МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ

ИВАНОВ
АЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАГИРОВУ ДЖАННЕТ ДЖАБРАИЛОВНУ

Содержание

1. Семинар 1

Тензоры. Основные понятия

В курсе дифференциальной геометрии тензоры рассматриваются на касательном пространстве к многообразию $\mathcal{L} = T_P M$. Если заданы произвольные координаты окрестности точки $(x^1, ..., x^n)$, то эти координаты порождают канонические базисы в $T_P M$. Эти базисы обозначаются $\{\partial x^1, .., \partial x^n\}$. Это касательные векторы, которые определяются разными способами. Алгебраическое определение - координатам сопоставляем набор чисел. Тогда вектор $\partial x^i : \ (x^1, .., x^n) \mapsto (0, ..., 0, \overset{i}{1}, 0, ..., 0)$ своим координатам $(x^1, ..., x^n)$ сопоставляет набор чисел, который соответствует стандартному арифметическому базису. В смысле дифференциального касательный вектор ∂x^i действует на функцию h следующим образом: $\partial x^i(h) = \dfrac{\partial h}{\partial x^i}$. Вектор ∂x^i - класс эквивалентности i-ой координатной линии, проходящей через точку P.

Тензор типа (p, q) - соответсвие, которое каждой системе координат сопоставляет набор компонент этого тензора $T : (x^1, ..., x^n) \mapsto T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, где $1 \leqslant i_\alpha, j_\beta \leqslant n$. Число компонент - n^{p+q} штук.

Если при этом у нас имеются другие координаты $T : (x^{1\prime}, ..., x^{n\prime}) \mapsto T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q}$, то компоненты тоже другие (разным координатам один и тот же тензор сопоставляет разные компоненты), но они должны быть связаны между собой по тензорному закону

$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots i_q} \qquad (1)$$

Замечание (Обозначения)

1. Для обозначения разных систем координат, каждую следующую систему координату обозначают дополнительным штрихом над индексом $(x^{1'}, .., x^{n'})$.
2. Компоненты одного и того же тензора в разных координатах обозначаются одной буквой с нужным количеством штрихов.
3. По повторяющимся индексам, стоящим на разных уровнях, предполагается суммирование.

Примеры

1. Напишем закон преобразования вектора $v : (x^1, ..., x^n) \mapsto (v^1, ..., v^n)$.

При замене координат $v^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot v^i$

2. Билинейная форма $(x^1, ..., x^n) \mapsto (g_{ij})$ - соответствие, которое каждой системе координат сопоставляет матрицу с нижними индексами.

При замене координат $g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$
Вектор - тензор типа $(1, 0)$, билинейная форма - тензор типа $(0, 2)$.

Следствие

Тензорный закон для выражения компонент в старом базисе через новые:

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \cdot \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} \qquad (2)$$

Лемма

Вторая формула тензорного закона следует из первой.

Доказательство.

Вспомним, что $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \delta^i_j$
Чтобы получить из первой формулы вторую, необходимо в первой формуле умножить левую и правую часть на невырожденную матрицу и просуммировать по первому верхнему индексу

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} T^{\alpha' i'_2 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q} \boxed{=}$$

$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i_1}}$ - взаимнообратные матрицы и суммирование по α' дает нам символ Кронекера $\delta^\alpha_{i_1}$ и суммирование по индексу i_1 превращает индекс i_1 тензора в правой части в α

$$\boxed{=} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q}$$

Переобозначим α за i_1 и получим необходимую нам формулу

$$\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q}$$

■

Упражнения

1. Построим отображение $(x^1, .., x^n) \mapsto T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q}$, где $(x^1, .., x^n)$ - фиксированная система координат, $i_1 ... i_p,\ j_1 ... i_q$ - произвольный набор чисел.

Продолжим так - произвольной штрихованной системе координат поставим в соответсвие набор чисел по тензорному закону $\forall (x^{1'}, .., x^{n'}) \mapsto T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_{q'}}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q}$.
Тогда, соответсвие T, построенное таким образом, - тензор.

2. Проверим, что $\left. \begin{array}{l} (x^{1'}, .., x^{n'}) \mapsto T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} \\ \\ (x^{1''}, .., x^{n''}) \mapsto T^{i''_1 \ldots i''_p}_{j''_1 \ldots j''_q} \end{array} \right]$ связаны между собой по тензорному закону

Мы знаем по определению, что $T^{i''_1\dots i''_p}_{j''_1\dots j''_q} = \dfrac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\dfrac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_{q''}}}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots i_q}$. Далее подставим выражение компонент T через штрихованные. В итоге получим:

$$T^{i''_1\dots i''_p}_{j''_1\dots j''_q} = \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_{q''}}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\dots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} \boxed{=}$$

Просуммируем по повторяющимся индексам без штрихов. По теореме о производной сложной функции $\dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha}}\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{i'}} = \dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}$. У каждой матрицы Якоби есть пара, поэтому

$$\boxed{=} \frac{\partial x^{i''_1}}{\partial x^{i'_1}}\dots\frac{\partial x^{i''_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j''_1}}\dots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j''_q}}T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}$$

Мы получили тензорный закон, связывающий компоненты с двумя штрихами с компонентами с одним штрихом.

Напоминание

Говорят, что у нас задано тензорное поле, если в каждой точке многообразия задан тензор, и этот тензор гладко зависит от точки в том смысле, что компоненты тензора, посчитанные в каноническом базисе в каждой точке в области определения системы координат, гладко зависят от этой точки.

Запишем определение тензора как полилинейного отображения. Рассмотрим полилинейное отображение $T : \underbrace{(T_PM)^* \times ... \times (T_PM)^*}_{p} \times \underbrace{T_PM \times ... \times T_PM}_{q} \mapsto \bar{\mathbb{R}}$. Это отображение называется тензором типа (p,q).

Напоминание

$(T_PM)^*$ (двойственное пространство к T_PM) - пространство линейных функций на векторном пространстве T_PM. Линейные функции называются ковекторами.
В линейной алгебре, если у нас есть линейное пространство с фиксированным произвольным базисом $e_1, ..., e_n$, то задать линейную функцию достаточно на элементах базиса. Тогда значения функции f на произвольном векторе $f(v) = f(v^ie_i) = v^if(e_i) = v^if_i$. Сами числа $f_1, ..., f_n$ называются компонентами линейной функции f на двойственном базисе.

В дифференциальной геометрии $\{\partial x^i\}$ - канонический базис в T_PM. Тогда, в $(T_PM)^*$ есть двойственный базис, состоящий из линейных функций, которые являются дифференциалами координатных функций $x_1, ..., x_n$ - $\{dx^1, ..., dx^n\}$.
Каждая координата задает функцию на своей карте U с координатным гомеоморфизмом $\varphi : P \mapsto \varphi(P) = (x^1, ..., x^n)$.

В координатах $x^1, ..., x^n$ матрица дифференциала $dx^i = (\frac{\partial x^i}{\partial x^1} \dots \frac{\partial x^i}{\partial x^n}) = (0, ..., 0, \underset{i}{1}, 0, ..., 0)$

Утверждение
Два определения тензора (через координаты и через полилинейные отображения) эквивалентны.

Если у нас заданы координаты $(x^1, ..., x^n)$ и задано полилинейное отображение, то чтобы перейти к координатному определению нужно применить отображение к базисным векторам и ковекторам $T(dx^{i_1}, ..., dx^{i_p}, \partial x^{j_1}, ..., \partial x^{j_q})$. Это число - значение отображения на наборе ковекторов и векторов, которое мы обозначим как $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots i_q}$.
В обратную сторону, если есть набор чисел в координатах, то можно задать полилинейное отображение, задав его значение на произвольном наборе векторов и ковекторов.

Задача на вычисление компонентов тензора

Дан тензор $T \in \mathbb{T}^1_2$ и в координатах $(x^1, ..., x^n)$ даны его компоненты T^i_{jk}. Запишем формулу для вычисления компонент $T^{1'}_{2'4'}$ в штрихованных координатах $(x^{1'}, ..., x^{n'})$.

Решение

Если расставить индексы по тензорному закону $T^{1'}_{2'4'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^4}{\partial x^{4'}} T^1_{24}$, то получится неверная формула, так как в тензорном законе $T^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} T^i_{jk}$ стоит сумма из n^3 слагаемых, так как индексы переменные, а в нашей формуле написано 1 слагаемое из нашей суммы. Чтобы написать все слагаемые, необходимо индексы суммирования сделать переменными. Тогда получаем $T^{1'}_{2'4'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} T^i_{jk}$. Мы подставляем фиксированные индексы в свободные, а индексы суммирования остаются.

Задача на нахождение ковекторного поля

Плоскость $\mathbb{R}^2$ - многообразие M. На ней есть две системы координат: евклидовы и полярные. Заданы гладкое векторное поле $V = (x + y)\partial x x + y x \partial y$ и гладкое ковекторное поле $\xi = 3dr + rd\varphi$ и дана точка $P = (3, 4)$. Требуется посчитать $\xi(V)$ в точке P.

Решение

Представим, что у нас есть $V = 2\partial x + 3\partial y$ и $\xi = 4dx + 5dy$, то тогда $\xi(V) = 4dx(V) + 5dy(V) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 23$

В нашей задаче необходимо пересчитать поля в одну систему координат. Это делается по тензорному закону. Пусть (x^1, x^2) - евклидовы координаты, $(x^{1'}, x^{2'})$ - полярные. Тогда $v^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$. В нашем случае стандартные формулы написаны в другую сторону $x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$, но пересчитывать их не нужно, так как в точке наши матрицы взаимнообратные.

Посчитаем $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -4 \\ \frac{4}{5} & 3 \end{pmatrix}$

Так как в точке $(3, 4)$ $r = 5,\ \sin\varphi = \frac{3}{5},\ \cos\varphi = \frac{4}{5}$

Обратная матрица $\dfrac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}$

Компоненты вектора $V(P) = 7\partial x + 12\partial y$

Поэтому компоненты нашего вектора $\begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{69}{5} \\ \frac{8}{25} \end{pmatrix}$

$V(P) = \frac{69}{5}\partial r + \frac{8}{25}\partial\varphi$.

Осталось посчитать значение ковектора. В точке P $\xi(P) = 3dr + 5d\varphi$. Значение ковектора на векторе V $\xi(P)(V(P)) = 3\frac{69}{5} + 5\frac{8}{25} = 43$

Задача на нахождение компонентов тензора

Задано полилинейное отображение. Необходимо найти компоненты соответствующего тензора.

Решение

Рассмотрим определитель матрицы 3×3 как отображение $det : T_P M^3 \times T_P M^3 \times T_P M^3 \mapsto \mathbb{R}$. В этом случае тройке векторов (v_1, v_2, v_3) ставится в соответствие определитель матрицы, в которой по столбацм записаны координаты этих векторов. Этот определитель - тензор типа $(0, 3)$.

Возьмем базис $\{\partial x^1, \partial x^2, \partial x^3\}$. Компоненты этого тензора $det_{i_1, i_2, i_3} = det(\partial x^{i_1}, \partial x^{i_2}, \partial x^{i_3})$.

Чтобы найти эти компоненты, нужно найти, чему равен этот определитель. Это определитель матрицы, у которой столбцы - координатные векторы.

Например $det_{213} = det(\partial x^2, \partial x^1, \partial x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

В общем случае $det_{i_1,i_2,i_3} = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ если есть совпадающие индексы} \\ (-1)^\pi, \text{ где } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \text{ -- перестановка} \end{array} \right.$

Некоторые свойства тензоров

Мы упоминали, что дифференциал гладкой функции $df \in \mathbb{T}^0_1$. Это можно проверить, если координатам поставить в соответствие набор частных производных, посчитанных в соответствующей точке $(x^1, ..., x^n) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n})$, $(x^{1'}, ..., x^{n'}) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x^{1'}}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^{n'}})$, то по теореме о производной сложной функции мы получили тензор типа $(0, 1)$.

Если есть отображение многообразия в себя, сохраняющее точку P $F : M \mapsto M$, $F(P) = P$, то дифференциал этого отображения - отображение касательного пространства в себя $dF : T_PM \mapsto T_PM$. Это линейное отображение, и его дифференциал задается матрицей $(\frac{\partial F^i}{\partial x^j})$. Если сделать замену координат $(x^{1'}, ..., x^{n'})$, то у нас получатся другие координатные функции и матрица дифференциала будет иметь вид $(\frac{\partial F^{i'}}{\partial x^{j'}})$. Чтобы понять, как связаны две матрицы, нужно понять, как устроена замена координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n)$. Мы должны в функцию подставить зависимость от $x^{1'}, ..., x^{n'} : F^{i'}(x^1(x^{1'}, ..., x^{n'}), ..., x^n(x^{1'}, ..., x^{n'})) = F^i$. Теперь нужно написать, как преобразуется $x^{i'}$. $x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n) = x^{i'}(F^1(x^1(x^{1'}, ..., x^{n'}), ...), ..., F^n(x^{1'}, ..., x^{n'}))$, то есть $F^{i'} = x^{i'}(F^1(x(x')), ..., F^n(x(x')))$. Следовательно, когда мы получаем закон преобразования дифференциала $\frac{\partial F^{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$. Это тензорный закон для тензора типа $(1, 1)$.

Получаем, что $dF : T_PM \mapsto T_PM$ - тензор типа $(1, 1)$. Но мы знаем, что тензор типа $(1, 1)$ - это $T : (T_PM)^* \times T_PM \mapsto \mathbb{R}$. Эти два отображения связаны, так как если у нас есть полилинейное отображение в $\mathbb{R}$, то по нему строится линейный оператор $A_T : T_PM \mapsto T_PM$. Чтобы его построить, необходимо определить, чему равно значение этого оператора на произвольном векторе $\xi(A_T(v)) = T(\xi, v)$, $\forall \xi \in (T_PM)^*$, $v \in$

$T_P M$.

Если посмотреть на компоненты тензора $T^i_{A_j} = T_A(dx^j, \partial x^i) = dx^j(A(\partial x^i))$. Мы получаем, что это значение базисного вектора dx^j на образе вектора ∂x^i под действием нашего линейного оператора. Образ вектора под действием линейного оператора - i-ый столбец нашей матрицы. Если применить к нему dx^j, то мы получаем элемент матрицы a^i_j.

Если у нас есть гладкая функция $F(x^1, ..., x^n)$, и мы рассмотрим матрицу $(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j})$, то это вообще говоря не тензор, но если $dF(P) \equiv 0$, то тогда $(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j})$ - тензор типа $(0, 2)$.

2. Семинар 2

Тензорные операции. Основные понятия

1) Линейная комбинация.
Если у нас есть пара тензоров $T, S \in \mathbb{T}_q^p$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, тогда $\lambda T + \mu S \in \mathbb{T}_q^p$, где линейную комбинацию можно понимать как комбинацию полилинейных отображений.
Если $T(x), S(x)$ - тензорные поля, $x \in M$, тогда $\lambda(x)T(x) + \mu(x)S(x)$, μ, λ - гладкие функции.

2) Тензорное произведение.
Если у нас есть два произвольных тензора $T \in \mathbb{T}_q^p$, $S \in \mathbb{T}_s^r$, то тогда $T \otimes S \in \mathbb{T}_{q+s}^{p+r}$. Он определяется как полилинейное отображение $T \otimes S(\xi^1, ..., \xi^{p+r}, v_1, ..., v_{q+s}) = T(\xi^1, ..., \xi^p, v_1, ..., v_q) \cdot S(\xi^{p+1}, ..., \xi^{p+r}, v_{q+1}, ..., v_{q+s})$.

В общем случае произвольный тензор может быть представлен в виде линейной комбинации элементарных тензорных произведений $\mathbb{T}_q^p \ni T = T_{j_1 \dots i_q}^{i_1 \dots i_p} \partial x^{i_1} \otimes ... \otimes \partial x^{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q}$.
Получается, что $\mathbb{T}_q^p \simeq (T_P M)^{\otimes p} \otimes (T_P M^*)^{\otimes q}$

Задача на нахождение компоненты тензора

Найти компоненту T_1^{12} тензора $T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$ в новом базисе $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = -e_1 - e_2$

Решение

Выпишем компоненты: в базисе e_1, e_2 : $T_1^{22} = 1$, $T_2^{22} = 2$. В общем виде тензор представлен в виде $T = T_j^{i_1, i_2} e^j \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2}$.
В f $T_1^{12} = T(f_1, f^1, f^2)$. Значение f_1 нам известно, необходимо посчитать значение f^1. С одной стороны $f^i(f_j) = \delta_j^i$, с другой $f^i = ae^1 + be^2$. Найдем отсюда f^1. $f^1(f_1) = ae^1 + be^2(e_1 + 2e_2) = a + 2b = 1$. Если применить f^1 к f_2, то тогда $f^1(f_2) = (ae^1 + be^2)(-e_1 - e_2) = -a - b = 0$.
Получаем систему $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1,\ a = -1$. Поэтому $f^1 = -e^1 + e^2$.
Осталось найти f^2. Пусть $f^2 = ce^1 + de^2$, $f^2(f_1) = (ce^1 + de^2)(e_1 + 2e_2) = c + 2d = 0$,

$f^2(f_2) = (ce^1 + de^2)(-e_1 - e_2) = c - d = 1$. Отсюда получаем, что $d = 1,\ c = -2$. Следовательно $f^2 = -2e^1 + e^2$. Мы получили двойственный базис.
Теперь необходимо посчитать значение тензора на новом наборе

$$(\underbrace{e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2}_{T})(\underbrace{e_1 + 2e_2}_{f_1}, \underbrace{-e^1 + e^2}_{f^1}, \underbrace{-2e^1 + e^2}_{f^2}) = T_1^{12} \text{ в } f \boxed{=}$$

$$\boxed{=}\ e^1(e_1+e_2)e_2(-e^1+e^2)e_2(-2e^1+e^2)+2e^2(e_1+2e_2)e_2(-e^1+e^2)e_2(-2e^1+e^2) = 1+4 = 5$$

Перестановка индексов одного типа

Пусть у нас есть произвольный $T \in \mathbb{T}^p_q$ и фиксирована перестановка $\pi \in S_q$, $\pi : \{1...q\} \leftrightarrows \{1...q\}$.
Определим новый тензор ${}_\pi T(\xi^1, ..., \xi^p, v_1, ..., v_q) = T(\xi^1, ..., \xi^p, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(q)})$. Это полилинейное отображение.

Рассмотрим биллинейную форму $B \in \mathbb{T}^0_2$. В симметрической группе S_2 есть одна нетривиальная перестановка - транспозиция $\tau = (1, 2)$.
Тогда, если $B : (x^1, ..., x^n) \mapsto (B_{ij})$, то ${}_\tau B : (x^1, ..., x^n) \mapsto (B_{ji})$.
Пример
Рассмотрим $T \in \mathbb{T}^0_3$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
Посчитаем компоненту $({}_\pi T)_{789} = {}_\pi T(\underbrace{e_7}_{v_1}, \underbrace{e_8}_{v_2}, \underbrace{e_9}_{v_3}) = T(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, v_{\pi(3)}) = T(v_2, v_3, v_1) =$
$T(e_8, e_9, e_7) = T_{897}$. Перестановка действует не на индексы, а на их позиции.

Задача на разложение по каноническому базису

Имеется элементарное тензорное поле $T = dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q} \in \mathbb{T}^0_q$, и перестановка $\pi \in S_q$. Подействуем перестановкой на тензор ${}_\pi T$ и разложим по каноническому базису.
Чтобы это сделать, необходимо вычислить компоненты этого тензора в каноническом базисе
${}_\pi T(\underbrace{\partial x^{i_1}}_{v_1}, ..., \underbrace{\partial x^{i_q}}_{v_q}) = T(v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(q)}) = T(\partial x^{i_{\pi(1)}}, ..., \partial x^{i_{\pi(q)}}) = dx^{j_1}(\partial x^{i_{\pi(1)}})...dx^{j_q}(\partial x^{i_{\pi(q)}}) =$
$1 \Leftrightarrow j_p = i_{\pi(p)},\ \forall p = 1...q$
Поэтому $\pi(dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q}) = dx^{j_{\pi^{-1}(1)}} \otimes ... \otimes dx^{j_{\pi^{-1}(q)}}$

Симметричный и кососимметричный тензоры

Тензор $T \in \mathbb{T}^0_q$ называется симметричным, если $\forall \pi \in S_q \quad {}_\pi T = T$. Тензор называется кососимметричным, если ${}_\pi T = (-1)^\pi T$.

Эти тензоры можно строить с помощью операций симметрирования и альтернирования. Они определяются так:

$$sym(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} {}_\pi T$$

$$A(T) = alt(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} (-1)^\pi \ {}_\pi T$$

Примеры

Пусть $T \in \mathbb{T}^0_q$

1. $S(T)$ - симметричный тензор, $A(T)$ - кососимметричный. Если T - симметричный, то $S(T) = T$, $A(T) = 0$. Если T - кососимметричный, то $S(T) = 0$, $A(T) = T$.

2. Почему $S(T)$ - симметричный тензор?

Возьмем произвольную перестановку $\sigma \in S_q$ и посмотрим что будет, если переставить индексы у тензора ${}_\sigma S(T) ={}_\sigma (\frac{1}{q!} \sum_\pi {}_\pi T) = \frac{1}{q!} \sum_\pi {}_\sigma ({}_\pi T)$

Разберем отдельно чему равно ${}_\sigma({}_\pi T)(v_1, ..., v_q)$

$${}_\sigma({}_\pi T)(v_1, ..., v_q) ={}_\pi T(\underbrace{v_{\sigma(1)}}_{w_1}, ..., \underbrace{v_{\sigma(q)}}_{w_q}) = T(w_{\pi(1)}, ..., w_{\pi(q)}) = T(v_{\sigma(\pi(1))}, ..., v_{\sigma(\pi(q))}) ={}_{\sigma\pi} T(v_1, ..., v_q)$$

$$\Rightarrow_\sigma ({}_\pi T) ={}_{\sigma\pi} T$$

Вернемся к нашим вычислениям.

$$\frac{1}{q!} \sum_\pi {}_\sigma({}_\pi T) = \frac{1}{q!} \sum_\pi {}_{\sigma\pi} T \boxed{=}$$

Вспомним из алгебры, что $\{\sigma\pi, \ \pi \in S_n\} = S_n$. Поэтому в нашей сумме $\sigma\pi$ пробегает всю $S_n \Rightarrow \ \boxed{=} \ S(T)$

Задача на нахождение компонентов кососимметрического тензора

Дан кососимметричный тензор $T_{ijk} \in \mathbb{R}^3$. Его компонента $T_{123} = 1$ в базисе e_1, e_2, e_3. Требуется найти компоненты T_{ijk} в другом базисе f_1, f_2, f_3, где $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$.

Решение

Пусть $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}$, $T_{i_1\dots i_n} \in \mathbb{T}^0_n$ - кососимметричный. Пространство кососимметричных тензоров обозначается как $\Lambda^q(\mathcal{L})$. Посмотрим на $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$. Если тензор в этом пространстве пару совпадающих компонент $T_{i_1\dots\alpha\dots\alpha\dots i_n}$, то они должны быть равны 0, так как транспозиция этих двух компонент меняет знак. Индексы принимают значения от 1 до размерности пространства, поэтому $T_{i_1\dots i_n} \neq 0 \Leftrightarrow$ все i_k попарно различны. Это означает, что $T_{i_1\dots i_n} = T_{\pi(1)\dots\pi(n)} = (-1)^\pi T_{1\dots n}$, $\pi \in S_n$. Следовательно, если у нас есть кососимметричный тензор, у которого количество индексов равно размерности пространства, то для него достаточно задать одну компоненту, а остальные либо 0, либо отличаются знаком.

Вернемся к задаче. T_{ijk} - тензор максимального ранга. Мы знаем, что T_{123}, и чтобы найти компоненты в другом базисе, то нам достаточно найти одну компоненту T_{123} в другом базисе.
$T_{123} = T(f_1, f_2, f_3) = T(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 + e_3) = T(e_1, e_2, e_3) + T(e_1, -e_3, e_2) + T(-e_2, -e_1, e_3) = T_{123} - T_{132} + T_{231} = 1 - (-1) + 1 = 3$
Следовательно $T_{\pi(1),\pi(2),\pi(3)} = (-1)^\pi 3$, а если есть совпадающие индексы, то $= 0$.

Задача на нахождение тензорного произведения

Даны векторы $u = e_1 - 3e_2 + e_3$, $v = 3e_1 + e_3$ и заданы ковекторы $\xi = e^2 + e^3$, $\eta = e^1 - e^2 + 2e^3$. Требуется вычислить:
1. $(\xi \otimes \eta)(u, v)$
2. $Alt(\xi \otimes \eta)$

Решение

1. $\xi \otimes \eta(u, v) = \xi(u)\eta(v) = (e^2 + e^3)(e_1 - 3e_2 + e_3)(e^1 - e^2 + 2e^3)(3e_1 + e_3) = (-3 + 1)(3 + 0 + 2) = -10$

2. $\mathbb{T}^0_2 \ni B = (\xi \otimes \eta) = (e^2 + e^3) \otimes (e^1 - e^2 + 2e^3) = e^2 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 - e^3 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^3$. Тогда $Alt(B) = \frac{1}{2!}\sum\limits_{\pi \in S_2} (-1)^\pi \frac{1}{2}(B -_\tau B)$, где $\tau = (1, 2)$.
$Alt(B) = \frac{1}{2}(e^2 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^3 - 2e^3 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3) = \frac{1}{2}(e^2 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^2 + 3e^2 \otimes e^3 - 3e^3 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^3)$

Опускание и поднятие индекса

Эта операция требует дополнительной структуры. $(g_{ij}) \in \mathbb{T}_2^0$ - невырожденный тензор типа $(0,2)$. Для этого тензора есть двойственный тензор $(g^{iju}) \in \mathbb{T}_0^2$, который однозначно определяется тем, что эти две матрицы взаимнообратные.
Операция опускания и поднятия индекса определяется так:
Возьмем тензор $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots i_q}$. Мы рассматриваем тензорное произведение и сворачиваем (суммируем по этому индексу) индекс, который хотим опустить $g_{i_1,\alpha}T^{\alpha,i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots i_q} \in \mathbb{T}^{p-1}_{q+1}$.
Аналогично можно определить поднятие индекса. Возьмем обратный тензор и умножим его на имеющийся $g^{j_1,\alpha}T^{i_1\ldots i_p}_{\alpha,j_2\ldots j_q} \in \mathbb{T}^{p+1}_{q-1}$

3. Семинар 3

Свертка

Если нам дан тензор $T \in \mathbb{T}^p_q$, то мы можем зафиксировать два индекса $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant l \leqslant q$ и рассмотреть соответствие $(x^1, ..., x^n) \mapsto T^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q}$. Получившийся тензор - тензор типа $(p-1, q-1)$. Операция свертки обозначается буквой C с индексами, по которым мы сворачиваем тензор, $C^k_l(T) \in \mathbb{T}^{p-1}_{q-1}$

Примеры

1. $A \in \mathbb{T}^1_1$ - линейный оператор. Тогда $C^1_1(A) = A^i_i = trA$ - скаляр (тензор типа $(0,0)$).
2. $v \in \mathbb{T}^1_0$, $\xi \in \mathbb{T}^0_1$. Тогда $v \otimes \xi \in \mathbb{T}^1_1$. Рассмотрим свертку $C^1_1(v \otimes \xi)$. Если $(x_1, ..., x_n)$ фиксированы, то тогда $v \mapsto (v^1, ..., v^n)$, $\xi \mapsto (\xi_1, ..., \xi_n)$, $v \otimes \xi \mapsto v^i \xi_j$. Поэтому $C^1_1(v \otimes \xi) = v^i \xi_i = \xi(v)$

Задача на свертку тензора

Дан $T = 2e_1 \otimes e^2 - 3e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^2 - 4e_3 \otimes e^3$. Найти свертку этого тензора.

Решение

$T \in \mathbb{T}^1_1$. Поэтому $C^1_1(T) = 2e^2(e_1) - 3e^2(e_2) + e^2(e_3) - 4e^3(e_3) = 0 - 3 + 0 - 4 = -7$

Опускание и поднятие индексов

Фиксирована невырожденная биллинейная форма $\mathbb{T}^0_2 \ni B : (x^1, ..., x^n) \mapsto (d_{ij})$, $det(b_{ij}) \neq 0$, так как форма невырожденная. По этой форме можно построить биллинейную форму $\mathbb{T}^2_0 \ni B^{-1} : (x^1, ..., x^n) \mapsto (b^{ij})$, где $(b^{ij}) = (b_{ij})^{-1}$

Пусть у нас есть $T \in \mathbb{T}^p_q \overset{?}{\mapsto} \mathbb{T}^{p-1}_{q+1}$. Чтобы это сделать, необходимо рассмотреть биллинейную форму, умножить на наш тензор и свернуть $\overbrace{C^1_2(\underbrace{B \otimes T}_{(p,q+2)})}^{(p-1,q+1)} = b_{i_1 \alpha} T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

Аналогично можно определить операцию поднятия индекса с помощью формы $b(^{ij})$.

Задача на опускание и поднятие индексов у тензора

Поднять (опустить) индекс у тензора $T = e_1 \otimes e^2 + 3e_2 \otimes e^1$, $T \in \mathbb{T}^1_1$. с помощью $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение

1. Опускание: $g_{i\alpha}T^\alpha_j = T_{ij}$. В общем виде $T = T^i_j e_i \otimes e_j$. Поэтому $T^1_2 = 1$, $T^2_1 = 3$, $T^1_1 = T^2_2 = 0$.
$T_{11} = g_{1\alpha}T^\alpha_1 = g_{12}T^2_1 = 6.$
$T_{12} = g_{1\alpha}T^\alpha_2 = g_{11}T^1_2 = 1.$
$T_{21} = g_{2\alpha}T^\alpha_1 = g_{22}T^2_1 = 9$
$T_{22} = g_{2\alpha}T^\alpha_2 = g_{21}T^1_2 = 1$
Поэтому тензор с опущенными индексами имеет вид $T = 6e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^2 + 9e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$
2. Поднятие: $g : i\alpha T^j_\alpha = T^{ij}$. Посчитаем обратную матрицу $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$T^{11} = g^{1\alpha}T^1_\alpha = g^{12}T^1_2 = -2.$
$T^{12} = g^{1\alpha}T^2_\alpha = g^{11}T^2_1 = 9.$
$T^{21} = g^{2\alpha}T^1_\alpha = g^{22}T^1_2 = 1$
$T^{22} = g^{2\alpha}T^2_\alpha = g^{21}T^2_1 = -3$
Тензор с поднятыми индексами имеет вид $T = -2e_1 \otimes e_1 + 9e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 3e_2 \otimes e_2$

Изоморфизм при поднятии и опускании индексов

У нас есть пространство векторов T_PM и ковекторов $(T_PM)^*$. В общем случае между ними нет изоморфизма, но в присутствии скалярного произведения, они изоморфны друг другу. Если фиксирована билиннейная невырожденная форма B, то при опускании индекса у тензора типа $(1,0)$ мы получаем тензор типа $(0,1)$ и наоборот. $b_{i\alpha}v^\alpha$ и $b^{i\alpha}\xi_\alpha$

Если у нас есть гладкая функция $f : M \mapsto \mathbb{R}$. Дифференциал этой функции $df|_P : T_PM \mapsto \mathbb{R}, df|_P \in \mathbb{T}^0_1$. В фиксированных координатах $(x_1, ..., x_n) \mapsto (\dfrac{\partial f}{\partial x^1}(P), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x^n}(P))$.
В матанализе говорят про вектор градиента с теми же самыми компонентами $grad\ df = (\dfrac{\partial f}{\partial x^1}(P), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x^n}(P))$. При поднятии индекса у этого дифференциала мы получим векторное поле градиента $g^{i\alpha}\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

Вообще говоря, $grad\ f$ - векторное поле, которое получается поднятием индекса из дифференциала этой функции.

В евклидовой метрике $g^{i\alpha} = \delta^{i\alpha}$ и тогда $\delta^{i\alpha}\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

Формула для градиента в сферических координатах

Сферические координаты: $r, \theta, \varphi,$, где θ - угол между радиус-вектором и осью z, и угол φ между радиус-вектором и плоскостью xy. Формулы перехода к евклидовым координатам: $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$. Запишем метрику в этих координатах. евклидова метрика $dx^2 + dy^2 + dz^2$.

При переходе к новым координатам $\begin{cases} \partial r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\ \partial\theta = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta) \\ \partial\varphi = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0) \end{cases}$

Метрика в сферических координатах $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\varphi^2$. Обратная матрица к этой метрике имеет диагональный вид со значениями $1,\ \dfrac{1}{r^2},\ \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}$. Тогда компоненты $(grad\ f)^i = g^{i\alpha}\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, где $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$. Так как матрица диагональная, то в каждой сумме одно слагаемое. Получаем $\begin{cases} (grad\ f)^1 = g^{11}\dfrac{\partial f}{\partial x^1} = \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ (grad\ f)^2 = g^{22}\dfrac{\partial f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial f}{\partial\theta} \\ (grad\ f)^3 = g^{33}\dfrac{\partial f}{\partial x^3} = \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi} \end{cases}$

В сферических координатах $grad\ f(r, \theta, \varphi) = (\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}, \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi})$

Пространство симметричных и кососимметричных тензоров

Тензор $T \in \mathbb{T}^0_p$ называется симметричным, если $\forall \pi \in S_p\ {}_\pi T = T$ и кососимметричным, если $\forall \pi \in S_p\ {}_\pi T = (-1)^\pi T$. Легко понять, что линейная комбинация симметричных (кососимметричных) тензоров - симмметричный (кососимметричный) тензор. Поэтому множество симмметричный (кососимметричный) тензоров фиксированного типа образуют линейное пространство. Пространство кососимметричных тензоров обозначается $\Lambda^p(\mathcal{L})$, симметричных тензоров $S^p(\mathcal{L})$.

Размерности и базисы в этих пространствах

$\Lambda^1(\mathcal{L})$, $S^1(\mathcal{L})$ - тривиальный случай. $\Lambda^1(\mathcal{L}) = S^1(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}^*$. $\forall \xi \in \mathcal{L}$ является одновременно симметричным и кососимметричным тензором.

Если $T \in \mathbb{T}^0_p$, $p \geqslant 2$ является одновременно симметричным и кососимметричным, то из этого следует, что $T = 0$.

Если $e^1, ..., e^n$ - базис в $\mathcal{L}^*$, то можно определить кососимметрический тензор

$$e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p} \in \Lambda^P(\mathcal{L}) = det \begin{pmatrix} e^{i_1}(v_1) & e^{i_2}(v_1) & ... & e^{i_p}(v_1) \\ e^{i_1}(v_2) & e^{i_2}(v_2) & ... & e^{i_p}(v_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i_1}(v_p) & e^{i_2}(v_p) & ... & e^{i_p}(v_p) \end{pmatrix}, \text{ где } 1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n$$

Всевозможные кососимметрические тензоры $\{e^{i_1} \wedge, ..., \wedge e^{i_p}\}$ - базис в Λ^P. Из этого следует, что $dim\ \Lambda^P = \left[\begin{array}{l} C^P_n,\ p \leqslant n \\ 0,\ \ p > n \end{array} \right.$

Для случая симметричных тензоров мы задаем такие же компоненты, но с условием, что индексы могут совпадать $T_{i_1 ... i_p}$, $1 \leqslant i_1 \leqslant ... \leqslant i_p \leqslant n$. Количество таких наборов $dim\ S^p = C^p_{n+p-1}$.

Если у нас есть биллинейная форма, то ее можно представить в виде комбинации симметричной и кососимметричной биллинейных форм $\mathbb{T}^0_2 = S^2 \oplus \Lambda^2$. Это следует из того, что $S^2 \cap \Lambda^2 = 0$ и $dim\ \Lambda^2 = C^2_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $dim\ S^2 = C^2_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Если сложить эти размерности, то получится $n^2 = dim\ \mathbb{T}^0_2$.

Если у нас есть произвольная биллинейная форма B, то тогда $Sym(B) = \dfrac{B + B^T}{2} \in S^2$,

$Alt(B) = \dfrac{B - B^T}{2} \in \Lambda^2$
Проверим, верно ли то же самое в пространстве тензоров $\mathbb{T}_p^0 \supset S^p, \Lambda^p$, $S^p \cap \Lambda^p = 0$, но $S^p \oplus \Lambda^p \neq \mathbb{T}_p^0$. Чтобы это проверить, достаточно посмотреть, что $C_n^p + C_{n+p-1}^p < n^p$, при $p \geqslant 3, n \geqslant 2$.

Задачи на симметричные и кососимметричные тензоры

1. A_{ij} - симметричный тензор, B^{ij} - кососимметричный. Выполним ряд операций: свертку и тензорное произведение $C_1^1 C_2^2 (A \otimes B) = A_{ij} B^{ij}$. Необходимо проверить, что $A_{ij} B^{ij} = 0$

Решение

$B^{ii} = 0,\ \forall i$, так как кососимметричен. Поэтому в сумме необходимо рассматривать только слагаемые, в которых $i \neq j$. Тогда в этой сумме остаются два слагаемых $A_{ij}B^{ij} + A_{ji}B^{ji}$ при фиксированных i, j. В силу свойств $A_{ji} = A_{ij}$, а $B^{ji} = -B^{ij}$, поэтому $A_{ij}B^{ij} + A_{ji}B^{ji} = 0$

2. Пусть $T \in \mathbb{T}_3^0$, и он симметричен по первой паре индексов, но кососимметричен по второй паре $T_{ijk} = T_{jik}$, $T_{ijk} = -T_{ikj}$. Проверим, что в этом случае $T_{ijk} = 0$

Решение

С помощью перестановок легко показать, что $T_{ijk} = ... = -T_{ijk}$. Из этого сразу следует, что $T_{ijk} = 0$

4. Семинар 4

Дифференциальные формы

$\Lambda^k(\mathcal{L})$ - кососимметрические тензоры типа $(0,k)$ на пространстве $\mathcal{L}$. Теперь рассмотрим гладкое тензорное поле, типа $(0,k)$ на многообразии M^n. Это дифференциальная форма ω^k степени k. В каждой точке такая форма - кососимметрический тензор типа $(0,k)$.
Если у нас фиксированы координаты $(x^1,...,x^n)$ на M, то $\forall P \in M: \ \omega^k(P) \in \Lambda^k(T_PM)$.
$(dx^1,...,dx^n)$ - канонический базис в пространстве ковекторов $(T_PM)^* = \mathcal{L}^*$, а в Λ^k базис составлен из их внешних произведений $dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n$. Поэтому $\omega^k(P)$ может быть записана как $\sum\limits_{1\leqslant i_1<...<i_p\leqslant n} \omega_{i_1...i_k}(P)dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_k}$, где $\omega_{i_1...i_k}$ компоненты тензорного поля ω в точке P. ω гладкое $\Leftrightarrow \omega_{i_1...i_k}(x)$ гладко зависят от $(x^1,...,x^n)$.
Эти внешние формы образуют линейное пространство $\Omega^k(M)$. $\Omega^* = \cup_{p=0}^n \Omega^p(M)$ - объединение этих пространств форм, которое называется алгеброй дифференциальных форм на многообразии M. Внешнее произведение так же работает на дифференциальных формах $\wedge : \Omega^p(M)\times\Omega^q(M) = \Omega^{p+q}(M)$

Задачи на дифференциальные формы

1. Имеется $\omega^1,...,\omega^k \in \Omega^1(M)$ и фиксирована точка $P \in M$. Тогда ковекторы $\omega^1(P),...,\omega^k(P)$ линейно независимы $\Leftrightarrow \omega^1\wedge...\wedge\omega^k \neq 0$.

Решение

$\boxed{\Rightarrow}$ Если $\omega^1(P),...,\omega^k(P)$ линейно независимы, то тогда можно сделать такую замену координат, что они будут базисными ковекторами $e^1 = \omega^1(P),...,e^k = \omega^k(P)$. Тогда, $e^1\wedge...\wedge e^k$ - элемент Λ^k и он $\neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Если $\omega^1\wedge...\wedge\omega^k \neq 0$, то тогда $\exists v^1...v^k$, такой, что $det\begin{pmatrix}\omega^1(v_1) & \dots & \omega^k(v_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega^1(v_k) & \dots & \omega^k(v_k)\end{pmatrix} \neq 0$.
Если $\omega^1,...,\omega^k$ линейно зависимы, то столбцы матрицы линейно зависимы - противоречие.

2. Пусть имеется $\omega^p \in \Lambda^p$ и $\exists \alpha \in \Lambda^1,\ \alpha \neq 0: \ \omega^p = \theta\wedge\alpha$, где $\theta \in \Lambda^{p-1} \Leftrightarrow \omega^p\wedge\alpha = 0$

Решение

$\boxed{\Rightarrow}$ Если $\omega^p = \theta \wedge \alpha$, то $\omega^p \wedge \alpha = \theta \wedge \underbrace{(\alpha \wedge \alpha)}_{=0} = 0$

Так как $\alpha \neq 0$, то сделаем замену координат, в которой $e^1 = \alpha, e^2, ..., e^n$.
Тогда

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 ... i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p} \boxed{=}$$

Выберем слагаемые, которые содержат e^1.

$$\boxed{=} \sum_{1 \leqslant i_2 < ... < i_p \leqslant n} \omega_{1 i_2 ... i_p} e^1 \wedge e^{i_2} ... \wedge e^{i_p} + \sum_{2 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 ... i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p}$$

Умножим $\omega \wedge e^1$. Тогда при умножении первого слагаемого на e^1 в силу косой симметрии мы получим 0. При умножении на второе, мы не получим 0, следовательно $\omega \wedge e^1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{2 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 ... i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p} = 0$. Из этого следует, что наша форма разложима, так она равна внешнему произведению e^1 на второе слагаемое из суммы.

Звезда Ходжа

Введем дополнительную структуру (M, g_{ij}) - риманово многообразие со специальной формой объема $\in \Lambda^n(M)$. Такая форма $\omega^n = \omega_{1...n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$. $\omega_{1...n}$ называется существенной компонентой

При замене координат $(x^1, ..., x^n) \mapsto \omega_{1...n}$, $(x^{1'}, ..., x^{n'}) \mapsto \omega_{1'...n'}$ существенная компонента имеет вид $\omega_{1'...n'} = \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \cdots \dfrac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} \omega_{i_1 ... i_n}$.

Так как $\omega_{i_1 ... i_n}$ кососимметрична, то $\omega_{i_1 ... i_n} = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ если есть повторяющиеся индексы} \\ \omega_{\pi(1) ... \pi(n)} = (-1)^\pi \omega_{1...n}, \text{ если все индексы различны} \end{array} \right.$

Поэтому $\omega_{i_1 ... i_n} = \sum_{\pi \in S_n} \dfrac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial x^{1'}} \cdots \dfrac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial x^{n'}} (-1)^\pi \omega_{1...n} = \omega_{1...n} det \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$

Форма объема определяется как соответствие $(x^1, ..., x^n) = \pm\sqrt{det(g_{ij})}$. $+$, если $(x^1, ..., x^n)$ положительно ориентированны, $-$, если отрицательно ориентированны. Чтобы не было проблем со знаком под корнем, риманово многообразие должно быть ориентированным.

Проверим, что это действительно дифференциальная форма степени n. При замене координат матрица метрики меняется по тензорному закону $g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$, следовательно $det\ g_{i'j'} = (det\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}})^2 det\ g_{ij}$. Поэтому $\sqrt{det(g_{i'j'})} = |det\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}|\sqrt{det(g_{ij})}$.

Звезда Ходжа на M^n

Это линейный оператор $* : \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{n-p}(M)$. Обозначим компоненты формы объема за $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$. Пусть имеется $\omega^p \in \Omega^p(M)$.

Определим форму $(*\omega)_{i_{p+1}\ldots i_n} = \frac{1}{p!}\omega^{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n} = \frac{1}{p!} g^{i_1\alpha_1}\ldots g^{i_p\alpha_p}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\varepsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n}$. То, что получилось, по определению является некоторым тензорным полем степени $n-p$. Оно кососимметрическое, так как ε кососимметрический по всем индексам.

Примеры

1. Возьмем форму $1 \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Тогда $*1 \in \Omega^n(M)$, $(*1)_{i_!\ldots i_n} = \frac{1}{0!}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$. Другими словами $(*1)$ - форма объема на M.

2. Возьмем форму $*(*1) \in \Omega^0(M)$. Тогда

$$*(*1) = \frac{1}{n!}(g^{i_1\alpha_1}\ldots g^{i_n\alpha_n})\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = \frac{1}{n!}((\sum_{\pi\in S_n} g^{i_1\pi_1}\ldots g^{i_n\pi_n})\underbrace{\varepsilon_{\pi(1)\ldots\pi(n)}}_{=(-1)^\pi\varepsilon_{1..n}}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}) =$$

$$= \frac{\varepsilon_{1\ldots n}}{n!}\underbrace{(\sum_{\pi\in S_n} g^{i_1\pi_1}\ldots g^{i_n\pi_n}(-1)^\pi)}_{=det\ (g^{ij})\ \text{с переставленными строками на } \sigma}\underbrace{\varepsilon_{i_1\ldots i_n}}_{=(-1)^\sigma\varepsilon_{1\ldots n}} \boxed{=}$$

где $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$, а $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$

$$\boxed{=}\ \frac{\varepsilon_{1\ldots n}}{n!}\sum_\sigma((-1)^\sigma det\ (g^{ij})(-1)^\sigma\varepsilon_{1\ldots n}) = \frac{\varepsilon^2_{1\ldots n}}{n!}det\ (g^{ij})\underbrace{\sum_{\sigma\in S_n}((-1)^\sigma)^2}_{=n!} = 1,\ \text{так как}\ \varepsilon_{1\ldots n} = \sqrt{g_{ij}}$$

Мы показали, что $*(*1) = 1$, но это не всегда так. Например, $*(*\omega^p) = (-1)^{p(n-p)}\omega^p$, где $\omega^p \in \Omega^p$

Вычисление звезды Ходжа в различных метриках

Звезда Ходжа в $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$

Пусть у нас есть $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Посчитаем $\left[\begin{array}{l} *dx \\ *dx \wedge dz \\ *(dx \wedge dy \wedge dz) \end{array}\right.$

1. Форма объема в наших координатах имеет вид $(*1)_{\mathbb{R}^3} = dx \wedge dy \wedge dz$, так как $det\ \delta_{ij} = 1$. Поэтому $*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$

2. Посчитаем $*dx$. $\omega = dx \in \Omega^1$, поэтому $(*dx) \in \Omega^2$. $(*dx)_{i_2 i_3} = \dfrac{1}{1!}\omega^{i_1}\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$. ω имеет координаты $(1, 0, 0)$, $\omega^{i_1} = \delta^{i_1\alpha}\omega_\alpha$ имеет координаты $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, следовательно $(*dx)_{i_2 i_3} = \omega^1\varepsilon_{1 i_2 i_3} +$ нули $= \varepsilon_{1 i_2 i_3}$. Так как ε кососимметрическая форма, нам необходимо, чтобы индексы были различны. Поэтому $*(dx)_{23} = \varepsilon_{123} = 1$, $*(dx)_{32} = \varepsilon_{132} = -1$, а остальные равны нулю.

Это базисная форма, у которой при произведении второго и третьего базисных ковекторов стоит единица. Следовательно $*(dx) = dy \wedge dz$

3. Посчитаем $*(dx \wedge dz) \in \Omega^1$, $\omega = dx \wedge dz \in \Omega^2$ По определению $*(dx \wedge dx)_{i_3} = \dfrac{1}{2!}\omega^{i_1 i_2}\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$.

ω устроена так: $\omega_{13} = \omega_{31} = 1$, остальные равны нулю. $\omega^{i_1 i_2} = \delta^{i_1\alpha_1}\delta^{i_2\alpha_2}\omega_{\alpha_1\alpha_2}$ и также $\omega^{13} = \omega^{31} = 1$, остальные равны нулю. Поэтому $*(dx \wedge dx)_{i_3} = \dfrac{1}{2!}(\omega^{13}\varepsilon_{13 i_3} + \omega^{31}\varepsilon_{31 i_3})$.

По свойству косой симметрии мы можем переставить индексы у ω и ε во втором слагаемом и получить $\omega^{13}\varepsilon_{13 i_3} = \varepsilon_{13 i_3}$.

Значит $*(dx \wedge dz)_2 = \varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123} = -1$, остальные компоненты нули. Поэтому $*(dx \wedge dz) = -dy$

Звезда Ходжа в $(\mathbb{R}^3, g_{ij})$

Пусть $g_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $det\ g_{ij} = 36$, $\sqrt{det\ g_{ij}} = 6$.

Обратная матрица имеет вид $g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Посчитаем $\left[\begin{array}{l} *dx^2 \\ *dx^2 \wedge dx^3 \\ *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \end{array}\right.$ в координатах (x^1, x^2, x^3)

1. Форма объема в наших координатах $*(1) = \sqrt{det\ g_{ij}} = 6dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Поэтому $*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = *(\frac{1}{6}(6dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)) = \frac{1}{6} * (*1) = \frac{1}{6}$

2. $(*dx^2) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, следовательно $(*dx^2)_{i_2 i_3} = \frac{1}{1!}\omega^{i_1}\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = g^{i_1\alpha}\omega_\alpha\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$.

Так как $\omega = (0,1,0)$ и $g^{i_1\alpha}\omega_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то тогда $g^{i_1\alpha}\omega_\alpha\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \omega^{i_1}\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \omega^2\varepsilon_{2 i_2 i_3} = \varepsilon_{2 i_2 i_3}$. Из-за косой симметрии ненулевые компоненты это $\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{123} = -6$, поэтому $(*dx^2) = -6dx^1 \wedge dx^3$

3. $*(dx^2 \wedge dx^3) \in \Omega^1$, $*(dx^2 \wedge dx^3)\frac{1}{2!}\omega^{i_1 i_2}\omega^{i_1 i_2}\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$. Посчитаем $\omega_{23} = -\omega_{32} = 1$, остальные нули. $\omega^{ij} = g^{i\alpha}g^{j\beta}\omega_{\alpha\beta} = g^{i2}g^{j3}\omega_{23} + g^{i3}g^{j2}\omega_{32}$. Эта сумма ненулевая, когда $i = 3,\ j = 2$, лиюю $i = 3,\ j = 2$. Следовательно, $\omega^{23} = g^{22}g^{33} = \frac{1}{4}$, $\omega^{32} = -\frac{1}{4}$.

Поэтому мы получаем $*(dx^2 \wedge dx^3) = \frac{1}{2!}(\omega^{23}\varepsilon_{23k} + \omega^{32}\varepsilon_{32k}) = \omega^{23}\varepsilon_{23k} \neq 0 \Leftrightarrow k = 1$, следовательно, $*(dx^2 \wedge dx^3) = \omega^{23}\varepsilon_{231} = \frac{1}{4}6 = \frac{3}{2} \Rightarrow *(dx^2 \wedge dx^3) = \frac{3}{2}dx^1$

Внешний дифференциал

У нас есть гладкие внешние формы $\Omega^p(M)$. Построим операцию $d : \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{p+1}(M)$. Для $p = 0$, $\Omega^0(M) = C^\infty$ у нас есть операция дифференциала, которая по каждой функции строит внешнюю дифференциальную форму степени 1.
Теперь пусть $(x^1, ..., x^n)$ фиксированы, тогда $\omega^p = \sum\limits_{1\leqslant i_1<...<i_n\leqslant n} \omega_{i_1...i_p}(x)dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$.
Так как компоненты тензорного поля представляют собой локально определенные гладкие функции, то определить дифференциал от этой формы можно так $d\omega^p = \sum\limits_{1\leqslant i_1<...<i_n\leqslant n} d\omega_{i_1...i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$. Это по определению форма $p+1$.
Важное свойство этого дифференциала состоит в том, что $d(d\omega) \equiv 0$.

Примеры

1. На плоскости $\mathbb{R}^2(x,y)$ задана $\omega = x^2dx + xy^3dy$. Найдем $d\omega$.
По определению $d\omega = (dx^2) \wedge dx + d(xy)^3 \wedge dy = \underbrace{2xdx \wedge dx}_{=0} + (y^3dx + 3xy^2dy) \wedge dy = y^3dx \wedge dy$

2. В $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ задана форма $\omega^2 = xdy \wedge dz + 3ydx \wedge dz$.

$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + 3dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz - 3dx \wedge dy \wedge dz = -2dx \wedge dy \wedge dz$

Вообще говоря у нас возникает цепочка: $\Omega^0 \overset{d_0}{\mapsto} \Omega^1 \overset{d_1}{\mapsto} \ldots \overset{d_{n-2}}{\mapsto} \Omega^{n-1} \overset{d_{n-1}}{\mapsto} \Omega^n \overset{d_n}{\mapsto} 0$, так как $\Omega^{n+1} = 0$. Поэтому дифференциал от формы объема $d(*1) = 0$. В этих обозначениях свойство $d(d\omega) = 0$ записывается как $d_{k+1}d_k = 0$.

5. Семинар 5

Операция переноса

Если у нас есть $f : M \mapsto N$ гладкое отображение гладких многообразий, и на N есть дифференциальная форма $\omega \in \Omega^p$. Тогда, по этой форме можно построить форму $f^*(\omega)$ на M (перенести форму назад) с помощью отображения f^* : $\Omega^p(N) \overset{f^*}{\mapsto} \Omega^p(M)$. Чтобы определить эту форму, необходимо определить в произвольной точке M. Форма в точке - полилинейнейное кососимметрическое отображение на векторах. $f^*(\omega)(P)(v_1, ..., v_n) = \omega(f(P))(df|_P(v_1), ..., df|_P(v_n))$, где $\omega(f(P))$ - полилинейное кососимметрическое отображение на касательных векторах к многообразию N, $df|_P : T_PM \mapsto T_{f(P)}M$. Такая операция называется переносом формы с помощью отображения.

Пример
Пусть $M = S^1$, $N = \mathbb{R}^2$, и рассмотрим стандартное вложение окружности в плоскость $f : S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$. На плоскости координаты (x, y), на коружности (φ), тогда $f(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, где R - некоторое фиксированное число. Зададим на плоскости две формы $\omega_1 = xdy - ydx$ и $\omega_2 = (x + y)^2 dx \wedge dy$. Посчитаем $f^*(\omega_i)$.
$f^*(\omega_1) \in \Omega^1(S^1)$. Подставим наше отображение в формулу
$f^*(\omega_1) = R\cos\varphi d(R\sin\varphi) - R\sin\varphi d(R\cos\varphi) = R^2 d\varphi$.
$f^*(\omega_2) \in \Omega^2(S^1)$, $f^*(\omega_2) = 0$, так как любая форма из Ω^2 на окружности равна нулю.

Некоторые важные свойства f^*

1. f^* - линейное отображение линейных пространств.
2. Это отображение коммутирует с дифференциалом $f^*d\omega = df^*\omega$

Докажем второе свойство.
Рассмотрим в качестве ω одночлен $g(y)dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_p} \in \Omega^p(N)$. Пусть $F : M^m \mapsto N^n$, которое имеет вид $y^i = y^i(x^1...x^m)$ в локальных координатах (x) на M и (y) на N.
$d\omega = \dfrac{\partial g}{\partial y^k} dy^k \wedge dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_p}$. Тогда $F^*(d\omega) = \dfrac{\partial g}{\partial y^k}(y(x))\dfrac{\partial y^k}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge \dfrac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{i_1} \wedge ... \wedge \dfrac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{i_p} = \dfrac{\partial g(y(x))}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge \dfrac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} ... \dfrac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_p}$

С другой стороны $F^*(\omega) = g(y(x))\dfrac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}...\dfrac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}}dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_p}$.

Возьмем внешний дифференциал $dF^*(\omega) = \dfrac{\partial g(y(x))}{\partial x^\alpha}dx^\alpha \wedge \dfrac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}...\dfrac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}}dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_p} +$ $g(y(x))\dfrac{\partial^2 y^{i_1}}{\partial x^{j_1}\partial x^\alpha}dx^\alpha \wedge \dfrac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{j_2}}...\dfrac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}}dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_p} + \underset{p-2 \text{ аналогичных слагаемых}}{...}$

Так как $\dfrac{\partial^2 y^{i_1}}{\partial x^{j_1}\partial x^\alpha}$ симметрична по $j_{1\alpha}$, а $dx^\alpha \wedge dx^{j_1}$ - кососимметрично, следовательно это слагаемое равно нулю, как и все остальные, кроме первого. Следовательно, проверяемое нами свойство верно, так как мы получили два одинаковых выражения для $f^*d\omega$ и $df^*\omega$

Следствие

Напоминание: ω - замкнутая $\Leftrightarrow d\omega = 0$.

Если у нас есть $M^m \subset W^w$ и ω - замкнутая форма на W, то тогда $\omega|_M$ - тоже замкнуто.

Интегрирование форм

Пусть имеется M^m - гладкое ориенированное многообразие, и $\omega \in \Omega^m(M)$. Рассмотрим форму, у которой $supp\ \omega \subset (U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Это означает, что вне карты наша форма равна нулю. Воспользуемся координатным гомеоморфизмом, который отображает нашу карту U в многообразии на произвольное множество $W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, ..., x^n)$. Старшая форма имеет вид $\omega_{1...n}(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$, где $\omega_{1...n}(x)$ гладко зависит от x. Тогда, по определению, интеграл от такой по многообразию M $\int\limits_M \omega = \int ... \int\limits_{\omega_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)} \omega_{1...n}(x)dx^1...dx^n$

Если M - компактное, или $supp\ \omega$ - компактен, тогда на этом многообразии рассматривается разбиение единицы, подчиненное какому-нибудь конечному атласу $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$.

Напоминание

Разбиение единицы - семейство гладких функций $\{f_\alpha\}$ на многообразии, где каждая функция $f_\alpha : M \mapsto [0, 1]$, $supp\ f_\alpha \subset U_\alpha$, и $\sum f_\alpha(x) = 1$

Тогда $\int\limits_M \omega = \sum\limits_\alpha \int\limits_M f_\alpha\omega$, где $supp\ f_\alpha\omega \subset U_\alpha$

Формула Стокса

Пусть имеется гладкое ориентированное многообразие M^m с краем ∂M и имеется форма
$\omega \in \Omega^{m-1}(M)$. Тогда, $\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$, при условии, что ориентации M и ∂M согласованы. Чтобы согласовать ориентацию, необходимо в окрестности края выбрать базис в касательной плоскости ко всему многообразию так, чтобы первый вектор был направлен от нашего многообразия, а оставшиеся векторы задают ориентацию на крае, которая называется согласованной с ориентацией многообразия.

Следствие 1

Пусть M^m - гладкое компактное ориентированное многообразие без края, и на нем имеется форма $\omega \in \Omega^{m-1}$. Тогда, $\int\limits_M d\omega = 0$

Докажем это следствие.

Рассмотрим в маленькой окрестности произвольной точки многообразия подмножество этого многообразия, которое гомеоморфно диску D^n. Представим наше многообразие в виде $M = M \backslash D \cup D^n$. Тогда $\int\limits_{M \backslash D} d\omega + \int\limits_D d\omega$, а у диска есть граница $\partial D^n = S^{n-1}$ и у дополнения до диска $\partial(M \backslash D) = S^{n-1}$. Если рассмативать согласованные ориентации, то границы будут противоположно ориентированы. Применим формулу Стокса $\int\limits_{M \backslash D} d\omega + \int\limits_D d\omega = \int\limits_{-S^{n-1}} \omega + \int\limits_{+S^{n-1}} \omega = -\int\limits_{S^{n-1}} \omega + \int\limits_{S^{n-1}} \omega = 0$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2

Пусть ω^{m-1} - замкнута ($d\omega = 0$), то тогда $\int\limits_{\partial M} \omega = 0$

Примеры

1. Возьмем $\omega = dx + dy$, $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. И на плоскости дан эллипс $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Рассмотрим верхнюю половину эллипса в качестве кривой γ и посчитаем $\int\limits_\gamma \omega$.

Решение

1 способ: Можно взять параметризацию $x = \cos t,\ y = 2\sin t$, подставить в форму и проинтегрировать от 0 до π. $\int\limits_0^\pi (-\sin t + 2\cos t)dt$

2 способ: Рассмотрим кусок плоскости, ограниченный кривой γ и малой полуосью эллипса.

Возьмем его за наше многообразие M с краем $\partial M = \gamma \cup I$, где $I = 2$ - малая полуось.

Отсюда следует, что $\int\limits_I \omega + \int\limits_\gamma = \int\limits_{\partial M} d\omega = 0$, поэтому интеграл по γ можно заменить интегралом по I с точностью до знака. Поэтому $\int\limits_{-1}^{1} \omega|_I = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2$

3 способ: Посмотреть на кривую γ как на многообразие, тогда $\partial M = \{A, B\}$, где A и B - точки пересечения γ с малой полуосью. Тогда, $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_M d(x+y) = \int\limits_{\partial M} (x+y) = (x+y)(B) - (x+y)(A)$. Координаты наших точек $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$,поэтому $(x+y)(B) - (x+y)(A) = -2$

Замкнутая неточная форма

Примеры замкнутой неточной формы

Замкнутая $\Rightarrow d\omega = 0$, точная $\Rightarrow \omega = d\alpha$. То есть необходимо привести пример формы, дифференциал которой равен нулю, но она сама не является дифференциалом.

1. Если форма точная, то интеграл от нее равен нулю. Если M - ориентированное замкнутое многообразие, то можно взять форму объема $*1_M$. Ее существенная компонента $(*1_M)_{1\dots m} = \sqrt{det\ g_{ij}} > 0$, и по свойствам интеграла, интеграл по каждой карте от этого корня по $dx^1 \dots dx^n$ больше нуля. Отсюда следует, что интеграл от формы объема по многообразию положительный. С другой стороны форма объема замкнутая, так как это форма степени размерности многообразия $*1_M \in \Omega^m(M)$. Если форма объема точна, то есть $*1_M = d\alpha$, тогда $\int\limits_M *1_M = \int\limits_M d\alpha = \int\limits_{\partial M = \varnothing} \alpha = 0$

2. Возьмем плоскость без начала координат $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Стандартный пример замкнутой неточной формы на такой плоскости - форма $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. Эта форма определена везде, кроме начала координат.
Убедимся, что (1) $d\omega = 0$ и (2) $\omega \neq d\alpha$

$$d\omega = d(\frac{x}{x^2+y^2}) \wedge dy - d(\frac{y}{x^2+y^2}) \wedge dx \boxed{=}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)dx - (2xdx + 2ydy)x}{(x^2+y^2)^2} \wedge dy - \frac{(x^2+y^2)dy - (2xdx+2ydy)y}{(x^2+y^2)^2} \wedge dx \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \frac{(y^2-x^2)dx \wedge dy - (x^2-y^2)dy \wedge dx}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Rightarrow (1)$$

Если p-форма ω точна, то $\int\limits_{\partial M} \alpha = \int\limits_{M} d\alpha \int\limits_{M^p} \omega^p = 0$, так как $\partial M = \varnothing$. Это значит, что ω - 1-форма и интеграл по любой замкнутой кривой равен нулю. Например, возьмем окружность единичного радиуса $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ и посчитаем интеграл от нашей формы по этой окружности.
$\omega|_{S^1} = \dfrac{\cos^2\varphi d\varphi - \sin\varphi(-\sin\varphi d\varphi)}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = d\varphi$, поэтому $\int\limits_{S^1} \omega = \int\limits_{S^1} \omega|_{S^1} = \int\limits_{S^1} d\varphi = 2\pi \neq 0$, значит наша форма не может быть точной

Замечание
Если взять окружность, которая не охватывает начало координат, то тогда интеграл получится равным нулю. Так как можно "заклеить" эту окружность диском D и интеграл $\int\limits_{S^1} \omega = \int\limits_{D} d\omega$ по формуле Стокса, а наша форма замкнутая, поэтому это выражение равно нулю.

Рассмотрим такое $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \mapsto S^1$, что $(x,y) \mapsto \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \in S^1$. Можем написать, что координата на окружности $\varphi = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ там, где $y > 0$. На окружности есть форма $d\varphi$, поэтому возьмем на плоскости 1-форму $F^*(d\varphi)$. Эта форма замкнута, так как $d(F^*d\varphi) = F^*(dd\varphi) = 0$, и она не может быть точной, так как тогда соответствующая форма на окружности была бы точной, следовательно мы получили пример замкнутой неточной формы.

Формула Остроградского-Гаусса

Следствие формулы Стокса
Рассмотрим случай трехмерной области $W^3 \subset \mathbb{R}^3$, край которой $\partial W^3 = M^2$ - гладкое двумерное замкнутое многообразие. Предполагается, что в некоторой большей окрестности $U \supset W^3$ задано векторное поле X. Это означает, что в каждой точке чуть большей окрестности "торчит" вектор x, который гладко зависит от точки пространства. Тогда, определен поток поля X через поверхность M. Рассмотрим внешнюю нормаль N к этой поверхности. Тогда, в каждой точке можно взять интеграл от скалярного произведения, умноженного на форму объема на поверхности $\int\limits_M (\langle X, N\rangle \cdot *1_M)$. С другой стороны, если в $\mathbb{R}^3$ фиксированы евклидовые координаты (x,y,z) и поле $X = (x^1, x^2, x^3)$, то для этого векторного поля определена функция,

которая называется дифергенцией этого поля $div\ X = \dfrac{\partial x^1}{\partial x} + \dfrac{\partial x^2}{\partial y} + \dfrac{\partial x^3}{\partial z}$.
Тогда имеет место следующая формула $\int\limits_{W^3} (div\ X \cdot *1_{\mathbb{R}^3}) = \int\limits_{M} (\langle X, N\rangle \cdot *1_M)$

Чтобы доказать эту формулу, необходимо подобрать форму $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, которая обладала бы двумя свойствами: $\omega|_{\partial W} = \langle X, N\rangle * 1_M$ и $\partial\omega = div\ X * 1_{\mathbb{R}^3}$
Опустим сначала индекс у нашего векторного поля $X \mapsto \omega^1 = x^1dx + x^2dy + x^3dz$ и получим 1-форму, но нам необходимо получить 2-форму. Для этого воспользуемся операцией $*$, которая в трехмерном случае отображает $\Omega^1 \mapsto \Omega^{3-1} = \Omega^2$. Поэтому $*\omega^1 = x^1dy \wedge dz + x^2dz \wedge dx + x^3dx \wedge dy$. Теперь, если взять дифференциал от получившейся формы, то

$$d(*\omega^1) = \frac{\partial x^1}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial x^2}{\partial y}dy\wedge dx\wedge dz + \frac{\partial x^3}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy = \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial x^3}{\partial z}\right)}_{div\ X}\underbrace{dx \wedge dy \wedge dz}_{1_{\mathbb{R}^3}}$$

Следовательно, эта форма удовлетворяет второму свойству.

Дивергенция векторного поля в криволинейных координатах
Это функция, которая получается после применения к векторному полю ряда операций. Необходимо опустить у векторного поля индекс и получить 1-форму, применить операцию $*$ и получить 2-форму, затем взять дифференциал и получить уже 3-форму, и, после повторного применения операции $*$ к полученной форме, мы получили функцию, которая называется дивергенцией векторного поля в произвольных координатах.

Классическая формула Стокса
Рассматривается двумерная поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ с краем $\partial M^2 = \cup\gamma_i$. В некоторой окрестности $U \supset M^2$ определено гладкое векторное поле X. Тогда, можно рассмотреть сумму интегралов по кривой от скалярного произведения векторного поля на вектор скорости этой кривой $\sum\limits_i \int\limits_\gamma \langle X, \dot{\gamma}_i\rangle dt$. Это выражение называется цирукляцией поля X по ∂M.
С другой стороны по векторному полю X определяется другое векторное поле $X \mapsto rot\ X$.
Формальное определение ротора из математического анализа:
в координатах (x, y, z) $rot\ X = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \Big(\dfrac{\partial x^3}{\partial y} - \dfrac{\partial x^2}{\partial z}; \dfrac{\partial x^1}{\partial z} - \dfrac{\partial x^3}{\partial x}; \dfrac{\partial x^2}{\partial x} -$

$\left.\frac{\partial x^1}{\partial y}\right)$.
Тогда, теорема Стокса утверждает, что

$$\sum_i \int\limits_\gamma \langle X, \dot{\gamma}_i \rangle dt = \int\limits_M \langle rot\ X, M \rangle * 1_M$$

Чтобы получить это утверждение, как следствие из формулы Стокса, необходимо построить 1-форму, которая удовлетворяла бы двум условиям: $\omega|_{\partial M} = \langle X, \dot{\gamma}_i \rangle dt$, а $d\omega|_M = \langle rot\ X, N \rangle * 1_M$. В качестве формы ω^1 возьмем форму, которая получается опусканием индекса из нашего поля X. Эта форма удовлетворяет необходимым нам свойствам.

6. Семинар 6

Когомологии де Рама

Если имеется пространство внешних дифференциальных форм $\Omega^p(M)$ на гладком многообразии M^m, тогда, на них действует оператор внешнего дифференцирования, который увеличивает степень форм на единицу $d_p : \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{p+1}(M)$ и обладает свойством $d \cdot d = 0$. Возникает цепочка $0 \mapsto \Omega^0(M) \overset{d_0}{\mapsto} \Omega^1(M) \overset{d_1}{\mapsto} ... \mapsto \Omega^p(M) \overset{d_p}{\mapsto} \Omega^{p+1}(M) \mapsto ....$ Тогда условие $d{\cdot}d = 0$ превращается в условие $d_p \circ d_{p-1} = 0$, откуда следует, что $Ker\ d_p \supset Im\ d_{p+1}$. Можно рассмотреть фактор-пространство $H^p =^{Ker\ dp} /_{Im\ d_{p-1}}$, которое называется пространством p-мерных когомологий M. Это определено при $0 \leqslant p \leqslant m$. Таким образом, с каждым многообразием M у нас ассоциирован набор линейных пространств $H^0(M)...H^m(M)$.

На прошлом семинаре мы обсуждали операцию переноса дифференциальных форм с помощью отображения $F : M \mapsto N$. Вспомним свойство $F^*d = dF^*$. Это свойство означает, что это отображение форму из ядра в форму из ядра и форму из образа в форму из образа.

Напоминание

$\omega \in Ker\ d_p$ - замкнутая форма, $\omega \in Im\ d_p$ - точная форма.
Тогда, если у нас есть $\omega \in \Omega^p(N)$, $d\omega = 0$, и мы рассмотрим $F^*\omega \in \Omega^p(M)$, то $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = F^*(0) = 0$
Если $\exists \alpha : \omega = d\alpha$, то тогда $F^*(\omega) = F^*(d\alpha) = dF^*(\alpha) \Rightarrow F^*(\omega)$ - точна.

Итак, точные формы переходят в точные, замкнутые - в замкнутые, поэтому корректно определено $F^* : H^P(N) \mapsto H^P(M)$. На самом деле, элементы гомологий - классы эквивалентности замкнутых форм $[\omega] = \omega + Im\ d_{p-1}$. Определим отображение $F^*([\omega]) = [F^*\omega]$. Докажем, что это определение корректно, то есть, если $\omega_1, \omega_2 \in [\omega]$ (когомологичны), то тогда $[F^*\omega_1] = [F^*\omega_2]$.

Формы принадлежат одному классу, следовательно $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$, но $\omega_1 - \omega_2 = Im\ d_{p-1}$, то есть $\exists \alpha :\ \omega_1 - \omega_2 = d\alpha$. Тогда, $F^*\omega_1 - F^*\omega_2 = F^*(\omega_1 - \omega_2) = F^*(d\alpha) = dF^*\alpha$. Значит, наше определение корректно.

Теорема

Если $M \simeq N$ два диффеоморфных многообразия, то тогда, $H^p(M) \simeq H^p(N)$, $\forall p$

Это следует из того, что существует $F : M \mapsto N$, $F^{-1} : N \mapsto M$ и $F \circ F^{-1} = id_N$, $F^{-1} \circ F = id_M$, или $(F^{-1})^* \circ F^* = id_{\Omega^p(M)}$, и, следовательно, на $H^p(M)$

Примеры

1. Нулевые когомологии произвольного многообразия $H^0(M)$. У нас имеется начало цепочки многоообразий $0 \overset{d_{-1}}{\mapsto} \Omega^0(M) \overset{d_0}{\mapsto} \Omega^1(M)$, тогда $H^0(M) = ^{Ker\ d_0} /_{Im\ d_{-1}}$, где $Im\ d_{-1} = \{0\}$, следовательно $H^0(M) = Ker\ d_0$. Вспомним, что $\Omega^0(0) = C^\infty(M)$ и $\forall f \in C^\infty \overset{d_0}{\mapsto} dF$. Поэтому, $Ker\ d_0 = \{f |\ df \equiv 0\}$. Эти функции - константы. Отсюда следует, что $H^0(M) = \mathbb{R}^k$, где k - количество компонент связности M.

2. Покажем, что $H^m(M) \neq 0$, если M - ориентируемое, компактное, замкнутое многообразие. Это верно, так как на любом таком многообразии можно ввести риманову метрику $M \subset \mathbb{R}^N$ и определить на нем форму объема $*1_M \in \Omega^m(M)$, существенная компонента которой, в ориентированных координатах $(x^1, ..., x^n)$, равна $\sqrt{det\ g_{ij}} > 0$. $d(*1_M) = 0$, так как $\Omega^m(M) \overset{d_m}{\mapsto} 0$. Поэтому, $Ker\ d_m = \Omega^m(M)$. Чтобы понять, как устроено фактор пространство, необходимо понять, как устроен образ оператора d_{m-1}. Мы знаем, что $*1_M \neq d\alpha$, так как если бы она являлась точной, то $\int\limits_M *1_M = \int\limits_M d\alpha = \int\limits_{\partial H = \varnothing} \alpha = 0$. С другой стороны, $*1_M = \sqrt{det\ g_{ij}} > 0$. Полученное противоречие показывает, что $*1_M$ замкнута и неточна. Следовательно, $H^m(M) \neq 0$.

Гомотопическая эквивалентность

Напоминание

Пусть X, Y - топологические пространства, $f_0, f_1 : X \mapsto Y$ - непрерывные. Тогда f_0 гомотопна f_1, если $\exists F : X \times I \mapsto Y$, где $I = [0, 1]$ и обладающее свойством: $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$. Если X, Y - гладкие многообразия, то тогда F - гладкое отображение.

Два топологических пространства X и Y называется гомотопически эквивалентными, если $\exists f : X \mapsto Y$ и $g : Y \mapsto X$ со свойствами $f \circ g \sim id_X$, а $g \circ f \sim id_Y$

Примеры отображений

1. Пусть $f_1 : X \mapsto Y = \mathbb{R}^n$, а $f_0 : X \mapsto * \in \mathbb{R}^n$ - отображение в точку. Иными словами $f_0(x) = \vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall x$, где $\vec{v}_0$ - фиксированный произвольный вектор. f_1 - произвольное. Проверим, что $f_0 \sim f_1$

Решение

Рассмотрим $F(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x) \in \mathbb{R}^n$. Значит $F : X \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$. $F(x,1) = f_1(x)$, $F(x,0) = f_0(x)$, следовательно F - гладкая гомотопия, которая соединяет f_0 и f_1.

2. Пусть $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto Y$, причем f - произвольное, $g(x) = y_0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ - отображение в точку. Покажем, что эти два отображения гомотопны.

Решение

Возьмем точку $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$. Тогда, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : \ f(x_0) = y_0$. Рассмотрим гомотопию $F(x,t) = f(tx_0 + (1-t)x)$. Если $t = 0$, то $F(x,0) = f(x)$, $t = 1$ - $F(x,1) = f_1 = g(x)$. Следовательно, мы построили гладкую гомотопию, которая соединяет f и g.

Примеры гомотопической эквивалентности пространства

1. $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке $\{\vec{0}\}$. Чтобы установить эту гомотопическую эквивалентность, необходимо построить отображения $f : \mathbb{R}^n \mapsto \{0\}$ и $g : \{0\} \mapsto \mathbb{R}^n$ такие, что $f \circ g \sim id_{\{0\}}$, $g \circ f \sim id_{\mathbb{R}^n}$, и будем считать, что $g(0) = \vec{0}$. $f \circ g(0) = id_{\{0\}}$, поэтому $f \circ g = id_{\{0\}}$. Рассмотрим теперь вторую композицию $g \circ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $g \circ f(\mathbb{R}^n) = \vec{0}$. Покажем, что это отображение гомотопно тождественному. Рассмотрим гомотопию $F(x,t) = tx$. Это отображение $\mathbb{R}^n \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$. $F(x,1) = x \Rightarrow F(x,1) = id_{\mathbb{R}^n}$, а $F(x,0) = 0 \Rightarrow F(x,0) = g \circ f(x)$. Мы доказали, что $\mathbb{R}^n$ гомоточпиески эквивалентно точке.

2. Возьмем $\mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} = X$ и $Y = S^{n-1}$. Показать, что $X \sim Y$.
Возьмем стандартное вложение в сферу единичного радиуса с центром в 0 $f : S^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ и $g : \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} \mapsto S^{n-1}$. Другими словами $g(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, и так как $x \neq 0$, то это отображение непрерывное и даже гладкое. Рассмотрим композиции $f \circ g : \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} \mapsto \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$, $f \circ g(x) = \dfrac{x}{\|x\|} \in \mathbb{R}^n$, и $g \circ f(y) = id_{S^{n-1}}$. Проверим, что $f \circ g$ гомотопна тождественному отображению $\mathbb{R}^n$ без точки в себя. Рассмотрим гомотопию $F(x,t) = tx + (1-t)\dfrac{x}{\|x\|}$. Тогда, $F(x,0) = \dfrac{x}{\|x\|}$, а $F(x,1) = x$. Так как $\|x\| \neq 0 \ \forall x$, то это непрерывное и гладкое семейство отображений. Точка $tx + (1-t)\dfrac{x}{\|x\|}$ не обращается в ноль $\forall t$, поэтому это отображение $F : X \times [0,1] \mapsto X$.

3. Рассмотрим $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k$ и найдем, какой сфере $S^?$ оно гомотопно.

Утверждение

Отношение гомотопической эквивалентности - отношение эквивалентности на топологических пространствах, то есть оно симметрично, рефлексивно и транзитивно. Рефлексивность очевидна, так как в качестве $f, g : X \mapsto X$ можно взять тождественное отображение. Симметричность - по определению. Для транзитивности, необходимо доказать, что если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$.

1) $X \sim Y$ означает, что $\exists f : X \mapsto Y$ и $g : Y \mapsto X$ такие, что $f \circ g \sim id_X$, $g \circ f \sim id_Y$

2) $Y \sim Z$ означает, что $\exists \alpha : Y \mapsto Z$ и $\beta : Z \mapsto Y$ такие, что $\alpha \circ \beta \sim id_Y$, $\beta \circ \alpha \sim id_Y$

3) Для $X \sim Z$ рассмотрим композицию $\tilde{f} = \alpha \circ f : X \mapsto Z$ и композицию $\tilde{g} = g \circ \beta : Z \mapsto Y$. Тогда композиция $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \alpha \circ f \circ g \circ \beta = \alpha \circ (f \circ g) \circ \beta \sim \alpha \circ id_Y \circ \beta = \alpha \circ \beta \sim id_Z$

Лемма Пуанкаре

Теорема 6.1. *Если у нас есть два гомотопически эквивалентных многообразия M и N, то тогда, $H^p(M) \simeq H^p(N)$ (группы их гомологий изоморфны)*

В этом случае, отображение $F^* : \Omega^p(N) \mapsto \Omega^p(M)$ вообще говоря не является тождественным на этих пространствах форм, но оказывается изоморфизмом на пространстве когомологий.

Следствие (Лемма Пункаре)
Когомологии $H^p(\mathbb{R}^n) = \left[\begin{array}{l} \mathbb{R},\ p = 0 \\ 0,\ p \geqslant 1 \end{array} \right.$

Рассмотрим форму $\omega \in \Omega^p(M)$ и выясним, существует ли форма $\alpha \in \Omega^{p-1}:\ d\alpha = \omega$. Это система дифференциальных уравнений специального вида. Если продифференцировать это уравнение второй раз, то по свойству внешнего дифференциала $d(d\alpha) = 0$, поэтому, если $\exists \alpha$, то $d\omega = 0$. Поэтому, условие замкнутости ω - необходимое условие разрешимости. Тогда, если $H^p(M) = 0$, то необходимое условие разрешимости является и достаточным.
Таким образом, $H^p(M)$ - "препятствия" к разрешимости уравнений $d\alpha = \omega$

Первые когомологии

Первые когомологии $H^1(M) =^{Ker\ d_1} \backslash_{Im\ d_0}$ при цепочке многообразий $\Omega^0(M) \overset{d_0}{\mapsto} \Omega^1(M) \overset{d_1}{\mapsto} \Omega^2(M)$. Другими словами, нам дана $\omega \in \Omega^1(M)$, $d\omega = 0$ и необходимо понять, существует ли гладкая функция на многообразии $f(x):\ df = \omega$.

Начнем с $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем точку A на плоскости. Мы хотим определить значение функции f в произвольной точке P с координатами (x, y). Рассмотрим для этого гладкую кривую γ, которая начинается в точке A и заканчивается в точке P, и положим $f(P) = f(x, y) = \int\limits_{\gamma} \omega \in \vec{\mathbb{R}}$.
Покажем, что интеграл не зависит от выбора кривой. Пусть у нас есть кривые γ_1 и γ_2, соединяющие точки A и P.
Пусть они пересекаются только в точках A и P. Тогда они ограничивают область D, гомеоморфную диску. Край этой области $\partial D = \pm\gamma_2 \cup \mp\gamma_1$ с учетом ориентации плоскости. Допустим $\partial D = \gamma_2 \cup -\gamma_1$. Тогда, $\int\limits_{\gamma_2 \cup -\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega - \int\limits_{\gamma_1} \omega$, но с другой стороны $\int\limits_{\gamma_2 \cup -\gamma_1} \omega = \int\limits_{\partial D} = \int\limits_{D} d\omega = 0$, следовательно $\int\limits_{\gamma_2} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega$.
Если они пересекаются в нескольких точках, то можно разбить кривые на несколько пересекающихся кусков, и интегралы по каждой области будут равны, следовательно равна и сумма. Поэтому, наша функция f корректно определена.
Покажем теперь, что $df = \omega$. Так как функция не зависит от выбора кривой, то возьмем кривую состоящую из двух кусков, первый - кривая $\gamma = (t, y_0)$ (отрезок параллельный оси x), второй - кривая $\delta = (x_0, t)$ (отрезок, параллельный оси y). $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$, тогда $\omega|_\gamma = \omega_1 dx$, $\omega|_\delta = \omega_2 dx$, и получается, что $f = \int^{x} \omega_1 dx + \int^{y} \omega_2 dy$.
Поэтому $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \omega_1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \omega_2$, следовательно $df = \omega$

7. Семинар 7

Ковариантное дифференцирование

Если у нас имеется тензорное поле $T \in \mathbb{T}^p_q(M)$, то $\dfrac{\partial T}{\partial x^i}$ не будет являться тензорным полем. Чтобы получить тензорное поле, необходима дополнительная структура, которая называется аффинной связностью на многообразии. Это соответсвие $\Gamma : (x^1, ..., x^n) \mapsto \Gamma^i_{jk}(x)$, которое системе координат сопоставляет набор символов Кристоффеля, которые гладко зависят от x в каждой карте. Если у нас есть две разные карты $(x^{1'}, ..., x^{n'}) \mapsto \Gamma^{i'}_{j'k'}(x)$, то им сопоставляются разные наобры величин, и они связаны по некоторому закону

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}(x) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \quad (*)$$

Если задан такой закон, то говорят, что задана афинная связность (символы Кристоффеля). Если задана афинная связность, то задано и ковариантное дифференцирование, которое устроено следующим образом

$$\mathbb{T}^p_{q+1} \ni \nabla_k T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^k} + \Gamma^{i_1}_{\alpha k} T^{\alpha i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \Gamma^{i_2}_{\alpha k} T^{i_1 \alpha\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \cdots + \Gamma^{i_p}_{\alpha k} T^{i_1\ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1\ldots j_q} \boxed{+}$$

$$\boxed{+}\ \Gamma^\alpha_{j_1 k} T^{i_1\ldots i_p}_{\alpha j_2\ldots j_q} + \Gamma^\alpha_{j_2 k} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1 \alpha\ldots j_q} + \cdots + \Gamma^\alpha_{j_q k} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}\alpha}$$

У операции ковариантного дифференцирования есть ряд свойст:

1) $\nabla : \mathbb{T}^p_q \mapsto \mathbb{T}^p_{q+1}$

2) $\nabla f = df$, f - функция

3) $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$, X - векторное поле

4) Ковариантная производная коммутирует с операцией свертки $\nabla(C^a_b T) = C^a_b(\nabla T)$

5) $\nabla(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) = \alpha_1 \nabla T_1 + \alpha_2 \nabla T_2$

Евклидова связность

Если дано многообразие с одной картой, например, $\mathbb{R}^n$, и фиксированы специальные координаты $(z^1...z^n)$, то тогда, в этих координатах можно положить $(z^1...z^n) \mapsto \Gamma^i_{jk} = 0$, в остальных координатах $(x^1...x^n) \mapsto \Gamma^{i'}_{j'k'}(x) = \dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}\dfrac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}$. Тогда, у нас получится связность, которая называется евклидовой.

Утверждение

Можно взять произвольные координаты в одной карте и задать в них произвольный набор функций $(x^1...x^n) \mapsto \Gamma^i_{jk}(x)$. В штрихованных координатах задать компоненты связности, с помощью формулы $(*)$ $(x^{1'}...x^{n'}) \mapsto \Gamma^{i'}_{j'k'}(x')$
Тогда, полученное соответствие в штрихованных координатах - афинная связность.

Утверждение

Пусть на многообразии имеются две связности $\Gamma, \tilde{\Gamma} : (x^1...x^n) \mapsto \Gamma^i_{ij}; \tilde{\Gamma^i_{ij}}$. По ним можно построить некоторое тензорное поле $A^i_{jk} = \Gamma^i_{ij} - \tilde{\Gamma^i_{ij}}$. Полученное выражение - тензорное поле типа $(1, 2)$

Посмотрим, как меняются компоненты этого выражения при замене координат $A^{i'}_{j'k'} = \Gamma^{i'}_{j'k'} - \Gamma^{\tilde{i'}}_{j'k'}$. Для разных связностей, второе слагаемое из формулы $(*)$ не зависит от Γ, поэтому для разных связностей оно будет одинаковым. Тогда

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} - \Gamma^{\tilde{i'}}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}{}_{(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^{\tilde{i}}_{jk})}\, A^i_{jk}$$

Мы доказали, что эта разность при замене координат меняется по тензорному закону, поэтому это тензорное поле $(1, 2)$.

Обратное утверждение

Пусть дана афинная связность $\Gamma : (x^1...x^n) \mapsto \Gamma^i_{jk}$ и тензорное поле $A \in \mathbb{T}^1_2(M)$. Рассмотрим сответствие $\Gamma_A(x^1...x^n) :\mapsto \Gamma^i_{jk}(x) + A^i_{jk}(x)$. Проверим, что Γ_A - афинная связность.

$$\Gamma^{i'}_{Aj'k'} = \Gamma^{i'}_{j'k'} + A^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(\Gamma^i_{jk} + A^i_{jk}) + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}$$

Значит, эти наборы величин меняются при замене координат так, как меняются компоненты связности, поэтому они образуют афинную связность.

Симметричные связности

Рассмотрим разность $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$. Полученное выражение - кососимметричное по нижним индексам тензорное поле. Оно называется тензором кручения афинной связности. У евклидовой связности тензор кручения равен нулю.

Пример несимметричной связности на плоскости

Пусть $\Gamma : (x, y) \mapsto \Gamma^1_{12} = x$, а остальные координаты равны нулю. Тензор кручения в этом случае $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21} = x - 0 \neq 0$, поэтому эта связность несимметричная.

Пример

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ заданы векторные поля $V = (e^x, 1)$ и $W = (0, e^y)$. Выясним, существует ли афинная связность Γ, такая что $\nabla V = \nabla W \equiv 0$

Напишем условие ковариантной постоянности $\nabla_k V^i = \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{\alpha k} V^\alpha$. На плоскости 8 неизвестных Γ^i_{jk}, так как $1 \leqslant i, j, k \leqslant 2$. В условии ковариантной постоянности 4 уравнения, но у нас есть еще условие $\nabla_k W^i = 0$ - еще 4 уравнения. Запишем эти уравнения, как уравнения на символы Кристоффеля.

$$i = 1,\ k = 1 :\ \Gamma^1_{11} V^1 + \Gamma^1_{21} V^2 = -\frac{\partial V^1}{\partial x}$$
$$i = 1,\ k = 2 :\ \Gamma^1_{12} V^2 + \Gamma^1_{22} V^2 = -\frac{\partial V^1}{\partial y}$$
$$i = 2,\ k = 1\ \Gamma^2_{11} V^1 + \Gamma^2_{21} V^2 = -\frac{\partial V^2}{\partial x}$$
$$i = 2,\ k = 2\ \Gamma^2_{12} V^2 + \Gamma^2_{22} V^2 = -\frac{\partial V^2}{\partial y}$$

Уравнение на W такие же, только в формулах необходимо заменить V на W. Получается система линейных уравнений с 8 уравнениями на 8 неизвестных. Она разрешима, когда ранг расширенной матрицы равен рангу исходной, в частности, когда матрица невырождена. Упорядочим уравнения и неизвестные

Γ^1_{11}	Γ^1_{21}	Γ^1_{12}	Γ^1_{22}	Γ^2_{11}	Γ^2_{21}	Γ^2_{12}	Γ^2_{22}	
V_1	V_2	0	0	0	0	0	0	$-\partial V^1/\partial x$
W^1	W^2	0	0	0	0	0	0	$-\partial W^1/\partial x$
0	0	V^1	V^2	0	0	0	0	$-\partial V^1/\partial y$
0	0	W^1	W^2	0	0	0	0	$-\partial W^1/\partial y$
0	0	0	0	V_1	V_2	0	0	$-\partial V^2/\partial x$
0	0	0	0	W^1	W^2	0	0	$-\partial W^2/\partial x$
0	0	0	0	0	0	V^1	V^2	$-\partial V^2/\partial y$
0	0	0	0	0	0	W^1	W^2	$-\partial W^2/\partial y$

Наша матрица получилась блочно-диагональной, на диагонали стоит один и тот же блок, и определитель нашей матрицы $det = \begin{vmatrix} V^1 & V^2 \\ W^1 & W^2 \end{vmatrix}^4$. Поэтому, если V и W линейно независимы, то решение существует и единственно. В нашем случае $det = e^x e^y \neq 0$, поэтому существуют единственные решения Γ, которые удовлетворяют нашему условию. Обозначим Γ_{11}^1 за A, Γ_{21}^1 за B, $-\dfrac{\partial V^1}{\partial x}$ за C, а $-\dfrac{\partial W^1}{\partial x}$ за D и решим систему

$$\begin{cases} V^1 A + V^2 B = -\dfrac{\partial V^1}{\partial x} \\ W^1 A + W^2 B = -\dfrac{\partial W^1}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x A + B = C \\ e^y B = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = e^{-x} C - e^{-x-y} D \\ B = e^{-y} D \end{cases}$$

Тогда

$\Gamma_{11}^1 = -e^{-2x}$	$\Gamma_{12}^1 = 1$	$\Gamma_{11}^2 = -e^{-2x}$	$\Gamma_{12}^2 = -1$
$\Gamma_{21}^1 = 0$	$\Gamma_{22}^1 = 0$	$\Gamma_{21}^2 = -e^{-x}$	$\Gamma_{22}^2 = -e^{-x}$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ есть n штук гладких векторных полей $V_1, ..., V_n$, которые линейно независимы в каждой точке, то есть $det\ (V_1 ... V_n) \neq 0$. Тогда, можно найти такую афинную связность, что $\nabla_k V_p^i \equiv 0$. Мы получим n^3 уравнений на n^3 неизвестных Γ_{jk}^i. У соответствующей матрицы при наших условиях определитель отличен от нуля, поэтому всегда можно подобрать афинную связность так, чтобы поля $V_1, ..., V_n$ были ковариантно постоянными.

Риманова связность

(M, g_{ij}) - риманово многообразие с римановой метрикой.

Утверждение

Существует единственная симметричная афинная связность, для которой $\nabla g \equiv 0$. Она называется римановой связностью. Компоненты этой связности Γ_{jk}^i выражаются через компоненты метрики

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x \alpha} \right)$$

Примеры

1. Пусть дано $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $ds^2 = \sum (dx^i)^2$. В евклидовой метрике компоненты метрики постоянны, поэтому все частные производные от метрики равны нулю, следовательно в соответствующих координатах $\Gamma_{jk}^i = 0$

Задача

На плоскости в полярных координатах задано векторное поле $V = (\cos\varphi, -\frac{1}{r}\sin\varphi)$. Найти ковариантную производную от V

Решение

Мы знаем, что $\Gamma^i_{jk}(x,y) \equiv 0$, поэтому пересчитаем $\Gamma^i_{jk}(x,y)$ в $\Gamma^i_{jk}(r,\varphi)$. $\Gamma^{i'}_{j'k'}(r,\varphi) = \dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}$, где $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^{1'} = r,\ x^{2'} = \varphi$, и есть связь между полярными и евклидовыми координатами $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Поэтому $\dfrac{\partial^2 x^1}{\partial x^{1'}\partial x^{1'}} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 x^2}{\partial x^{1'}\partial x^{1'}} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 x^1}{\partial x^{1'}\partial x^{2'}} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial r\partial\varphi} = -\sin\varphi$;
$\dfrac{\partial^2 x^2}{\partial x^{1'}\partial x^{2'}} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial r\partial\varphi}\cos\varphi$; $\dfrac{\partial^2 x^1}{\partial x^{2'}\partial x^{2'}} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} = -r\cos\varphi$; $\dfrac{\partial^2 x^2}{\partial x^{2'}\partial x^{2'}} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = -r\sin\varphi$

Теперь нам нужны первые производные полярных координат по евклидовым. Для этого необходимо записать матрицу Якоби. $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, а обратная матрица $\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$

Теперь выпишем символы Кристоффеля:

$\Gamma^{1'}_{1'1'} = 0$; $\Gamma^{1'}_{1'2'} = \Gamma^{1'}_{2'1'} = \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{1'}x^{2'}} = \cos(-\sin) + \sin\varphi\cos = 0$; $\Gamma^{1'}_{2'2'} = -r\cos^2\varphi - -r\sin^2\varphi = -r$; $\Gamma^{2'}_{1'1'} = 0$; $\Gamma^{2'}_{1'2'} = \Gamma^{2'}_{2'1'} = \dfrac{\sin^2\varphi}{r} + \dfrac{{}^2\varphi}{r} = \dfrac{1}{r}$; $\Gamma^{2'}_{2'2'} = \cos\sin - \sin\varphi\cos = 0$;

Так устроены символы Кристоффеля в полярных координатах. Осталось продифференцировать

$$\nabla_k V^i = \frac{\partial V^{i'}}{\partial x^{k'}} + \Gamma^{i'}_{\alpha' k'}V^{\alpha'} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \nabla_{1'}V^{1'} = \dfrac{\partial V^{1'}}{\partial r} + \Gamma^{1'}_{\alpha'1'}V^{\alpha'} = 0 \\ \nabla_{1'}V^{2'} = \dfrac{\partial V^{2'}}{\partial r} + \Gamma^{2'}_{\alpha'1'}V^{\alpha'} = \dfrac{1}{r^2}\sin\varphi + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\sin = 0 \\ \nabla_{2'}V^{1'} = \dfrac{\partial V^{1'}}{\partial\varphi} + \Gamma^{1'}_{\alpha'2'}V^{\alpha'} = -\sin - r(\dfrac{1}{r}\sin) = 0 \\ \nabla_{2'}V^{2'} = \dfrac{\partial V^{2'}}{\partial\varphi} + \Gamma^{2'}_{\alpha'2'}V^{\alpha'} = -\dfrac{1}{r}\cos\varphi + \dfrac{1}{r}(\cos\varphi) = 0 \end{array}\right.$$

Таким образом, ковариантная производная от нашего векторного поля равна нулю.

Сфера

Пусть у нас есть сфера $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. - угол между проекцией радиус-вектора и осью x, θ - угол между радиус-вектором и осью z. Тогда $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z =$

$R\cos\theta$. Производная радиус-вектора по θ имеет вид $r_\theta = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta)$, производная радиус-вектора по φ имеет вид $r_\varphi = (R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, 0)$, поэтому метрика имеет вид $ds^2 = R^2(d^2\theta + \sin^2\theta d)$

Посчитаем символы Кристоффеля. $g_{ij} \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin\theta \end{pmatrix}$, а обратная матрица $g^{ij} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2\sin\theta} \end{pmatrix}$$

Так как метрика диагональна, то $g^{i\alpha} = 0$, при $i \neq \alpha$, и производные по $\varphi = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0 \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11} (\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}) = 0 \\ \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} (\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2}(-R^2 2\sin\theta\cos\theta) = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{22} (\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}) = 0 \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} (\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2\sin^2\theta}(2R^2\sin\theta\cos\theta) = \cot\theta \\ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 0 \end{array}\right.$$

8. Семинар 8

Параллельный перенос тензорных полей

Возьмем многообразие M^m. В каждой точке этого многообразия есть касательное пространство, которое представляет собой линейное пространство векторов, то есть тензоров типа $(1,0)$. Два касательных пространства T_PM и T_QM в разных точках не связаны между собой. Чтобы сравнивать векторы $V \in T_PM$ и $W \in T_QM$ (тензоры, заданые в разных точках многобразия), необходимо рассмотреть параллельный перенос вдоль кривых.

Пусть точки P и Q соединены гладкой кривой $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = q$. Тензорное поле T на M называется параллельным вдоль кривой γ, если $\nabla_{\dot\gamma} T \equiv 0,\ \forall t$. Если $\gamma(t)$ имеет координатное представление $(x^1(t)...x^m(t))$, то тогда $\nabla_{\dot\gamma}T = \dot x^i \nabla_i T$ или
$(\nabla_{\dot\gamma}T)^j = \dot x^i \nabla_i T^j = \dot x^i(\dfrac{\partial T^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{\alpha i}T^\alpha) = \dot x^i \dfrac{\partial T^j}{\partial x^i} + \dot x^i \Gamma^j_{\alpha i} T^\alpha = \dfrac{dT^i}{dt} + \dot x^i \Gamma^j_{\alpha i}T^\alpha$. Тем самым мы видим, что $\nabla_{\dot\gamma}T$ для любого тензорного поля зависит только от значений $T|_{\gamma(t)}$.

Если $\nabla_{\dot\gamma}T = 0$, то система $\dfrac{dT^i}{dt} + \dot x^i \Gamma^j_{\alpha i}T^\alpha = 0$ называется системой уравнений параллельного переноса.

Пусть фиксирован $\vec v \in T_PM$. Запишем уравнение параллельного переноса $\nabla_{\dot\gamma}T = 0$ и увидим, что это система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для такой системы уравнений можно поставить задачу Коши. Для этого необходимо задать значение неизвестных функций $T^1(t)...T^m(t)$ в начальный момент времени. Начальный момент времени $t_0 = a$. Возьмем $T^i(a) = v^i$, где v^i - компоненты вектора в наших координатах. Задача Коши имеет единственное решение, так как уравнения линейные по T. Решения задачи Коши $T^i(t)$ определены $\forall t \in [a,b]$. Тогда, по определению $(T^1(b)...T^m(b)) = T(b) \in T_QM$ - результат параллельного переноса $\vec v \in T_PM$ вдоль γ в Q. Возникает линейное отображение $A_\gamma : T_PM \mapsto T_QM$.

Пример

$M = \mathbb{R}^n$, и $\Gamma^i_{jk} = 0$ - евклидова связность. Тогда, наши уравнения переноса имеют вид $\dfrac{dT^i}{dt} = 0$, следовательно $T^i(t) = const$

Примеры в известных метриках

(M, g_{ij}) - риманово многообразие с римановой связностью Γ^i_{jk}. Если у нас имеется изометрия, то она сохраняет параллельный перенос в соответствующих римановых связностях, так как изометрия на метриках действует как замена координат, значит она сохраняет символы Кристоффеля и уравнения параллельного переноса. Это позволяет решать задачи про параллельный перенос на многообразиях, которые изометричны евклидову пространству.

1. Рассмотрим на круговом конусе кривую γ, которая лежит на окружности, являющейся краем основания конуса. Рассмотрим точки $P = Q$ и рассмотрим параллельный перенос из точки P в точку Q.
Разрежем конус по образующей и развернем его на двугранный угол, у которого точки P и Q находятся на разных лучах. Тогда γ превратится в дугу соответствующей окружности. Вектор v в точке P превратиться в вектор $w = A_\gamma(v)$. Вектор w образует с лучом на развертке угол α. Если перейти обратно к конусу, то вектор w будет иметь такую же длину, и угол α - угол между v и w. Значит, при параллельном переносе происходит поворот на некоторый угол.

2. Рассмотрим сферу $S^2 \in \mathbb{R}^{⊭}$ и запишем уравнение параллельного переноса вдоль параллели $\gamma = (\theta = \theta_0, = t)$, где θ_0 - некоторый угол между вертикальной осью сферы и параллелью. $x^1(t) = \theta_0$, $x^2(t) = t$

Общий вид уравнения параллельного переноса: $\dfrac{dT^i}{dt} + \dot{x}^i \Gamma^j_{\alpha i} T^\alpha = 0$. Символы Кристоффеля для сферы мы вычисляли на прошлом семинаре. Поэтому, запишем уравнения $\dfrac{dT^1}{dt} - \sin\theta_0 \cos\theta_0 T^2 = 0$, и $\dfrac{dT^2}{dt} + \cot\theta_0(\dot{x}^1 T^2 + \dot{x}^2 T^1) = 0$. Так как $\dot{x}^1 \equiv 0$, то $\dfrac{dT^2}{dt} + \cot\theta_0 T^1 = 0$. Это система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Продифференцируем второе уравнение по t. $\ddot{T}^1 - \sin\theta_0\cos\theta_0 \dot{T}^2 = \ddot{T}^1 + \sin\theta_0 \cos\theta_0 \cot\theta_0 T^1 = \ddot{T}^1 + \cot^2\theta_0 T^1 = 0$. Решив это уравнение, получим $T^1(t) = A \sin\cos\theta_0 t + B\cos\cos\theta_0 t$. Чтобы найти T^2, необходимо взять производную от второго уравнения из системы и поделить на $\sin\theta_0\cos\theta_0$.
Тогда $T^2(t) = \dfrac{1}{\sin\theta_0\cos\theta_0}\dot{T}^1 = \dfrac{A}{\sin\theta_0}\cos\theta_0 t - \dfrac{B}{\sin\theta_0}\sin\cos\theta_0 t$.

Уравнение параллельного переноса на плоскости Лобачевского

Символы Кристоффеля в плоскости Лобачевского с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ имеют вид $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\dfrac{1}{y}$, $\Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = \dfrac{1}{y}$. Тогда $\begin{cases} \dot{T}^1 - \dfrac{1}{y(t)}(T^1\dot{y} + T^2\dot{x}) = 0 \\ \dot{T}^2 + \dfrac{1}{y(t)}(T^1\dot{x} + T^2\dot{y}) = 0 \end{cases}$

Утверждение о параллельном переносе в римановой связности

Представим, что M_1 и M_2 из $\mathbb{R}^n$ касаются по кривой γ, то есть $(1) M_1 \cap M_2 = \gamma$, (2) $T_{\gamma(t)}M_1 = T_{\gamma(t)}M_2$. Тогда, параллельный перенос вдоль γ в римановой связности (относительно индуцированной метрики) одинаков для M_1 и M_2. Это следует из того, что ковариантное дифференцирование векторного поля вдоль кривой $\nabla_{\dot{\gamma}}T = (\dfrac{dT}{dt})^T$.

Геодезические

По определению, кривая γ называется геодезической на соответствующем многообразии M с афинной связностью, если ее поле скоростей $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. В локальных координатах это уравнение записывается как система уравнений второго порядка $\ddot{x}^i + \Gamma^i_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$.

По теореме из дифференциальных уравнений, если у нас есть любое многообразие с афинной связностью, любая точка с координатами $(x_0^1 ... x_0^m)$ и любой касательный вектор с координатами $(v_0^1 ... v_0^m)$, то для этих начальных условий существует единственная в смысле дифференциальных уравнений геодезическая $\gamma(t)$, $\gamma(t_0) = P$, $\dot{\gamma}(t_0) = v$. Это кривая с параметризацией, решение системы уравнений $\ddot{x}^i + \Gamma^i_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$.

Пример

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой δ^i_j. Тогда символы Кристоффеля тождественно равны нулю. И в евклидовых координатах уравнение геодезических принимает вид $\ddot{x}^i = 0$. Решение таких уравнений - линейные функции, поэтому $x^i(t) = v^i_0 t + x^i_0$. Геодезические - линейно параметризованные прямые.

9. Семинар 9

Геодезические в аффинной связности

Если у нас есть многообразие M с афинной связностью Γ^i_{jk}: (M, Γ^i_{jk}), то в локальных координатах $(x^1 \dots x^n)$ уравнение геодезических пишется так: это такие кривые, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$, $i = 1 \dots dimM$. Мы посмотрели в прошлый раз на простейшие примеры, которые можно получить без вычислений. Теперь давайте посчитаем для плоскости Лобачевского, для этого понадобятся символы Кристоффеля на плоскости Лобачевского. Если у нас модель в верхней полуплоскости: $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ и первая координата у нас $x = x^1$, а вторая $y = x^2$, тогда $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{-1}{y}$ и $\Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = \frac{1}{y}$, остальные - нули.

Давайте посмотрим, как запишется уравнение геодезических, тогда в двумерном многообразии будет два уравнения: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\ddot{x} - \frac{1}{y(t)}(\dot{x}\dot{y} + \dot{y}\dot{x}) = \ddot{x} - \frac{2}{y}\dot{x}\dot{y} = 0$ $\ddot{y} + \frac{1}{y}(\ddot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0$. Для $x(t) = x_0$ и $y(t)$ неизвестная функция - первое уравнение выполнено, а второе уравнение превращается в $\ddot{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} = 0$ $y\ddot{y} - \dot{y}^2 = 0$ это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которая явно не зависит от переменной t. Его можно решить стандартными методами понижения порядка уравнения можно представить первую производную, как функция от y и тогда делается стандартная замена, уравнение решается. И тогда существует такая функция $y(t)$, которая является его решением и параметризует нашу вертикальную прямую как геодезическую на плоскость Лобачевского. Дальше нужно волспользоваться утверждением о том, что изометрия переводит геодезические в геодезические и вспомнить, что любая прямая с помощью изометрии может быть переведена в любую прямую. Изометрия устроена, как дробно линейные преобразования с вещественными коэффициентами и положительным определителем $w(z) = \frac{az+b}{cz+l}$ $ad_ibc > 0$, поэтому, чтобы перевести произвольную полуокружность в какую-нибудь стандратную вертикальную прямую, то нужно вывести дробно-линейное преобразование.

Пример: $z_1 \mapsto 0,\ z_2 \mapsto \infty\ z_1, z_2 \in \mathbb{R}\ w = \frac{-z+z_1}{z-z_2} \mapsto \det \begin{pmatrix} -1 & z_1 \\ 1 & -z_2 \end{pmatrix} = z_2 - z_1 > 0$

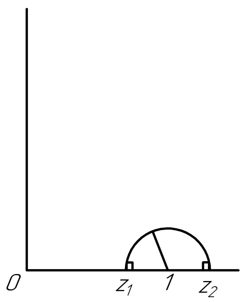

Рис. 1. Стандартная прямая и полуокружность с концевыми точками

Получится $z(w) = \frac{-z_2 w - z_1}{-w-1} = \frac{z_2 w + z_1}{w+1}$ - это дробно-линейное преобразование будет переводить нам вертикальную прямую в полуокружность. Тем самым мы доказали, что любая прямая на плоскости Лобачевского при подходящей параметризации является геодезической, а то, что других геодезических нет, вытекает из теоремы существования единственности, потому что из каждой точки мы можем провести прямую "в смысле Лобачевского".
Без вычислений можно было бы обойтись, воспользовавшись следующим утверждением:

Утверждение:
M - Риманово многообразие, есть его изометрия $f = M \mapsto$, множество неподвижных точек $f =$ кривой $\gamma(t) \subset M \Rightarrow \gamma(t)$ - в подходящей параметризации - геодезическая на M, кривая, конечно, гладкая.
Нужно рассмотреть кривую, рассмотреть ее произвольную начальную точку $\gamma(t_0)$ и вектор скорости в ней $\dot{\gamma}_{t_0}$, тогда существует геодезическая $\sigma(s)$, которая выходит из этой самой точки в этом самом направлении. Но поскольку наша γ состоит из неподвижных точек, то наша изометрия не только оставляет нашу точку $\gamma(t_0)$ на месте, но и оставляет на месте $\gamma(t)$ для любого t: $f(\gamma(t_0)) = f(\gamma(t_0))\ f(\gamma(t)) = \gamma(t) \forall t$, а это означает, что дифференциал оставляет на месте вектор скорости $df(\dot{\gamma}(t_0)) = \dot{\gamma}(t_0)$. По теореме о существовании единственности: геодезическая переходит в себя под действием изометрии, то есть состоит из неподвижных точек $f(\sigma(s)) = \sigma(s)$, а значит она совпадает с нашей кривой $\sigma(s) = \gamma(t)$ (как множество). Значит, γ после перепараметризации превращается в эту σ. И тогда доказывать, что прямые на плоскости Лобачевского есть геодезические или что большие круги на сфере есть геодезические, можно ссылаясь на это утверждение, просто нужно предъявить изометрию, которая оставляет соответствующую кривую на месте. В случае Лобачевского: $(x, y) \mapsto (-x, y)$. В случае сферы: $z = 0$, $(x, y, x) \mapsto (x, y, -z)$

Нормальные координаты

Геодезические также используются для построения хороших координат на многообразии.

Определение:
Пусть M - многообразие с афинной связностью $P \in M$, мы рассматриваем касательное пространство в многообразии в этой точке T_PM. Мы знаем, что для каждого касательного вектора $\forall v \in T_PM \exists$ геодезическая $\gamma_v(t)$: $\gamma_v(0) = P$ и $\dot{\gamma_v}(0) = v$. И из каждой точки вдоль каждого направления выходит единственная геодезическая $\gamma_v(t)$. Возникает отображение, которое называется экспоненциальный отображением отображением с центром в точке P. Это отображение определено в окрестности нуля касательного пространства: $exp_P : UCT_PM \mapsto$, U - окрестность нулевого вектора в T_PM и устроено оно очень просто: $U \ni v \mapsto \gamma_v(1)$. Чтобы понять, что для малых векторов v такая точка определена, можно просто заметить, что $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$. Если $\gamma(t)$ - геодезическая $\Leftrightarrow \gamma(\lambda t)$ тоже геодезическая $\lambda \neq 0$, но тогда геодезическая с растянутым параметром как раз удовлетворяет в нулевой точке нужным начальным условиям: $\gamma_v(\lambda t) \mid_{t=0} = \gamma_v(0) = P$, а $\dot{\gamma}_v(\lambda t) \mid_t = 0 = \lambda v = \lambda\dot{\gamma}_v(0)$. Возникает такое отображение, на лекциях доказывается, что оно регулярно в начале координат: exp_P - регулярно в $v = 0$. $exp_{p\dot{p}} \mid_U$ - диффеоморфизм и значит оно задает некоторые координаты, которые принято называть нормальными координатами.
Но более формально поступают следующим образом: Фиксируем в T_PM базис $e_1 \dots e_n$ (ортонормированный, если M - Римановo) и тогда $v \in T_pM$ $V = V^ie_i$, $exp_p(v) \mapsto (v^1 \dots v^n)$, $exp_p \in M$ - **нормальные координаты**

Свойства нормальных координат

1) Во-первых, геодезические $\gamma_v(t)$ в этих координатах имеют вид: $\gamma_v(t) = vt$.

2) Если у нас M - многообразие Римана, то $(g_{ij})(P) = (\delta_{ij})$

3) Символ Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}(P) = 0$
   $\forall v \in T_PM$: vt - геодезическая, то есть удовлетворяет уравнениям геодезической: $x^i(t) = v^it$ $\Gamma^i_{jk}(vt)v^jv^k = 0$, а $P = \gamma_v(0)$ $t = 0$, $\Gamma^i_{jk}(P)v^iv^k = 0$, при фикированном i $\forall v \in T_PM \Rightarrow \Gamma^i_{jk}(P) = 0$

Задача про геодезические

Доказать, что:

Утверждение:

$\forall$ аффионной связности Γ $\exists$ симметричная аффинная связность $\widetilde{\Gamma}$ с такими же геодезическими.

Если Γ^i_{jk} - аффинная связность и A^i_{jk} - тензор типа (1, 2), то $\Gamma^i_{jk} + A^i_{jk}$ - тоже аффинная связность. Мы знаем, что $\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = \Omega^i_{jk}$ порождает тензор кручения. Γ - симметричный, если Ω^i_{jk}=0. Нужно прибавить подходящий кососимметрический тензор: Итак, пусть Γ^i_{jk} - произвольная связность, Ω^i_{jk} - ее тензор кручения, тогда $\widetilde{\Gamma^i_{jk}} = \Gamma^i_{jk} + \Omega^i_{jk}$, $\widetilde{\Gamma^i_{jk}} - \widetilde{\Gamma^i_{kj}} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} + \frac{\Omega^i_{jk} - \Omega^i_{kj}}{2} = \Omega^i_{jk} - \Omega^i_{jk} = 0$

Симметрияная аффинная связность $\Gamma^i_{jk} \mapsto \Gamma^i_{jk} - \frac{\Omega^i_{jk}}{2}$? где $\frac{\Omega^i_{jk}}{2}$ - кососимм. тензор (1, 2)

Но у нас была другая задача: нужно построить симметричную аффинную связность, но с такими же геодезическими. Теперь осталось проверить, что если Γ^i_{jk} - произвольная аффинная связность, а A^i_{jk} - кососимметрический по нижним индексам тензор (1, 2), то тогда $\widetilde{\Gamma} = \Gamma + A$ и Γ - имеют одинаковые геодезические. Достаточно написать уравнения для геодезических: $\ddot{x}^i + \widetilde{\Gamma^i_{jk}} \dot{x}^j \dot{x}^k = \ddot{x}^j (\Gamma^i_{jk} + A^i_{jk}) \dot{x}^j \dot{x}^k = \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + A^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k$, A^i_{jk} - кососимметрично по j и k, а $\dot{x}^j \dot{x}^k$ - симметрично по j и k, тогда $A^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$. А значит уравнение геодезических связностей гамма с волной совпадает с уравнением геодезических связностей с гамма. Значит, у них решения одинаковые и геодезические тоже. Тем самым для произвольной аффинной связности построили связность, которая имеет точно такие же геодезические и является симметрической.

Эта же идея транслируется и в других задачах. Можно поступить наоборот. Можно взять плоскость со стандартными координатами x и y: $\mathbb{R}^2(x, y)$ и рассмотреть связность $\Gamma^i_{jk}(x, y)$, $\Gamma^1_{12} = x$, $\Gamma^1_{21} = -x$, остальные - нули.

Требуется найти геодезические Γ на плоскости. Ответ: прямые.

Если в качестве связности $\widetilde{\Gamma}$ возьмем евклидову связность, а в качестве тензора A^i_{jk} рассмотрим кососимметрический тензор, у которого $A^1_{12} = -A^1_{21} = x$, остальные - нули. То тогда получается, что мы к евклидовой связности прибавили кососимметрический тензор, он на геодезические не влияет, значит геодезические такие же, как и евклидовы связности. А евклидовы связности геодезические это прямые и только они. Тем самым мы можем получить ответ без вычислений.

Тензор кривизны и тензор Римана

Если вы помните, как только заходит речь об аффинных связностях, обсуждается вопрос: Γ^i_{jk} - аффинная связность $\exists$ ли координаты $(x^1 \dots x^n) \mid \Gamma^i_{jk}(x) \equiv 0$?
Препятствие - тензор кручения $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \in \Pi^1_2$. Если $\Omega^i_{jk} \equiv 0$, то $\nexists$ координат (евклидовы координаты для связности)
Что с симметричными связностями? Любая ли симметричная связность может быть с помощью преобразования координат превращена в нулевую. Ответ: нет и препятсвие для этого - тензор кривизны. Рассматривается гладкое многообразие с аффинной связностью (M, Γ), X - векторное поле. $(\bigtriangledown_p \bigtriangledown_q - \bigtriangledown_q \bigtriangledown_p)X^i = R^i_{\alpha pq}X^\alpha + \underset{\text{от тензора кручения}}{\overset{\text{слагаемое, зависящее}}{\dots}}$
Если $\exists$ евклидовы координаты, то слева - ноль. В евклидовых координатах ковариантная производная - это обычная частная производная, частная производная коммутирует, значит слева стоит 0. Если существуют евклидовы координаты, значит, связность симметричная, поэтому слагаемое, зависящее от тензора кручения тоже обращается в ноль. А значит должно обращаться в ноль и $R^i_{\alpha pq}X^\alpha$, поскольку это равенство верно для произвольного векторного поля X, слева и справа стоят векторные выражения, то $R^i_{\alpha pq}X^\alpha$ - тензор кривизны аффинной связности (1, 3). Записывается через

$$R^i_{\alpha pq} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \Gamma \cdot \Gamma - \Gamma \cdot \Gamma$$

. Симметрия по второй паре нижних индексов $R^i_{\alpha pq} = -R^i_{\alpha qp}$
Если у вас многообразие Римана, то (M, g_{ij}), то $\Gamma_P jk^i$ - симметричная риманова связность. Обычно рассматривают тензор

$$g_{i\beta}R^\beta_{\alpha pq} = R_{i\alpha pq} \in \Pi^0_4 \text{ - \textbf{тензор Римана}}$$

(1) $R_{i\alpha pq} = -R_{i\alpha qp}$, (2) $R_{i\alpha pq} = -R_{\alpha ipq}$, (3) $R_{i\alpha pq} = R_{pqi\alpha}$, (4) $R_{i\alpha pq} + R_{ipq\alpha} + R_{iq\alpha p} = 0$ - **тождество**

Теорема 9.1. *Существуют координаты* $(x^1 \dots x^n)$, *в которых метрика имеет вид* $g_{ij}\delta_{ij} \Leftrightarrow R_{i\alpha pq} = 0$

Количество независимых компонентов?
p и q принимают $\frac{n(n-1)}{2} = N$ различных значений. Точно так же можно сказать $i\alpha$ тоже $\frac{n(n-1)}{2} = N$, то $R_{i\alpha pq}$ $R_{IP} = R_{PI}$, I и P пробегают v различных значений. Тогда количество независимых компонентов: $\frac{N(N+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}(\frac{n(n-1)}{2} + 1)\frac{1}{2} = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$

Лемма о тождестве Якоби

Имеет место следующее. Если среди $i\alpha pq$ есть совпадающие, то тождество Якоби (4) следует из (1), (2) или (3). Оно будет являться независимым, только если все 4 индекса разные.
Допустим, $i = \alpha$: $R_{iipq} + R_{ipqi} + R_{iqip} = 0 - R_{ipiq} + R_{iqip} = 0$
$p = q$: $R_{i\alpha pp} + R_{ipp\alpha} + R_{ip\alpha p} = R_{ipp\alpha} = R_{ipp\alpha} - R_{ipp\alpha} = 0$
$i = p$: $R_{i\alpha iq} + R_{iiq\alpha} + R_{iq\alpha i} = R_{i\alpha iq} - R_{iqi\alpha} = 0.$
Количество уравнений $C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
Количество независимых компонент $= \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = n(n-1)(\frac{3(n^2-n+2)-(n-2)(n-3)}{24})$
$n(n-1)\frac{(2n^2+2n)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$
Давайте посмотрим, что получается для разных размерностей.

n	1	2	3	4	...
Кол-во компонент	0	1	6	20	...

Соображения размерности

Пусть есть многообразие и Риманова метрика (M, g_{ij}), мы хотим подобрать координаты, такие, что $g_{ij}\delta_{ij}$ в окрестности. Давайте будем рассуждать. Сонгать их в одной точке $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$- это просто линейная замена координат. Это фактически методы линейной алгебры, за это отвечает $(x^1 \dots x^n) \mapsto (x^{1\prime} \dots x^{n\prime})$, то есть $\frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^i}$. Чтобы $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$, нужно $\frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^i \partial x_j}$. В принципе мы знаем, что так можно сделать, но давайте поймем из соображений размерности, как мы это можем сделать.
Условий: $\frac{n(n-1)}{2}$ элементов g_{ij} и n производных, то есть всего получается: $\frac{n^2(n-1)}{2}$ условий. А сколько параметров?
Параметры: n функций $x^{i\prime}$, $\frac{n(n-1)}{2}$ вторых производных, следовательно их $n^2(n-1)2$.
Количество условий совпало с количеством параметров.
Следующий шаг:
Условия: $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x_j} \mid_P = 0$
Параметры: $\frac{\partial^3 x^{i\prime}}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}$
Условий: $(\frac{n(n+1)}{2})^2$
Параметров: n функций, а производных $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant j+1 \leqslant k+2 \leqslant n+2$ - этих наборов будет $C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} = \frac{(n+2)(n+1)}{6}$ Итак, Условия - Параметры

$= n^2(n+1)\frac{n+1}{4} - \frac{n+2}{6} = n^2(n+1)\frac{3n+3-2n-4}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$
То есть количество препятсвий как раз равняется количеству независимых компонентов тензора Римана. Это совпадение не случайно. Но мы ничего не доказали, мы просто посчитали два разных числа, которые совпали.

Свертки тензора Римана

Широко используется две свертки:
1) тензор Риччи (Ricci) $R^i_{\alpha iq} = Ric_{\alpha q} = g^{i\beta}R_{\beta\alpha iq}$. Легко проверяется, что он симметричный для Римановой связности и он имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ компонент и в трехмерном случае 6 компонент определяются тензором Риччи, а в двумерном случае все определяется скалярной кривизной.
2) Скалярная кривизна $R = g^{i\beta}g^{i\alpha}R_{\beta\alpha i}$. Скалярная кривизна, на то и называется скалярной, так как это функция (скаляр).

10. Семинар 10

Свертки тензора Римана и тензора кривизны

Мы продолжаем разговаривать про тензор кривизны, пора что-нибудь посчитать. Распишем следующую формулу подробнее:

$$R^i_{\alpha pq} = \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha q}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha p}}{\partial x^q} + \Gamma^i_{\beta p} \cdot \Gamma^\beta_{\alpha q} - \Gamma^i_{\beta q} \cdot \Gamma^\beta_{\alpha p}$$

В ней нужно было расставить индексы. В ней два слагаемых с частными производными от символов Кристоффеля и два слагаемых суммирования по символам Кристоффеля.

Сначала займемся двумерным случаем. $n = 2$

Поскольку у нас имеется всего два значения индексов: 1 и 2, то из косой симметрии вытекает, что $i \neq j$ и $p \neq q$, $0 \neq R_{ijpq}$. Поэтому у нас есть единственная существенная компонента R_{1212}, которая может отличаться от нуля, а остальные компоненты, с неравными друг другу i, j и p, q, получаются из нее перестановками $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$. Так устроен двумерный случай. Остальные всегда нули.

Оказывается, в двумерном случае скалярная кривизна в два раза отличается от Гауссовой кривизны: **скалярная кривизная пропорциональна Гауссовой кривизне**. Если это доказать, то мы получим еще одно доказательство теоремы Гаусса, о том, что Гауссова кривизна определяется метрикой, потому что скалярная кривизна определяется тензором Римана, он определяется метрикой, а значит и Гауссова кривизна определяется ею же, то есть сохраняется при изометрии.

Давайте эту задачу решим. Во-перых, нужно понять, как устроена скалярная кривизна в двумерном случае. Итак, скалярная кривизна R — полная свертка тензора Римана, т.е. мы сворачиваем первый и третий, второй и четвертый его индексы, получаем: $R = g^{i\alpha} g^{j\beta} R_{\alpha\beta ij} \boxed{=}$. Давайте разбираться, что здесь получится. У нас на самом деле тут не 16 слагаемых (16 потому что каждый индекс пробегает 2 независимых значения), а 4. Все эти слагаемые получаются для 4 ненулевых компонент $\boxed{=} R_{1212}(g^{11}g^{22} - g^{21}g^{21} - g^{12}g^{12}) = \frac{2R_{1212}}{\det |g_i j|} = 2R_{1212} \det g^{ij}$. Эта формула от координат не зависит.

Рассмотрим нашу двумерную поверхность в $M^2 \subset R^3$. Мы введем специальные координаты на этой поверхности, связанные с касательной плоскостью. Поскольку мы считаем скалярную кривизну - это функция, поэтому достаточно посчитать ее в точке, проверить совпадение с Гауссовой кривизной, тогда это равенство будет

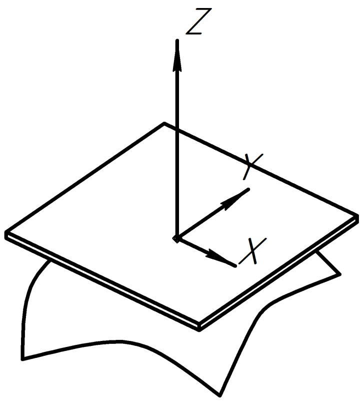

Рис. 2. Двумерная поверность

верное на всей поверхности. Мы введем оси X и Y как раз в этой касательной плоскости, ось Z направим по нормали, и будем считать, что наша поверхность есть график гладкой функции в этой самой системе координат. Это всегда можно сделать, потому что у нас как раз проекция на касательную плоскость в окрестности такой точки - она взаимно однозначна, только если поверхность регулярна, а мы как раз такую и рассматриваем.

Эти координаты хороши, так как: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \mid_p = f_y \mid_p = 0$, поэтому легко посчитать первую и вторую форму поверхности. Для этого нам нужно параметризовать нашу поверхность - задать ее параметрически: $r(x, y) = (x, y(f(x, y)))$ и посчитать частные производные радиус-вектора по x: $r_x(1, 0, f_x)$ и по y: $r_y = (0, 1, f_y)$, тогда наша матрица первой фундаментальной формы, она же матрица метрики, будет иметь вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f_x^2, & f_xf_y \\ f_xf_y, & 1+f_y^2 \end{pmatrix},\ (g_{ij})(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем формулу: $R = 2R_{1212}\det g^{ij}$. $\det g^{ij} = 1 + f_x^2 + f_y^2$, поэтому обратная матрица: $g^{ij} = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2}\begin{pmatrix} 1+f_y^2, & -f_xf_y \\ -f_xf_y, & 1+f_x^2 \end{pmatrix}$. Еще нужно посчитать вторую фундаментальную форму. Для этого найдем нормаль в точке P: $N = (0, 0, 1)$, $r_{xx} = (0, 0, f_{xx})$, $r_{xy} = (0, 0, f_{xy})$, $r_{yy} = (0, 0, f_{yy})$, поэтому матрица второй фундаментальной формы: $q_{ij} = \begin{pmatrix} < r_{xx}N > & < r_{xy}N > \\ < r_{xy}N > & < r_{yy}N > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}, & f_{xy} \\ f_{xy}, & f_{yy} \end{pmatrix}$ - получаем матрицу Гесса, т.е. вторая форму очень хорошо устроена здесь. Гауссова кривизна $K = \frac{\det Q}{\det G} = \frac{f_{xx}f_{yy}}{1+f_x^2+f_y^2}$, а Гауссова кривизна в точек P это вообще определитель матрицы Гесса. $K(P) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}$. Заметим сразу, что символы Кристоффеля в этой точке равняются нулю, потому что $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \mid_P = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{jk}(P) = 0$.

Возвращаемся к нашей формуле. В нашей точке P тензор Римана может быть вычислен просто как разность производных от символов Кристоффеля.

$$R^i_{\alpha pq}(P) = \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha q}}{\partial xp} - \frac{\partial \Gamma^i_{alphap}}{\partial xq}$$

Нам нужно посчитать компоненту $R_{1212} = g_{1\alpha} R^{\alpha}_{212}$, где α индекс суммирования. Поскольку считать мы будем в точке P, то $R_{1212}(P) = g_{1\alpha}(P) R^{\alpha}_{212} \boxed{=}$, в точке P наша матрица единичная, поэтому $\boxed{=} R^1_{212}$, так как $g_{ij}(P) = \delta ij$. Расставим индексы: $R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2}$. Нужно посчитать два символа Кристоффеля и их продифференцировать.

$$\boxed{\Gamma^1_{22}} = \frac{1}{2} g^{1\alpha} (\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^2}) = \frac{1}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)} ((1 + f_y^2)(2 f_{xy} f_y + 2 f_x f_{yy} - 2 f_y f_{yx}) - f_x f_y \cdot 2 f_y f_{yy}) =$$

$$= \frac{f_x (f_{yy} + f_y^2 f_{xy} - f_y^2 f_{yy})}{1 + f_x^2 + f_y^2} = \boxed{\frac{f_x f_{yy}}{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{21}} = \frac{1}{2} g^{1\alpha} (\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\alpha}) = \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)} ((1 + f_y^2)(2 f_x f_{xy}) - f_x f_y (2 f_y f_{yx})) =$$

$$= \frac{f_x}{1 + f_x^2 + f_y^2} (f_{xy} + f_y^2 f_{xy} - f_y^2 - f_{yx}) = \boxed{\frac{f_x f_{xy}}{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{12} = \frac{f_x f_{xy}}{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \boxed{\Gamma^1_{22} = \frac{f_x f_{yy}}{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

Теперь нужно дифференцировать.

$$\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x} |_P = \frac{(f_{xx} f_{yy} + f_x f_{yyx})(1 + f_x^2 + f_y^2) - (2 f_x f_{xx} + 2 f_y f_{yx})(f_x f_y y)}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = f_{xx} f_{yy}$$

$$\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x} |_P = \frac{(f_{xy} f_{xy} + f_x f_{xyy})(\dots) - f_x f_{xy} (\dots)_x}{(\dots)^2} = f_{xy} f_{xy}$$

$$R^1_{212} |_P = R_{1212} |_P = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

Поэтому скалярная кривизна, которая равняется $R = 2 R_{1212} \det g^{ij} = 2(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)$, а Гауссова кривизна в точке P: $K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \Rightarrow \boxed{R = 2K}$. Конечно, мы проверили это только для одной точки, но она была произвольной, а слева и справа в этом равенстве стоят скалярные величины, то значит это равенство имеет место всегда.

Тензор Риччи

Напомню, что тензор Риччи это есть свертка тензора кривизны

$$Ric_{ij} = R^{\alpha}_{i\alpha j} = g^{\alpha\beta} R_{\beta i\alpha j} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha i\beta j}$$

Кстати, отсюда вытекает, что тензор Риччи тензора Римана - симметричен $= g^{\alpha\beta} R_{\beta j\alpha i} = g^{\beta\alpha} R_{\beta j\alpha i} = Ric_{ji}$.
Теперь посмотрим, что происходит с тензором Риччи в двумерном случае: $n = 2$. Оказывается, имеет место следующее утверждение: $Ric_{ij} = K g_{ij}$, K - Гауссова кривизна. У тензора Римана имеется ровно одна существенная компонента, она и определяется Гауссовой кривизной. Равенство этих двух билинейных форм проще всего проверить в тех же самых координатах. Рассмотрим координаты (x, y) - в касательной плоскости $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ $g^{ij}(P) = \delta^{ij}$ $Ric_{ij} = g^{11} R_{1i1j} + g^{22} R_{2i2j} = R_{1i1j} + R_{2i2j}$, поэтому $Ric_{11} = R_{2121} = R_{1212}$, $Ric_{12} = 0 = Ric_{21}$, $Ric_{22} = R_{1212}$, поэтому матрица $(Ric_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_{1212}$, а в наших координатах $R_{1212} = K$, тем самым мы доказали, что в наших координатах: $\boxed{(Ric)_{ij} = (\delta_{ij})K}$. Если оно имеет место в одной системе координат, то оно будет иметь место и в другой системе координат. Мы выяснили, что тензор Риччи в двумерном случае полностью определяется просто метрикой и Гауссовой кривизной.

Задача на вычисление тензора кривизны

Вычислить тензор кривизны на двумерной сфере S^2 в сферических координатах. Скалярная кривизна $= 2K\boxed{=}$, а Гауссова кривизна двумерной сферы радиуса r это есть произведение главных кривизн, а у сферы все главные кривизны одинаковые, поэтому они равны обе по $+\frac{1}{r}$ или по $-\frac{1}{r}$, поэтому $K = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \boxed{=}\frac{2}{r^2}$. Скалярная кривизна $R = 2R_{1212}/\det g_{ij}$. Мы знаем, что сфера это двумерная поверхность, то есть двумерное Риманово многообразие, для него ненулевые компоненты это $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$, остальные - нули. Поэтому, чтобы посчитать тензор кривизны, нам нужно посчитать R_{1212}. Скалярную кривизну мы знаем, если мы найде определитель метрики, то мы найдем R_{1212}.
В качестве первой координаты возьмем угол с вертикальной осью, вторая координата - φ, тогда наши сферические координаты в пространстве: $x = r\sin\theta\cos\varphi$,

$y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$, поэтому евклидова метрика у этих координат имеет вид:

$$\partial r = (sin\theta, \cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\partial\theta = (r\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)$$

$$\partial\varphi = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

Если взять соответствующую матрицу Грама, то

$$d_1^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

А сфера задается условием $r = const$, поэтому сферическая метрика: $d_1^2 = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$, $\det(g_{ij}) = r^4\sin^2\theta$, получаем уравнение: $\frac{1}{r^2} = \frac{2R_{1212}}{r^4\sin^2\theta} \Rightarrow R_{1212} = \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta$ Итак, в двумерном случае скалярная кивизна совпадает с Гауссовой кривизной и определяет единственную компоненту нашего тензора, а тензор Риччи пропорционален метрике. В трехмерной случае все устроено существенно сложнее.

Утверждение

При $n = 3$ компоненты тензора Римана полностью определяются компонентами тензора Риччи и метрикой.

(Ric_{ij}) - симметричная билинейная форма, то есть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$ - 6 компонент и у тензора Римана их тоже 6. И возникает естественное желание, чтобы одно выражалось через другое - это действительной так. $\{Ric_{ij} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha i\beta j}$ система уравнений на неизвестные R_{ijpq}

R_{ijpq} $i \leqslant j, p \leqslant q$ $(i,j) < (p,q)$ R_{1212} R_{1213} R_{1223}; R_{1313} R_{1223} R_{2323} - вот все 6 компонент тензора кривизны. Будут возникать уравнения такого типа:

$$Ric_{12} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha 1\beta 2} = g^{\alpha\beta}R_{1\alpha\beta 2} = g^{21}R_{1212} + g^{23}R_{1223} + g^{33}R_{1323}$$

Таких уравнений нужно написать 6 штук. Напишем еще одно:

$$Ric_{13} = g^{\alpha\beta}R_{1\alpha}R_{\beta 3} = g^{21}R_{1213} + g^{22}R_{1223} + g^{31}R_{1313} + g^{32}R_{1223}$$

$$Ric_{11} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha 1\beta 1} = g^{21}R_{1212} + g^{23}R_{1213} + g^{33}R_{1313}$$

Возникает линейная система уравнений. 6 уравнений - 6 неизвестных. Матрица состоит из g^{ij} в соответствующих местах.

R_{1212}	R_{1213}	R_{1223}	R_{1313}	R_{1323}	R_{2323}
g^{22}	g^{23}	0	g^{33}	0	0
g^{21}	0	g^{23}	0	g^{33}	0
0	g^{21}	g^{22}	g^{31}	g^{32}	0
...	...	...	...	...	...

Нужно эту матрицу дописать и убедится, что определитель не ноль, а мы знаем, что определить матрицы $\det(g^{ij}) \neq 0$, потому что это матрица метрики. Предлагается это доделать самим...

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ