

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧАСТЬ 1

АСТАШОВА  
ИРИНА ВИКТОРОВНА

—  
МЕХМАТ МГУ



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

Асташова И.В.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций для студентов 2 курса  
механико-математического факультета  
МГУ им. М.В.Ломоносова  
(2-й поток)

1 семестр 2012-2013 уч.год

Москва 2012

# Содержание

<b>1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений 1-го порядка.</b>	<b>3</b>
1.1 Дифференциальное уравнение. Определение решения. . . . .	3
1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	3
1.2.1 Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	5
1.2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши . . . . .	6
1.2.3 Обоснование метода разделения переменных. . . . .	6
1.2.4 Критерий единственности решения для уравнения $y' = f(y)$ (необходимый и достаточный признак особых решений). . . . .	7
1.2.5 Однородные уравнения . . . . .	9
1.2.6 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли	10
1.2.7 Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	14
1.3 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. . . . .	20
<b>2 Существование и единственность решения задачи Коши. Продолжение решений. Непрерывная зависимость решения от начальных условий, правой части и параметра.</b>	<b>22</b>
2.1 Теорема существования и единственности решения задачи Коши . . . . .	22
2.1.1 Лемма Гронуолла. . . . .	24
2.2 Теорема о продолжении решения задачи Коши. . . . .	26
2.2.1 Достаточные условия продолжаемости решения на весь интервал . . . . .	27
2.3 Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части уравнения. . . . .	29
2.3.1 Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра. . . . .	30
<b>3 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно первой производной.</b>	<b>30</b>
<b>4 Уравнения высших порядков.</b>	<b>34</b>
4.1 Уравнения высших порядков . . . . .	34
4.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка	34
<b>5 Линейные уравнения высших порядков.</b>	<b>37</b>
5.1 Общая теория линейных дифференциальных уравнений высших порядков . . . . .	37
5.1.1 Понятие о линейной зависимости и линейной независимости функций . . . . .	38
5.1.2 Понятие о фундаментальной системе решения . . . . .	41
5.1.3 Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения. . . . .	41
5.1.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения . . . . .	42
5.2 Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами . . . . .	44
5.2.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами . . . . .	44
5.2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида . . . . .	45
5.2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью произвольного вида . . . . .	47
<b>Список литературы</b>	<b>47</b>

# 1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений 1-го порядка.

## 1.1 Дифференциальное уравнение. Определение решения.

**Определение 1.1.** *Дифференциальным уравнением называется уравнение*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где  $x$  — независимая переменная,  $y(x)$  — неизвестная функция,  $n$  — порядок уравнения.

**Определение 1.2.** *Уравнением, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Будем рассматривать уравнения с  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  ( $y \in \mathbb{R}^n$ ),  $f \in \mathbb{R}$  ( $f \in \mathbb{R}^m$ ).

**Определение 1.3.** *Решением дифференциального уравнения называется  $n$  раз дифференцируемая функция  $\varphi(x)$ , обращающая уравнение в тождество.*

**Предмет обыкновенных дифференциальных уравнений:**

1. найти решение дифференциального уравнения, если это возможно;
2. доказать существование решения (в тех случаях, когда его нельзя найти аналитически);
3. определить область, в которой это решение существует;
4. выяснить, будет ли единственным решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям;
5. выяснить свойства решения, если его не удастся найти аналитически:
  - (а) ограниченность;
  - (б) убывание, возрастание (монотонность);
  - (с) поведение на бесконечности, если оно там определено;
  - (д) поведение вблизи границ области определения;
  - (е) существование нулей, в том числе, количество нулей на заданном интервале;

и т.д.

## 1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение 1.4.** *Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

или

$$y' = F(x, y). \tag{1.2}$$

**Определение 1.5.** *Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция  $y = \varphi(x)$ , один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

**Пример 1.1.** *Решить уравнение*

$$y' = x.$$

**Решение.** Решением уравнения является функция  $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$ , где  $C$  — произвольная действительная постоянная.

**Определение 1.6.** *Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой  $y = \varphi(x, C)$  или  $\psi(x, y, C) = 0$ , то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном  $C = C_0$  эта функция определяет решение;
2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором  $C = C_0$ .

**Определение 1.7.** *Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из формулы (формулы) общего решения при некотором значении  $C = C_0$ .*

В примере 1.1 формула  $y = \frac{x^2}{2} + C$  задает общее решение, а, например, решения  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2} + 1$  — частные решения.

**Найти решение дифференциального уравнения** — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

**Геометрический смысл дифференциального уравнения  $y' = F(x, y)$ .**

Данное уравнение в любой точке плоскости, где  $F(x, y)$  существует, определяет направление, угол наклона  $\alpha$  к оси  $Ox$  которого задается равенством  $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = F(x_0, y_0)$ . Если каждой точке плоскости таким образом сопоставить направление, то получим поле направлений (направление изображается отрезком с центром в точке  $(x_0, y_0)$ ).

**Определение 1.8.** *Интегральной кривой (интегральной кривой поля направлений) называется кривая, касающаяся в любой своей точке поля направлений.*

**Определение 1.9.** *Изоклинами называются кривые, вдоль которых направление поля постоянно.*

**Пример 1.2.** *Построить интегральные кривые, определяемые уравнением  $y' = y - x^2$ .*

**Решение.** Уравнение изоклин

$$\begin{aligned}y' &= C \\y - x^2 &= C \\y &= x^2 + C\end{aligned}$$

$$C = 0 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$$

$$C = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \Rightarrow y = x^2 + 2 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2,$$

$$C = -1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что при  $y - x^2 > 0$  получаем  $y' > 0$ , то есть  $y(x)$  возрастает. Аналогично при  $y - x^2 < 0$  получаем, что  $y(x)$  убывает, поэтому кривая  $y = x^2$  — линия экстремумов.

**Замечание 1.1.** Отметим, что интегральные кривые касаются поля направлений в каждой своей точке.

**Пример 1.3.** *Построить интегральные кривые, определяемые уравнением  $y' = -\frac{x}{y}$ .*

**Решение.** Уравнение изоклин  $-\frac{x}{y} = C \Rightarrow y = -\frac{x}{C}$ .

$$C = 1 \Rightarrow y = -x \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = -1 \Rightarrow y = x \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2.$$

Можно отметить, что уравнение обладает симметрией: замена  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$  не меняет уравнения. Можно также заметить, что если  $\operatorname{tg} \alpha = k_1$  — угловой коэффициент поля направлений, то  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$  — угловой коэффициент изоклины, то есть поле направлений ортогонально изоклинам. Интегральные кривые — окружности.

**Связь между понятиями «решение дифференциального уравнения» и «интегральная кривая»:** для уравнения (1.2) решение — это интегральная кривая, так как уравнение (1.2) в любой точке задает направление, касательное к  $y(x)$ :  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ . Но, (см., например, пример 1.3, интегральные кривые могут не являться функциями (каждому значению  $x$  соответствует не единственное значение  $y$ ), поэтому не всякую интегральную кривую можно назвать решением, если его понимать в смысле нашего определения.

*Замечание 1.2.* Иногда наряду с уравнением  $y' = f(x, y)$  удобно рассматривать уравнение  $x' = \frac{1}{f(x, y)}$ . Тогда совокупность решений этих уравнений будет задавать все интегральные кривые.

### 1.2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 1.10.** Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$y' = f(x)g(y) \quad (1.3)$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

**Метод разделения переменных (формальный).**

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

Умножив уравнение на  $\frac{dx}{g(y)}$ , получим

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \\ g(y) \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow y(x) \text{ — делаем проверку, подставляя в уравнение.} \\ g(y) = 0 \end{array} \right.$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде  $y = \varphi(x, C)$  или  $\psi(x, y, C) = 0$ .

*Замечание 1.3.* Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

**Пример 1.4.** Решить уравнение  $y' = xy^2$ .

**Решение.**

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{y^2} = xdx, \\ y \neq 0, \end{array} \right. \\ y = 0. \end{array} \right.$$

$y \equiv 0$  — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение  $y(x) \equiv 0$  не получается из этой формулы ни при каком значении  $C$ , поэтому общее решение определяется их совокупностью.

*Замечание 1.4.* При решении этого уравнения мы получили, что если  $y \equiv 0$ , то оно является решением. Может ли оказаться, что  $y(x) = 0$  в некоторой точке  $x_0$ , но  $y(x)$  не тождественно равно нулю?

Ответ на этот вопрос можно дать с использованием теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

### 1.2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

**Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка:** найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.4)$$

то есть задача

$$\begin{cases} y' = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

**Определение 1.11.** Будем говорить, что задача Коши (1.5) **имеет единственное решение**, если существует такое  $h > 0$ , что в интервале  $(x_0 - h, x_0 + h)$  определено  $y = \varphi(x)$ , являющееся решением задачи (1.5), и не существует решения, определенного в том же интервале, и не совпадающего с решением  $y = \varphi(x)$  хотя бы в одной точке этого интервала, отличной от точки  $x_0$ .

**Теорема 1.1.** Пусть функция  $F(x, y)$

1) определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ . Тогда существует решение задачи Коши, определенное на  $V_h(x_0) = \{x_0 - h, x_0 + h\}$ , где  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  $M = \max_{\Pi} F(x, y)$ ;

2) если, в дополнение к первому условию, производная  $F'_y(x, y)$  определена и непрерывна в  $\Pi$ , то решение задачи Коши единственно в  $V_h(x_0)$ .

Доказательство будет приведено позже.

**Замечание 1.5.** Теорема носит локальный характер, то есть утверждается существование и единственность решения лишь в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Замечание 1.6.** Теорема дает лишь достаточные условия существования и единственности, которые можно ослабить, заменив, например, второе условие условием Липшица.

**Определение 1.12.** Функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y$  в  $\Pi$ , если существует такое  $L > 0$ , что для всех  $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$  имеем  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ .

Теперь можно дать ответ на ранее поставленный вопрос (замечание 1.4). В примере 1.4 функция  $y(x) \equiv 0$  является решением, которое удовлетворяет условию  $y(x_0) = 0$  для всех  $x_0 \in \mathbb{R}$ , поэтому в силу теоремы существования и единственности это уравнение не может иметь других решений, обращающихся в ноль в некоторой точке  $x_0$ .

### 1.2.3 Обоснование метода разделения переменных.

1) Рассмотрим уравнение вида  $y' = f(x)$ .

Пусть  $f(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$ , тогда из курса математического анализа имеем

$$y = \int f(x)dx + C, \quad (1.6)$$

где под выражением  $\int f(x)dx$  мы будем понимать первую первообразную. Придавая константе  $C$  произвольные значения, получим все решения данного уравнения, то есть формула (1.6) задает общее решение. Запишем решение в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + C, \quad x_0 - \text{произвольное значение из интервала.}$$

Отсюда  $y(x_0) = C$ . Таким образом, придавая функции  $y(x)$  значение  $y_0$  в точке  $x_0$ , получим частное решение, однозначно определяемое через  $x_0$  и  $y_0$ .

2) Рассмотрим уравнение вида  $y' = f(y)$ , где  $f(y)$  — непрерывная на  $(a, b)$  функция.

Предположим, что для функции, задающей решение,  $y(x) = \varphi(x)$ , существует обратная функция  $x = \psi(y)$ . Тогда для нее имеем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}, \quad \text{если } f(y) \neq 0.$$

Значит, на интервале  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ :  $f(y) \neq 0$  при  $x \in (\alpha, \beta)$ , получим

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \quad (1.7)$$

Если  $x(y_0) = x_0$ , то  $x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}$ . Данная формула, как и формула (1.7), допускает обратную функцию, так как на  $(\alpha, \beta)$   $f(y) \neq 0$ , а значит,  $f(y)$  сохраняет знак. Тогда  $x - x_0$  — монотонная функция от  $y$ , а непрерывная и монотонная (не постоянная ни в каком интервале) функция имеет непрерывную и однозначную обратную. Очевидно, что эта обратная функция удовлетворяет уравнению.

Отметим, что функции  $y \equiv y_0$ , определяемые из уравнения  $f(y) = 0$ , являются решениями.

3) Рассмотрим уравнение вида  $y' = f(x)g(y)$ .

Формально разделим переменные:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Из равенства дифференциалов следует, что их неопределенные интегралы различаются на константу:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \quad (1.8)$$

Выясним, при каких условиях формула (1.8) определяет  $y$  как функцию от  $x$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Если  $y(x)$  — решение, то запишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

умножим обе части на  $dx$  и проинтегрируем от  $x_0$  до  $x$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int_{x_0}^x f(x)dx,$$

откуда, с учетом условия  $y(x_0) = y_0$ , делая в первом интеграле замену переменных, получим

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

Обозначим

$$\psi(x, y, x_0, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} - \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

По теореме о неявной функции из этого равенства можно выразить  $y$  как функцию  $x, x_0, y_0$ : очевидно, что  $\psi(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0$ ; далее,  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = \frac{1}{f(y)} \neq 0$ , и имеет смысл при  $f(y_0) \neq 0$ .

#### 1.2.4 Критерий единственности решения для уравнения $y' = f(y)$ (необходимый и достаточный признак особых решений).

**Определение 1.13.** *Особым решением дифференциального уравнения (1.3) называется такое решение, которое во всех своих точках не удовлетворяет условию единственности, то есть решение, через каждую точку которого проходит еще одно решение, не совпадающее с ним ни в какой окрестности этой точки.*

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(y), \quad (1.9)$$

где  $f(y)$  — непрерывная функция. Если  $f(y_0) \neq 0$ , то начальное условие определяет единственное решение, как это было показано ранее. Если же существует такая  $c$ , что  $f(c) = 0$ , то  $y \equiv c$  — решение



указанного уравнения. Исследуем, при каких условиях нарушается единственность в точках  $y = c$ , а при каких она сохраняется.

Зададим начальное условие  $(x_0, y_0)$ . Пусть (без ограничения общности рассуждений)  $y_0 < c$ . Допустим, что  $f(y) > 0$ ,  $y_0 < y < c$ . Случай  $y_0 > c$  приводится к рассматриваемому заменой  $y$  на  $-y$ , а случай  $f(y) < 0$  — заменой  $x$  на  $-x$ . Исследуем единственность решения  $y = c$ .

Разделяя переменные в уравнении (1.9) и интегрируя полученное равенство от  $x_0$  до  $x$ , получим для решения, проходящего через точку  $(x_0, y_0)$ , формулу:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}.$$

При  $y \rightarrow c$  интеграл в правой части стремится к несобственному интегралу  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)}$ .

1) Если  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)} < \infty$ , то  $x - x_0 < \infty$ , значит,  $x < \infty$ , то есть интегральная кривая  $y(x)$  пересечет прямую  $y = c$  при некотором конечном значении  $x$ , причем параллельным переносом этой интегральной кривой можно добиться пересечения соответствующим решением прямой  $y = c$  в любой точке  $x$ , то есть единственность решения  $y = c$  в каждой его точке нарушается.

2) Если  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)} = \infty$ , то  $x = \infty$ , значит, за конечное время интегральная кривая не пересечет прямую  $y = c$ , то есть единственность решения сохраняется. Таким образом, верна следующая теорема.

**Теорема 1.2.** *Решение  $y = c$ , такое что  $f(c) = 0$ , уравнения  $y' = f(y)$  является особым решением тогда и только тогда, когда  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)} < \infty$ .*

**Пример 1.5.** *Найти особые решения уравнения  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ .*

**Решение.** Заметим, что второе условие теоремы существования и единственности не выполняется, так как  $f'_y(y) = y^{-\frac{1}{3}}$  разрывна при  $y = 0$ . Функция  $y \equiv 0$  — решение уравнения. Вычислим

$$\int_{y_0}^0 \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = y_0^{\frac{1}{3}} < \infty.$$

Таким образом,  $y \equiv 0$  — особое решение.

**Пример 1.6.** *Найти особые решения уравнения*

$$y' = \begin{cases} y \ln y, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Так как  $f(y) = 0$  при  $y = 0$  и  $y = 1$ , то необходимо рассмотреть два случая. Вычислим соответствующие интегралы:

$$y = 0: \int_{y_0}^0 \frac{dy}{y \ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_0}^0 = \infty \Rightarrow y \equiv 0 \text{ не является особым решением.}$$

$$y = 1: \int_{y_0}^1 \frac{dy}{y \ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_0}^1 = \infty \Rightarrow y \equiv 1 \text{ не является особым решением.}$$

**Пример 1.7.** *Найти особые решения уравнения*

$$y' = \begin{cases} y \ln^2 y, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущему примеру рассматриваем два случая:  $y = 0$  и  $y = 1$ .

$$y = 0 : \int_{y_0}^0 \frac{dy}{y \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y} \Big|_{y_0}^0 = 0 + \frac{1}{\ln y_0} < \infty \Rightarrow y \equiv 0 \text{ является особым решением.}$$

$$y = 1 : \int_{y_0}^1 \frac{dy}{y \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y} \Big|_{y_0}^1 = \infty \Rightarrow y \equiv 1 \text{ не является особым решением.}$$

### 1.2.5 Однородные уравнения

**Определение 1.14.** *Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида  $F(x, y, y') = 0$ , если для любого  $k$  имеем*

$$F(kx, ky, y') \equiv k^p F(x, y, y'), \quad (1.10)$$

где  $p$  — какое-то число.

Это уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.11)$$

Однородное дифференциальное уравнение решается методом **замены переменных**. Именно, вместо неизвестной функции  $y$  введем неизвестную функцию  $z$ , положив  $z = y/x$ .

Подставляя в уравнение (1.11)  $y = zx$ , с учетом того, что по правилу дифференцирования произведения  $y' = z'x + zx' = z'x + z$ , для новой неизвестной функции  $z$  получим дифференциальное уравнение

$$z'x + z = f(z),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$  приводится к однородному с помощью замены  $x = \xi + \alpha$ ,  $y = \eta + \beta$ , где  $\xi, \eta$  — новые переменные,  $(\alpha, \beta)$  — точка пересечения прямых  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $ax + by + c = 0$ . Если эти прямые не пересекаются, то  $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ ; следовательно, уравнение имеет вид  $y' = f(ax + by)$ , которое рассматривалось в предыдущем пункте.

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой  $y = z^m$ . Чтобы найти число  $m$ , надо в уравнении сделать замену  $y = z^m$ . После замены найдем  $m$ , при котором выполняется условие (1.10). Если такого числа  $m$  не существует, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

**Пример 1.8.** *Найти решение уравнения*

$$x(x^2 + y^2) dy = y(y^2 - xy + x^2) dx,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 1.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение — однородное. Полагаем  $z = y/x$ ,  $y = xz$ . Тогда  $dy = x dz + z dx$ . Подставляя в исходное уравнение, получим

$$x(x^2 + x^2z^2)(x dz + z dx) = xz(x^2z^2 - x^2z + x^2) dx; \quad (1 + z^2)x dz = -z^2 dx.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на  $xz^3$  и проинтегрируем:

$$\frac{1 + z^2}{z^2} dz = -\frac{dx}{x}; \quad z - \frac{1}{z} = -\ln|x| + C.$$

Заметим, что при делении могли быть потеряны решения  $z = 0$  и  $x = 0$ . Но ни одно из них не удовлетворяет начальному условию, так как  $z(1) = 1$ . Возвращаясь к переменной  $y$ , получим

$$y^2 - x^2 = -xy(\ln|x| - C).$$

Из начального условия имеем

$$1 - 1 = -\ln 1 + C,$$

откуда  $C = 0$ .

О т в е т:  $y^2 - x^2 = -xy \ln|x|$ .

### 1.2.6 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли

**Определение 1.15.** *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.12)$$

где  $p(x), q(x)$  — заданные непрерывные функции.

Если  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение (1.12) называется **линейным однородным дифференциальным уравнением**, иначе **линейным неоднородным дифференциальным уравнением**.

Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0. \quad (1.13)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)y; \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Заметим, что  $y = 0$  является решением этого уравнения. Проинтегрировав правую и левую части, получим

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + \ln |C|,$$

где  $\ln |C|$  — постоянная величина. Преобразуем выражение, используя свойства логарифма и, варьируя константу  $C$ , опустим модуль. Тогда имеем

$$\ln \frac{y}{C} = - \int p(x)dx.$$

Выражая  $y$ , получим общее решение уравнения (1.13):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

причем решение  $y = 0$  получается из общего решения при  $C = 0$ .

Можно записать решение в виде

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

Тогда, полагая,  $y_0 = y(x_0)$ , определим константу  $C$ :

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \Rightarrow C = y_0.$$

Таким образом, получаем частное решение линейного неоднородного уравнения

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

#### Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

1. Если  $y(x)$  — решение уравнения (1.13), то для любой постоянной  $C$  функция  $z(x) = Cy(x)$  также является решением этого уравнения.

Действительно, подставим  $z(x)$  в уравнение:

$$(Cy(x))' + p(x)Cy(x) = C(y'(x) + p(x)y(x)) = 0,$$

так как  $y(x)$  — это решение.

2. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — некоторые частные решения уравнения (1.13), то функция  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  тоже является решением этого уравнения.

Действительно, подставим  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  в уравнение:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))' + p(x)(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \\ = \alpha_1 (y_1'(x) + p(x)y_1(x)) + \alpha_2 (y_2'(x) + p(x)y_2(x)) = 0, \end{aligned}$$

так как  $y_1(x), y_2(x)$  — решения уравнения (1.13).

3. Если  $y_1(x)$  — некоторое частное решение уравнения (1.13), то  $y(x) = Cy_1(x)$  есть общее решение уравнения (1.13).
4. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — некоторые частные решения уравнения (1.13), то общее решение можно записать в виде

$$y(x) = y_1(x) + C(y_2(x) - y_1(x)).$$

Действительно, согласно свойству 2,  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  тоже является решением уравнения (1.13). Следовательно,  $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$  — частное решение уравнения (1.13). По свойству 2 функция  $y_1(x) + Cz(x)$  — тоже решение.

5.

**Теорема 1.3.** Решения линейного однородного дифференциального уравнения образуют линейное пространство.

**Теорема 1.4.** Если  $y_1$  — частное решение неоднородного уравнения (1.12), то общее решение этого уравнения дается формулой

$$y = y_1 + z,$$

где  $z$  — общее решение соответствующего однородного уравнения (1.13).

*Доказательство.* Пусть  $y_1(x)$  — частное решение линейного неоднородного уравнения. Общее решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде:  $y(x) = y_1(x) + z(x)$ , где  $z(x)$  — неизвестная функция. Подставим это выражение в (1.12) и получим

$$(y_1(x) + z(x))' + p(x)(y_1(x) + z(x)) = q(x),$$

$$y_1'(x) + p(x)y_1(x) + z'(x) + p(x)z(x) = q(x).$$

Так как  $y_1(x)$  — частное решение линейного неоднородного уравнения, то получим

$$q(x) + z'(x) + p(x)z(x) = q(x),$$

откуда имеем  $z'(x) + p(x)z(x) = 0$ . Следовательно,  $z(x)$  — решение линейного однородного дифференциального уравнения.  $\square$

## Методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

### 1) Метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (1.12). Сначала найдем общее решение однородного уравнения (1.13). В этом решении заменим произвольную постоянную  $C$  на неизвестную функцию  $C(x)$ .

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (1.14)$$

В таком виде будем искать общее решение неоднородного уравнения (1.12). Выражение (1.14) подставим в уравнение (1.12) для определения функции  $C(x)$ .

$$(C(x)e^{-\int p(x)dx})' + p(x)(C(x)e^{-\int p(x)dx}) = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x)(C(x)e^{-\int p(x)dx}) = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Откуда

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

Подставим  $C(x)$  в решение (1.14):

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right) e^{-\int p(x)dx} = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx,$$

где  $C_1 e^{-\int p(x)dx}$  — общее решение однородного уравнения (1.13), а  $e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$  — частное решение неоднородного уравнения (1.12).

## 2) Метод Бернулли.

Решение уравнения (1.12) будем искать в виде

$$y(x) = u(x)v(x),$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  — неизвестные функции. Подставим это выражение в (1.12) и получим

$$\begin{aligned} (uv)' + p(x)uv &= q(x), \\ u'v + uv' + p(x)uv &= q(x), \\ u'v + u(v' + p(x)v) &= q(x). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Выберем функцию  $v$  так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$v' + p(x)v = 0. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$v = C e^{-\int p(x)dx}.$$

Для определенности будем считать  $C = 1$ . Подставим  $v$  в (1.15), тогда

$$\begin{aligned} u' e^{-\int p(x)dx} + u \cdot 0 &= q(x), \\ u' &= q(x) e^{\int p(x)dx}, \\ u &= \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (1.12) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) = e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx,$$

где  $C e^{-\int p(x)dx}$  — общее решение однородного уравнения (1.13), а  $e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$  — частное решение неоднородного уравнения (1.12).

### Пример 1.9. Решить уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \tag{1.17}$$

методом вариации произвольной постоянной.

**Решение.** Сначала решим однородное уравнение  $y' + y \operatorname{tg} x = 0$ . Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = -y \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx \operatorname{tg} x.$$

Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим  $\ln |y| = \ln |\cos x| + \ln C$ . Выразим  $y$ :  $y = C \cos x$ .

Решение неоднородного уравнения (1.17) будем искать в виде  $y = C(x) \cos x$ . Подставим эту функцию и ее производную  $y' = C'(x) \cos x - C(x) \sin x$  в уравнение (1.17). Получим

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C_1.$$

Осталось подставить найденную функцию  $C(x)$  в решение.

**О т в е т:**  $y = (\operatorname{tg} x + C_1) \cos x$ .

### Пример 1.10. Решить уравнение

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

методом Бернулли.

Р е ш е н и е. Будем искать решение в виде  $y(x) = u(x)v(x)$ . Получим уравнение

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}. \quad (1.18)$$

За функцию  $v$  примем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + 2xv = 0. \quad (1.19)$$

При таком выборе  $v$  второе и третье слагаемые в левой части (1.18) исчезают. Для функции  $u$  имеем дифференциальное уравнение:

$$u'v = 2xe^{-x^2}. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.19) является уравнением с разделяющимися переменными и его интеграл равен

$$\ln |v| + x^2 = C_1.$$

Здесь можно положить  $C_1 = 0$  и взять частное решение  $v = e^{-x^2}$ . Далее подставляем найденное  $v(x)$  в уравнение (1.20):  $u' = 2x$ , и находим  $u = x^2 + C$ . Производя обратную подстановку, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

О т в е т:  $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$ .

### Уравнение Бернулли.

Обобщением линейного дифференциального уравнения (1.12) является **уравнение Бернулли**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (m \neq 1). \quad (1.21)$$

Чтобы решить уравнение (1.21), необходимо обе его части разделить на  $y^m$

$$\frac{y'}{y^m} + p(x)\frac{y}{y^m} = q(x),$$

и сделать замену  $z = y^{1-m}$ . Так как  $z' = (1-m)y^{-m}y'$ , то уравнение (1.21) приводится к уравнению

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$$

или

$$z' + p(x)(1-m)z = q(x)(1-m).$$

Обозначив  $p_1(x) = p(x)(1-m)$ ,  $q_1(x) = q(x)(1-m)$ , получим линейное неоднородное уравнение вида (1.12) относительно  $z(x)$ . Решая это уравнение, находим  $z(x)$ , и подставляя его в формулу для  $y(x)$ :

$$z = y^{1-m} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-m}},$$

получим решение уравнения Бернулли.

*Замечание 1.7.* Для решения уравнения Бернулли можно использовать также метод Бернулли.

**Пример 1.11.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y = y^2 e^x. \quad (1.22)$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Поделим обе части уравнения на  $y^2$  и сделаем замену  $z = 1/y$ . Тогда получим следующее уравнение:

$$-z' + 2z = e^x. \quad (1.23)$$

Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим однородное уравнение  $-z' + 2z = 0$ , являющееся уравнением с разделяющимися переменными. Его решение —

$z = Ce^{2x}$ . Будем искать решение уравнения (1.23) в виде:  $z = C(x)e^{2x}$ . Подставим это выражение в уравнение (1.23):

$$-C'(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = e^x,$$

откуда  $C(x) = e^{-x} + C_1$ . Таким образом, общее решение уравнения (1.23) есть

$$z = e^x + C_1e^{2x}.$$

Возвращаясь к переменной  $y$ , получим решение исходного уравнения:

$$y \cdot (e^x + C_1e^{2x}) = 1.$$

Кроме того, функция  $y = 0$  также является решением исходного уравнения.

О т в е т:  $y \cdot (e^x + C_1e^{2x}) = 1, \quad y = 0.$

## 1.2.7 Уравнения в полных дифференциалах

**Определение 1.16.** Уравнение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \tag{1.24}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ .

Это имеет место в односвязной области  $D$ , если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка и выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Определение 1.17.** **Интегралом уравнения (1.24)** называется функция  $U(x, y)$  обращающаяся в константу на любом решении уравнения (1.24), и не равная тождественно константе ни в какой части области  $D$ . Таким образом  $U(x, \phi(x)) = c$  для любого решения  $y = \phi(x)$ . Равенство  $U(x, y) = c$  называется **общим интегралом уравнения**.

Чтобы решить уравнение (1.24), надо найти функцию  $U(x, y)$ , полный дифференциал от которой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

равен левой части уравнения (1.24). Из этого уравнения получаем, что  $dU = 0$ , поэтому первый интеграл уравнения (1.24) можно записать в виде

$$U(x, y) = C, \quad \text{где } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

Восстановим функцию по ее полному дифференциалу. Так как

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

можно найти  $U(x, y)$  из решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим  $U(x, y)$ , предполагая, что  $x$  — постоянная<sup>1</sup>:

$$U(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial U}{\partial y} dy + f(x) = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + f(x). \tag{1.25}$$

<sup>1</sup>Здесь  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка, принадлежащая области непрерывности функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и их частных производных. При решении конкретных примеров можно использовать неопределенные интегралы.

Продифференцируем полученное равенство по  $x$  и подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{y_0}^y Q(x, y) dy \right) + f'(x) = \int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dy + f'(x) = P(x, y).$$

Так как  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , получим

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy + f'(x) = \int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dy + f'(x) = P(x, y).$$

Таким образом, для определения  $f(x)$  имеем уравнение

$$P(x, y) \Big|_{y_0}^y + f'(x) = P(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = P(x, y_0), \quad f(x) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx.$$

Найденную функцию  $f(x)$  подставим в (1.25):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C.$$

*Примечание 1.1.* Можно начать со второго уравнения системы:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial U}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y).$$

Дальше действовать аналогично.

**Пример 1.12.** Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения

$$2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$$

выбрать ту, которая проходит через точку  $(1, 0)$ .

**Решение.** Здесь  $P(x, y) = 2x \cos^2 y$ ,  $Q(x, y) = 2y - x^2 \sin 2y$  и заданное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах вида:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

так как

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -2x \sin 2y.$$

Из равенства частных производных следует, что существует такая функция  $U(x, y)$ , что

$$dU(x, y) = 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy.$$

Так как  $U'_y = Q(x, y)$ , можем найти  $U(x, y)$  с точностью до произвольной функции  $f(x)$ :

$$U(x, y) = \int Q(x, y) dy = y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + f(x).$$

Чтобы найти  $f(x)$ , продифференцируем найденную функцию  $U(x, y)$  по  $x$ :  $U'_x = x \cos 2y + f'(x)$  и приравняем к известному значению  $U'_x = 2x \cos^2 y$ . Получим  $2x \cos^2 y = x \cos 2y + f'(x)$ , то есть  $2x \cos^2 y = x(2 \cos^2 y - 1) + f'(x)$ . Отсюда  $f'(x) = x$ . Проинтегрировав, найдем  $f(x) = x^2/2 + c_1$ . Таким образом,

$$U(x, y) = y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Уравнение семейства интегральных кривых имеет вид

$$y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} = c.$$



Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Полагая  $x = 1$ ,  $y = 0$ , получим  $c = 1$ .

Уравнение искомой кривой имеет вид

$$2y^2 + x^2 \cos 2y + x^2 = 2 \quad \text{или} \quad y^2 + x^2 \cos^2 y = 1.$$

О т в е т:  $y^2 + x^2 \cos^2 y = 1$ .

**Метод интегрирующего множителя.**

**Определение 1.18.** Если левая часть уравнения (1.24) не является полным дифференциалом, но удастся подобрать такую функцию  $\mu(x, y)$ , что после умножения на нее уравнения (1.24) получаем уравнение в полных дифференциалах, то есть уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu(x, y)P(x, y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu(x, y)Q(x, y))}{\partial x},$$

то такая функция называется **интегрирующим множителем**.

**Некоторые частные случаи нахождения интегрирующего множителя.**

1. Интегрирующий множитель зависит только от  $x$ .

Пусть существует такой множитель  $\mu(x, y) = \mu(x)$ . Тогда уравнение

$$\mu(x)P(x, y) dx + \mu(x)Q(x, y) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu(x)P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x)Q(x, y))}{\partial x}.$$

Откуда

$$\mu(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \mu'(x)Q(x, y) + \mu(x) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

$$\mu'(x)Q(x, y) = \mu(x) \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)}{Q(x, y)}.$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от  $x$ , то для существования интегрирующего множителя  $\mu(x)$  необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от  $x$ :

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} = \Psi(x),$$

следовательно,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \Psi(x).$$

Решим это уравнение и получим

$$\mu(x) = Ce^{\int \Psi(x) dx}.$$

2. Интегрирующий множитель зависит только от  $y$ :  $\mu(x, y) = \mu(y)$ .

Пусть существует такой множитель  $\mu(x, y) = \mu(y)$ . Тогда уравнение

$$\mu(y)P(x, y) dx + \mu(y)Q(x, y) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu(y)P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y)Q(x, y))}{\partial x}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \mu'(y)P(x, y) + \mu(y)\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= \mu(y)\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \frac{\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right)}{P(x, y)}. \end{aligned}$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от  $y$ , то для существования интегрирующего множителя  $\mu(y)$  необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от  $y$ :

$$\frac{\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right)}{P(x, y)} = \Psi(y),$$

следовательно,

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \Psi(y).$$

Решим это уравнение и получим

$$\mu(y) = Ce^{\int \Psi(y) dy}.$$

3. Интегрирующий множитель зависит от  $\omega(x, y)$ :  $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y))$ .

Пусть существует такой множитель  $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y))$ . Тогда уравнение

$$\mu(\omega(x, y))P(x, y) dx + \mu(\omega(x, y))Q(x, y) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu(\omega(x, y))P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(\omega(x, y))Q(x, y))}{\partial x}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y) + \mu(\omega(x, y)) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) + \mu(\omega(x, y)) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y) \right) &= \mu(\omega(x, y)) \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right), \\ \frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} &= \frac{\left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)}{\frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y)}. \end{aligned}$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от  $\omega$ , то для существования интегрирующего множителя  $\mu(y)$  необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от  $\omega$ :

$$\frac{\left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)}{\frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y)} = \Psi(\omega(x, y)).$$

Проверяем последнее равенство, выбирая в качестве  $\omega(x, y)$  некоторые функции, например,  $x + y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$ ,  $x^2 + y^2$  и т. д. И, решая уравнение

$$\frac{d\mu}{\mu} = \Psi(\omega(x, y))d\omega,$$

получаем

$$\mu = Ce^{\int \Psi(\omega(x, y))d\omega}.$$

**Пример 1.13.** Решить дифференциальное уравнение:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \quad (1.26)$$

**Решение.** Уравнение (1.26) не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Но в данном случае можно подобрать интегрирующий множитель, так как

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} = 2,$$

то есть интегрирующий множитель можно искать как в виде  $\mu(x)$ , так и в виде  $\mu(y)$ . Будем искать интегрирующий множитель как функцию от  $x$ :

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 2.$$

Решением этого уравнения будет  $\mu(x) = e^{2x}$ . При умножении уравнения (1.26) на  $\mu(x)$  получим уравнение в полных дифференциалах:

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x}dx + ye^{2x}dy = 0.$$

Решив его, получим

**О т в е т:**

$$\frac{x^2 + y^2}{2}e^{2x} = c.$$

**Замечание 1.8.** 1. Если  $\mu(x, y)$  — интегрирующий множитель, то  $C\mu(x, y)$  — также интегрирующий множитель, где  $C$  — постоянная.

2. Если  $\mu_0$  — интегрирующий множитель и  $U_0(x, y)$  — соответствующий ему интеграл, то  $\mu = \mu_0\varphi(U_0)$  — также интегрирующий множитель, где  $\varphi \in C^1$ .

Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$\begin{aligned} d(xy) &= ydx + xdy, \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx - xdy}{y^2}, \\ d(y^2) &= 2ydy, \\ d(\ln y) &= \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

**Пример 1.14.** Решить уравнение

$$ydx + xdy = 0$$

**Решение.** Так как  $ydx + xdy = d(xy)$ , то  $d(xy) = 0$ . Следовательно,  $xy = C$ .

**О т в е т:**  $xy = C$ .

**Интегрирующий множитель и особое решение.**

Пусть существует такое  $\mu(x, y)$ , что

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = du$$

или

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{1}{\mu(x, y)}du = 0,$$

откуда

$$\left[ \begin{array}{l} du = 0, \\ \frac{1}{\mu(x, y)} = 0, \end{array} \right.$$

таким образом, особое решение может содержаться среди функций, удовлетворяющих условию

$$\mu(x, y) = \infty.$$

**Теорема 1.5** (Теорема о существовании интегрирующего множителя). *Если уравнение имеет общий интеграл*

$$U(x, y) = C, \quad (1.27)$$

*то оно имеет и интегрирующий множитель.*

*Доказательство.* Так как (1.27) - общий интеграл уравнения, то

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \\ P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \end{cases}$$

Откуда, так как система относительно  $dx, dy$  имеет ненулевое решение, имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

или

$$Q \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$Q \frac{\partial u}{\partial x} = P \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определим

$$\mu = \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Значит

$$P \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} dx + Q \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.6.** *Если  $\mu_0$  - интегрирующий множитель и  $U_0(x, y)$  соответствующий ему интеграл, то  $\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0(x, y))$ , где  $\varphi$  непрерывно дифференцируемая и не тождественно равная нулю функция, тоже интегрирующий множитель.*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mu_1 P dx + \mu_1 Q dy &= \mu_0 \varphi(U_0) P dx + \mu_0 \varphi(U_0) Q dy = \\ &= \varphi(U_0) (\mu_0 P dx + \mu_0 Q dy) = \varphi(U_0) dU_0 = d \left( \int \varphi(U_0) dU_0 \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.7.** *Любые два интегрирующих множителя связаны соотношением*

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0),$$

*где  $\varphi$  - непрерывно дифференцируемая и не тождественно равная нулю функция.*

*Доказательство.* Пусть  $U_1$  - интеграл, соответствующий  $\mu_1$ ,  $U_0$  - интеграл, соответствующий  $\mu_0$ . Тогда

$$\begin{cases} \mu_0 (p dx + Q dy) = U_0 \\ \mu_1 (p dx + Q dy) = U_1. \end{cases}$$

Так как  $U_1 = \Phi(U_0)$ , то

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0} = \frac{d\Phi(U_0)}{dU_0} = \frac{\Phi(U_0)' dU_0}{dU_0} = \Phi(U_0)' = \varphi(U_0).$$

Производная  $\Phi'(U_0)$  существует и непрерывна, и  $U_0, U_1$  имеют непрерывные частные производные, так как являются решениями уравнения.

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.1.** Если  $\mu_1, \mu_2$  – два различных интегрирующих множителя, то есть  $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq \text{const}$ , то

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$$

это общий интеграл уравнения.

*Доказательство.*

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \varphi(U_0) = C.$$

общий интеграл уравнения.

Следствие доказано. □

Еще один способ нахождения интегрирующего множителя.

$$\underbrace{(M_1 dx + N_1 dy)}_1 + \underbrace{(M_2 dx + N_2 dy)}_2 = 0.$$

Пусть  $\mu_1$  – интегрирующий множитель для уравнения  $M_1 dx + N_1 dy = 0$ ,  $U_1$  – его интеграл. Пусть  $\mu_2$  – интегрирующий множитель для уравнения  $M_2 dx + N_2 dy = 0$ ,  $U_2$  – его интеграл.

Предположим, что существует  $\mu$  общий для (1) и (2), тогда  $\mu = \mu_1 \varphi(U_1)$ ,  $\varphi \in C^1$ , и  $\mu = \mu_2 \psi(U_2)$ ,  $\psi \in C^1$ . Если подобрать функции  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы  $\mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2)$  и положить  $\mu = \mu_1 \varphi(U_1)$ , то это  $\mu$  и будет интегрирующим множителем исходного уравнения.

**Пример 1.15.**

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0,$$

$$\left(\frac{y}{x} dx + dy\right) + \left(3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy\right) = 0.$$

$$\mu_1 = x, U_1 = xy; \mu_2 = y, U_2 = x^3 y \Rightarrow \\ x\varphi(xy) = y\psi(x^3 y), \varphi(t) = t^2, \psi(t) = t,$$

$$\mu = x^3 y^2; \frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3 y)^2}{2} = C.$$

### 1.3 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

**Пример 1.16.** Уравнение радиоактивного распада.

**Решение.** Пусть  $x(t)$  – количество радиоактивного вещества. Известно, что скорость распада пропорциональна количеству вещества:

$$\dot{x}(t) = -kx(t), k > 0.$$

Определим период полураспада, если в начальный момент времени  $t_0$  количество вещества составляет  $x(t_0) = x_0$ .

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t),$$

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -k dt,$$

$$\ln |x(t)| = -kt + \ln c,$$

$$x(t) = ce^{-kt},$$

$$x_0 = x(t_0) = ce^{-kt_0},$$

$$c = x_0 e^{kt_0},$$

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Определим, при каком  $T$  имеем  $x(T) = \frac{x_0}{2}$ .

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k(T-t_0)},$$

$$k(T - t_0) = \ln 2,$$

$T = t_0 + \frac{1}{k} \ln 2$  – период полураспада не зависит от начального количества вещества.

**Пример 1.17.** Уравнение движения материальной точки под действием силы, приложенной вдоль прямой, получается из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = f(x, t).$$

**Пример 1.18.** Скорость распространения бактерий.

**Решение.** Известно, что скорость распространения бактерий пропорциональна их количеству:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = kN(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

$$\frac{dN}{N} = k dt,$$

$$\ln |N| = kt + \ln c,$$

$$N = ce^{kt},$$

$$N_0 = N(0) = c,$$

$N = N_0 e^{kt}$  – численность популяции растет экспоненциально.

**Пример 1.19.** Движение материальной точки под действием силы тяжести по вертикальной прямой.

**Решение.** Пусть известны скорость и положение точки в начальный момент времени, то есть выполняются условия  $x(t_0) = x_0$  и  $\dot{x}(t_0) = v_0$ . В силу второго закона Ньютона имеем

$$\ddot{x}(t) = g,$$

$$\dot{x}(t) = gt + c_1,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2,$$

$$v_0 = \dot{x}(t_0) = gt_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = v_0 - gt_0,$$

$$x_0 = x(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2 + (v_0 - gt_0)t_0 + c_2 \Rightarrow c_2 = x_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - v_0t_0,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + (v_0 - gt_0)t + x_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - v_0t_0.$$

**Пример 1.20.** Малые колебания математического маятника.

**Решение.** Шарик массы  $m$  закреплен на конце невесомой нерастяжимой нити. Отклонение нити от положения равновесия задается переменной  $x$ . На шарик действует сила тяжести  $F = -mg$  и сила натяжения нити. Закон движения в проекции на касательную:

$$m \frac{d^2(lx)}{dt^2} = -mg \sin x,$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x.$$

Если колебания малые, то  $\sin x \sim x$ , и уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x.$$

**Пример 1.21.** Уравнение семейства окружностей.

Решение. Окружность с центром в точке  $(x_0, y_0)$  радиуса  $R$  задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Трижды продифференцируем данное уравнение по  $x$ , считая  $y$  функцией от  $x$ :

$$2(x - x_0) + 2(y - y_0)y' = 0,$$

$$1 + (y')^2 + (y - y_0)y'' = 0 \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$2y'y'' + y'y''' + (y - y_0)y''' = 0 \Rightarrow 3y'(y'')^2 - (1 + (y')^2)y''' = 0.$$

## 2 Существование и единственность решения задачи Коши. Продолжение решений. Непрерывная зависимость решения от начальных условий, правой части и параметра.

### 2.1 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

**Теорема 2.1** (Пикара (существования и единственности решения)). Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по  $y$  в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ . Тогда существует единственное решение задачи Коши (2.1), определенное на  $U_h(x_0) = \{x_0 - h, x_0 + h\}$ , где  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  $M = \max_{\Pi} f(x, y)$ ;

*Доказательство. I. Существование.*

Запишем интегральное уравнение:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (2.2)$$

**Определение 2.1.** Решением уравнения (2.2) называется непрерывная функция, обращающая это уравнение в тождество.

**Лемма 2.1** (Об интегральном уравнении). Функция  $y(x)$  является решением уравнения (2.2) тогда и только тогда, когда она является решением задачи (2.1)

*Доказательство утверждения.* Пусть  $y(x)$  — решение задачи (2.1), тогда оно удовлетворяет тождеству

$$y' = f(x, y(x)).$$

Проинтегрируем:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Функция  $y(x)$  непрерывна. Учитывая начальное условие задачи (2.1), получаем, что  $y(x)$  — решение уравнения (2.2).

Пусть  $y(x)$  — решение уравнения (2.2). Функция  $f(x, y)$  непрерывна по условию, функция  $y(x)$  — по определению решения. Продифференцируем (2.2):

$$y' = f(x, y(x)).$$

Кроме того,  $y(x_0) = y_0$ .

Утверждение доказано. □

Далее будем рассматривать решение интегрального уравнения (2.2). **Метод последовательных приближений** Пусть

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds, \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds.$$

По индукции определим последовательность функций

$$y_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{m-1}(s)) ds.$$

Предположим, что эта последовательность сходится к  $\bar{y}(x)$ , и разрешен предельный переход под знаком интеграла и функции  $f$ . Тогда при  $m \rightarrow \infty$  получим

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \bar{y}(s)) ds, \quad (2.3)$$

то есть  $\bar{y}$  — решение уравнения (2.2), а, следовательно, и задачи Коши (2.1). Непрерывность функции  $\bar{y}(x)$  будет доказана позже.

1) Докажем, что все функции последовательности  $y_m(x)$  определены и непрерывны в  $U_h(x_0)$  и не выходят за  $\Pi$ , то есть  $|y_k(x) - y_0| \leq b, k = 1, 2, \dots$  при  $|x - x_0| < h$ , где  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  $M = \sup_{(x,y) \in \Pi} |f(x, y)|$ . (Для всех точек  $(x, y) \in \Pi$  выполняется  $f(x, y) \in C(\Pi)$ , и, так как  $\Pi$  — замкнуто и ограничено, то  $M$  — конечно.)

Докажем это по индукции. Основание индукции  $k = 1$ : Рассмотрим функцию  $y_1(x)$ . Она непрерывна при  $|x - x_0| \leq a$ , так как  $f(x, y)$  непрерывна, а интеграл с переменным верхним пределом — непрерывная функция на том же отрезке. Если точка  $(x, y) \in \Pi$ , то для нее выполняются условия

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds \leq M|x - x_0| \leq b$$

при условии, что  $|x - x_0| < h$ .

Далее, пусть это утверждение справедливо для  $y_{n-1}(x)$ , то есть выполняется

$$|y_{n-1}(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b.$$

Для функции  $y_n(x)$  получим

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s))| ds \right|.$$

Так как  $(s, y_{n-1}(s)) \in \Pi$ , то  $|f(s, y_{n-1}(s))| \leq M$ , поэтому

$$|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b. \quad (2.4)$$

2) Докажем, что последовательность функций  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно к  $\bar{y}(x)$  ( $y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x)$ ) на отрезке  $|x - x_0| \leq h$ .

Построим такой ряд, чтобы последовательность  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  являлась последовательностью его частичных сумм:

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots \quad (2.5)$$

Докажем равномерную сходимость этого ряда, используя признак Вейерштрасса. Для этого докажем, что для любого  $n \in \mathbb{N}$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}|x - x_0|^n/n! \leq ML^{n-1}h^n/n!.$$

Доказательство будем проводить методом индукции.

Пусть  $n = 1$ . Тогда, согласно (2.4),

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|.$$

Пусть для  $n = k$  неравенство доказано. Докажем его для  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L|y_k(s) - y_{k-1}(s)| ds \right| \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x \frac{ML^{k-1}|x - x_0|^k}{k!} = \frac{ML^k|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$



Из того, что  $|x - x_0| \leq h$ , получаем требуемое неравенство:  $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}h^n/n!$ . Ряд  $\sum L^{n-1}h^n/n!$  сходится (признак Даламбера). Таким образом, по признаку Вейерштрасса ряд (2.5) сходится равномерно, и его сумма  $\bar{y}(x)$  является непрерывной функцией.

3) Докажем, что функция  $\bar{y}(x)$  — решение задачи Коши (2.1). Для этого сначала докажем, что эта функция является решением интегрального уравнения (2.3).

Используя условие Липшица и равномерную сходимость последовательности  $\{y_n(x)\}$  к  $\bar{y}(x)$ , получим, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N \in \mathbb{N}$ , что при всех  $n \geq N$  будет выполняться неравенство

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, \bar{y}(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_n(s)) - f(s, \bar{y}(s))| ds \leq \\ \leq L \int_{x_0}^x |y_n(s) - \bar{y}(s)| ds \leq L\varepsilon |x - x_0| \leq L\varepsilon h.$$

Таким образом, мы обосновали законность предельного перехода под знаком интеграла, откуда следует, что  $\bar{y}(x)$  — решение интегрального уравнения (2.3), а следовательно, и задачи Коши 2.1.

### II. Единственность.

Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — решения задачи Коши (2.1), тогда они могут быть записаны в следующем виде:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds, \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_2(s)) ds.$$

Получим оценку для их разности:

$$0 \leq |y_1(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \leq \\ \leq Lh \sup_{|x-x_0| \leq h} |y_1(x) - y_2(x)| \leq Lh^2 M \rightarrow 0,$$

откуда следует, что

$$(1 - Lh) \sup_{|x-x_0| \leq h} |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0$$

и, выбирая  $h$  так, чтобы  $h < \frac{1}{L}$ , получим

$$\sup_{|x-x_0| \leq h} |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0.$$

Таким образом,  $y_1(x) \equiv y_2(x)$ . □

### 2.1.1 Лемма Гронуолла.

**Лемма 2.2** (Гронуолла). Пусть функция  $u(x)$  определена на  $x \in [x_0, \alpha)$ ,  $\alpha \leq \infty$ ,  $u(x) \in C[x_0, \alpha)$ ,  $u(x) \geq 0$ . Пусть  $a \geq 0$ ,  $b(x) \in C[x_0, \alpha)$ ,  $b(x) \geq 0$ , такие, что выполнено неравенство

$$u(x) \leq a + \int_{x_0}^x b(t)u(t)dt.$$

Тогда

$$u(x) \leq ae^{\int_{x_0}^x b(t)dt}.$$

*Доказательство.* 1. Пусть  $a > 0$ . Обозначим через  $v(x) = a + \int_{x_0}^x b(t)u(t)dt$ . Тогда  $v(x_0) = a$ ,  $v(x) > 0$ .

Очевидно, что

$$v'(x) = b(x)u(x) \leq b(x)v(x).$$

Разделим обе части неравенства на  $v(x)$ , имеем

$$\frac{v'(x)}{v(x)} \leq b(x).$$

Проинтегрируем неравенство на  $[x_0, x]$ . Получим

$$\int_{x_0}^x \frac{v'(t)}{v(t)} dt \leq \int_{x_0}^x b(t) dt,$$

$$\ln |v(x)| - \ln |v(x_0)| \leq \int_{x_0}^x b(t) dt.$$

Тогда

$$u(x) \leq v(x) \leq ae^{\int_{x_0}^x b(t) dt}.$$

2. Пусть  $a = 0$ . Для любого  $a_1 > a$  лемма доказана, то есть выполнено

$$u(x) \leq a_1 e^{\int_{x_0}^x b_1(t) dt}$$

для любого  $a_1 > 0$  и для любого  $x \in [x_0, \alpha)$ . Таким образом, при фиксированном  $x \in [x_0, \alpha)$ , выбирая  $a_1$  сколь угодно малыми, получим  $u(x) \leq 0$ , но  $u(x) \geq 0$  по условию леммы, следовательно,  $u(x) = 0$ , следовательно,

$$u(x) \leq \int_{x_0}^x b(t)u(t) dt.$$

Поэтому  $u(x) \equiv 0$ . Лемма доказана. □

Предъявим второе доказательство единственности решения задачи Коши.

*Доказательство.* Если предположим, что существуют два решения  $y(x)$  и  $z(x)$ , рассмотрим модуль их разности

$$|y(x) - z(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \right| \leq \left| L \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt \right|.$$

Таким образом, для функции  $u(x) = |y(x) - z(x)|$  выполнено условие леммы Гронуолла (в нашем случае  $a = 0$ ,  $b(x) = L$ ). Следовательно,  $u(x) \equiv 0$ , то есть  $y(x) = z(x)$ .

Единственность доказана. □

*Замечание 2.1.* В этом доказательстве единственности достаточно, чтобы существовала положительная непрерывная функция  $b(x)$ , такая, что

$$|f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \leq b(x)|y(x) - z(x)|.$$

*Замечание 2.2.* Для  $y'(x) = b(x)y + a(x)$  при условии непрерывности  $a(x), b(x)$  выполняются условия теоремы существования и единственности в области непрерывности коэффициентов уравнения. Таким образом, решение задачи Коши для линейного уравнения

$$y'(x) + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

где функции  $p(x), q(x)$  непрерывны, единственно.

*Замечание 2.3.* В лемме Гронуолла можно заменить интервал  $[x_0, \alpha)$  интервалом  $(\beta, x_0]$ , где  $\beta \geq -\infty$ . Объединяя утверждения для этих случаев, получим лемму для  $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$  для любого  $h \geq 0$ .

*Замечание 2.4.* Отметим, что выполнение условий этой теоремы на всей числовой прямой не гарантирует продолжаемости решения на всю прямую ( $y' = y^2 - 2y + 1$ ).

## 2.2 Теорема о продолжении решения задачи Коши.

**Теорема 2.2.** Пусть

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

причем  $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C(G), G \subset \mathbb{R}^2$ . Тогда решение задачи Коши можно продолжить так, что оно подойдет сколь угодно близко к границе  $\partial G$  или уйдет сколько угодно далеко от начала координат  $(x_0, y_0)$ .

**Определение 2.2.** Функция  $\tilde{y}(x)$  называется продолжением решения  $y(x)$ , определенного на интервале  $(\alpha, \beta)$ , на интервал  $(\alpha_1, \beta_1) \supset (\alpha, \beta)$ , если  $\tilde{y}(x)$  – решение задачи Коши, и  $\tilde{y}(x) = y(x)$  на  $(\alpha, \beta)$ .

Докажем вспомогательную лемму.

**Лемма 2.3.** Пусть  $G_1$  – область с границей  $\partial G_1, G_2$  – область с границей  $\partial G_2$ . Тогда  $\partial(G_1 \cap G_2) \subset \partial G_1 \cup \partial G_2$ .

*Доказательство леммы.* Если  $x \in \partial(G_1 \cap G_2)$ , то существуют последовательности  $\{x_n\}, \{y_n\}$  такие, что

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x, x_n \in G_1 \cap G_2 \\ y_n \rightarrow y, y_n \notin G_1 \cap G_2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_n \in G_1 \\ x_n \in G_2, \end{cases}$$

и  $y_n \notin G_1$  или  $y_n \notin G_2$ . В первом случае существует бесконечное число  $y_n \notin G_1$ , во втором – бесконечное число  $y_n \notin G_2$ . Переходим к подпоследовательности и получаем, что в одном случае существуют  $\{x_n\} \in G_1, \{y_n\} \notin G_1$  такие, что  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x$ , поэтому  $x \in \partial G_1$ , в другом случае существуют последовательности  $\{x_n\} \in G_2, \{y_n\} \notin G_2$ , что  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x$ . Следовательно,  $x \in \partial G_2$ . Итак,  $x \in \partial G_1 \cup \partial G_2$ .

Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы о продолжении.* Рассмотрим три случая:

1. Область  $G$  ограничена и замкнута.

Возьмем произвольную точку  $(x_0, y_0) \in G$ . По локальной теореме существования и единственности существует такое число  $h_0$ , что решение задачи Коши существует и единственно на интервале  $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ . Выберем  $h_0 = \frac{r_0}{\sqrt{M^2+1}}$ , где  $r_0 = \rho((x_0, y_0), \partial G), M = \max_G |f(x, y)|$ .

Далее возьмем точку  $x_1$  так, чтобы  $x_0 < x_1 < x_0 + h_0$  (например,  $x_1 = x_0 + \frac{99}{100}h_0$ ). Тогда в силу локальной теоремы существования и единственности решения, решение задачи Коши, проходящее через точку  $x_1$ , существует и единственно на интервале  $(x_1 - h_1, x_1 + h_1)$ , где  $h_1 = \frac{r_1}{\sqrt{M^2+1}}, r_1 = \rho((x_1, y(x_1)), \partial G)$ , причем эти решения совпадают на общей области определения. Далее берем точку  $x_2 = x_1 + \theta h_1, 0 < \theta < 1$ , тогда существует решение, проходящее через точку  $x_2$ , определенное на  $[x_2 - h_2, x_2 + h_2]$ , где  $h_2 = \frac{r_2}{\sqrt{M^2+1}}, r_2 = \rho((x_2, y(x_2)), \partial G)$ .

Таким образом, построили последовательность точек  $x_{k+1} = x_k + d_k, d_k = \frac{r_k}{\sqrt{M^2+1}}, r_k = \rho((x_k, y_k), \partial G)$ . Так как  $G$  ограничена, то  $x_k$  ограничена и монотонно возрастает, значит, существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = b$ . При этом решение продолжалось на каждый отрезок  $[x_k, x_{k+1}]$ , а следовательно и на их объединение  $\bigcup [x_k, x_{k+1}] = [x_0, b)$ .

Так как  $f(x, y)$  ограничена и  $|y'| = |f(x, y)|$ , то  $y(x)$  удовлетворяет условию Липшица, где  $L = \max_G |y'| = \max_G |f(x, y)| = M$ . Таким образом, к последовательности  $y(x_n + h_n)$  применим критерий Коши сходимости последовательности  $\lim_{x \rightarrow b-0} y(x) = y^*$ . Тогда так как  $y(x)$  непрерывна на  $[x_0, b]$  и  $p_k(x_k, y_k) \rightarrow p^*(b, y(b))$ . Так как  $x_{k+1} = x_k + d_1 + \dots + d_k \rightarrow b, k \rightarrow \infty$ , то ряд  $\sum d_k$  сходится, а значит,  $d_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , откуда  $r_k \rightarrow 0$ . Если предположим, что  $p^* \notin \partial G$ , то существует  $\varepsilon > 0$ , что  $\rho(p^*, \partial G) > 2\varepsilon$ , но т.к.  $p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$ , то  $\exists N > 0 : \forall n > N p_k \in U_\varepsilon(p^*)$  – противоречие. Таким образом,  $p^* \in \partial G$ .

2. Пусть  $G$  произвольная область,  $f(x, y)$  ограничена в  $G$ . Тогда сначала возьмем  $h_0 = \frac{r_0}{\sqrt{M^2+1}}$ , и в силу локальной теоремы существования и единственности решение существует и единственно

на  $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ , далее берем точку  $x_1 = x_0 + \theta h_0$ , тогда существует единственное решение, проходящее через точку  $x_1$  и определенное на  $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$ , где  $h_1 = \frac{r_1}{\sqrt{M^2 + 1}}$  и т.д.

Тогда либо решение пересечет границу  $\partial G$ , либо уйдет сколь угодно далеко от начала координат (пройдет сколь угодно близко к границе).

3. Пусть  $G$  произвольная область, условие ограниченности на  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  не требуем. Тогда рассмотрим круг  $K$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$  радиуса  $2R$  и отступим от границы области  $G$  внутрь на  $\varepsilon$ , получим  $\partial G_\varepsilon \cup \partial K$ . Рассмотрим область  $G \cap K$ . Тогда по лемме  $\partial(G \cap K) \subset \partial G \cup \partial K$ .  $G \cap K$  – замкнутая ограниченная область. Тогда по доказанному решение подойдет сколь угодно близко к границе области  $G \cap K$ , т.е. оно либо подойдет сколь угодно близко к  $\partial K$  и тогда удовлетворяет условию  $|y(x)| \geq R$  (т.к.  $R$  можно выбрать произвольно, то это означает, что в этом случае решение уйдет сколь угодно далеко от начала координат  $(x_0, y_0)$ ), либо подойдет сколь угодно близко к  $\partial G$  (внутри  $K$ ), т.е. сколь угодно близко к границе области  $G$  (можно доказать, что  $h_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $r_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , т.е.  $(x_n + h_n, y(x_n + h_n))$  подойдет сколь угодно близко к границе области  $G$ ).

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 2.1.** Если  $f(x, y)$  определена и непрерывна вместе с  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в полосе  $\{|x - x_0| \leq a, -\infty < y < +\infty\}$ , то решение задачи Коши с начальными данными  $y(x_0) = y_0$  либо пересечет прямые,  $x = x_0 + a$ ,  $x = x_0 - a$ , либо уйдет на бесконечность на  $(x_0, x_0 + a)$   $(x_0 - a, x_0)$ .

*Замечание 2.5.* При доказательстве теоремы о продолжении решения мы изучали продолжение на отрезок  $[x_0, x_0 + h]$ , т.е. вправо. Продолжаемость влево доказывается аналогично.

**Пример 2.1** (уравнения, все решения которого непродолжаемые).

$$\begin{aligned} y' &= y^2 + 1 \\ \frac{dy}{y^2 + 1} &= dx \\ \operatorname{arctg} y &= x + C \\ y &= \operatorname{tg}(x + C). \end{aligned}$$

Любое решение уравнения продолжаемо лишь на интервал длины  $\pi$ .

**Пример 2.2.** Рассмотрим уравнение

$$y' = x^3 - y^3$$

Решение.  $y' = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,  $y' > 0$  при  $y < x$ , решение возрастает,  $y' < 0$  при  $y > x$ , решение убывает.

Если решение начинается в точке  $x_0$  выше прямой  $y = x$ , то оно обязательно пересечет эту прямую и войдет в область  $y < x$ . Рассмотрим любую точку этой области  $(x', y(x'))$  и область  $(x', y(x')) < y < x$ . Тогда в силу поля направлений решение не пересекает границу области, следовательно, оно определено при сколь угодно больших  $x$ .

### 2.2.1 Достаточные условия продолжаемости решения на весь интервал

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (\alpha, \beta), \quad -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty \end{cases}$$

**Теорема 2.3.** Пусть

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (x, y) \in \Pi_{\alpha, \beta}, \\ y(x_0) = y_0, & x_0 \in (\alpha, \beta), \end{cases}$$

где  $f(x, y) \in C(\Pi_{\alpha, \beta}) \cap \operatorname{Lip}_y(\Pi_{\alpha, \beta})$ ,  $\Pi_{\alpha, \beta} = \{-\infty \leq l < x < \beta \leq +\infty, y \in \mathbb{R}\}$  (можно считать, что  $f'_y \in C(\Pi_{\alpha, \beta})$ ),

$$|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x), \quad (2.6)$$

где  $a(x)$ ,  $b(x)$  – непрерывные функции на  $(\alpha, \beta)$ .

Тогда решение  $y(x)$  задачи Коши продолжается на весь интервал  $(\alpha, \beta)$ .

Докажем, что для любого отрезка  $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ ,  $x_0 \in [\alpha_1, \beta_1]$ , решение может быть продолжено на  $[\alpha_1, \beta_1]$ . На этом отрезке  $a(x)$ ,  $b(x)$  – непрерывны, следовательно существуют такие  $k$  и  $m$ , что  $|a(x)| \leq k$ ,  $|b(x)| \leq m$ .

Для доказательства используется следующая

**Лемма 2.4** (Лемма о дифференциальном неравенстве.). Пусть  $z(x)$  удовлетворяет условию на  $(\alpha, \beta)$ ,  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ :

$$|z'(x)| \leq k|z(x)| + m,$$

где  $k \geq 0$ ,  $m > 0$ , и пусть  $|z(x_0)| \leq r_0$ .

Тогда, если  $k = 0$ , то  $|z(x)| \leq r_0 + m|x - x_0|$ . Если  $k > 0$ , то  $|z(x)| \leq r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1)$ .

*Доказательство леммы.* Если  $k = 0$ , то  $|z'(x)| \leq m$ . Справедливо  $z(x) = z(x_0) + \int_{x_0}^x z'(t)dt$ . Поэтому имеем

$$|z(x)| \leq |z(x_0)| + \int_{x_0}^x |z'(t)|dt,$$

$$|z(x)| \leq r_0 + m|x - x_0|.$$

Пусть  $k \geq 0$ .

$$|z|^2 = z \cdot z.$$

Заметим, что для дифференцируемости  $|z|$  надо требовать  $|z| \neq 0$ . Рассмотрим точку  $x_1 > x_0$  такую, что  $z(x_1) \neq 0$ . Положим  $x^* = x_0$ , если  $z(x) \neq 0$  на  $(x_0, x_1)$ .

Если существует точка  $\bar{x} \in (x_0, x_1)$  такая, что  $z(\bar{x}) = 0$ , то возьмем в качестве точки  $x^* = \sup\{\bar{x} : \bar{x} \in (x_0, x_1), z(\bar{x}) = 0\}$ . Тогда  $z(x^*) = 0$ , более того,  $|z(x^*)| \leq r_0$ . Тогда на  $(x^*, x_1)$  существует  $|z|'$ .

Продифференцируем

$$|z|^2 = z \cdot z,$$

тогда

$$2|z||z'| = 2zz' \leq 2|z||z'|,$$

откуда, так как  $|z| \neq 0$  на  $(x^*, x_1)$ , получим  $|z'| \leq |z'|$ .

Обозначим  $|z(x)| = r(x)$ . Тогда из условия леммы  $|z'| \leq |z'| \leq k|z| + m$ , то есть  $r'(x) \leq kr(x) + m$ .

Рассмотрим  $\varphi(x) = e^{-kx} \left(r(x) + \frac{m}{k}\right)$ . Докажем, что  $\varphi(x)$  монотонно не возрастает на  $(x^*, x_1)$ . Действительно,

$$\varphi'(x) = -ke^{-kx} \left(r(x) + \frac{m}{k}\right) + e^{-kx} r'(x) \leq -ke^{-kx} \left(r(x) + \frac{m}{k}\right) + e^{-kx} (kr(x) + m) = 0.$$

Следовательно,  $\varphi'(x) \leq 0$  и  $\varphi(x_1) \leq \varphi(x^*)$ . Таким образом,

$$e^{-kx_1} \left(r(x_1) + \frac{m}{k}\right) \leq e^{-kx^*} \left(r(x^*) + \frac{m}{k}\right),$$

$$r(x_1) \leq e^{k(x_1-x^*)} \left(r(x^*) + \frac{m}{k}\right) - \frac{m}{k}.$$

Заметим, что  $x_1 - x^* \leq x_1 - x_0$  и

$$r(x^*) = |z(x^*)| \leq r_0 \leq e^{k(x_1-x_0)} \left(r_0 + \frac{m}{k}\right) - \frac{m}{k}.$$

Тогда это неравенство выполнено в произвольной точке  $x_1 > x_0$ . Можно записать

$$r(x) \leq e^{k(x-x_0)} \left(r_0 + \frac{m}{k}\right) - \frac{m}{k}, \quad x > x_0.$$

Заменой  $x \rightarrow -x$ ,  $x_0 \rightarrow -x_0$  можно получить аналогичную оценку для  $x < x_0$ . Следовательно,

$$r(x) = |z(x)| \leq e^{k|x-x_0|} \left(r_0 + \frac{m}{k}\right) = r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k} (e^{k|x-x_0|} - 1).$$

Лемма доказана. □

*Доказательство теоремы.* Возьмем  $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ . Тогда существуют  $m \geq 0$ ,  $k \geq 0$  такие, что

$$|\alpha(x)| \leq k, \quad |b(x)| \leq m.$$

Пусть  $|y(x_0)| = d$ , обозначим  $R = \max(r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1))$ . Тогда из (2.6) следует, что  $|y'(x)| = |f(x, y)| \leq k|y| + m$  на  $[\alpha_1, \beta_1]$ . Поэтому  $|y(x)| \leq r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1) \leq R$ .

Рассмотрим полосу  $|y| \leq R + 1$ , т. е.  $-(R + 1) \leq y \leq R + 1$ . Получим замкнутый прямоугольник

$$\Pi_{\alpha_1, \beta_1, R} = \{(x, y) : x \in [\alpha_1, \beta_1], -(R + 1) \leq y \leq R + 1\}.$$

Таким образом, по теореме о продолжении решения в замкнутой ограниченной области решение выйдет на границу  $\Pi_{\alpha_1, \beta_1, R}$ . При этом решение не может выйти на верхнее и нижнее основания  $y = \pm(R + 1)$ , так как  $|y(x)| \leq R$ , следовательно, решение пересекает прямые  $x = \alpha_1$ ,  $x = \beta_1$ . Берем последовательности  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\} : \alpha_n \rightarrow \alpha$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Тогда решение может быть продолжено на любой отрезок  $[\alpha_n, \beta_n]$ , а, следовательно, на их объединение, то есть на  $(\alpha, \beta)$ .

Теорема доказана.  $\square$

### 2.3 Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части уравнения.

**Теорема 2.4.** Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y_0 &= y(x_0) \end{cases}$$

имеет решение  $\phi(x)$ , определенное на интервале  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ , и  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ , причем функции  $f(x, y)$  и  $f_{y'}(x, y)$  непрерывны в некоторой замкнутой окрестности  $U$  графика  $y = \phi(x)$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ .

Тогда для всех  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$  что, для всех решений  $z(x)$  другой задачи

$$\begin{cases} z' &= g(x, z) \\ z_0 &= z(x_0) \end{cases}$$

такой что  $g(x, z), g'_z(x, z) \in C(U)$  ( $g(x, z)$  - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по  $z$ ) и

$$|g(x, z) - f(x, z)| \leq \delta \tag{2.7}$$

и  $|z_0 - y_0| \leq \delta$ , имеем  $|z(x) - \phi(x)| < \varepsilon$ , причем  $z(x)$  продолжается на  $[\alpha, \beta]$ . (Малое изменение правой части и начальных условий приводит к малым изменениям решения)

*Доказательство.* Возьмем  $U = \{(x, y) : x_0, x \in [\alpha, \beta], |y - \phi(x)| \leq \rho\}$ .

Из условия Липшица и условия (2.7) имеем,

$$|z' - y'| = |f(x, y) - g(x, z)| = |f(x, y) - f(x, z) + f(x, z) - g(x, z)| \leq |f(x, y) - f(x, z)| + |f(x, z) - g(x, z)| \leq L|y - z| + \delta.$$

Обозначим через  $u(x) = z(x) - \phi(x)$ , тогда  $|u'(x)| \leq L|u(x)| + \delta$  на  $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ . С использованием дифференциального неравенства получим (так как  $|z_0 - y_0| \leq \delta$ , то есть  $|u(x_0)| \leq \delta$ )  $|u'(x)| \leq L|u(x)| + \delta$ ,  $L \geq 0$ ,

Тогда

$$\begin{cases} |u(x)| \leq \delta + \delta|x - x_0|, & L = 0 \\ |u(x)| \leq \delta e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L}(e^{L|x-x_0|} - 1), & L > 0, \end{cases}$$

пока  $z(x)$  лежит в  $U$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon, \rho)$  тогда выберем  $\delta$  таким образом, что

$$\begin{cases} \delta + \delta|x - x_0| < \varepsilon_1, & L = 0 \\ \delta e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L}(e^{L|x-x_0|} - 1) < \varepsilon_1, & L > 0. \end{cases}$$

Можно записать, что

$$\begin{cases} \delta + \delta s & < \varepsilon_1, & L = 0 \\ \delta e^{Ls} + \frac{\delta}{L}(e^{Ls} - 1) & < \varepsilon_1, & L > 0, \end{cases}$$

где  $s = \min(|x_1 - x_0|, |x_0 - x_2|)$ .

Тогда  $u(x)$  может быть продолжена до границы области  $U_1 = \{(x, y) : x \in [\alpha', \beta'], |y - \phi(x)| \leq \rho\}$ . При этом решение не может выйти через верхнюю и нижнюю границы  $U_1$ , (так как на них  $|u(x)| = \varepsilon_1$ , а  $|u(x)| < \varepsilon_1$ ), а значит пересекает прямые  $x = \alpha'$ ,  $x = \beta'$ , и решение  $u(x)$  (а значит и  $z(x)$ ) может быть продолжено за  $[\alpha', \beta']$ .

Эти рассуждения можно повторить для всех  $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ . Таким образом, получим что  $u(x)$  (и  $z(x)$ ) может быть продолжено на весь отрезок  $[\alpha, \beta]$ .

При этом  $|u(x)| = |z(x) - \phi(x)| < \varepsilon$  □

### 2.3.1 Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.

Рассмотрим задачу Коши, зависящую от параметра  $\mu$ .

$$\begin{cases} y' & = f(x, y, \mu) \\ y(x_0) & = a(\mu). \end{cases} \quad (2.8)$$

**Теорема 2.5.** Пусть при  $\mu = \mu_0$  решение  $\phi(x, \mu_0)$  задачи (2.8) существует на отрезке  $[x_1, x_2]$ . Пусть функции  $f(x, y, \mu)$ ,  $f_y(x, y, \mu)$  непрерывны по совокупности переменных на множестве  $V = \{(x, y, \mu) : x \in [x_1, x_2], |y - \phi(x, \mu_0)| \leq \rho, \mu : |\mu - \mu_0| \leq \eta_1\}$ ,  $a(\mu)$  непрерывна в  $U$ .

Тогда существует такое  $\eta > 0$ , что решение  $y(x, \mu)$  задачи (2.8) непрерывно по  $\mu$ ,  $|\mu - \mu_0| < \eta$ .

## 3 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно первой производной.

Уравнением, не разрешенным относительно первой производной, называется уравнение вида

$$f(x, y, y') = 0.$$

**Пример 3.1.** Уравнение  $(y')^2 - 9x^2 = 0$  можно свести к двум уравнениям:  $y' = 3x$  и  $y' = -3x$ .

**Решение.** Их решения

$$y = \frac{3}{2}x^2 + c \text{ и } y = c - \frac{3}{2}x^2.$$

Через каждую точку плоскости  $x, y$  проходит не менее двух решений: по одному из каждого семейства решений.

**Теорема 3.1** (существования и единственности для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно первой производной). Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, y') = 0. \quad (3.1)$$

Пусть  $f \in C^1$  в области  $D$  и в точке  $(x_0, y_0, y'_0) \in D$  имеем  $f = 0$ ,  $\partial f / \partial y' \neq 0$ .

Тогда на любом достаточно малом отрезке  $[x_0 - d, x_0 + d]$  существует единственное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** По теореме о неявной функции в некоторой окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0)$  существует единственная непрерывная функция  $g(x, y)$ , удовлетворяющая условиям

$$f(x, y, g(x, y)) \equiv 0, \quad g(x_0, y_0) = y'_0, \quad (3.3)$$

при этом  $g \in C_1$ . По теореме существования и единственности уравнение  $y' = g(x, y)$  на некотором отрезке  $[x_0 - d_1, x_0 + d_1]$ ,  $d_1 > 0$ , имеет единственное решение  $y(x)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ . Так как  $y'(x) \equiv g(x, y(x))$ , то из (3.3) следует

$$f(x, y, y') \equiv 0, \quad y'(x_0) = g(x_0, y_0) = y'_0,$$

то есть  $y(x)$  удовлетворяет уравнению (3.1) и условиям (3.2). □

### Дискриминантная кривая.

Если для уравнения (3.1), где  $f \in C^1$ , в точке  $(x_0, y_0)$  нарушается единственность, то при некотором  $y'_0$  выполняются два условия

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} = 0. \quad (3.4)$$

Так как  $y'_0$  заранее не известно, то для отыскания точки  $(x_0, y_0)$  надо из уравнений (3.4) исключить  $y'_0$ . Получим уравнение  $\varphi(x_0, y_0) = 0$ , определяющее некоторое множество на плоскости  $x, y$ . Это множество называется **дискриминантной кривой**. Дискриминантная кривая содержит все точки нарушения единственности, но может содержать и некоторые другие точки.

**Пример 3.2** (см. [10]). *Найдем дискриминантную кривую для уравнения*

$$(y')^2 - 4y^3(1 - y) = 0.$$

**Решение.** Пишем два уравнения вида (3.4):

$$f = (y')^2 - 4y^3(1 - y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} \equiv 2y' = 0.$$

Из второго уравнения имеем  $y' = 0$ . Подставляя в первое, находим дискриминантную кривую  $4y^3(1 - y) = 0$ . Получаем две ветви:  $y = 0$  и  $y = 1$ . В данном случае они обе являются решениями данного дифференциального уравнения.

Чтобы выяснить, где нарушается единственность, найдем другие решения. Из данного уравнения имеем  $y' = \pm 2y\sqrt{y(1 - y)}$ . Решая эти уравнения с разделяющимися переменными, получаем:

$$y = \frac{1}{(x + c)^2 + 1}, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

На прямой  $y = 0$  не нарушается единственность, а на прямой  $y = 1$  нарушается.

**Метод интегрирования уравнений первого порядка, не разрешенных относительно первой производной** Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, y') = 0.$$

Допустим, что из этого уравнения можно выразить  $y$ , то есть  $y = \varphi(x, y')$ . Тогда вводим параметр  $p = y'$  или  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $dy = p dx$ . Таким образом, функция  $y$  будет иметь вид

$$y = \varphi(x, p). \quad (3.5)$$

Найдем полный дифференциал данной функции

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp, \\ p dx &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp &= \left( p - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если это уравнение интегрируется в квадратурах, то находим решение в виде  $x = \varphi_1(p)$ . Подставляя это решение в уравнение (3.5), находим  $y$  как функцию от  $p$ . И, таким образом, получаем решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi_1(p), \\ y = \varphi_2(p). \end{cases}$$

Далее, если это возможно, исключаем из этих уравнений параметр  $p$ .



*Примечание 3.1.* Если из исходного уравнения можно выразить  $x$ , то уравнение решается тем же методом.

Для следующих двух типов уравнений соответствующее уравнение (3.6) всегда интегрируется в квадратурах.

**Уравнение Лагранжа.**

**Определение 3.1.** *Уравнением Лагранжа называется дифференциальное уравнение первого порядка, которое является линейным относительно  $x$  и  $y$ . Это уравнение всегда можно записать в виде*

$$y = x\Phi(y') + \Psi(y'). \quad (3.7)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, заменим  $p$  на  $y'$  и, подставив в уравнение (3.7), получим

$$y = x\Phi(p) + \Psi(p). \quad (3.8)$$

Находим дифференциал от левой и правой частей уравнения (3.8). В силу замены имеем  $dy = p dx$  и получаем

$$\begin{aligned} dy = p dx &= \Phi(p) dx + x\Phi'(p) dp + \Psi'(p) dp, \\ (p - \Phi(p)) dx &= (x\Phi'(p) + \Psi'(p)) dp. \end{aligned}$$

Разделим полученное равенство на  $(p - \Phi(p)) dp$  и получим систему уравнений

$$\begin{cases} p - \Phi(p) = 0, \\ \frac{dx}{dp} = x \frac{\Phi'(p)}{p - \Phi(p)} + \frac{\Psi'(p)}{p - \Phi(p)}. \end{cases}$$

Решение первого уравнения системы  $p_0$  находится непосредственно. А так как второе уравнение системы является линейным неоднородным уравнением относительно  $x$ , то его можно решить, например, с помощью метода вариации произвольной постоянной. Получаем решение уравнения Лагранжа

$$\begin{cases} y = x\Phi(p_0) + \Psi(p_0), \\ \begin{cases} x = x(p, C), \\ y = x(p, C)\Phi(p) + \Psi(p). \end{cases} \end{cases}$$

**Уравнение Клеро.**

**Определение 3.2.** *Уравнением Клеро называется уравнение вида*

$$y = xy' + \Psi(y'), \quad (3.9)$$

которое является частным случаем уравнения Лагранжа.

Аналогично решению уравнения Лагранжа вводим замену  $p = y'$ , получаем

$$y = xp + \Psi(p).$$

Находим дифференциал от левой и правой частей этого уравнения:

$$dy = p dx = p dx + x dp + \Psi'(p) dp.$$

Сокращая на  $p dx$ , получаем

$$x dp + \Psi'(p) dp = 0$$

или

$$(x + \Psi'(p)) dp = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \Psi'(p) = 0, \\ dp = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\Psi'(p), \\ p = C. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = xC + \Psi(C), \\ \begin{cases} x = -\Psi'(p), \\ y = -\Psi'(p)p + \Psi(p). \end{cases} \end{cases}$$

**Пример 3.3.** *Решить уравнение*

$$y = 2xy' - (y')^3.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Лагранжа. После замены  $y' = p$  уравнение примет вид

$$y = 2xp - p^3. \quad (*)$$

Находим дифференциал от левой и правой частей этого уравнения:

$$dy = 2pdx + 2xdp - 3p^2dp.$$

Учитывая, что  $dy = pdx$ , приводим полученное уравнение к линейному относительно  $x$ :

$$x' = -\frac{2x}{p} + 3p.$$

Решив его методом вариации произвольной постоянной, получим решение линейного уравнения

$$x = \frac{\frac{3}{4}p^4 + c}{p^2}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (\*), получим выражение  $y$  тоже через параметр  $p$ :

$$y = \frac{p^3}{2} + \frac{2c}{p}.$$

О т в е т:

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{3}{4}p^4 + c}{p^2}, \\ y = \frac{p^3}{2} + \frac{2c}{p}. \end{cases}$$

## 4 Уравнения высших порядков.

### 4.1 Уравнения высших порядков

$$f(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (4.1)$$

или

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4.2)$$

**Определение 4.1.** Решением уравнения называется функция  $y = \phi(x)$ ,  $n$  раз дифференцируемая и обращающая уравнение в тождество.

**Определение 4.2** (Задача Коши). Найти решение уравнения, удовлетворяющее следующим условиям

$$\begin{cases} y(x_0) & = y_0^0 \\ y'(x_0) & = y_1^0 \\ \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1}^0 \end{cases} \quad (4.3)$$

**Теорема 4.1** (Теорема существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функция  $F(x, y_0, \dots, y_{n-1})$  непрерывна на множестве  $N = \{(x, y_0, \dots, y_{n-1}) : |x - x_0| \leq a, |y_0 - y_0^0| \leq b, \dots, |y_{n-1} - y_{n-1}^0| \leq b\}$ . Тогда решение задачи (4.2)-(4.3) существует в некоторой окрестности  $U_\varepsilon(x_0)$ . Если  $f'y_0, \dots, f'y_{n-1}$  непрерывны в  $N$  (или выполняется более слабое условие), тогда  $F$  удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, \dots, y_{n-1}$  в  $N$ , то решение задачи Коши (4.2)-(4.3) единственно в  $U_\varepsilon(x_0)$ , где  $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{\max(M_0, \dots, M_{n-1})})$ ,  $M_i = \max_n |F'_{y_i}|$ .

#### 4.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Метод решения уравнений, допускающих понижение порядка, состоит в том, что в исходном уравнении делается такая замена  $z(x)$  или  $p(y)$ , относительно которой получается уравнение более низкого порядка.

При нахождении частного решения  $y(x)$  исходного уравнения порядка  $n \geq 2$  с заданными начальными условиями  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ , удобно константы интегрирования  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , возникающие в процессе нахождения сначала  $z(x)$  (или  $p(y)$ ), затем  $y(x)$ , определять при помощи начальных условий не из общего решения, а по мере их появления.

Укажем несколько наиболее распространенных случаев:

1. В уравнение не входит искомая функция  $y$ , т.е. уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Тогда порядок уравнения можно понизить с помощью замены  $y^{(k)} = z(x)$ .

2. В уравнение не входит независимая переменная  $x$ , т.е. уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Тогда порядок уравнения понижается с помощью замены  $y' = p(y)$ .

3. Уравнение однородно относительно  $y$  и его производных, т.е.

$$F(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Тогда порядок уравнения понижается подстановкой  $y' = yz$ , где  $z$  — новая неизвестная функция.

4. Уравнение однородно относительно  $x$  и  $y$  в обобщенном смысле, т.е.

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', k^{m-2} y'', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Для этого уравнения делается замена  $x = e^t$ ,  $y = ze^{mt}$ , где  $z = z(t)$  — новая неизвестная функция, а  $t$  — новая независимая переменная. Данная замена приводит к уравнению, не содержащему независимую переменную  $t$ . Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

**Пример 4.1.** Решить уравнение

$$xy'' = (y')^2.$$

**Решение.** Это уравнение не содержит  $y$ , поэтому порядок можно понизить заменой  $y' = z(x)$ ,  $y'' = z'(x)$ . Тогда исходное уравнение примет вид:

$$x^2 z' = z^2. \quad (*)$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}, \quad z = \frac{x}{1 - c_1 x}.$$

Подставим  $y' = x/(1 - c_1 x)$  в уравнение (\*) и получим решение

$$y = -\frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 - c_1 x| + c_2.$$

При разделении переменных в уравнении (\*) могли быть потеряны решения  $z = 0$  и  $x = 0$ . Функция  $z = 0$  является решением этого уравнения, а  $x = 0$  — нет. Таким образом, исходное уравнение имеет решение  $y' = 0$ , то есть  $y = c$ .

**О т в е т:**

$$y = -\frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 - c_1 x| + c_2, \quad y = c.$$

**Пример 4.2.** Решить уравнение

$$y^4 - y^3 y'' = 1 \quad \text{при условии} \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

**Решение.** Пусть  $y' = p(y)$ ,  $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p$ . Тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^4 - y^3 p \frac{dp}{dy} = 1, \quad p(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\int p dp = \int \frac{y^4 - 1}{y^3} dy, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + c_1, \quad c_1 = 0.$$

Итак,

$$p^2 = y^2 + \frac{1}{y^2}, \quad p = \pm \frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y}; \quad \int \frac{y dy}{\sqrt{y^4 + 1}} = \pm \int dx; \quad \frac{1}{2} \ln(y^2 + \sqrt{y^4 + 1}) = \pm x + c_2.$$

$$c_2 = \ln(\sqrt{2 + \sqrt{5}}).$$

**О т в е т:**  $\ln(y^2 + \sqrt{y^4 + 1}) = \pm 2x + \ln(2 + \sqrt{5})$ .

**Пример 4.3.** Решить уравнение

$$2yy'' = y^2 + (y')^2.$$

Решение. Это уравнение является однородным относительно  $y$  и его производных, поэтому порядок уравнения может быть понижен подстановкой  $y' = yz$ ,  $y'' = y(z^2 + z')$ . Получим уравнение первого порядка  $2y^2(z' + z^2) = y^2(1 + z^2)$ , которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} y = 0, \\ 2z' = 1 - z^2. \end{cases} \quad (*)$$

Второе уравнение — это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$\frac{1+z}{1-z} = ce^x, \quad z = 1 - \frac{2}{1+ce^x}, \quad \text{то есть } y' = y \left( 1 - \frac{2}{1+ce^x} \right).$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\ln y = \ln e^x - \ln(c^2 e^{2x}) + \ln(1+ce^x) + \ln c^*, \quad \text{то есть } y = c_1(1 \pm \operatorname{ch}(x+c_2)).$$

При разделении переменных могли быть потеряны решения  $1 - z^2 = 0$ . Проверим, являются ли функции  $z = \pm 1$  решениями. Получим уравнения  $y' = \pm y$ , решения которых имеют вид  $y = ce^{\pm x}$ . Подставив эти функции в исходное уравнение, получим тождества, следовательно, они являются решениями. Решение  $y = 0$  из системы (\*) является частным случаем этих решений при  $c = 0$ .

О т в е т:  $y = c_1(1 \pm \operatorname{ch}(x+c_2))$ ,  $y = ce^{\pm x}$ .

## 5 Линейные уравнения высших порядков.

### 5.1 Общая теория линейных дифференциальных уравнений высших порядков

Линейное неоднородное уравнение с произвольными коэффициентами порядка  $n$  имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

где  $a_j(x) (j = 0, \dots, n)$ ,  $f(x)$  — непрерывные на интервале  $(a, b)$  функции. Тогда для любого  $x_0$  из интервала  $(a, b)$  и любых значений  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Пусть  $L$  — линейный оператор, определяемый формулой

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

тогда уравнение (5.1) можно записать в виде

$$Ly = f(x). \quad (5.2)$$

Будем также рассматривать однородное уравнение

$$Ly = 0. \quad (5.3)$$

#### Свойства линейного оператора $L$ .

1.  $L(\alpha y) = \alpha Ly$ , при любом  $\alpha \in \mathcal{R}$  ( $\alpha \in \mathcal{C}$ );
2.  $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$  при любых  $y_1$  и  $y_2$ , удовлетворяющих (5.3).

#### Свойства уравнений (5.2) и (5.3).

1. Уравнения остаются линейными при любой непрерывно дифференцируемой  $n$  раз замене независимой переменной  $x = \varphi(t)$ .
2. Уравнения остаются линейными при линейной замене неизвестной функции  $y(x) = a(x)z(x) + b(x)$ , где  $a(x)$ ,  $z(x)$ ,  $b(x)$  — непрерывно дифференцируемые  $n$  раз функции.

Специальная замена вида  $y(x) = e^{-\frac{1}{n} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} z(x)$  сводит дифференциальные уравнения (5.2) и (5.3) к уравнениям, не содержащим  $(n-1)$ -й производной.

#### Свойства решений уравнения (5.3).

1. Если  $y(x)$  — решение уравнения (5.3), то для любого  $\alpha \in \mathcal{R}$  ( $\alpha \in \mathcal{C}$ ) функция  $y_1(x) = \alpha y(x)$  также является решением этого уравнения.
2. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — решения уравнения (5.3), то функция  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  также является решением этого уравнения.
3. Если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения уравнения (5.3), то функция  $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$  также является решением этого уравнения.

### 5.1.1 Понятие о линейной зависимости и линейной независимости функций

**Определение 5.1.** Функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  называются линейно независимыми, если их линейная комбинация  $\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$  только в случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Определение 5.2.** Функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  называются линейно зависимыми, если существуют такие  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, что линейная комбинация  $\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$ .

#### Необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций.

Функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда одна из этих функций линейно выражается через остальные, то есть существуют такие постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ , что

$$f_i(x) = \sum_{k=1, (k \neq i)}^n \alpha_k f_k(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  имеют производные до  $(n-1)$ -го порядка. Тогда определитель

$$W(y_1 \dots y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского**.

**Теорема 5.1.** Если система функций линейно зависима, то их определитель Вронского равен нулю.

*Доказательство.* Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы. Тогда существуют такие постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, что  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ . Без ограничений общности рассуждений можем считать, что  $\alpha_n \neq 0$ . Тогда

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x).$$

Вычислим  $y_n'(x), \dots, y_n^{(n-1)}(x)$  и подставим полученные значения в определитель Вронского вместо последнего столбца. При этом получится определитель, у которого последний столбец есть линейная комбинация предыдущих  $(n-1)$  столбцов. А такой определитель равен нулю.  $\square$

*Примечание 5.1.* Сформулированное условие линейной зависимости функций является необходимым, но не является достаточным условием. Для доказательства этого факта приведем пример функций, определитель Вронского которых равен нулю, но не являющихся линейно зависимыми.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2) = W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}, & x \geq 0, \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, определитель Вронского  $W(x) \equiv 0$ . Но функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  не являются линейно зависимыми. Действительно,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

**Лемма 5.1.** Если  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  — линейно независимые решения уравнения  $Ly = 0$ , то определитель Вронского  $W(y_1, \dots, y_n)$  не обращается в нуль ни в одной точке области существования решений уравнения. (Если  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in (a, b)$ , то  $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$  ни при каком  $x_0 \in (a, b)$ ).

*Доказательство.* Доказательство проведем от противного. Пусть существует  $x_0 \in (a, b)$  такой, что  $W(x_0) = 0$ , то есть

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим функцию  $y(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x)$ . По свойству решений уравнения (5.3), если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  есть решения уравнения  $Ly = 0$ , то и их линейная комбинация также является решением этого уравнения. Следовательно,  $y(x)$  — решение уравнения  $Ly = 0$ . Вычислим производные этой функции до  $(n-1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1y_1'(x) + \dots + C_ny_n'(x), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= C_1y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Вычислим значение функции  $y(x)$  и ее производных в точке  $x_0$ . Составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = 0, \\ C_1y_1'(x_0) + \dots + C_ny_n'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Это линейная однородная система уравнений, главный определитель которой есть определитель Вронского с неизвестными  $C_1, \dots, C_n$ . Так как главный определитель системы по предположению равен нулю, то существует ненулевое решение этой системы:  $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ .

Подставив эти  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  вместо  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в функцию  $y(x)$  и (5.4), получим

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1^0y_1(x) + \dots + C_n^0y_n(x), \\ y'(x) &= C_1^0y_1'(x) + \dots + C_n^0y_n'(x), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= C_1^0y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n^0y_n^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

В точке  $x_0$  из системы (5.5) имеем

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

В частности, этими данными Коши обладает нулевое решение. А по теореме существования и единственности, которая выполняется в силу предположения леммы, любое решение, имеющее тот же набор данных Коши, должно с ним совпадать. Отсюда имеем  $y(x) \equiv 0$ . Таким образом, получили, что существуют такие константы  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , не все равные нулю, что

$$C_1^0y_1(x) + \dots + C_n^0y_n(x) = 0,$$

то есть решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы.  $\square$

**Теорема 5.2.** Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения линейного однородного дифференциального уравнения  $Ly = 0$ . Эти функции являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда определитель Вронского  $W(y_1, \dots, y_n)$  равен нулю.

*Доказательство.* 1) Если решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю в силу теоремы о равенстве нулю определителя Вронского для любой системы линейно зависимых функций (необязательно решений уравнения).

2) Если определитель Вронского равен нулю, то в силу леммы 5.1 решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы.  $\square$



**Лемма 5.2** (Формула Лиувилля).

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx},$$

где  $a_1(x)$  — коэффициент при  $y^{(n-1)}$  в уравнении  $Ly = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — линейно независимые решения уравнения  $Ly = 0$ . Запишем определитель Вронского для этих функций

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Вычислим  $W'(x)$ :

$$\begin{aligned} W'(x) = & \begin{vmatrix} y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В этом выражении все определители, кроме последнего, равны нулю, так как содержат одинаковые строки. Прибавим к последней строке ненулевого определителя линейную комбинацию всех остальных строк:

$$y_i^{(n)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_i(x),$$

где  $i = \overline{1, n}$  — номер столбца. Так как  $y_i(x)$  — это решения уравнения  $Ly = 0$ , получаем, что

$$y_i^{(n)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_i(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-1)}(x).$$

Таким образом,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_1^{(n-1)}(x) & \dots & -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

Следовательно, получено дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

Решим его и найдем  $W(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} &= -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx, \\ \ln |W| \Big|_{x_0}^x &= -\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx, \\ W(x) &= Ce^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}. \end{aligned}$$

Найдем  $C$ :

$$W(x_0) = Ce^0, \quad C = W(x_0).$$

Таким образом, получаем формулу Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

□

**Теорема 5.3.** Если существует такое значение  $x_0 \in (a, b)$ , что  $W(x_0) = 0$ , тогда  $W(x) = 0$  для любого  $x \in (a, b)$ .

Теорема является элементарным следствием доказанной леммы.

### 5.1.2 Понятие о фундаментальной системе решения

**Определение 5.3.** Система  $n$  линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  называется **фундаментальной системой решения**.

Из доказанных ранее теорем следует, что система  $n$  решений данного линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  является фундаментальной тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского не равен нулю.

Любое решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  есть линейная комбинация его фундаментальных решений.

**Утверждение 5.1.** Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка  $n$  не может иметь более чем  $n$  линейно независимых частных решений.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  — частные решения этого уравнения. Рассмотрим первые  $n$  решений.

1) Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — линейно зависимые, тогда существуют такие постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  не все равные нулю, что  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ . Добавим к этой сумме слагаемое  $0 \cdot y_{n+1}(x)$ . Получим  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) = 0$ . Так как не все  $\alpha_i$  равны нулю, а линейная комбинация обращается в нуль, следовательно,  $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  — линейно зависимы.

2) Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — линейно независимые, тогда  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  являются фундаментальной системой решений. А так как  $y_{n+1}(x)$  — также решение, то его можно представить в виде линейной комбинации

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Следовательно,  $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  — линейно зависимые. Тем самым доказали, что любые  $(n+1)$  решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  являются линейно зависимыми. □

**Построение решения линейного однородного дифференциального уравнения.** Для построения требуется найти  $n$  линейно независимых частных решений, а затем взять их линейную комбинацию.

### 5.1.3 Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть  $y_1(x)$  — частное решение этого уравнения. Будем понижать порядок уравнения с помощью замены

$$y(x) = y_1(x) \int u(x) dx,$$

где  $u(x) = \left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)'$ . Вычислим производные новой функции до  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned}y'(x) &= y_1'(x) \int u(x)dx + y_1(x)u(x), \\y''(x) &= y_1''(x) \int u(x)dx + 2y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x), \\y'''(x) &= y_1'''(x) \int u(x)dx + 3y_1''(x)u(x) + 3y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x), \\&\dots \\y^{(n-1)}(x) &= y_1^{(n-1)}(x) \int u(x)dx + (n-1)y_1^{(n-2)}(x)u(x) + \dots + y_1(x)u^{(n-2)}(x), \\y^{(n)}(x) &= y_1^{(n)}(x) \int u(x)dx + ny_1^{(n-1)}(x)u(x) + \dots + y_1(x)u^{(n-1)}(x).\end{aligned}$$

Подставим новую функцию с ее производными в уравнение  $Ly = 0$ , сгруппируем подобные слагаемые и получим

$$\left(a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1\right) \cdot \int u(x)dx + B_1(x)u(x) + B_2(x)u'(x) + \dots + B_n(x)u^{(n-1)}(x) = 0,$$

где  $B_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  — новые коэффициенты. Так как  $y_1(x)$  — частное решение уравнения  $Ly = 0$ , то

$$a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1 = 0.$$

Следовательно, получили уравнение  $(n-1)$ -го порядка относительно функции  $u(x)$

$$B_1(x)u(x) + B_2(x)u'(x) + \dots + B_n(x)u^{(n-1)}(x) = 0.$$

Пусть его решения  $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$  — линейно независимые, тогда решения исходного уравнения имеют вид

$$y_1(x), \quad y_1(x) \int u_1(x)dx, \quad y_1(x) \int u_2(x)dx, \dots, \quad y_1(x) \int u_{n-1}(x)dx.$$

#### 5.1.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

**Теорема 5.4.** Если  $y_1$  — частное решение линейного неоднородного уравнения, то общее решение этого уравнения дается формулой

$$y = y_1 + z,$$

где  $z$  — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения.

Доказательство аналогично случаю линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

**Теорема 5.5.** Если правую часть уравнения можно представить в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение имеет вид

$$y = y^{(1)} + y^{(2)},$$

где  $y^{(1)}$  — частное решение уравнения  $Ly = f_1(x)$ , а  $y^{(2)}$  — частное решение уравнения  $Ly = f_2(x)$ .

Доказывается непосредственно подстановкой в уравнение  $Ly = f(x)$ .

**Метод нахождения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения.**

Для нахождения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения  $Ly = f(x)$  используется метод вариации произвольных постоянных. Для этого сначала находим решение однородного уравнения  $Ly = 0$ . Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — фундаментальная система решений этого уравнения, тогда решение общего однородного уравнения можно записать в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

В этом решении заменим произвольные постоянные  $C_1, \dots, C_n$  на неизвестные функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ , то есть

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x).$$

Функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  определим, подставив  $y(x)$  в уравнение  $Ly = f(x)$ . При этом получим только одно условие, связывающее функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ . Но так как для определения этих функций нам необходимо  $n$  условий, остальные  $(n - 1)$  условие положим произвольно. Вычислим производные

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x) + C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x).$$

Пусть в этом выражении  $C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0$ , тогда

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x).$$

А в этом выражении пусть  $C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0$ . И так далее,

$$y^{(n)}(x) = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Подставим полученные выражения в уравнение  $Ly = f(x)$ , получим

$$C_1(x)Ly_1 + \dots + C_n(x)Ly_n + a_0(x) \left( C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \right) = f(x).$$

Поскольку  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  являются решениями уравнения  $Ly = 0$ , то  $Ly_1 = 0, \dots, Ly_n = 0$ , следовательно

$$a_0(x) \left( C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \right) = f(x).$$

Таким образом, для определения функций  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Выразив из данной системы  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ , вычислим функции

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx, \dots, C_n(x) = \int C_n'(x)dx$$

и, подставив их в выражение

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x),$$

получим решение уравнения  $Ly = f(x)$ .

## 5.2 Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

### 5.2.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка  $n$  имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad \text{где } a_j = \text{const}, \quad (j = 0, \dots, n). \quad (5.6)$$

Чтобы его решить, необходимо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (5.7)$$

и найти все его корни:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Общее решение уравнения (5.6) есть сумма, состоящая из слагаемых вида  $C_j e^{\lambda_j x}$  для каждого простого корня  $\lambda_j$  уравнения (5.7) и слагаемых вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня  $\lambda$  кратности  $k$  уравнения (5.7). Здесь все  $C_j$  — произвольные постоянные.

Если все коэффициенты  $a_j$  уравнения (5.6) вещественные, то слагаемые, отвечающие комплексным корням  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  уравнения (5.7), можно записать в вещественной форме:

$$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и

$$P_{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней  $\alpha + i\beta$ ,  $\alpha - i\beta$  имеет кратность  $k$ . Здесь  $P_{k-1}$ ,  $Q_{k-1}$  — многочлены от  $x$  степени  $k - 1$ . Их коэффициенты — произвольные постоянные.

**Пример 5.1.** Найти частное решение дифференциального уравнения  $y''' - 4y'' + 5y' = 0$ , удовлетворяющее следующим начальным условиям:  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 7$ ,  $y''(0) = 13$ .

**Решение.** Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Найдем его корни:  $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ . Общее решение дифференциального уравнения

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} \cos x + c_3 e^{2x} \sin x.$$

Для того, чтобы воспользоваться начальными условиями, найдем  $y'$  и  $y''$ :

$$y' = 2c_2 e^{2x} \cos x - c_2 e^{2x} \sin x + 2c_3 e^{2x} \sin x + c_3 e^{2x} \cos x,$$

$$y'' = 3c_2 e^{2x} \cos x - 4c_2 e^{2x} \sin x + 3c_3 e^{2x} \sin x + 4c_3 e^{2x} \cos x.$$

Подставим в общее решение  $y$ , в  $y'$  и в  $y''$  начальные условия и решим полученную систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5, \\ 2c_2 + c_3 = 7, \\ 3c_2 + 4c_3 = 13. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 3, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

Подставив в общее решение полученные значения постоянных, получим частное решение

$$y = 2 + 3e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x.$$

**О т в е т:**  $y = 2 + 3e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x$ .

### 5.2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad \text{где } a_j = \text{const}, (j = 0, \dots, n). \quad (5.8)$$

Если правая часть  $f(x)$  состоит из сумм и произведений функций вида  $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ ,  $e^{ax}$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sin \beta x$ , частное решение можно искать *методом неопределенных коэффициентов*.

Для уравнений с правой частью  $f(x) = P_m(x)e^{ax}$ , где  $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ , существует частное решение вида

$$y_1 = x^r Q_m(x) e^{ax}, \quad (5.9)$$

где  $Q_m(x)$  — многочлен с неопределенными коэффициентами степени  $m$ . Число  $r = 0$ , если  $a$  — не корень характеристического уравнения (5.7), а если  $a$  — корень, то  $r$  равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена  $Q_m(x)$ , надо решение (5.9) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят  $\cos bx$  и  $\sin bx$ , то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера. Если же коэффициенты  $a_j$  левой части уравнения (5.8) вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx) \quad (5.10)$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^r e^{ax}(R_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx), \quad (5.11)$$

где  $r = 0$ , если  $a + ib$  не корень характеристического уравнения, и  $r$  равно кратности корня  $a + ib$  в противном случае, а  $R_l$  и  $T_l$  — многочлены степени  $l$ , равной наибольшей из степеней  $m$  и  $n$  многочленов  $P$  и  $Q$ . Чтобы найти коэффициенты многочленов  $R_l$  и  $T_l$ , надо подставить решение (5.11) в уравнение (5.8) и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида (5.10), то частное решение линейного уравнения с правой частью  $f_1 + f_2 + \dots + f_p$  равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями  $f_1, \dots, f_p$ .

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

**Пример 5.2.** Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 5xe^{2x}.$$

**Решение.** Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения  $y$  есть сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения  $y_1$  и частного решения неоднородного уравнения  $y_2$ :

$$y = y_1 + y_2.$$

Найдем  $y_1$ . Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ :  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_2 = x^r (Ax + B) e^{2x}.$$

Здесь  $r = 1$ , так как  $a = \lambda_1 = 2$  — корень характеристического уравнения кратности 1. Для нахождения неизвестных коэффициентов  $A$  и  $B$  подставим выражение функции  $y_2$  и ее производных

в уравнение и, сократив на  $e^{2x}$ , сравним коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  левой и правой частей. Получим

$$\begin{array}{l|l} 6 & y_2 = (Ax^2 + Bx)e^{2x} \\ -5 & y_2' = 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} \\ 1 & y_2'' = 4(Ax^2 + Bx)e^{2x} + 4(2Ax + B)e^{2x} + 2Ae^{2x}. \end{array}$$

$$(6A - 10A + 4A)x^2 + (6B - 10B - 10A + 4B + 8A)x + (-5B + 4B + 2A) = 5x = 0x^2 + 5x + 0,$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & (6A - 10A + 4A) = 0 \\ x & (6B - 10B - 10A + 4B + 8A) = 5 \\ x^0 & (-5B + 4B + 2A) = 0. \end{array}$$

Откуда находим  $A = -\frac{5}{2}$ ;  $B = -5$ , т.е.  $y = x(-\frac{5}{2}x - 5)e^{2x}$ .

О т в е т: Общее решение неоднородного уравнения  $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + x(-\frac{5}{2}x - 5)e^{2x}$ .

**Пример 5.3.** Решить уравнение

$$y'' + y = 4 \sin x.$$

Р е ш е н и е. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с правой частью

$$f(x) = 4 \sin x = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x).$$

Имеем  $a = 0$ ,  $b = 1$ , тогда  $r = 1$ , так как  $a \pm bi = 0 \pm i$  — корни характеристического уравнения кратности 1;  $n = 0$ ,  $m = 0$ , тогда  $l = 0$ ,  $R_l(x) = A$ ,  $T_l(x) = B$ .

Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_2 = e^{0x} \cdot x^1 \cdot (A \cos x + B \sin x) = Ax \cos x + Bx \sin x.$$

Для нахождения коэффициентов  $A$  и  $B$ , подставим  $y_2$  и его производные в исходное уравнение:

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_2 = Ax \cos x + Bx \sin x, \\ 0 & y_2' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x, \\ 1 & y_2'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x. \end{array}$$

Приравниваем коэффициенты при  $\sin x$  и  $\cos x$  в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{array}{l|l} \sin x & Bx - 2A - Bx = 4, \\ \cos x & Ax - Ax + 2B = 0, \end{array}$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях уравнений системы, находим  $A = -2$ ,  $B = 0$ , и, подставляя в формулу для  $y_2(x)$ , получим  $y_2(x) = -2x \cos x$ , откуда

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x.$$

О т в е т: Общее решение уравнения:  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x$ .





## Список литературы

- [1] В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- [2] И.В. Астахова, В.А. Никишкин. Практикум по курсу "Дифференциальные уравнения". М.: МЭСИ, 2010.
- [3] А.И. Буфетов, Н.Б. Гончарук, Ю.С. Ильяшенко. Конспект курса Э Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть I. М., Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012.
- [4] Н.М. Матвеев. "Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений". Л.: Издательство ЛГУ, 1963.
- [5] И.Г. Петровский. "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений". М.: Издательство МГУ, 1984.
- [6] Л.С. Понтрягин. "Обыкновенные дифференциальные уравнения". М.: "Наука", 1974.
- [7] А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи". Учеб. пособие. М.: "Высшая школа", 1989.
- [8] В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений (8-е изд.). М.: ГИФМЛ, 1959.
- [9] А.Ф. Филишпов. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям". Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.
- [10] А.Ф. Филишпов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, 2004.
- [11] Л.Е. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения М.: Изд-во ЛКИ, 2008.



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА