\alpha_1 \tilde{G}_x(0, \xi) + \beta_1 \tilde{G}(0, \xi)) = 0 \quad (8.32)$$

$$\alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0 \quad (8.33)$$

$$\Rightarrow z(x) \equiv 0, \quad (\text{т. к. } Lz = 0 \text{ при } z \neq \xi) \quad (8.34)$$

Мы заметили, что  $z(x) \in C[0, l]$ . Также

$$z'(x) \in C[0, l], \text{ т. к. } z'(x) \in C[0, \xi) \cup (\xi, l] \quad (8.35)$$

Сравним предельные значения производных:

$$\begin{aligned} z'(x = \xi + 0) - z'(x = \xi - 0) &= & (8.36) \\ &= G_x(\xi + 0, \xi) - \tilde{G}(\xi + 0, \xi) - G_x(\xi - 0, \xi) + \tilde{G}(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p(\xi)} - \frac{1}{p(\xi)} = 0, \end{aligned}$$

следовательно, искомое соотношение показано. Рассмотрим вторую производную  $z''(x)$ :

$$0 = Lz(x), \quad x \neq \xi \quad (8.37)$$

$$Lz(x) = \frac{d}{px} [p(x)z'(x)] - q(x)z(x) \quad (8.38)$$

Выполним дифференцирование:

$$p(x)z''(x) + p'(x)z'(x) - q(x)z(x) = 0 \quad (8.39)$$

$$z''(x) = \frac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)}, \quad p(x) > 0, \quad (8.40)$$

где  $q(x)z(x) - p'(x)z'(x)$ ,  $p(x)$  – непрерывные функции. Отсюда следует

$$z''(x) = h(x), \quad x \neq \xi, \quad h(x) \in c[0, l] \quad (8.41)$$

Доопределим  $z''(x)|_{x=\xi} = h(\xi)$ .

$$\Rightarrow z(x) \in c[0, l] \quad (8.42)$$

$$z(x) \in c^2[0, l] \text{ и } Lz(x) = 0 \text{ на всем } [0, l] \quad (8.43)$$

Воспользуемся условием теоремы о  $\exists$  функции Грина (о том, что однородная краевая задача имеет только тривиальное решение) и тем, что граничные условия  $x = 0, x = l$ :

$$\Rightarrow z(x) \equiv 0, \text{ т. е. } \tilde{G}(x, \xi) = G(x, \xi) \quad (8.44)$$

Теорема доказана, рассмотрим пример и построим функцию Грина краевой задачи:

$$\begin{cases} y''(x) + a^2y(x) = f(x), x \in [0, l] \\ y(0) = 0, y(l) = 0 \end{cases} \quad (8.45)$$

$$a \neq \frac{\pi n}{l}, n \in \mathbb{Z} \quad (8.46)$$

1) При выполнении условия на коэффициенты  $a$  аналогично примеру (7.5 и далее),

$$\begin{cases} y''(x) + a^2y(x) = 0 \\ y(0), y(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) \equiv 0 \text{ на } [0, l], \quad y''(x) = y \in c^2[0, l], \text{ т. е. условия т.} \quad (8.47)$$

$\exists!$  Ф. Грина выполнены. Тогда функция Грина

$$\mu^2 + a^2 = 0, \quad \mu = \pm ia \quad (8.47)$$

$$c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) \quad (8.48)$$

2)  $y_1(x) = \sin(ax), y_1(0) = 0, y_1(l) = \sin(al) \neq 0, al \neq \pi n, y_2(l) = 0$

$$\text{сдвиг } y_1(x): \quad y_2(x) = y_1(x - 1) = \sin a(x - l) - \text{решение } Ly = 0 \quad (8.49)$$

$$y_2(0) = -\sin al \neq 0, y_2(l) = 0 \quad (8.50)$$

В качестве упражнения, вычислим постоянную:

$$g_0 = p(x)W[y_1, y_2](x) = a \sin(al) \neq 0 \quad (8.51)$$

Получим ответ:

$$\Rightarrow G_a(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin(ax) \cdot \sin(a(\xi-l))}{a \sin(al)}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\sin(a\xi) \cdot \sin(a(x-l))}{a \sin(al)}, & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (8.52)$$

## Лекция 9. Использование функции Грина для решения неоднородного дифференциального уравнения и нелинейного дифференциального уравнения и соответствующих краевых задач.

### Применение функции Грина

На прошлой лекции мы нашли функцию Грина для краевой задачи в следующем виде:

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (9.1)$$

$$W[y_1, y_2](\xi)p(\xi) = g_0 \quad (9.2)$$

Также следует помнить, что

$$\begin{cases} Ly_1(x) = 0, & x \in [0, l] \\ \alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

$$\begin{cases} Ly_2(x) = 0, & x \in [0, l] \\ \alpha_2 y_2'(l) + \beta_2 y_2(l) = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

$$\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, \quad j = 1, 2 \quad (9.5)$$

Дифференциальный оператор

$$Ly(x) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y(x) \quad (9.6)$$

$$p(x) \in C^1[0, l], \quad p(x) > 0, \quad q(x) \in C[0, l] \quad (9.7)$$

### Решение краевой задачи для линейных неоднородных ОДУ 2-го порядка

Необходимо выразить решение

$$(1) \begin{cases} Ly(x) = f(x), & 0 \leq x \leq l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

Теорема 1: пусть однородная краевая задача, где

$$(2) Lv = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0, \quad (9.9)$$

имеет только тривиальное решение  $v(x) = 0$ . Тогда краевая задача (1) для  $\forall f(x) \in C[0, l]$  имеет единственное решение  $y(x)$ :

$$(3) y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) - \text{функция Грина} \quad (9.10)$$

Доказательство: проверим, что (3) – решение (1):

1.1) Краевые условия  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) &\stackrel{(3)}{=} \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 0+0 \\ \forall \xi \in (0, l) \end{array} \Rightarrow G(x, \xi) = \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0} \right\} = & (9.11) \\ &= \alpha_1 \left( \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right)'_{x \rightarrow 0+0} + \beta_1 \left( \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right)_{x \rightarrow 0+0} = \\ &= \alpha_1 \int_0^l \frac{y_1'(x \rightarrow 0+0) y_2(\xi)}{g_0} d\xi + \beta_1 \int_0^l \frac{y_1(x \rightarrow 0+0) y_2(\xi) f(\xi)}{g_0} d\xi = \\ &= \int_0^l \frac{\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0)}{g_0} y_2(\xi) f(\xi) d\xi, \quad \alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0 \end{aligned}$$

Аналогично показывается выполнение граничного условия на правом конце:

$$\Rightarrow 2y_2'(l)\beta_2 y_2(l) = 0, \quad x \rightarrow l - 0 \quad (9.12)$$

1.2) Докажем, что  $Ly(x) = f(x), \forall x \in [0, l]$

$$y(x) = \int_0^x G(x, \xi) d + \int_x^l G(x, \xi) d\xi = \frac{y_2(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1(x)}{g_0} \int_x^l y_2 f(\xi) d\xi \quad (9.13)$$

$$0 \leq \xi \leq x, \quad x \leq \xi \leq l \quad (9.14)$$

$$y'(x) = \frac{y_2'(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1'(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi + \quad (9.15)$$

$$+ \frac{y_2(x)}{g_0} y_1(x) f(x) - \frac{y_1(x) y_2(x) f(x)}{g_0}$$

$$[p(x)y'(x)] = p(x) \frac{y_2'(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{p(x)y_1'(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi \quad (9.16)$$

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'(x)] = \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx} [p(x)y_2'(x)] \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \quad (9.17)$$

$$+ \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx} [p(x)y_1'(x)] \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi + f(x) \frac{y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)}{g_0} p(x),$$

Где  $y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x) = W[y_1, y_2](x)$ .

$$W[y_1, y_2](x) * p(x) = g_0 \quad (9.18)$$

$$-q(x)y(x) = -q(x) \frac{y_2(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi - q(x) \frac{y_1(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi \quad (9.19)$$

Соберем весь дифференциальный оператор.  $Ly(x) = f(x)$ , так как

$$-q(x)y(x) + [p(x)y'(x)] = Ly(x) \quad (9.20)$$

$$-q(x) \frac{y_2(x)}{g_0} + \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx} [p(x)y_2'(x)] = \frac{Ly_2(x)}{g_0} \equiv 0 \quad (9.21)$$

$$-q(x) \frac{y_1(x)}{g_0} + \frac{p(x)y_1'(x)}{g_0} = \frac{Ly_1(x)}{g_0} \equiv 0 \quad (9.22)$$

2) Докажем единственность решения:

$$\square y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (9.23)$$

$\square \tilde{y}(x)$  – другое решение (1)

Рассмотрим разность  $y(x) - \tilde{y}(x)$ :

$$v(x) = y(x) - \tilde{y}(x) \Rightarrow \begin{cases} Lv(x) = L(y(x) - \tilde{y}(x)) = f - f = 0 \\ \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0 \\ \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \end{cases} \quad (9.24)$$

Из условия (2) следует, что

$$v(x) = 0 \Rightarrow y(x) = \tilde{y}(x), \quad \forall x \in [0, l] \quad (9.25)$$

Так, используя функцию Грина можно выразить решение дифференциального уравнения. Сделаем замечание, что  $L$  – дифференциальный оператор. Учитывая граничные условия и то, что  $Lv = 0$ ,  $v = 0$  как функция. Следовательно, существует обратный оператор  $L^{-1}$  и формула (2):

$$L^{-1}f = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (9.26)$$

### Применение формула Грина к нелинейным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим задачу с некоторыми граничными условиями:

$$(1) \quad y''(x) + a^2 y(x) = F(x, y(x)), \quad x \in [0, l] \quad (9.27)$$

$$(2) \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (9.28)$$

Здесь  $F(x, y)$  непрерывна на  $[0, l] \times \mathcal{R}$  и удовлетворяет условию Липшица на  $[0, l] \times \mathcal{R}$  по  $y$ :

$$\exists L > 0: |F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_{1,2}) \in [0, l] \times \mathcal{R} \quad (9.29)$$

Теорема:  $\square$  выполнены условия на  $F(x, y)$  и дополнительно выполнено соотношение:

$$\frac{Ll}{a|\sin(al)|} < 1 \quad (9.30)$$

Если условие выполнено, то тогда  $\exists!$  решение (1), (2). Докажем теорему:

1) Редукция к интегральному уравнению.

Обратим внимание, что  $\sin(al) \neq 0$ , следовательно, воспользовавшись примером из прошлой лекции заметим, что  $\exists$  функция Грина ( $G_a(x, \xi)$ )

$$(*) \quad \begin{cases} y''(x) + a^2 y(x) = f(x) \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \end{cases} \quad (9.31)$$

$$\Rightarrow y(x) \stackrel{(*)}{=} \int_0^l G_a(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (9.32)$$

Заметим, что раз  $y(x)$  – решение (1), (2), то можно положить

$$f(x) = F(x, y(x)) \quad (9.33)$$

Следовательно, (\*) верна для

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} y(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (9.34)$$

И обратно: если  $y(x)$  – решение ИУ (интегрального уравнения), то тогда

$$y(x) \Rightarrow \int_0^x + \int_x^l \dots \Rightarrow y(x) \text{ – решение (1), (2)} \quad (9.35)$$

Так, задача нахождения решения краевой задачи эквивалентна решению интегрального уравнения, следовательно, необходимо найти  $y(x) \in C[0, l]$ , удовлетворяющее  $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ .

2) Итерации для решения ИУ  $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ .

$$y_0(x) = 0, \forall x \in [0, l] \quad (9.36)$$

$$y_{n+1}(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y_n(\xi)) d\xi \quad (9.37)$$

$\forall n$ ,  $y_n(x)$  определена и непрерывна на  $[0, l]$

$$y_k(t) = \sum_{n=1}^k [y_n(t) - y_{n-1}(t)] \quad (9.38)$$

$$? y_k(t) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)] \quad (9.39)$$

Так, необходимо изучить вопрос о сходимости функционального ряда.

$$G_a(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin(ax) \sin(a(\xi-l))}{a \sin(al)}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\sin(a\xi) \sin(a(x-l))}{a \sin(al)}, & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (9.40)$$

$$\left| y_{n+1}^{(x)} - y_n^{(x)} \right| = \left| \int_0^l G_a(x, \xi) \{F(\xi, y_n(\xi)) - F(\xi, y_{n-1}(\xi))\} d\xi \right| \leq \quad (9.41)$$

$$\leq \int_0^l |G_a(x, \xi)| * |F(\xi, y_n(\xi)) - F(\xi, y_{n-1}(\xi))| d\xi \leq$$

$$\leq \int_0^l \frac{1}{a|\sin al|} L * |y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)| d\xi$$

3) Метод математической индукции

При помощи метода математической индукции на основе приведенной оценки покажем, что для разности итераций существует следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq M \left( \frac{lL}{a|\sin al|} \right)^n, \forall n \in n, \quad (9.42)$$

где  $M = \max |y_1(x)| = \max \left| \int_0^l G(x, \xi) F(\xi, 0) d\xi \right|$ ,  $x \in [0, l]$ . При  $n = 0$ ,  $\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$  верна. Так как  $n = m - 1$ , докажем, что  $n = m$ :

$$\left| y_{m+1}^{(x)} - y_m^{(x)} \right| = \left| \int_0^l G_a(x, \xi) \{F(\xi, y_m(\xi)) - F(\xi, y_{m-1}(\xi))\} d\xi \right| \leq \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^l |G_a(x, \xi)| * |F(\xi, y_m(\xi)) - F(\xi, y_{m-1}(\xi))| d\xi \leq \\ &\leq \int_0^l \frac{1}{a|\sin a\xi|} L * |y_m(\xi) - y_{m-1}(\xi)| d\xi \leq \frac{lL}{a|\sin a\xi|} M \left( \frac{lL}{a|\sin a\xi|} \right)^{n-1} = M \left( \frac{lL}{a|\sin a\xi|} \right)^m \\ &|y_m(\xi) - y_{m-1}(\xi)| \leq M \frac{lL}{a|\sin a\xi|} \end{aligned} \quad (9.44)$$

Рассмотрим функциональный и мажорантный ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad y_n(t) - y_{n-1}(t) \leq a_n, \quad a_n = Mq^n, \quad 0 < q < 1 \quad (9.45)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \text{мажорантный ряд сходится} \quad (9.46)$$

Отсюда по теореме Вейерштрасса

$$\Rightarrow \exists (y): \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(x)) \xrightarrow{\rightarrow} y(t) \text{ на } [0, l] \quad (9.47)$$

$$\Rightarrow y(t) \in c[0, l] \Rightarrow y_k(t) \xrightarrow{\rightarrow} y(t) \text{ на } [0, l] \quad (9.48)$$

4) Докажем, что  $y(t)$  – решение ИУ:

$$y_{k+1}(t) = \int_0^l \xi_a(x, \xi) F(\xi, y_k(\xi)) d\xi, \quad y_{k+1}(t) \xrightarrow{\rightarrow} y(t) \text{ на } [0, l] \quad (9.49)$$

Докажем, что

$$\int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y_k(\xi)) d\xi \xrightarrow{\rightarrow} \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (9.50)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, l], \quad \left| \int_0^l (\cdot) d\xi - \int_0^l (\cdot) d\xi \right| &\leq \int_0^l |G_a(x, \xi)| * |F(\xi, y_k(\xi)) - F(\xi, y(\xi))| d\xi \leq \\ &\leq \frac{lL}{a|\sin a\xi|}, \quad \max |y_k(\xi) - y(\xi)|, \quad \forall \xi \in [0, l] \end{aligned} \quad (9.51)$$

$$G_a(x, \xi) \leq \frac{1}{a|\sin a\xi|} \quad (9.52)$$

$$F(\xi, y_k(\xi)) - F(\xi, y(\xi)) \leq L|y_k(\xi) - y(\xi)| \leq \max |y_k(\xi) - y(\xi)| \quad (9.53)$$

Убедимся, что  $\forall \varepsilon' > 0 \exists k = k(\varepsilon): |y_k(\xi) - y(\xi)| < \frac{\varepsilon'}{lL}$  при  $k \geq k(\varepsilon), \forall \xi \in [0, l]$ . Тогда

$$\int_0^l \xi_a(x, \xi) F(\xi, y_k(\xi)) d\xi \xrightarrow{\rightarrow} \int_0^l \xi_a(x, \xi) F(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (9.54)$$

Следовательно,  $y(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению.

$$y(t) = \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (9.55)$$

Так, мы доказали существование решения, докажем его единственность.

5) Единственность решения (1), (2).

Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  – решения. Найдем их разность и распишем оценку для модуля:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \frac{lL}{a|\sin a\xi|} \max |y_1(\xi) - y_2(\xi)|, \quad \xi \in [0, l], \quad \forall x \in [0, l] \quad (9.56)$$

---

$$\Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x), \quad \forall x \in [0, l] \quad (9.57)$$

## Лекция 10. Задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка.

### Задача Штурма-Лиувилля

На прошлых лекциях мы ввели дифференциальный оператор:

$$Ly(x) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx}(x) \right] - q(x)y(x), \quad 0 \leq p(x) \in C^1[0, l], \quad q(x) \in [0, l] \quad (10.1)$$

$$p(x) \in \mathcal{R}, \quad q(x) \in \mathcal{R} \quad (10.2)$$

Мы увидели, что изучение свойств оператора  $L$  ( $Ly(x) = f(x)$ ) и связанных с этим оператором задач нахождения решения неоднородного дифференциального уравнения с граничными/краевыми условиями во многом аналогично ситуации, возникающей в курсе линейной алгебры, и связано с тем, что если оператор  $L$  невырожденное ( $Lv = 0 \Rightarrow v = 0$ ), то  $\exists L^{-1}$  и  $y = L^{-1}f$ .

Рассмотрим краевую задачу с параметром  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

- 1)  $Ly(x) = -\lambda y(x), \quad x \in [0, l]$
- 2)  $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$
- 3)  $\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0,$

где  $\alpha_j, \beta_j \in \mathcal{R}, \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2, \quad j = 1, 2$ . Вспомним, что  $\mu \in \mathbb{C}$  – собственное значение матрицы  $L$ , если  $\exists \bar{h} \neq \bar{\theta}$  такое, что  $L\bar{h} = \mu\bar{h}$ . Тогда  $\bar{h}$  – собственный вектор.

Дадим определение собственному значению краевой задачи:  $\lambda$  называется собственным значением, если для этого значения краевая задача (1)-(3) имеет нетривиальное решение  $y(x) \not\equiv 0$  на  $[0, l]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Соответствующая функция  $y(x)$  – собственная функция. Задача поиска собственных значений и собственных функций для (1)-(3) называется задачей Штурма-Лиувилля.  $y(x)$  – собственная функция, следовательно  $sy(x)$  – собственная функция для  $\forall s \in \mathbb{C}, s \neq 0$ .

Заметим, что необходимой частью постановки задачи Штурма-Лиувилля являются краевые условия (2), (3). Без них  $\forall \lambda$  – собственное значение (т.к. существуют нетривиальные решения ОДУ 2-го порядка).

Также заметим, что если  $L$  – матрица вещественных коэффициентов, то  $\mu \in \mathbb{C}$ . В общем случае, собственные значения комплексны.

### Теорема 1

Все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1)-(3) вещественны, собственные функции можно выбрать вещественными.

Доказательство:  $\supset \lambda_1$  – собственное значение задачи Штурма-Лиувилля.

$$\lambda_1 = a + ib \in \mathbb{C}, \quad i_2 = -1, \quad a, b \in \mathcal{R} \quad (10.3)$$

Соответствующая собственная функция:

$$y_1(x) = u(x) + iv(x), \quad (10.4)$$

где  $u(x), v(x)$  – вещественные функции. Из условия, что  $\lambda_1, y_1(x)$  – решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$0 \neq y_1(x) \quad (10.5)$$

$$Ly_1(x) = -\lambda_1 y_1(x) \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} Lu(x) + iLv(x) &= -(a + ib)(u(x) + iv(x)) = \\ &= -au(x) + bv(x) + i(-bu(x) - av(x)) \end{aligned} \quad (10.7)$$

Запишем систему и вычтем одно из другого:

$$\begin{cases} Lu = -au(x) + bv(x) & | v(x) \\ Lv = -bu(x) - av(x) & | u(x) \end{cases} \quad (10.8)$$

$$Luv - Lvu = b(u^2(x) + v^2(x)) \quad (10.9)$$

$$\int_0^l (Lu(x)v(x) - u(x)Lv(x)) dx = b \int_0^l (u^2(x) + v^2(x)) dx \quad (10.10)$$

По следствию из формулы Грина  $u, v \in C^2[0, l]$  и удовлетворению краевым условиям,

$$\int_0^l (Lu(x)v(x) - u(x)Lv(x)) dx = 0 \quad (10.11)$$

$$u^2(x) + v^2(x) \neq 0, \geq 0, \int_0^l (u^2(x) + v^2(x)) dx > 0 \quad (10.12)$$

Так, единственный способ приравнять выражения – приравнять  $b$  к нулю:  $\Rightarrow b = 0$ .  
 Тогда

$$\lambda_1 = a \in \mathcal{R} \quad (10.13)$$

Если  $u + iv$  – собственная функция, то

$$Lu + iLv = -au - aiv \Rightarrow Lu, Lv = -au, \quad (10.14)$$

где  $u, v$  – вещественные собственные функции.

## Теорема 2

Каждому собственному значению задачи Штурма-Лиувилля соответствует только одна собственная функция (с точностью до множителя).

Доказательство: пусть  $\lambda$  – собственное значение задачи Ш-Л,  $\lambda \in \mathcal{R}$ ;  $y_1(x), y_2(x)$  – собственные функции.

$$\Rightarrow Ly_j(x) = \lambda y_j + \text{одни и те же краевые условия } j = 1, 2 \quad (10.15)$$

Рассмотрим краевые условия  $x = 0$ :

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} (0) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 0 \quad (10.16)$$

Если  $\alpha_1 = 0 \Rightarrow y_j(0) = 0, j = 1, 2;$

Если  $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow y_j'(0) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} y_j(0).$

$$W[y_1, y_2](0) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1(0)y_2(0) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_2(0)y_1(0) = 0 \quad (10.17)$$

$$\Rightarrow y_1(x), y_2(x) - \text{линейно зависимы} \Rightarrow \exists c \neq 0: y_2(x) = c y_1(x) \quad (10.18)$$

### Теорема 3

Собственные функции задачи Ш-Л, отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными относительно скалярного произведения

$$\langle v, w \rangle = \int_0^l v(x)w(x) dx, \quad (v \perp w, \text{ если } \langle v, w \rangle = 0) \quad (10.19)$$

Доказательство:  $\square \lambda_1 \neq \lambda_2$  – собственные значения задачи Ш-Л, соответствующие собственным функциям  $y_1(x), y_2(x).$

$$\Rightarrow Ly_1 = -\lambda_1 y_1, \quad Ly_2 = -\lambda_2 y_2 \quad (10.20)$$

Запишем следствие формулы Грина:

$$\langle Ly_1, y_2 \rangle - \langle y_1, Ly_2 \rangle = \int_0^l \{Ly_1(x)y_2(x) - y_1(x)Ly_2(x)\} dx = 0 \quad (10.21)$$

$$Ly_1 = -\lambda_1 y_1, \quad Ly_2 = -\lambda_2 y_2 \quad (10.22)$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\langle y_1, y_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle y_1, y_2 \rangle = 0, \text{ т. е. } y_1(x) \perp y_2(x) \quad (10.23)$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \quad (10.24)$$

### Теорема 4 (о локализации собственных значений задачи Штурма-Лиувилля)

$$\square \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (10.25)$$

Пусть  $\lambda$  – собственное значение задачи Ш-Л, тогда

$$\lambda \geq \min q(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (10.26)$$

Доказательство: пусть  $\lambda$  – собственное значение,  $y(x)$  – собственная функция задачи Ш-Л.

$$Ly(x) = -\lambda y(x), \quad y(x) \not\equiv 0 \quad (10.27)$$

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) = -\lambda y(x) \mid * -y(x), \quad \forall x \in [0, l] \quad (10.28)$$

$$-(p(x)y'(x))' y(x) + q(x)y^2(x) = \lambda y^2(x) \mid \int_0^l (\cdot) dx \quad (10.29)$$

$$\lambda \int_0^l y^2(x) dx = \int_0^l q(x)y^2(x) - \int_0^l (p(x)y'(x))' y(x) dx \quad (10.30)$$

$$q(x) \geq \min q(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad y^2(x) \geq 0 \quad (10.31)$$

$$\int_0^l q(x)y^2(x) dx \geq \min q(\xi) \int_0^l y^2(x) dx, \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (10.32)$$

$$\int_0^l (p(x)y'(x))' y(x) dx = -p(x)y'(x)y(x)|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l p(x)(y'(x))^2 dx \quad (10.33)$$

$$\int_0^l p(x)(y'(x))^2 dx \geq 0, \quad \text{т.к. } p(x) > 0, \quad (y'(x))^2 \geq 0 \quad (10.34)$$

$$-p(x)y'(x)y(x) = 0, \quad \text{т.к. } y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (10.35)$$

$$\lambda \int_0^l y^2(x) dx \geq \min q(\xi) * \int_0^l y^2(x) dx, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad \int_0^l y^2(x) dx > 0 \quad (10.36)$$

$$\lambda \geq \min q(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (10.37)$$

Рассмотрим пример:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad l = \pi \quad (10.38)$$

$$(*) \begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ y(0), y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (10.39)$$

Необходимо найти  $\lambda \in \mathcal{R}$ :  $\exists$  нетривиальное решение (\*). Будем исходить из того, что это ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Согласно теореме 4,

$$\lambda \geq 0 \quad (\text{т.к. } \min q(x) = 0) \quad (10.40)$$

Следовательно,  $\lambda < 0$  – не является собственным значением. Рассмотрим несколько случаев:

$$1) \quad \square \lambda = 0 \Rightarrow y''(x) = 0 \Rightarrow y_{00}(x) = c_1 + c_2 x, \quad \forall c_{1,2} \in \mathcal{R} \\ \Rightarrow x = 0: 0 = y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (10.41)$$

$$x = l \Rightarrow 0 = c_2 l \Rightarrow c_2 = 0 \quad (10.42)$$

$\Rightarrow y(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda = 0$  – не является собственным значением

2)  $\exists \lambda > 0$ . Тогда характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\mu^2 + \lambda = 0, \quad \mu = \pm i\sqrt{\lambda} \quad (10.43)$$

Тогда вещественное общее решение задачи:

$$y_{00}(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (10.44)$$

$$x = 0: 0 = y(x) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (10.45)$$

$$x = \pi: 0 = y(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \quad (10.46)$$

Если  $\sqrt{\lambda}\pi = \pi n, n \in \mathcal{N}$ :

$\lambda n = n^2 \Rightarrow \exists$  нетривиальное решение

$$y_n(x) = c_2 \sin(nx), \quad \forall c_2 \quad (10.47)$$

Если  $\lambda \neq \lambda_n, \lambda > 0$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \neq 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (10.48)$$

$$\Rightarrow y(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda \neq \lambda_n - \text{не является собственным значением}$$

Тогда  $\lambda_n = n^2, n \in N$  – собственное значение.

$$y_n(x) = c \sin(nx), \forall c \neq 0 \quad (10.49)$$

### Теорема Стеклова

Покажем, что существует счетное число собственных значений  $\lambda_n$  и собственных функций  $y_n(x)$  задачи Ш-Л (1)-(3) в общей постановке. Будем считать, что

$$\int_0^l y_n^2(x) dx = 1 \quad (10.50)$$

Рассмотрим коэффициент  $f_n$ :

$$f_n = \int_0^l f(x)y_n(x) dx, f(x) \in C[0, l] \quad (10.51)$$

Тогда теорема будет звучать следующим образом:  $\exists f(x) \in C^2[0, l]$  и удовлетворяет краевым условиям из постановки задачи Ш-Л. Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$  сходится равномерно на  $[0, l]$  к функции  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), 0 \leq x \leq l \quad (10.52)$$

## Лекция 11. Первые интегралы нормальных систем и их использование для решения линейных однородных уравнений в частных производных.

### Первые интегралы нормальной системы ОДУ 1-го порядка

Запишем нормальную систему дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (11.1)$$

$$f_j(t, x_1, \dots, x_n) D_1 \subseteq \mathcal{R}^{n+1} \quad (11.2)$$

$$\exists \frac{df_i}{dx_j}(t, x_1, \dots, x_n) - \text{непрерывны в } D_1, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (11.3)$$

Первым интегралом (ПИ) системы (1) в  $D_1$  называется функция

$$v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1), \quad (11.4)$$

сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в  $D_1$  интегральной кривой (1), т.е. если  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  – решение (1) на  $[a, b]$ , то

$$(2) \quad \exists c: v(t, x_1, \dots, x_n) \equiv c, \quad \forall t \in [a, b], \quad t, x_1, \dots, x_n \in D_1 \quad (11.5)$$

Для того, чтобы исследовать первые интегралы и использовать свойства первого интеграла в других терминах, введем понятие: производная  $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$  в силу системы (1):

$$\frac{dv}{dt} |_{(1)} = \frac{dv}{dt}(t, x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n \frac{dv}{dx_j}(t, x_1, \dots, x_n) f_j(t, x_1, \dots, x_n), \quad (11.6)$$

для  $\forall (t, x_1, \dots, x_n) \in D_1$ .

#### Лемма 1

$$(3) \quad v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1) - \text{ПИ (1)} \Leftrightarrow \frac{dc}{dt} |_{(1)}(t, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (11.7)$$

$$\forall (t, x_1, \dots, x_n) \in D_1 \quad (11.8)$$

В дальнейшем будем использовать следующее выражение:  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

Доказательство:

$$1) \quad \square v - \text{ПИ (1)} \Rightarrow \forall \text{ реш. } \bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T: \\ nk(t, \bar{x}(t)) \in D_1 \Rightarrow v(t, \bar{x}(t)) \equiv c, \quad \forall t \in [a, b] \quad (11.9)$$

Дифференцируем по  $t$ :

$$0 = \frac{dv}{dt}(t, \bar{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{dv}{dx_j}(t, \bar{x}(t)) \frac{d\bar{x}_j}{dt} = (\bar{x}(t) - \text{решение (1)}) = \quad (11.10)$$

$$= \frac{dv}{dt}(t, \bar{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{dv}{dx_j}(t, \bar{x}(t)) f_j(t, \bar{x}(t)) = \frac{dv}{dt} |_{(1)}(t, \bar{x}(t)),$$

т.е. производная в силу системы допускает равенство нулю на  $\forall$  ИК (интегральной кривой)  $(t, \bar{x}(t)) \in D_1$ . По теореме существования и единственности решения задачи Коши:

$$\forall (t_0, \bar{x}^0) \in D_1 \exists! (t, \bar{x}(t)), \text{ проходящее через } (t^0, \bar{x}^0) \Rightarrow (3) \text{ верно в } D_1 \quad (11.11)$$

2) Обратное:  $\supset$  верно (3) для  $\forall (t, \bar{x}) \in D_1$ , следовательно, верно для  $\forall$  ИК  $(t, \bar{x}(t))$  системы (1).

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} v(t, \bar{x}(t)) = 0 \quad (11.12)$$

$$\Rightarrow \exists c: v(t, \bar{x}(t)) = c, \text{ т.е. } v(t, \bar{x}) - \text{ПИ} \quad (11.13)$$

### Геометрический смысл ПИ

$$v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1) \quad (11.14)$$

$$\exists_m \{1, \dots, n\}: \frac{dv}{dx_m}(\cdot) \neq 0 \text{ в } D_1 \quad (11.15)$$

Тогда  $v(t, x_1, \dots, x_n) = c_0$ , где  $c_0$  – одно из значений, которые  $v$  принимает в  $D_1$ . Так, функция представляет из себя  $n$ -мерную поверхность, сотканную из ИК системы (1).

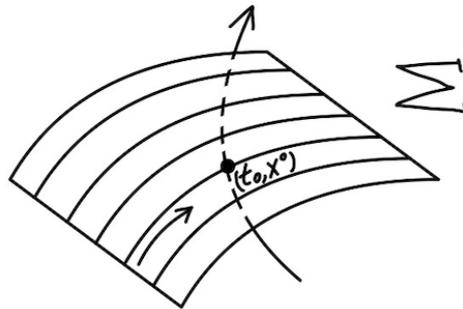


Рис. 11.1. Графическое изображение функции  $v(t, x_1, \dots, x_n)$ .

$$\supset (t_0, \bar{x}^0) \in D_1 \Rightarrow v(t, x_1, \dots, x_n) = c_0, \quad t_0, \bar{x}^0 \in \Sigma \quad (11.16)$$

По теореме  $\exists!$  решения задачи Коши (1):

$$\exists \text{ИК } (t, \bar{x}(t)): \bar{x}(t^0) = x^0 \quad (11.17)$$

Докажем, что  $(t, \bar{x}(t)) \in \Sigma$ : так как  $v(t, x_1, \dots, x_n) - \text{ПИ}$ , то

$$v(t, \bar{x}(t)) = v(t^0, \bar{x}(t^0)) = v(t^0, v^0) = c_0, \quad \forall t \in [a, b] \ni t_0 \quad (11.18)$$

### Независимые ПИ

Если  $v_1(t, \bar{x}), \dots, v_k(t, \bar{x}) - \text{ПИ}$  (1), то для  $\forall \varphi(y_1, \dots, y_k) - \text{непрерывно дифференцируемых}$ :  $\Phi(t, \bar{x}) = \varphi(v_1(t, \bar{x}), \dots, v_k(t, \bar{x})) - \text{ПИ}$  (из определения  $(t, \bar{x}(t)) \in D_1$ ).

$$\Phi(t, \bar{x}(t)) = \varphi(c_1, \dots, c_n) = c_0, \quad v_1(t, \bar{x}) = c_1, \quad v_k(t, \bar{x}) = c_k \quad (11.19)$$

Определение: ПИ  $v_1(t, \bar{x}), \dots, v_k(t, \bar{x})$  системы (1) называются функционально независимыми, если в рамках соответствующей матрицы производных

$$\left( \frac{dv_i}{dx_j}(t, \bar{x}) \right) = k, \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1 \quad (11.20)$$

### Теорема 1

Пусть в  $\supset D_1$  существует  $n$  функционально независимых ПИ (1)  $v_1(t, \bar{x}), \dots, v_n(t, \bar{x})$ . Тогда для  $\forall (t^0, \bar{x}^0) \in D_1$  решение  $\bar{x}(t)$  задачи Коши

$$(1') \quad \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t)), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0 \quad (11.21)$$

Однозначно определяется как неявная функция из систем уравнений

$$(*) \quad \begin{cases} v_1(t, \bar{x}) = c_1^0 \\ \dots \\ v_n(t, \bar{x}) = c_n^0 \end{cases}, \quad (11.22)$$

где  $c_j^0 = v_j(t^0, \bar{x}^0)$ . Доказательство: рассмотрим (\*) в окрестности  $(t^0, \bar{x}^0)$ . Из функциональной независимости ПИ ( $k = n$ ) следует, что

$$\det \left( \frac{dv_i}{dx_j}(t, x_1, \dots, x_n) \right) \neq 0 \quad (11.23)$$

Следовательно, по теореме о неявных функциях в окрестности  $t^0$  существует единственная непрерывно дифференцируемая функция

$$\tilde{x}_j(t) = g_j(t, c_1^0, \dots, c_n^0), \quad j = 1, \dots, n \quad (11.24)$$

$$\bar{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) \quad (11.25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1(t, \bar{g}(t)) = c_1^0 \\ \dots \\ v_n(t, \bar{g}(t)) = c_n^0 \end{cases}, \quad \forall t \in \text{окрестности } t_0 \quad (11.26)$$

Пусть  $\bar{x}(t)$  – решение задачи Коши (1'). Тогда воспользуемся тем, что  $v_1, \dots, v_n$  – ПИ, следовательно в окрестности  $t_0$  будут выполнены аналогичные соотношения:

$$\begin{cases} v_1(t, \bar{x}(t)) = v_n(t^0, \bar{x}^0) = c_1^0 \\ \dots \\ v_n(t, \bar{x}(t)) = c_n^0 \end{cases} \quad (11.27)$$

Следовательно,  $\bar{x}(t)$  удовлетворяет системе (\*), которые определяют неявную функцию. Тогда в окрестности  $t_0$ ,  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{g}(t)$  совпадают, следовательно  $\bar{x}(t) = \bar{g}(t)$  в окрестности  $t_0$ . Теорема доказана и можно сделать вывод о том, что (\*) – решение (1') в неявной форме.

### Теорема 2 (о существовании первых интегралов)

$$\square \text{ автономная система } f_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n \quad (11.28)$$

$$\square \bar{x}^0: \sum_{j=1}^n f_j^2(\bar{x}^0) \neq 0 \quad (11.29)$$

Тогда существует ровно  $(n - 1)$  не содержащих  $t$  функционально независимых ПИ (1) в окрестности  $\bar{x}^0$ .

### Уравнения в частных производных (УЧП)

Классификация УЧП:

$$u = u(\bar{x}) = u(x_1, \dots, x_n), \quad D_0 \subseteq \mathcal{R}^n \quad (11.30)$$

1) УЧП 1-го порядка:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{du}{dx_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{du}{dx_n}(x_1, \dots, x_n)\right) = 0, \quad (11.31)$$

при этом  $F$  существенным образом зависит от последних аргументов.

2) Квазилинейное УЧП (линейное относительно  $\frac{du}{dx_j}$ ):

$$\sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{du(\bar{x})}{dx_j} = b(\bar{x}, u(\bar{x})), \quad (11.32)$$

где коэффициенты  $a_j(\bar{x}, u(\bar{x}))$  зависят от решения.

3) Линейное однородное УЧП 1-го порядка:

$$(4) \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{du}{dx_j}(\bar{x}) = 0, \quad a_j \in C^1(D_0), \quad \text{область } D_0 \subseteq \mathcal{R}^n \quad (11.33)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}) \neq 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0 \quad (11.34)$$

Определение:  $u(\bar{x})$  – решение УЧП (4), если

- $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$
- $\forall \bar{x} \in D_0$  выполнено уравнение (4)

Сопоставим (4) нормальную систему:

$$(5) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (11.35)$$

Определение: фазовые кривые (5) называются характеристиками УЧП (4):

$$\{\bar{x}(t)\} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}, \quad (11.36)$$

где  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  – решение (5). Система (5) – система характеристик.

## Лемма 2

$u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$  – решение линейного однородного УЧП (4) тогда и только тогда, когда  $u(\bar{x})$  – не содержащий  $t$  ПИ характеристической системы (5) в  $D_0$ .

Доказательство: пусть  $u(\bar{x})$ , не содержащий  $t$ , – ПИ (5) в  $D_0$ . Тогда в силу Леммы 1:

$$\frac{du}{dt} \Big|_{(5)} \equiv 0 \text{ в } D_0 \quad (11.37)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du(\bar{x})}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{du}{dx_j}(\bar{x}) a_j(\bar{x}) \equiv 0 \quad (11.38)$$

Так,  $u(\bar{x})$  – решение (4).

## Теорема 3 (общее решение линейных однородных УЧП)

Пусть в области  $D_0$  (5) имеет ровно  $(n - 1)$  не содержащих  $t$  функционально независимых ПИ:

$$v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \quad (11.39)$$

Тогда существует окрестность  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$ . Общее решение УЧП (4) имеет следующий вид:

$$(6) \quad u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})), \quad \forall F(y_1, \dots, y_{n-1}) \text{ – непрерывно дифф.} \quad (11.40)$$

Доказательство: из Леммы 2,  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  – решение,  $u$  – решение (4). Запишем это в виде системы:

$$(*) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{du}{dx_j}(\bar{x}) = 0 \\ \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{dv_1}{dx_j}(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0 \\ \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{dv_{n-1}}{dx_j}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (11.41)$$

(\*) - СЛАУ, однородная относительно функции  $a_1(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x}), \forall \bar{x} \in D_0$ . Однородная система имеет нетривиальное решение в силу

$$\Rightarrow \det(\cdot) = \frac{D(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_n)} = 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0 \quad (11.42)$$

В силу функциональной независимости первых интегралов присутствует минор порядка  $(n - 1)$ , отличный от 0:  $(v_1, \dots, v_{n-1})$ .

$$\text{rang} \left( \frac{dv_i}{dx_j}(x_1, \dots, x_n) \right) = (n - 1) \quad (11.43)$$

По теореме о функциональных матрицах,

$$\Rightarrow \forall M_0(\cdot) \Rightarrow \exists F(y_1, \dots, y_{n-1}) \in C^1(\cdot) \quad (11.44)$$

---

$$u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})) \quad (11.45)$$

## Лекция 12. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

$$(1) \quad a_1 \left( \bar{x}, u(\bar{x}) \frac{du}{dx_1}(\bar{x}) + \dots + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{du}{dx_n}(\bar{x}) \right) = b(\bar{x}, u(\bar{x})) \quad (12.1)$$

$$a_1(\bar{x}, u), \dots, a_n(\bar{x}, u), b(\bar{x}, u) \in C^1(D), \text{ область } D \subseteq \mathcal{R}^{n+1}, \quad (12.2)$$

Где  $(\bar{x}, u)$  – функции  $(n + 1)$  переменной. Запишем новый условия:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}, u) \neq 0, \quad \forall (\bar{x}, u) \in D, \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad (12.3)$$

Определение: функция  $u(\bar{x})$  – решение УЧП (1) в  $D_0 \subseteq \mathcal{R}^n$ , если

- 1)  $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$
- 2)  $\forall \bar{x} \in D_0 \Rightarrow (\bar{x}, u(\bar{x})) \in D$
- 3)  $\forall \bar{x} \in D_0 \Rightarrow$  выполнено (1)

Сопоставим УЧП (1) в нормальную систему:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = a_1(\bar{x}(t), u(t)) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = a_n(\bar{x}(t), u(\bar{x})) \\ \frac{du}{dt}(t) = b(\bar{x}(t), u(t)) \end{cases}, \quad (3') \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = a_1(\bar{x}(t), u(t)) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = a_n(\bar{x}(t), u(\bar{x})) \end{cases} \quad (12.4)$$

Определение: решение системы  $(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$  задает фазовые кривые в пространстве  $\mathcal{R}^{n+1}$ , которые называются характеристиками УЧП (1). Соответствующая система называется характеристической.

### Теорема

Пусть  $v(\bar{x}, u)$ , не содержащий  $t$ , - ПИ системы (3) в  $D$  и пусть в  $N_0 = N_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in D$  выполнено условие:

$$v(N_0) = c_0, \quad \frac{dv}{du}(N_0) \neq 0 \quad (12.5)$$

Тогда в некоторой окрестности  $N_0$

$$(4) \quad v(x_1, \dots, x_n, u) = c_0 \quad (12.6)$$

Определяет неявную функцию, которая является решение УЧП (1):

$$u = u(x_1, \dots, x_n) \quad (12.7)$$

Доказательство:  $v(\bar{x}, u)$  – не содержащий  $t$  ПИ. Тогда по свойству ПИ:

$$(5) \quad 0 = \frac{dv}{dt}|_{(3)}(\bar{x}, u) = \frac{dv}{dt}(\bar{x}, u) + \sum_{j=1}^n \frac{dv}{dx_j}(\bar{x}, u) a_j(\bar{x}, u) + \frac{dv}{du}(\bar{x}, u) b(\bar{x}, u) \quad (12.1)$$

$$\frac{dv}{dt}(\bar{x}, u) = 0, \quad \forall (\bar{x}, u) \in D \Rightarrow u = u(\bar{x}) \in D \quad (12.8)$$

Рассмотрим функциональное уравнение (4): в точке  $N_0$  выполнено, невырожденность по  $u \frac{dv}{du}$ . Тогда существует окрестность  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in C^1$  и непрерывно дифференцируемая в окрестности функция  $u = u(x_1, \dots, x_n) \in C^1$ , являющаяся решением (4).

$$\frac{d}{dx_j} |v(\bar{x}, u(\bar{x})) = c_0, \quad \forall \bar{x} \in M_0 \quad (12.9)$$

$$\frac{dv}{dx_j}(\bar{x}, u(\bar{x})) + \frac{dv}{du}(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{du(\bar{x})}{dx_j} = 0 \quad (12.10)$$

$$-\sum_{j=1}^n \frac{dv}{du}(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{du}{dx_j}(\bar{x}, u(\bar{x})) a_j(\bar{x}, u(\bar{x})) + \frac{dv}{du}(\bar{x}, u(\bar{x})) b(\bar{x}, u(\bar{x})) = 0 \quad (12.11)$$

$$\forall \bar{x} \in M_0, \quad \frac{dv}{du}(\bar{x}, u(\bar{x})) \neq 0, \text{ т. к. } \bar{x}, u(\bar{x}) \text{ в окр. } N_0, \quad (12.12)$$

поэтому также отличны от нуля по теореме о сохранении знака непрерывной функции.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{du}{dx_j}(\bar{x}) = b(\bar{x}, u(\bar{x})) \quad (12.13)$$

Замечание: характеристическая система (3) порядка  $(n + 1)$ , следовательно по теореме о существовании функционально независимых не зависящих от  $t$  ПИ можно рассчитывать на  $(n)$  штук функционально независимых ПИ  $v_1(\bar{x}, u), \dots, v_n(\bar{x}, u)$ .

$$\Rightarrow W(\bar{x}, u) = F(v_1(\bar{x}, u), \dots, v_n(\bar{x}, u)) - \text{ПИ}, \quad \forall F - \text{непрерывно дифф.}$$

$$\Rightarrow \text{по т. 1: } F(v_1(\bar{x}, u), \dots, v_n(\bar{x}, u)) = 0 \text{ неявно задает решение } u(\bar{x}) \text{ УЧП}$$

### Геометрический смысл решения квазилинейного УЧП 1-го порядка

Пусть  $u = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$ . График –  $(n)$ -мерная поверхность. Рассмотрим структуру поверхности. Обратим внимание, что ПИ существенным образом используются в построении решения. С другой стороны, мы уже рассматривали, что представляют из себя линии уровня ПИ нормальной системы. С третьей стороны, с помощью неявного задания определяется решение квазилинейного УЧП. Соберем все эти соображения и докажем теорему.

### Теорема 2

Функция  $u = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$  – решение УЧП (1) тогда и только тогда, когда задаваемая функцией поверхность целиком состоит из характеристик, определяемых характеристической системой (3). То есть, через любую точку поверхности проходит характеристика целиком ей принадлежащая.

Доказательство:

$$1) \quad \supset f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$$

$$\mathcal{P} = \{(x_1, \dots, x_n, u) \in \mathcal{R}^{n+1}: u = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in D_0\} \quad (12.14)$$

$\forall (\bar{x}^0, n^0) \in \mathcal{P}$  проходит характеристика  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \{x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)\} \subset \mathcal{P} \quad (12.15)$$

$$t^0 \Rightarrow (\bar{x}^0, u^0) = (\bar{x}(t^0), u(t^0)) \quad (12.16)$$

Линия лежит на поверхности, то касательный вектор к этой линии будет одним из касательных векторов к поверхности в заданной точке, следовательно он будет ортогонален нормали.

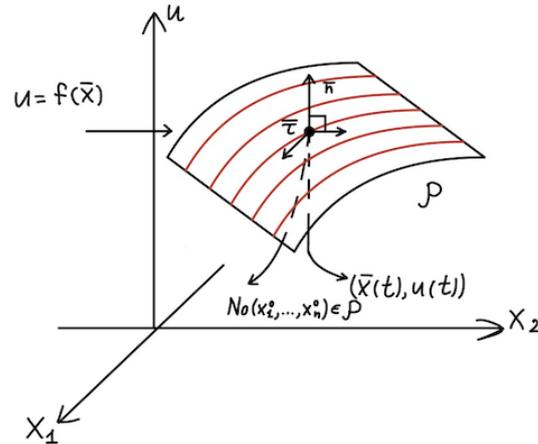


Рис. 12.1. Графическое изображение поверхности  $\mathcal{P}$ , задаваемой графиком функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Определим касательный вектор:

$$\bar{\tau}(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t), u(t)) = \{(3)\} = \quad (12.17)$$

$$(a_n(\bar{x}_1(t), u(t)), \dots, a_n(\bar{x}(t), u(t)))$$

$$u(t) = f(\bar{x}(t)), \text{ т. к. } \tau \subset \mathcal{P} \quad (12.18)$$

Запишем компоненты нормального вектора:

$$\bar{n}(t) = \left( \frac{df}{dx_1}(\bar{x}(t)), \dots, \frac{df}{dx_n}(\bar{x}(t)), -1 \right) \quad (12.19)$$

$$\Phi(\bar{x}, u) = f(\bar{x}) - u, \quad \frac{d\Phi}{dx_j}, \frac{d\Phi}{dn} \quad (12.20)$$

Запишем соотношение ортогональности векторов:

$$\bar{\tau}(t) \perp \bar{h}(t) \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}(t), u(t)) \frac{df}{dx_j}(\bar{x}(t)) - b(\bar{x}(t), u(t)) = 0 \quad (12.21)$$

Следовательно, УЧП выполнено на  $\forall$  характеристике.  $u = f(\bar{x})$  – решение УЧП (1). Так как  $\forall$  характеристика  $\in \mathcal{P}$ , то  $\forall \bar{x} \in D_0$ .

- 2)  $\supset u = f(\bar{x})$  – решение (1) в  $D_0$ . Докажем, что через  $\forall N_0$  проходит лежащая в  $\mathcal{P}$  характеристика с касательным вектором  $\bar{\tau}(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$ . Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(\bar{x}(t), f(\bar{x}(t))), x_1(t_0) = x_1^0 \\ \frac{dx_n}{dt} = a_n(\bar{x}(t), f(\bar{x}(t))), x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \quad (12.22)$$

Согласно теореме о существовании и единственности решения задачи Коши:

$$\exists: \bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (12.23)$$

Рассмотрим и убедимся, что характеристика  $\Gamma \in \mathcal{P}$ :

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t) \\ u(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array} \right\} \quad (12.24)$$

По построению,  $\Gamma \subset \mathcal{P}$ ,  $(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$  – удовлетворяет (3') уравнениям.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{df}{dx_j}(\bar{x}(t)) \frac{dx_j}{dt}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{df}{dx_j} a_j |(\bar{x}(t), u(t)) = (\text{из (1)}) b(\bar{x}(t), f(\bar{x}(t))) \end{aligned} \quad (12.25)$$

### Задача Коши для квазилинейного УЧП

Для удобства геометрической интерпретации далее будем рассматривать случай ( $n = 2$ ). Запишем уравнение в частных производных с искомой функцией  $u = u(x, y)$ :

$$(1) a_1(x, y, u) \frac{du}{dx} + a_2(x, y, u) \frac{du}{dy} = b(x, y, u) \quad (12.26)$$

$$a_{1,2}, b(x, y, u) \in C^1(D), \text{ обл. } D \subseteq \mathcal{R}^3 \quad (12.27)$$

$$a_1^2 + a_2^2 |_{(x,y,u) \in D} \neq 0 \quad (12.28)$$

Определение: задача Коши УЧП (1): найти поверхность  $u = f(x, y)$ , задаваемые решением УЧП (4), которая проходит через линию  $l$ :

$$l = \{(x, y, u) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)), s \in [s_0, s_4]\}, \text{ т.е.} \quad (12.29)$$

$$\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s)) \quad (12.30)$$

### Теорема

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \forall s \in [s_0, s_1] \quad (12.31)$$

$$a_j(s) = a_j(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)), j = 1, 2 \quad (12.32)$$

Тогда в некоторой окрестности линии  $l$  существует единственное решение задачи Коши. Воспользуемся геометрическим смыслом решения УЧП и выясним, что нам необходимо найти.

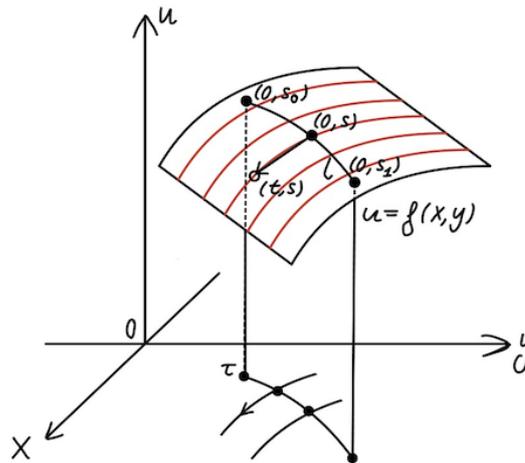


Рис. 12.2. Графическое изображение поверхности, рассматриваемой в теореме.

Доказательство:

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(x(t), y(t), u(t)) \\ y'(t) = a_2(x(t), y(t), u(t)) \\ u'(t) = b(x(t), y(t), u(t)) \end{cases} \quad (12.33)$$

Точки кривой:

$$\begin{cases} x|_{t=0} = \psi_1(s) \\ y|_{t=0} = \psi_2(s) \\ z|_{t=0} = \psi_3(s) \end{cases} \quad (12.34)$$

Обозначим решение задачи Коши (параметрическое представление поверхности):

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t, s) \\ y = \varphi_2(t, s) \\ u = \varphi_3(t, s) \end{cases} \quad (12.35)$$

$$\varphi_1(0, s) = \psi_1(s), \quad \varphi_2(0, s) = \psi_2(s), \quad \varphi_3(0, s) = \psi_3(s), \quad s \in [s_0, s_1] \quad (12.36)$$

Рассмотрим уравнение и выразим  $(t, s)$  через  $(x, y)$ :

$$\begin{matrix} (*) \\ (*) \end{matrix} \begin{cases} x = \varphi_1(t, s) \\ y = \varphi_2(t, s) \end{cases} \quad (12.37)$$

Применим теорему о неявных функциях в окрестности точки  $(0, s)$  на линии  $l$ :

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = (0, s) = x'(t)|_{t=0} = a_1(s) \quad (12.38)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = (0, s) = y'(t)|_{t=0} = a_2(s) \quad (12.39)$$

$$\frac{d\varphi_1}{ds}(0, s) = \psi'_1(s), \quad \frac{d\varphi_2}{ds}(0, s) = \psi'_2(s) \quad (12.40)$$

В силу условий задачи,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dt} & \frac{d\varphi_1}{ds} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} & \frac{d\varphi_2}{ds} \end{pmatrix} \Big|_{(0,s)} = \det \begin{pmatrix} a_1(s) & \psi'_1(s) \\ a_2(s) & \psi'_2(s) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (12.41)$$

По теореме о неявных функциях в окрестности точки  $(x_0, y_0) = (\varphi_1(0, s), \varphi_2(0, s))$ , существует единственная функция:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} \begin{cases} t = t(x, y) \\ s = s(x, y) \end{cases} \Rightarrow u = \varphi_3(t(x, y), s(x, y)) = f(x, y) \quad (12.42)$$

Смысл условия теоремы заключается в том, что проекция соответствующей кривой на координаты  $(x, y)$  не должна быть коллинеарна касательным.

Замечание: если  $l$  – характеристика, то условие теоремы не выполнено.

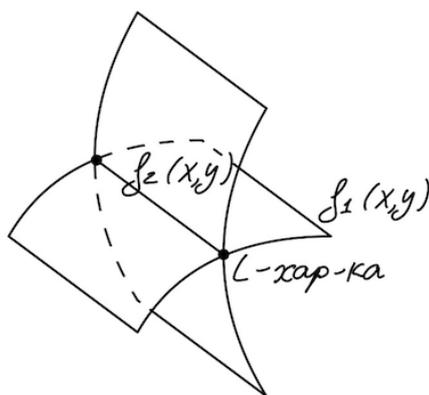


Рис. 12.3. Графическое изображение замечания об отсутствии единственности.

### Лекция 13. Вариационное исчисление. Основные понятия.

Решение задач вариационного исчисления (ВИ), с одной стороны, тесно связано с аппаратом дифференциальных уравнений (ДУ). С другой стороны, ВИ помогает глубже понять некоторые свойства объектов, которые традиционно используются в курсе ДУ, например для всего, что связано с задачей Штурма-Лиувилля и в целом с задачами на собственные значения (СЗ) и собственные функции (СФ).

Для начала сконцентрируемся на основных понятиях ВИ, где центральным местом является понятие функционала.

#### Функционал

Под функцией понимается отображение множества  $A$  в множество  $B$  произвольной природы, при котором элементу множества  $A$  сопоставляется один элемент множества  $B$  (функция может быть однозначна, неоднозначна и т.д.). Функционал является частным случаем функции. Для того, чтобы ввести его с точки зрения общих понятий функции, необходимо определить множество элементов, на которых функционал определен, и определить правила действия, по которым этим элементам сопоставляются элементы из другого множества (в данном случае, множества  $B$ ). В случае функционала,  $B = \mathcal{R}$ .

Определение: функционал – отображение множества функций  $M$  в множество чисел  $\mathcal{R}$ :

$$\Phi: M \rightarrow \mathcal{R} \quad (13.1)$$

Пример 1: пусть  $M \subseteq C[x_0, x_1]$  – множество всех непрерывных функций на отрезке  $[x_0, x_1]$ .

$$f(x) \in M, \text{ или «график функции } f(x)\text{»} \sim f(x) \quad (13.2)$$

$$M_0 = C_0[x_0, x_1] = \{f(x) \in C[x_0, x_1]: f(x_0) = 0, f(x_1) = 0\} \quad (13.3)$$

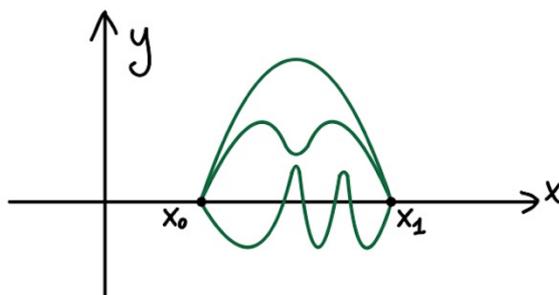


Рис. 13.1. Графическое изображение графиков множества  $M_0$ , удовлетворяющих условиям примера 1.

Также можно рассмотреть еще одно множество:

$$M_1 = \{f(x) \in C[x_0, x_1]: f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1\}, \text{ фиксированные } y_{0,1} \in \mathcal{R} \quad (13.4)$$

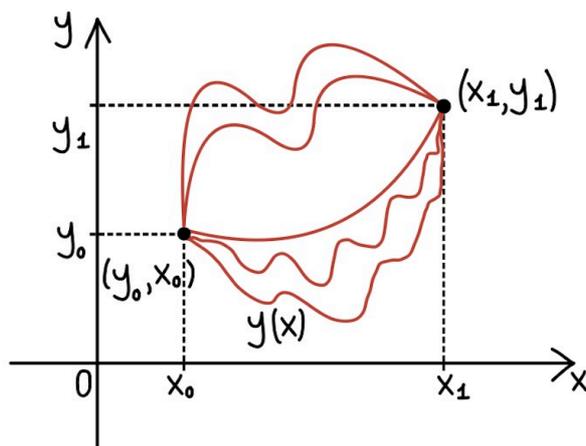


Рис. 13.2. Графическое изображение функции множества  $M_1$ .

$M \subseteq C(\Omega)$  – множество непрерывных функций на ограниченной области  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  с границей  $d\Omega$ . Тогда аналогичным образом можно ввести множество

$$M_2 = \{u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) : u|_{d\Omega} = f(x, y)\} \quad (13.5)$$

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup d\Omega \quad (13.6)$$

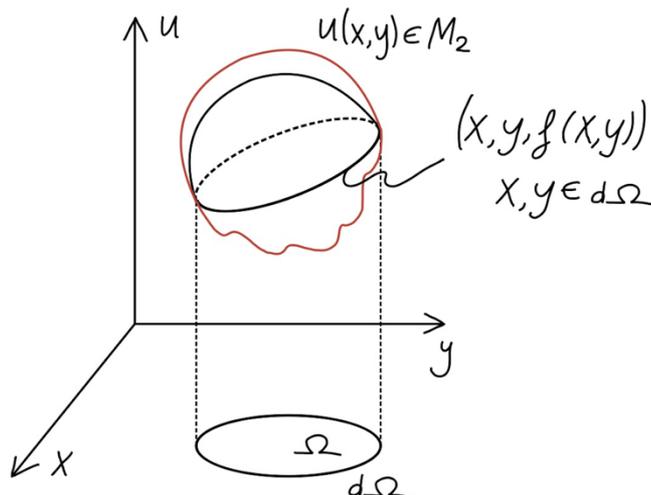


Рис. 13.3. Графическое изображение функции множества  $M_2$ .

Определение: множество функций  $M$ , где определен функционал  $\Phi$ , называется допустимым множеством функций.

### Примеры функционалов

Пример 2:

$$f(x) \in C[x_0, x_1], f(x) \geq 0 \text{ на } [x_0, x_1] \quad (13.7)$$

$$M_0 \ni f(x) \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(\xi) d\xi \in \mathcal{R}, \quad (13.8)$$

что представляет собой площадь криволинейной трапеции: кривой  $(\bar{x}, f(x)), x \in [x_0, x_1]$ .  
 Изобразим геометрический смысл множества:

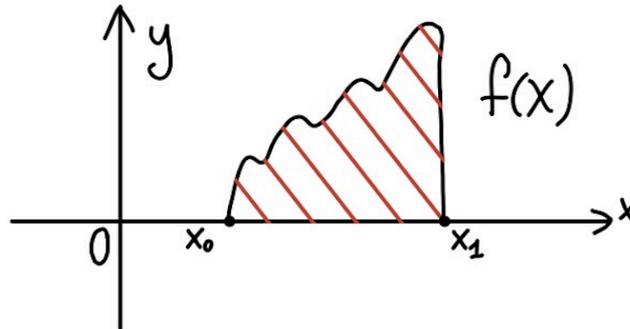


Рис. 13.4. Графическое изображение условий примера 2 множества  $M_0$ .

$$f(x) \in M_1 \Rightarrow \Phi[f(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi) d\xi \quad (13.9)$$

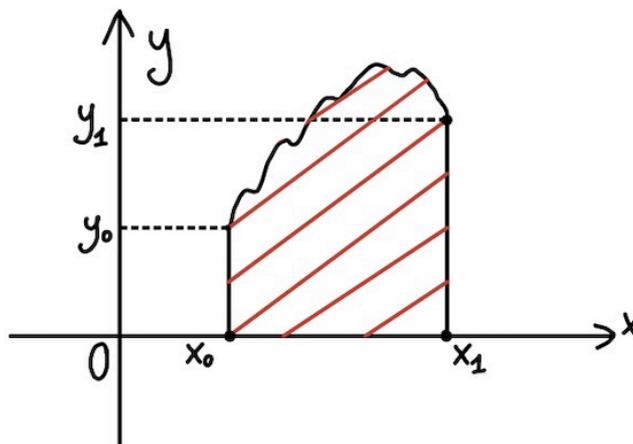


Рис. 13.5. Графическое изображение условий примера 2 множества  $M_1$ .

Пример 3:

$$\Phi[y(x)] = \frac{1}{2}[y(x_0) + y(x_1)] \quad (13.10)$$

$M_1 \ni \{y(x)\}$  – полусумма ее значений в точках  $x_0, x_1$

Пример 4:

$$\square f(x) \in c[x_0, x_1] = 0, f(x_0) = 0, f(x_1) = 0 \quad (13.11)$$

Если нам известно, что  $f(x)$  – результат измерений с погрешностями, то возникает вопрос найти «гладкий образ»  $y(x) \in c^1[x_0, x_1]$ . Необходимо ввести меру «близости»  $f(x)$  и  $y(x)$  в среднеквадратичном:

$$\Phi_1[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y(x) - f(x))^2 dx + \alpha \int_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx \quad (13.12)$$

Цель: найти  $y(x)$ :  $\Phi[y(x)]$  принимает наименьшее значение. В этом случае,

$$y(x) \in M_4 = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = 0, y(x_1) = 0\} \quad (13.13)$$

Другой вариант функционала:

$$\Phi_2[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y(x) - f(x))^2 dx + \alpha \int_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx + \beta \int_{x_0}^{x_1} (y''(x))^2 dx \quad (13.14)$$

$$\alpha, \beta > 0, y(x) \in M_5 \subseteq C^2[x_0, x_1] \quad (13.15)$$

Пример 5: пусть  $g(x, y)$  – изображение  $(\bar{x}, y) \in \Omega$ . Необходимо найти  $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$  и близка к  $g(x, y)$ . Введем функционал  $\Phi_5$ :

$$\begin{aligned} \Phi_5[u(x, y)] = & \iint_{\Omega} (u(x, y) - g(x, y))^2 dx dy + \\ & + \alpha \iint_{\Omega} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)) dx dy, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (13.16)$$

### Вариация функционала

Определение: допустимой вариацией функции  $y_0(x) \in M$  называется любая функция  $\delta y(x): y_0(x) + \delta y(x) \in M$ . Здесь  $M \subseteq [x_0, x_1]$ .

Предположение относительно  $M$ :  $\delta y(x)$  – допустимая вариация функции (ДВФ) тогда и только тогда, когда  $t\delta y(x)$  – ДВФ для  $\forall t \in \mathcal{R}$ .

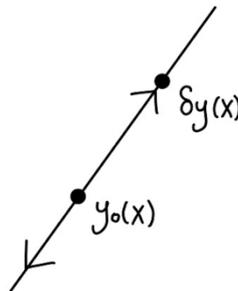


Рис. 13.6. Графическое изображение предположения.

Определение: вариацией функционала  $\Phi[y(x)]$  на функции  $y_0 \in M$  называется следующее выражение:

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]|_{t=0}, \quad (13.17)$$

где  $\delta y(x)$  – ДВФ  $y_0(x)$ .

$$\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)] = \varphi(t) - \text{числовая функция, } \varphi(t) \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$$

Так, производную можно назвать «производной  $\Phi$  по направлению  $\delta y$ ».

Пример 1: пусть  $M = C[x_0, x_1]$ . Рассмотрим функционал:

$$\Phi_1[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) dx, \quad \forall \delta y(x) \in C[x_0, x_1], \quad (13.18)$$

где  $y(x)$  – ДВФ любой функции из  $M$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(y_0(x) + t\delta y(x))|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left( \int_{x_0}^{x_1} (y_0(x) + t\delta y(x))^2 dx \right) |_{t=0} = & (13.19) \\ &= \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{\bar{d}}{\bar{d}x} (y_0(x) + t\delta y(x))^2 dx \right) |_{t=0} = \int_{x_0}^{x_1} 2(y_0(x) + t\delta(x))\delta y(x) dx |_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} 2y_0(x)\delta y(x) dx \end{aligned}$$

Следовательно, существует вариация функционала.

Пример 2: на том же множестве  $M = c[x_0, x_1]$  рассмотрим следующий функционал:

$$\Phi_2[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} |y(x)| dx, \quad \square y_0(x) = 0, \quad \delta y(x) = 1 \quad (13.20)$$

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} |0 + t * 1| dx |_{t=0} = \frac{d}{dt} (x_1 - x_0)|t| |_{t=0} \quad (13.21)$$

Операция не существует.

### Экстремум функционала

Определение: функционал  $\Phi[y(x)]$  достигает на функции  $y_0(x) \in M$  глобального минимума (максимума), если

$$\forall y(x) \in M \Rightarrow \Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)], \quad (\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]) \quad (13.20)$$

Рассмотрим функционал, который называется нормой функции

$$y(x) \in c[x_0, x_1] \Rightarrow \|y(x)\| = \max|y(x)|, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (13.20)$$

$$M \subseteq [x_0, x_1] \quad (13.20)$$

Определение: функционал  $\Phi[y(x)]$  достигает на функции  $y_0(x) \in M$  локального минимума (максимума), если

$$\exists \varepsilon > 0: \forall y(x) \in M \quad (13.20)$$

$$\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \quad (13.20)$$

$$\Rightarrow \Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)], \quad (\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]) \quad (13.20)$$

Замечание: максимумы и минимумы функционала называются экстремумами (глобальными или локальными). Задача отыскания экстремумов функционалов составляет предмет ВИ.

### Теорема 1 (необходимое условие экстремума функционала)

Пусть функционал  $\Phi[y(x)]$  достигает на функции  $y_0(x) \in M$  локального максимума/минимума на  $M$ . Пусть существует вариация функционала  $y_0(x)$ ,  $\delta y(x)$  – ДВФ. Тогда

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = 0 \quad (13.20)$$

Доказательство: пусть на  $y_0(x)$  достигается локальный минимум функционала.  
Рассмотрим

$$\varphi(t) = \Phi[y(x) + t\delta(x)]: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, \quad y(x) + t\delta(x) = y(x) \quad (13.20)$$

По условию локального минимума,

$$\Phi[y_0(x)] = \varphi(0), \quad \Phi[y(x)] = \varphi(t) \quad (13.20)$$

$$\varphi(0) \leq \varphi(t), \quad \forall t: |t| * \|\delta y(x)\| < \varepsilon \quad (13.20)$$

$$\|y_0(x) + \delta y(x) - y_0(x)\| = |t| * \|\delta y(x)\| < \varepsilon \quad (13.20)$$

Достигается выбором  $|t| < \delta$ . Тогда при  $t = 0$  скалярная функция  $\varphi(t)$  достигает локального минимума.

$\varphi(t)$  определена для  $\forall t \in \mathcal{R}$

$$\exists \varphi'(0) = \delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] \quad (13.20)$$

Тогда по теореме о необходимом условии локального минимума дифференцируемой скалярной функции,  $\varphi'(0) = 0$ .

$$\Rightarrow (*) \quad \delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = 0 \quad (13.20)$$

Замечание: (\*) верно для  $\forall$  ДВФ, если на ней существует  $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ .

## Лекция 14. Исследование необходимого условия экстремума интегральных функционалов.

Рассмотрим  $c_0^n[x_0, x_1]$ ,  $n \in N$

$$\begin{aligned} & \{y(x) \in c_0^n[x_0, x_1]: \\ & y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ & y(x_1) = y'(x_1) = \dots = y^{(n-1)}(x_1) = 0\} \end{aligned} \quad (14.1)$$

### Основная лемма ВИ

Пусть  $f(x) \in c[x_0, x_1]$  удовлетворяет тождеству:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)v(x) dx = 0, \quad \forall v(x) \in c_0^n[x_0, x_1] \quad (14.2)$$

Тогда  $f(x) \equiv 0$  на  $[x_0, x_1]$ .

Доказательство (от противного): предположим, что  $f(x) \not\equiv 0$ . Тогда

$$\exists x_* \in (x_0, x_1): f(x_*) \neq 0 (> 0) \quad (14.3)$$

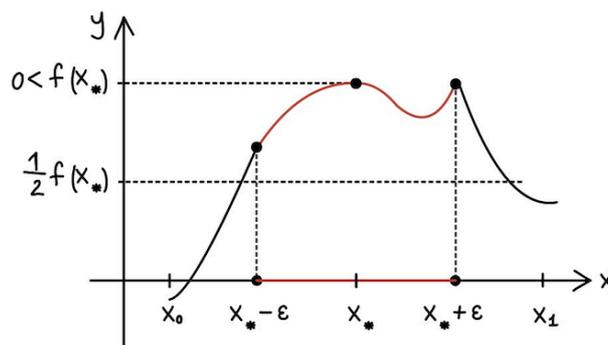


Рис. 14.1. Графическое изображение функций  $f(x)$ .

$f(x)$  – непрерывна.  $\exists \varepsilon > 0$ :

$$f(x) \geq \frac{f(x_*)}{2}, \quad \forall x \in (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \subset (x_0, x_1) \quad (14.4)$$

Рассмотрим  $v_*(x)$

$$v_*(x) = \begin{cases} (x - (x_* - \varepsilon))^{n+1} ((x_* - \varepsilon) - x)^{n+1}, & x \in (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \\ 0, & x \notin (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \end{cases} \quad (14.5)$$

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_*) \quad (14.6)$$

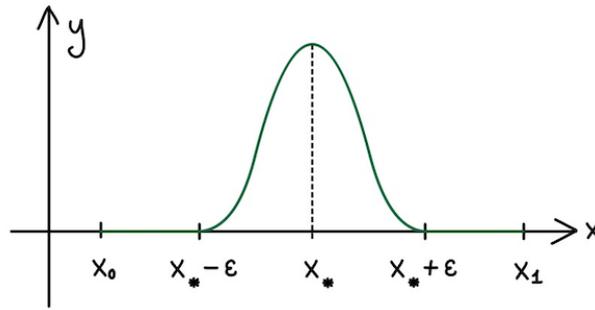


Рис. 14.2. Графическое изображение функций  $v_*(x)$ .

По построению,  $v_*(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$ . Следовательно, по условию теоремы,

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)v_*(x) dx = \int_{x_*-\epsilon}^{x_*+\epsilon} f(x)v_*(x) dx \geq \frac{f(x_*)}{2} \int_{x_*-\epsilon}^{x_*+\epsilon} v_*(x) dx > 0 \quad (14.7)$$

Так, исходная посылка неверна, – лемма доказана.

### Уравнение Эйлера в задаче ВИ

Рассмотрим функционал следующего вида:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (14.8)$$

$$y(x) \in M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \quad (14.9)$$

$$F(x, y, p) \text{ непрерывна } [x_0, x_1] \times \mathcal{R}^2$$

Если  $y(x) \in M$ , то допустимая вариация функции (ДВФ):

$$\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1] = \{v(x) \in C^1[x_0, x_1]: v(x_0) = 0, v(x_1) = 0\} \quad (14.10)$$

$$\delta y(x) - \text{ДВФ} \Rightarrow \forall t \in \mathcal{R}, t\delta y(x) - \text{ДВФ} \quad (14.11)$$

### Теорема 1

Пусть  $F(x, y, p)$  определена на  $[x_0, x_1] \times \mathcal{R}^2$ , непрерывна и имеет непрерывные производные 2-го порядка. Пусть  $\Phi[y(x)]$  достигает локального экстремума на функции  $y_0(x)$ :

$$y_0(x) \in M, y_0(x) \in C^2[x_0, x_1] \quad (14.12)$$

Тогда  $y_0(x)$  – решение ОДУ 2-го порядка (уравнения Эйлера):

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, x_0 \leq x \leq x_1 \quad (14.13)$$

Доказательство: пусть на  $y_0(x)$  достигается локальный экстремум и  $\forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$  – ДВФ.

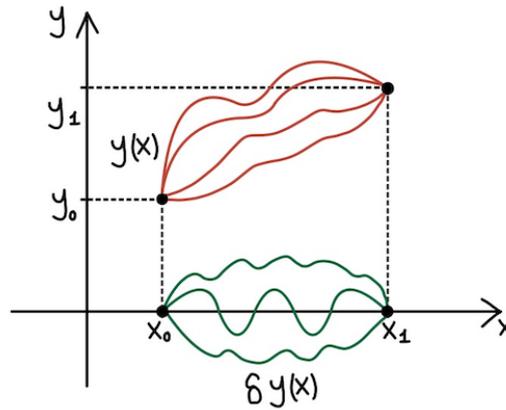


Рис. 14.3. Графическое изображение произвольных допустимых функций  $y(x)$  и ДВФ  $\delta y(x)$ .

$$\begin{aligned} \delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] &= \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]|_{t=0} = & (14.14) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + \delta y(x), y_0'(x) + t\delta y'(x)) dx|_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, y_0(x) + t\delta(x), y_0'(x) + t\delta y'(x))\delta y(x) + \\ &+ F_p(x, y_0(x) + t\delta(x), y_0'(x) + t\delta y'(x))\delta y'(x)\} dx|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + F_p(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y'(x)\} dx = 0 \quad (14.15)$$

Из необходимого условия  $\forall \delta y(x) \in c_0'[x_0, x_1]$ .

$$\Rightarrow \exists \delta\Phi[y_0, \delta y] = 0 \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_p(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y'(x) dx &= F_p(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x)|_{x=x_0}^{x=x_1} - & (14.17) \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) dx \end{aligned}$$

Приведем формулу к более компактному виду:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) \right\} \delta y(x) dx = 0 \quad (14.18)$$

$$\forall \delta y(x) \in c_0'[x_0, x_1] \quad (14.19)$$

Применим основную лемму вариационного исчисления (ОЛВИ):

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p = 0 \quad (14.20)$$

Теорема доказана. Можно сделать вывод, что для нахождения функций, подозрительных на экстремум, достаточно написать краевую задачу для уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ y(x_0) = y_0, & y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (14.21)$$

Пример: рассмотрим сглаживающий функционал:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y(x) - f(x))^2 dx + \alpha \int_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx, \quad \alpha > 0 \quad (14.22)$$

$$f(x) \in C[x_0, x_1]: f(x_0) = 0 = f(x_1) \quad (14.23)$$

Рассмотрим функционал на следующем множестве:

$$y \in M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \quad (14.24)$$

Проверим необходимое условие экстремума функционала:

$$F(x, y, p) = (y - f(x))^2 + \alpha p^2 \quad (14.25)$$

$$F_y = 2(y - f(x)) \quad (14.26)$$

$$F_p = 2\alpha p \quad (14.27)$$

Тогда уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$2(y - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y') = 0 \quad (14.28)$$

$$\begin{cases} -\alpha y'' + y = f(x) \\ y(x_0) = 0, y(x_1) = 0 \end{cases} \quad (14.29)$$

**Необходимое условие экстремума функционала, содержащего производные высших порядков**

$$M = \{y(x) \in C^n[x_0, x_1]: \quad (14.30)$$

$$y(x_0) = y_{00}, y'(x_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0, n-1}, \quad (14.31)$$

$$y(x_1) = y_{10}, y'(x_1) = y_{11}, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_{1, n-1}\} \quad (14.32)$$

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (14.33)$$

$$y(x) \in M, F(x, y, p_1, \dots, p_n) - \text{непрерывны } [x_0, x_1] \times \mathcal{R}^{n+1} \quad (14.34)$$

Так как ДВФ на  $M$ , то

$$\forall \delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]: \{v \in C^n[x_0, x_1]: v^m(x_{0,1}) = 0, m = 0, \dots, n-1\} \quad (14.35)$$

## Теорема 2

Пусть  $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$  имеет в  $[x_0, x_1] \times \mathcal{R}^{n+1}$  непрерывные частные производные до порядка  $(2n)$  включительно. Пусть на функции  $\bar{y}(x) \in M, \bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$  достигается локальный экстремум  $\Phi$  на  $M$ . Тогда  $\bar{y}(x)$  – решение ОДУ порядка  $(2n)$ :

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{p_m} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} = \\ = 0 \text{ в т. } (x, \bar{y}(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x)) \end{aligned} \quad (14.36)$$

Доказательство: получим формулу вариации функционала на основе определения:

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x) + \delta y(x), \bar{y}'(x) + \\ &+ t\delta y(x), \dots, \bar{y}^{(m)}(x) + t\delta y^{(m)}(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) + t\delta y^{(n)}(x) dx|_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) \delta y(x) + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^n F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) \delta y^{(m)}(x) \left. \right\} dx = 0, \quad \forall \delta y(x) \in c_0^n[x_0, x_1], \end{aligned} \quad (14.37)$$

согласно теореме о необходимом условии экстремума.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) \delta y^{(m)}(x) dx &= \\ &= F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) \delta y^{(m-1)} \Big|_{x_0}^{x_1} - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) * \delta y^{(m-1)}(x) dx = \\ &= (-1)^m \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^m}{dx^m} F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) * \delta y(x) dx \\ &\delta y \in c_0^1[x_0, x_1], \quad m = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (14.38)$$

Тогда  $\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$  можно выразить как

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right) \right\} \delta y(x) dx = 0 \\ \forall \delta y(x) \in c_0^n[x_0, x_1] \end{aligned} \quad (14.40)$$

Применим ОЛВИ:

$$F(x, \bar{y}(x) + \delta y(x), \bar{y}'(x) + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{p_m} \left( x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) \right)) = 0 \quad (14.42)$$

Пример: сглаживание функции.

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y(x) - f(x))^2 dx + \alpha \int_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx + \beta \int_{x_0}^{x_1} (y''(x))^2 dx \quad (14.43)$$

$$f(x) \in c^1[x_0, x_1], \quad f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \quad f'(x_1) = 0 \quad (14.44)$$

Задача рассматривается на множестве  $M$  – 2 раза непрерывно дифференцируемых функций (см. теорему), ( $n = 2$ ).

$$F(x, y, p_1, p_2) = (y - f(x))^2 + \alpha p_1^2 + \beta p_2^2 \quad (14.45)$$

$$\left. \begin{aligned} F_y &= 2(y - f(x)) \\ F_{p_1} &= 2\alpha p_1 \\ F_{p_2} &= 2\beta p_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ОДУ 4-ого порядка } (n = 2) \Rightarrow 2n = 4 \quad (14.46)$$

$$y - f(x) - (\alpha y')' + (\beta y'')'' = 0 \quad (14.47)$$

$$\begin{cases} \beta y^{(IV)} + \alpha y'' + y = f(x) \\ y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0 \\ y(x_1) = 0, y'(x_1) = 0 \end{cases} \quad (14.48)$$

## Лекция 15. Необходимое условие экстремума функционалов, зависящих от функции двух переменных.

### Функционалы, зависящие от функции 2-х аргументов

Пусть  $u = u(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  – ограниченная область  $\mathcal{R}^2$  с границей  $L$ .

$$\bar{D} = D \cup L \quad (15.1)$$

$$(1) \Phi[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy \quad (15.2)$$

$$u(x, y) = \frac{du}{dx}, \quad u_y(x, y) = \frac{du}{dy}, \quad (15.3)$$

где  $F(x, y, u, p, q)$  определена и непрерывна

$$\bar{D} \times \mathcal{R}^3 \quad (15.4)$$

(2) допустимое множество  $M = \{u(x, y) \in c^1(\bar{D}) : u(x, y)|_{(x, y) \in L} = \varphi(x, y)\}$ ,

где  $c^1(\bar{D})$  – непрерывно дифференцируемая на  $\bar{D}$  функция от  $(x, y)$ . Тогда

$$\Phi: M \rightarrow \mathcal{R} \quad (15.5)$$

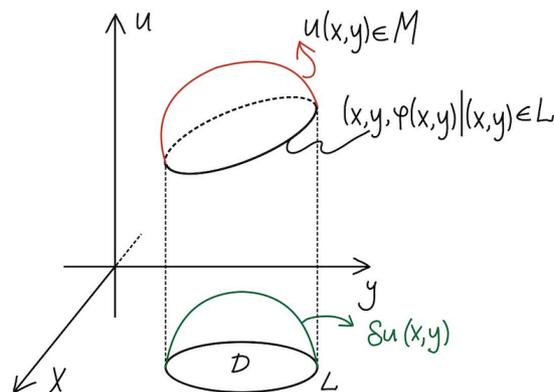


Рис. 15.1. Графическое изображение пространственного контура, допустимых функций и ДВФ.

ДВФ на  $M$ :

$$\delta u(x, y) \in c^1(\bar{D}) : \delta u(x, y)|_L = 0 \quad (15.6)$$

### ОЛВИ в двумерном случае

Пусть  $f(x, y) \in c(\bar{D})$  (непрерывна в  $\bar{D}$ ) и выполнено следующее интегральное тождество:

$$(3) \iint_D f(x, y)v(x, y) dx dy = 0 \quad (15.7)$$

$$\forall v(x, y) \in c_0^1(\bar{D}) = \{v(x, y) \in c^1(\bar{D}) : v(x, y)|_L = 0\} \quad (15.8)$$

Тогда  $f(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{D}$ .

Доказательство (от противного): пусть утверждение « $f(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{D}$ » неверно.  
 Тогда

$$\exists (x_0, y_0) \in D: f(x_0, y_0) \neq 0, > 0 \quad (15.9)$$

Тогда по теореме о сохранении знака непрерывной функции:

$$\exists \varepsilon > 0: S = \{(x, y) + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}, S \subset D \quad (15.10)$$

$$f(x, y) \geq \frac{1}{2} f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in S \quad (15.11)$$

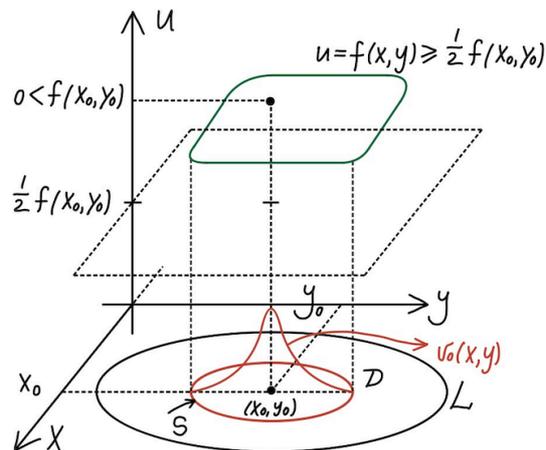


Рис. 15.2. Графическое изображение функций  $f(x, y)$  и  $v_0(x, y)$ .

Рассмотрим следующую функцию

$$v_0(x, y) = \begin{cases} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \varepsilon^2)^2, & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \in \bar{D} - S \end{cases} \quad (15.12)$$

По построению,  $v_0(x, y)|_L = 0$ , так как  $S \subset D$ .

$$v_0(x, y) \in C^1(\bar{D}) \quad (15.13)$$

$$\Rightarrow v_0(x, y) \in C_0^1(\bar{D}) \quad (15.14)$$

Тогда по условию теоремы:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D f(x, y) v_0(x, y) dx dy = \{v_0 = 0 \text{ вне } S\} = \iint_S f(x, y) v_0(x, y) dx dy \geq \\ &\geq \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \iint_S v_0(x, y) dx dy > 0, \end{aligned} \quad (15.15)$$

что противоречит условиям – лемма доказана.

### Теорема 1

Пусть  $F(x, y, u, p, q)$  имеет непрерывные вторые частные производные в  $\bar{D} \times \mathcal{R}^3$ . Пусть  $\Phi[u(x, y)]$  достигает на  $\bar{u}(x, y) \in M$  локального экстремума и  $\bar{u}(x, y) \in C^2(\bar{D})$ , т.е. два раза непрерывно дифференцируема. Тогда  $\bar{u}(x, y)$  – решение УЧП 2-го порядка.

$$F_u - \frac{d}{dx}(F_p) - \frac{d}{dy}(F_q) = 0, \quad (x, y) \in D \quad (15.16)$$

$$p = u_x, \quad q = u_y \quad (15.17)$$

Доказательство: пусть  $\bar{u} \in M$  – функция, где достигается локальный экстремум.

$$\forall \delta u(x, y) \in c_0^1(\bar{D}) = \{c^1: (\cdot)|_L = 0\} \quad (15.18)$$

По теореме о необходимом условии экстремума абстрактного функционала,

$$\delta\Phi[\bar{u}(x, y), \delta u(x, y)] = \frac{d}{dt} \Phi[\bar{u}(x, y) + t\delta u(x, y)]|_{t=0} = 0, \quad \forall \text{ ДВФ } \delta u(x, y) \quad (15.19)$$

Обозначим  $\bar{u}(x, y) + t\delta u(x, y) = w(x, y, t)$ .

$$w(x, y, 0) = \bar{u}(x, y) \quad (15.20)$$

$$\frac{d}{dt} w_x = \delta u_x(x, y), \quad \frac{d}{dt} w_y = \delta u_y(x, y) \quad (15.21)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi[\bar{u}(x, y) + t\delta u(x, y)]|_{t=0} = \quad (15.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \iint_D F(x, y, w(x, y, t), w_x(x, y, t), w_y(x, y, t)) dx dy |_{t=0} = \\ &= \iint_D (F_u(x, y, w, w_x, w_y) \frac{dw}{dt} |_{t=0} + F_p(x, y, w, w_x, w_y) \frac{dw_x}{dt} |_{t=0} + \\ &\quad + F_q(x, y, w, w_x, w_y) \frac{dw_y}{dt} |_{t=0}) dx dy \end{aligned}$$

Так для  $\forall \delta u(x, y) \in c_0^1(\bar{u})$ :

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\bar{u}(x, y), \delta u(x, y)] = 0 &= \iint_D \left\{ F_n(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y)) \delta u(x, y) + \right. \\ &\quad + F_p(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y)) \delta u_x(x, y) + \\ &\quad \left. + F_q(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y)) \delta u_y(x, y) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (15.23)$$

Распишем слагаемые:

$$F_p(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y)) \delta u_x(x, y) = \quad (15.24)$$

$$= \frac{d}{dx} \left\{ F_p(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y)) \delta u(x, y) \right\} - \frac{d}{dx} F_p \delta u(x, y)$$

$$F_q(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y)) \delta u_y(x, y) = \quad (15.25)$$

$$= \frac{d}{dy} \{ F_q \delta u \} - \frac{d}{dy} F_q \delta u(x, y)$$

$$\iint_D \left[ \frac{d}{dx} (F_p \delta u) + \frac{d}{dy} (F_q \delta u) \right] dx dy = \{ \Phi - \text{а Грина из дифф. исчисл.} \} = \quad (15.26)$$

$$= \{ \delta u \in c_0^1(\bar{D}) \} = \oint_L (F_p \delta u(x, y) dx - F_q \delta u(x, y) dy) = 0$$

$$\delta u(x, y) = 0, \text{ т.к. } \delta u|_L = 0! \quad (15.27)$$

$$\iint_D \left\{ F_u \left( x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y) \right) - \frac{d}{dx} F_p \left( x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y) \right) - \right. \quad (15.28)$$

$$\left. - \frac{d}{dy} F_q \left( x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y) \right) \right\} \delta u(x, y) \, dx dy = 0, \quad \forall \delta u \in c_0^1(\bar{D})$$

Применим ОЛВИ:

$$(4) \quad F_u - \frac{d}{dx} F_p - \frac{d}{dy} F_q = 0 \quad (15.29)$$

Замечание: требование  $\bar{u} \in c^2(\bar{D})$  существенно, так как (4) – УЧП 2-го порядка.

Использование – краевая задача:

$$\begin{cases} F_u - \frac{d}{dx} F_p - \frac{d}{dy} F_q = 0 \\ u|_L = \varphi(x, y), (x, y) \in L \end{cases} \quad (15.30)$$

Пример: необходимое условие экстремума, сглаживающего функционала в задаче обработки изображения.

$$f(x, y) \in c(\bar{D}), \quad f|_L = 0 \quad (15.31)$$

Необходимо найти  $u(x, y) \in c^1(\bar{D})$ , и чтобы она была «близка» к  $f(x, y)$ ,  $\nabla u = (u_x, u_y)$  – был невелик.

$$\Phi[u(x, y)] = \iint_D (u(x, y) - f(x, y))^2 \, dx dy + \quad (15.32)$$

$$+ \alpha \iint_D (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)) \, dx dy, \quad \alpha > 0$$

$$u \in M = c_0^1(\bar{D}), \quad u|_L = 0 \quad (15.33)$$

$$\Rightarrow F(x, y, u, p, q) = (u - f(x, y))^2 + \alpha(p^2 + q^2) \quad (15.34)$$

$$F_u = 2(u - f(x, y)), \quad F_p = 2\alpha p, \quad F_q = 2\alpha q \quad (15.35)$$

Перепишем уравнение:

$$u - f(x, y) - \frac{d}{dx} (\alpha u_x) - \frac{d}{dy} (\alpha u_y) = 0 \quad (15.36)$$

$$\begin{cases} -\alpha \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) + u = f(x, y), \\ u|_L = 0 \end{cases}, \quad (15.37)$$

где  $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = \Delta u$  – оператор Лапласа. Так, мы получили краевую задачу для УЧП 2-го порядка.

## Лекция 16. Вариационная задача на условный экстремум и её использование для исследования задачи Штурма-Лиувилля.

### Вариационная задача на условный экстремум

$$(1) \Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (16.1)$$

$$(2) \Psi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x)) dx \quad (16.2)$$

$F, G(x, y, p)$  непрерывны на множестве  $[x_0, x_1] \times \mathcal{R}^2$ . Особенность постановки задачи на условный экстремум заключается в том, что допустимое множество содержит дополнительное условие, которое формализуется с помощью функционала  $\Psi$ :

$$(3) M_\Psi = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \Psi[y(x)] = l\} \quad (16.3)$$

Вариационная задача на условный экстремум формулируется следующим образом: найти локальные экстремумы функционала  $\Phi$  на  $M_\Psi$ .

Рассмотрим  $M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ . Иными словами, можно было записать, что

$$M_\Psi = \{y \in M: \Psi[y(x)] = l\} \quad (16.4)$$

Допустимая вариация функции (ДВФ) для  $M$ :

$$\Rightarrow \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1], \text{ т. е. } \delta y \in C^1, \delta y(x_{0,1}) = 0 \quad (16.5)$$

Запишем вариацию функционала

$$\begin{aligned} \delta\Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] &= \frac{d}{dt} \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)]|_{t=0} = \int_{x_0}^{x_1} \{G_y(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\delta y(x) + \\ &+ G_p(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\delta y'(x)\} dx \end{aligned} \quad (16.6)$$

### Теорема (необходимое условие условного экстремума)

Пусть на некоторой функции  $\bar{y}(x) \in M_\Psi$ ,  $\bar{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$  достигается экстремум функционала  $\Phi$  на  $M_\Psi$ . Также пусть существует функция

$$\delta y_0(x) \in C_0^1[x_0, x_1]: \quad (16.7)$$

$$(4) \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0 \quad (16.8)$$

Тогда существует  $\lambda \in \mathcal{R}$ :  $\bar{y}(x)$  удовлетворяет ОДУ 2-го порядка следующего вида:

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (16.9)$$

где  $L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p)$ .

Доказательство: рассмотрим  $\forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$  (т. е.  $\delta y(x_{0,1}) = 0$  – ДВФ на  $M$ ).

$$M = \{C^1: y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \quad (16.10)$$

$$(5) \begin{cases} \varphi(t, \tau) = \Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)] \\ \psi(t, \tau) = \Psi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau y_0(x)], \quad \forall t, \tau \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (16.11)$$

$$M_\Psi = \{M: \Psi[y(x)] = l\} \quad (16.12)$$

Свойства  $\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)$ :

- 1)  $\varphi(0,0) = \Phi[\bar{y}(x)], \psi(0,0) = \Psi[\bar{y}(x)] = l$
- 2)  $\varphi_t(0,0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \varphi_\tau(0,0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$
- 3)  $\psi_t(0,0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \psi_\tau = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$
- 4)  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \tau)}|_{(0,0)} = \det \begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}, \delta y] & \delta\Phi[\bar{y}, \delta y_0] \\ \delta\Psi[\bar{y}, \delta y] & \delta\Psi[\bar{y}, \delta y_0] \end{pmatrix} = 0, \quad \forall \delta y(x) \in c_0^1[x_0, x_1]$

Докажем от противного:

$$\exists \delta \tilde{y}(x) \in c_0^1[x_0, x_1]: \frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \tau)}|_{(0,0)} \neq 0 \quad (16.13)$$

Тогда рассмотрим (5) при  $\delta y = \delta \tilde{y}(x)$ :

$$(*) \begin{cases} \varphi(t, \tau) = u \\ \psi(t, \tau) = v \end{cases} \quad (16.14)$$

Выразим  $(t, \tau)$  через  $(u, v)$ , где  $(u, v)$  меняются в окрестности

$$\begin{cases} u_0 = \varphi(0,0) \rightarrow \text{отвечает за экстремум } \Phi \\ v_0 = \psi(0,0) = l \end{cases} \quad (16.15)$$

Пусть на  $\bar{y}$  – локальный условный максимум. Тогда применим теорему о неявной функции для (\*)

$$v = l, u = \varphi(0,0) + \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (16.16)$$

Так, по теореме существует  $(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$ : удовлетворяет (\*), т.е.

$$\begin{cases} \varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\bar{y}] + \varepsilon \\ \psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = l \end{cases} \Rightarrow \exists y_\varepsilon: \begin{cases} \Phi[y_\varepsilon] = \Phi[\bar{y}] + \varepsilon > \Phi[\bar{y}] \\ \psi[y_\varepsilon] = l \end{cases} \quad (16.17)$$

Следовательно,  $t_\varepsilon, \tau_\varepsilon$  малы в окрестности  $(0,0)$ .

$$y_\varepsilon = \bar{y} + t_\varepsilon \delta \tilde{y} + \tau_\varepsilon \delta y_0 \quad (16.18)$$

Выпишем из (4) определитель и раскроем:

$$\delta\Phi[\bar{y}, \delta y] * \delta\Psi[\bar{y}, \delta y_0] - \delta\Phi[\bar{y}, \delta y_0] \delta\Psi[\bar{y}, \delta y] \equiv 0, \quad \forall \delta y \in c_0^1 \quad (16.19)$$

$$\delta\Phi[\bar{y}, \delta y] - \frac{\delta\Phi[\bar{y}, \delta y_0] \delta\Psi[\bar{y}, \delta y] \equiv 0, \forall \delta y \in c_0^1}{\delta\Psi[\bar{y}, \delta y_0] = \lambda - \text{число} \in \mathcal{R}} \quad (16.20)$$

$$\delta\Phi[\bar{y}, \delta y] + \lambda \delta\Psi[\bar{y}, \delta y] \equiv 0, \quad \forall \delta y \in c_0^1 \quad (16.21)$$

Запишем через интеграл:

$$\int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y(x) + F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y'(x) + \quad (16.22)$$

$$+ \lambda G_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y(x) + \lambda G_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y'(x)\} dx = 0, \quad \forall \delta y \in c_0^1$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ L_y \left( (x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y'(x) \right) \delta y(x) + \quad (16.23)$$

$$+ L_p \left( (x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y'(x) \right) \delta y' \right] dx = 0, \quad \forall \delta y \in c_0^1$$

При условии, что  $F, G$  – два раза непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, проинтегрируем по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( L_y \left( (x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y'(x) \right) - \frac{d}{dx} (L_p) \right) \delta y(x) dx + \quad (16.24)$$

$$+ L_p \left( (x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\delta y'(x) \right) \delta y(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0, \quad \forall \delta y \in c_0^1$$

Применим ОЛВИ и получим ОДУ 2-го порядка:

$$L_y - \frac{d}{dx} (L_p) = 0 \quad (16.25)$$

Замечание: из теоремы получаем, что  $\bar{y}$  удовлетворяет краевой задаче:

$$\begin{cases} L_y - \frac{d}{dx} L_p = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (16.26)$$

$L_y - \frac{d}{dx} L_p$  – ОДУ 2-го порядка, содержащий  $\lambda$  – параметр. ОДУ 2-го порядка имеет  $y_0(c_1, c_2)$ . Таким образом, при решении уравнения из необходимого условия экстремума получаем три константы:  $c_1, c_2, \lambda$ . Для их нахождения используются три условия, где два из них – краевые, а третье –  $\Psi[\bar{y}] = l$ .

### Вариационное свойство собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля

Задача Ш-Л заключается в нахождении такого  $\lambda$ , что существует нетривиальное решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dy}{dx} \right) - \Phi(x)y = \lambda y(x), \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \end{cases} \quad (16.27)$$

$$y(x) \not\equiv 0 \quad (16.28)$$

Собственные функции определены с точностью до множителя, поэтому (16.28) также можно записать следующим образом:

$$\int_0^l y^2(x) dx = 1 \quad (16.29)$$

Тогда задачу можно сформулировать так: найти  $\lambda$ , при котором существует решение задач (16.27) с дополнительным условием (16.29).

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dy}{dx} \right) - \Phi(x)y = \lambda y(x), & 0 < x < l \\ y(0) = 0, & y(l) = l \\ \int_0^l y^2(x) dx = 1 \end{cases} \quad (16.30)$$

Для  $\int_0^l y^2(x) dx$  можно ввести функционал ограничения:

$$\Phi[y(x)], \quad G(x, y, p) = y^2 \quad (16.31)$$

Рассмотрим функционал энергии:

$$\Phi[y(x)] = \int_0^l [k(x)(y'(x))^2 + q(x)y^2(x)] dx \quad (16.32)$$

$$F(x, y, p) = q(x)y^2 + k(x)p^2 \quad (16.33)$$

Утверждение 1: если  $y_n(x)$  – собственная функция задачи Ш-Л  $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_n$  – соответствующее собственное значение, то

$$\Phi[y_n(x)] = -\lambda_n \quad (16.34)$$

Доказательство:

$$\Phi[y_n(x)] = \int_0^l \left( k(x)(y_n'(x))^2 + q(x)y_n^2(x) \right) dx \quad (16.35)$$

$$\int_0^l k(x)(y_n'(x))^2 dx = \int_0^l k(x)y_n'(x) dy_n(x) = k(x)y'(x)y_n(x) \Big|_{x=0}^{x=l} = \quad (16.36)$$

$$= \int_0^l -\left( k(x)y_n'(x) \right)' \delta y_n(x) dx$$

$$\Phi[y_n(x)] = - \int_0^l \left[ \left( k(x)y_n'(x) \right)' - q(x)y_n(x) \right] y_n(x) dx = \quad (16.37)$$

$$= -\lambda_n \int_0^l y_n^2(x) dx = -\lambda_n,$$

т.к. в силу  $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ :  $\left( k(x)y_n'(x) \right)' - q(x)y_n(x) = \lambda_n(y_n(x))$ .

Утверждение 2: задача на условный экстремум. Пусть  $\Phi[y(x)]$  – экстремум,  $M_\Psi = \{y \in M, \Psi[y, x] = 1\}$ . Тогда необходимое условие экстремума приводит к задаче Ш-Л.

Доказательство: воспользуемся теоремой о необходимом условии условного экстремума. Согласно ей, если на  $\bar{y}(x)$  достигается локальный экстремум функционала энергии, то существует  $\lambda$ :  $\bar{y}$  – решение краевой задачи.

$$L = F + \lambda G, \quad F = k(x)p^2 + q(x)y^2, \quad G = y^2 \quad (16.38)$$

$$L = k(x)p^2 + q(x)y^2 + \lambda y^2 \quad (16.39)$$

$$L_y = 2q(x)y + 2\lambda y, \quad L_p = 2k(x)p \quad (16.40)$$

Тогда краевая задача:

$$2q(x)y + 2\lambda y - \left( 2k(x)p'(x) \right)' = 0 \quad (16.41)$$

$$\begin{cases} ((k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(l) = 0 \\ \int_0^l y^2(x) dx = 1 \end{cases} \quad (16.42)$$

В силу условия  $\int_0^l y^2(x) dx = 1$ ,  $y = \bar{y}(x)$  – нетривиальное решение. Тогда  $\lambda$  из теоремы – собственное значение, а  $\bar{y}(x)$  – собственная функция задачи Ш-Л.



ФАКУЛЬТЕТ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
МАТЕМАТИКИ И  
КИБЕРНЕТИКИ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ