МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 2

АСТАШОВА
ИРИНА ВИКТОРОВНА

МЕХМАТ МГУ

Оглавление

Семинар 1. Системы дифференциальных уравнений. 5
Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка 5
Метод исключения 6
Пример 6
Метод Эйлера 7
Задача. (Сборник задач Филиппова № 796). 8
Семинар 2. Системы дифференциальных уравнений (продолжение). 9
Задача. (Сборник задач Филиппова № 866). 9
Метод Эйлера (продолжение). 11
Задача. (Сборник задач Филиппова № 857). 11
Задача. (Сборник задач Филиппова № 824). 12
Решение неоднородных линейных систем с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. 13
Задача. (Сборник задач Филиппова № 828). 14
Семинар 3. Системы дифференциальных уравнений (продолжение). 16
Задача. (Сборник задач Филиппова № 843). 16
Задача. (Сборник задач Филиппова № 827). 17
Решение неоднородных линейных систем методом вариации произвольных постоянных. ..19
Задача. (Сборник задач Филиппова № 846). 19
Семинар 4. Системы дифференциальных уравнений (продолжение). 21
Задача. (Сборник задач Филиппова № 850). 21
Экспонента матрицы. 23
Задача. (Сборник задач Филиппова № 870). 23
Задача. (Сборник задач Филиппова № 871). 24
Семинар 5. Логарифм матрицы. Линейные уравнения второго порядка. 26
Логарифм матрицы. 26
Линейные уравнения второго порядка. 27
Задача. (Сборник задач Филиппова № 706). 27
Задача. (Сборник задач Филиппова № 711). 28
Колеблемость решений уравнения $y'' + Qxy = 0,\, Qx \in C\mathbb{R}$ 29
Задача. 29
Теорема сравнения. 30
Следствие. 30

Семинар 6. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. 31
Задача. (Сборник задач Филиппова № 727). 31
Задача. (Сборник задач Филиппова № 729). 31
Задача. (Сборник задач Филиппова № 731). 32
Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. 32
Определение. 33
Теорема. 33
Метод нахождения функции Грина. 33
Задача. (Сборник задач Филиппова № 751). 34
Задача. (Сборник задач Филиппова № 765). 35
Семинар 7. Устойчивость. 37
Задача. 37
Теорема. 39
Задача. (Сборник задач Филиппова № 764). 39
Задача. 40
Задача. (Сборник задач Филиппова № 777). 41
Устойчивость по Ляпунову. 42
Задача. (Сборник задач Филиппова № 777). 44
Задача. 44
Семинар 8. Устойчивость решения линейных систем с постоянными коэффициентами. 46
Устойчивость решения линейных систем с постоянными коэффициентами. 46
Задача. 46
Критерий Рауса – Гурвица. 47
Задача. (Сборник задач Филиппова № 937). 47
Задача. (Сборник задач Филиппова № 943). 48
Устойчивость по первому приближению. 49
Теорема. 49
Задача. (Сборник задач Филиппова № 899). 49
Задача. (Сборник задач Филиппова № 901). 50
Задача. (Сборник задач Филиппова № 915). 51
Задача. (Сборник задач Филиппова № 920). 52
Семинар 9. Фазовый портрет. 54
Классификация положений равновесия линейной однородной автономной системы на плоскости. 54

Задача. (Сборник задач Филиппова № 971). 58
Задача. (Сборник задач Филиппова № 973). 59
Задача. (Сборник задач Филиппова № 974). 60
Задача. (Сборник задач Филиппова № 975). 61
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1021). 63
Семинар 10. Производная решения дифференциальных уравнений и систем по параметру. 67
Зависимость решения дифференциальных уравнений и их систем от параметра. 67
Производная решения по параметру. 67
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1064). 68
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1066). 69
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1069). 70
Семинар 11. Уравнения с частными производными первого порядка. 72
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1044). 72
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1042). 73
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1074). 74
Уравнения с частными производными первого порядка. 74
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1161). 75
Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка. 75
Задача. 76
Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка. 76
Метод нахождения интегрируемых комбинаций 77
Задача. (Сборник задач Филиппова № 1171). 77
Задача. 78

Семинар 1. Системы дифференциальных уравнений.

Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1 \ldots, x_n) \end{cases}, \text{ или, в краткой записи, } \dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}) \qquad (*)$$

Будем считать функции f_i непрерывными по совокупности переменных и класса C^1 по переменным $x_1, \ldots, x_n$, которые называются фазовыми.

<u>Задача Коши</u>: найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям.

Начальные условия: $\begin{cases} x_1(t_0) = x_0^1 \\ \qquad \ldots \\ x_n(t_0) = x_0^n \end{cases}$, или, в краткой записи, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, где $\overline{x_0} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \ldots \\ x_0^n \end{pmatrix}$.

(*)– система нормального вида (каждое уравнение разрешено относительно производной, в правой части производных нет).

Набор $x_1, \ldots, x_n$ называется <u>решением системы</u>, если это набор дифференцируемых функций, обращающих каждое уравнение системы в тождество.

Система вида $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ \qquad \ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$, или, в краткой записи, $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$

называется <u>линейной однородной системой дифференциальных уравнений первого порядка.</u>

Соответственно, система вида $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t)$, где $\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ \ldots \\ F_n(t) \end{pmatrix}$

называется <u>линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений первого порядка.</u>

Матрица $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \ldots & a_{1n}(t) \\ \ldots & \\ a_{n1}(t) \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ – <u>матрица коэффициентов системы</u>.

Мы будем рассматривать случай, когда число неизвестных равно числу уравнений системы (в этом случае матрица коэффициентов системы будет квадратной).

Рассмотрим конкретные примеры решения систем дифференциальных уравнений.

Метод исключения – сводим систему к одному уравнению, порядок которого равен числу неизвестных в системе.

Пример: решить систему

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z \\ y' = 6x - y - 6z \\ z' = -8x + 3y + 9z \end{cases}$$

Решение.

Выражаем z из первого уравнения: $z = \frac{x'+4x-2y}{5}$, откуда $z' = \frac{x''+4x'-2y'}{5}$. Тогда

второе уравнение системы: $y' = 6x - y - \frac{6}{5}(x' + 4x - 2y)$,

третье уравнение системы: $x'' + 4x' - 2y' = 5\left(-8x + 3y + \frac{9}{5}(x' + 4x - 2y)\right)$.

Из третьего уравнения выражаем y' и подставляем во второе уравнение системы, получаем $y = -5x'' + 13x' - 8x$, откуда $y' = -5x''' + 13x'' - 8x'$.

Теперь подставляем полученные выражения для y и y' во второе уравнение системы. После приведения подобных получаем

$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0$ – линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Решаем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Корни: $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$.

Общее решение: $x_{00} = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 t e^t$.

Отсюда находим x' и x'', а через них y и z:

$x' = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3(e^t + te^t)$,

$x'' = 4C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3(2e^t + te^t)$. Тогда

$y = -2C_1e^{2t} + 3C_3e^t$

$z = 2C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3(te^t - e^t)$.

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + C_3\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix}e^t$.

Данный способ очень громоздкий и неоптимальный.

Метод Эйлера

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, A – постоянная матрица $n \times n$

<u>Теорема</u> (о структуре решений линейной однородной системы)

Решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка выглядит следующим образом:

$\overline{x_{oo}} = \sum_{k=1}^{n} c_k\bar{x}_k(t)$, где $\bar{x}_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение методом Эйлера заключается в следующем: решаем характеристическое уравнение $det(A - \lambda E) = 0$. Далее, в зависимости от корней характеристического уравнения, решение системы имеет следующий вид:

1) $\lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_i \neq \lambda_j$ – все корни характеристического уравнения действительны и различны. Находим собственные векторы $\bar{v}_k(t)$, отвечающие λ_k. Общее решение системы записывается в виде $\overline{x_{oo}} = \sum_{k=1}^{n} c_k\bar{v}_k(t)\, e^{\lambda_k t}$.
2) $\lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n_1}$ - все корни характеристического уравнения действительны, среди них есть одинаковые. Здесь нужно рассмотреть два подслучая:

2а) Если собственному значению λ_1 отвечает n_1 линейно независимых собственных векторов, то часть решения, соответствующая этому собственному значению, записывается в виде $\overline{x_{oo}} = \sum_{k=1}^{n_1} c_k\bar{v}_k(t)\, e^{\lambda_1 t}$.

2б) Если собственному значению λ_1 отвечает менее n_1 линейно независимых собственных векторов, то часть решения, соответствующая этому собственному значению, ищется методом неопределенных коэффициентов:

$\overline{x_{00}} = \begin{pmatrix} P_{n_1-m}^{(1)}(t) \\ \dots \\ P_{n_1-m}^{(n)}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$, где $P_{n_1-m}^{(k)}(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени n.

Случай комплексных решений мы рассмотрим позднее, а пока решим задачи на рассмотренные случаи.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 796).

Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$$

Решение.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-2) = 0.$$

Получаем $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ – все корни действительны и различны. Теперь для каждого из собственных значений находим собственный вектор:

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\overline{x_{00}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Семинар 2. Системы дифференциальных уравнений (продолжение).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда собственные значения совпадают, а число линейно независимых собственных векторов, отвечающих им, меньше, чем кратность корня.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 866).

Решить систему

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Определим число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$ размерность пространства собственных векторов 3-2=1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ получаем } \begin{cases} 2\xi_1 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \overline{v_1} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} -$$

единственный собственный вектор, отвечающий значению $\lambda_{1,2,3} = 0$.

Ищем решение системы методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_{m-k}(t) \\ P^{(2)}_{m-k}(t) \\ P^{(3)}_{m-k}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

Здесь m=3 – кратность собственного значения, k=1 – число линейно независимых собственных векторов, $\lambda_1 = 0$ – собственное значение. То есть,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + ft + g \\ ht^2 + qt + r \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты многочленов определяем, подставляя их в исходную систему:

$\begin{cases} \dot{x} = 2x - z \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 3x - y - z \end{cases}$, столбец с производными: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at + b \\ 2\,dt + f \\ 2ht + q \end{pmatrix}$

Получаем следующую систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} 2at + b = 2at^2 + 2bt + 2c \ - \ ht^2 \ - \ qt \ - \ r \\ 2\,dt + f = at^2 + bt + c \ - \ dt^2 \ - \ ft \ - g \\ 2ht + q = 3at^2 + 3bt + 3c \ - \ dt^2 \ - \ ft \ - \ g - \ ht^2 \ - \ qt \ - \ r \end{cases}$$

Теперь последовательно приравниваем к нулю коэффициенты при степенях t в каждом уравнении:

Коэффициенты при t^2: $\begin{cases} 2a - h = 0 \\ a - d = 0 \\ 3a - d - h = 0 \end{cases}$

Примем a за C_1, тогда $h = 2a = 2C_1$; $d = a = C_1$.

Коэффициенты при t: $\begin{cases} 2a = 2b - q \\ 2d = b - f \\ 2h = 3b - f - q \end{cases}$

Примем b за C_2, тогда $q = 2b - 2a = 2C_2 \ - \ 2C_1$; $f = b - 2d = b - 2a = C_2 \ - \ 2C_1$.

Свободный член: $\begin{cases} b = 2c - r \\ f = c - g \\ q = 3c - g - r \end{cases}$

Примем c за C_3, тогда $r = 2c - b = 2C_3 \ - \ C_2$;
$g = c - f = c - b + 2a = C_3 - C_2 \ + \ 2C_1$.

Получаем $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1t^2 + C_2t + C_3 \\ C_1t^2 + (C_2 \ - \ 2C_1)t + (C_3 - C_2 \ + \ 2C_1) \\ 2C_1t^2 + (2C_2 \ - \ 2C_1)t + (2C_3 \ - \ C_2) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 - 2t + 2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix} +$
$C_2\begin{pmatrix} t \\ t - 1 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 - 2t + 2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ t - 1 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Метод Эйлера (продолжение).

3) Среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряженные: $\exists\ \lambda_{1,2} = a \pm bi$.
   Здесь так же, как и в пункте 2) возможны два случая – когда кратность каждой комплексно-сопряженной пары корней равна 1 (этот случай мы разберем более подробно), и когда существует комплексно-сопряженная пара корней кратности больше 1 (этот случай мы разбирать не будем ввиду громоздкости и редкой встречаемости).

Часть решения, соответствующая комплексно-сопряженной паре корней:

Находим собственный вектор $\overline{v_1}$, отвечающий собственному значению λ_1 (вектор, комплексно-сопряженный $\overline{v_1}$, будет собственным вектором для λ_2). Далее находим действительную и мнимую часть $\overline{v_1} e^{\lambda_1 t}$. Тогда

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^1 = Re\left(\overline{v_1} e^{\lambda_1 t}\right)$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^2 = Im\left(\overline{v_1} e^{\lambda_1 t}\right)$ являются линейно независимыми решениями, их линейная комбинация будет частью общего решения системы, которая отвечает комплексно-сопряженным корням $a \pm bi$.

Решим задачу, соответствующую этому случаю:

Задача. (Сборник задач Филиппова № 857).

Решить систему

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = i: \quad \begin{pmatrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$e^{it} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + 2i \sin t \\ 2\cos t + 2i \sin t \\ 3\cos t - \sin t + i \cos t + 3i \sin t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{it} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix},$$

$$Im\left(e^{it} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}.$

Теперь разберем задачу, где нужно найти решение системы, не приведенной к нормальному виду.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 824).
Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0 \end{cases}$$

Решение.

Выделяем слагаемые, содержащие различные переменные (выделены скобками):

$$\begin{cases} (\ddot{x} + 4\dot{x} - 2x) + (-2\dot{y} - y) = 0 \\ (\ddot{x} - 4\dot{x}) + (-\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y) = 0 \end{cases}.$$

Далее записываем характеристическую матрицу, элементы которой соответствуют характеристическому уравнению для каждого из слагаемых в скобках:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+4\lambda-2 & -2\lambda-1 \\ \lambda^2-4\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \end{vmatrix} = 0$$

После нахождения корней характеристического уравнения решение системы сводится к методу Эйлера.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+4\lambda-2 & -2\lambda-1 \\ \lambda^2-4\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)(4-\lambda^2) \;=\; 0.$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm 2$.

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 2$: $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_4 = -2$: $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $\overline{x_{00}} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{-t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-2t}$.

<u>Упражнение</u>: решить эту задачу стандартным методом, сделав замену $\begin{matrix} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \\ y = x_3 \\ \dot{y} = x_4 \end{matrix}$ и получив систему из 4 уравнений первого порядка.

Решение неоднородных линейных систем с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Рассмотрим систему $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{f}(t)$, где $\bar{f}(t)$ – вектор-столбец, состоящий из квазиполиномов. Как и в случае решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений,

$\bar{x}_{\text{ОН}} = \bar{x}_{\text{ОО}} + \bar{x}_{\text{ЧН}}$ – общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Рассмотрим два случая:

1) $\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} P_{m_1}(t) \\ \dots \\ P_{m_n}(t) \end{pmatrix} e^{at}$, где $P_{m_k}(t)$ – многочлены степени m_k; $a \in \mathbb{R}$.
2) $\bar{f}(t) = \left(\begin{pmatrix} P^1_{m_1}(t) \\ \dots \\ P^1_{m_n}(t) \end{pmatrix} cos\, bt + \begin{pmatrix} P^2_{m_1}(t) \\ \dots \\ P^2_{m_n}(t) \end{pmatrix} sin\, bt \right) e^{at}$,
   где $P^1_{m_k}(t)$, $P^2_{m_k}(t)$ – многочлены степени m_k; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Вспомним, как искалось частное решение линейного уравнения с правой частью подобного вида:

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$

1) $f(x) = e^{ax} P_n(x)$. Тогда $y_{\text{ЧН}} = e^{ax} x^r \tilde{Q}_n(x)$, где r – кратность a в характеристическом уравнении, $\tilde{Q}_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Для системы отличие в том, что на месте $x^r \tilde{Q}_n(x)$ – столбец многочленов с неопределенными коэффициентами, степень которых увеличивается на кратность корня. Итак, для системы:

1) $x_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^1_{m+r}(t) \\ \dots \\ \tilde{Q}^n_{m+r}(t) \end{pmatrix} e^{at}$, где a – коэффициент при x в экспоненте правой части, r – кратность a в характеристическом уравнении, $m = max(m_1, \dots, m_n)$, $\tilde{Q}^k_{m+r}(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени $m{+}r$. Коэффициенты многочленов находим, подставляя их в исходную систему.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 828).
Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

Решение.

Система довольно простая, так как в столбце $\bar{f}(t) = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}e^{5t}$ присутствуют только многочлены нулевой степени (константы).

Сначала найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda-1) = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.

$$\overline{x_{00}} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + C_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t}.$$

Теперь перейдем к частному решению неоднородной системы:

$\bar{f}(t) = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}e^{5t}$ – здесь $a = 5$, $r = 0$, $m_1 = 0, m_2 = 0 \Rightarrow m = 0$. Получаем

$\bar{x}_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}e^{5t}$. Подставим в исходную систему:

$\begin{cases}5A = 3A + 2B + 4\\ 5B = A + 2B\end{cases}$, откуда $A = 3,\ B = 1$.

Получаем $\bar{x}_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}$.

$$\bar{x}_{\text{ОН}} = \bar{x}_{00} + \bar{x}_{\text{ЧН}} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + C_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}.$$

Ответ: $\bar{x}_{\text{ОН}} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + C_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}$.

Семинар 3. Системы дифференциальных уравнений (продолжение).

Рассмотрим пример, когда в правой части системы присутствуют экспоненты с различными показателями. В этом случае применяем метод суперпозиции решений.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 843).
Решить систему

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}\end{cases}$$

Решение.

Сначала найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y\end{cases} \Rightarrow y = \dot{x} - 2x,\ \ \dot{y} = \ddot{x} - 2x, \text{ получаем } \ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Тогда $\begin{matrix} x_{00} = C_1e^t + C_2e^{3t} \\ y_{00} = -C_1e^t + C_2e^{3t}\end{matrix}$ и

$$\overline{x_{00}} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}.$$

Правая часть системы: $\bar{f}(t) = \bar{f_1}(t) + \bar{f_2}(t) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}e^{4t}$.

Решение, когда правая часть $\bar{f_1}(t) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^t$:

Здесь $a = 5$, $r = 1$, $m = 0$. Получаем $\bar{x}_{\text{чн}1} = \begin{pmatrix}At + B\\Ct + D\end{pmatrix}e^t$. Тогда $\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}At + A + B\\Ct + C + D\end{pmatrix}e^t$.

Подставим в исходную систему:

$$\begin{cases}At + A + B = 2A + 2B + Ct + D + 2 \\ Ct + C + D = At + B + 2Ct + 2D\end{cases}$$

Коэффициенты при t: $\begin{cases}A = 2A + C \\ C = A + 2C\end{cases}$, откуда $A = -C$

Свободный член: $\begin{cases}A + B = 2B + D + 2 \\ C + D = B + 2D\end{cases}$

Складывая уравнения системы и учитывая, что $A = -C$, получаем $B + D = -1$. Тогда (из второго уравнения системы) $C = B + D$, откуда $C = -1$ и $A = 1$. Возьмем D в качестве свободного переменного, примем $D = 0$, тогда $B = -1$. Получаем

$\bar{x}_{\text{ЧН1}} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix} e^t.$

Решение, когда правая часть $\overline{f_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t}$:

Здесь $a = 4$, $r = 0$, $m = 0$. Получаем $\bar{x}_{\text{ЧН2}} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{4t}$. Тогда $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4A \\ 4B \end{pmatrix} e^{4t}$.

Подставим в исходную систему:

$\begin{cases} 4A = 2A + B \\ 4B = A + 2B - 3 \end{cases}$, откуда $A = -1, B = -2$. Получаем

$\bar{x}_{\text{ЧН2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4t}.$

Тогда $\bar{x}_{\text{ОН}} = \bar{x}_{\text{ОО}} + \bar{x}_{\text{ЧН1}} + \bar{x}_{\text{ЧН2}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4t}.$

Ответ: $\bar{x}_{\text{ОН}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4t}.$

Теперь рассмотрим второй случай правой части специального вида (о котором мы говорили на прошлом семинаре), когда правая часть системы имеет вид

$$\bar{f}(t) = \left(\begin{pmatrix} P^1_{m_1}(t) \\ \dots \\ P^1_{m_n}(t) \end{pmatrix} \cos bt + \begin{pmatrix} P^2_{m_1}(t) \\ \dots \\ P^2_{m_n}(t) \end{pmatrix} \sin bt \right) e^{at}.$$

Схема решения аналогична первому случаю, рассмотрим ее на примере задачи.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 827).
Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

Решение.

Перепишем условие в виде

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} + \bar{f}(t)$, где $\bar{f}(t) = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right) e^{0t}.$

Сначала найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+1) \ = \ 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x_{\text{OO}}} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Теперь перейдем к частному решению неоднородной системы:

В нашем случае $a \pm bi = 0 \pm i \Rightarrow r = 0, m = max(m_1, m_2) = 0$. Тогда

$\bar{x}_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} cos\ t + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} sin\ t$. Подставим в исходную систему:

$$\begin{cases} -Asin\ t + Ccos\ t = Bcos\ t + Dsin\ t - 5cos\ t \\ -Bsin\ t + Dcos\ t = 2Acos\ t + 2Csin\ t + Bcos\ t + Dsin\ t \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты в правой и левой части при $cos\ t$ и $sin\ t$, получаем

$\begin{cases} -A = D \\ C = B - 5 \\ -B = 2C + D \\ D = 2A + B \end{cases}$, откуда $A = -1, B = 3, C = -2, D = 1$. Тогда

$$\bar{x}_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} cos\ t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} sin\ t.$$

$$\bar{x}_{\text{ОН}} = \bar{x}_{\text{OO}} + \bar{x}_{\text{ЧН}} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} cos\ t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} sin\ t.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} cos\ t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} sin\ t$

Решение неоднородных линейных систем методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим систему $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$.

1) Находим общее решение однородной системы $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$.
   Это – линейная комбинация n линейно независимых решений:
   $\bar{x}(t) = C_1\overline{x_1}(t) + \dots + C_n\bar{x}_n(t),\ c_k \in \mathbb{R}$.
2) Далее, общее решение неоднородной системы ищем в виде
   $\bar{x}(t) = C_1(t)\overline{x_1}(t) + \dots + C_n(t)\bar{x}_n(t)$.
3) Подставляем это решение в исходную систему для определения $C_1'(t) \dots C_n'(t)$.
   Затем, интегрируя, находим $C_1(t) \dots C_n(t)$.
4) Подставляем найденные функции $C_1(t) \dots C_n(t)$ в выражение
   $\bar{x}(t) = C_1\overline{x_1}(t) + \dots + C_n\bar{x}_n(t)$ и находим решение (в которое войдут произвольные постоянные, появившиеся при интегрировании $C_1'(t) \dots C_n'(t)$), которое распадется в сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 846).

Решить систему методом вариации постоянных:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Решение.

Сначала найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$.

$$\lambda = i: \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы

$$\bar{x}_{00} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Подставим $C_1(t)\begin{pmatrix} cos\, t \\ -sin\, t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} sin\, t \\ cos\, t \end{pmatrix}$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) cos\, t + \dot{C}_2(t) sin\, t - C_1(t) sin\, t + C_2(t) cos\, t = -C_1(t) sin\, t + C_2(t) cos\, t + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\dot{C}_1(t) sin\, t + \dot{C}_2(t) cos\, t - C_1(t) cos\, t - C_2(t) sin\, t = -C_1(t) cos\, t - C_2(t) sin\, t + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Сокращая, получим

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) cos\, t + \dot{C}_2(t) sin\, t = \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\dot{C}_1(t) sin\, t + \dot{C}_2(t) cos\, t = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Упражнение: дорешать систему.

Семинар 4. Системы дифференциальных уравнений (продолжение).

Как видно из предыдущей задачи, подстановка $\bar{x}(t) = C_1(t)\overline{x_1}(t) + \dots + C_n(t)\bar{x}_n(t)$ в исходную систему и дальнейшее упрощение системы – дело довольно громоздкое. Попробуем несколько упростить и формализовать процесс, воспользовавшись матричной формой записи уравнений:

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$

$\bar{x}_{00}$ запишем в виде $\bar{x}_{00} = X(t)\bar{C}$, где $X(t)$ – матрица Коши (фундаментальная матрица системы), $\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$.

Тогда $\bar{x}_{0\text{Н}} = X(t)\bar{C}(t)$, где $\bar{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \dots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$.

Подставим $\bar{x}_{0\text{Н}}$ в исходную систему, получим

$\dot{X}(t)\bar{C}(t) + X(t)\dot{\bar{C}}(t) = A(t)X(t)\bar{C}(t) + \bar{f}(t)$, откуда

$X(t)\dot{\bar{C}}(t) = \bar{f}(t)$.

Таким образом, для определения $\dot{c}_k$ получаем систему

$\dot{\bar{C}}(t) = X^{-1}(t)\bar{f}(t)$.

Тогда $\bar{C}(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds + \bar{C}$, где $\bar{C}\epsilon\mathbb{R}^n$- столбец произвольных постоянных.

Получаем $\bar{x}_{0\text{Н}} = X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds + X(t)\bar{C}$, причем

$\bar{x}_{00} = X(t)\bar{C}$ и $\bar{x}_{\text{ЧН}} = X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds$

Задача. (Сборник задач Филиппова № 850).

Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + 15\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\sqrt{\mathrm{t}} \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему в виде $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 15\sqrt{t} \end{pmatrix} e^t$.

Сначала найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = 1$.

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{x}_{00} = \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix} e^t, \quad \dot{\bar{x}}_{00} = \begin{pmatrix} At+A+B \\ Ct+C+D \end{pmatrix} e^t.$$

Подставим в исходную систему:

$$\begin{cases} At+A+B = 3At+3B-2Ct-2D \\ Ct+C+D = 2At+2B-Ct-D \end{cases}$$

Коэффициенты при *t*: $\begin{cases} A = 3A-2C \\ C = 2A-C \end{cases}$, откуда $A = C$. Примем C за $2C_1$.

Свободный член: $\begin{cases} A+B = 3B-2D \\ C+D = 2B-D \end{cases}$, откуда $A = 2B-2D$.
Примем D за C_2, тогда $B = C_1 + C_2$. Получаем

$$\bar{x}_{00} = \begin{pmatrix} 2C_1t + C_1 + C_2 \\ 2C_1t + C_2 \end{pmatrix} e^t = C_1 \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$\bar{x}_{\text{он}} = C_1(t)\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^t + C_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$. Подставим в исходную систему, получим

$\begin{cases} \dot{\overline{C_1}}(t)(2t+1) + \dot{\overline{C_2}}(t) = 0 \\ \dot{\overline{C_1}}(t)2t + \dot{\overline{C_2}}(t) = 15\sqrt{t} \end{cases}$, откуда $\dot{\overline{C_1}}(t) = -15\sqrt{t}, \quad \dot{\overline{C_2}}(t) = 15\sqrt{t}(2t+1)$. Тогда

$C_1(t) = -10t^{3/2} + C_1$,
$C_2(t) = 12t^{5/2} + 10t^{3/2} + C_2$.

Подставляя в общее решение неоднородной системы, получаем

$$\bar{x}_{\text{он}} = (-10t^{3/2} + C_1)\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^t + (12t^{5/2} + 10t^{3/2} + C_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -8t^{5/2} \\ -8t^{5/2} + 10t^{3/2} \end{pmatrix} e^t$.

Как мы видим, линейные системы решаются разными способами. Еще один способ – решение с помощью вычисления экспоненты матрицы. И наоборот – мы можем находить экспоненту матрицы с помощью решения системы.

Экспонента матрицы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \cdots \quad \dots & \cdots \\ a_{n1} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная постоянная матрица. Тогда экспонента A

$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$.

Свойства:

1) Если матрицы перестановочны: $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A = e^{B+A}$
2) Если $x(t) = e^{At}$, то $x(t)$ – решение системы $\frac{dX}{dt} = AX$, где $X(0) = E$
3) Если матрицы A и B подобны: $A = CBC^{-1}$, то $e^A = Ce^B C^{-1}$

Задача. (Сборник задач Филиппова № 870).

Найти экспоненту матрицы A, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

e^A находим с помощью решения соответствующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

Найдем общее решение системы:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x_{00}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Теперь находим решения, отвечающие начальным условиям:

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Получаем систему
$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 2$. Тогда

$\overline{x_1} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ – первый столбец матрицы e^{At}.

2) Получаем систему
$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -1$. Тогда

$\overline{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ – второй столбец матрицы e^{At}.

Получаем $e^{At} = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix}$. Тогда

$e^A = \begin{pmatrix} -e + 2e^2 & e - e^2 \\ -2e + 2e^2 & 2e - e^2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} -e + 2e^2 & e - e^2 \\ -2e + 2e^2 & 2e - e^2 \end{pmatrix}$.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 871).

Найти экспоненту матрицы A, если $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

e^A находим с помощью решения соответствующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

Найдем общее решение системы:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = 0$.

$\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_{00} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix}$

Подставим в исходную систему: $\begin{cases} A = -2B - 4D \\ 0 = -2A - 4C \\ C = B + 2D \\ 0 = A + 2C \end{cases}$.

Примем C за C_1, D за C_2, тогда $A = -2C_1$, $B = C_1 - 2C_2$. Получаем

$\overline{x_{00}} = \begin{pmatrix} -2C_1 t + C_1 - 2C_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2t + 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь находим решения, отвечающие начальным условиям:

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Получаем систему
$\begin{cases} C_1 - 2C_2 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 0$. Тогда

$\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -2t + 1 \\ t \end{pmatrix}$ – первый столбец матрицы e^{At}.

2) Получаем систему
$\begin{cases} C_1 - 2C_2 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 1$. Тогда

$\overline{x_2} = \begin{pmatrix} -4t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$ – второй столбец матрицы e^{At}.

Получаем $e^{At} = \begin{pmatrix} -2t + 1 & -4t \\ t & 2t + 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$e^A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Семинар 5. Логарифм матрицы. Линейные уравнения второго порядка.

Для исследования устойчивости решений систем с периодическими коэффициентами нам понадобится понятие логарифма матрицы.

Логарифм матрицы.

Логарифмом матрицы A называется такая матрица $L = ln\,A$, что $A = e^L$.
Если $det\,A \neq 0$, то $ln\,A$ всегда существует.
Мы всегда сможем найти логарифм матрицы, если научимся считать логарифм жордановой клетки. Вычислим логарифм жордановой клетки

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ размера } k \times k:$$

$$ln\,K = ln(\lambda E + F), \text{ где } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$ln(\lambda E + F) = \ln(\lambda E H) = \ln(\lambda E) + \ln(E + H), \text{ где } H = \frac{1}{\lambda} F.$$

Разложим $\ln(E + H)$ в ряд (по аналогии с разложением в ряд $ln(1 + x)$):

$$\ln(E + H) = H - \frac{H^2}{2} + \frac{H^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} H^n}{n} + \cdots$$

Так как матрица H – нильпотентная, этот ряд конечен, и

$$\ln(E + H) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{2\lambda^2} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)\lambda^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{-1}{2\lambda^2} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогичным разложением в ряд можно найти логарифм матрицы λE:

$$\ln(\lambda E) = \begin{pmatrix} \ln\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ln\lambda & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ln\lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ln\lambda \end{pmatrix}$$

Тогда $ln\, K = \ln(\lambda E) + \ln(E+H) = \begin{pmatrix} \ln\lambda & \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{2\lambda^2} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)\lambda^{n-1}} \\ 0 & \ln\lambda & \frac{1}{\lambda} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{-1}{2\lambda^2} \\ \dots & \dots & \dots & \ln\lambda & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ln\lambda \end{pmatrix}.$

Линейные уравнения второго порядка.

Для линейных уравнений второго порядка мы научимся исследовать вопрос о колеблемости/ неколеблемости решений и вопрос о числе нулей решения уравнения на заданном промежутке.

Уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

заменой $y = \alpha(x)z$, где z – новая неизвестная функция, $\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$ приводится к виду

$$z'' + \theta(x)z = 0.$$

Эта замена – не единственная, позволяющая избавиться от члена с младшей производной, также можно делать замену независимой переменной – это мы обсудим позднее.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 706).

Линейной заменой уничтожить член с первой производной:
$x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$

Решение.

$y = \alpha(x)z$
$y' = \alpha' z + \alpha z'$
$y'' = \alpha'' z + 2\alpha z + \alpha z''$

Исходное уравнение преобразуется к виду:

$$x^2\alpha(x)z'' + \big(2\alpha'(x)x^2 - 2x\alpha(x)\big)z' + \big((x^2+2)\alpha(x) - 2x\alpha'(x) + x^2\alpha(x)\big)z = 0$$

Подбираем функцию $\alpha(x)$ так, чтобы коэффициент при z' обратился в 0:

$$2\alpha' x^2 - 2x\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dx}{x}$$

Откуда $\alpha(x) = Cx$. Взяв $C = 1$, получаем $\alpha(x) = x$. Уравнение преобразуется к виду:

$$z'' + z = 0$$

Получили уравнение с постоянными коэффициентами, которое легко решается. Обратной заменой $y = \alpha(x)z = xz$ получаем решение исходного уравнения.

Ответ: $z'' + z = 0$.

Как говорилось выше, в уравнении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

можно избавиться от члена с младшей производной с помощью замены независимого переменного.

Делаем замену $t = \varphi(x)$. Тогда $y' = \dot{y}\varphi'(x)$ и $y'' = \ddot{y}\big(\varphi'(x)\big)^2 + \dot{y}\varphi''(x)$. Данная замена должна быть обратимой.

Найдем, чему должна быть равна $\varphi(x)$, чтобы в исходном уравнении сократился член с первой производной (константы интегрирования опускаем, так как нам нужно одно решение для замены):

$$\ddot{y}(\varphi')^2 + y\varphi'' + p\dot{y}\varphi' + qy = 0$$

$$\ddot{y}(\varphi')^2 + \dot{y}(\varphi'' + py) + qy = 0$$

Получаем $\varphi'' = -p\varphi'$, откуда $\varphi' = e^{-\int p(x)\,dx}$ и $\varphi = \int e^{-\int p(x)\,dx}\,dx$.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 711).
Заменой независимого переменного $t = \varphi(x)$ уничтожить член с первой производной:

$xy'' - y' - 4x^3y = 0$

Решение.

Сделав замену $t = \varphi(x)$, получаем
$x(\ddot{y}(\varphi')^2 + \dot{y}\varphi'') - \dot{y}\varphi' - 4x^3y = 0$
$\ddot{y}(\varphi')^2 + (x\varphi'' - \varphi')\dot{y} - 4x^3y = 0.$

Таким образом,

$x\varphi'' - \varphi' = 0$, откуда $\varphi' = Cx$. Положим $C = 2$, тогда $\varphi = x^2$.

Чтобы данная замена была обратимой, мы можем делать ее только на полуоси. На полуоси уравнение приводится к виду

$y'' - 4y = 0$

Снова получили уравнение с постоянными коэффициентами, которое легко решается.

Ответ: $y'' - 4y = 0$.

Колеблемость решений уравнения $y'' + Q(x)y = 0$, $Q(x) \in C(\mathbb{R})$ (*)

Определение. Решение уравнения (*) называется колеблющимся на (a, b), $-\infty < a < b < \infty$, если оно имеет на этом интервале не менее двух нулей. Соответственно, решение называется неколеблющимся, если оно имеет на этом интервале не более одного нуля.

Задача.

$y'' + my = 0, m > 0.$

1) Оценить расстояние между соседними нулями.
2) Оценить число нулей на произвольном промежутке (a, b).

Решение.

$y_{00} = C_1 \cos\sqrt{m}x + C_2 \sin\sqrt{m}x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin\left(x\sqrt{m} + \varphi\right), \quad \varphi = \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}.$

y_{00} обращается в ноль в точках $x\sqrt{m} + \varphi = \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z}$, откуда $x_n = \frac{-\varphi}{\sqrt{m}} + \frac{\pi n}{\sqrt{m}}$. Тогда

$x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ – расстояние между соседними нулями.

Пусть $N_{(a,b)}$ – число нулей на (a, b). Тогда $N_{(a,b)} = \left[\frac{(b-a)\sqrt{m}}{\pi}\right] + 1.$

Что делать, если коэффициенты в уравнении не являются постоянными? В некоторых случаях полезно воспользоваться теоремой сравнения.

Теорема сравнения.

Пусть заданы два уравнения

$$y'' + P(x)y = 0 \qquad (1)$$

$$z'' + Q(x)z = 0 \qquad (2)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – положительные непрерывные функции на $\mathbb{R}$. Пусть $P(x) \geq Q(x)$. Тогда между любыми двумя соседними нулями решения уравнения (2) найдется нуль решения уравнения (1), если между этими нулями найдется интервал (α, β), где $P(x) > Q(x)$.

Следствие.

Если $\exists x_0 : y(x_0) = z(x_0)$, где y и z – решения уравнений (1) и (2) соответственно, то следующий нуль решения уравнения (1) будет ближе к x_0, чем следующий нуль решения уравнения (2).

Итак, пусть дано уравнение

$$y'' + P(x)y = 0$$

и пусть $\exists m, M \epsilon \mathbb{R}$: $m < P(x) < M \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. Обозначим за d расстояние между его корнями и рассмотрим два уравнения:

$$y'' + my = 0$$

$$y'' + My = 0$$

Расстояние между корнями первого уравнения $d_1 = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$,
расстояние между корнями второго уравнения $d_2 = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Тогда $\frac{\pi}{\sqrt{M}} < d < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Семинар 6. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 727).

Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями решения уравнения:
$y'' + 2xy = 0,\ \ 20 \le x \le 45$

Решение.

Оценка сверху:

$y'' + 40y = 0$

$y_{00} = C\,cos\,2\sqrt{10}x + C_2\,sin\,2\sqrt{10}x$

$d_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$, таким образом, $d \le \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$.

Оценка снизу:

$y'' + 90y = 0$

$y_{00} = C\,cos\,3\sqrt{10}x + C_2\,sin\,3\sqrt{10}x$

$d_2 = \frac{\pi}{3\sqrt{10}}$, таким образом, $\frac{\pi}{3\sqrt{10}} \le d$.

Итак, $\frac{\pi}{3\sqrt{10}} \le d \le \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{10}} \le d \le \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 729).

Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями решения уравнения:
$y'' - 2xy' + (x+1)^2y = 0,\ \ 4 \le x \le 19$

Решение.

Вначале заменой избавимся от члена с y':

$y = \alpha(x)z$

$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}\int -2x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$. Тогда

$y = e^{\frac{x^2}{2}}z$

$y' = xze^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}}z'$

$y'' = x^2ze^{\frac{x^2}{2}} + 2xe^{\frac{x^2}{2}}z' + z''e^{\frac{x^2}{2}}$

После подстановки в исходное уравнение и упрощений получаем

$z'' + z(2x+1) = 0$

По условию $4 \le x \le 19\ \Rightarrow 9 \le 2x+1 \le 39$.

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, получаем $\frac{\pi}{\sqrt{39}} \leq d \leq \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{39}} \leq d \leq \frac{\pi}{3}$.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 731).

Доказать, что любое решения уравнения $y'' + xy = 0$ на отрезке $-25 \leq x \leq 25$ имеет не менее 15 нулей.

Решение.

На $[-25, 0]$ колеблющихся решений нет.

Оценим количество нулей решения на отрезке $[0, 25]$: возьмем некое $\delta > 0$ (найдем его позднее) и оценим количество нулей на $[\delta, 25]$.

На $[\delta, 25]$ расстояние между нулями решения оценивается как $\frac{\pi}{\sqrt{25}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Пусть N – число нулей решения на $[a, b]$. Тогда $N \geq \left[\frac{b-a}{d}\right]$. Получаем

$N \geq \left[\frac{(25-\delta)\sqrt{\delta}}{\pi}\right]$.

Найдем максимум функции $f(\delta) = \frac{(25-\delta)\sqrt{\delta}}{\pi}$:

$f'(\delta) = \frac{25-3\delta}{2\sqrt{\delta}} = 0 \Leftrightarrow \delta = \frac{25}{3}$ – максимум достигается в точке $\delta = \frac{25}{3}$.

Тогда $N \geq \left[\frac{\left(25-\frac{25}{3}\right)\sqrt{\frac{25}{3}}}{\pi}\right] \geq 15$

То есть, уже на отрезке $\left[\frac{25}{3},\ 25\right]$ содержится не менее 15 нулей решения исходного уравнения, что и требовалось доказать.

Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка.

Пусть дано уравнение второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad x \in (0, l), a_0 \neq 0, a_i \in C(\mathbb{R}), f(x) \in C(\mathbb{R}) \qquad (*)$$

Ищем решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (**)$$

Задача Робена – найти решение уравнения (*), удовлетворяющее условиям (**) – в этом случае краевые условия смешанного типа, задаются функцией и ее производной.

Задача Дирихле – найти решение уравнения (*), удовлетворяющее условиям (**) при условии $\beta = \delta = 0$, т.е. $y(0) = y(l) = 0$.

Задача Неймана – найти решение уравнения (*), удовлетворяющее условиям (**) при условии $\alpha = \gamma = 0$, т.е. $y'(0) = y'(l) = 0$.

В отличие от задачи Коши, при условии непрерывности коэффициентов уравнения и правой части, краевая задача может не иметь решения, иметь единственное решение, или иметь бесконечно много решений.

Пример 1.

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \qquad x \in (0, \pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$y_{00} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y(0) = C_1 = 0 \Rightarrow y(\pi) = C_2 \sin \pi = 0 \ \forall \ C_2$$

Тогда $y = C_2 \sin x \ \forall \ C_2 \epsilon \mathbb{R}$ - задача имеет бесконечно много решений.

Пример 2.

$$\begin{cases} y'' - y = 0, \qquad x \in (0, \pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

У этой задачи единственное решение $y \equiv 0$, нетривиальных решений нет.

Пример 3.

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Данная краевая задача имеет единственное решение $y = \sin x$.

Определение. Рассмотрим уравнение (*) и краевые условия (**). Функцией Грина краевой задачи (*)-(**) называется функция $G(x, s)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $G(x, s)$ определена и непрерывна на $[0, l] \times [0, l]$
2) Как функция от x для $\forall s \in (0, l)$ удовлетворяет однородному уравнению $a_0(x)G_{xx}(x, s)'' + a_1(x)G_x(x, s)' + a_2(x)G(x, s) = 0$
3) Как функция от x для $\forall s \in (0, l)$ удовлетворяет краевым условиям (**)
4) $G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \frac{1}{a_0(s)}$

Теорема. Если существует функция Грина задачи (*)-(**), то решение находится по формуле $y(x) = \int_0^l G(x, s) f(s)\, ds$.

Метод нахождения функции Грина.

Если уравнение $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, одно из которых удовлетворяет только граничному условию

(1) $\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0$, а другое – только граничному условию (2) $\gamma y(l) + \delta y'(l) = 0$, то функцию Грина можно найти в следующем виде:

$$G(x,s) = \begin{cases} y_1(x)a(s), & 0 \le x < s \\ y_2(x)b(s), & s < x \le l \end{cases}$$

А функции $a(s)$ и $b(s)$ определить из условий "склейки" (непрерывность функции Грина при $x = s$ и условие скачка производной):

$$\begin{cases} y_1(s)a(s) = y_2(s)b(s) \\ y_2'(s)b(s) - y_1'(s)a(s) = \dfrac{1}{a_0(s)} \end{cases}$$

Небольшое замечание об условиях существования функции Грина:

Для краевой задачи Дирихле

$$\begin{cases} y'' + P(x)y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Условие $P(x) \le 0$ – достаточное для существования функции Грина, которую можно найти методом, обсуждавшимся выше.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 751).

Найти решения уравнения

$$\begin{cases} y'' - y = 2x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Решение.

Решаем однородное уравнение:

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

$$y_{00} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Ищем частное решение:

$$y_{\text{чн}} = Ax + B$$

Подставив в исходное уравнение, получаем

$-Ax - B = 2x$, откуда $A = -2, B = 0$

Получаем $y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$

Найдем C_1 и C_2:

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ eC_1 + \frac{1}{e} C_2 - 2 = -1 \end{cases}$, откуда

$C_1 = \frac{e}{e^2-1}$, $C_2 = \frac{e}{1-e^2}$.

Ответ: $y = \frac{e}{e^2-1} e^x + \frac{e}{1-e^2} e^{-x} - 2x$.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 765).

Построить функцию Грина для краевой задачи

$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

Решение.

Решаем однородное уравнение:

$y'' + y = 0$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Находим $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (см. метод нахождения функции Грина):

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \Rightarrow y'(0) = C_2 = 0 \Rightarrow y_1(x) = \cos x$

$y(\pi) = -C_1 = 0 \Rightarrow y_2 = sin\, x$. Тогда

$G(x, s) = \begin{cases} a(s) \cos x, & 0 \le x < s \\ b(s) \sin x, & s < x \le \pi \end{cases}$

Условия склейки:

$\begin{cases} a(s)\, cos\, s = b(s)\, sin\, s \\ b(s)\, cos\, s + a(s)\, sin\, s = 1 \end{cases}$

Находим $a(s)$ и $b(s)$ по правилу Крамера:

$a(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin s \\ 1 & \cos s \end{vmatrix}}{1} = \sin s; \quad b(s) = \frac{\begin{vmatrix} \cos s & 0 \\ \sin s & 1 \end{vmatrix}}{1} = \cos s$

Ответ: $G(x,s) = \begin{cases} \cos x \sin s, & 0 \le x < s \\ \sin x \cos s, & s < x \le \pi \end{cases}.$

Семинар 7. Устойчивость.

Вначале разберем одну задачу на устойчивость (о понятии устойчивости речь пойдет чуть позже, после окончания темы “функция Грина”):

Задача.

Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Решение.

Сведем систему к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$$

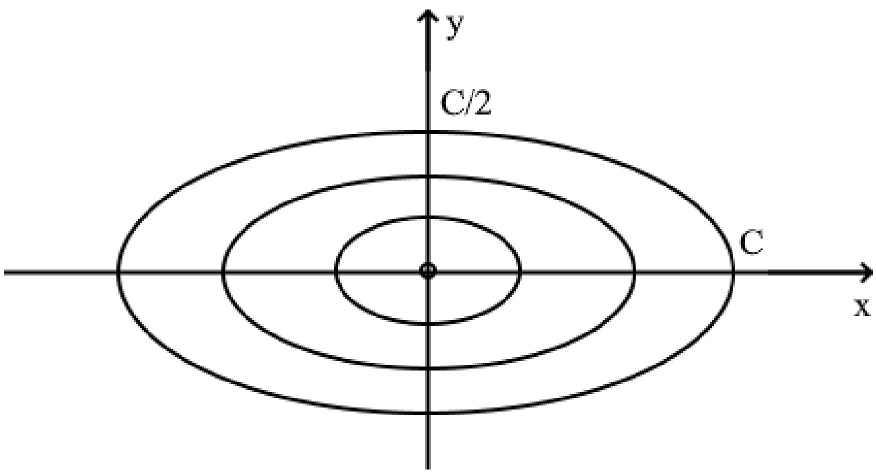
$$-4y\,dy = x\,dx$$

$$-\frac{4y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C^2 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = C^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{\frac{C^2}{4}} = 1$$

Получили решение

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{\frac{C^2}{4}} = 1 \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Если изобразить семейство решений на плоскости, получатся эллипсы с большой полуосью C и малой полуосью $\frac{C}{2}$:



Ответим вначале на вопрос: будет ли решение системы асимптотически устойчивым?

Для асимптотической устойчивости требуется:

1) Устойчивость по Ляпунову
2) $\exists \delta > 0$: $\forall \bar{x}(t)$: $\|\bar{x}(0)\| < \delta$ имеем $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

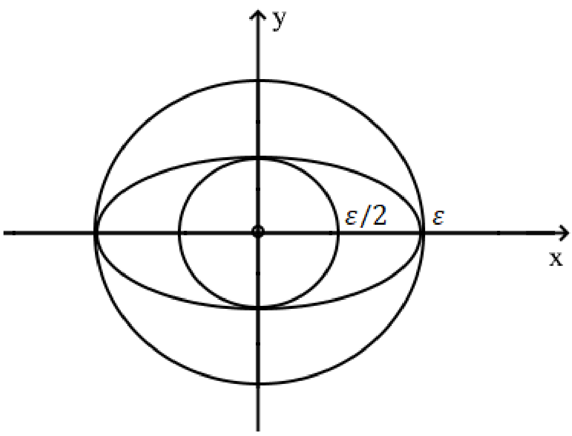
В нашем случае, точка, двигаясь по траектории решения, все время остается на фиксированном эллипсе, т.е., решение не будет стремиться к нулю, поэтому асимптотическая устойчивость отсутствует.

Определим, будет ли нулевое решение системы $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ устойчивым по Ляпунову:

По определению устойчивости по Ляпунову, должно выполняться следующее:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x(t)$ – решения системы: $\|\bar{x}(0) - 0\| < \delta$ имеем $\|\bar{x}(t) - \bar{0}\| < \varepsilon\ \forall t > 0$.
Здесь $\|\bar{x}(0)\| < \delta$ означает, что $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$,
$\|\bar{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t > 0$ означает, что $x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим круг $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ – ε-окрестность нулевого решения:



Рассмотрим эллипс, у которого большая полуось совпадает с ε ($C = \varepsilon$). Понятно, что, если решение начинается внутри этого эллипса, то оно будет оставаться внутри этого эллипса в любой момент времени.

Рассмотрим окружность радиуса $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, находящуюся внутри эллипса. Решение с начальными условиями $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$ будет оставаться внутри эллипса

$\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2}{4}} = 1$. Таким образом, мы указали способ, как по заданному ε выбрать δ так, чтобы решение, начинаясь в δ-окрестности, не покинуло ε-окрестность, а значит, нулевое решение устойчиво.

Ответ: нулевое решение устойчиво.

Теперь вернемся к задачам на нахождение функции Грина.

Пусть дано уравнение второго порядка

$$Ly = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (*)$$
$$x \in (a,b), a_0 \neq 0, a_i \in C([a,b]), f(x)C([a,b])$$

Ищем решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (**)$$

Теорема. Если однородная краевая задача ($Ly = 0$) имеет только тривиальное решение, то существует функция Грина

$$G(x,s) = \begin{cases} y_1(x)a(s), & a \le x < s \\ y_2(x)b(s), & s < x \le b \end{cases}, \text{ где}$$

$y_1(x)$ – решение уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющее первому краевому условию $\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0$,
$y_2(x)$ – решение уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющее второму краевому условию $\gamma y(l) + \delta y'(l) = 0$.

Функции $a(s)$ и $b(s)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1(s)a(s) = y_2(s)b(s) \\ y_2'(s)b(s) - y_1'(s)a(s) = \frac{1}{a_0(s)} \end{cases}.$$

Задача. (Сборник задач Филиппова № 764).
Построить функцию Грина для краевой задачи

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Решение.

Решаем однородное уравнение:

$$y'' = 0$$

$y = C_1 x + C_2$

Находим $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$y_1(0) = C_2 = 0 \Rightarrow y_1(x) = C_1 x = x$

$y_2(1) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow y_2 = C_1 x - C_1 = x - 1$. Тогда

$$G(x,s) = \begin{cases} xa(s), & 0 \le x < s \\ (x-1)b(s), & s < x \le 1 \end{cases}$$

Условия склейки:

$$\begin{cases} sa(s) = (s-1)b(s) \\ b(s) - a(s) = 1 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} a(s) = (s-1) \\ b(s) = s \end{cases}$$

Получаем

$$G(x,s) = \begin{cases} x(s-1) & 0 \le x < s \\ (x-1)s & s < x \le 1 \end{cases}$$

Ответ: $G(x,s) = \begin{cases} x(s-1) & 0 \le x < s \\ (x-1)s & s < x \le 1 \end{cases}$.

Задача.

При каких a для задачи

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

будет существовать функция Грина?

Решение.

Посмотрим, при каких a однородная задача имеет только тривиальное решение:

1) $a = 0$. Однородное уравнение $y'' = 0$ имеет решение $y = C_1 x + C_2$, из условия $y(0) = y(1) = 0$ заключаем, что $C_1 = C_2 = 0$, то есть, однородная задача имеет только тривиальное решение и функция Грина существует.
2) $a \ne 0$. Однородное уравнение $y'' + a^2 y = 0$ имеет решение $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$. Из граничных условий получаем
   $y(0) = C_1 = 0$
   $y(1) = 0 \Rightarrow C_2 \sin a = 0$.
   Если $C_2 = 0$, то $y \equiv 0$, если $\sin a = 0$, то $a = \pi n$.

Таким образом, однородная задача имеет нетривиальное решение $y = C_2 \sin \pi n x$ при $a = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.При остальных a однородная задача имеет только тривиальное решение, и функция Грина существует.

Ответ: функция Грина не существует при $a = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и существует в других случаях.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 777).
Построить функцию Грина для краевой задачи

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x) \\ y(0) \text{ ограничено} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Решение.

Решаем однородное уравнение:

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$$

Это – уравнение Эйлера. Сделаем замену $x = e^t$, тогда

$$t = \ln x,\ y' = \dot{y}e^{-t},\ y'' = \ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}e^{-2t}.$$

После подстановки в исходное уравнение, получаем

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$.

$y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$. Делая обратную замену, получаем

$$y = C_1x + C_2x^{-2}.$$

Находим $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$y(0)$ ограничено $\Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y_1(x) = C_1x = x$

$y(1) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow y_2 = C_1x - C_1x^{-2} = x - x^{-2}$. Тогда

$$G(x,s) = \begin{cases} xa(s), & 0 \le x < s \\ (x - x^{-2})b(s), & s < x \le 1 \end{cases}$$

Условия склейки:

$\begin{cases} sa(s) = (s - s^{-2})b(s) \\ (1 + 2s^{-3})b(s) - a(s) = s^{-2} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} a(s) = \frac{1}{3}\left(s - \frac{1}{s^2}\right) \\ b(s) = \frac{1}{3}s \end{cases}$

Получаем

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{x}{3}\left(s - \frac{1}{s^2}\right) & 0 \le x < s \\ \frac{s}{3}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) & s < x \le 1 \end{cases}.$$

Ответ: $G(x,s) = \begin{cases} \frac{x}{3}\left(s - \frac{1}{s^2}\right) & 0 \le x < s \\ \frac{s}{3}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) & s < x \le 1 \end{cases}.$

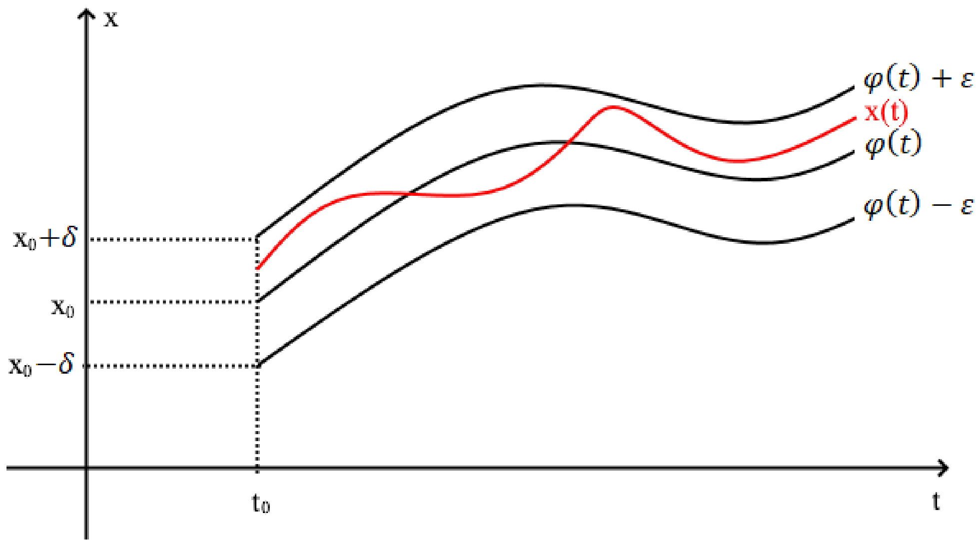
Устойчивость по Ляпунову.

Рассматривается дифференциальное уравнение (система) $\dot{x} = f(t,x),\ f \in C^1$.

Пусть $\varphi(t)$ – решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. По теореме существования и единственности, такое решение существует и единственно.

Определение. Решение $\varphi(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 \colon \forall$ решения уравнения $x(t)\colon |x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ имеем $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon\ \forall t > t_0$.

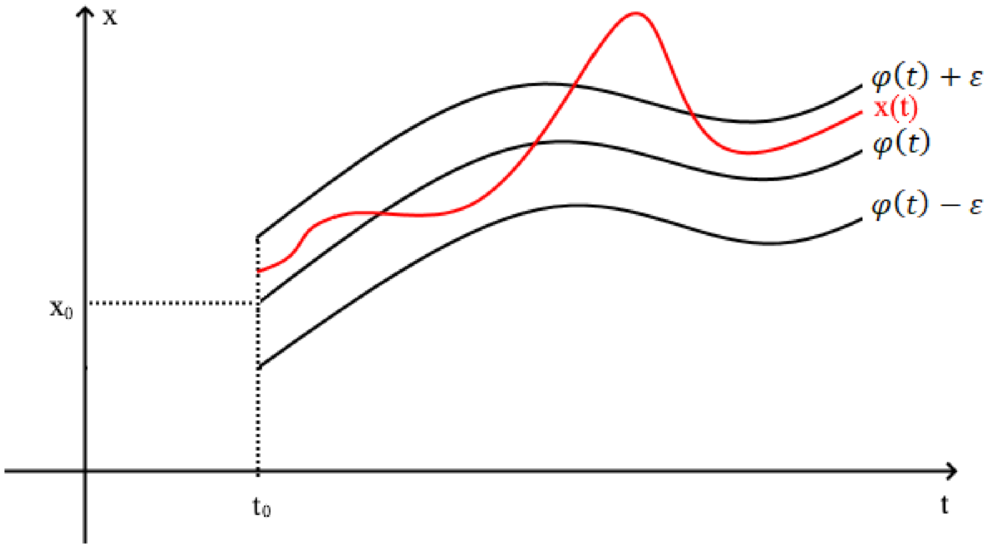
Смысл понятия устойчивости:



Есть решение $\varphi(t)$, которое выходит из точки (t_0, x_0). Тогда, какую бы ε-окрестность этого решения мы ни задали, всегда можно найти такую δ-окрестность начальных данных (интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$), что любое другое решение, начавшись в момент времени t_0 в этой окрестности, не покинет ε-окрестность решения $\varphi(t)$ при всех $t > t_0$ – оно все время будет оставаться внутри ε-трубки.

<u>Определение</u>. Решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым по Ляпунову, если $\exists \varepsilon > 0\colon\ \forall \delta > 0\ \ \exists$ решение уравнения $x(t)$ и точка $t_1 > t_0$: $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$, но при этом $|x(t_1) - \varphi(t_1)| \geq \varepsilon$.

Смысл понятия неустойчивости:



Какую бы маленькую окрестность начальных данных мы ни взяли, найдется такое решение $x(t)$, начинающееся в этой окрестности, и такой момент времени t_1, что это решение покинет ε-окрестность решения $\varphi(t)$ (даже если потом туда вернется).

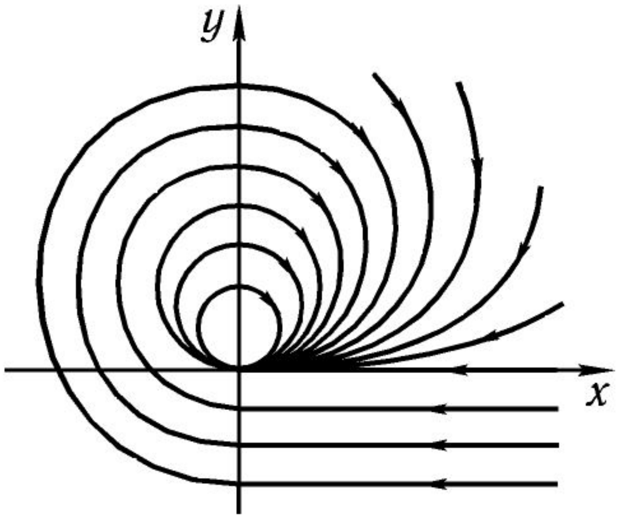
<u>Определение</u>. Решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если:

1) Оно устойчиво по Ляпунову
2) $\exists \delta > 0\colon\ \forall x(t)\colon\ |x(t_0) - x_0| < \delta$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{x \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$.

Из асимптотической устойчивости не следует устойчивость по Ляпунову, и наоборот.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 777).

Траектории системы уравнения $\frac{dx}{dt} = P(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x,y)$, где функции $P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y$ непрерывны, изображены на фазовой плоскости (см. рисунок). Что можно сказать о поведении решений при $t \to \infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову?



Решение.

Из рисунка видно, что все траектории неограниченно приближаются к нулю при $t \to \infty$. Будет ли при этом нулевое решение устойчивым? Очевидно, нет.

Рассмотрим произвольную окрестность начала координат – это круг с центром в точке $(0,0)$ радиуса ε. Тогда, какую бы δ-окрестность начальных данных мы ни взяли, всегда найдется решение, начинающееся в этой δ-окрестности, но выходящее за пределы ε-круга – достаточно рассмотреть части траекторий, расположенных ниже оси Ox – все они или вообще не будут пересекать ε-круг, или же в какой-то момент времени выходить из него (пересекать границу круга), какое бы ε мы ни взяли.

То есть, нулевое решение является неустойчивым по Ляпунову, несмотря на то что все траектории стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Задача. Доказать, что для устойчивости решений уравнения $\dot{x} = a(t)x, \quad a(t) \in C(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t a(\tau)\,d\tau < \infty$.

Решение.

Обратите внимание, что в условии задачи не сказано, о каком именно решении идет речь, так как для линейного уравнения устойчивость одного решения влечет за собой устойчивость всего семейства решений этого уравнения.

Возьмем решение $\varphi(t)$: $\varphi(t_0) = x_0$, предварительно решив уравнение $\dot{x} = a(t)x$: $x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$, тогда

$\varphi(t_0) = x_0 = Ce^{\int_{t_0}^{t_0} a(\tau)\,d\tau} = C \Rightarrow \varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$.

1) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Мы хотим найти такое δ, чтобы:

$|C - x_0| < \delta \Rightarrow \left| Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} - x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} \right| = |C - x_0| e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} < \delta e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} = \varepsilon,$

откуда $\delta = \frac{\varepsilon}{e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}}$.

Если $\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t a(\tau)\,d\tau < M$ (из условия), то δ существует, можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{e^M}$. Таким образом, из условия $\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t a(\tau)\,d\tau < \infty$ следует устойчивость исходного уравнения.

2) Пусть решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову. Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$: $\forall x(t)$ – решения, такого, что $|C - x_0| < \delta$, имеем $\left| Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} - x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} \right| < \varepsilon$. Тогда

$|C - x_0| e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} < \varepsilon$, когда $e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} < \frac{\varepsilon}{|C - x_0|}$, а это и означает, что

$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t a(\tau)\,d\tau < \infty$.

Семинар 8. Устойчивость решения линейных систем с постоянными коэффициентами.

Устойчивость решения линейных систем с постоянными коэффициентами.

Пусть дана система

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$,

A – постоянная матрица $n \times n$ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда:

1) Если $Re\,\lambda_k < 0,\ k = 1, \dots, n$, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво
2) Если $\exists \lambda_l:\ Re\,\lambda_l > 0$, то нулевое решение системы неустойчиво
3) Если среди $\lambda_i:\ Re\,\lambda_i \le 0\ \ \exists \lambda_l: \mathrm{Re}\,\lambda_l = 0$, и размерность жордановой клетки, отвечающей таким λ_l равна 1, то нулевое решение системы устойчиво, но не асимптотически устойчиво
4) Если среди $\lambda_i:\ Re\,\lambda_i \le 0\ \ \exists \lambda_l: \mathrm{Re}\,\lambda_l = 0$, и размерность жордановой клетки, отвечающей таким λ_l больше 1, то нулевое решение системы неустойчиво.

Задача.

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Что можно сказать про устойчивость нулевого решения этих систем?

Решение.

1) Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0$ – среди корней есть $\lambda_1 = 2$ с положительной действительной частью, значит, решение неустойчиво (несмотря на то, что среди корней также есть $\lambda_3 = 0$ и размерность жордановой клетки, которая ему отвечает, равна 1). То есть, условие 2) "старше" условия 3.
2) Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Так как $rkA = 2$, то жорданова форма этой матрицы будет выглядеть так:
   $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – размерность жордановой клетки больше 1, значит, нулевое решение системы неустойчиво.

Ответ: 1) неустойчиво, 2) неустойчиво.

Для матрицы 2×2 легко найти собственные значения и исследовать решение системы на устойчивость. Для систем больших размерностей удобно использовать критерий Рауса – Гурвица.

Пусть дано характеристическое уравнение

$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$

Матрицей Гурвица называют

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & 0 \\ & & & & & & & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & & \ldots & & \ldots & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

На главной диагонали, начиная с a_1, стоят коэффициенты характеристического уравнения. Справа от коэффициента, стоящего на главной диагонали, пишутся коэффициенты с меньшими номерами, а слева – с большими номерами.

Критерий Рауса – Гурвица.

Действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны ($Re\,\lambda_i < 0,\ i = 1, \ldots, n$) тогда и только тогда, когда:

1) $a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$ – все коэффициенты характеристического уравнения положительны
2) $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$ – все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны.

Условие 2) можно заменить условием $2'$) – т.н. условием Льенара-Шипара:

$2'$) $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \ldots$ - все главные миноры, начиная с $(n-1)$-го, (далее берем $(n-3)$-й и так далее, двигаясь через один) положительны.

Тогда для системы, которой соответствует характеристическое уравнение, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 937).

Исследовать устойчивость нулевого решения:
$y^{(4)} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$

Решение.

Здесь нужно исследовать устойчивость решения уравнения, а не системы, но разницы никакой нет – уравнение всегда можно свести к системе с таким же характеристическим многочленом.
Характеристическое уравнение:
$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 14\lambda^2 + 36\lambda + 45 = 0$

Построим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 36 & 14 & 8 & 1 \\ 0 & 45 & 36 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся условием Льенара-Шипара:

$\Delta_1 = 8 > 0,$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 36 & 14 & 8 \\ 0 & 45 & 36 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

Значит, среди корней характеристического уравнения найдется хотя бы один с неотрицательной действительной частью. Так как чисто мнимых или нулевых корней у характеристического уравнения нет, то найдется корень с положительной действительной частью, а значит, нулевое решение будет неустойчивым.

Ответ: неустойчиво.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 943).
Исследовать устойчивость нулевого решения:
$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$

Решение.

Характеристическое уравнение:
$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

Построим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся условием Льенара-Шипара:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 11 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

Снова получили, что нулевое решение неустойчиво.

Ответ: неустойчиво.

Устойчивость по первому приближению.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости нелинейных систем. Иногда по первому приближению нелинейной системы (т.е. по ее главной линейной части) можно судить об устойчивости или неустойчивости нулевого решения этой системы.

Рассмотрим систему

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t) = A\bar{x} + f_1(\bar{x}, t), \qquad (*)$$

где $\|f_1(x,t)\| \le \gamma(\bar{x})\|\bar{x}\|, \gamma(\bar{x}) \to 0$ при $\|\bar{x}\| \to 0$.

Тогда, если все корни характеристического уравнения матрицы A имеют отрицательную действительную часть, то нулевое решение нелинейной системы асимптотически устойчиво. Если есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то нулевое решение нелинейной системы неустойчиво. Если есть хотя бы один чисто мнимый, или равный нулю корень, то об устойчивости или неустойчивости нелинейной системы ничего сказать нельзя – в этом случае устойчивость или неустойчивость определяется поведением функции $f_1(\bar{x}, t)$. Таким образом, имеет место теорема:

Теорема. Если λ_i: $Re(\lambda_i) < 0,\ i = 1, \dots, n$, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво. Если $\exists \lambda_l$: $Re\,\lambda_l > 0$, то нулевое решение системы неустойчиво.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 899).

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2xy \\ y = 2x - 3y + y^3 + 5x^4 \end{cases}$$

Решение.

Выделим линейную часть:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$.

Получили $\lambda_1 = -2 + \sqrt{6} > 0$, значит, нулевое решение исходной системы неустойчиво.

Ответ: неустойчиво.

Напоминание: разложение функции от двух переменных в окрестности точки (x_0, y_0) в ряд Тейлора:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \cdots$$

Задача. (Сборник задач Филиппова № 901).

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$$

Решение.

Выделим линейную часть в окрестности точки $(0,0)$:

$e^{x+2y} = 1 + x + 2y + \cdots$

$\cos 3x = 1 + \cdots$

Тогда первое уравнение линеаризованной системы запишется так: $\dot{x} = x + 2y$

$\sqrt{4+8x} = 2\sqrt{1+2x} = 2(1 + x + \cdots) = 2 + 2x + \cdots$

$e^y = 1 + y + \cdots$

Тогда второе уравнение линеаризованной системы запишется так: $\dot{y} = 2x - 2y$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

Собственные значения $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$.

Получили $\lambda_2 = 2 > 0$, значит, нулевое решение исходной системы неустойчиво.

Ответ: неустойчиво.

Если у нелинейной системы есть несколько положений равновесия, тогда их устойчивость исследуется так:

1) Вычисляем координаты особых точек, приравнивая правые части уравнений системы к нулю
2) В окрестности каждой особой точки вычисляем главную линейную часть системы и исследуем ее аналогично рассмотренным случаям

Задача. (Сборник задач Филиппова № 915).
Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость:
$$\begin{cases}\dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y\end{cases}$$

Решение.

Находим координаты особых точек:
$$\begin{cases}y - x^2 - x = 0 \\ 3x - x^2 - y = 0\end{cases}$$
Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2y - 4x = 0$, откуда $y = 2x$.
Подставляя в первое уравнение системы, получаем $x^2 - x = 0$, откуда $x_1 = 0, x_2 = 1$.
Тогда $y_1 = 0, y_2 = 2$. Получили особые точки: $(0,0)$ и $(1,2)$.
Особая точка $(0,0)$:
Линеаризованная система:
$$\begin{cases}\dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 3x - y\end{cases}$$
Решаем характеристическое уравнение:
$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Получили $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3} > 0$, значит, положение равновесия $(0,0)$ неустойчиво.

Особая точка $(1,2)$:

Для того, чтобы перенести положение равновесия в точку $(0,0)$, сделаем замену:

$$\begin{cases}u = x - 1 \\ v = y - 2\end{cases}$$

Подставим в исходную систему, после упрощений получим

$$\begin{cases}\dot{u} = -3u + v - u^2 \\ \dot{v} = u - v - u^2\end{cases}$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{u} = -3u + v \\ \dot{v} = u - v \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$.

Таким образом, положение равновесия $(1,2)$ устойчиво.

Ответ: положение равновесия $(0,0)$ неустойчиво, положение равновесия $(1,2)$ устойчиво.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 920).

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2 \end{cases}$$

Решение.

Находим координаты особых точек:

$$\begin{cases} e^y - e^x = 0 \\ \sqrt{3x + y^2} - 2 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $y = x$, подставляя во второе уравнение получаем $x_1 = 1, x_2 = -4$. Тогда $y_1 = 1, y_2 = -4$. Получили особые точки: $(1,1)$ и $(-4,-4)$.

Особая точка $(1,1)$:

Для того, чтобы перенести положение равновесия в точку $(0,0)$, сделаем замену:

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases}$$

Подставим в исходную систему, после упрощений получим

$$\begin{cases} \dot{u} = e(e^v - e^u) \\ \dot{v} = \sqrt{4 + 3u + 2v + v^2} - 2 \end{cases}$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{u} = ev - eu \\ \dot{v} = \frac{3}{4}u + \frac{1}{2}v \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} e - \lambda & e \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (e - \frac{1}{2})\lambda - \frac{5}{4}e = 0$$

Из теоремы Виета (свободный член отрицателен) следует, что корни у квадратного уравнения разных знаков, значит, один из них положителен. Поэтому данное положение равновесия неустойчиво.

Особая точка $(-4, -4)$:

Для того, чтобы перенести положение равновесия в точку $(0,0)$, сделаем замену:

$$\begin{cases} u = x + 4 \\ v = y + 4 \end{cases}$$

Подставим в исходную систему, после упрощений получим

$$\begin{cases} \dot{u} = e^{-4}(e^{v} - e^{u}) \\ \dot{v} = \sqrt{4 + 3u - 8v + v^2} - 2 \end{cases}$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{u} = e^{-4}v - e^{-4}u \\ \dot{v} = \frac{3}{4}u - 2v \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} e^{-4} - \lambda & e^{-4} \\ \frac{3}{4} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (2 + e^{-4})\lambda + \frac{5}{4}e^{-4} = 0$$

Из теоремы Виета следует, что корни у квадратного уравнения одного знака, а сумма их отрицательна, значит, оба они отрицательны. Поэтому данное положение равновесия устойчиво.
Ответ: положение равновесия $(1,1)$ неустойчиво, положение равновесия $(-4, -4)$ устойчиво.

Семинар 9. Фазовый портрет.

Классификация положений равновесия линейной однородной автономной системы на плоскости.

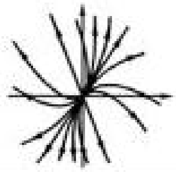
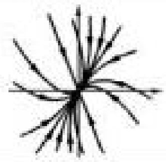
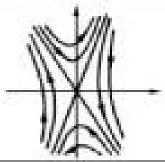
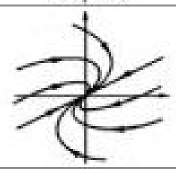
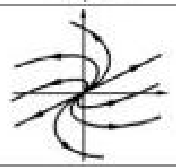
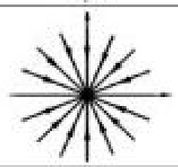
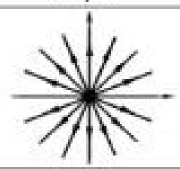
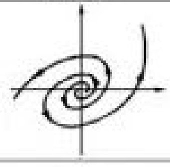
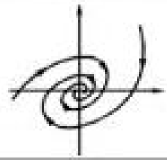
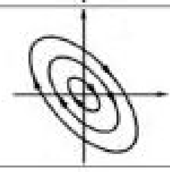
Рассмотрим линейную автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

У этой системы есть одна особая точка $(0,0)$. Определим, как выглядят фазовые траектории в окрестности особой точки. В зависимости от корней уравнения

$$det(A - \lambda E) = 0$$

получаем следующие случаи:

№	Корни характеристического уравнения	Точка покоя	Фазовый портрет	Устойчивость (неустойчивость) тривиального решения
1а	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел		Неустойчиво
1б	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел		Асимптотически устойчиво
2	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Седло		Неустойчиво
3а	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$, искл. случай 4а	Устойчивый вырожденный узел		Асимптотически устойчиво
3б	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$, искл. случай 4б	Неустойчивый вырожденный узел		Неустойчиво
4а	$\begin{cases} y' = ay \\ z' = az \end{cases}, \ a < 0$	Устойчивый дикритический узел		Асимптотически устойчиво
4б	$\begin{cases} y' = ay \\ z' = az \end{cases}, \ a > 0$	Неустойчивый дикритический узел		Неустойчиво
5а	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha > 0$	Неустойчивый фокус		Неустойчиво
5б	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha < 0$	Устойчивый фокус		Асимптотически устойчиво
6	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Центр		Устойчиво по Ляпунову

Обсудим некоторые нюансы построения фазового портрета:

1) Узел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Картина траекторий в окрестности узла:
Находим $\bar{v}_1$ – собственный вектор, отвечающий λ_1 и $\bar{v}_2$ – собственный вектор, отвечающий λ_2. Строим две прямые, направление которых определяется направлением собственных векторов. Далее строим траектории. Траектории касаются направления, соответствующего наименьшему по модулю собственному значению. В узел траектории не входят, а лишь неограниченно приближаются к нему.

1а) Неустойчивый узел. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Траектории направлены из особой точки, особая точка – неустойчивая.

1б) Устойчивый узел. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Траектории направлены в особую точку, особая точка – устойчивая.

2) Седло $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Так же, как и в случае 1), есть два направления, определяемые собственными векторами: одно направление устойчивое (определяемое $\bar{v}_1$-собственным вектором, отвечающим $\lambda_1 < 0$), второе – неустойчивое (определяемое $\bar{v}_2$-собственным вектором, отвечающим $\lambda_2 > 0$). Направление движения по траекториям наследуется по непрерывности из направления движения по сепаратрисам (прямые, определяемые собственными векторами).

3) Вырожденный узел $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Есть только одно направление, определяемое собственным вектором, траектории касаются этого направления.

Чтобы определить, как ведут себя траектории глобально, можно уточнить, например, под каким углом они пересекают оси координат – для этого подставляем в систему $x = 0$ ($y = 0$ соответственно), и находим, чему равен касательный вектор $(\dot{x}, \dot{y})$ в точках пересечения траекторий с осями.

Вообще, в любой точке пространства можно определить направление касательного вектора, подставив координаты этой точки в исходную систему и определив касательный вектор $(\dot{x}, \dot{y})$.

3а) Устойчивый вырожденный узел $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Траектории направлены в особую точку, особая точка – устойчивая.

3б) Неустойчивый вырожденный узел $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

Траектории направлены из особой точки, особая точка – неустойчивая.

4) Дикритический узел $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}$

В этом случае можно сразу найти уравнение траекторий, разделив второе уравнение системы на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Cx$$

4а) Устойчивый дикритический узел $a < 0$

Траектории направлены в особую точку (не пересекая ее), особая точка – устойчивая.

4б) Неустойчивый дикритический узел $a > 0$

Траектории направлены из особой точки, особая точка – неустойчивая.

5) Фокус $\lambda_{1,2} = a \pm b_i,\ \ a \neq 0$

Направление “закручивания” траектории можно определить по направлению касательного вектора к ней.

5а) Неустойчивый фокус $a > 0$

Траектории закручиваются из особой точки (не заходя в нее)

5б) Устойчивый фокус $a < 0$

Траектории закручиваются по направлению к особой точке (не заходя в нее)

6) Центр $\lambda_{1,2} = \pm bi$

Траектории – концентрические эллипсы, направление движения по которым можно определить по направлению касательного вектора в произвольной точке.

Оси симметрии эллипсов не обязаны совпадать с осями координат. Чтобы определить оси симметрии, из исходной системы определяем, где $\dot{x} = 0$ (т.о. находим собственные векторы, направленные вертикально по отношению к осям симметрии эллипса) и где $\dot{y} = 0$ (т.о. находим собственные векторы, направленные горизонтально по отношению к осям симметрии эллипса) и строим эллипсы, касающиеся этих направлений.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 971).

Определить тип особой точки системы, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

Решение.

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Собственные значения $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$.

Значит, тип особой точки – неустойчивый узел.

$$\lambda_1 = 3: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

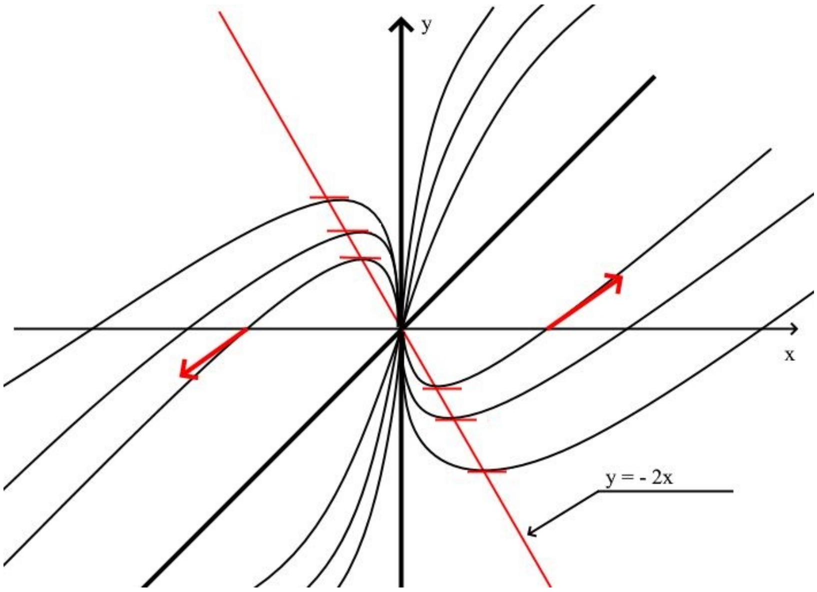
Направлению, соответствующему $\overline{v_2}$, отвечает наименьшее по модулю собственное значение, значит, траектории в окрестности $(0,0)$ должны касаться этого направления.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ox:
подставляем $y = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$ – получаем в точке $(x, 0)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} 3x \\ 2x \end{pmatrix}$.

Ось Oy траектории не пересекают (это – направление, соответствующее $\overline{v_2}$).

Определим, где $\dot{y} = 0$ (т.е. где касательные к траекториям горизонтальны):
подставляем $\dot{y} = 0$ во второе уравнение системы, получаем прямую $y = -2x$.



Ответ: неустойчивый узел.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 973).

Определить тип особой точки системы, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$

Решение.

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$.

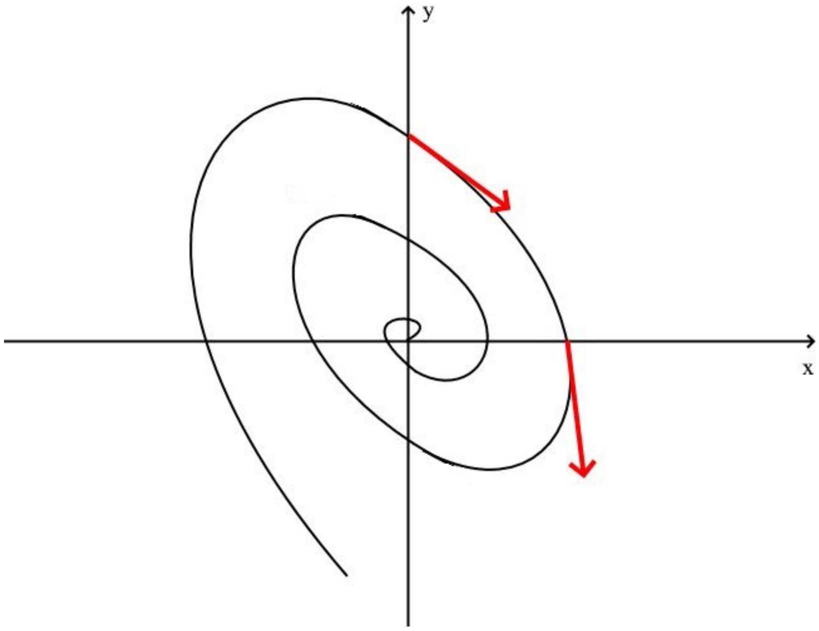
Значит, тип особой точки – устойчивый фокус.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ox:
подставляем $y = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -6x \end{cases}$ – получаем в точке $(x, 0)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} x \\ -6x \end{pmatrix}$.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Oy:
подставляем $x = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases}\dot{x} = 3y \\ \dot{y} = -5y\end{cases}$ – получаем в точке $(0, y)$ касательный вектор $\begin{pmatrix}3y \\ -5y\end{pmatrix}$.



Ответ: устойчивый фокус.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 974).
Определить тип особой точки системы, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).
$\begin{cases}\dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y\end{cases}$

Решение.

Решаем характеристическое уравнение:
$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

Собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Значит, тип особой точки – седло.

Находим сепаратрисы:

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

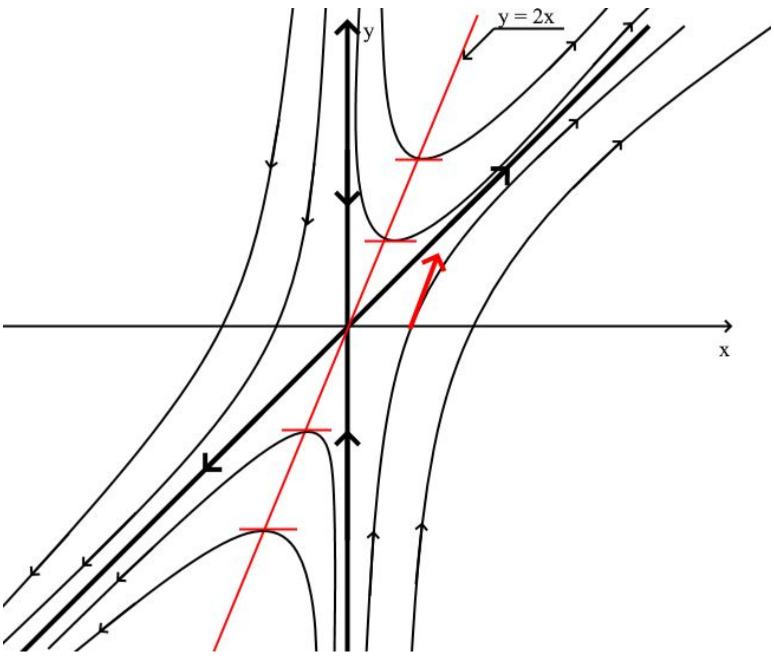
Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ox:
подставляем $y = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$ – получаем в точке $(x, 0)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$.

Далее по непрерывности находим направление движения по всем траекториям.

Ось Oy траектории не пересекают (это – направление, соответствующее $\overline{v_2}$).

Определим, где $\dot{y} = 0$ (т.е. где касательные к траекториям горизонтальны):
подставляем $\dot{y} = 0$ во второе уравнение системы, получаем прямую $y = 2x$.



Ответ: седло.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 975).
Определить тип особой точки системы, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).
$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$

Решение.

Решаем характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -6$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$.

Значит, тип особой точки – центр.

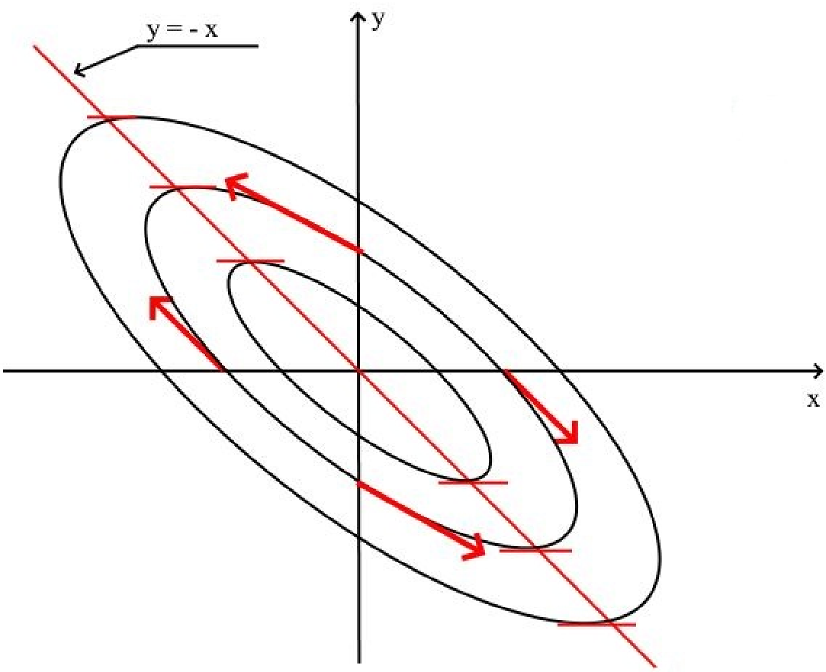
Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ox:
подставляем $y = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$ – получаем в точке $(x, 0)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} -2x \\ 2x \end{pmatrix}$.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Oy:
подставляем $x = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{x} = -5y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ – получаем в точке $(0, y)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} -5y \\ 2y \end{pmatrix}$.

Определим, где $\dot{y} = 0$ (т.е. где касательные к траекториям горизонтальны):
подставляем $\dot{y} = 0$ во второе уравнение системы, получаем прямую $y = -x$.



Ответ: центр.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1021).

Определить тип особых точек системы, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1 \end{cases}$$

Решение.

Находим координаты особых точек и определяем тип каждой из них:

$$\begin{cases} 2x + y^2 - 1 = 0 \\ 6x - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем $x = 0$, откуда $y = \pm 1$. Получаем две особые точки: $M_0(0,1)$ и $M_1(0,-1)$.

1) $M_0(0,1)$:

Для того, чтобы перенести положение равновесия в точку $(0,0)$, сделаем замену:

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - 1 \end{cases}$$

Подставим в исходную систему, после упрощений получим

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + 2v + v^2 \\ \dot{v} = 6u - 2v - v^2 \end{cases}$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + 2v \\ \dot{v} = 6u - 2v \end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 6 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 = 0$$

Собственные значения $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -4$.

Значит, тип особой точки – седло.

Находим сепаратрисы:

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -4$: $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

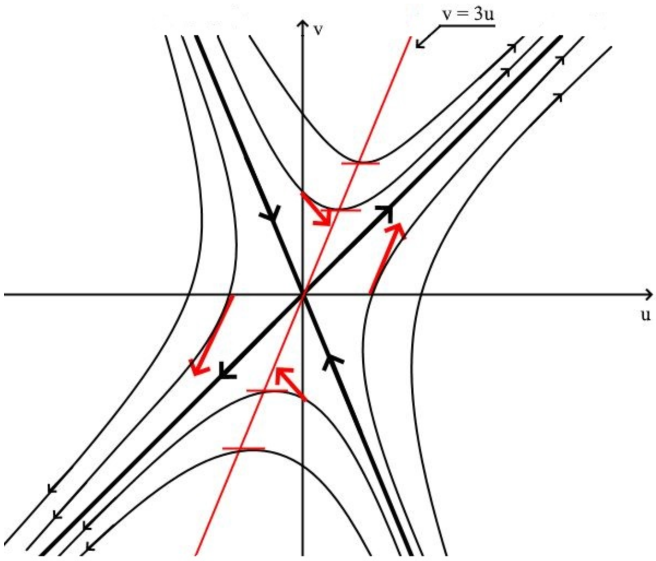
Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ou:
подставляем $v = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{u} = 2u \\ \dot{v} = 6u \end{cases}$ – получаем в точке $(u, 0)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} 2u \\ 6u \end{pmatrix}$.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ov :
подставляем $u = 0$ в исходную систему, получаем

$\begin{cases} \dot{u} = 2v \\ \dot{v} = -2v \end{cases}$ – получаем в точке $(0, v)$ касательный вектор $\begin{pmatrix} 2v \\ -2v \end{pmatrix}$.

Определим, где $\dot{v} = 0$ (т.е. где касательные к траекториям горизонтальны):
подставляем $\dot{v} = 0$ во второе уравнение системы, получаем прямую $v = 3u$.



2) $M_1(0, -1)$:

Для того, чтобы перенести положение равновесия в точку $(0,0)$, сделаем замену:

$\begin{cases} u_1 = x \\ v_1 = y + 1 \end{cases}$

Подставим в исходную систему, после упрощений получим

$$\begin{cases}\dot{u_1} = 2u_1 - 2v_1 + {v_1}^2\\ \dot{v_1} = 6u_1 + 2v_1 - {v_1}^2\end{cases}$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases}\dot{u_1} = 2u_1 - 2v_1\\ \dot{v_1} = 6u_1 + 2v_1\end{cases}$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -2\\ 6 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3}i$.

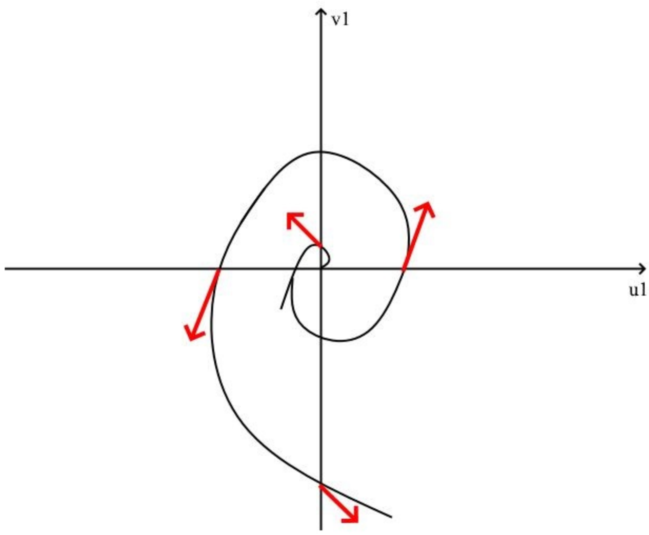
Значит, тип особой точки – неустойчивый фокус.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ou_1:
подставляем $v_1 = 0$ в исходную систему, получаем

$$\begin{cases}\dot{u_1} = 2u_1\\ \dot{v_1} = 6u_1\end{cases}$$ – получаем в точке $(u_1, 0)$ касательный вектор $\begin{pmatrix}2u_1\\ 6u_1\end{pmatrix}$.

Определим, под каким углом траектории пересекают ось Ov_1 :
подставляем $u_1 = 0$ в исходную систему, получаем

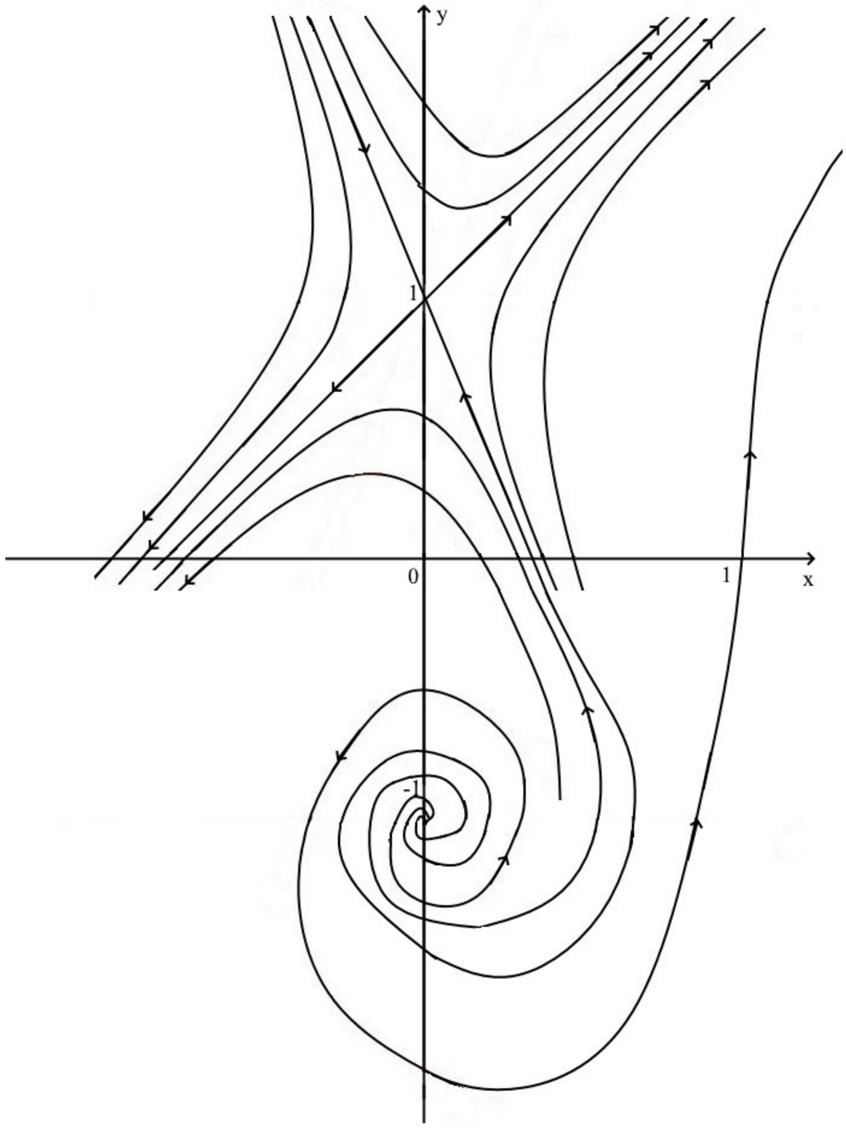
$$\begin{cases}\dot{u_1} = -2v_1\\ \dot{v_1} = 2v_1\end{cases}$$ – получаем в точке $(0, v_1)$ касательный вектор $\begin{pmatrix}2v_1\\ -2v_1\end{pmatrix}$.



Как происходит переход траекторий при движении из одной особой точки в другую? По мере удаления от особой точки сепаратрисы будут искривляться, все сделанные выше выводы о поведении траекторий будут верны локально (в окрестности особых точек).

Одна из траекторий неустойчивого фокуса переходит в сепаратрису и уходит в узел. Для того, чтобы выяснить, что происходит с траекториями при пересечении с осью Ox, подставим $y = 0$ в исходное уравнение, получим касательный вектор

$\begin{cases}\dot{x} = 2x - 1\\ \dot{y} = 6x + 1\end{cases}$, получаем, например, в точке $(0,1)$ касательный вектор $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.



Ответ: 1) седло, 2) неустойчивый фокус.

Семинар 10. Производная решения дифференциальных уравнений и систем по параметру.

Упражнение. На семинаре 8 мы нашли положения равновесия и исследовали их на устойчивость для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2 \end{cases}$$ (Сборник задач Филиппова № 920).

Тип особой точки $(1,1)$ – седло, тип особой точки $(-4,-4)$ – устойчивый узел.

С помощью программы построить фазовый портрет системы.

Зависимость решения дифференциальных уравнений и их систем от параметра. Производная решения по параметру.

Вначале рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(x_0) = a(\mu) \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Наша задача – понять, как меняется решение в зависимости от изменения параметра μ. Понятно, что скорость изменения решения в зависимости от параметра определяется производной этого решения по параметру.

Пусть функции $f(x, y, \mu)$, $a(\mu)$ непрерывно дифференцируемы вместе со своими производными по μ.

Будем считать, что $y = y(x, \mu_0)$ – решение (*) при $\mu = \mu_0$. Обозначим

$u = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0}$ – производная решения по параметру, вычисленная при фиксированном значении параметра μ.

Продифференцируем по μ левую и правую часть исходного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

Поменяв порядок дифференцирования, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mu=\mu_0}\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0}$$

В наших обозначениях $u = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0}$. Получаем

$$u' = u\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mu=\mu_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0}$$

Производные $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mu=\mu_0}$ и $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0}$ вычисляются при условии, что y – решение (*).

Продифференцируем по μ начальные условия $y(x_0) = a(\mu)$:

$$u(x_0) = a'(\mu)$$

Получили задачу Коши относительно u:

$$\begin{cases} u' = u\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mu=\mu_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} \\ u(x_0) = a'(\mu) \end{cases}$$

Решив эту задачу Коши, мы найдем производную решения исходной системы по μ при конкретном значении параметра μ.

Аналогично можно найти производную по параметру системы уравнений.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1064).
Найти u - производную решения по параметру: $u = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

$$\begin{cases} y' = y + \mu(x + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение.

$y = y(x, \mu)$. Продифференцируем по μ левую и правую части уравнения, получим:

$$u' = (u + x + y^2 + \mu 2yu)|_{\mu=0} \Leftrightarrow u' = u + x + y^2$$

Найдем y – решение исходной задачи при том значении параметра, при котором нам нужно вычислить производную, т.е. при $\mu = 0$:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Получаем $y = e^x$.

Теперь продифференцируем по μ начальное условие, получим:

$u(0) = 0$.

Итак, получили задачу Коши относительно u:

$$\begin{cases} u' - u = x + e^{2x} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Решаем однородное уравнение:

$u' - u = 0$

$u_{\text{оо}} = Ce^x$

Находим частное решение неоднородного уравнения $u_{\text{чн}}$, где $u_{\text{чн}} = u^1_{\text{чн}} + u^2_{\text{чн}}$:

1) $u' - u = x$

$u^1_{\text{чн}} = Ax + B$, подставляя в уравнение, находим $A = B = -1$. Получаем $u^1_{\text{чн}} = -x - 1$.

2) $u' - u = e^{2x}$

$u^2_{\text{чн}} = Ae^{2x}$, подставляя в уравнение, находим $A = 1$. Получаем $u^2_{\text{чн}} = e^{2x}$.

$u_{\text{он}} = u_{\text{оо}} + u^1_{\text{чн}} + u^2_{\text{чн}} = Ce^x - x - 1 + e^{2x}$.

Учитывая начальное условие $u(0) = 0$, получаем $u = -x - 1 + e^{2x}$.

Ответ: $u = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = -x - 1 + e^{2x}$.

В качестве параметра также может выступать начальное условие. От него будет зависеть решение, но не правая часть:

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1066).

Найти u - производную решения по начальному условию: $u = \left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$

$$\begin{cases} y' = y + y^2 + xy^3 \\ y(2) = y_0 \end{cases}$$

Решение.

Продифференцируем по y_0 уравнение и начальные условия, получим:

$$\begin{cases} u' = u + 2yu + 3xy^2u \\ u(2) = 1 \end{cases}$$

Найдем y_0 – решение исходной задачи при $y_0 = 0$:

$$\begin{cases} y' = y + y^2 + xy^3 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Легко видеть, что $y = 0$ - решение этой системы. Из теоремы существования и единственности следует, что это решение единственное.

Подставляя $y = 0$ в систему для определения u, получим:

$$\begin{cases} u' = u \\ u(2) = 1 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $u = e^{x-2}$.

Ответ: $u = \left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = e^{x-2}$.

Теперь решим задачу на нахождение производной решения системы:

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1069).

Найти u - производную решения системы по параметру: $u = \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x(0) = 0 \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, & y(0) = 0 \end{cases}$$

Решение.

Здесь t – независимая переменная, μ – параметр. Обозначим $u = \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$, $v = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Продифференцируем по μ систему и начальные условия, получим:

$$\begin{cases} \dot{u} = 8tyv|_{\mu=0}, & u(0) = 0 \\ \dot{v} = 5x + 5\mu u|_{\mu=0}, & v(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = 8tyv, & u(0) = 0 \\ \dot{v} = 5x, & v(0) = 0 \end{cases}$$

Определим $x(t)$ и $y(t)$ из решения исходной системы, при условии, что $\mu = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x(0) = 0 \\ \dot{y} = 1, & y(0) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы и начальных условий получаем $y(t) = t$. Подставляя в первое уравнение системы, и учитывая начальные условия, получаем $x(t) = t^4$.

Теперь подставляем найденные значения $x(t)$ и $y(t)$ в систему для определения u и v:

$$\begin{cases} \dot{u} = 8t^2 v, & u(0) = 0 \\ \dot{v} = 5t^4, & v(0) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы и начальных условий получаем $v(t) = t^5$. Подставляя в первое уравнение системы, и учитывая начальные условия, получаем $u(t) = t^8$.

Ответ: $u = \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = t^8$.

Семинар 11. Уравнения с частными производными первого порядка.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1044).

Изобразить на фазовой плоскости траектории системы, записанной в полярных координатах, и исследовать, имеются ли предельные циклы.

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(|r-1| - |r-2| - 2r - 3) \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

Решение.

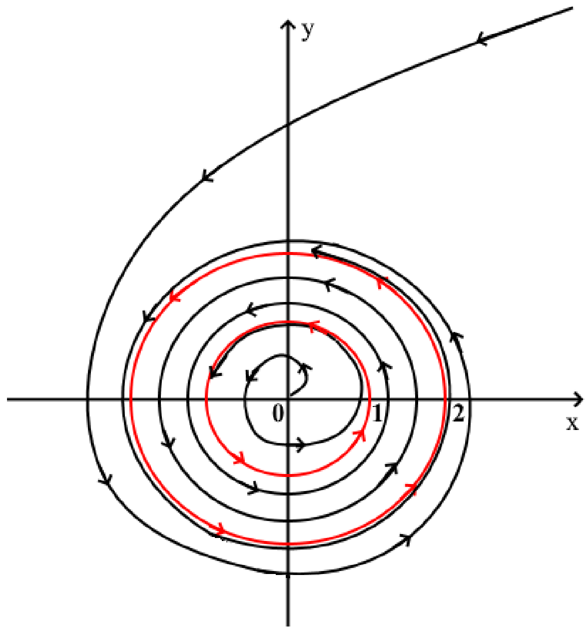
В зависимости от знака подмодульных выражений, получаем:

$\frac{dr}{d\varphi} = 2r(1-r),\ 0 \le r \le 1,$ с ростом φ растет r, $(0,0)$ – особая точка типа “фокус”

$\frac{dr}{d\varphi} = 0,\ 1 < r \le 2$ - получаем концентрические окружности с центром в точке $(0,0)$, заключенные между окружностями $r = 1$ и $r = 2$.

$\frac{dr}{d\varphi} = 2r(2-r),\ 2 < r,$ φ убывает с ростом r

Получаем такую картину фазовых траекторий:



При $1 \leq r \leq 2$ траекториями системы являются концентрические окружности.

Окружность $r = 1$ является внешним предельным циклом (односторонним) – внутри есть особая точка $(0, 0)$ типа “фокус”, из которой траектории разматываются, притягиваясь к предельному циклу $r = 1$.

Окружность $r = 2$ является внутренним предельным циклом (односторонним), ее полуокрестность заполнена траекториями, стремящимися к окружности $r = 2$ при $t \to \infty$.

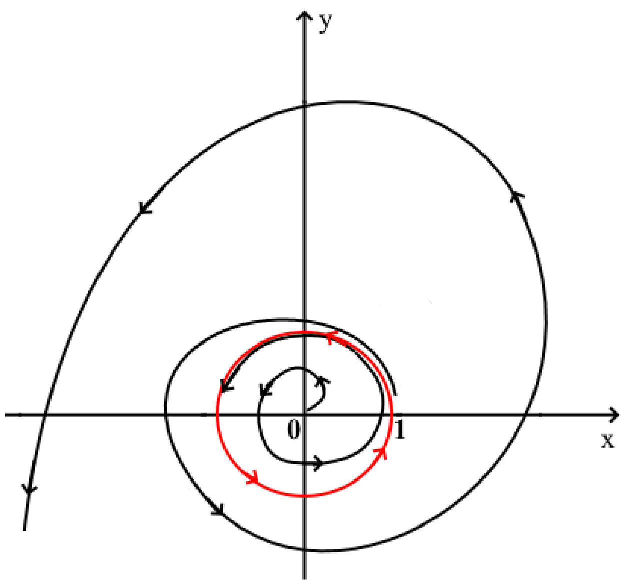
Ответ: $r = 1$ и $r = 2$ – односторонние предельные циклы.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1042).
Изобразить на фазовой плоскости траектории системы, записанной в полярных координатах, и исследовать, имеются ли предельные циклы.

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(1-r)^2 \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

Решение.

$\frac{dr}{d\varphi} = r(1-r)^2 = 0$ при $r = 0$ и $r = 1$. Заметим, что $r = 1$ – кратный корень, при переходе через него знак $\frac{dr}{d\varphi}$ не меняется. Окружность $r = 1$ – периодическая траектория, $(0, 0)$ – особая точка типа “фокус”.



Траектории, выходя из точки $(0,0)$, наматываются изнутри на предельный цикл $r=1$. При $r>1$ траектории разматываются с предельного цикла $r=1$. Таким образом, $r=1$ – полуустойчивый предельный цикл.

Ответ: $r=1$ – полуустойчивый предельный цикл.

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1074).
Найти первые три члена разложения решения по степеням малого параметра μ:
$$\begin{cases} y' = 4\mu t - y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Решение.

Пусть $y(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + O(\mu^3)$.

Тогда $y'(t) = v_0'(t) + \mu v_1'(t) + \mu^2 v_2'(t) + O(\mu^3)$. Подставим в исходное уравнение:

$$\begin{cases} v_0'(t) + \mu v_1'(t) + \mu^2 v_2'(t) + O(\mu^3) = 4\mu t - (v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + O(\mu^3))^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\begin{cases} v_0' = -v_0^2, & v_0(1) = 1 \\ v_1' = 4t - 2v_0 v_1, & v_1(1) = 0 \\ v_2' = -v_1^2 - 2v_0 v_2, & v_2(1) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $v_0 = t^{-1}$.
Подставляя $v_0 = t^{-1}$ во второе уравнение, получаем $v_1 = t^2 - t^{-2}$.
Подставляя найденные значения v_0 и v_1 в третье уравнение системы, получаем
$v_2 = -\frac{1}{7}t^5 + \frac{2}{3}t - \frac{32}{21}t^{-2} + t^{-3}$.

Таким образом, $y(t) = t^{-1} + \mu(t^2 - t^{-2}) + \mu^2(-\frac{1}{7}t^5 + \frac{2}{3}t - \frac{32}{21}t^{-2} + t^{-3}) + O(\mu^3)$.

Ответ: $y(t) = t^{-1} + \mu(t^2 - t^{-2}) + \mu^2(-\frac{1}{7}t^5 + \frac{2}{3}t - \frac{32}{21}t^{-2} + t^{-3}) + O(\mu^3)$.

Уравнения с частными производными первого порядка.

Определение. Первым интегралом системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \qquad \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1 \dots, x_n) \end{cases} \tag{*}$$

Называется функция $v(t, x_1, \dots, x_n)$, обращающаяся в постоянную на каждом решении системы, и не равная тождественно постоянной.

Таким образом, вдоль любого решения системы имеем $v(t, x_1, \dots, x_n) = C$. Это условие равносильно тому, что $\left.\frac{dv}{dt}\right|_* = 0$ (производная функции в силу системы равна нулю), т.е. $\left.\frac{dv}{dt}\right|_* = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n = 0.$

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1161).

Проверить, является ли соотношение $\varphi = C$ первым интегралом данной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2 - t}{y} \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$\varphi_1 = t^2 + 2xy,\ \varphi_2 = x^2 - ty.$

Решение.

Вычисляем производную в силу системы:

φ_1: $\frac{d\varphi_1}{dt} = 2t + 2y\frac{x^2-t}{y} + 2x(-x) = 0$. Значит, φ_1 – первый интеграл.

φ_2: $\frac{d\varphi_2}{dt} = -y + 2x\frac{x^2-t}{y} - t(-x) \neq 0$. Значит, φ_2 не является первым интегралом.

Ответ: φ_1 является, φ_2 не является.

Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка.

Рассмотрим уравнение

$$a_1(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{*}$$

Система уравнений характеристик:

$\frac{dx}{a_1(x,y)} = \frac{dy}{a_2(x,y)} = \frac{dz}{1}$, или $\begin{cases} \dot{x} = a_1(x, y) \\ \dot{y} = a_2(x, y) \end{cases}$

Пусть $\varphi(x, y)$ – первый интеграл. Тогда $z = F\big(\varphi(x, y)\big)$, где $F \in C^1(D), D \in \mathbb{R}^2$ задает общее решение уравнения (*).

Задача.

Решить уравнение:
$(x + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Решение.

Составим характеристическую систему:

$\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{2y}$. Тогда

$\frac{dx}{dy} = \frac{x+2y}{2y} = \frac{x}{y} + 2$ – получили однородное уравнение первого порядка.

Пусть $u = \frac{x}{y}$, тогда $x = yu$, $x' = u + yu'$. Подставим в систему, получим
$u + yu' = u + 2$, откуда $u' = \frac{2}{y}$. Тогда $u = 2\,ln|y| + C$. Получаем

$$\frac{x}{y} = \ln y^2 + C \Leftrightarrow \frac{x}{y} - \ln y^2 = C$$

Тогда $\varphi(x, y) = \frac{x}{y} - \ln y^2$ – первый интеграл и $z = F\left(\frac{x}{y} - \ln y^2\right)$, $F \in C^1$ – решение.

Ответ: $z = F\left(\frac{x}{y} - \ln y^2\right)$, $F \in C^1$.

Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка.

Рассмотрим уравнение

$$a_1(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y) \qquad (*)$$

Система уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{a_1(x,y)} = \frac{dy}{a_2(x,y)} = \frac{dz}{b(x,y)}$$

Пусть $\varphi_1(x, y) = C_1$ и $\varphi_2(x, y) = C_2$ – функционально независимые интегралы системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Тогда $z = F(\varphi_1,\ \varphi_2)$, где $F \in C^1(D), D \in \mathbb{R}^2$ задает общее решение уравнения (*).

Метод нахождения интегрируемых комбинаций

Если $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n} = k$, где A_i, B_i – некоторые функции, то для любого набора функций $k_1, \dots, k_n$ верно равенство:

$$\frac{k_1 A_1 + \cdots + k_n A_n}{k_1 B_1 + \cdots + k_n B_n} = k$$

Задача. (Сборник задач Филиппова № 1171).

Найти общее решение для уравнения:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

Решение.

Система уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x-y}$$

Из соотношения $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ получаем $x\,dx = y\,dy$, откуда $x^2 - y^2 = C_1$, т.е. $\varphi_1 = x^2 - y^2$ – первый интеграл системы.
Для нахождения второго интеграла воспользуемся методом нахождения интегрируемых комбинаций, получим:

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dz}{x - y} \Leftrightarrow -\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{x-y}$$

Так как $x - y \neq 0$, получаем $d(x-y) = -\,dz$, откуда $x - y + z = C_2$, т.е. $\varphi_2 = x - y + z$ – второй интеграл системы.

Тогда решение выглядит так: $F(x^2 - y^2,\ x - y + z) = 0$.
Но, так как неизвестная функция z входит только в один из независимых первых

интегралов, то решение можно записать в виде
$x-y+z=\Phi(x^2-y^2),\ \Phi\epsilon C^1$, откуда $z=\Phi(x^2-y^2)-x+y,\ \Phi\epsilon C^1$.

Ответ: $z=\Phi(x^2-y^2)-x+y,\ \Phi\epsilon C^1$.

Еще один метод нахождения второго интеграла – использовать соотношение между переменными, полученное при нахождении первого интеграла.

Задача.

Найти общее решение для уравнения:
$e^x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$

Решение.

Система уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{x-y}$$

Из соотношения $\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}$ получаем $e^{-x}-\frac{1}{y}=C_1$, т.е. $\varphi_1=e^{-x}-\frac{1}{y}$ – первый интеграл системы.
Для нахождения второго интеграла выразим y из первого интеграла, получим $y=\frac{e^x}{1-C_1e^x}$. Теперь подставим полученное значение в уравнение $\frac{dx}{e^x}=\frac{dz}{x-y}$, получим

$$\frac{dx}{e^x}=\frac{dz}{x-\frac{e^x}{1-C_1e^x}}$$. После упрощений получаем

$$dz=\left(xe^{-x}-\frac{1}{1-C_1e^x}\right)dx.$$

Интегрируя (xe^{-x} интегрируем по частям, $\frac{1}{1-C_1e^x}$ интегрируем с помощью замены $t=1-C_1e^x$), получаем

$$z=-e^{-x}(x+1)-ln\left(\frac{-C_1e^x}{1-C_1e^x}\right)+C_2.$$

Подставим в это выражение соотношение между переменными, полученное при нахождении первого интеграла: $C_1=e^{-x}-\frac{1}{y}$, получим

$z = -e^{-x}(x+1) - ln\left(\frac{e^x - y}{e^x}\right) + C_2$, откуда

$\varphi_2 = z + e^{-x}(x+1) + ln\left(\frac{e^x - y}{e^x}\right)$ – второй интеграл.

Так как неизвестная функция z входит только в один из независимых первых интегралов, то решение можно записать в виде

$z = -e^{-x}(x+1) - ln\left(\frac{e^x - y}{e^x}\right) + \Phi\left(e^{-x} - \frac{1}{y}\right),\ \Phi \epsilon C^1.$

Ответ: $z = -e^{-x}(x+1) - ln\left(\frac{e^x - y}{e^x}\right) + \Phi\left(e^{-x} - \frac{1}{y}\right),\ \Phi \epsilon C^1.$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ