МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЧАСТЬ 2

ШАПОШНИКОВА
ТАТЬЯНА АРДОЛИОНОВНА

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
АСПИРАНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Лекция 1

Гармонические функции

Определение 1. Пусть $u \in C^2(\Omega)$,

$$\Delta u(x) = 0 \; \forall x \in \Omega, \tag{1.1}$$

тогда u называется *гармонической функцией в* Ω.

Пример 1.

- $r^{\pm k} \cos k\phi$
- $r^{\pm k} \sin k\phi$

Будем искать гармонические функции, зависящие только от расстояния $v(|x - x_0|),\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r = |x - x_0|$.

$$\Delta v(|x - x_0|) = v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0$$

$$n \geqslant 3 \;\; v(r) = C_1 r^{2-n} + C_2$$

$$n = 2 \;\; v(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Они являются гармоническими всюду кроме точки x_0.

Упражнение 1. Каждая из этих функций является локально суммируемой.

Теперь среди этих множеств функций будем искать, удовлетворяющие следующему интегральному свойству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(|x - x_0|) \Delta \phi(x) dx = \phi(x_0) \; \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

Верно ли, что среди функций, гармонических на всём $\mathbb{R}^n$ можно найти функции, удовлетворяющие нашему интегральному свойству? Ответ: нет.

Сначала выведем формулы Грина из формулы Стокса.

Формула Стокса: Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшецевой границей, задано векторное поле $A(x) = (A_1(x), A_2(x), ...A_n(x)),\ A_j(x) \in C^1(\Omega)$ тогда

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int\limits_{\partial\Omega} (A(x), \nu(x)) ds, \text{ где } \nu(x) \; - \text{ внешняя единичная нормаль.} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} A(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_j}$$

Возьмем $A(x) = (0, ...0, u v_{x_j}, 0...0)$ $(u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, тогда по формуле Стокса

$$\int\limits_{\Omega} u v_{x_j x_j} dx = -\int\limits_{\Omega} u_{x_j} v_{x_j} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v_{x_j} \nu_j ds$$

Это верно для любого j, суммируем и получаем первую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v dx = -\int\limits_{\Omega} \bigtriangledown u \bigtriangledown v dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\partial_\nu v ds \tag{1.4}$$

Теперь поменяем u и v местами и вычтем из одного равенства другое и получим вторую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int\limits_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u)ds \tag{1.5}$$

Если v - гармоническая в $\mathbb{R}^n$, ϕ - финитная, тогда из второй формулы Грина

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\Delta\phi(x)dx = 0.$$

Теперь вернемся к гармоническим функциям всюду кроме одной точки, для которых выполняется интегральное свойство (1.2), будем искать для $n \geqslant 3$.

$$v(|x-x_0|) = C_1|x-x_0|^{2-n} + C_2 \ (C_2 \text{ можем отбросить})$$

$$C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-x_0|^{2-n}\Delta\phi(x)dx = \phi(x_0)$$

$|x-x_0|^{2-n} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, содержащую носитель ϕ значит

$$C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-x_0|^{2-n}\Delta\phi(x)dx = C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T_\varepsilon^{x_0}}} |x-x_0|^{2-n}\Delta\phi(x)dx \overset{\text{2 ф-ла Грина}}{=}$$

$$\overset{\text{2 ф-ла Грина}}{=} C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T_\varepsilon^{x_0}}} \phi(x)\Delta|x-x_0|^{2-n}dx +$$

$$+C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\Omega+S_\varepsilon^{x_0}} (|x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\phi - \phi(x)\partial_\nu|x-x_0|^{2-n})ds =$$

$$= C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T_\varepsilon^{x_0}}} \phi(x)\Delta|x-x_0|^{2-n}dx + \int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} (|x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\phi - \phi(x)\partial_\nu|x-x_0|^{2-n})ds\right\} =$$

$$= 0 + C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} (|x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\phi - \phi(x)\partial_\nu|x-x_0|^{2-n})ds$$

$$|\partial_\nu\phi| \leqslant \max_{\mathbb{R}^n}|\bigtriangledown\phi| = K$$

$$\left|\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} |x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\phi ds\right| \leqslant K\varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1} = K\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} |x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\phi ds = 0$$

$$C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} (|x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\phi - \phi(x)\partial_\nu|x-x_0|^{2-n})ds = -C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} \phi(x)\partial_\nu|x-x_0|^{2-n}ds$$

$$\partial_\nu|x-x_0|^{2-n} = -(r^{2-n})'\Big|_{r=\varepsilon} = (n-2)\varepsilon^{1-n}$$

$$-C_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} \phi(x)\partial_\nu|x-x_0|^{2-n}ds = -C_1\omega_n(n-2)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}}\phi(x)ds =$$

$$= -C_1\omega_n(n-2)\phi(x_0) = \phi(x_0).$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{\omega_n(n-2)}$$

Обозначим

$$E(x,x_0) = \frac{|x-x_0|^{2-n}}{(2-n)\omega_n},\ n\geqslant 3 \tag{1.6}$$

или

$$\mathcal{E}(r) = \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}$$

Это фундаментальное решение оператора Лапласа.

Упражнение 2. Доказать, что при $n=2$

$$E(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|. \tag{1.7}$$

Это фундаментальное решение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x,x_0)\Delta\phi(x)ds = \phi(x_0) = (\Delta E(x,x_0),\phi(x)) \ \Leftrightarrow\ \Delta E(x,x_0) = \delta(x-x_0)$$

$\delta(x-x_0)$ - обобщенная функция Дирака.

Представление функции в виде трех потенциалов

Ω - ограниченная область, $\partial\Omega$ - липшецева, $u\in C^2(\overline{\Omega})$, $x_0\in\Omega$ и рассмотрим $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus\overline{T_\varepsilon^{x_0}}$ и $E(x,x_0)$.

Вторая формула Грина для $\Omega_\varepsilon,\ u,\ E(x,x_0)$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(u(x)\Delta E(x-x_0) - E(x-x_0)\Delta u(x))dx = \int\limits_{\partial\Omega}(u(x)\partial_\nu E(x,x_0) - E(x,x_0)\partial_\nu u(x))ds +$$

$$+\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}}(u(x)\partial_\nu E(x,x_0) - E(x,x_0)\partial_\nu u(x))ds$$

$$\Delta E(x, x_0) = 0 \;\forall x \in \Omega_\varepsilon$$

Перейдём к пределу

$$-\int\limits_{\Omega} E(x, x_0)\Delta u(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} (u(x)\partial_\nu E(x, x_0) - E(x, x_0)\partial_\nu u(x))ds +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} u(x)\partial_\nu E(x, x_0)ds$$

$$\partial_\nu E(x, x_0)\Big|_{S_\varepsilon^{x_0}} = -\frac{1}{(2-n)\omega_n}(r^{2-n})'\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} u(x)\partial_\nu E(x, x_0)ds = u(x_0)$$

Получаем формулу представления в виде суммы трех потенциалов:

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)E(x, x_0)dx - \int\limits_{\partial\Omega} E(x, x_0)\partial_\nu u(x)ds + \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu E(x, x_0)ds \tag{1.8}$$

1) Объемный потенциал, Ньютоновский потенциал - потенциал электростатического поля, которое создают заряды, распределённые по области Ω с плотностью p, интеграл со слабой особенностью

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} p(\xi)|x-\xi|^{2-n}d\xi \tag{1.9}$$

2) Потенциал простого слоя - потенциал электростатического поля, распределенного по многообразию с заданной плотностью μ

$$P_1(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\xi)|x-\xi|^{2-n}ds_\xi \tag{1.10}$$

3) Потенциал двойного слоя - потенциал электростатического поля, которое создают диполи, распределенные по поверхности с плотностью σ

$$P_2 = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n}ds_\xi \tag{1.11}$$

Эти потенциалы - гармонические функции:

- P_0 - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
- P_1 - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$.
- P_2 - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$.

Упражнение 3. Показать, что когда $|x| \to \infty$, потенциал убывает к 0.

Замечание 1. $u \in C^2(\overline{\Omega}),\ \Delta u = 0$ в Ω, тогда

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu E(x, x_0)ds - \int\limits_{\partial\Omega} E(x, x_0)\partial_\nu u(x)ds.$$

Теоремы о среднем для гармонических функций

Теорема 1 (о среднем по сфере)(первая теорема о среднем)**.** *Пусть* $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$, *u - гармоническая в* $T_R^{x_0}$. *Тогда*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x)ds. \tag{1.12}$$

Доказательство. Рассмотрим $T_\rho^{x_0}$, $\rho < R$, тогда $u \in C^2(\overline{T_\rho^{x_0}})$, значит

$$u(x_0) = \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x)\partial_\nu E(x, x_0)ds - \int\limits_{S_\rho^{x_0}} E(x, x_0)\partial_\nu u(x)ds$$

$$\int\limits_{S_\rho^{x_0}} E(x, x_0)\partial_\nu u(x)ds = \frac{\rho^{2-n}}{(2-n)\omega_n} \int\limits_{S_\rho^{x_0}} \partial_\nu u(x)ds \overset{\text{Стокс}}{=} \int\limits_{T_\rho^{x_0}} \operatorname{div} \bigtriangledown u(x)dx = 0$$

$$\partial_\nu E(x, x_0)\Big|_{S_\rho^{x_0}} = \frac{1}{(2-n)\omega_n}(r^{2-n})'\Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}}$$

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x)ds$$

Устремим r к ρ

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x)ds.$$

□

Теорема 2 (о среднем по шару)(вторая теорема о среднем)**.** *Пусть* $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$, *u - гармоническая в* $T_R^{x_0}$. *Тогда*

$$u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{T_R^{x_0}} u(x)dx. \tag{1.13}$$

Доказательство. Рассмотрим $T_\rho^{x_0}$, $\rho < R$, по первой теореме о среднем

$$u(x_0) \cdot \omega_n \rho^{n-1} = \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x)ds$$

Проинтегрируем по ρ

$$\int\limits_0^R u(x_0)\omega_n \rho^{n-1} d\rho = \int\limits_0^R \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x)dsd\rho$$

$$u(x_0)\int_0^R \int_{S_\rho^{x_0}} ds d\rho = \int_{T_R^{x_0}} u(x)dx$$

$$u(x_0)\cdot |T_R^{x_0}| = \int_{T_R^{x_0}} u(x)dx$$

$$u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|}\int_{T_R^{x_0}} u(x)dx.$$

□

Теорема 3 (третья теорема о среднем)**.** *Пусть* $\phi \in C[0,R]$ *и пусть*

$$A_\phi = \int_{T_R^{x_0}} \phi(|x-x_0|)dx \neq 0.$$

Предположим, что $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$, *u - гармоническая в* $T_R^{x_0}$. *Тогда*

$$u(x_0) = A_\phi^{-1}\int_{T_R^{x_0}} u(x)\phi(|x-x_0|)dx. \tag{1.14}$$

Доказательство. Рассмотрим $T_\rho^{x_0}$, $\rho < R$, по первой теореме о среднем

$$u(x_0)\cdot\omega_n\rho^{n-1} = \int_{S_\rho^{x_0}} u(x)ds$$

Домножим на $\phi(\rho)$

$$u(x_0)\omega_n\rho^{n-1}\phi(\rho) = \int_{S_\rho^{x_0}} \phi(\rho)u(x)ds$$

Проинтегрируем по ρ

$$\int_0^R u(x_0)\omega_n\rho^{n-1}\phi(\rho)d\rho = \int_0^R \int_{S_R^{x_0}} \phi(\rho)u(x)dsd\rho$$

$$u(x_0)\int_0^R \omega_n\rho^{n-1}\phi(\rho)d\rho = \int_{T_R^{x_0}} u(x)\phi(|x-x_0|)dx$$

$$u(x_0)\cdot A_\phi = \int_{T_R^{x_0}} u(x)\phi(|x-x_0|)dx$$

$$u(x_0) = A_\phi^{-1}\int_{T_R^{x_0}} u(x)\phi(|x-x_0|)dx$$

□

Теорема 4. *Пусть u - гармоническая функция в Ω, тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$, рассмотрим $\overline{T_h^x} \subset \Omega$ рассмотрим

$$u_h(x) = \int\limits_{|x-y|<h} w_h(|x-y|)u(y)dy = \int\limits_0^h w_h(\rho) \int\limits_{S_\rho^x} u(y)ds_y d\rho = u(x) \int\limits_0^h \int\limits_{S_\rho^x} w_h(|x-y|)ds_y d\rho =$$

$$= u(x) \int\limits_{T_h^x} w_h(|x-y|)dy = u(x).$$

Функция $u_h \in C^\infty(\Omega)$, значит $u \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Лекция 2

Гармонические функции

Принцип максимума для гармонических функций

Теорема 5 (слабый принцип максимума)**.** *Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и $\Delta u(x) \geqslant 0\ \forall x \in \Omega$. Тогда*

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x). \tag{2.1}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

а) $\forall x \in \Omega\ \Delta u(x) > 0$.

Предположим, что $\exists x_0 \in \Omega$ такой, что $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x) = u(x_0)$, рассмотрим матрицу $(\partial^2_{x_i x_j} u(x_0))$, тогда

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\ \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{x_i x_j} u(x_0) \xi_i \xi_j \leqslant 0$$

В частности

$$\partial^2_{x_i x_i} u(x_0) \leqslant 0\ i = 1...n,$$

значит $\Delta u(x) \leqslant 0$. Получили противоречие, следовательно

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x) \text{ при } \Delta u(x) > 0$$

б) $\forall x \in \Omega\ \Delta u(x) \geqslant 0$.

Построим вспомогательную функцию

$$v(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2,\ \varepsilon > 0$$

$$\Delta |x|^2 = 2$$

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon \Delta |x|^2 = \Delta u + 2\varepsilon n > 0$$

значит по пункту а)

$$\max_{\overline{\Omega}} v(x) = \max_{\partial\Omega} v(x)$$

получаем

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) \leqslant \max_{\overline{\Omega}} v(x) = \max_{\partial\Omega} v(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(x) + K\varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

Устремляем ε к 0

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(x).$$

Обратное неравенство очевидно.

□

Теорема 6 (сильный принцип максимума)**.** *Пусть* Ω *- ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$*,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*,* $\Delta u = 0$ *в* Ω*. Предположим, что в точке* $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u(x) \ (u(x_0) = m = \min_{\overline{\Omega}} u(x)),$$

тогда

$$u(x) = const = M \ \forall x \in \Omega \ (u(x) = const = m). \tag{2.2}$$

(На самом деле слова гармоническая функция можно убрать и заменить на слова: пусть u удовлетворяет теореме о среднем по шару).

Доказательство. $x_0 \in \Omega, \ u(x_0) = M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$.

Предположим, что $\exists x_* : \ u(x_*) < M$. Из непрерывности $\exists T_\varepsilon^{x_*}$ и $\delta > 0 : \ u(x) \leqslant M - \delta \ \forall x \in T_\varepsilon^{x_*}$.

Сначала предполагаем, что $x_* \in T_R^{x_0}, \overline{T_R^{x_0}} \subset \Omega$, тогда по второй теореме о среднем

$$u(x_0) = M = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{T_R^{x_0}} u(x_0) dx = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \left\{ \int\limits_{T_\varepsilon^{x_*}} u(x) dx + \int\limits_{T_R^{x_0} \setminus T_\varepsilon^{x_*}} u(x) dx \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |T_R^{x_0}|^{-1}((M - \delta)|T_\varepsilon^{x_*}| + M(|T_R^{x_0}| + |T_\varepsilon^{x_*}|)) = M - \frac{\delta |T_\varepsilon^{x_*}|}{|T_R^{x_0}|}.$$

Получили противоречие, значит не существует $x_* \in T_R^{x_0} : \ u(x_*) < M$

Теперь $x \in \Omega \setminus T^{x_0}$. Строим путь от x_0 до x и покрываем его шарами так, чтобы центр следующего лежал в предыдущем. □

Теперь сформулируем следствия из слабого принципа максимума.

Следствие 1. *Пусть* Ω *- ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$*,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *и* $\Delta u(x) \leqslant 0$*. Тогда*

$$\min_{\overline{\Omega}} u(x) = \min_{\partial\Omega} u(x). \tag{2.3}$$

Указание к доказательству. Рассмотреть $v = -u$.

Следствие 2. *Пусть* Ω *- ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$*,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *и* $\Delta u(x) = 0$*. Тогда*

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) \max_{\partial\Omega} u(x) \tag{2.4}$$

$$\min_{\overline{\Omega}} u(x) \min_{\partial\Omega} u(x) \tag{2.5}$$

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| \max_{\partial\Omega} |u(x)| \tag{2.6}$$

Лемма Вейля

Теорема 7 (лемма Вейля). *Пусть $u \in L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$ и $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int\limits_\Omega u(x)\Delta\phi(x)dx = 0,$$

тогда u - гармоническая функция в Ω.

Замечание 2. Если u - гармоническая функция, то

$$\int\limits_\Omega u\Delta\phi dx = 0.$$

Перед доказательством рассмотримм одно из интереснейших наблюдений, следующих из леммы Вейля.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\Big|_{x_n=0} = \psi(x_1, ...x_{n-1}) \\ \partial_{x_n} u\Big|_{x_n=0} = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Возьмем точку $x_0 = (x_{0,1}, ...x_{0,n-1}, 0)$ Будем доказывать, что задача Коши разрешима в некоторой окрестности точки $x_0 \Leftrightarrow \psi$ - аналитическая функция.

Доказательство в одну сторону следует из теоремы Коши - Ковалевской.

Докажем, что если функция ψ не аналитическая, то задача Коши не разрешима. При доказательстве будем пользоваться ещё не доказанными фактами:

1) Лемма Вейля.

2) Любая гармоническая функция является аналитической.

Доказываем от противного. Рассмотрим область Ω^+ - часть окрестности точки x_0, лежащая в полупространстве $x_n > 0$, γ_0 - граница области Ω^+, лежащая на плоскости $x_n = 0$ и $\Omega^- = \{x | (x_1, ...x_{n-1}, -x_n) \in \Omega^+\}$.

Продолжим функцию u на Ω^+ четным образом, то есть если $u \in \Omega^-$, то

$$u(x) = u(x_1, ...x_{n-1}, -x_n)$$

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega^-$$

$$\partial_{x_n} u\Big|_{x_n=0} = 0$$

$u \in C^1(\Omega^+ \cup \gamma_0 \cup \Omega^-)$

$$\int\limits_{\Omega^+\cup\Omega^-} u\Delta\phi dx = 0,$$

так как

$$\int\limits_{\Omega^+} u\Delta\phi dx = \int\limits_{\gamma_0} (u\partial_\nu\phi - \phi\partial_\nu u)d\hat{x} = -\int\limits_{\gamma_0} \psi\partial_{x_n}\phi d\hat{x}.$$

По Ω^- будет то же самое, но с противоположным знаком, значит u - гармоническая, ψ - аналитическая, так как гармоническая функция не может быть не аналитической.

Доказательство леммы Вейля. Возьмем $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega,\ \rho(\overline{\Omega}, \partial\Omega) = \rho_0 > 0$, построим средние функции (все доказанное для L^2 верно для L^p).

$$u_h(x) = \int\limits_{|x-y|<h} w_h(|x-y|)u(y)dy,\ h < \rho_0,\ x \in \Omega_1.$$

Проверим, что $\Delta u_h(x) = 0\ \forall x \in \Omega_1$

$$\Delta u_h(x) = \int\limits_{|x-y|<h} \Delta_x w_h(|x-y|)u(y)dy = \int\limits_{|x-y|<h} \Delta_y w_h(|x-y|)u(y)dy = 0,$$

так как $w_h(|x-y|)$ - финитная. По третьей теореме о среднем, $T_R^{x_0} \subset \Omega_1$

$$u_h(x_0) = \left(\int\limits_{T_R^{x_0}} \phi(|x-x_0|)dx\right)^{-1} \int\limits_{T_R^{x_0}} u_h(x)\phi(|x-x_0|)dx.$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} u_h(x_0) = \left(\int\limits_{T_R^{x_0}} \phi(|x-x_0|)dx\right)^{-1} \int\limits_{T_R^{x_0}} u(x)\phi(|x-x_0|)dx.$$

Предел существует, так как

$$\|u_h - u\|_{L^p(\Omega_1)} \to 0,\ h \to 0$$

для $p > 1$

$$\int\limits_{T_R^{x_0}} (u_h - u)\phi(|x-x_0|)dx \overset{\text{н-во Гельдера}}{\leqslant} \left(\int\limits_{T_R^{x_0}} |u_h - u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{T_R^{x_0}} |\phi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\ q^{-1} = \frac{p-1}{p}$$

Пусть $\phi(|x-x_0|) = w_{h_1}(|x-x_0|)$. Рассматриваем $\overline{\Omega_R} \subset \Omega_1,\ \rho(\overline{\Omega_R}, \partial\Omega_1) = R,\ h_1 < R$

$$\lim_{h\to 0} u_h(x_0) = \int\limits_{T_R^{x_0}} u(x)w(|x-x_0|)dx = u_{h_1}(x_0)$$

Если взять h_2, то

$$\lim_{h\to 0} u_h(x_0) = u_{h_2}(x_0),$$

то есть наша последовательность состоит из констант, значит

$$u_h(x_0) = u(x_0)$$

$u_h(x_0)$ - гармоническая функция, значит u - гармоническая функция. $\square$

Решение задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } T_1^0 \\ u = \phi(x) & \text{на } S_1^0 \end{cases} \tag{2.8}$$

$\phi \in C(S_1^0)$. Будем доказывать, что задача разрешима, $u \in C^2(T_1^0) \cap C(\overline{T_1^0})$ и решение единственное.

Единственность следует из принципа максимума.

Рассмотрим задачу, где ϕ - полином

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } T_1^0 \\ u = q \in \mathscr{P}^m & \text{на } S_1^0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Сначала рассматриваем вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \Delta u = p \in \mathscr{P}^m & \text{в } T_1^0 \\ u = 0 & \text{на } S_1^0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Утверждается, что у задачи (2.10) единственное решение в классе полиномов.

Рассмотрим линейный оператор $T : \mathscr{P}^m \to \mathscr{P}^m$:

$$Tu = \Delta((1 - |x|^2)u).$$

$Ker\, T = \{0\}$, так как

$$Tu = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta((1-|x|^2)u) = 0 \text{ в } T_1^0 \;\Rightarrow\; (1-|x|^2)u = 0 \text{ на } S_1^0 \overset{\text{пр. макс.}}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\text{пр. макс.}}{\Rightarrow} (1-|x|^2)u \equiv 0 \text{ в } T_1^0 \;\Rightarrow\; u \equiv 0 \;\Rightarrow\; Im\, T = \mathscr{P}^m,$$

значит задача имеет единственное решение в классе полиномов, следовательно задача (2.9) также имеет единственное полиномиальное решение.

$$\begin{cases} \Delta u = p \in \mathscr{P}^m & \text{в } T_1^0 \\ u = q \in \mathscr{P}^m & \text{на } S_1^0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Задача (2.11) также имеет единственное решение в классе полиномов.

Теперь приблизим ϕ в равномерной метрике на сфере полиномами

$$\phi \in C(S_1^0) \;\Rightarrow\; \{q_k\},\; q_k \in \mathscr{P} : \max_{S_1^0} |\phi - q_k| \to 0,\; k \to 0.$$

Получаем

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{в } T_1^0 \\ u = q_k & \text{на } S_1^0 \end{cases} \tag{2.12}$$

получили последовательность гармонических функций $\{u_k\}$

$$\max_{\overline{T_1^0}} |u_k - u_m| = \max_{S_1^0} |q_k - q_m| \xrightarrow[k,m \to 0]{} 0$$

значит

$$\exists u \in C(\overline{T_1^0}): \max_{\overline{T_1^0}} |u - u_k| \to 0, \ k \to \infty.$$

Для u справедливы условия леммы Вейля, так как

$$\int_{T_1^0} u_k \Delta\phi dx = 0,$$

а $\{u_k\}$ сходится равномерно, значит устремляем $k \to \infty$ и получаем

$$\int_{T_1^0} u \Delta\phi dx = 0$$

Лекция 3

Гармонические функции

Теорема 8 (о последовательности гармонических функций). *Пусть $\{u_s\}_{s=1}^{\infty}$ - последовательность гармонических функций в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\{u_s\}$ сходится в $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$ к некоторому элементу $u \in L^p(\Omega)$. Тогда*

1) u - гармоническая функция в Ω

2) $\forall\, \overline{\Omega_1} \subset \Omega$ $u_s \overset{\overline{\Omega_1}}{\rightrightarrows} u,\ s \to \infty$.

Доказательство.

1) u_s - гармоническая, значит

$$\int\limits_{\Omega} u_m \Delta\phi dx = 0 \ \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

$u_s \to u$, устремим m к ∞ и получим

$$\int\limits_{\Omega} u \Delta\phi dx = 0.$$

2) Пусть $\overline{\Omega_1} \subset \Omega,\ \rho_0 = \rho(\overline{\Omega_1}, \partial\Omega) > 0$. Возьмем $\forall x_0 \in \overline{\Omega_1}$, тогда $\overline{T^{x_0}_{\frac{\rho_0}{2}}} \subset \Omega$.

Рассмотрим $u_s(x) - u_m(x)$, по теореме о среднем по шару

$$|u_s(x) - u_m(x)| \leqslant \frac{1}{|T^{x_0}_{\frac{\rho_0}{2}}|} \int\limits_{T^{x_0}_{\frac{\rho_0}{2}}} |u_s(x) - u_m(x)| dx \overset{\text{н-во Гёльдера}}{\leqslant}$$

$$\overset{\text{н-во Гёльдера}}{\leqslant} \frac{1}{|T^{x_0}_{\frac{\rho_0}{2}}|} \left(\int\limits_{\Omega} |u_s - u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{T^{x_0}_{\frac{\rho_0}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K(\rho_0) \|u_s - u_m\|_{L^p(\Omega)},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Следовательно

$$\max_{\overline{\Omega_1}} |u_s - u_m| \leqslant K(\rho_0) \|u_s - u_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0,\ s, m \to \infty,$$

значит

$$u_s \rightrightarrows u.$$

□

Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа

Сначала вспомним формулу представления в виде трех потенциалов.
Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, значит $\forall x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x) E(x, x_0) dx - \int\limits_{\partial\Omega} E(x, x_0) \partial_\nu u(x) ds + \int\limits_{\partial\Omega} u(x) \partial_\nu E(x, x_0) ds \tag{3.1}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega \\ u = \phi & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

В формуле нам мешает $\partial_\nu u$, остальное известно.

Предположим, что мы можем решить такую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_x g(x, x_0) = 0, \ x \in \Omega, x_0 \in \Omega \\ g(x, x_0)\Big|_{x \in \partial\Omega} = -E(x, x_0)\Big|_{\partial\Omega} \end{cases} \tag{3.3}$$

и предполагаем, что $g(x, x_0) \in C^2(\overline{\Omega})$.

Применим вторую формулу Грина к $u, \ g(x, x_0), \ \Omega$

$$\int\limits_{\Omega} (g\Delta u - u\Delta g) dx = \int\limits_{\partial\Omega} (g\partial_\nu u - u\partial_\nu g) ds \tag{3.4}$$

$$0 = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x, x_0) dx - \int\limits_{\partial\Omega} \phi \partial_\nu g ds + \int\limits_{\partial\Omega} E(x, x_0) \partial_\nu u(x) ds \tag{3.5}$$

Подставим значения в формулу (3.1) и сложим её с формулой (3.5)

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} f(x)(E(x, x_0) + g(x, x_0)) dx + \int\limits_{\partial\Omega} \phi(x) \partial_{\nu(x)}(E(x, x_0) + g(x, x_0)) ds. \tag{3.6}$$

Функцией Грина называется

$$G(x, x_0) = E(x, x_0) + g(x, x_0). \tag{3.7}$$

Упражнение 4. Доказать, что G обладает симметрией, а именно $\forall x_0, \ x_1 \in \Omega$ $G(x_0, x_1) = G(x_1, x_0)$.
Указание. Рассмотреть $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\overline{T_\varepsilon^{x_0} \cup T_\varepsilon^{x_0}})$ и $G(x, x_0) = u, \ G(x, x_1) = v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$, применить вторую формулу Грина и перейти к пределу.

Задача нахождения гармонической функции в шаре

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } T_R^0 \\ u = \phi & \text{на } S_R^0, \ \phi \in C(S_R^0) \end{cases} \tag{3.8}$$

Для задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega \\ u = \phi & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

имеем решение $\forall x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial\Omega} \phi(x) \partial_\nu G(x, x_0) ds \tag{3.10}$$

Вопрос в том, можем ли мы построить функцию Грина для задачи (3.8).

Убедимся, что для шара функцией Грина будет

$$G(x, x_0) = \mathcal{E}(|x - x_0|) - \mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}|x - x_1|\right),$$

где $\rho = |x_0|$, $\rho_1 = |x_1|$, x_1 - точка сферичеки симметричная точке x_0, то есть $\rho\rho_1 = R^2$

$$\mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}|x - x_1|\right) = E\left(\frac{\rho}{R}x, \frac{\rho}{R}x_1\right)$$

$$g(x, x_0) = -\mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}|x - x_1|\right)$$

Нужно доказать, что $G\Big|_{x \in S_R^0} = 0$.

Будем работать с Рис. 1. $r = |x - x_0|$, $r_1 = |x - x_1|$, $\triangle x_0 O x \sim \triangle x_1 O x$, значит

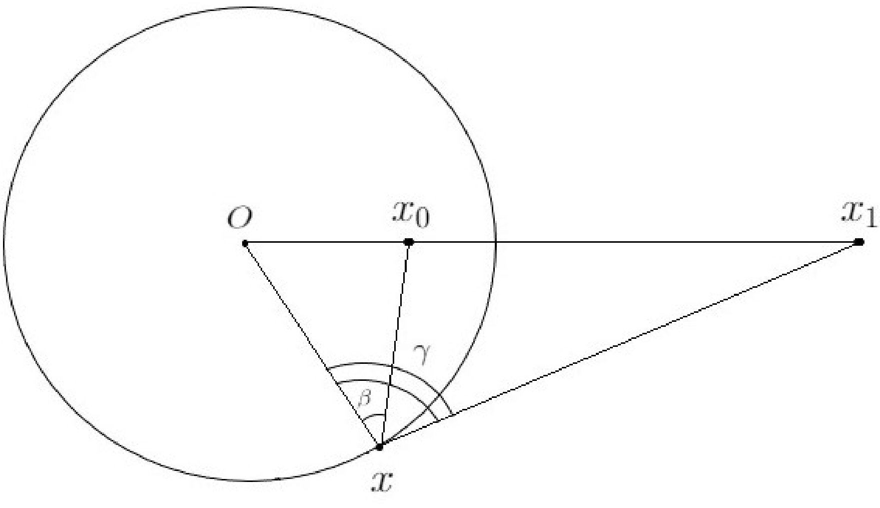

Рис. 1.

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1} = \frac{r}{r_1} \Rightarrow r = \frac{r_1 \rho}{R} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}\left(\frac{\rho r_1}{R}\right) \Rightarrow$$

$$G(x, x_0) = \mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}r_1\right) - \mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}r_1\right) = 0$$

Функция Грина единственна в силу единственности решения задачи Дирихле. Теперь будем преобразовывать формулу

$$u(x_0) = \int\limits_{S_R^0} \phi(x)\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)ds$$

$$\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)\Big|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(r)\partial_\nu|x-x_0| - \frac{\rho}{R}\mathcal{E}'(r)\partial_\nu|x-x_1|$$

$$\partial_\nu|x-x_0| = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{0,i}}{|x-x_0|}\nu_i(x) = \cos\beta$$

$$\partial_\nu|x-x_1| = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{1,i}}{|x-x_1|}\nu_i(x) = \cos\gamma$$

Получаем

$$\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)\Big|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(r)\cos\beta - \frac{\rho}{R}\mathcal{E}'(r)\cos\gamma$$

По теореме косинусов для треугольников на Рис. 1.

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta$$

$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\gamma$$

$$\cos\beta = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$$

$$\cos\gamma = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}$$

$$r_1 = \frac{Rr}{\rho},\ \rho_1 = \frac{R^2}{\rho}$$

Подставим

$$\partial_{\nu(x)}G(x,x_0)\Big|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(r)\left(\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr} - \frac{\rho}{R}\cdot\frac{R^2 + \frac{R^2r^2}{\rho^2} - \frac{R^4}{\rho^2}}{2\frac{R^2r}{\rho}}\right) =$$

$$= \mathcal{E}'(r)\left(\frac{R^2+r^2-\rho^2-\rho^2-r^2+R^2}{2Rr}\right) = \mathcal{E}'(r)\frac{R^2-\rho^2}{Rr}$$

$$\mathcal{E}(r) = \frac{r^{2-n}}{\omega_n(2-n)}$$

$$\mathcal{E}'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$$

Получаем интеграл Пауссона:

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0}\frac{\phi(x)}{|x-x_0|^n}ds_x \tag{3.11}$$

Мы получили, что если у нас есть решение задачи Дирихле в шаре для оператора Лапласа, то это решение может быть представлено в виде интеграла Пуассона.

Если $\phi = 1$, то единственным решением задачи Дирихле является 1 (принцип максимума). Получаем, что $\forall x_0 \in T_R^0$

$$1 = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{ds_x}{|x - x_0|^n} \tag{3.12}$$

Хотим убедиться, что интеграл Пуассона является классическим решением задачи Дирихле в шаре, для любой непрерывной ϕ, заданной на сфере.

Пусть $\phi \in C(S_R^0)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T_R^0 \\ u(x) = \phi(x), \ x \in S_R^0 \end{cases}$$

$$\Delta_{x_0} u(x_0) = \int\limits_{S_R^0} \phi(x) \partial_{\nu(x)} \Delta_{x_0} G(x_0, x) ds_x$$

Берем $x_0 \in \overline{\Omega_1} \subset T_R^0$

$$\Delta_{x_0} G(x_0, x) = 0 \ \Rightarrow \ \Delta_{x_0} u(x_0) = 0$$

Теперь пусть $x_0 \in T_R^0, \ \hat{x} \in S_R^0, \ x_0 \to \hat{x}$, будем доказывать, что $u(x_0) \to \phi(\hat{x})$. Воспользуемся равенством для единицы и домножим его на $\phi(\hat{x})$

$$\phi(\hat{x}) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{\phi(\hat{x}) ds_x}{|x - x_0|^n}$$

Рассмотрим $u(x_0) - \phi(\hat{x})$

$$u(x_0) - \phi(\hat{x}) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{\phi(x) - \phi(\hat{x})}{|x - x_0|^n} ds_x$$

$$|u(x_0) - \phi(\hat{x})| \leqslant \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{|\phi(x) - \phi(\hat{x})|}{|x - x_0|^n} ds_x$$

Из неперерывности ϕ на S_R^0 следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma$ - δ_1 - окрестность точки $\hat{x}$: если $|x - \hat{x}| < \delta_1$, то $|\phi(x) - \phi(\hat{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ Можем разбить интеграл на сумму

$$\frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{|\phi(x) - \phi(\hat{x})|}{|x - x_0|^n} ds_x = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{\sigma} \frac{|\phi(x) - \phi(\hat{x})|}{|x - x_0|^n} ds_x +$$

$$+ \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_1^0 \setminus \overline{\sigma}} \frac{|\phi(x) - \phi(\hat{x})|}{|x - x_0|^n} ds_x = I_1 + I_2$$

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{ds_x}{|x - x_0|^n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Теперь $x \in S_1^0 \setminus \overline{\sigma}$

$$|x - x_1| \geqslant \frac{\delta}{2},\ R^2 - |x_0|^2 \to 0$$

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_1 + I_2 \leqslant \varepsilon$$

значит

$$u(x_0) \to \phi(\hat{x}).$$

Неравенство Харнака

Теорема 9 (неравенство Харнака)**.** *Пусть u - гармоническая функция в шаре T_R^0, $u \in C(\overline{T_R^0})$, $u \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{(R^2 - |x_0|^2)R^{n-2}}{(R + |x_0|)^n} u(0) \leqslant u(x_0) \leqslant \frac{(R^2 - |x_0|^2)R^{n-2}}{(R - |x_0|)^n} u(0). \tag{3.13}$$

Доказательство.

$$R - \rho \leqslant r \leqslant R + \rho$$

$$\frac{R^2 - |x_0|^2}{(R + |x|_0)^n} \leqslant \frac{R^2 - |x_0|^2}{(x - |x|_0)^n} \leqslant \frac{R^2 - |x_0|^2}{(R - |x|_0)^n}$$

$$\frac{R^2 - |x_0|^2}{(R + |x|_0)^n \omega_n R} \int\limits_{S_R^0} u(x) ds \leqslant u(x_0) \leqslant \frac{R^2 - |x_0|^2}{(R - |x|_0)^n \omega_n R} \int\limits_{S_R^0} u(x) ds$$

По теореме о среднем

$$\int\limits_{S_R^0} u(x) = u(0) \omega_n R^{n-1}$$

$$\frac{R^2 - |x_0|^2}{(R + |x|_0)^n \omega_n R} \omega_n R^{n-1} u(0) \leqslant u(x_0) \leqslant \frac{R^2 - |x_0|^2}{(R - |x|_0)^n \omega_n R} \omega_n R^{n-1} u(0)$$

$$\frac{(R^2 - |x_0|^2)R^{n-2}}{(R + |x_0|)^n} u(0) \leqslant u(x_0) \leqslant \frac{(R^2 - |x_0|^2)R^{n-2}}{(R - |x_0|)^n} u(0).$$

□

Лекция 4

Гармонические функции

Использование фундаментального решения

Для краткости рассматриваем $n \geqslant 3$

$$E(x, x_0) = \frac{|x - x_0|^{2-n}}{\omega_n(2-n)}$$

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta u = f,\ f \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

Классическое решение уравнение (4.1)

$$u(x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(|x - x_0|) f(x) dx \tag{4.2}$$

Убедимся, что оно является решением нашего уравнения. Сделаем замену $x = x_0 + y$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(|x - x_0|) f(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(|y|) f(x_0 + y) dy$$

Так как $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, мы можем вносить производную под знак интеграла

$$D_{x_0}^{\alpha} u(x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(|y|) D_{x_0}^{\alpha} f(x_0 + y) dy$$

$$\Delta_{x_0} u(x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(|y|) \Delta_{x_0} f(x_0 + y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(|y|) \Delta_y f(x_0 + y) dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T_\varepsilon^0}} \mathcal{E}(|y|) \Delta_y f(x_0 + y) dy \overset{\text{2-я ф-ла Грина}}{=}$$

$$\overset{\text{2-я ф-ла Грина}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T_\varepsilon^0}} \Delta_y \mathcal{E}(|y|) f(x_0 + y) dy + \int\limits_{S_\varepsilon^0} \mathcal{E}(|y|) \partial_{\nu(y)} f(x_0 + y) ds_y -$$

$$- \int\limits_{S_\varepsilon^0} \partial_{\nu(y)} \mathcal{E}(|y|) f(x_0 + y) ds_y \Big).$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T_\varepsilon^0}} \Delta_y \mathcal{E}(|y|) f(x_0 + y) dy = 0$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon^0} \mathcal{E}(|y|) \partial_{\nu(y)} f(x_0 + y) ds_y = 0$$

$$\partial_{\nu(y)}\mathcal{E}(|y|)\Big|_{S_\varepsilon^0} = -\mathcal{E}'(r)\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}} = -\frac{1}{|S_\varepsilon^0|}$$

Получаем

$$\Delta_{x_0}u(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|S_\varepsilon^0|}\int\limits_{S_\varepsilon^0} f(x_0+y)ds_y \overset{\text{т. о среднем}}{=} f(x_0).$$

Обращение теоремы о среднем по шару

Теорема 10. *Пусть $u \in C(\Omega)$, Ω - область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\forall x_0 \in \Omega$*

$$u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|}\int\limits_{T_R^{x_0}} u(x)dx,\ \overline{T_R^{x_0}} \subset \Omega.$$

Тогда $u(x)$ - гармоническая функция.

Доказательство. Зафиксируем $T_R^{x_0} \subset \Omega$ и рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases}\Delta v = 0 & \text{в } T_R^{x_0}\\ v = u & \text{на } S_R^{x_0}\end{cases}$$

Докажем, что $u \equiv v$ в $T_R^{x_0}$.

Рассмотрим $w = u - u$, $w = 0$ на $S_R^{x_0}$, w удовлетворяет теореме о среднем по шару, значит для w справедлив строгий принцип максимума, следовательно $w \equiv 0$ в $T_R^{x_0}$. □

Оценка производных гармонической функции

Теорема 11. *Пусть Ω - ограниченная область, u - гармоническая функция в Ω, $u \in C(\overline{\Omega})$, u - подобласть Ω, $\rho(\Omega_1, \partial\Omega) = \rho_0 > 0$. Тогда*

$$\max_{\Omega_1}|D^\alpha u| \leqslant \left(\frac{nk}{\rho_0}\right)^k \max_{\overline{\Omega}}|u|,\ |\alpha| = k. \tag{4.3}$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции.

При $|\alpha| = 1$ имеем $\forall x_0 \in \Omega_1,\ T_{\rho_0}^{x_0} \subset \overline{\Omega}$

$$\Delta\partial_{x_j}u = 0 \text{ в } \Omega,$$

значит по теореме о среднем

$$\partial_{x_j}u(x_0) = \frac{1}{|T_{\rho_0}^{x_0}|}\int\limits_{T_{\rho_0}^{x_0}}\partial_{x_j}u(x)dx \overset{\text{ф-ла Стокса}}{=} \frac{1}{|T_{\rho_0}^{x_0}|}\int\limits_{S_{\rho_0}^{x_0}} u(x)\nu_j(x)ds_x.$$

Из равенства следует, что

$$\max_{\Omega_1}|\partial_{x_j}u(x)| \leqslant \frac{|S_{\rho_0}^{x_0}|}{|T_{\rho_0}^{x_0}|}\max_{\overline{\Omega}}|u(x)| = \frac{\omega_n\rho_0^{n-1}}{\frac{\omega_n}{n}\rho_0^n}\max_{\overline{\Omega}}|u(x)| = \frac{n}{\rho_0}\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|.$$

Построим конечную цепочку подобластей Ω:

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset ... \subset \Omega_{k+1} = \Omega,\ \rho(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}) = \frac{\rho_0}{k}.$$

Рассматриваем

$$\max_{\overline{\Omega_1}} |D^\alpha u| \leqslant \frac{nk}{\rho_0} \max_{\overline{\Omega_2}} |D^{\alpha'} u|,\ |\alpha'| = k-1.$$

По индукционному предположению для $|\alpha'| = k-1$ мы доказали

$$\max_{\overline{\Omega_2}} |D^{\alpha'} u| \leqslant \left(\frac{n(k-1)k}{\rho_0(k-1)}\right)^{k-1} \max_{\overline{\Omega}} |u| = \left(\frac{nk}{\rho_0}\right)^{k-1} \max_{\overline{\Omega}} |u|.$$

Получаем

$$\max_{\overline{\Omega_1}} |D^\alpha u| \leqslant \left(\frac{nk}{\rho_0}\right)^{k} \max_{\overline{\Omega}} |u|.$$

□

Аналитичность гармонических функций

Теорема 12. *Пусть u - гармоническая функция в области Ω. Тогда u - аналитическая функция в Ω.*

Доказательство. $u \in C^\infty(\Omega)$, значит $\forall x_0 \in \Omega\ \exists \overline{T^{x_0}_{\rho_0}} \subset \Omega$ и $\exists \tilde{x} \in T^{x_0}_{\rho_0}$ такие, что $\forall x \in T^{x_0}_{\rho_0}$

$$u(x) = \sum_{|\alpha|<m} c_\alpha (x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

$$c_\alpha = \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}$$

Обозначим

$$\gamma_m(x,\tilde{x}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

Предполагаем, что $\overline{T^{x_0}_{2\rho_0}} \subset \Omega$. Покажем, что $\gamma_m \rightrightarrows 0,\ m \to \infty,\ x \in \overline{T^{x_0}_{\varepsilon}},\ \tilde{x} \in \overline{T^{x_0}_{\rho_0}}$

$$\max_{\overline{T^{x_0}_{\rho_0}}} |D^\alpha u| \leqslant \left(\frac{nm}{\rho_0}\right)^m \max_{\overline{T^{x_0}_{2\rho_0}}} |u|$$

$$|(x-x_0)^\alpha| \leqslant |x-x_0|^m \leqslant \varepsilon^m$$

$$|\gamma_m(x,\tilde{x})| \leqslant \left(\frac{nm\varepsilon}{\rho}\right)^m \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\right) \max_{\overline{T^{x_0}_{2\rho_0}}} |u|$$

Нужно выразить сумму, рассмотрим

$$(x_1 + ... + x_n)^n = \sum_{|\alpha|=m} \frac{x^\alpha m!}{\alpha!}$$

Возьмём $x_j = 1$

$$n^m = m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{n^m}{m!}$$

Получаем

$$|\gamma_m(x, \tilde{x})| \leqslant \frac{n^{2m} m^m \varepsilon^m}{\rho_0^m m!} \max_{\overline{T_{2\rho_0}^{x_0}}} |u|$$

$$m^m \leqslant m! e^m$$

$$|\gamma_m(x, \tilde{x})| \leqslant \left(\frac{n^2 e \varepsilon}{\rho_0}\right)^m \max_{\overline{T_{2\rho_0}^{x_0}}} |u|.$$

Берем такой ε, что $\frac{n^2 e\varepsilon}{\rho_0} < 1$. □

Упражнение 5. На самом деле теорема доказана не до конца. Доказать, что ряд сходится абсолютно.

Теоремы Лиувилля

Теорема 13 (первая теорема Лиувилля)**.** *Пусть u - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ и $|u| \leqslant M$. Тогда $u = const$.*

Доказательство. Рассмотрим гармоническую функцию $\partial_{x_j} u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, по теореме о среднем

$$\partial_{x_j} u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{T_R^{x_0}} \partial_{x_j} u(x) dx \overset{\text{ф-ла Стокса}}{=} \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x) \nu_j(x) ds_x$$

Получаем

$$|\partial_{x_j} u(x_0)| = \left| \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x) \nu_j(x) ds_x \right| \leqslant \frac{M |S_R^{x_0}|}{|T_R^{x_0}|} = \frac{M R^{n-1} \omega_m}{\frac{\omega_n}{n} R^n} = \frac{Mn}{R}$$

Устремляем R к ∞ и получаем

$$|\partial_{x_j} u(x_0)| \to 0,$$

значит

$$\partial_{x_j} u(x_0) = 0 \; \forall j = 1...n, \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; u = const.$$

□

Теорема 14 (вторая теорема Лиувилля)**.** *Пусть u - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ и $u \geqslant 0$. Тогда $u = const$.*

Доказательство. Рассмотрим гармоническую функцию $\partial_{x_j} u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, по теореме о среднем

$$\partial_{x_j} u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{T_R^{x_0}} \partial_{x_j} u(x) dx \overset{\text{ф-ла Стокса}}{=} \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x) \nu_j(x) ds_x$$

Так как u - знакопостоянная, то $\exists x_* \in S_R^{x_0}$:

$$\frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x) \nu_j(x) ds_x = \frac{\nu_j(x_*)}{|T_R^{x_0}|} \int\limits_{S_R^{x_0}} u(x) ds_x \overset{\text{т. о среднем}}{=} \frac{\nu_j(x_0) u(x_0) n}{R}$$

Получаем

$$|\partial_{x_j} u(x_0)| = \left| \frac{\nu_j(x_0) u(x_0) n}{R} \right| \leqslant \frac{u(x_0) n}{R}, \text{ так как } |\nu_j(x)| \leqslant 1$$

Устремляем R к ∞ и получаем

$$|\partial_{x_j} u(x_0)| \to 0,$$

значит

$$\partial_{x_j} u(x_0) = 0 \; \forall j = 1...n, \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \; \Rightarrow \; u = const.$$

□

Лекция 5

Гармонические функции

Теоремы Лиувилля

Мы можем применить первую теорему Лиувилля для доказательства основной теоремы алгебры.

Теорема 15 (основная теорема алгебры)**.** *Любой многочлен $P(z)$, $deg\,P > 1$ над полем $\mathbb{C}$ всегда имеет хотя бы один корень.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\forall z \in \mathbb{C}\ P(z) \neq 0$, тогда $P^{-1}(z)$ - аналитическая, следовательно $Re\,P^{-1}(z)$ - гармоническая функция, $Im\,P^{-1}(z)$ - гармоническая функция, определенная на всей плоскости

$$|Re\,P^{-1}(z)| \leqslant |P^{-1}(z)| \to 0,\ |z| \to \infty,$$

значит $Re\,P^{-1}(z)$ - ограниченная гармоническая функция на плоскости, по теореме Лиувилля она константа, следовательно $Re\,P^{-1}(z) = 0$, аналогично $Im\,P^{-1}(z) = 0$, следовательно $P^{-1}(z) = 0$. Получили противоречие. □

Теорема об устранимой особенности гармонической функции

Напоминание:

$$\mathcal{E}(|x - x_0|) = \frac{|x - x_0|^{2-n}}{\omega_n(2-n)}$$

$$\Delta\mathcal{E}(|x - x_0|) = 0\ \forall x \neq x_0$$

$$|x - x_0| \to 0,\ \mathcal{E}(|x - x_0|) \to -\infty$$

Теорема 16. *Пусть u - гармоническая функция в $\Omega \setminus \{x_0\}(x_0 \in \Omega)$. Обозначим*

$$m(\rho) = \sup_{\Omega\setminus\overline{T_\rho^{x_0}}} |u(x_0)|. \tag{5.1}$$

Предположим, что

$$m(\rho) \leqslant a(\rho)|\mathcal{E}(\rho)|,\ \textit{где}\ a(\rho) \to 0,\ \rho \to 0.$$

Тогда x_0 - устранимая особенность для гармонической функции u.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in \Omega$, $\overline{T_r^{x_0}}$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{в } T_r^{x_0} \\ v = u & \text{на } S_r^{x_0} \end{cases}$$

Задача имеет единственное классическое решение и согласно принципу максимума

$$\max_{\overline{T_r^{x_0}}} |v(x)| = \max_{S_r^{x_0}} |u(x)| = C$$

Введём функцию

$$w_\varepsilon = u(x) - v(x) + \varepsilon\mathcal{E}(|x - x_0|),\ \varepsilon > 0$$

Рассмотрим данную функцию в сферическом слое $T_r^{x_0} \setminus T_\rho^{x_0}$ в этом сферическом слое функция гармоническая

$$\Delta_x w_\varepsilon = 0$$

$$w_\varepsilon\Big|_{S_r^{x_0}} \leqslant 0$$

$$w_\varepsilon\Big|_{S_\rho^{x_0}} \leqslant \sup_{S_r^{x_0}} |u(x)| + C + \varepsilon\mathcal{E}(|x - x_0|)$$

По условию

$$\max_{S_r^{x_0}} |u(x)| \leqslant a(\rho)|\mathcal{E}(\rho)|$$

следовательно $\forall\varepsilon > 0\ \exists\rho_0(\varepsilon):\ \forall\rho < \rho_0(\varepsilon)\ a(\rho) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ получаем

$$w_\varepsilon\Big|_{S_\rho^{x_0}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|\mathcal{E}(|x - x_0|)| + C + \varepsilon\mathcal{E}(|x - x_0|) = \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{E}(|x - x_0|) + C$$

$\mathcal{E}(|x - x_0|) \to -\infty,\ |x - x_0| \to 0$, следовательно $\exists\rho_2(\varepsilon):\ \forall\rho < \rho_2(\varepsilon)\ \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{E}(\rho) + C \leqslant 0$

Возьмем $\rho_1(\varepsilon) = \min(\rho_2(\varepsilon), \rho_0(\varepsilon))$, имеем, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\rho_1(\varepsilon):\ \forall\rho < \rho_1(\varepsilon)$

$$w_\varepsilon\Big|_{S_\rho^{x_0}} \leqslant 0$$

Согласно принципу максимума $w_\varepsilon \leqslant 0$ в $T_r^{x_0} \setminus \{x_0\}$, получаем $\forall x \in T_r^{x_0} \setminus \{x_0\}$

$$u(x) - v(x) \leqslant -\varepsilon\mathcal{E}(|x - x_0|) = \varepsilon|\mathcal{E}(|x - x_0|)|.$$

Теперь рассмотрим

$$\tilde{w}_\varepsilon = u(x) - v(x) - \varepsilon\mathcal{E}(|x - x_0|)$$

По аналогии получаем $\tilde{w}_\varepsilon \geqslant 0$ в $T_r^{x_0} \setminus \{x_0\}$, то есть

$$u(x) - v(x) \geqslant -\varepsilon|\mathcal{E}(|x - x_0|)|,$$

следовательно

$$|u(x) - v(x)| \leqslant \varepsilon|\mathcal{E}(|x - x_0|)|,\ \forall x \in T_r^{x_0} \setminus \{x_0\},\ \forall\varepsilon > 0$$

Устремим ε к 0, получаем

$$u(x) = v(x)\ \forall x \in T_r^{x_0} \setminus \{x_0\}$$

, значит мы можем доопределить u в точке x_0 $u(x_0) = v(x_0)$. □

Потенциалы электростатического поля

1. Объемный потенциал, рассматриваем случай $n \geqslant 3$

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)|x-\xi|^{2-n} d\xi \tag{5.2}$$

Ω - ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^n$, ρ задана на Ω называется плотностью.

Теорема 17. *Пусть $\rho \in L^\infty(\Omega)$, тогда $P_0(x)$ - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.*

Доказательство. Возьмем $x \in \Omega_1,\ \overline{\Omega_1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega},\ \rho(\overline{\Omega_1}, \partial\Omega) = \rho_0 > 0$. Достаточно доказать, что мы можем дифференцировать интеграл по параметру $x \in \Omega_1$ сколько угодно раз.

Формально продифференцируем

$$D_x^\alpha P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi) D_x^\alpha |x-\xi|^{2-n} d\xi$$

этот интеграл равномерно сходится по $x \in \overline{\Omega_1}$, значит можем дифференцировать, теперь применим оператор Лапласа

$$\Delta_x P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi) \Delta_x |x-\xi|^{2-n} d\xi,\ x \in \Omega_1.$$

□

Упражнение 6. Доказать, что $P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 18. *Пусть $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда $P_0(x) \in C^2(\Omega)$ и*

$$\Delta P_0(x) = -\omega_n (n-2)\rho(x),\ x \in \Omega. \tag{5.3}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \Omega$.

$$\partial_{x_j} P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi) \partial_{x_j} |x-\xi|^{2-n} d\xi = -\int\limits_{\Omega} \rho(\xi) \partial_{\xi_j} |x-\xi|^{2-n} d\xi =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus \overline{T_\varepsilon^x}} \rho(\xi) \partial_{\xi_j} |x-\xi|^{2-n} d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\int\limits_{\Omega \setminus \overline{T_\varepsilon^x}} \partial_{\xi_j} \rho(\xi) |x-\xi|^{2-n} d\xi -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi) |x-\xi|^{2-n} \nu_j(\xi) ds_\xi - \int\limits_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) |x-\xi|^{2-n} \nu_j(x) ds_\xi \Bigg) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \partial_{\xi_j} \rho(\xi) |x-\xi|^{2-n} d\xi - \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi) |x-\xi|^{2-n} \nu_j(\xi) ds_\xi,$$

следовательно интеграл существует.

$$\partial^2_{x_jx_j}P_0(x)=\int\limits_{\Omega}\partial_{\xi_j}\rho(\xi)\partial_{x_j}|x-\xi|^{2-n}d\xi-\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi)\partial_{x_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)ds_\xi=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T^x_\varepsilon}}\partial_{\xi_j}\rho(\xi)\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n}d\xi\right)+\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi)\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)ds_\xi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T^x_\varepsilon}}\rho(\xi)\partial^2_{\xi_j\xi_j}|x-\xi|^{2-n}d\xi-\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi)\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)ds_\xi-$$

$$-\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)ds_\xi\Bigg)+\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi)\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)ds_\xi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T^x_\varepsilon}}\rho(\xi)\partial^2_{\xi_j\xi_j}|x-\xi|^{2-n}d\xi-\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)ds_\xi\right)$$

$$\Delta P_0(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_{\Omega\setminus\overline{T^x_\varepsilon}}\rho(\xi)\Delta_\xi|x-\xi|^{2-n}d\xi-\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n}ds_\xi\right)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n}ds_\xi$$

$$\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n}=-(r^{2-n})'\Big|_{r=\varepsilon}=-(2-n)\varepsilon^{1-n}$$

Получаем

$$\Delta P_0(x)=-(n-2)\omega_n\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)ds_\xi=-(n-2)\omega_n\rho(x).$$

□

Замечание. Предположим, что мы хотим найти частное решение задачи

$$\Delta u=f,\ f\in C^1(\overline{\Omega})\tag{5.4}$$

$$u(x)=\int\limits_{\Omega}\rho(\xi)|x-\xi|^{2-n}d\xi$$

$$f(x)=-(n-2)\omega_n\rho(x)$$

$$\rho(x)=\frac{1}{\omega_n(n-2)}f(x)$$

Частное решение:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n(n-2)}\int\limits_{\Omega} f(\xi)|x-\xi|^{2-n}d\xi \tag{5.5}$$

Теперь хотим решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.6}$$

$$u_0(x) = -\frac{1}{\omega_n(n-2)}\int\limits_{\Omega} f(\xi)|x-\xi|^{2-n}d\xi$$

$$u(x) = u_0(x) + w(x)$$

w такая, что

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{в } \Omega \\ w = -u_0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

Согласно принципу максимума

$$\max_{\overline{\Omega}} |w(x)| = \max_{\partial\Omega} |u_0(x)| \leqslant C(\Omega, \partial\Omega) \max_{\overline{\Omega}} |f(x)| \tag{5.7}$$

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant C(\Omega, \partial\Omega) \max_{\overline{\Omega}} |f| \tag{5.8}$$

Теперь посмотрим, как ведет себя объемный потенциал на бесконечности.

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)|x-\xi|^{2-n}d\xi$$

$\rho \in L^1(\Omega),\ |x| \to \infty,\ |\xi| \leqslant K,\ \xi \in \overline{\Omega}.$

Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^n:\ |x| \geqslant 2|\xi|$

$$|x-\xi| \geqslant |x| - |\xi| \geqslant \frac{|x|}{2}$$

тогда

$$|x-\xi|^{2-n} \leqslant \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

значит

$$|P_0(x)| \leqslant \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}\int\limits_{\Omega} |\rho(\xi)|d\xi = \frac{C}{|x|^{n-2}}, \tag{5.9}$$

где

$$C = 2^{n-2}\int\limits_{\Omega} |p(\xi)|d\xi. \tag{5.10}$$

Следовательно

$$|P_0(x)| \to 0,\ |x| \to \infty \tag{5.11}$$

Свойства объемного потенциала:

1) $\rho \in L^\infty(\Omega)$, тогда
$$\Delta_x P_0(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$

2) $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$, тогда
$$\Delta_x P_0(x) = -\omega_n(n-2)\rho(x),\ x \in \Omega$$

3) $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n)$

4) $P_0(x) \to 0,\ |x| \to \infty$
$$|P_0(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-2}}$$

2. Поверхностные потенциалы.
$P_1(x)$ - потенциал простого слоя.
$$P_1(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\xi)|x-\xi|^{2-n} ds_\xi$$

$P_2(x)$ - потенциал двойного слоя.
$$P_2(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi$$

Теорема 19. *Пусть $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Тогда $P_1(x)$ - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ и имеет оценку*
$$|P_1(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-2}}, \tag{5.11}$$
где
$$C = 2^{n-2}\int\limits_{\partial\Omega} |\mu(\xi)| ds_\xi. \tag{5.12}$$

Доказательство.
$$\Delta P_1(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\xi)\Delta_x|x-\xi|^{2-n} ds_\xi$$
это верно, так как если мы возьмем точку $x \notin \partial\Omega$ и поместим её в компакт, отстающий от $\partial\Omega$ на положительную величину, то интеграл сойдётся равномерно по замыканию области, содержащей точку x. Значит $\Delta P_1(x) = 0$.

$\xi \in \partial\Omega,\ |\xi| \leqslant k,\ |x| \geqslant 2|\xi|$. Имеем $|x-\xi| \geqslant \frac{|x|}{2}$, значит
$$|P_1(x)| \leqslant \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}} \int\limits_{\partial\Omega} |\mu(\xi)| ds_\xi.$$
□

Лекция 6

Гармонические функции

Потенциалы электростатического поля

Напоминание. Потенциал двойного слоя:

$$P_2(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi$$

Рассматриваем случай $n \geqslant 3$. $\xi \in \partial\Omega,\ \partial\Omega$ - гладкая $n-1$ - мерная поверхность. являющаяся границей ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \sigma \in L^1(\partial\Omega)$,
$\nu(\xi) = (\nu(\xi_1), ..., \nu(\xi_n))$ - внешняя нормаль к Ω к точке ξ.

Теорема 20. *Пусть $\sigma \in L^1(\Omega)$. Тогда $P_2(x)$ - гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ и справедлива оценка*

$$|P_2(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-1}} (x \gg 1). \tag{6.1}$$

Доказательство. Сначала докажем, что мы можем вносить производную под знак интеграла, то есть верно, что

$$D_x^\alpha P_2(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)} D_x^\alpha |x-\xi|^{2-n} ds_\xi.$$

Возьмем $x \notin \Omega$, построим компакт $\overline{\Omega_1} \ni x$ такой, что $\overline{\Omega_1} \cap \partial\Omega =$, интеграл равномерно сходится по $x \in \overline{\Omega_1}$, то есть можем так дифференцировать.

$$\Delta_x P_2(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}(\Delta_x |x-\xi|^{2-n}) ds_\xi$$

$\xi \in \partial\Omega,\ x \in \overline{\Omega_1},\ \partial\Omega \cap \overline{\Omega_1} =$, значит

$$\Delta_x |x-\xi|^{2-n} = 0,$$

следовательно

$$\Delta_x P_2(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$$

Теперь будем доказывать оценку.

$$\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} = (\bigtriangledown_\xi |x-\xi|^{2-n}, \nu(\xi)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_j}|x-\xi|^{2-n}\nu_j(\xi)$$

$$\partial_{\xi_j}|x-\xi|^{2-n} = (2-n)|x-\xi|^{1-n}\partial_{\xi_j}|\xi-x| = -(n-2)|x-\xi|^{1-n}\frac{\xi_j - x_j}{|\xi - x|} = -(n-2)\frac{\xi_j - x_j}{|x-\xi|^n}$$

$$\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} = -\frac{(n-2)}{|x-\xi|^n}\sum_{j=1}^n (\xi_j - x_j)\nu_j(\xi)$$

Теперь оценим

$$|P_2(x)| \leqslant \int\limits_{\partial\Omega} |\sigma(\xi)|(n-2)|x-\xi|^{1-n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) ds_\xi = n(n-2)\int\limits_{\partial\Omega} |\sigma(\xi)|\cdot|x-\xi|^{1-n} ds_\xi$$

$\xi \leqslant C_1$, рассмотрим $|x| \geqslant 2|\xi|$, тогда

$$|x-\xi| \geqslant |x| - |\xi| \geqslant \frac{|x|}{2} \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|x-\xi|^{1-n}} \leqslant \frac{2^{n-1}}{|x|^{n-1}}.$$

Получаем

$$|P_2(x)| \leqslant \frac{n(n-2)\cdot 2^{n-1}}{|x|^{n-1}} \int\limits_{\partial\Omega} |\sigma(\xi)| ds_\xi = \frac{C}{|x|^{n-1}},$$

где $C = n(n-2)\cdot 2^{n-1} \int\limits_{\partial\Omega} |\sigma(\xi)| ds_\xi$. □

Внешняя задача Дирихле

Напоминание. Внутренняя задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в ограниченной области } \Omega \in \mathbb{R}^n \\ u = \phi & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Внешняя задача для $n \geqslant 3$:

Найти $u \in C^2(\widetilde{\Omega}) \cap C(\overline{\widetilde{\Omega}})$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \widetilde{\Omega} \\ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi(x) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = a \end{cases} \tag{6.2}$$

Пример 2. Данный пример показывает, что без последнего условия теряется единственность.

$n = 3$. Пусть $\Omega = T_1^0$, $\phi \equiv 1$ на S_1^0. Тогда $u_1(x) \equiv 1$, $u_2(x) = \frac{1}{|x|}$ - оба являются решениями и получается, что решение не единственно.

Внешняя задача при $n = 2$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2\overline{\Omega} \\ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi(x) \\ |u| \leqslant C \end{cases} \tag{6.3}$$

Пример 3. Пусть $\Omega = B_1^0$ - единичный круг с центром в 0, $\phi(x) \equiv 0$. Получаем $u_1(x) \equiv 0,\ u_2(x) = \ln|x|$, то есть без последнего условия получаем, что решение не единственно.

Теорема 21. *Внешняя задача Дирихле может иметь не более одного классического решения.*

Доказательство.
$n \geqslant 3$. Предположим, что есть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - два решения задачи (6.2). Рассмотрим

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x),$$

она является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \widetilde{\Omega} \\ v = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0 \end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists R_0(\varepsilon):\ \forall R \geqslant R_0(\varepsilon)$

$$|v(x)|\Big|_{S_R^0} \leqslant \varepsilon$$

$T_R^0 \supset \overline{\Omega},\ \widehat{\Omega} = T_R^0 \setminus \overline{\Omega}$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \widehat{\Omega} \\ v = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ |v(x)| \leqslant \varepsilon \text{ на } \partial T_R^0 \end{cases}$$

По принципу максимума $|v(x)| \leqslant \varepsilon$ в $T_R^0 \setminus \overline{\Omega}$, это верно $\forall R \geqslant R_1$, значит это верно в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, следовательно, так как ε произвольное положительное число, $v(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.
$n = 2$. Предположим, что есть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - два решения задачи (6.3). Рассмотрим

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x),$$

она является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \\ v = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ |v| \leqslant C_1 \end{cases}$$

Зафиксируем $x_0 \in \Omega,\ \rho(x_0, \partial\Omega) = \alpha > 0$. Рассмотрим функцию

$$\ln(R|x - x_0|)$$

это гармоническая функция $\forall R > 0$. Пусть R такое, что $R|x - x_0| > 1\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, значит $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}\ \ln(R|x - x_0|) > 0$.

Возьмем $\delta > 0$ и рассмотрим функции

$$w_1(x) = \delta \ln(R|x - x_0|) + v(x)$$

$$w_2(x) = \delta \ln(R|x - x_0|) - v(x)$$

Возьмём $T_\rho^{x_0}:\ w_1 \geqslant 0$ на $S_\rho^{x_0}$, $w_1 > 0$ на $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \Delta w_1(x) = 0 \text{ в } T_\rho^{x_0} \setminus \overline{\Omega} \\ w_1(x) \geqslant 0 \text{ на } S_\rho^{x_0} \cup \partial\Omega \end{cases}$$

следовательно по принципу максимума $w_1(x) \geqslant 0$ в $T_\rho^{x_0} \setminus \overline{\Omega}$, значит $w_1(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

$w_2 \geqslant 0$ на $S_\rho^{x_0}$, $w_2 > 0$ на $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \Delta w_2(x) = 0 \text{ в } T_\rho^{x_0} \setminus \overline{\Omega} \\ w_2(x) \geqslant 0 \text{ на } S_\rho^{x_0} \cup \partial\Omega \end{cases}$$

следовательно по принципу максимума $w_2(x) \geqslant 0$ в $T_\rho^{x_0} \setminus \overline{\Omega}$, значит $w_2(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Получаем $\forall \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$

$$|v(x)| \leqslant \delta \ln(R|x - x_0|)$$

Устремим δ к 0 и получим

$$v(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}.$$

□

Уравнение теплопроводности

Уравнением теплопроводности называется

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{6.4}$$

Это простейшее уравнение параболического типа, матрица главной части имеет нулевое собственное значение, характеристики уравнения - плоскости $t = const = C$.

$u(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0$. Обозначим

$$Tu = u_t - \Delta u. \tag{6.5}$$

Будем изучать это уравнение на двух множествах

1) ω_τ - цилиндр,

$$\omega_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}:\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant \tau\} \tag{6.6}$$

(Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$).

2) G_τ - слой.

$$G_\tau = \{(x,t)|\ x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant \tau\}. \tag{6.7}$$

Рассматриваем классы функций $C^{2,1}(\omega_\tau)$ и $C^{2,1}(G_\tau)$ - дважды непрерывно дифференцируемы по x и один раз по t.

Классическое решение $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ или $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G\tau})$.

Принцип максимума в ограниченной области

Теорема 22. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ *такая, что* $Tu \geqslant 0$ *в* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$. *Тогда* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$u(x,t) \geqslant \min_{\sigma_\tau} u, \tag{6.8}$$

где $\sigma_\tau = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,\tau])$ *- стакан.*

Доказательство. Обозначим $m = \min\limits_{\sigma_\tau} u$. Введем функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - m$$

$$Tv = Tu \geqslant 0 \text{ в } \omega_\tau$$

$$v\Big|_{\sigma_\tau} \geqslant 0$$

Надо доказать, что $\forall (x,t) \in \omega_\tau$ $v(x,t) \geqslant 0$.

Предположим противное, пусть $\exists (x,t) \in \omega_\tau$ такие, что $v(x,t) < 0$, значит $\exists (x_0,t_0) \in \omega_\tau$ такая, что

$$\min_{\overline{\omega_\tau}} v(x,t) = v(x_0,t_0) < 0.$$

Представим функцию v в виде произведения

$$v(x,t) = e^t w(x,t)$$

$$w\Big|_{\sigma_\tau} \geqslant 0$$

$$Tv = T(e^t w) = e^t(Tw + w) \geqslant 0$$

значит

$$Tw + w \geqslant 0$$

$\exists (x_1,t_1) \in \omega_\tau$

$$\min_{\overline{\omega_\tau}} w = w(x_1,t_1) < 0$$

$$\partial_{x_j} w(x_1,t_1) = 0,\ j = 1,...n$$

$$\partial_t w(x_1,t_1) \leqslant 0$$

$$\Delta w(x_1,t_1) \geqslant 0$$

$$(Tw + w)(x_1,t_1) = \partial_t w(x_1,t_1) - \Delta w(x_1,t_1) + w(x_1,t_1) < 0$$

получили противоречие, то есть $u - m \geqslant 0$ в ω_τ, значит $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$u(x,t) \geqslant \min_{\sigma_\tau} u.$$

□

Лекция 7

Гармонические функции

Замечание про потенциал двойного слоя

Замечание 3. Напоминание.
Объемный потенциал:

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)|x-\xi|^{2-n} d\xi.$$

Потенциал простого слоя:

$$P_1(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\xi)|x-\xi|^{2-n} ds_\xi.$$

Потенциал двойного слоя:

$$P_2(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi.$$

Были заданы два упражнения:

1) $\rho \in L^\infty(\Omega) \ \Rightarrow \ P_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

2) $\mu \in L^\infty(\Omega) \ \Rightarrow \ P_1 \in C(\mathbb{R}^n)$.

А P_2 не является непрерывной функцией в $\mathbb{R}^n$. Приведем пример.

Пример 4. Пусть $\sigma \equiv 1$. Обозначим

$$W_0(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi - \tag{7.1}$$

интеграл Гаусса.
Найдем его значения в двух разных областях.

1) $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$

Рассмотрим функцию $g(\xi) = |x-\xi|^{2-n},\ \xi \in \Omega$ - гладкая функция в $\overline{\Omega},\ g(\xi)$ - гармоническая функция по ξ в Ω.

$$\Delta_\xi |x-\xi|^{2-n} = 0,\ \xi \in \Omega,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

По лемме Гаусса

$$W_0(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \tag{7.2}$$

2) $x \in \Omega$
Рассмотрим T_ε^x, $\overline{T_\varepsilon^x} \subset \Omega$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{T_\varepsilon^x}$.
$g(\xi) = |x-\xi|^{2-n}$ - гармоническая функция в Ω_ε, тогда

$$0 = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Delta|x-x_0|^{2-n} d\xi = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi = \int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial T_\varepsilon^x} \partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi$$

Значит

$$W_0(x) = -\int\limits_{\partial T_\varepsilon^x} \partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} ds_\xi$$

$$\partial_{\nu(\xi)}|x-\xi|^{2-n} = -(r^{2-n})'\Big|_{r=\varepsilon} = (n-2)\varepsilon^{1-n}$$

Получаем

$$W_0(x) = -(n-2)\varepsilon^{1-n}|\partial T_\varepsilon^x| = -(n-2)\varepsilon^{1-n}\omega_n\varepsilon^{n-1} = -(n-2)\omega_n. \tag{7.3}$$

Упражнение 7. Доказать, что при $x \in \partial\Omega$ $W_0(x)$ определено и

$$W_0(x) = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}. \tag{7.4}$$

Уравнение теплопроводности

Принцип максимума в ограниченной области

На самом деле Теорема 22 верна и для других областей, например для области, изображенной на Рис. 2 (для удобства изображена на плоскости).

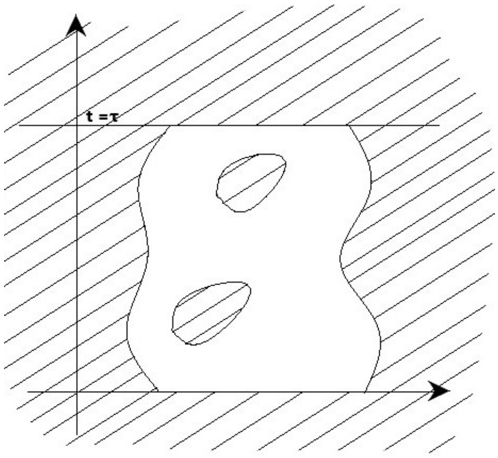

Рис. 2.

Следствие 1. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\omega_\tau)$ *и* $Tu \leqslant 0$ *в* ω_τ. *Тогда* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u. \tag{7.5}$$

Доказательство. Пусть $v = -u$, тогда $Tv \geqslant 0$ и по теореме 22

$$-u(x,t) = v(x,t) \geqslant \min_{\sigma_\tau}(-u) = -\max_{\sigma_\tau} u$$

значит

$$u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u.$$

□

Теорема 23 (принцип максимума в ограниченной области)**.** *Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = 0$ *в* ω_τ. *Тогда* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$\min_{\sigma_\tau} u \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u. \tag{7.6}$$

Следствие 1.*Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = 0$ *в* ω_τ. *Тогда* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$|u(x,t)| \leqslant \max_{\sigma_\tau} |u|. \tag{7.7}$$

Доказательство.

$$u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u \leqslant \max_{\sigma_\tau} |u|$$

Нужно доказать, что

$$-\max_{\sigma_\tau} |u| \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} |u|$$

Рассмотрим $v = -u$, $Tv = 0$, следовательно

$$v(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} |v| = \max_{\sigma_\tau} |u|$$

$$-u \leqslant \max_{\sigma_\tau} |u|$$

$$u \geqslant \max_{\sigma_\tau} |u|$$

□

Следствие 2(сравнение решений уравнения теплопроводности)*.Пусть* $u, v \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ *и* $Tu = Tv = 0$ *в* ω_τ, *причем*

$$u(x,t)\Big|_{\sigma_\tau} \geqslant v(x,t)\Big|_{\sigma_\tau}.$$

Тогда $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$u(x,t) \geqslant v(x,t). \tag{7.8}$$

Доказательство. Рассмотрим $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. $Tw = 0$ в ω_τ и $w \geqslant 0$ на σ_τ, значит

$$w \geqslant \min_{\sigma_\tau} \geqslant 0$$

следовательно

$$w(x,t) \geqslant 0 \; \forall (x,t) \in \omega_\tau$$

значит

$$u(x,t) \geqslant v(x,t) \; \forall (x,t) \in \omega_\tau.$$

□

Замечание 4. Пусть $Tu = Tv = 0$ в ω_τ : $|u| \leqslant v$ на σ_τ. Тогда $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$|u(x,t)| \leqslant v(x,t). \tag{7.9}$$

Теорема 24. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = f(x,t)$, $f \in C(\omega_\tau)$. *Тогда* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$\min_{\sigma_\tau} u - \tau \sup_{\omega_\tau} |f| \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u + \tau \sup_{\omega_\tau} |f|. \tag{7.10}$$

Доказательство. Обозначим $K = \sup\limits_{\omega_\tau} |f|$. Рассмотрим

$$w_1(x,t) = u(x,t) + tK$$

$$w_2(x,t) = u(x,t) - tK$$

$$Tw_1 = Tu + K = f(x,t) + K \geqslant 0 \text{ в } \omega_\tau$$

$$Tw_2 = Tu - K = f(x,t) - K \leqslant 0 \text{ в } \omega_\tau$$

$$w_1(x,t) \geqslant \min_{\sigma_\tau} w_1 \geqslant \min_{\sigma_\tau} u$$

$$u(x,t) + tK \geqslant \min_{\sigma_\tau} u$$

$$u(x,t) \geqslant \min_{\sigma_\tau} u - tK \geqslant \min_{\sigma_\tau} u - \tau K$$

$$w_2(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} w_2 \leqslant \max_{\sigma_\tau} u$$

$$u(x,t) - tK \leqslant \max_{\sigma_\tau} u$$

$$u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u + tK \leqslant \max_{\sigma_\tau} u + tauK$$

□

Следствие 1. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = f(x,t)$ *в* ω_τ. *Тогда* $\forall (x,t) \in \omega_\tau$

$$|u(x,t)| \leqslant \max_{\sigma_\tau} |u| + \tau \sup_{\omega_\tau} |f|. \tag{7.11}$$

Первая начально-краевая задача

Найти $u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$:

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } \omega_\tau \\ u(x,t) = g(x,t) \text{ при } (x,t) \in S_\tau \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega \end{cases} \tag{7.12}$$

Иногда второе и третье условия заменяются на $u\Big|_{\sigma_\tau} = g_0(x,t)$.

Теорема 25. *Задача (7.12) не может иметь более одного классического решения.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - два решения задачи (7.12). Тогда $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ -классическое решение задачи:

$$\begin{cases} Tv = 0 & \text{в } \omega_\tau \\ v = 0 & \text{на } \sigma_\tau \end{cases}$$

По принципу максимума в ограниченной области

$$0 = \min_{\sigma_\tau} v \leqslant v(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} v = 0$$

получаем $v \equiv 0 \ \Rightarrow \ u_1 \equiv u_2$ в ω_τ. □

Теорема 26 (непрерывная зависимость решения первой начально-краевой задачи от данных задачи)**.** *Пусть $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$ - решения задач:*

$$\begin{cases} Tu_1 = f_1(x,t) \ \text{в } \omega_\tau \\ u_1(x,t) = g_1(x,t) \ \text{при } (x,t) \in S_\tau \\ u_1(x,0) = u_{01}(x), \ x \in \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} Tu_2 = f_2(x,t) \ \text{в } \omega_\tau \\ u_2(x,t) = g_2(x,t) \ \text{при } (x,t) \in S_\tau \\ u_2(x,0) = u_{02}(x), \ x \in \Omega \end{cases}$$

Тогда $\forall x \in \omega_\tau$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \max_{S_\tau} |g_1 - g_2| + \max_{\overline{\Omega}} |u_{01} - u_{02}| + \tau \sup_{\omega_\tau} |f_1 - f_2|. \tag{7.13}$$

Доказательство. Рассмотрим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, она является решением задачи:

$$\begin{cases} Tv = f_1(x,t) - f_2(x,t) = \tilde{f}(x,t) \text{ в } \omega_\tau \\ v(x,t) = g_1(x,t) - g_2(x,t) = \tilde{g}(x,t) \text{ при } (x,t) \in S_\tau \\ v(x,0) = u_{01}(x) - u_{02}(x) = \tilde{u_0}(x), \ x \in \Omega \end{cases}$$

$$|v(x,t)| \leqslant \max_{\sigma_\tau} |v(x,t)| + \tau \sup_{\omega_\tau} |\tilde{f}| \leqslant \max_{S_\tau} |\tilde{g}| + \max_{\overline{\Omega}} |\tilde{u_0}| + \tau \sup_{\omega_\tau} |\tilde{f}|$$

получаем

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \max_{S_\tau} |g_1 - g_2| + \max_{\overline{\Omega}} |u_{01} - u_{02}| + \tau \sup_{\omega_\tau} |f_1 - f_2|$$

□

Теорема 27 (единственность в классе $C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$)**.** *Задача (7.12) не может иметь более одного решения в классе* $C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$.

Доказательство. Предположим, что $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ - решения задачи (7.12). Рассмотрим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, она является решением задачи

$$\begin{cases} Tv = 0 & \text{в } \omega_\tau \\ v = 0 & \text{на } \sigma_\tau \end{cases}$$

Введём функцию

$$e(t) = \int\limits_\Omega v^2(x,t)dx,\ e(0) = 0$$

$$e^{'}(t) = \int\limits_\Omega 2vv_t dx \overset{v_t = \Delta v}{=} 2\int\limits_\Omega v\Delta v dx = -2\int\limits_\Omega |\bigtriangledown v|^2 dx \leqslant 0$$

значит $e(t)$ - невозрастающая функция и $e(0) = 0$, следовательно $e(t) \leqslant e(0) = 0$. Получаем

$$e(t) \equiv 0 \ \Rightarrow\ v \equiv 0 \ \Rightarrow\ u_1 \equiv u_2.$$

□

Лекция 8

Уравнение теплопроводности

Изучение поведения уравнения теплопроводности

Теорема 28 (о стабилизации в бесконечном цилиндре ω_∞). *Пусть* $u \in C^{2,1}(\omega_\infty) \cap C(\overline{\omega_\infty})$ *- решение уравнения* $Tu = 0$ *в* ω_∞. *Предположим, что* $u\Big|_{S_\infty} = 0$. *Тогда*

$$u(x,t) \overset{\overline{\Omega}}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{8.1}$$

В теореме используются такие пространства:

$$\omega_\infty = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x \in \Omega\ -\ \text{ограниченная область в } \mathbb{R}^n,\ 0 < t < +\infty\},$$

$$S_\infty = \partial\Omega \times [0, +\infty)$$

Доказательство. Рассматриваем такую область, что $0 \in \Omega$. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) = e^{-at}\prod_{j=1}^{n}\cos bx_j$$

Найдем a и b такие, что $Tv = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$v_t = -av$$

$$v_{x_jx_j} = -b^2 v$$
$$\Delta v = -b^2 nv$$

получаем

$$Tv \equiv v_t - \Delta v = -av + b^2 nv = v(b^2 n - a) = 0$$
$$a = nb^2 > 0$$

Положим $b > 0$.

Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi_0 = \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x_j| < \frac{\pi}{4b},\ j = 1...n\}$$

$b > 0$ - мало настолько, что $\overline{\Omega} \subset \Pi_0$, $\overline{\omega_\infty} \subset \Pi_0 \times [0, +\infty)$.

$$|x_j| < \frac{\pi}{4b},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos bx_j \leqslant 1$$

$$u\Big|_{S_\infty} = 0,\ v\Big|_{S_\infty} > 0$$

$$v\Big|_{S_\infty} > u\Big|_{S_\infty}$$

$$v(x,0)=\prod_{j=1}^{n}\cos bx_j \geqslant \alpha > 0$$

$$u(x,0)\in C(\overline{\Omega}) \ \Rightarrow\ \exists M:\ |u(x,0)|\leqslant M \ \Rightarrow\ \exists K_0=const>0:\ |u(x,0)|\leqslant K_0 v(x,0)$$

$$T(K_0 v)=0 \text{ в } \omega_\infty$$

$$Tu=0 \text{ в } \omega_\infty$$

$$u\Big|_{S_\infty}=0,\ K_0 v\Big|_{S_\infty}>0,\ |u(x,0)|\leqslant K_0 v(x,0)$$

По следствию из принципа максимума

$$\forall (x,t)\in\omega_\infty\ |u(x,t)|\leqslant K_0 v(x,t)$$

$$|u(x,t)|\leqslant K_0 e^{-at} \rightrightarrows 0,\ t\to\infty$$

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|\leqslant K_0 e^{-at}\to 0,\ t\to+\infty.$$

$\square$

Пусть

(0) $u_1(x,t),\ u_2(x,t)\in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$

(1) $Tu_1=0,\ Tu_2=0$ в ω_τ

(2) $u_1\Big|_{S_\tau}=g(x,t),\ u_2\Big|_{S_\tau}=g(x,t)$

Теорема 29 (единственность решения уравнения теплопроводности в обратном направлении времени)**.** *Пусть $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ удовлетворяют условиям (0) - (2) и при $t=\tau$*

$$u_1(x,\tau)=u_2(x,\tau),\ \forall x\in\Omega.$$

Тогда

$$u_1(x,t)=u_2(x,t),\ (x,t)\in\omega_\tau.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

$$Tw=0$$

$$w\Big|_{S_\tau}=0$$

$$w(x,\tau)=0,\ \forall x\in\Omega$$

Рассмотрим функцию

$$e(t)=\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)dx\geqslant 0$$

$$e(\tau) = 0$$

$$e'(t) = \int\limits_{\Omega} 2ww_t dx = 2\int\limits_{\Omega} w\Delta w dx = -2\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown w|^2 dx \leqslant 0$$

$$(e'(t))^2 = 4\left(\int\limits_{\Omega} w\Delta w dx\right)^2 \overset{\text{К/Б}}{\leqslant} 4\int\limits_{\Omega} w^2 dx \cdot \int\limits_{\Omega} (\Delta w)^2 dx$$

$$e''(t) = -2\left(\int\limits_{\Omega} (\bigtriangledown w, \bigtriangledown w) dx\right)'_t = -4\int\limits_{\Omega} (\bigtriangledown w_t, \bigtriangledown w) dx =$$

$$= 4\int\limits_{\Omega} w_t \Delta w dx = 4\int\limits_{\Omega} (\Delta w)^2 dx \geqslant 0$$

$$(e'(t))^2 \leqslant e(t)e''(t)$$

$$e(\tau) = 0$$

Докажем, что $e(t) \equiv 0$ на $[0, \tau]$. Предположим, что $\exists [t_1, t_2] \subset [0, \tau]: \; e(t) > 0$ на $[t_1, t_2)$ и $e(t_2) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \ln e(t) \text{ на } [t_1, t_2)$$

$$f'(t) = \frac{e'(t)}{e(t)}$$

$$f''(t) = \frac{e''(t)e(t) - (e'(t))^2}{e^2(t)} \geqslant 0 \text{ на } [t_1, t_2),$$

значит $f(t)$ выпуклая вниз функция на $[t_1, t_2)$, следовательно $\forall \alpha \in (0, 1)$ и $\forall t \in [t_1, t_2)$

$$f((1-\alpha)t_1 + \alpha t) \leqslant (1-\alpha)f(t_1) + \alpha f(t)$$

$$\ln e((1-\alpha)t_1 + \alpha t) \leqslant (1-\alpha)\ln e(t_1) + \alpha \ln e(t) = \ln((e(t_1))^{1-\alpha} \cdot (e(t))^{\alpha})$$

$$e((1-\alpha)t_1 + \alpha t) \leqslant (e(t_1))^{1-\alpha}(e(t))^{\alpha}, \; t \in [t_1, t_2)$$

значит

$$0 \leqslant e((1-\alpha)t_1 + \alpha t_2) \leqslant 0 \;\Rightarrow$$

$$e(t) = 0 \; \forall t \in [t_1, t_2]$$

Получили противоречие. □

Априорная оценка решения уравнения теплопроводности

Теорема 30. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = f(x,t)$ *в* ω_τ*, где* $f \in C(\overline{\omega_\tau})$*, удовлетворяющее одному из граничных условий*

- *либо* $u(x,t) = 0$ *на* $S_\tau = \partial\Omega \times [0,\tau]$
- *либо* $\partial_{\nu(x,t)} u(x,t) = 0$ *на* S_τ*, где* $\nu(x,t) = (\nu_1(x,t), ...\nu_n(x,t), 0)$ *- вектор внешней единичной нормали к* S_τ*.*

Тогда $\forall t_0 \in [0,\tau]$ $\exists K(t_0)$ *такая, что*

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} (u^2(x,t) + |\bigtriangledown_x u(x,t)|^2)dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,t_0)dx \leqslant$$

$$\leqslant K(t_0)\left(\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx\right) \tag{8.2}$$

Доказательство. $t_0 \in [0,\tau]$

Возьмем $t_1 \in [0,t_0]$, рассмотрим

$$\int\limits_{\omega_{t_1}} u(u_t - \Delta u)dxdt$$

$$uu_t = \frac{1}{2}(u^2)_t$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_{t_1}} (u^2)_t dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_1)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx$$

$$-\int\limits_{\omega_{t_1}} u\Delta u dxdt = -\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega} u\Delta u dxdt = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown u|^2 dxdt - \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\partial\Omega} u\partial_\nu u ds = \int\limits_{\omega_{t_1}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt$$

$$\int\limits_{\omega_{t_1}} u(u_t - \Delta u)dxdt = \int\limits_{\omega_{t_1}} fudxdt$$

$$\int\limits_{\omega_{t_1}} u(u_t - \Delta u)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_1)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_1}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_1)dx - \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + 2\int\limits_{\omega_{t_1}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt = 2\int\limits_{\omega_{t_1}} fudxdt \tag{8.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_1)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} u^2(x,0) + 2\int\limits_{\omega_{t_1}} |f|\cdot|u|dxdt \tag{8.4}$$

Воспользуемся неравенством

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2 \tag{8.5}$$

получаем

$$2\int\limits_{\omega_{t_1}} |f|\cdot|u| dxdt \leqslant \varepsilon \int\limits_{\omega_{t_1}} u^2(x,t)dxdt + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\omega_{t_1}} f^2(x,t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt$$

Проинтегрируем обе части по t_1

$$\int\limits_{\omega_{t_1}} u^2(x,t)dxdt \leqslant t_1 \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + t_1\varepsilon \int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt + t_1\varepsilon^{-1}\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt$$

Возьмем $t_1 = t_0$ и $\varepsilon t_0 = \frac{1}{2}$, значит $t_0\varepsilon^{-1} = 2t_0^2$

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt \leqslant t_0 \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt + 2t_0^2\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt$$

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt \leqslant 2t_0 \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + 4t_0^2\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant K_0(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \tag{8.6}$$

Из (8.4) с помощью неравенства (8.5) получаем

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_0)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} u^2(x,0) + \widetilde{K}(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{K}_0(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \tag{8.7}$$

Из (8.3), (8.4) и (8.5) получаем

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt \leqslant \widehat{K}(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \tag{8.8}$$

Складываем (8.6), (8.7) и (8.8)

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} (u^2(x,t) + |\bigtriangledown u(x,t)|^2) dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,t_0)dx \leqslant$$

$$\leqslant K(t_0) \left(\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx \right)$$

$\square$

Лекция 9

Уравнение теплопроводности

Априорная оценка и следствия из неё

Напоминание из прошлой лекции (кратко выведем априорную оценку):

$$Tu \equiv u_t - \Delta u = f(x,t) \text{ в } \omega_\tau$$

- либо $u(x,t) = 0$ на $S_\tau = \partial\Omega \times [0,\tau]$
- либо $\partial_{\nu(x,t)} u(x,t) = 0$ на S_τ, где $\nu(x,t) = (\nu_1(x,t), ...\nu_n(x,t), 0)$ - вектор внешней единичной нормали к S_τ.

$u \in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau}),\ \forall t_0 \in [0,\tau]\ \exists K(t_0)$

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} (u^2(x,t) + |\bigtriangledown_x u(x,t)|^2) dxdt + \int\limits_\Omega u^2(x,t_0)dx \leqslant$$

$$\leqslant K(t_0) \left(\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt + \int\limits_\Omega u^2(x,0)dx \right) \tag{9.1}$$

У нас было три шага для вывода этой оценки.

1) Рассматриваем $\forall t_1 \in [0,t_0]$.

$$\int\limits_{\omega_{t_1}} u(u_t - \Delta u)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,t_1)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_1}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt = \int\limits_{\omega_{t_1}} fudxdt$$

$\forall t_1 \in [0,t_0]$

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t_1)dx \leqslant \int\limits_\Omega u^2(x,0) + 2\int\limits_{\omega_{t_0}} |f|\cdot|u|dxdt \tag{9.2}$$

Интегрируем по t_1 от 0 до t_0 и получаем

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt \leqslant t_0 \int\limits_\Omega u^2(x,0) + 2t_0 \int\limits_{\omega_{t_0}} |f|\cdot|u|dxdt \leqslant t_0\int\limits_\Omega u^2(x,0)dx +$$

$$+ t_0\varepsilon \int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt + t_0\varepsilon^{-1}\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt \ \ \forall\varepsilon > 0$$

Берем $\varepsilon:\ t_0\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt \leqslant t_0 \int\limits_\Omega u^2(x,0)dx + 2t_0^2 \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt$$

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt \leqslant 2t_0 \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + 4t_0^2 \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant K_1(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \tag{9.3}$$

2) В (9.2) положим $t_1 = t_0$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_0)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} u^2(x,0) + 2\int\limits_{\omega_{t_0}} |f|\cdot|u|dxdt$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t_0)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant K_2(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \tag{9.4}$$

3)

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} |f|\cdot|u|dxdt \leqslant$$

$$\leqslant K_3(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) \tag{9.5}$$

Сложим оценки (9.3), (9.4) и (9.5)

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} u^2(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,t_0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant (K_1(t_0) + K_2(t_0) + K_3(t_0))\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right) =$$

$$= K(t_0)\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t)dxdt\right)$$

Следствие 1.(единственность решения первой начально - краевой задачи) *Задача вида*

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } \omega_\tau \\ u\Big|_{S_\tau} = g(x,t) \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \Omega \end{cases} \tag{9.6}$$

не может иметь двух различных решений в классе $C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$.

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - два решения задачи (9.6). Рассмотрим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),\ v \in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$ и она является решением задачи

$$\begin{cases} Tv = 0 \text{ в } \omega_\tau \\ v\Big|_{S_\tau} = 0 \\ v(x,0) = 0,\ x \in \Omega \end{cases}$$

Берем априорную оценку для v

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} (v^2(x,t) + |\bigtriangledown v(x,t)|^2) dxdt + \int\limits_{\Omega} v^2(x,t_0) dx \leqslant$$

$$\leqslant K(t_0) \left(\int\limits_{\omega_{t_0}} f^2(x,t) dxdt + \int\limits_{\Omega} v^2(x,0) dx \right)$$

Так как $f(x,t) = 0$ и $v(x,0) = 0$ получаем

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} (v^2(x,t) + |\bigtriangledown v(x,t)|^2) dxdt + \int\limits_{\Omega} v^2(x,t_0) dx \leqslant 0$$

значит

$$v(x,t_0) = 0\ \forall t_0 \in [0,\tau],\ \forall x \in \Omega$$

следовательно

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \text{ в } \omega_\tau.$$

□

Следствие 2.(единственность решения второй начально - краевой задачи) *Задача вида*

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } \omega_\tau \\ \partial_\nu u\Big|_{S_\tau} = g(x,t) \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \Omega \end{cases} \tag{9.7}$$

не может иметь двух различных решений в классе $C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$.

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - два решения задачи (9.7). Рассмотрим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),\ v \in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$ и она является решением задачи

$$\begin{cases} Tv = 0 \text{ в } \omega_\tau \\ \partial_\nu v\Big|_{S_\tau} = 0 \\ v(x,0) = 0,\ x \in \Omega \end{cases}$$

Из априорной оценки $v \equiv 0$ в ω_τ. □

Следствие 3. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = 0$ *в* ω_τ *и*

- *либо* $u\Big|_{S_\tau} = 0$
- *либо* $\partial_\nu u\Big|_{S_\tau} = 0$

Тогда $\forall t \in [0, \tau]$

$$\int\limits_\Omega u^2(x, t_0)dx \leqslant \int\limits_\Omega u^2(x, 0)dx. \tag{9.8}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\omega_{t_0}} u \cdot Tudxdt = 0 = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x, t_0)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x, 0)dx + \int\limits_{\omega_{t_0}} |\bigtriangledown u|^2 dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x, t_0)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x, 0)dx$$

Получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x, t_0)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x, 0)dx \leqslant 0$$

$$\int\limits_\Omega u^2(x, t_0)dx \leqslant \int\limits_\Omega u^2(x, 0)dx.$$

□

Следствие 4. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\overline{\omega_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = 0$ *в* ω_τ*, удовлетворяющее условию* $\partial_\nu u\Big|_{S_\tau} = 0$*. Тогда*

$$\int\limits_\Omega u(x, t_0)dx = \int\limits_\Omega u(x, 0)dx. \tag{9.9}$$

Доказательство.

$$0 = \int\limits_{\omega_{t_0}} Tudxdt = \int\limits_{\omega_{t_0}} (u_t - \Delta u)dxdt = \int\limits_\Omega u(x, t_0)dx - \int\limits_\Omega u(x, 0)dx - \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu u ds =$$

$$= \int\limits_\Omega u(x, t_0)dx - \int\limits_\Omega u(x, 0)dx,$$

значит

$$\int\limits_\Omega u(x, t_0)dx = \int\limits_\Omega u(x, 0)dx.$$

□

Физический смысл следствия 4: если нет источника тепла в теле и поток тепла через границу равен 0, то количество тепла в любой момент времени t сохраняется.

Принцип максимума в слое

Теперь рассматриваем уравнение теплопроводности в слое

$$G_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \leqslant \tau\} \tag{9.10}$$

Теорема 31 (принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в слое)**.** *Пусть $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$ - решение уравнения $Tu = 0$ в G_τ. Предположим, что $|u| \leqslant C = const > 0$ в G_τ. Тогда $\forall (x,t) \in G_\tau$*

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x,0) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0). \tag{9.11}$$

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,0),\ m = \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,0)$. Рассмотрим

$$v(x,t) = |x|^2 + 2nt.$$

Проверим, что $Tv = 0$ в $\mathbb{R}^n$

$$\partial_t v = 2n$$

$$|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$$

$$v_{x_j x_j} = 2 \ \Rightarrow\ \Delta v = 2n$$

Возьмем $\varepsilon > 0$, рассмотрим функции

$$w_1(x,t) = u - m + \varepsilon v$$

$$w_2(x,t) = u - M - \varepsilon v$$

$$Tw_1 = 0,\ Tw_2 = 0 \text{ в } G_\tau$$

$$w_1(x,0) = u(x,0) - m + \varepsilon |x|^2 \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$w_2(x,0) = u(x,0) - M - \varepsilon |x|^2 \leqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

Рассмотрим цилиндр

$$Q_{R,\tau} = \{(x,t) |\ |x| < R,\ 0 < t \leqslant \tau\}$$

$$Tw_1 = 0,\ Tw_2 = 0 \text{ в } Q_{R,\tau}$$

$$w_1 \geqslant 0,\ w_2 \geqslant 0 \text{ при } |x| < R$$

$|u| \leqslant C,\ m = const,\ v$ растет, значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists R_0(\varepsilon) > 0 :\ \forall R \geqslant R_0(\varepsilon)\ |x| = R,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau$ знак выражения будет определять v, то есть получится

$$w_1(x,t) \geqslant 0 \text{ при } |x| = R,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

значит

$$w_1(x,t)\Big|_{\sigma_\tau} \geqslant 0$$

По принципу максимума в цилиндре $Q_{R,\tau}$

$$w_1(x,t) \geqslant 0 \text{ в } Q_{R,\tau}\ \forall R \geqslant R_0(\varepsilon) \ \Rightarrow$$

$$w_1(x,t) \geqslant 0 \text{ в } G_\tau$$

Теперь для w_2 аналогично

$$w_2(x,t) = u - M - \varepsilon v \leqslant 0$$

При $|x| = R \geqslant \widetilde{R}_0(\varepsilon)$

$$Tw_2 = 0 \text{ в } Q_{R,\tau}$$

$$w_2 \leqslant 0 \text{ при } t = 0$$

$$w_2\Big|_{\sigma_\tau} \leqslant 0$$

По принципу максимума

$$w_2(x,t) \leqslant 0 \text{ в } G_\tau$$

$$u - m + \varepsilon v \geqslant 0 \text{ в } G_\tau$$

$$u \geqslant m - \varepsilon v$$

$$u - M - \varepsilon v \leqslant 0 \text{ в } G_\tau$$

$$u \leqslant M + \varepsilon v$$

$$m - \varepsilon v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant M + \varepsilon v(x,t)$$

Устремим ε к 0

$$m \leqslant u(x,t) \leqslant M.$$

□

Следствие. *Пусть $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$ - решение уравнения $Tu = 0$ в G_τ, $|u| \leqslant C$ в G_τ. Тогда $\forall (x,t) \in G_\tau$*

$$|u(x,t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)|. \tag{9.12}$$

Доказательство.

$$u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)|$$

Рассмотрим $v = -u$, она удовлетворяет условию теоремы 31, значит

$$-u \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)|$$

$$-\sup_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)| \leqslant u(x,t)$$

$$|u(x,t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)|.$$

□

Теорема 32 (оценка решения неоднородного уравнения теплопроводности)**.** *Пусть $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$ - решение уравнения $Tu = f(x,t)$, $f \in C(G_\tau)$ и $|u| \leqslant C$ в G_τ. Тогда $\forall (x,t) \in G_\tau$*

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x,0) - \tau \sup_{G_\tau} |f| \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0) + \tau \sup_{G_\tau} |f|. \tag{9.13}$$

Доказательство. Обозначим $m = \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,0),\ M = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,0),\ K = \sup\limits_{G_\tau} |f|$. Введем функцию

$$v(x,t) = |x|^2 + 2nt$$

Рассматриваем функции

$$w_1(x,t) = u(x,t) - m + tK + \varepsilon v$$

$$w_2(x,t) = u(x,t) - M - tK - \varepsilon v$$

$$Tw_1 = f + K \geqslant 0 \text{ в } G_\tau$$

$$Tw_2 = f - K \leqslant 0 \text{ в } G_\tau$$

$$w_1(x,0) = u(x,0) - m + \varepsilon|x|^2 \geqslant 0$$

$$w_2(x,0) = u(x,0) - M - \varepsilon|x|^2 \leqslant 0$$

Рассмотрим цилиндр $Q_{R,\tau}$ как в теореме 31, $|x| = R$,
$S_{R,\tau} = \{(x,t)|\ |x| = R,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$. $\forall\varepsilon > 0\ \exists R_0(\varepsilon):\ \forall R \geqslant R_0(\varepsilon)$ на боковой поверхности знак w_1 и w_2 будет определяться последним слагаемым, то есть

$$w_1\Big|_{S_{R,\tau}} \geqslant 0$$

$$w_2\Big|_{S_{R,\tau}} \leqslant 0$$

В $Q_{R,\tau},\ R \geqslant R_0(\varepsilon)$

$$\begin{cases} Tw_1 \geqslant 0 \text{ в } Q_{R,\tau} \\ w_1\Big|_{\sigma_{R,\tau}} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Tw_2 \leqslant 0 \text{ в } Q_{R,\tau} \\ w_2\Big|_{\sigma_{R,\tau}} \leqslant 0 \end{cases}$$

Согласно принципу максимума в цилиндре $Q_{R,\tau}$ ($\forall R \geqslant R_0(\varepsilon)$) верно

$$w_1(x,t) \geqslant \min_{\sigma_{R,\tau}} w_1(x,t) \geqslant 0$$

$$w_2(x,t) \leqslant \max_{\sigma_{R,\tau}} w_2(x,t) \leqslant 0$$

значит в G_τ

$$w_1(x,t) \geqslant 0$$

$$w_2(x,t) \leqslant 0$$

получаем

$$m - tK - \varepsilon v \leqslant u(x,t) \leqslant M + tK + \varepsilon v$$

$$m - \tau K - \varepsilon v \leqslant u(x,t) \leqslant M + \tau K + \varepsilon v$$

Это верно $\forall \varepsilon > 0$, устремим ε к 0 и получим

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x,0) - \tau \sup_{G_\tau} |f| \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0) + \tau \sup_{G_\tau} |f|.$$

$\square$

Следствие. *Пусть* $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$ *- решение уравнения* $Tu = f(x,t)$, $f \in C(G_\tau)$ *и* $|u| \leqslant C$ *в* G_τ. *Тогда* $\forall (x,t) \in G_\tau$

$$|u(x,t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)| + \tau \sup_{G_\tau} |f|. \tag{9.14}$$

Лекция 10

Уравнение теплопроводности

Задача Коши для уравнения теплопроводности

Постановка задачи: найти $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$:

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{10.1}$$

$t = const$ - характеристики уравнения $Tu = f$, то есть мы находимся вне условий теоремы Коши - Ковалевской.

$f \in C(G_\tau), \ u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$

На самом деле задача (10.1) некорректно поставлена, так как нарушается единственность. Тихонов построил пример для $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$, которая растет на бесконечности быстрее, что $e^{b|x|^2}$, например, $e^{|x|^{2+\delta}}$, $\delta > 0$, и она является нетривиальным решением задачи:

$$\begin{cases} Tu = 0 \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Второе решение этой задачи $u \equiv 0$.

Значит, нам нужно ещё одно условие : $|u| \leqslant C$ в G_τ - ограниченность.

Теорема 33 (единственности решения задачи Коши в классе ограниченных функций)**.** *Задача (10.1) не может иметь двух разных ограниченных решения, принадлежащих $C^{2,1}(G_\tau) \cap C(G_\tau)$.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t), \ u_2(x,t)$ - два решения задачи (10.1),

$$|u_1(x,t)| \leqslant C, \ |u_2(x,t)| \leqslant C.$$

Рассмотрим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ она является решением задачи

$$\begin{cases} Tv = 0 \text{ в } G_\tau \\ v\Big|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$|v| \leqslant 2C \text{ в } G_\tau$$

По принципу максимума $\forall (x,t) \in G_\tau$

$$\inf_{\mathbb{R}^n} v(x,0) \leqslant v(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} v(x,0) \ \Rightarrow$$

$$0 \leqslant v(x,t) \leqslant 0 \ \Rightarrow$$

$$v(x,t) \equiv 0 \text{ в } G_\tau \ \Rightarrow$$

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \text{ в } G_\tau$$

□

Теорема 34 (о непрерывной зависимости решения задачи Коши от f и u_0)**.** *Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - два ограниченных решения соответствующих задач*

$$\begin{cases} Tu_1 = f_1(x,t) \text{ в } G_\tau \\ u_1\Big|_{t=0} = u_{01}(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} Tu_2 = f_2(x,t) \text{ в } G_\tau \\ u_2\Big|_{t=0} = u_{02}(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

причем $u_1, \ u_2 \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$. Тогда $\forall (x,t) \in G_\tau$ имеем

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u_{01} - u_{02}| + \tau \sup_{G_\tau} |f_1(x,t) - f_2(x,t)| \tag{10.2}$$

Доказательство. Будем пользоваться формулой из следствия из теомемы 32. Возьмем

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$T(u_1 - u_2) = f_1(x,t) - f_2(x,t) \equiv f(x,t)$$

$$(u_1 - u_2)\Big|_{t=0} = u_{01} - u_{02} \equiv u\Big|_{t=0} = u_0$$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |u_{01} - u_{02}| + \tau \sup_{G_\tau} |f_1(x,t) - f_2(x,t)|.$$

□

Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности

Теорема 35 (существования ограниченного решения задачи Коши для однородного уравнения)**.** *Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $|u_0| \leqslant C$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда ограниченным решением задачи Коши*

$$\begin{cases} Tu = 0 \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{10.3}$$

является функция заданная следующим образом

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \tag{10.4}$$

(интеграл Пуассона).

Интеграл Пуассона.

Рассмотрим интеграл Пуассона - это свертка двух функций $u_0(x)$ и

$$\Gamma(x, x_0, t, t_0) \overset{def}{=} \frac{\theta(t-t_0)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}} \tag{10.5}$$

$\theta(t-t_0)$ - функция Хевисайда:

$$\theta(t-t_0) = 1,\ t > t_0,\ \theta(t-t_0) = 0,\ t < t_0$$

Рассмотрим сначала $x_0 = 0,\ t_0 = 0,\ n = 1,\ t > 0$

$$\Gamma(x, 0, t, 0) = \Gamma_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} -$$

плотность одномерного нормального распределения с $\sigma^2 = 2t$, значит

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x, t) dx = 1 \tag{10.6}$$

Покажем это по-другому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \left| \frac{x}{2\sqrt{t}} = \eta,\ dx = 2\sqrt{t} d\eta \right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta^2} d\eta = 1$$

Вычислим $T\Gamma_0(x, t),\ t > 0$

$$\partial_t \Gamma_0 = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} = -\frac{1}{2t}\Gamma_0 + \frac{x^2}{4t^2}\Gamma_0$$

$$(\Gamma_0)_x = -\frac{x}{2t}\Gamma_0$$

$$(\Gamma_0)_{xx} = -\frac{1}{2t}\Gamma_0 + \frac{x^2}{4t^2}\Gamma_0$$

значит

$$T\Gamma_0 = 0$$

Теперь $n \geqslant 1,\ x = (x_1, ...x_n)$

$$\Gamma(x, 0, t, 0) = \Gamma_0(x_1, t) \cdot ... \cdot \Gamma_0(x_n, t)$$

$$\partial_t \Gamma = \partial_t \left(\Gamma_0(x_1, t)\right) \cdot ... \cdot \Gamma_0(x_n, t) + ... + \Gamma_0(x_1, t) \cdot ... \cdot \partial_t \left(\Gamma_0(x_n, t)\right)$$

$$\Delta\Gamma(x, 0, t, 0) = (\Gamma_0(x_1, t))_{x_1 x_1} \cdot ... \cdot \Gamma_0(x_n, t) + ... + \Gamma_0(x_1, t) \cdot ... \cdot (\Gamma_0(x_n, t))_{x_n x_n}$$

следовательно

$$T\Gamma(x, 0, t, 0) = 0.$$

Доказательство теоремы существования. Сначала проверим, что $Tu = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$

Убедимся, что можем дифференцировать интеграл Пуассона любое количество раз по x для $t > 0$. Это действительно так: формально продифференцируем, берем точку, помещаем её в компакт в слое, тогда формально продифференцируемый интеграл будет сходится и по x, и по t в компакте, так как у подынтегральной функции нет особенностей в нашем компакте. Значит можем вычислить Tu

$$Tu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} T\left(\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right) u_0(y)dy$$

$T\Gamma(x,0,t,0) = 0$, в частности $T\Gamma(x,x_0,t,t_0) = 0,\ t > t_0\ \Rightarrow$

$$T\Gamma(x,y,t,0) = 0,\ t > 0\ \Rightarrow\ Tu = 0$$

Почему ограниченно решение?

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} |u_0(y)|e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy \leqslant C\cdot\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy = C$$

Осталось проверить, что при $t \to 0,\ u(x,t) \to u_0(x)$. Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy = 1$$

Рассмотрим

$$u(x,t) - u_0(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y}(u_0(y)-u_0(x))e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy = \left|\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta,\ dy = (2\sqrt{t})^n d\eta\right| =$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta}(u_0(x+2\sqrt{t}\eta)-u_0(x))e^{-|\eta|^2}d\eta$$

$$|u(x,t)-u_0(x)| \leqslant \pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{|\eta|>N}|u_0(x+2\sqrt{t}\eta)-u_0(x)|1e^{-|\eta|^2}d\eta +$$

$$+\pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{|\eta|<N}|u_0(x+2\sqrt{t}\eta)-u_0(x)|e^{-|\eta|^2}d\eta$$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:$

$$\int\limits_{|\eta|>N} e^{-|\eta|^2}d\eta \leqslant \varepsilon$$

значит

$$\pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{|\eta|>N}|u_0(x+2\sqrt{t}\eta)|-u_0(x))e^{-|\eta|^2}d\eta \leqslant \pi^{-\frac{n}{2}}2C\varepsilon$$

$u_0 \in C(|\eta| < N)$, значит u_0 - равномернонепрерывна, значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$
$|y - x| < \delta \ \Rightarrow\ |u_0(y) - u_0(x)| < \varepsilon$

$$|x + 2\sqrt{t}\eta - x| = 2\sqrt{t}|\eta| \leqslant 2\sqrt{t}N < \delta$$

$$\sqrt{t} < \frac{\delta}{2N}$$

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\delta^2}{4N^2}$$

значит

$$\pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|\eta|<N} |u_0(x + 2\sqrt{t}\eta) - u_0(x)| e^{-|\eta|^2} d\eta \leqslant \pi^{-\frac{n}{2}} |T_N^0| \varepsilon = A\varepsilon$$

следовательно

$$|u(x,t) - u_0(x)| \leqslant A_1 \varepsilon \to 0,\ t \to 0.$$

$\square$

Лекция 11

Уравнение теплопроводности

Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности

Напоминание: решаем задачу Коши

$$\begin{cases} Tu = 0 \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{11.1}$$

$u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau}),\ |u| \leqslant C$ в G_τ. Доказали, что если $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ и $|u_0| \leqslant C$. Тогда ограниченным решением задачи Коши для однородного уравнения будет

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \tag{11.2}$$

$$u(x,t) \to u_0(x),\ t \to 0$$

$$u(x,t) - u_0(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} (u_0(y) - u_0(x)) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = \left| \frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta,\ dy = (2\sqrt{t})^n d\eta \right| =$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} (u_0(x + 2\sqrt{t}\eta) - u_0(x)) e^{-|\eta|^2} d\eta$$

$$|u(x,t) - u_0(x)| \leqslant \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|\eta|>N} |u_0(x + 2\sqrt{t}\eta) - u_0(x)| e^{-|\eta|^2} d\eta +$$

$$+ \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|\eta|<N} |u_0(x + 2\sqrt{t}\eta) - u_0(x)| e^{-|\eta|^2} d\eta$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$:

$$2C\pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|\eta|>N} e^{-|\eta|^2} dt < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|x + 2\sqrt{t}\eta - x| = 2\sqrt{t}|\eta| \leqslant 2\sqrt{t}N(\varepsilon) < \delta$$

$$|u_0(x + 2\sqrt{t}\eta) - u_0(x)| < \varepsilon$$

$$0 \leqslant t < \frac{\delta^2(\varepsilon)}{4N^2(\varepsilon)}$$

значит

$$\pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|\eta|<N} |u_0(x + 2\sqrt{t}\eta) - u_0(x)| e^{-|\eta|^2} d\eta < \varepsilon$$

Замечание 5. Мгновенная скорость распределения тепла. Предположим, что $supp\, u_0(x) = \overline{\Omega}$ - небольшая область в окрестности 0.

$$u_0(x) > 0\ \forall x \in \Omega$$

$\forall t > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\Omega} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy > 0$$

Теорема 36 (о стабилизации в полупространстве)**.** *Пусть* $u \in C^{2,1}(G_\infty) \cap C(\overline{G_\infty})$ *- ограниченное решение уравнения* $Tu = 0$ *в* G_∞ *и* $u(x,0) \to 0,\ |x| \to \infty$*. Тогда*

$$u(x,t) \to 0,\ t \to +\infty \text{ равномерно по } x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство.

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} u(y,0) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{|y|>N} u(y,0) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy +$$

$$+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{|y|<N} u(y,0) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) :\ \forall N \geqslant N_\varepsilon\ |u(x,0)| < \varepsilon,\ |x| \geqslant N$

$$|u(x,t)| = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \left| \int\limits_{|y|>N} u(y,0) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right| + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \left| \int\limits_{|y|<N} u(y,0) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + C \cdot |T_N^0| \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}$$

$$|u(y,0)| \leqslant C$$

$$e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leqslant 1$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot C \cdot |T_N^0| < \varepsilon$$

значит

$$|u(x,t)| \leqslant 2\varepsilon.$$

$\square$

Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

Теперь будем искать решение задачи

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{11.3}$$

Сумма решений задач (11.1) и (11.3) является решением задачи

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{11.4}$$

Теорема 37. *Пусть $f, \ f_{x_j}$ $(j = 1, ...n) \in C(\overline{G_\tau})$ и ограниченные $|f|, \ |f_{x_j}| \leqslant C$ $(j = 1, ...n)$. Тогда ограниченным решением задачи (11.3) класса $C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$ является*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} f(y,s) e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dyds. \tag{11.5}$$

Доказательство. $|f| \leqslant C$

$$|u(x,t)| \leqslant C \cdot \int\limits_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dyds = Ct$$

значит

$$|u(x,t)| \leqslant C\tau$$

$$u(x,t) \to 0, \ t \to 0$$

Убедимся, что можем дифференцировать. Сделаем замену

$$\frac{y-x}{2\sqrt{t-s}} = \eta$$

$$dy = (2\sqrt{t-s})^n d\eta$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f(x + 2\sqrt{t-s} \cdot \eta, s) e^{-|\eta|^2} d\eta ds$$

Можем дифференцировать по x, так как

$$u_{x_j}(x,t) = \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f_{x_j}(x + 2\sqrt{t-s} \cdot \eta, s) e^{-|\eta|^2} d\eta ds$$

$$f_{\eta_j}(x + 2\sqrt{t-s} \cdot \eta, s) = f_{x_j}(x + 2\sqrt{t-s} \cdot \eta, s) \cdot 2\sqrt{t-s}$$

$$f_{x_j} = \frac{f_{\eta_j}}{2\sqrt{t-s}}$$

$$u_{x_j}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{2\sqrt{t-s}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} f_{\eta_j} d\eta ds \overset{\text{по частям}}{=}$$

$$\overset{\text{по частям}}{=} \int\limits_0^t \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{2\sqrt{t-s}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} 2\eta_j e^{-|\eta|^2} f(x + 2\sqrt{t-s}\cdot\eta, s) d\eta ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{t-s}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} \eta_j e^{-|\eta|^2} f(x + 2\sqrt{t-s}\cdot\eta, s) d\eta ds$$

Интеграл равномерно сходится, значит можем дифференцировать

$$u_t = \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f(x,t) e^{-|\eta|^2} d\eta + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f_{x_j} \cdot \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} e^{-|\eta|^2} d\eta ds =$$

$$= f(x,t) + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f_{x_j} \cdot \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} e^{-|\eta|^2} d\eta ds$$

$$u_{x_j x_j} = \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f_{x_j} \cdot \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} e^{-|\eta|^2} d\eta ds$$

$$Tu = f(x,t) + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f_{x_j} \cdot \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} e^{-|\eta|^2} d\eta ds -$$

$$- \sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} f_{x_j} \cdot \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} e^{-|\eta|^2} d\eta ds = f(x,t)$$

$\square$

Принцип Дюамеля

Задача

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ее решением является

$$u(x,t) = \int\limits_0^t U(x,t,s) ds \tag{11.6}$$

$$U(x,t,s)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} f(y,s)e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}dy$$

$U(x,t,s)$ является решением задачи

$$\begin{cases} TU=0 \text{ в } G_\tau \\ u\Big|_{t=s}=f(x,s),\ x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\Gamma(x,x_0,t,t_0)=\frac{\theta(t-t_0)}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}}$$

(x_0,t_0) - полюс функции Γ, она ∞ - дифференцируема в любой точке, кроме полюса.

Функция Γ является фундаментальным решением оператора теплопроводности, то есть надо доказать, что

$$T_{x,t}\Gamma(x,x_0,t,t_0)=\delta(x-x_0,t-t_0) \tag{11.7}$$

то есть $\forall\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$(T\Gamma,\phi)=\phi(x_0,t_0)$$

$$(\Gamma(x,x_0,t,t_0),T^*\phi)=\phi(x_0,t_0)$$

$$T^*=-\partial_t-\Delta \tag{11.8}$$

$\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$(T\phi,\psi)=(\phi,T^*\psi)$$

Упражнение 8. Доказать, что $\Gamma\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Предполагаем, что упражнение 8 доказано.

$$(\Gamma,T^*\phi)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\Gamma\cdot T^*\phi dxdt=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\Gamma(x,x_0,t,t_0)(-\phi_t-\Delta\phi)dxdt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t,t_0)(-\phi_t-\Delta\phi)dxdt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t,t_0)(-\phi_t-\Delta\phi)dxdt$$

$$-\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t,t_0)\phi_t dxdt=\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\partial_t\Gamma(x,x_0,t,t_0)\phi_t dxdt+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0)\phi(x,t_0+\varepsilon)dx$$

$$-\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t,t_0)\Delta\phi dxdt = -\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Delta\Gamma(x,x_0,t,t_0)\phi dxdt$$

$$(\Gamma, T^*\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\Gamma-\Delta\Gamma)\phi dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0)\phi(x,t_0+\varepsilon)dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0)\phi(x,t_0+\varepsilon)dx$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0)dx = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0)\phi(x,t_0+\varepsilon)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\phi(x_0,t_0)-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0)(\phi(x,t_0+\varepsilon)-\phi(x_0,t_0))dx\Bigg)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\frac{1}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4\varepsilon}}(\phi(x,t_0+\varepsilon)-\phi(x_0,t_0))dx = \left|\frac{x-x_0}{2\sqrt{\varepsilon}}\right| =$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta}e^{-|\eta|^2}(\phi(x_0+2\sqrt{\varepsilon}\eta,t_0+\varepsilon)-\phi(x_0,t_0))d\eta \to 0,\ \varepsilon\to 0$$

То есть
$$(\Gamma(x,x_0,t,t_0), T^*\phi) = \phi(x_0,t_0).$$

Лекция 12

Уравнение теплопроводности

Замечание 6 (о принципе максимума).

$$Tu = 0$$

$$u \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C(\overline{\omega_\tau})$$

$$\omega_\tau = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant \tau\}$$

$(x,t) \in \omega_\tau$

$$\min_{\sigma_\tau} u \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_\tau} u$$

Для гармонических функций.
Слабый принцип максимума: $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega,\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ \forall x \in \Omega$

$$\min_{\partial\Omega} u \leqslant u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u$$

Строгий принцип максимума: $\Delta u(x) = 0,\ \exists p \in \Omega :$

$$u(p) = \max_{\overline{\Omega}} u$$

или

$$u(p) = \min_{\overline{\Omega}} u$$

то $u \equiv const.$

Хотим узнать верен ли для $Tu = 0$ аналог строгого принципа максимума. Это неверно. Приведем пример.

$$\omega_\tau = \{(x,t) |\ |x| < 1,\ 0 < t \leqslant \tau\}$$

$t_0 \in [0,\tau]$

$$u(x,t) = \begin{cases} \Gamma(x,x_0,t,t_0) & t_0 < t \leqslant \tau \\ 0 & 0 \leqslant t \leqslant t_0 \end{cases}$$

$x_0 :\ |x_0| = 2$

Функция принимает минимальное значение на всей нижней части нажего цилиндра. Этот пример также показывает отсутствие аналитичности.

Метод Галеркина

$$\begin{cases} Tu = f(x,t) \text{ в } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ u = 0,\ (x,t) \in S_T = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \end{cases} \tag{12.1}$$

Предполагаем, что $f \in L^2(Q_t),\ u_0 \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$. Пусть X - банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

$L^2(0,T;X)$ - линейное пространство измеримых функций на отрезке $[0,T]$ со значениями в X. $u:[0,T]\to X$ такая, что

$$\|u\|_{L^2(0,T;X)} = \left(\int\limits_0^T \|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$X = L^2(\Omega)$, то $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$

Определение 2. Функция $u \in L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1)$ такая, что $\partial_t u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, называется *обобщенным решением задачи (12.1),* если $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду для $x\in\Omega$ и для $\forall v \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$ и почти всюду $t\in[0,T]$ выполнено интегральное тождество

$$(\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} + (\bigtriangledown u, \bigtriangledown v)_{L^2(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)}. \tag{12.2}$$

Теорема 38. *Задача (12.1) имеет единственное обобщенное решение решение* $(f\in L^2(Q_T), u_0 \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1)$.

Доказательство.

1) Рассмотрим $\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$, возьмем ортогональный базис $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ в $\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$, будем считать, что он ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$, в качестве этого базиса можно взять собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа, то есть функции, удовлетворяющие задаче

$$\begin{cases} -\Delta w_j = \lambda_j w_j,\ x\in\Omega \\ w_j = 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\|w_j\|^2_{\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown w_j|^2 dx = \|\bigtriangledown w_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_j \geqslant 0$$

$$\|w_j\|_{L^2(\Omega)} = 1\ \forall j = 1,2...$$

$$u_0 \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega) \ \Rightarrow\ u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j} w_j,\ u_{0j} = (u_0, w_j)_{L^2(\Omega)} \ \Rightarrow$$

$$\|u_0\|^2_{\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j}^2 \lambda_j < \infty$$

Найдем функции $u_m \in \langle w_1, ...w_m\rangle:\ j = 1...m$

$$\begin{cases} (\partial_t u_m, w_j)_{L^2(\Omega)} + (\bigtriangledown u_m, \bigtriangledown w_j)_{L^2(\Omega)} = (f, w_j)_{L^2(\Omega)} \\ d_j^m(0) = u_{0j} = (u_0, w_j)_{L^2(\Omega)} \end{cases} \tag{12.3}$$

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} d_j^m(t) w_j(x)$$

$$(\nabla u_m, \nabla w_j)_{L^2(\Omega)} = d_j^m(t)\| \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = d_j^m(t)\|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)}$$

$$\begin{cases} (d_j^m(t))' + \lambda_j d_j^m(t) = f_j(t) = (f, w_j)_{L^2(\Omega)}, \ j = 1...m \\ d_j^m(0) = u_{0j} \end{cases} \tag{12.4}$$

Решением будет

$$d_j^m(t) = u_{0j}e^{-\lambda_j t} + \int\limits_0^t f_j(\tau)e^{-\lambda_j(t-\tau)}d\tau \tag{12.5}$$

Получили систему $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$.

2) Получение оценок для u_m

Умножим первое уравнение в (12.3) на $d_j^m(t)$ и просуммируем по j от 1 до m. Получаем для почти всех $t \in [0, T]$

$$(\partial_t u_m, u_m)_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)} = (f, u_m)_{L^2(\Omega)}$$

проинтегрируем по t от 0 до τ, $\tau \in [0, T]$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \partial_t u_m \cdot u_m dxdt + \int\limits_0^\tau \| \nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega f \cdot u_m dxdt$$

$$\partial_t u_m \cdot u_m = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_m^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_m^2(x,0)dx + \int\limits_0^\tau \| \nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega f \cdot u_m dxdt \tag{12.6}$$

$$\int\limits_\Omega u_m^2(x,\tau)dx \leqslant \int\limits_\Omega u_m^2(x,0)dx + 2\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |f| \cdot |u_m| dxdt$$

$$u_m(x,0) = \sum_{j=1}^m d_j^m(0)w_j(x)$$

$$\|u_m(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^m (d_j^m(0))^2 = \sum_{j=1}^m u_{0j}^2 \leqslant \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\int\limits_\Omega u_m^2(x,\tau)dx \leqslant \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f^2 dxdt + \int\limits_0^\tau \|u_m(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt$$

$$\|u_m(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant K_0 + \int\limits_0^t \|u_m(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau$$

$$K_0 = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}$$

Воспользуемся леммой Гронуолла

Лемма Гронуолла. *Пусть $x(t)$ - неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,T]$ функция, удовлетворяющая неравенству*

$$x(t) \leqslant C_1 + C_2 \int\limits_0^t x(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$x(t) \leqslant C_1 e^{C_2 t}. \tag{12.7}$$

Получаем

$$\max_{[0,T]} \|u_m(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant K_0 e^T = K_1 \tag{12.8}$$

Кроме того, если не отбрасывать слагаемое в (12.6), то получим

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega))} \leqslant K_2 \tag{12.9}$$

Теперь в системе (12.3) домножим первое уравнение на $(d_j^m)'$ и просуммируем по j, получаем для почти всех $t \in [0,T]$

$$\|\partial_t u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + (\bigtriangledown u_m, \bigtriangledown \partial_t u_m)_{L^2(\Omega)} = (f, \partial_t u_m)_{L^2(\Omega)}$$

Проинтегрируем по t от 0 до τ, $\tau \in [0,T]$

$$\int\limits_0^\tau \|\partial_t u_m\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \bigtriangledown u_m \cdot \bigtriangledown \partial_t u_m dxdt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega f \cdot \partial_t u_m dxdt$$

$$(\bigtriangledown u_m, \bigtriangledown \partial_t u_m)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} |\bigtriangledown u_m|^2 \ \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (\bigtriangledown u_m, \bigtriangledown \partial_t u_m)_{L^2(\Omega)} dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\bigtriangledown u_m(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\bigtriangledown u_m(x,0)|^2 dx$$

$$2\int\limits_0^\tau \|\partial_t u_m\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int\limits_\Omega |\bigtriangledown u_m(x,\tau)|^2 dx = \int\limits_\Omega |\bigtriangledown u_m(x,0)|^2 dx + 2\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega f \cdot \partial_t u_m dxdt$$

$$\bigtriangledown u_m(x,0) = \sum_{j=1}^m d_j^m(0) \bigtriangledown w_j$$

$$\|\bigtriangledown u_m(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^m (d_j^m(0))^2 \lambda_j = \sum_{j=1}^m u_{0j}^2 \lambda_j \leqslant \|u_0\|^2_{\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)} \ \Rightarrow$$

$$\int\limits_\Omega |\bigtriangledown u_m(x,0)|^2 dx \leqslant \|u_0\|^2_{\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)}$$

$$\|\partial_t u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\partial_t u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C\|f\|^2$$

$$\|\partial_t u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \widetilde{K_3}(\|u_0\|^2_{\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}) = K_3 \qquad (12.10)$$

3) Так как шар слабо компактен, значит существует подпоследовательность
$u_m \overset{m\to\infty}{\rightharpoonup} u$ слабо в $L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega))$
$u \in L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1)$
$\partial_t u_m \overset{m\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_t u$ слабо в $L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega))$

Утверждается, что u - искомое решение нашей задачи. Рассмотрим задачу (12.3) для выбранной подпоследовательности, умножим в первом уравнении w_j на $b_j(t) \in C^1[0,T]$

$$(\partial_t u_m, b_j(t)\cdot w_j)_{L^2(\Omega)} + (\triangledown u_m, \triangledown(b_j(t)\cdot w_j))_{L^2(\Omega)} = (f, b_j(t)\cdot w_j)_{L^2(\Omega)}$$

Проинтегрируем по t от 0 до T

$$\int_0^T (\partial_t u_m, b_j(t)\cdot w_j)_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T (\triangledown u_m, \triangledown(b_j(t)\cdot w_j))_{L^2(\Omega)}dt = \int_0^T (f, b_j(t)\cdot w_j)_{L^2(\Omega)}dt$$

По подпоследовательности перейдем к пределу

$$\int_0^T (\partial_t u, b_j(t)\cdot w_j)_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T (\triangledown u, \triangledown(b_j(t)\cdot w_j))_{L^2(\Omega)}dt = \int_0^T (f, b_j(t)\cdot w_j)_{L^2(\Omega)}dt$$

Равенство верно $\forall v = \sum\limits_{j=1}^{N} b_j(t)\cdot w_j \;\Rightarrow$

$$\int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T (\triangledown u, \triangledown v)_{L^2(\Omega)}dt = \int_0^T (f, v)_{L^2(\Omega)}dt$$

Комбинации, задающие v всюду плотны в $L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega))$, значит равенство верно для $\forall v \in L^2(0,T;\overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega))$, в частности это верно для $v(x,t) = \eta(t)w(x)$, $\eta \in L^2[0,T],\ w \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$, значит для почти всех $t \in [0,T],\ \forall w \in \mathrm{H}^{0\,1}(\Omega)$

$$(\partial_t u, w)_{L^2(\Omega)} + (\triangledown u, \triangledown w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)}$$

Существование доказано.

Теперь докажем единственность. Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - два обобщенных решения, рассмотрим

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$w(x,0) = 0 \text{ почти всюду } x \in \Omega$$

$$(\partial_t u_1, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u_1, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \ \forall v \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega) \text{ п.в. } t \in [0,T]$$

$$(\partial_t u_2, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u_2, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \ \forall v \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega) \text{ п.в. } t \in [0,T]$$

Значит, получаем, что

$$(\partial_t w, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla w, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0 \ \forall v \in \overset{0}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega) \text{ п.в. } t \in [0,T]$$

Положим $v = w$

$$(\partial_t w, w)_{L^2(\Omega)} + \| \nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$(\partial_t w, w)_{L^2(\Omega)} = \frac{\partial}{\partial t}\|w\|^2_{L^2(\Omega)}$$

проинтегрируем по t от 0 до t_0

$$\|w(x,t_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_0^{t_0} \| \nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} dt = 0$$

Это сумма двух неотрицательных величин, значит

$$w(x,t) = 0 \text{ почти всюду в } Q_T$$

следовательно

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \text{ почти всюду в } Q_T.$$

□

При доказательстве теоремы 38 мы пользовались леммой Гронуолла, теперь докажем её.

Лемма 1 (Гронуолла)**.** *Пусть $x(t)$ - неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,T]$ функция, удовлетворяющая неравенству для почти всех $t \in [0,T]$*

$$x(t) \leqslant C_1 + C_2 \int\limits_0^t x(\tau) d\tau.$$

Тогда для почти всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка

$$x(t) \leqslant C_1 e^{C_2 t}. \tag{12.11}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y(t) = \int\limits_0^t x(\tau) d\tau$$

$$y^{'}(t) = x(t)$$

$$y'(t) \leqslant C_1 + C_2 y(t)$$
$$(ye^{-C_2t})' = y'(t)e^{-C_2t} - C_2 y(t)e^{-C_2t} = e^{-C_2t}(y'(t) - C_2 y(t)) \leqslant C_1 e^{-C_2t}$$
$$(ye^{-C_2t})' \leqslant C_1 e^{-C_2t}$$

Проинтегрируем от 0 до t, $y(0) = 0$

$$y(t)e^{-C_2t} \leqslant C_1 \int\limits_0^t e^{-C_2\tau} d\tau = -\frac{C_1}{C_2}(e^{-C_2t} - 1) = \frac{C_1}{C_2}(1 - e^{-C_2t})$$

Домножим на e^{C_2t}

$$y(t) \leqslant \frac{C_1}{C_2}(e^{C_2t} - 1)$$

Подставляем и получаем

$$x(t) \leqslant C_1 + C_2\frac{C_1}{C_2}(e^{C_2t} - 1) = C_1 e^{C_2t}.$$

□

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ