МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЧАСТЬ I

СЕРГЕЕВ
ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ОЦИФРОВКУ КОНСПЕКТА СТУДЕНТКУ
ФАКУЛЬТЕТА БИОИНЖЕНЕРИИ И БИОИНФОРМАТИКИ МГУ
НОГИНУ ДАРЬЮ СЕРГЕЕВНУ

Доказательство. Пусть $x_0(0) = 0$, тогда

$$x(0) = x(T) = x_0(T) + \mathcal{X}(T,0)x(0)$$

$$(\mathcal{X}(T,0) - \mathcal{I}) \cdot x(0) = -x_0(T)$$

Вырожденность оператора монодромии определяется тем, является ли единица, как множитель перед единичным оператором, собственным значением. □

Однородная система в случае невырожденной задачи имеет только одно нулевое решение.

14.3 Логарифм от матрицы

Определение 14.2. Логарифм матрицы A, где $A \in End\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ - это матрица B такая, что $e^B = A$.

У любой невырожденной матрицы логарифм есть, а любой вырожденной его нет.
По свойствам рядов:

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \dots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \ni_k (a), \quad \ni_k (a) \equiv -\frac{(-a)^k}{k}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \epsilon_l \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ni_k (a) \right) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \ni_k(a)} = e^{\ln(1+a)} = 1 + a$$

Вычисление логарифма от матрицы
Приводим матрицу A к жордановой форме J. Жорданова матрица порождает клетки вида $J_{\lambda,m}$. Возьмём от каждой жордановой клетки логарифм и вернёмся к исходному базису:

$$A \to J \to \{J_{\lambda,m}\} \to \{ln(J_{\lambda,m})\} \to ln(J) \to ln(A)$$

Лемма 14.2.

$$\ln J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \ln\lambda & 1/\lambda & \cdots & \ni_{m-1} (1/\lambda) \\ 0 & \ln\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1/\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \ln\lambda \end{pmatrix}, \quad \ni_{m-1} (a) \equiv -\frac{(-a)^{m-1}}{m-1}$$

Замечание: логарифм от комплексного числа равен:

$$ln(\rho(cos\phi + isin\phi)) = ln\rho + i\phi, \quad \rho > 0$$

Значит, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то и тогда $ln\lambda$ определён не чётко.

Доказательство.

$$e^{ln\lambda E+N\ /\lambda+N^2\ni_1(1\ /\lambda)+\ldots+N^{m-1}\ni_{m-1}(1\ /\lambda)}=\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\epsilon_l\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ni_k\left(N\ /\lambda\right)\right)=$$
$$=\lambda(E+N\ /\lambda)=\lambda E+N=J_{\lambda,m}$$

□

Теорема 14.2. *(Флоке-Ляпунова) Для любой T-периодической однородной системы $\dot{x}=A(t)x\ \exists\ \dot{y}=By$ и существует T-периодическое преобразование*

$$L(t)=Y(t,0)X(0,t)$$

При этом $e^{BT}=X(T,0)$, и $B=\dfrac{1}{T}lnX(T,0)$. То есть любую периодическую систему периодическим преобразованием координат можно свести к постоянной системе.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ