МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЧАСТЬ 1

ШАПОШНИКОВА ТАТЬЯНА АРДОЛИОНОВНА

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КОЩЕЕВУ АННУ ВИТАЛЬЕВНУ

Содержание

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 1

Начнем наш курс с доказательства аналога теоремы существования и единственности задачи Коши для обыкновенных уравнений в случае уравнений с частными производными.

Для того, чтобы действовать по аналогии, напомним вначале соответствующую теорему из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть функция $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ в окрестности точки $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ является аналитической, т.е. разлагается в абсолютно сходящийся в некоторой окрестности данной точки степенной ряд. Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_{01} \\ y'(x_0) = y_{02} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n} \end{cases}$$

существует, единственно и является аналитической функцией в некоторой окрестности точки x_0.

Пример построения решения в виде степенного ряда

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1. \end{cases}$$

Покажем как работает способ построения решения, который можно будет перенести на уравнения с частными производными.

Решение будем искать в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

где $c_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$. Таким образом, для нахождения коэффициентов c_n достаточно вычислить все производные y в нуле. Из начальных условий следует, что $c_0 = y_0$ и $c_1 = y_1$. Из уравнения находим: $y''(0) = -ay_2 - by_1$. Дифференцируя уравнение, получаем рекуррентное соотношение на производные более высокого порядка:

$$y^{(n)}(0) = -ay^{(n-1)}(0) - by^{(n-2)}(0),$$

позволяющее вычислить все $y^{(n)}(0)$ и, следовательно, все c_n.

Необходимо также доказать сходимость ряда в некоторой окрестности точки $x = 0$, но из приведенного рассуждения следует теорема единственности решения задачи Коши в классе аналитических функций, т.к. такие функции полностью определяются своими производными.

Упражнение 1.1. *Найдите решение задачи Коши*

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

в виде степенного ряда.

(Решением будет являться $\sin x$*. Запишите решение в виде ряда и докажите его абсолютную сходимость.)*

Эта идея может использоваться и для решения более сложных задач - задач Коши для уравнений с частными производными второго порядка.

Сформулируем эту задачу.

Определение линейного дифференциального оператора в частных производных второго порядка

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - область. Определим линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка как:

$$L : C^2(\Omega) \to C(\Omega),$$

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a^i(x) u_{x_i}(x) + a(x)u(x),$$

где a^{ij}, a^i, a - непрерывные на Ω функции и

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Предполагаем, что матица $A = (a^{ij})$, составленная из коэффициентов старших производных, отлична от нулевой в каждой точке области Ω и хотя бы одна вторая производная u всегда присутствует в Lu.

Матрицу A всегда можем считать симметрической матрицей, т.е. $A = A^t$, где через A^t мы обозначаем транспонированную матрицу. Действительно, матрицу A можно представить в виде суммы двух матриц $Q = (q^{ij})$ и $R = (r^{ij})$, где

$$Q = \frac{A + A^t}{2}, R = \frac{A - A^t}{2}.$$

Здесь $Q = Q^t$, а $R = -R^t$. Из $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ выводим:

$$\sum_{i,j=1}^{n} r^{ij} u_{x_i x_j} = 0.$$

Таким образом, выполняется равенство:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} (q^{ij} + r^{ij}) u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} q^{ij} u_{x_i x_j}.$$

Далее считаем матрицу A симметричной.

Пусть f - произвольная функция, определенная на Ω.

Определение 1.1. *Линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка называется уравнение вида*

$$Lu = f. \tag{1.1}$$

$(n-1)$ - мерные поверхности класса C^2

Для того, чтобы поставить задачу Коши для уравнения (1.1) нам потребуется несколько дополнительных понятий.

Определение 1.2. *Множество S называется $(n-1)$ - мерной поверхностью класса C^2, если для всякой точки $x_0 \in S$ существует окрестность $U(x_0) \in \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм класса C^2, отображающий $U(x_0)$ на окрестность нуля $V(0)$ так, что что множество $S \cap U$ преобразуется в множество $\{y_n = 0\} \cap V$.*

Примеры:

1) Гиперплоскость $x_n = 0$ является $(n-1)$ - мерной поверхностью класса C^2. Для всякой точки $x_0 \in \{x_n = 0\}$ в качестве диффеоморфизма надо взять сдвиг на x_0.

2) Пусть F - функция класса C^2, причем вектор $\nabla F(x) := (F_{x_1}(x), \ldots, F_{x_n}(x))$ отличен от нуля (например, $F_{x_n} \neq 0$). Тогда множество, заданное уравнением $F(x) = 0$, если оно не пусто, является $(n-1)$ -мерной поверхностью класса C^2. Здесь для всякой точки x_0 в качестве диффеоморфизма можно взять отображение Φ, переводящее x в y по следующему правилу:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{01} \\ \ldots\ldots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - x_{0(n-1)} \\ y_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Якобиан этого отображения:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} & \dots & F_{x_{n-1}} & F_{x_n} \end{vmatrix} = F_{x_n} \neq 0$$

Упражнение 1.2. *Докажите, что тор и сфера в $\mathbb{R}^3$ являются двумерными поверхностями класса C^2.*

Замечание 1.1. *По теореме о неявной функции всякая $(n-1)$ - мерная поверхность класса C^2 в некоторой окрестности каждой своей точки может быть задана уравнением $F(x) = 0$, где $F \in C^2$ и в каждой точке x, такой, что $F(x) = 0$, вектор $\nabla F(x)$ отличен от нуля.*

Упражнение 1.3. *Обоснуйте Замечание 1.1.*

Определение 1.3. *Для всякого единичного векторного поля $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, определим производную вдоль ξ от функции u следующим образом:*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i u_{x_i}.$$

Поставим теперь задачу Коши.

Постановка задачи Коши и сведение к случаю, когда начальные условия лежат на гиперплоскости $\{y_n = 0\}$

Пусть S - $(n-1)$ - мерная поверхность класса C^2, лежащая в области Ω. Пусть в каждой точке $x \in S$ определен единичный вектор $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_1(x))$, не касающийся поверхности S. Предположим, что на S заданы функции u_0 и u_1.

Определение 1.4. *Задачей Коши для линейного уравнения в частных производных второго порядка называется задача отыскания решения $u \in C^2(\Omega)$ уравнения* (1.1), *удовлетворяющего условиям*

$$u\big|_S = u_0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_S = u_1. \tag{1.3}$$

Функции $a^{ij}, a^i, a, \xi, f, u_0, u_1, S$ называются данными задачи (1.1) – (1.3).

Решать задачу Коши проще, если начальные условия заданы не на произвольной поверхности, а на гиперплостксти $\{x_n = 0\}$. Сделаем соответсвующую замену

координат, сводяющую общую задачу к задаче с начальными данными на гиперплоскости. Зафиксируем точку $x_0 \in S$.
Согласно Замечанию 1.1, в некоторой окрестности $U(x_0)$ поверхность может быть задана уравнением $F(x) = 0$. Диффеоморфизм Φ, определенный в примере 2, отображает $U(x_0) \cap S$ на $\Sigma = \{y_n = 0\} \cap V(0)$, где $V(0)$ - некоторая окрестность нуля.

Введем новые координаты $y = \Phi(x)$. Положим $v(y) = u(\Phi^{-1}(y))$.

Упражнение 1.4. *Проверьте, что:*

$$u_{x_j} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}, u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} v_{y_k y_l} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получаем уравнение на v:

$$\sum_{k,l=1}^{n} b^{kl} v_{y_k y_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k v_{y_k} + bv = g$$

где

$$b^{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_i},$$

$$b^k = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a^j \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j},$$

$$b(y) = a(\Phi^{-1}(y)),$$

$$g(y) = f(\Phi^{-1}(y)).$$

Заметим, что

$$b^{nn} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j} = (A \nabla F, \nabla F). \tag{1.5}$$

Определим вид начальных условий (1.2), (1.3). Имеем

$$v(y)\big|_{y_n=0} = u\left(\Phi^{-1}(y)\right)\big|_{y_n=0} = u_0\left(\Phi^{-1}(y)\right)\big|_{y_n=0} = v_0(\hat{y}), \tag{1.6}$$

где $\hat{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Sigma$ и $\Sigma = \{y_n = 0\} \cap V(0)$.
Заметим, что из равенства $v|_{y_n=0} = v_0$ можно при $y_n = 0$ определить значения всех производных функции v, не содержащих дифференцирование по переменной y_n. Например, $v_{y_k}(\hat{y}, 0) = v_{0 y_k}(\hat{y})$.

Упражнение 1.5. *Проверьте, что*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\Phi^{-1}(y)\right) = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi}.$$

Так как вектор ξ не касается поверхности, а вектор ∇F сонаправлен нормали к поверхности, то $(\nabla F, \xi)$ или, что тоже самое $\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \neq 0$. Таким образом мы можем второе начальное условие переписать в виде

$$v_{y_n}\big|_{y_n=0} = u\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}\right)^{-1}\left(v_1(\hat{y}) - \sum_{k=1}^{n-1} v_{0y_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi}\right)\Bigg|_{y_n=0} = v_1. \tag{1.7}$$

Итак, для функции v мы получили задачу Коши (1.5)−(1.7), в которой начальные данные заданы в гиперплоскости $\{y_n = 0\}$.

Лемма 1.1. *Если $b^{nn} \neq 0$ на Σ, то через данные задачи (1.5) − (1.7) единственным образом вычисляются значения всех производных решения v на Σ.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше мы знаем на Σ все производные функции v, не содержащие дифференцирования по переменной y_n. Поэтому для доказательства леммы достаточно объяснить как вычисляются производные, содержащие дифференцирование по y_n.
Первая производная находится из начального условия $v_{y_n}\big|_{\Sigma} = v_1$. Из этого же равенства находим все производные функции v, содержащие однократное дифференцирование по y_n. Используя предположение $b^{nn} \neq 0$, выражаем вторую производную из уравнения (1.5):

$$v_{y_n y_n} = (b^{nn})^{-1}\left(g - \sum_{k,l=1}^{n-1} b^{kl} v_{y_k y_l} - \sum_{k=1}^{n-1} b^{kn} v_{y_k y_n} - \sum_{k=1}^{n} b^k v_{y_k} - bv\right). \tag{1.8}$$

Используя равенство (1.8) находим все производные v, содержащие двукратное дифференцирование по переменной y_n.

Для нахождения производных произвольного порядка проведем рассуждение по индукции.

Предположим, что мы уже вычислили все производные функции v, содержащие k-кратное дифференцирование по y_n.

Для того, чтобы найти все производные функции v, содержащие $(k+1)$-кратное дифференцирование по y_n надо $(k-1)$ раз продифференцировать равенство (1.8). Лемма доказана. □

Предположим теперь, что в некоторой точке $y \in \Sigma$ коэффициент b^{nn} равен нулю. Тогда из уравнения (1.5) следует, что в этой точке должно выполняться соотношение

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} b^{kl} v_{y_k y_l} + \sum_{k=1}^{n-1} b^{kn} v_{y_k y_n} + \sum_{k=1}^{n} b^k v_{y_k} + bv = g. \tag{1.9}$$

С другой стороны все производные v_{y_k} и $v_{y_k y_l}$, где $1 \leq k \leq n$ и $1 \leq l \leq n-1$, однозначно выражаются из начальных условий через функции v_0 и v_1.
Следовательно, соотношение (1.9) накладывает ограничения на функции v_0 и v_1, то есть данные задачи не могут быть произвольными!

Отметим, что $b^{nn}(y) = 0$ тогда и только тогда, когда при $x = \Phi^{-1}(y)$

$$(A(x)\nabla F(x), \nabla F(x)) = 0.$$

Пусть поверхность S в окрестности точки $x_0 \in S$ задана уравнением $F(x) = 0$, где F - функция класса C^2 и $\nabla F \neq 0$.

Определение 1.5. *Точка x_0, называется характеристической точкой для уравнения* (1.1), *если*

$$(A(x_0)\nabla F(x_0), \nabla F(x_0)) = 0.$$

Если данное соотношение выполняется в каждой точке поверхности, то поверхность называется характеристикой для уравнения (1.1).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

На прошлой лекции мы пришли к выводу: если точка $x_0 \in S$ не характеристическая, то в некоторой окрестности $U(x_0)$ этой точки существует взаимно-однозначное преобразование $y = F(x)$, отображающее эту окрестность на некоторую окрестность $V(0)$ начала координат, причем в переменных y задача (1.1) – (1.3) имеет вид:

$$v_{y_ny_n} = \sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp}v_{y_ky_p} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn}v_{y_ky_n} + \sum_{k=1}^{n} b_k v_{y_k} + bv + \Phi(y), \tag{2.1}$$

$$v|_{y_n=0,\hat{y}\in\Sigma} = v_0(\hat{y}), \tag{2.2}$$

$$v_{y_n}|_{y_n=0,\hat{y}\in\Sigma} = v_1(\hat{y}), \tag{2.3}$$

где Σ - образ $S_0 = U(x_0) \cap S$ при преобразовании $y = (x)$.

Из (2.1) – (2.3) следует, что сама функция v и все ее производные до второго порядка включительно однозначно определяются на Σ данными задачи. Уравнение (2.1) называется уравнением, записанным в нормальной форме или уравнением типа Ковалевской.

Утверждение о нахождении производных в нуле

Предположим, что данные задачи (1.1) – (1.3) бесконечно дифференцируемы, то есть $, F, \{a_{ij}\}, \{a_j\}, a \in C^\infty(\Omega), \xi, u_0, u_1 \in C^\infty(S)$.

Пусть S не содержит характеристических точек.

Покажем, что в этом случае, если задача Коши (2.1) – (2.3) имеет бесконечно дифференцируемое в окрестности начала координат решение, то в нуле определены все производные решения через данные задачи.

Будем использовать обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс, $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, α_j, $j = 1, \dots, n$ - целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha v \equiv \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$.

Заметим, что значения производных вида $D^{(\alpha',0)}v, D^{(\alpha',1)}v$ в нуле могут быть найдены из начальных условий $(), ()$.
Предположим теперь, что в нуле найдены все производные решения вида $D^{(\alpha',s)}v$ где α' - произвольный мультииндекс и $0 \le s \le k-1$.

Покажем, что в нуле может быть определена производная вида $D^{(\alpha',k)}v$.
Имеем

$$D^{(\alpha',k)}v = D^{(\alpha',k-2)}v_{y_ny_n} =$$

$$D^{(\alpha',k-2)}\{\sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp}v_{y_ky_p} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn}v_{y_ky_n} + \sum_{k=1}^{n} b_k v_{y_k} + bv + \Phi(y)\} \equiv D^{(\alpha',k-2)}H_1(y), \tag{2.4}$$

где

$$H_1(y) = \sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp} v_{y_k y_p} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn} v_{y_k y_n} + \sum_{k=1}^{n} b_k v_{y_k} + bv + \Phi(y).$$

По предположению индукции в правой части (2.4) стоят производные от решения вида $D^{(\alpha',s)}v$ при $0 \le s \le k-1$, и, следовательно, значение правой части (2.4) в нуле известно и определено через данные исходной задачи.
Поэтому известна в нуле и левая часть (2.4).

Итак, через данные задачи однозначно определены величины

$$v_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha!} D^{(\alpha)} v(0),$$

где $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.
Следовательно, если $v(y)$ - произвольная бесконечно дифференцируемая функция в окрестности $V(0)$, производные которой в нуле определены данными задачи (1.1) – (1.3), то для функции

$$\widetilde{H}(y) \equiv v_{y_n y_n} - \sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp} v_{y_k y_p} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn} v_{y_k y_n} - \sum_{k=1}^{n} b_k v_{y_k} - bv - \Phi(y)$$

имеем

$$D^{(\alpha)} \widetilde{H}(0) = 0,$$

для произвольного мультииндекса α, $|\alpha| \geqslant 0$.

Мы пришли к выводу:
если S не является характеристикой уравнения $Lu = f$ и $v(y)$ - бесконечно дифференцируемое решение задачи (2.1) – (2.3), то в начале координат значение решения и любой производной от него однозначно определяются данными исходной задачи Коши.
Поэтому, в классе функций, однозначно определяемых в некоторой области своими значениями и значениями всех своих производных в некоторой точке, задача Коши не может иметь более одного решения.
Таким классом функций является класс аналитических функций.

Определение 2.6. *Вещественнозначная функция g, определенная в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ называется аналитической в точке $x_0 \in \Omega$, если в некоторой окрестности этой точки она представляется абсолютно сходящимся степенным рядом*

$$g(x) = \sum_{\alpha} C_\alpha (x - x_0)^\alpha,$$

где $(x - x_0)^\alpha \equiv (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{0n})^{\alpha_n}$. Очевидно, что $C_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!} D^{(\alpha)} g(x_0)$.

Определение 2.7. *Функция g называется аналитической в области Ω, если она аналитична в каждой точке этой области.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из определения аналитической в области функции следует, что такая функция однозначно определяется во всей области своими значениями и значениями всех своих производных в произвольной точке $x_0 \in \Omega$, в частности, если в какой-либо точке Ω аналитическая функция равна нулю вместе со всеми производными, то $g \equiv 0$ в Ω.

Из сказанного следует, что, если поверхность S не содержит характеристических точек и все данные задачи Коши - аналитические (коэффициенты оператора L, функции f и F - аналитические в Ω, u_0, u_1 и ξ - аналитические на S), то, если существует аналитическое решение этой задачи, то это решение единственно.

Пример задачи Коши с данными на характристике

Пример. Рассмотрим уравнение $u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 0$.

Уравнение характеристик уравнения имеет вид

$$(A\nabla F, \nabla F) = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $F_{x_1}^2 - F_{x_2}^2 = 0$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два семейства характеристик: $x_1 - x_2 = C_1$ и $x_1 + x_2 = C_2$, где $C_i \in \mathbb{R}$.

Исследуем разрешимость задачи Коши

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 0 \\ u|_{x_1=x_2} = u_0(x_2) \\ u_{x_1}|_{x_1=x_2} = u_1(x_2) \end{cases}.$$

Сделаем преобразование координат $y = \Phi(x)$, заданной равенствами

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Положим $v(y) \equiv u(\Phi^{-1}(y))$.
Учитывая, что $u_{x_1} = v_{y_1} + v_{y_2}$, $u_{x_2} = -v_{y_2}$ и $u_{x_1x_1} = v_{y_1y_1} + 2v_{y_1y_2} + v_{y_2y_2}$, $u_{x_2x_2} = v_{y_2y_2}$, для $v(y)$ получим задау Коши

$$\begin{cases} v_{y_1y_1} + 2v_{y_1y_2} = 0 \\ v|_{y_2=0} = u_0(y_1) \\ v_{y_2}|_{y_2=0} = u_1(y_1) - u_0'(y_1) \end{cases}.$$

Полагая $y_2 = 0$ в уравнении и учитывая начальные данные, выводим $2u_1' - u_0'' = 0$ и, следовательно,

$$2u_1 - u_0' = C = const.$$

Таким образом, если это условие не выполнено, то исходная задача Коши не имеет решений ни при каких сколько угодно гладких данных задачи.

Предположим, что это условие выполнено.

Тогда задача Коши имеет бесконечно много решений, причем, все решения задаются формулой

$$u(x_1, x_2) = h(x_1 - x_2) + u_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - h(0),$$

где $h(\tau) \in C^2(\mathbb{R})$ - произвольная функция, удовлетворяющая условию $h'(0) = \dfrac{C}{2}$.

Теорема Коши-Ковалевской

Теорема 2.1.
Пусть данные задачи (1.1) – (1.3) *аналитические и поверхность* S *не содержит характеристических точек уравнения* (1.1).

Тогда для любой точки $x_0 \in S$ *существует такая окрестность* $U(x_0)$, *в которой эта задача имеет аналитическое решение, и ни в какой окрестности точки хо не может быть более одного аналитического решения этой задачи.*

Доказательство. Единственность аналитического решения уже доказана.
Действительно, если в некоторой окрестности начала координат $V(0)$ существует аналитическое решение, то, как было установлено, значение $D^\alpha v(0)$ для произвольного мультииндекса а однозначно определяется через данные задачи.
Следовательно, в классе аналитических функций решение определено единственным образом. Перейдем к доказательству существования аналитического решения в окрестности нуля.

Прежде всего преобразуем нашу задачу к задаче Коши с нулевыми начальными условиями. Для этого будем искать аналитическое решение задачи (2.1) – (2.3) в виде

$$v(y) = w(y) + W(y),$$

где $W(y) = v_0(\hat{y}) + y_n\widetilde{v_1}(\hat{y})$ - аналитическая в начале координат функция.
Докажем, что существует аналитическая в начале координат функция $w(y)$, являющаяся решением задачи

$$w_{y_ny_n} = \sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp}w_{y_ky_p} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn}w_{y_ky_n} + \sum_{k=1}^{n} b_k w_{y_k} + bw + \widetilde{\Phi}(y), \tag{2.5}$$

$$w\big|_{y_n=0} = 0, \tag{2.6}$$

$$w_{y_n}\big|_{y_n=0} = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(y) + \sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp} W_{y_k y_p} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn} W_{y_k y_n} + \sum_{k=1}^{n} b_k W_{y_k} + bW.$$

Докажем, что задача (2.5) – (2.7) имеет аналитическое в нуле решение $w(y)$. Учитывая, что плоскость $y_n = 0$ не является характеристикой уравнения (2.5), получим, что, если бы решение существовало, то в начале координат его значение и значения всех его производных определялись бы данными задачи (2.5) – (2.7). Поэтому для доказательства существования аналитического решения задачи (2.5)– (2.7) достаточно доказать, что формально составленный степенной ряд

$$w(y) = \sum_{\alpha} w_\alpha y^\alpha, \tag{2.8}$$

где $w_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!} D^\alpha w(0)$ - определены данными задачи (2.5) – (2.7), является абсолютно сходящимся рядом в некоторой окрестности начала координат.
Тогда его сумма будет аналитическим в нуле решением задачи (2.5) – (2.7). Действительно, рассмотрим в окрестности $V(0)$ аналитическую функцию

$$H(y) \equiv w_{y_n y_n} - \sum_{k,p=1}^{n-1} b_{kp} w_{y_k y_p} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{kn} w_{y_k y_n} - \sum_{k=1}^{n} b_k w_{y_k} - bw - \widetilde{\Phi},$$

где w задана рядом (2.8).

В силу выбора чисел w_α, имеем $D^\alpha H(0) = 0$ для любого мультииндекса α. Учитывая аналитичность функции $H(y)$ в начале координат, выводим, что $H(y) = 0$ в $V(0)$.

Итак, докажем абсолютную сходимость ряда (2.8) в некоторой окрестности $V(0)$. Для этого воспользуемся методом мажорант.

Понятие мажоранты. Примеры

Определение 2.8. *Аналитическая в точке x_0 вещественнозначная функция $\widetilde{g}(x) = \sum\limits_{\alpha} \widetilde{g}_\alpha (x - x_0)^\alpha$ называется мажорантой в точке x_0 для аналитической в этой точке функции $g(x) = \sum\limits_{\alpha} g_\alpha (x - x_0)^\alpha$, если для произвольного α, $|\alpha| > 0$, выполнены неравенства $|g_\alpha| \le \widetilde{g}_\alpha$.*

Замечание 2.2. *Очевидно, что у любой аналитической функции $g(x) = \sum\limits_{\alpha} g_\alpha (x - x_0)^\alpha$ имеется мажоранта $\widetilde{g}(x) = \sum\limits_{\alpha} |g_\alpha| (x - x_0)^\alpha$.*

Кроме того, если есть числовая последовательность (вещественная или комплексная) $\{g_\alpha, |\alpha| > 0\}$, для которой существует вещественная неотрицательная числовая последовательность $\{\widetilde{g}_\alpha, |\alpha| > 0\}$ такая, что для произвольного мультииндекса α, $|g_\alpha| \le \widetilde{g}_\alpha$ и ряд $\sum\limits_{\alpha} \widetilde{g}_\alpha (x - x_0)^\alpha$ абсолютно сходится в некоторой окрестности точки x_0, то функция $\sum\limits_{\alpha} g_\alpha (x - x_0)^\alpha$ - аналитическая в точке x_0 и функция $\widetilde{g}(x) = \sum\limits_{\alpha} \widetilde{g}_\alpha (x - x_0)^\alpha$ является мажорантой в точке x_0 функции $g(x)$.

Замечание 2.3. *Приведем еще два примера построения мажорант.*
Пусть $g(x) = \sum g_\alpha x^\alpha$ *- аналитическая в нуле* $(x_0 = 0)$ *функция,* $g_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!}D^\alpha g(0)$.
Предположим, что ряд абсолютно сходится в точке $a \in U(0)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $|a_i| > 0$, $i = 1, \ldots, n$.
Тогда существует положительное число M, *что для любого мультииндекса* α

$$|d_\alpha||a_1|^{\alpha_1} \ldots |a_n|^{\alpha_n} \leq M, \tag{2.9}$$

Рассмотрим аналитическую в нуле функцию

$$\widetilde{g}(x) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x_1}{|a_1|}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{x_n}{|a_n|}\right)} =$$

$$= M \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{x_1^{\alpha_1}}{|a_1|^{\alpha_1}} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{x_2^{\alpha_2}}{|a_2|^{\alpha_2}} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{x_n^{\alpha_n}}{|a_n|^{\alpha_n}} = M \sum_{\alpha} \frac{x^\alpha}{|a_1|^{\alpha_1} \ldots |a_n|^{\alpha_n}}.$$

Очевидно, что этот ряд сходится в области $\{|x_i| < a_i, i = 1, \ldots, n$.

В силу неравенства (2.9) *имеем, что* $\widetilde{g}(x)$ *является мажорантой для функции* g *в нуле.*

Аналогично, функция

$$\widetilde{g}(x) = \frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_n}{\delta}}{a_0}},$$

где $\delta \in (0, 1)$, $a_0 = min\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$, *является мажорантой функции* g *в нуле.* *Действительно, функция* g *в области* $|x_1 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_n}{\delta}| < a_0$ *представима в виде степенного абсолютно сходящегося ряда*

$$\widetilde{g}(x) = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x_1 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_n}{\delta}\right)^k}{a_0^k} =$$

$$= M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_0^k} \sum_{k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} \left(\frac{x_n}{\delta}\right)^{k_n}.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{a_0^k} \geqslant \frac{1}{|a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}}, \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \geqslant 1,$$

получим

$$|g_\alpha| \leq \frac{M}{|a_1|^{\alpha_1} \ldots |a_n|^{\alpha_n}} \leq \frac{M}{a_0^k} \frac{1}{\delta^{k_n}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}.$$

Следовательно, $\widetilde{g}(x) = \dfrac{M}{1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_n}{\delta}}{a_0}}$ *- мажоранта в нуле функции* g.

Завершение доказательства - в Лекции 2. □

В заключении этой лекции рассмотрим пример, показывающий, что характеристики являются местом нахождения точек разрыва "решения".

Пусть кривая γ, заданная уравнением $y = \phi(x)$, делит всю плоскость на две непересекающиеся части Ω^+ и Ω^-.
Предположим, что и $u \in C^2\left(\overline{\Omega^+}\right)$ и $u \in C^2\left(\overline{\Omega^-}\right)$, и $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, но $u \notin C^2(\mathbb{R}^2)$,-является решением уравнения

$$A(x,y)u_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Lu_y + gu = f(x,y)$$

в каждой из частей Ω^+ и Ω^-.
Предположим, что коэффициенты уравнения и свободный член являются непрерывными на всей плоскости.

В силу условий на u в каждой точке $(x_0, y_0) \in \gamma$ хотя бы одна из вторых производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} имеет разрыв первого рода.

Введем следующее обозначение

$$g = \begin{cases} g^+, (x,y) \in \Omega^+, \\ g^-, (x,y) \in \Omega^- \end{cases}.$$

Как обычно, обозначим через $[g]$ - скачок функции g на γ, то есть

$$[g] \equiv g^+(x,\phi(x)) - g^-(x,\phi(x)), x \in \mathbb{R}^1.$$

Учитывая, что $[u] = [u_x] = [u_y] = 0$, получим

$$\frac{d}{dx}[u] = u_x^+ + u_y^+\phi'(x) - u_x^- - u_y^-\phi'(x) = [u_x] + [u_y]\phi' = 0,$$

и, аналогично,

$$\frac{d}{dx}[u_x] = [u_{xx}] + [u_{yx}]\phi' = 0,$$

$$\frac{d}{dx}[u_y] = [u_{xy}] + [u_{yy}]\phi' = 0.$$

Предположим, что в точке $(x_0, y_0) \in \gamma$ имеем, что $[u_{yy}] = \lambda \neq 0$.

Тогда из полученных соотношений выводим: $[u_{xy}] = -\lambda\phi'$, $[u_{xx}] = \lambda\phi'^2$.

Из уравнения следует, что в точках кривой γ выполнено равенство

$$A(x,y)[u_{xx}] + B(x,y)[u_{xy}] + C(x,y)[u_{yy}] = 0,$$

то есть из полученных ранее выражений для скачков вторых производных решения имеем

$$A\phi'^2 - B\phi' + C = 0.$$

Следовательно, γ - характеристика исходного уравнения.

Лекция 3

Пример Жака Адамара (1865 - 1963)

Теорема Коши - Ковалевской утверждает существование аналитического решения задачи Коши для уравнения с аналитическими коэффициентами и аналитическими начальными данными, заданными на аналитической нехарактеристической $(n-1)$ - мерной поверхности. Многие задачи физики сводятся к задаче Коши для аналитических уравнений с начальными данными, заданными на нехарактеристической поверхности, но не являющимися аналитическими функциями.

На первый взгляд кажется естественным такой путь решения таких задач: заданные начальные данные аппроксимируем многочленами. Согласно теореме Вейерштрасса такие многочлены можно выбрать так, что на всей рассматриваемой части плоскости $t = t_0$, где задаются начальные условия Коши, разность между этими многочленами и соответствующими заданными функциями будет сколь угодно малой. По теореме Коши Ковалевской для аналитического уравнения можно решить нехарактеристическую задачу Коши с аналитическим данными - многочленами.

Казалось бы, естественно ожидать, что эти решения задачи Коши с начальными условиями в виде аппроксимирующих многочленов близко к решению той же задачи при исходных начальных условиях, по крайней мере вблизи той части поверхности, где задаются условия Коши. Но Ж. Адамар построил пример, показывающий, что дело обстоит иногда совсем не так.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа на плоскости

$$\begin{cases} \nabla u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u|_{y=0} = \dfrac{\cos nx}{n}, \\ u_y|_{y=0} = 0, \\ x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Будем искать решение в полосе $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, -\delta < y < \delta\}$. Заметим, что $y = 0$ не является характеристикой уравнения Лапласа (характеристик нет). Поэтому, согласно теореме Коши - Ковалевской, задача Коши имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности произвольной точки оси $y = 0$. Легко видеть, что решение этой задачи имеет вид

$$u_n(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(ny)\cos(nx)}{n}.$$

Следовательно, с одной стороны

$$\sup_{\mathbb{R}^1} |u(x,0)| = \sup_{\mathbb{R}^1} |\frac{\cos nx}{n}|, n \to \infty,$$

а с другой стороны

$$\sup_{\mathbb{R}^1\times[-\delta,\delta]} |u_n(x,y)| = \frac{\operatorname{ch} n\delta}{n}, n \to \infty.$$

Ж. Адамаром было введено понятие корректно поставленной задачи.

Предположим, что дифференциальные выражения, входящие как в уравнения, так и в краевые и начальные условия, линейны. Совокупность этих дифференциальных выражений порождает некоторый дифференциальный оператор Λ, который действует из банахова пространства B_1(пространства решений нашей задачи) в пространство B_2 и преобразует искомую функцию и в совокупность правых частей дифференциальных уравнений, входящих в постановку задачи и правых частей краевых и начальных условий - Φ.

Тогда исходную задачу можно записать в виде

$$\Lambda u = \Phi. \tag{3.1}$$

Оператор Λ будем называть оператором данной задачи. Решить задачу - значит найти все элементы пространства B_1, которые преобразуются оператором Λ в элемент Φ.

Определение 3.9. *Задача (3.1) называется корректной в паре пространств B_1 и B_2, если:*
1) для любого $\Phi \in B_2$ существует элемент $u \in B_1$, такой, что $\Lambda u = \Phi$;
2) если u_1 и u_2 из B_1 таковы, что $\Lambda u_1 = \Phi$ и $\Lambda u_2 = \Phi$, где $\Phi \in B_2$, то $u_1 \equiv u_2$ в B_1.
3) достаточно малому изменению элемента Φ в пространстве B_2 соответствует сколь угодно малое изменение решения u в B_1.

Если в примере Адамара взять пространства: $B_1 = \{u \in C(\overline{\Omega}) : |u| \le M\}$, $B_2 = \{\phi \in C(\mathbb{R}^1) : |\phi| \le C\}$, $C = const$, то, как видим, задача Коши для уравнения Лапласа является некорректно поставленной задачей в этой паре пространств.

Пример С.В. Ковалевской (1850 -1891)

С.В. Ковалевская привела пример, показывающий, что если задача Коши ставится для уравнения, не имеющего вид (2.1) (так называемая нормальная форма уравнения), то теорема о существовании аналитического решения может быть и неверна.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx},\, u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{3.2}$$

Заметим, что $\dfrac{1}{1+x^2}$ - аналитическая в нуле функция.

Предположим, что существует аналитическое в точке $(0,0)$ решение этой задачи. Тогда оно должно быть представимо в некоторой окрестности $(0,0)$ в виде абсолютно сходящегося степенного ряда

$$u(x,t) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2} h_{\alpha_1,\alpha_2} t^{\alpha_1} x^{\alpha_2}. \tag{3.3}$$

Полагая в (3.3) $t = 0$ и учитывая начальное условие в задаче (3.2), получим

$$\sum_{\alpha_2=0}^{\infty} h_{0,\alpha_2} x^{\alpha_2} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

откуда выводим, что $h_{0,2k} = (-1)^k$, $h_{0,2k-1} = 0$.

Подставляя ряд (3.3) в уравнение задачи (3.2), получим рекуррентное соотношение на коэффициенты h_{α_1,α_2}:

$$h_{m,p} = h_{m-1,p+2} \frac{(p+1)(p+2)}{m},$$

из которого следует, что

$$h_{m,2k-1} = 0, m, k = 1, 2, \dots,$$

$$h_{m,2k} = h_{m-1,2k+2} \frac{(2k+1)(2k+2)}{m} = \dots =$$
$$= h_{m-j,2k+2j} \frac{(2k+1)\dots(2k+2j)}{m(m-1)\dots(m-j+1)} = \dots =$$
$$= h_{0,2k+2m} \frac{(2k+2m)\dots(2k+1)(2k)!}{(2k)!m!} = (-1)^{k+m} \frac{(2k+2m)!}{(2k)!m!}.$$

Итак, если аналитическое в начале координат рещение существует, то оно должно быть представимо в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \sum_{k,m=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{(2k+2m)!}{(2k)!m!} t^m x^{2k},$$

и, в частности,

$$u(0,t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m)!}{(m!} t^m$$

для $t > 0$. Заметим, что последний ряд расходится в любой точке $(0,t)$, $t > 0$ и его радиус сходимости равен нулю

$$R = \lim_{m\to\infty} |\frac{a_m}{a_{m+1}}| = \lim_{m\to\infty} \frac{(2m)!(m+1)!}{m!(2m+2)!} = 0.$$

Классификация урчп 2 порядка

Рассмотрим в области Ω в $\mathbb{R}^n$ уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) u_{x_j} + a(x)u = f(x), \tag{3.4}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ - вещественнозначные функции.

Фиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и рассмотрим квадратичную форму

$$(A(x_0)\xi, \xi) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j. \tag{3.5}$$

Из курса линейной алгебры известно, что существует невырожденное линейное преобразование $\xi = T(x_0)\eta$, $T(x_0) = (t_{pk})$, приводящее квадратичную форму (3.5) к каноническому виду:

$$(A(x_0)\xi, \xi) = \sum_{k,p=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) t_{ik} t_{jp} \right) \eta_k \eta_p =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \delta_s \eta_s^2 = \eta_1^2 + \ldots + \eta_{n_+}^2 - \eta_{n_=+1}^2 - \ldots - \eta_{n_+ + n_-}^2,$$

где δ_s - числа, принимающие значения $0, 1$ или -1.

Известно (закон инерции), что числа n_+ и n_- - инварианты квадратичной формы и определяют соответственно количество положительных и отрицательных собственных значений матрицы $A(x_0)$. Обозначим через n_0 - число нулевых собственных значений, то есть $n_0 = n - n_+ - n_-$. Числа n_+, n_-, n_0 определяют тип уравнения (3.4) в точке x_0.

Сделаем линейное преобразование координат

$$y = T^t(x_0)x,$$

где $T^t(x_0) = (\hat{t}_{pk})$, $\hat{t}_{pk} = t_{kp}$.

Учитывая, что

$$u_{x_j} = \sum_{p=1}^{n} v_{y_p} \hat{t}_{pj}, u_{x_i x_j} = \sum_{p,k=1}^{n} v_{y_k y_p} \hat{t}_{pj} \hat{t}_{ki},$$

где $v(y) = u(x(y))$, получим, что главная часть уравнения (3.4) (то есть часть, содержащая только старшие производные) преобразуется к виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j} = \sum_{k,p=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \hat{t}_{pj} \hat{t}_{ki} \right) v_{y_k y_p} = \sum_{k,p=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_{jp} t_{ik} \right) v_{y_k y_p}. \tag{3.6}$$

Сравнивая (3.6) и (3.5), приходим к заключению, что в точке x_0 уравнение (3.5) имеет вид

$$v_{y_1 y_1} + \ldots + v_{y_{n_+} y_{n_+}} - v_{y_{n_+ +1} y_{n_+ +1}} - \ldots - v_{y_{n_+ + n_-} y_{n_+ + n_-}} + L_1(y, v, \nabla v) = 0. \tag{3.7}$$

Вид (3.7) называется каноническим видом уравнения (3.5) в точке x_0.

Заметим, что для уравнение (3.5) с постоянными коэффициентами при старших производных канонический вид не зависит от точки x_0 области Ω.

Определение 3.10. *Уравнение* (3.4) *называется эллиптическим в точке x_0 области Ω, если в этой точке $n_+ = n$ или $n_- = n$.*

Примером эллиптического уравнения является уравнения Пуассона $\Delta u = f$, где $\Delta g \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ - оператор Лапласа.

Определение 3.11. *Уравнение* (3.4) *называется гиперболическим в точке x_0 области Ω, если $n_+ = n - 1$, $n_- = 1$ или, если $n_- = n - 1$, $n_+ = 1$.*

Примером гиперболического уравнения является волновое уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + f, \Delta u = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}.$$

Определение 3.12. *Уравнение* (3.4) *называется уравнением параболического типа в точке x_0, если $n_0 > 0$.*

Примером параболического уравнения является уравнение теплопроводности $u_t = \Delta u + f$, где оператор Лапласа действует только по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Будем говорить, что уравнение (3.4) является эллиптическим на множестве Ω, если оно эллиптическое в каждой точке этого множества. Аналогично, уравнение (3.4) называется гиперболическим (параболическим) на множестве Ω и пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{xt}$, если оно гиперболическое (параболическое) в каждой точке этого множества.

Тип уравнения может меняться в зависимости от выбора точки области. Например, уравнение Трикоми $u_{yy} - y u_{xx} = 0$ является эллиптическим при $y < 0$, гиперболическим при $y > 0$, параболическим при $y = 0$.

Более подробную классификацию уравнений с частными производными можно найти в книгах [Михайлов], [Олейник].

Перейдем теперь к подробному изучению задачи Коши для волнового уравнения.

Задача Коши для волнового уравнения

Волновым уравнением называется уравнение вида

$$u_{tt} = \Delta u + f(x, t),$$

где оператор Лапласа Δ берется по пространственным переменным x, переменная t играет роль времени, функция $f(x, t)$ считается заданной, в частности, если $f \equiv 0$ то волновое уравнение называется однородным.

Волновое уравнение является в случае $n = 1$ упрощенной моделью колебания струны, при $n = 2$ - колебания мембраны, а при $n = 3$ - колебания упругого тела.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При этом решение $u(x,t)$ характеризует смещение в некотором направлении точки x в момент времени $t \geq 0$.

Пусть w - гладкая подобласть Ω. Тогда ускорение внутри w характеризуется формулой

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_w u dx = \int\limits_w u_{tt} dx,$$

а результирующая контактная сила представима в виде

$$-\int\limits_{\partial w} F v dS,$$

где F - сила, действующая на w через границу ∂w; плотность массы полагается равной единице. Согласно закону Ньютона произведение массы на ускорение равно результирующей силе, то есть

$$\int\limits_w u_{tt} dx = -\int\limits_{\partial w} F v dS.$$

Так как это тождество имеет место для каждой подобласти w, то имеем

$$u_{tt} = - \div F.$$

Для упругих тел F является функцией градиента смещения ∇u. Поэтому

$$u_{tt} + \div F(\nabla u) = 0.$$

При малых $|\nabla u|$ часто используют линеаризацию $F(\nabla u) \approx -a^2 \nabla u$. Тогда получаем

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$$

- волновое уравнение.

Физическая интерпретация диктует включать в математическую постановку задачи два начальных условия: на смещение u и на скорость u_t в начальный момент времени $t = t_0$, который будем считать нулевым.

Задача Коши для волнового уравнения состоит в нахождении решения уравнения

$$u_{tt} = \Delta u + f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, , t \in (0,T), \tag{3.8}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x),\, u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Мы рассмотрим задачу $(3.8), (3.9)$ для $n = 1, 2, 3$.

Определение 3.13. *Классическим решение задачи* (3.8), (3.9) *называется функция* $u \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, *удовлетворяющая уравнению* (3.8) *и начальным условиям* (3.9).

Здесь мы используем обозначения:
$(t \geq 0) = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$,
$(t > 0) = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$.

Энергетическое неравенство

Прежде всего заметим, что коническая поверхность $T - t = |x - x_0|$ является характеристикой волнового уравнения.

Конус $K_{x_0,T} = \{|x - x_0| < T - t, 0 \le t \le T\}$ будем называть характеристическим конусом с вершиной в точке $(x_0, T), x_0 \in \mathbb{R}^n$ и n - любое натуральное число.

Обозначим $\Omega_\tau = K_{x_0,T} \cap \{\tau = t\}$ - сечение характеристического конуса плоскостью $\tau = t$.

Теорема 3.2. *Пусть $u \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \ge 0)$ - классическое решение волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. Положим*

$$E(t) \equiv \int\limits_{\Omega_t} (u_t^2 + |\nabla_x u|^2) dx. \tag{3.10}$$

Тогда для любых t_1, t_2, таких, что $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ справедливо неравенство

$$E(t_2) \le E(t_1). \tag{3.11}$$

Функция $\dfrac{1}{2}E(t)$ имеет физическую интерпретацию - полной энергии колебательной системы в момент времени t. Неравенство (3.11) означает, что при отсутствии действующих на систему сил, энергия этой системы не возрастает со временем.

Доказательство. Умножим обе части волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u$ на u_t и проинтегрируем по усеченному конусу $K_{t_1,t_2} = K_(x_0, T) \cap \{t_1 \le t \le t_2\}$.
Обозначи через $\Gamma_{t_1,t_2} = \{|x - x_0| = T - t, t_1 \le t \le t_2\}$ боковую поверхность усеченного конуса K_{t_1,t_2}.
Имеем

$$\int\limits_{K_{t_1,t_2}} u_t u_{tt} dxdt = \int\limits_{K_{t_1,t_2}} u_t \Delta u dxdt.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{K_{t_1,t_2}} u_t u_{tt} dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{K_{t_1,t_2}} \frac{\partial}{\partial t} u_t^2 dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial K_{t_1,t_2}} u_t^2 \nu_t dS =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} u_t^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_{t_1,t_2}} u_t^2 \nu_t dS,$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_t)$ - вектор единичной внешней нормали к границе усеченного конуса.
Найдем значение ν_t на боковой поверхности $\Gamma_{t_1,t_2} = \{|x - x_0| = T - t\}$.
Пусть $F(x,t) \equiv t - T + |x - x_0|, t_1 < t < t_2$ - уравнение боковой поверхности Γ_{t_1,t_2}.
Тогда

$$\nu_j = \frac{F_{x_j}}{|\nabla_{x,t} F|}, j = 1, \dots, n;$$

$$\nu_t = \frac{F_t}{|\nabla_{x,t}F|}.$$

Учитывая, что $F_{x_j} = \dfrac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|}$ и $F_t = 1$, и, следовательно, $|\nabla_{x,t}F| = \sqrt{2}$, выводим

$$\nu_t = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\nu_j = \frac{x_j = x_{0j}}{\sqrt{2}|x - x_0|}, j = 1, \ldots, n.$$

Аналогично, имеем

$$\int\limits_{K_{t_1,t_2}} u_t \Delta u dxdt = -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{K_{t_1,t_2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j} dxdt + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial K_{t_1,t_2}} u_t u_{x_j} \nu_j dS =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{K_{t_1,t_2}} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla_x u|^2 dxdt + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial K_{t_1,t_2}} u_t u_{x_j} \nu_j dS =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\partial K_{t_1,t_2}} |\nabla_x u|^2 \nu_t dS + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial K_{t_1,t_2}} u_t u_{x_j} \nu_j dS =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} |\nabla_x u|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} |\nabla_x u|^2 dx -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_{\Gamma_{t_1,t_2}} |\nabla_x u|^2 dS + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_{t_1,t_2}} u_t u_{x_j} \frac{x_j - x_{0j}}{\sqrt{2}|x - x_0|} dS.$$

Итак, получим

$$0 = \int\limits_{K_{t_1,t_2}} (u_{tt} u_t - u_t \Delta u) dxdt =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} (u_t^2 + |\nabla_x u|^2) dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} (u_t^2 + |\nabla_x u|^2) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{t_1,t_2}} (u_t^2 + |\nabla_x u|^2 - 2u_t(\nabla_x u, \widetilde{n})) dS.$$

Докажем, что

$$u_t^2 + |\nabla_x u|^2 - 2u_t(\nabla_x u, \widetilde{n}) \geq 0.$$

Действительно, учитывая, что $u_t(\nabla_x u, \widetilde{n}) \leq |u_t||\nabla_x u|$, получим

$$u_t^2 + |\nabla_x u|^2 - 2u_t(\nabla_x u, \widetilde{n}) \geq u_t^2 + |\nabla_x u|^2 - 2|u_t||\nabla_x u| = (|u_t| - |\nabla_x u|)^2 \geq 0.$$

В итоге получим

$$0 = \frac{1}{2}E(t_2) - \frac{1}{2}E(t_1) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_{\Gamma_{t_1,t_2}} (u_t^2 + |\nabla_x u|^2 - 2u_t(\nabla_x u, \widetilde{n}) dS \geq \frac{1}{2}E(t_2) - \frac{1}{2}E(t_1),$$

откуда следует, что

$$E(t_2) \leq E(t_1).$$

$\square$

Лекция 4

Следствия из энергетического неравенства

Из энергетического неравенства следует, что решение однородного волнового уравнения в характеристическом конусе $K_{x_0,t}$ однозначно определяется значениями u и u_t на основании этого конуса
$\Omega_0 = \{(x,t) : t = 0, |x - x_0| \leq T\}$.
Итак, имеет место

Теорема 4.3. *Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ принадлежат $C^2(K_{x_0,T}) \cap C^1(K_{x_0,T} \cup \Omega_0)$ и $u_{1tt} - \Delta u_1 = u_{2tt} - \Delta u_2$ в $K_{x_0,T}$ и $u_1|_{\Omega_0} = u_2|_{\Omega_0}$ и $u_{1t}|_{\Omega_0} = u_{2t}|_{\Omega_0}$.
Тогда $u_1 \equiv u_2$ в $K_{x_0,T}$.*

Доказательство. Действительно, функция $v = u_1 - u_2$ принадлежит $C^2(K_{x_0,T}) \cap C^1(K_{x_0,T} \cup \Omega_0)$ и удовлетворяет

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta v \text{ в } K_{x_0,T}, \\ v|_{\Omega_0} = 0, \\ v_t|_{\Omega_0} = 0 \end{cases}$$

$\forall t \in (0,T)$.
Тогда $E(t) \leq E(0) \leq \int\limits_{\Omega_0} (v_t^2 + |\nabla v|^2)dx = 0$.
Тогда $v_t \equiv 0$, $|\nabla v| \equiv 0$.
Получается, что $v \equiv const$, но из начальных условий следует, что $const = 0$.
Т.о. $u_1 \equiv u_2$ в $K_{x_0,T}$. □

Заметим, что результат, сформулированный в Теореме (4.3), выражает важное свойство решений гиперболических уравнений - конечную скорость распространения возмущений.

Поясним это. Предположим, что начальные функции u_0 и u_1 отличны от нуля лишь в какой-либо ограниченной области $\widetilde{\Omega}$ пространства $\mathbb{R}^3$, а $f \equiv 0$. Тогда отвечающее им решение $u(x,t)$, согласно формуле Кирхгофа, будет равно нулю всюду, кроме t - окрестности области $\widetilde{\Omega}$ (то есть совокупности точек $\widetilde{\Omega}$ и всех точек x, отстоящих от $\widetilde{\Omega}$ на расстояние, меньшее или равное 1).

(Если бы мы имели волновое уравнение более общего вида, например, $u_{tt} = \mu\Delta u, \mu > 0$, то при предположении, что начальные данные отличны от нуля лишь в области $\widetilde{\Omega}$, решение было бы отлично от нуля в $\sqrt{\mu}t$ - окрестности области $\widetilde{\Omega}$ - то есть скорость распространения возмущений не превосходит $\sqrt{\mu}$).

Кроме того, из Теоремы (4.3) немедленно следует теорема единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения.

Теорема 4.4. *Задача Коши* (3.8), (3.9) *не может иметь более одного классического решения.*

Существование решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$. Однородный случай

Теорема 4.5. *Пусть $n = 3$ и $f = 0$. Предположим, что $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда классическим решением задачи* (3.8), (3.9) *является функция, заданная формулой*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} u_0(\xi) dS_\xi \right), \tag{4.1}$$

носящей имя Кирхгофа.

Доказательство. Введем обозначение:

$$M[g](x,t,\tau) \equiv \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} g(\xi,\tau)) dS_\xi.$$

Учитывая это обозначение, формулу Кирхгофа (4.7) можем переписать в виде

$$u(x,t) = M[u_1] + \frac{\partial}{\partial t} M[u_0]. \tag{4.2}$$

Величину

$$\frac{1}{t} M[g] = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} g(\xi,\tau)) dS_\xi$$

называют сферическим средним функции g.

Итак, докажем, что функция, заданная формулой (4.2), является решением задачи Коши (3.8), (3.9).

Разобьем доказательство теоремы на несколько шагов.

1. Пусть $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Покажем, что функция

$$v(x,t) = M[u_1](x,t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$$

является классическим решением задачи Коши

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta v, x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = u_1(x). \end{cases} \tag{4.3}$$

Заметим, что

$$M[u_1] = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} u_1(\xi) dS_\xi = |\eta = \frac{\xi - x}{t}, dS_\xi = t^2 dS_\eta| =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|} u_1(x + t\eta) dS_\eta,$$

откуда следует, что

$$M[u_1] \in C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0) \; M[u_1]|_{t=0} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial M[u_1]}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|} u_1(x+t\eta) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|} (\nabla_\xi u_1(\xi), \eta)|_{\xi = x+t\eta} dS_\eta =$$

$$= \frac{1}{t} M[u_1] + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \left(\nabla_\xi u_1(\xi), \frac{\xi - x}{t} \right)) dS_\xi = \tag{4.4}$$

$$= \frac{1}{t} M[u_1] + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \frac{\partial u_1}{\partial v_\xi} dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{t} M[u_1] + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi.$$

Из первого равенства (4.4) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \; M[u_1]|_{t=0} = u_1(x).$$

Кроме этого, из последнего равенства (4.4) выводим, что

$$\frac{\partial^2 M[u_1]}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2} M[u_1] + \frac{1}{t} \frac{\partial M[u_1]}{\partial t} - \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi =$$

$$= -\frac{1}{t^2} M[u_1] + \frac{1}{t^2} M[u_1] + \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta u_1 d\xi + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi = |\xi = x + t\eta| = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta_x (x+t\eta) dS_\eta =$$

$$= \Delta_x \left(\frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta_x (x+t\eta) dS_\eta \right) = \Delta_x M[u_1],$$

то есть $M[u_1]$ - решение задачи Коши (4.3).

2. Пусть $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Покажем, что

$$W(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} M[u_0]$$

является классическим решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} W_{tt} = \Delta W, x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ W|_{t=0} = u_0(x), \\ \left.\dfrac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

На предыдущем шаге мы установили, что $\left.\dfrac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$, а также

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M[u_0] = \Delta M[u_0] = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta_x u_0(x + t\eta) dS_\eta,$$

откуда следует, что $\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} M[u_0]\right)\right|_{t=0} = 0.$

Осталось убедиться, что $\dfrac{\partial}{\partial t} M[u_0]$ - решение однородного волнового уравнения.

Заметим прежде всего, что в силу условия $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, имеем, что $M[u_0] \in C^3(t > 0) \cap C^2(t \geq 0)$.

Воспользуетмся еще раз равенствами, полученными на предыдущем шаге. Получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} M[u_0]\right) = \frac{\partial}{\partial t} \Delta M[u_0] = \Delta \frac{\partial}{\partial t} M[u_0].$$

Теорема доказана. □

Существование решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$. Неоднородный случай

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} V_{tt} = \Delta V + f(x,t), x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ V|_{t=0} = 0, \\ V_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

Теорема 4.6. *Пусть $f(x,t)$ - функция, определенная на $\mathbb{R}^3 \times \{t \geq 0\}$, такая, что $D_x^\alpha f \in C(t \geq 0)$ для любого мультииндекса α, $0 \geq |\alpha| \geq 2$. Тогда классическим решением задчи Коши (4.6) является функция*

$$V(x,t) = \int\limits_0^t M[f](x, t - \tau, \tau) d\tau,$$

где

$$M[f](x,t,\tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|=t} f(\xi, \tau) dS_\xi.$$

Доказательство. Заметим, что

$$M[f](x,t,\tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} f(x+t\eta,\tau)dS_\eta.$$

Поэтому, $M[f](x,0,\tau)=0$ для любого $x \in \mathbb{R}^3$ и $\tau \geq 0$.
Имеем

$$V(x,t) = \int\limits_0^t \frac{t-\tau}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} f(x+(t-\tau)\eta,\tau)dS_\eta d\tau,$$

и, следовательно, $V(x,0)=0$.

Найдем производную по переменной t функции $V(x,t)$. Получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} = M[f](x,t-\tau,\tau)|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial M[f]}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} M[f](x,t-\tau,\tau)d\tau.$$

Отсюда выводим, что $\left.\dfrac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.
Осталось убедиться, что $V(x,t)$ является решением уравнения $V_{tt} = \Delta V + f(x,t)$.

Имеем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \left.\frac{\partial}{\partial t} M[f](x,t-\tau,\tau)\right|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M[f](x,t-\tau,\tau)d\tau. \tag{4.7}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} M[f](x,t-\tau,\tau) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} f(x+(t-\tau)\eta)sD_\xi + \frac{(t-\tau)}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla_\xi f(\xi,\tau),\eta))|_{\xi=x+(t-\tau)\eta} dS_\eta,$$

получим

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} M[f](x,t-\tau,\tau)\right|_{\tau=t} = f(x,t). \tag{4.8}$$

Итак, из (4.7), (4.8) вытекает

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = f(x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M[f](x,t-\tau,\tau)d\tau. \tag{4.9}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{(t-\tau)}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla_\xi f(\xi,\tau),\eta))|_{\xi=x+(t-\tau)\eta} dS_\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} \frac{\partial f \xi,\tau}{\partial \nu} dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) d\xi,$$

где ν - вектор единичной нормали к границе шара $|x-\xi|<t-\tau$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} M[f](x,t-\tau,\tau) = \frac{1}{t-\tau} M[f](x,t-\tau,\tau) + \int\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) d\xi \cdot \frac{1}{4\pi(t-\tau)}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M[f](x,t-\tau,\tau) = -\frac{1}{(t-\tau)^2} M[f](x,t-\tau,\tau) + \frac{1}{t-\tau}\frac{\partial}{\partial t} M[f](x,t-\tau,\tau) -$$

$$-\frac{1}{4\pi(t-\tau)^2} \int\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) d\xi + \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) dS_\xi =$$

$$= -\frac{1}{(t-\tau)^2} M[f](x,t-\tau,\tau) +$$

$$+\frac{1}{(t-\tau)} \left(\frac{1}{(t-\tau)} M[f](x,t-\tau,\tau) + \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) d\tau \right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) d\xi \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} \Delta_\xi f(\xi,\tau) dS_\xi =$$

$$= \frac{(t-\tau)}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta_x f(x+(t-\tau)\eta,\tau) dS_\eta =$$

$$= \Delta_x \left(\frac{(t-\tau)}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} f(x+(t-\tau)\eta,\tau) dS_\eta \right) =$$

$$= \Delta_x M[f](x,t-\tau,\tau).$$

Отсюда, из формулы (4.9) и из определения функции V заключаем, что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = f(x,t) + \Delta_x \int\limits_0^t M[f](x,t-\tau,\tau) d\tau = f(x,t) + \Delta_x V.$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 4.4. *Рассмотрим задачу* (4.6). *Определим решение* $u = u(x,t,s)$ *задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt}(.,.,s) = \Delta u(.,.,s), x \in \mathbb{R}^n \times (x,\infty), \\ u(.,.,s)|_{t=s} = 0 \\ u_t(.,.,s)|_{t=s} = f(.,s). \end{cases}$$

Положим

$$V(x,t) = \int\limits_0^t u(x,t,s)ds.$$

Принцип Дюмеля утверждает, что так определенная функция будет решением задачи (4.6).
Докажите!

Объединяя эти две теоремы в одну, получим, что доказана

Формула Кирхгофа

Теорема 4.7. *Предположим, что* $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *и* f *- функция, определенная на* $\mathbb{R}^3 \times (t \geq 0)$, *такая, что* $D_x^\alpha f \in C(t \geq 0)$ *для любого мультииндекса* α, $0 \leq |\alpha| \leq 2$. *Тогда функция*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} u_0(\xi)dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} u_1(\xi)dS_\xi +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)}\int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} f(\xi,\tau)dS_\xi d\tau \qquad (4.10)$$

является классическим решением здачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f, x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \\ u_t|_{t=0} = u_1(x). \end{cases} \qquad (4.11)$$

Формула (4.11) также называется формулой Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5

Формула Пуассона

Рассмотрим задачу Коши (3.8), (3.9) в случае $n = 2$. При этом мы будем предполагать, что имеем дело с задачей для $n = 3$, в которой третья пространственная переменная жз не участвует в начальных условиях и в правой части уравнения. Действительно, предположив, что $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ - решение задачи (3.8), (3.9) при $n = 2$, получим, что функция $\widetilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv u(x_1, x_2, t)$ - решение задачи

$$\widetilde{u}_{tt} - \Delta\widetilde{u} = \widetilde{f}, x \in \mathbb{R}^3, t > 0,$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{u}_0,$$
$$\widetilde{u}_t|_{t=0} = \widetilde{u}_1,$$

где $\widetilde{f} \equiv f(x_1, x_2, t)$, $\widetilde{u}_0 \equiv u_0(x_1, x_2)$, $\widetilde{u}_1 \equiv u_1(x_1, x_2)$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$.
Согласно формуле Кирхгофа, имеем

$$u(x,t) = \widetilde{u}(\overline{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|\overline{x}-\xi|=t} \widetilde{u}_0(\xi)dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|\overline{x}-\xi|=t} \widetilde{u}_1(\xi)dS_\xi +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)}\int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} \widetilde{f}(\xi,\tau)dS_\xi d\tau, \tag{5.1}$$

здесь dS_ξ - двумерная поверхностная мера на сфере $|x - \xi| = t$. Учитывая, что $\cos\phi dS_\xi = d\xi_1 d\xi_2$, где $d\xi_1 d\xi_2$ - элемент площади на круге с центром в точке x радиуса 1, лежащий на плоскости $x_3 = 0$, ϕ - угол, между нормалью к сфере в точке ξ и осью x_3 - нормалью к плоскости $x_3 = 0$.
Принимая во внимание, что

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}{t},$$

а также то, что в каждую точку круга проецируется две точки сферы (с верхней и нижней полусфер), получим, что формулу (5.1) можем переписать в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{u_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - (x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2}} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{u_0(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - (x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2}}\right) + \tag{5.2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$+\int\limits_0^t \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-\tau} \frac{f(\xi_1,\xi_2,\tau)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}d\tau.$$

Формула (5.2) является формулой Пуассона для решения двумерной задачи Коши для волнового уравнения.
Метод, которым мы нашли решение этой задачи (а других решений нет в силу теоремы единственности классического решения) называется методом спуска - зная решение для $n = 3$ мы нашли его для $n = 2$.
Итак, доказана

Теорема 5.8. *Пусть $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, f - определена на $\mathbb{R}^2 \times (t \geq 0)$ и $D_x^\alpha f \in C(t \geq 0)$ для любого мультииндекса α, такого, что $0 \leq |\alpha| \leq 2$.*
Тогда решение задачи Коши (3.8), (3.9) при $n = 2$ задается формулой (5.2) и других классических решений нет.

Формула Даламбера

Упражнение 5.6. *Докажите методом спуска формулу Даламбера, а именно, докажите утверждение*

Теорема 5.9. *Пусть $f \in C^1(t \geq 0)$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$.*
Тогда классическим решением задачи Коши (3.8), (3.9) при $n = 1$ является функция

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) называется формулой Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения при $n = 1$.

Процесс распространения волн в пространстве и на плоскости

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = \Delta u, x \in \mathbb{R}^3, t > 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^3,$$
$$u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^3,$$

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ и $\operatorname{supp} u_0 = \operatorname{supp} u_1 = \overline{\Omega}$. Рассмотрим точку $x_0 \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$. Очевидно, что $u(x_0, 0) = 0$.

Пусть $\delta = \rho(x_0, \overline{\Omega})$ - кратчайшее расстояние от точки x_0 до множества $\overline{\Omega}$. Поэтому, если $0 \leq t \leq \delta$, то в силу формулы Кирхгофа, $u(x_0, t) = 0$, то есть точка x_0 находится в состоянии покоя - волна еще не дошла до нее. Начиная с момента $t = \delta$ сфера

$|x_0 - \xi| = t$ начинает пересекать носитель начальных данных и это продолжается до момента $t = \delta = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \rho(x_0, x)$. То есть при $\delta < t < k$, через точку x_0 проходит волна, точка находится в состоянии возбуждения. Следовательно, $u(x_0, t) \neq 0$ при $t \in (\delta, k)$.

Момент $t = \delta$ рассматривают как момент времени, когда в точку x_0 приходит волна, а момент $t = k$ - как момент, в который из точки x_0 уходит волна. Говорят, что при $t = \delta$ через точку x_0 проходит передний фронт волны, а при $t = k$ через точку x_0 проходит задний фронт волны.

Если же $t \geq k$, то точка x_0 вернулась опять в состояние покоя, то есть $u(x_0, t) = 0, t \geq k$.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке x_0 пространства $\mathbb{R}^3$ действие, локализованное во времени, при этом имеет место распространение волны с резко очерченными передним и задним фронтами (принцип Гюйгенса). Благодаря резко очерченному заднему фронту звуковое воздействие на уши мгновенно прекращается сразу же после того, как волна прошла.

Оказывается, что передний фронт всегда резко очерчен, но задний фронт резко очерчен только в пространствах размерности $n = 2k + 1$, k - натуральное.

Рассмотрим мгновенную пространственную картину возмущения в некоторый момент времени t_0. Пусть $\Omega = |x| < R$. Точки x пространства находятся в состоянии покоя, если $|x| - t_0 \geq R$ или $t_0 - |x| \geq R$, то есть точки, для которых $t_0 - R \leq |x| \leq R + t_0$ находятся в состоянии возбуждения.

В этом случае множество точек сферы $|x| = R + t_0$ является передним фронтом волны, а множество точек сферы $|x| = t_0 - R$ - задним фронтом волны.

Рассмотрим теперь случай $n = 1$. Принципиальное отличие двумерного случая от трехмерного заключается в том, что интегрирование в формуле Пуассона (5.2) идет по всему двумерному кругу $|x - \xi| < t$. Поэтому решение $u(x_0, t) = 0$ для $0 \leq t \leq \delta$. Но как только $t > \delta$ круг, по которому ведется интегрирование в формуле Пуассона пересекается с носителем начальных данных задачи и, следовательно, $u(x_0, t) \neq 0$ при всех $t > \delta$.
Итак, при $t = \delta$ через точку x_0 проходит передний фронт волны, а заднего фронта волны нет!

Подводя итог при $n = 2k$ можем сказать, что влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. Принцип Гюйгенса не имеет места.

Понятие обобщенного решения волнового уравнения

Будем рассматривать однородное волновое уравнение

$$u_{tt} = \Delta u \tag{5.4}$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 5.14. *Функцию $u(x,t) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ назовем обобщенным решением волнового уравнения (5.4) во всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, если существует последовательность классических (класса $C^2(\mathbb{R}^{n+1})$) решений $u_k(x,t)$ такая, что*

$$||u_k - u||_{L_2(\Omega)} \to 0, k \to \infty,$$

где Ω - произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$.

При решении задач полезным является другое определение обобщенного решения волнового уравнения.

Определение 5.15. *Функция $u(x,t) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ называется обобщенным решением волнового уравнения (5.4) в $\mathbb{R}^{n+1}$, если*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} u(\phi_{tt} - \Delta\phi)dxdt = 0, \tag{5.5}$$

где ϕ - произвольная финитная функция, то есть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Замечание 5.5. *Если $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, то u - обобщенное решение волнового уравнения в смысле определения 5.15 (в смысле определения 5.14, u - очевидно является обобщенным решением).*
Действительно, интегрируя по частям получим

$$\int\limits_{\Omega} u(\phi_{tt} - \Delta\phi)dxdt = -\int\limits_{\Omega} u_t\phi_t dxdt + \int\limits_{\partial\Omega} u\phi_t\nu_t ds +$$

$$+\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla\phi dxdt - \int\limits_{\partial\Omega} u\partial_\nu\phi ds =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (u_{tt} - \Delta u)\phi dxdt = 0,$$

где $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ - произвольная финитная в Ω функция, ν - внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$.

Имеет место

Теорема 5.10. *Определения 5.14 и 5.15 эквивалентны.*

Прежде чем доказывать теорему 5.10, напомним понятие средней функции. Пусть

$$w(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1),$$
$$w(t) = w(-t),$$
$$w(t) \geq 0,$$
$$w(t) = 0, |t| \geq 1$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(|x|)dx = 1. \tag{5.6}$$

Примером такой функции w является следующая функция

$$w(t) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-t^2}}, |t| \leq 1, \\ 0, |t| \geq 1, \end{cases}$$

где постоянная C определяется из условия (5.6).

Положим

$$w_h(x) = h^{-n} w\left(\frac{|x|}{h}\right), h > 0.$$

Функция w_h, называется ядром усреднения. Легко видеть, что

$$w_h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), w_h \geq 0,$$
$$w_h(x) = 0, |x| \geq h,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(x)dx = 1.$$

Пусть $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Определим функцию

$$u_h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(x-y)u(y)dy, \tag{5.7}$$

называемую средней функцией или усреднением функции u с радиусом усреднения h.

Заметим, что интеграл в (5.7) берется по шару с центром в точке x радиуса h. Кроме того, так как $|D^{\alpha}w_h| \leq \dfrac{C_0}{h^{n+|\alpha|}}$, то интеграл можно сколько угодно раз дифференцировать по x и

$$D^{\alpha}u_h = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\alpha} w_h(x-y)u(y)ds.$$

Если функция $u(x)$ определена в области Ω и $u \in L_1(\Omega)$, то при определении средней функции от $u(x)$ будем полагать $u = 0$ в $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

Свойства средних функций

Лемма 5.2. *Пусть $u \in L_2(\Omega), \Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$||u_h||_{L_2(\Omega)} \leq ||u||_{L_2(\Omega)},$$

$$||u_h - u||_{L_2(\Omega)} \to 0, h \to 0.$$

Пусть $u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любой ограниченной области Ω имеем

$$||u_h||_{L_2(\Omega_h)} \leq ||u||_{L_2(\Omega_h)},$$

$$||u_h - u||_{L_2(\Omega_h)} \to 0, h \to 0,$$

где $\Omega_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \overline{\Omega}) \leq h\}$.

Доказательство. Учитывая, что

$$u_h = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)u(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sqrt{w_h(|x-y|)}\sqrt{w_h(|x-y|)}u(y)dy \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)dy\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)u^2(y)dy\right)^{1/2}$$

Отсюда выводим

$$\int\limits_{\Omega} u_h^2 dx \leq \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)u^2(y)dydx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \left(\int\limits_{\Omega} w_h(|x-y|)dx\right) u^2(y)dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)dx\right) u^2(y)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^2(y)dy = \int\limits_{\Omega} u^2(y)dy.$$

Докажем, что

$$||u_h - u||_{L_2(\Omega)} \to 0, h \to 0.$$

Так как $u \in L_2(\Omega)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $v \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $||u - x||_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Имеем

$$||u_h - u||_{L_2(\Omega)} \leq ||u_h - v_h||_{L_2(\Omega)} + ||v_h - v||_{L_2(\Omega)} + ||v - u||_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + ||v_h - v||_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая, что

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$v_h - v = \int\limits_{|x-y|<h} w_h(|x-y|)(v(y)-v(x))dy,$$

получим

$$|v_h(x)-v(x)| \leq \max_{x,y\in\overline{\Omega}:|x-y|\leq h} |v(y)-v(x)| = \alpha(h) \to 0, h \to 0.$$

Итак, выводим

$$\int\limits_{\Omega} (v_h - v)^2 dx \leq \alpha^2(h)|\Omega| \to 0, h \to 0.$$

Пусть теперь $u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что для любой ограниченной области Ω справедливо неравенство $||u_h||_{L_2(\Omega)} \leq ||u||_{L_2(\Omega_h)}$. Действительно, так как

$$\int\limits_{\Omega} u_h^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} \int\limits_{|x-y|\leq h} w_h(|x-y|)u^2(y)dydx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{|z|\leq h} w_h(|z|)u^2(x+z)dzdx = \int\limits_{|z|\leq h} w_h(|z|) \left(\int\limits_{\Omega} u^2(x+z)dx \right) dz \leq$$

$$\leq \int\limits_{|z|\leq h} w_h(|z|) \int\limits_{\Omega_h} u^2(\tau)d\tau dz = \int\limits_{\Omega_h} u^2(\tau)d\tau.$$

Пусть Ω - произвольная ограниченная область и Ω_1 - ограниченная область, такая, что $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $v \in C_0^\infty(\Omega_1)$, что $||u-v||_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon$. Поэтому имеем

$$||u-u_h||_{L_2(\Omega)} \leq ||u-v||_{L_2(\Omega_1)} + ||v-v_h||_{L_2(\Omega)} + ||v_h-u_h||_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \varepsilon + ||v-v_h||_{L_2(\Omega)} + ||u-v||_{L_2(\Omega_h)} \leq 2\varepsilon + ||v-v_h||_{L_2(\Omega_1)}.$$

Здесь мы предположили, что h настолько мало, $\overline{\Omega}_h \subset \Omega_1$.
Далее доказательство повторяет рассуждения, приведенные ниже. □

Лекция 6

Перейдем к доказательству Теоремы 5.10.

Доказательство. Пусть $u_k \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ - последовательность классических решений волнового уравнения, такая, что

$$||u_k - u||_{L_2(\Omega)} \to 0, k \to \infty,$$

для произвольной ограниченной области Ω. Тогда для произвольной финитной функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} u_k(\phi_{tt} - \Delta\phi)dxdt = 0.$$

Учитывая, что интеграл в левой части последнего равенства берется по ограниченной области, содержащей носитель функции ϕ, и переходя к пределу в этом равенстве при $k \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\Omega} u(\phi_{tt} - \Delta)dxdt = 0,$$

то есть u - обобщенное решение в смысле определения 5.15.

Пусть теперь u - обобщенное решение в смысле второго определения. Покажем, что оно является обобщенным решением и в смысле определения 5.14. Рассмотрим средние функции от $u(x,t)$

$$u_h(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} w_h(x-y, t-\tau)u(y,\tau)dyd\tau.$$

Покажем, что $u_h(x,t)$ - классическое решение волнового уравнения. Действительно,

$$(u_h)_{tt} - \Delta u_h = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \left((w_h)_{tt} - \Delta_x w_h\right) u(y,\tau)dyd\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \left((w_h)_{\tau\tau} - \Delta_y w_h\right) u(y,\tau)dyd\tau = 0,$$

так как u - обобщенное решение в смысле определения 5.15.
По доказанной лемме имеем, что $||u_h - u||_{L_2(\Omega)} \to 0, h \to 0$.

$\square$

Понятие обобщенной производной в смысле Соболева

Пусть $f \in C^1(\Omega)$, $g \in C^1_0(\Omega)$. Тогда из формулы Стокса выводим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}(fg)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\nu_j ds = 0.$$

Следовательно, имеем

$$\int\limits_{\Omega} f_{x_j} g dx = -\int\limits_{\Omega} f g_{x_j} dx. \tag{6.1}$$

Аналогично, если $f \in C^\infty(\Omega)$, $g \in C^\infty_0(\Omega)$, то

$$\int\limits_{\Omega} f D^\alpha g dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} g D^\alpha f dx. \tag{6.2}$$

Равенства (6.1), (6.2) положены в основу определения обобщенной производной в смысле Соболева.

Определение 6.16. *Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс. Функция $w_\alpha \in L_{2,loc}(\Omega)$ называется обобщенной производной вида $D^\alpha u$ функции $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ в смысле Соболева, если для произвольной функции $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ справедливо равенство (интегральное тождество)*

$$\int\limits_{\Omega} w_\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u D^\alpha \phi dx, \tag{6.3}$$

Заметим, что Ω - произвольная область $\mathbb{R}^n$, в том числе и неограниченная. Для обобщенной производной сохраняют обычное обозначение производной, то есть полагают $w_\alpha = D^\alpha u$.

Единственность обобщенной производной

Теорема 6.11. *Функция $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ не может иметь двух разных обобщенных производных в смысле Соболева.*

Доказательство. Пусть w_α и $\widetilde{w}_\alpha$ - две обобщенных производных:

$$\int\limits_{\Omega} w_\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u D^\alpha \phi dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \widetilde{w}_\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u D^\alpha \phi dx.$$

Следовательно, для любой функции $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ имеем

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\int\limits_{\Omega}(w_\alpha - \widetilde{w}_\alpha)\phi dx = 0. \tag{6.4}$$

Пусть Ω_1 - ограниченная область, такая , что $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Тогда из (6.4) выводим, что для произвольной функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega_1}(w_\alpha - \widetilde{w}_\alpha)\phi dx = 0. \tag{6.5}$$

Так как $C_0^\infty(\Omega_1)$ всюду плотно в $L_2(\Omega_1)$ и учитывая, что $w_\alpha - \widetilde{w}_\alpha \in L_2(\Omega_1)$, получим, что существует последовательность $\{\phi_k \in C_0^\infty(\Omega_1)\}$, такая, что

$$||\phi_k - (w_\alpha - \widetilde{w}_\alpha)||_{L_2(\Omega_1)} \to \infty, k \to \infty.$$

Поэтому, переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве

$$\int\limits_{\Omega_1}(w_\alpha - \widetilde{w}_\alpha)\phi_k dx = 0,$$

получим

$$\int\limits_{\Omega_1}(w_\alpha - \widetilde{w}_\alpha)^2 dx = 0.$$

Следовательно, $w_\alpha = \widetilde{w}_\alpha$ п.в. в Ω_1. В силу произвольности Ω_1 получаем, что $w_\alpha = \widetilde{w}_\alpha$ п.в. в Ω. □

Пространства Соболева

Определение 6.17. *Множество функций u из $L_2(\Omega)$, имеющих все обобщенные производные в смысле Соболева вида $\partial x_j u, j = 1, \ldots, n$ из $L_2(\Omega)$, называется пространством Соболева $H^1(\Omega)$. Итак*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \exists \partial x_j u, -\textit{обобщенные производные в смысле Соболева и}$$

$$\partial x_j u \in L_2(\Omega), j = 1, \ldots, n\}$$

Очевидно, что $H^1(\Omega)$ - линейное пространство. Введем скалярное произведение на $H^1(\Omega)$ и соответствующую ему норму, полагая для произвольных элементов $u, v \in H^1(\Omega)$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega}(uv + \nabla u \nabla v)dx\right)^{1/2}, \tag{6.6}$$

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega}(u^2 + |\nabla u|^2)dx\right)^{1/2}, \tag{6.7}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 6.12. *Пространство $H^1(\Omega)$ - гильбертово.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно установить полноту $H^1(\Omega)$ в порожденной скалярным произведением (6.6) норме (6.7).

Пусть $\{u_k\}$ - последовательность Коши, то есть

$$||u_k - u_m||_{H^1(\Omega)} \to 0, k, m \to \infty.$$

Отсюда из определения нормы (6.7) следует, что

$$||u_k - u_m||_{L_2(\Omega)} \to 0,$$

$$||\partial_{x_j} u_k - \partial_{x_j} u_m||_{L_2(\Omega)} \to 0, k, m \to 0,$$

где $j = 1, \ldots, n$

В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ имеем, что существуют функции $u \in L_2(\Omega)$ и $w_j \in L_2(\Omega), j = 1, \ldots, n$, такие, что

$$||u_k - u||_{L_2(\Omega)} \to 0, k \to \infty,$$

$$||\partial_{x_j} u_k - w_j||_{L_2(\Omega)} \to 0, k \to \infty.$$

Докажем, что $w_j = \partial_{x_j} u$.
Действительно, из определения обобщенной производной в смысле Соболева, выводим

$$\int\limits_{\Omega} u_k \partial_{x_j} \phi dx = -\int\limits_{\Omega} \partial_{x_j} u_k \phi dx. \tag{6.8}$$

Переходя к пределу в равенстве (6.8) при $k \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\Omega} u \phi_{x_j} dx = -\int\limits_{\Omega} w_j \phi dx,$$

откуда в силу определения обобщенной производной, следует, что $w_j = \partial_{x_j} u$.

□

Определение 6.18. *Замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$ назовем пространством Соболева $H_0^1(\Omega)$.*

Итак, из определения $H_0^1(\Omega)$ следует, что $u \in H_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность функций $u_m \in C_0^\infty(\Omega), (m = 1, 2, \ldots)$, такая, что

$$||u_m - u||_{H^1(\Omega)} \to 0, m \to \infty.$$

Замечание 6.6. *Заметим, что $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ (позже мы убедимся, что $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$ и, являясь замкнутым подпространством гильбертова пространства $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ само является гильбертовым пространством.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Примеры

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть

$$u(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq `1, \\ 1, 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Имеет ли $u(x)$ обобщенную производную в смысле Соболева первого порядка на отрезке $[0, 2]$?
Пусть $\phi \in C_0^\infty[0, 2]$. Тогда

$$\int\limits_0^2 u\phi' dx = -\int\limits_0^1 \phi dx = -\int\limits_0^2 \chi_{[0,1]}\phi dx,$$

где χ_ω - характеристическая функция множества w. Отсюда следует, что на отрезке $[0, 2]$ обобщенная производная в смысле Соболева имеет вид
$u' = 1, x \in [0, 1], u'0, x \in (1, 2]$.

2. Пусть

$$u(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1, \\ 2, 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Покажем, что не существует обобщенной производной u' в смысле Соболева.
Действительно, пусть $\phi \in C_0^\infty(0, 2)$. Тогда имеем

$$\int\limits_0^2 u\phi' dx = \int\limits_0^1 x\phi' dx + 2\int\limits_1^2 \phi' dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 \phi dx - \phi(1).$$

Если бы существовала обобщенная производная u' в смысле Соболева, то верно было бы равенство

$$\int\limits_0^2 u'\phi dx = -\int\limits_0^1 \phi dx - \phi(1) \tag{6.9}$$

для произвольной функции $\phi \in C_0^\infty(0, 2)$. Возьмем в (7.9) в качестве ϕ последовательность $\phi_k \in C_0^\infty(0, 2), \phi_k(1) = 1$ для любого индекса $j = 1, 2, \ldots, \operatorname{supp} \phi_k = [1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}]$.
Тогда с одной стороны

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^2 \phi_k u' dx = 0,$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а с другой
$$\lim_{k\to\infty}\{-\int_0^1 \phi_k dx - \phi_k(1)\} = -1.$$
Полученное противоречие доказывает, что у данной функции нет обобщенной производной в смысле Соболева первого порядка.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7

Пример для H^1

3. Рассмотрим функцию $|x|^\varepsilon$ в единичном шаре $\Omega = \{|x| < 1\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$. При каких значениях ε эта функция принадлежит пространству $H^1(\Omega)$?

Легко видеть, что при $\varepsilon > -n/2$ функция $|x|^\varepsilon \in L_2(\Omega)$. Действительно,

$$\int\limits_\Omega |x|^{2\varepsilon} dx = w_n \int\limits_0^1 r^{2\varepsilon} r^{n-1} dr < \infty$$

тогда и только тогда, когда $2\varepsilon + n > 0$. Аналогично, имеем

$$\int\limits_\Omega |\nabla(|x|^\varepsilon)|^2 dx = w_n \int\limits_0^1 |(r^\varepsilon)'_r|^2 r^{n-1} dr < \infty$$

тогда и только тогда, когда $2\varepsilon + n - 2 > 0$.
Заметим, что при $n \geq 3$ параметр ε может принимать и отрицательные значения!

Осталось убедиться, что при $\varepsilon > -n/2 + 1$ формально вычисленная производная $\partial_{x_j}(|x|^\varepsilon)\phi dx = \int\limits_\Omega |x|^\varepsilon \partial_{x_j} \phi dx$ является обобщенной производной в смысле Соболева, то есть для произвольной функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ должно быть выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega \partial_{x_j}(|x|^\varepsilon)\phi dx = -\int\limits_\Omega |x|^\varepsilon \partial_{x_j} \phi dx$$

для произвольной функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Действительно, обозначим через B_δ^0 шар с центром в начале координат и радиуса δ. Тогда

$$\int\limits_\Omega |x|^\varepsilon \partial_{x_j} \phi dx = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus B_\delta^0} |x|^\varepsilon \partial_{x_j} \phi dx =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \{- \int\limits_{\Omega \setminus B_\delta^0} \partial_{x_j}(|x|^\varepsilon) \phi dx + \int\limits_{\partial B_\delta^0} |x|^\varepsilon \partial_{x_j} \nu_j \phi ds\} =$$

$$= -\int\limits_\Omega \partial_{x_j}(|x|^\varepsilon)\phi dx,$$

так как при $\varepsilon > -n/2 + 1$ имеем

$$|\delta^\varepsilon \int\limits_{\partial B_\delta^0} \nu_j \phi ds| \leq C\delta^{\varepsilon + n - 1} \to 0, \delta \to 0.$$

Формула интегрирования по частям

4. *Формула интегрирования по частям.*

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega u v_{x_j} dx = -\int\limits_\Omega u_{x_j} v dx. \tag{7.1}$$

Действительно, пусть v_k - последовательность функций из пространства $C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $||v_k - v||_{H_0^1(\Omega)} \to 0, k \to \infty$.
Тогда из определения обобщенной производной в смысле Соболева имеем

$$\int\limits_\Omega u (v_k)_{x_j} dx = -\int\limits_\Omega u_{x_j} v_k dx.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем равенстве, получим (7.1).

Неравенство Фридрихса

5. *Неравенство Фридрихса.*

Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$||u||_{L_2(\Omega)} \le C(\Omega)||\nabla u||_{L_2(\Omega)}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$.
Предположим, что $\overline{\Omega} \subset \Pi_a = \{x| - a_j < x_j < a_j, j = 1, \dots, n\}$, $a = (a_1, \dots, n)$, $a_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, $a_1 = \min\{a_1, \dots, n\}$.
Положим $u \equiv 0$ в $\Pi_a \backslash \overline{\Omega}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, выводим

$$u(x) = \int\limits_{-a_1}^{x_1} u_{y_1}(y_1, \hat{x}) dy_1,$$

$$\hat{x} = (x_2, \dots, x_n).$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства и применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$u^2(x) \le (x_1 + a_1) \int\limits_{-a_1}^{a_1} u_{x_1}^2 dx_1.$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по Π_a. В результате этого будем иметь

$$\int\limits_\Omega u^2 dx = \int\limits_{\Pi_a} urdx \le 2a_1^2 \int\limits_{\Pi_a} u_{x_1}^2 dx \le 2a_1^2 \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{7.3}$$

Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда существует последовательность $\{u_m\}$ функций из $C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $||u_m - u||_{H^1(\Omega)} \to 0, m \to \infty$. Для каждой функции u_m имеем неравенство (7.3).

После перехода к пределу при $m \to \infty$ в этом неравенстве, получим (7.2). $\square$

Из неравенства Фридрихса следует, что $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, но $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

Действительно, $u \equiv 1 \in H^1(\Omega)$, но $1 \notin H_0^1(\Omega)$.

Кроме того, из неравенства Фридрихса вытекает, что на пространстве $H_0^1(\Omega)$ можно ввести скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению, заданному формулой (6.6):

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx, \tag{7.4}$$

и соответствующая ему норма имеет вид

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} = ||\nabla u||_{L_2(\Omega)}. \tag{7.5}$$

Для функции u, заданной почти всюду (п.в.) в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ (т.е. считаем, что функции равны, если они совпадают в Ω п.в.), нельзя однозначно сказать, что такое значение u на $(n-1)$ - мерной поверхности $S \subset \overline{\Omega}$, поскольку $mesS = 0$, то функция может иметь на S произвольные значения. В частности, для такой функции не определено однозначно значение u на границе области, т.е. на $\partial\Omega$.

Однако, для функции $u \in L_2(\Omega)$ в определенном смысле можно говорить о ее значении на некоторых $(n-1)$ - мерных поверхностях (см. теорему Фубини).

Для произвольной функции $u \in C(\overline{\Omega})$ ее значение на поверхности S понимается естественным образом - как поточечное ограничение u на S, обозначаемое $u|_S$. Функцию $u|_S$ будем называть следом функции $u \in C(\overline{\Omega})$ на $(n-1)$ - мерной поверхности S.

Покажем, что для произвольной функции $u \in H_0^1(\Omega)$ можно говорить о ее следе на $(n-1)$ - мерной гиперповерхности, в частности, имеет смысл говорить о ее значении на границе области Ω.

Предположим, что $S = \{x : x_j = C = const\} \cap \Omega \neq \emptyset$. Имеет место

Теорема 7.13. *Если последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, фундаментальна в пространстве $H_0^1(\Omega)$, то она фундаментальна в $L_2(S)$.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $S = \{x : x_1 = x_1^0\} \cap \Omega \neq \emptyset$ и $\overline{\Omega} \subset \Pi_A = \{x : |x_j| < A, j = 1, \ldots, n$. Продолжим функции из $C_0^\infty(\Omega)$ нулем на

$\Pi_A \backslash \Omega$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница и неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\left(u_m(x_1^0, \hat{x}) - u_p(x_1^0, \hat{x})\right)^2 = \left(\int\limits_{-A}^{x_1^0} \partial_{x_j}(u_m(x) - u_p(x))dx_1 \right)^2 \leq$$

$$\leq 2A \int\limits_{\Pi_A} |\nabla(u_m - u_p)|^2 dx_1. \tag{7.6}$$

Интегрируя неравенство (7.6) по S, получим

$$\int\limits_S (u_m - u_p)^2 \, d\hat{x} \leq 2A \int\limits_{\Pi_A} |\nabla(u_m - u_p)|^2 dx,$$

откуда следует, что

$$||u_m - u_p||_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{2A}||u_m - u_p||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{7.7}$$

Теорема доказана. □

Пусть $u \in H^1(\Omega)$. Положим $u \equiv 0$ вне Ω.
Напомним, что средней функцией нзывается функция вида

$$u_h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)u(y)dy,$$

где $w_h(|x|)$ - ядро усреднения. Имеет место

Лемма 7.3. *Пусть $u \in L_2(\Omega)$ имеет обобщенную в смысле Соболева производную вида $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$. Тогда*

1) $(D^\alpha u)_h(x) = D^\alpha u_h(x)$ для любой точки $x \in \Omega$ и достаточно малых $h > 0$.

2) $||D^\alpha u_h - D^\alpha u||_{L_2(\Omega')} \to 0, h \to 0$, для любой области Ω', такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Доказательство. 1) Имеем

$$D^\alpha u_h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha w_h(|x-y|)u(y)dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_y^\alpha w_h(|x-y|)u(y)dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_h(|x-y|)D_y^\alpha u(y)dy = (D^\alpha u)_h(x),$$

где h настолько мало, что замкнутый шар $\overline{\Omega_h^x}$ с центром в точке x радиуса h лежит в области Ω.

2) Пусть $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Тогда при $h < \rho = \rho(\Omega', \partial\Omega)$ имеем, что $(D^\alpha u)_h(x) = D^\alpha u_h(x)$, $x \in \Omega'$.
   Из свойств средних функций, доказанных в Лекции 5, следует

$$||D^\alpha u_h - D^\alpha u||_{L_2(\Omega')} = ||(D^\alpha u)_h - D^\alpha u||_{L_2(\Omega')} \to 0, h \to 0.$$

□

Имеет место

Теорема 7.14. *Пространство $C^\infty(\overline{\Pi_a})$ всюду плотно в $H^1(\Pi_a)$, где*
$\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < a_j, j = 1, \ldots, n\}$, $a = (a_1, \ldots, a_n), a_j > 0$.

Доказательство. Пусть $u \in H^1(\Pi_a)$.

Тогда $D^\alpha u \in L_2(\Pi_a), |\alpha| \leq 1$.
Так как $C_0^\infty(\Pi_a)$ всюду плотно в $L_2(\Pi_a)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $\phi_\alpha \in C_0^\infty(\Pi_a)$, такая, что

$$||D^\alpha u - \phi_\alpha||_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon, |\alpha| \leq 1.$$

Построим функцию $F_\sigma(x) = u\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, $\sigma > 1$.
Легко видеть, что $F_\sigma(x) \in H^1(\Pi_{\sigma a})$.

Учитывая, что $\sigma > 1$, имеем $\overline{\Pi_a} \subset \Pi_{\sigma a}$.

Применяя свойство средних функций, выводим

$$||(F_\sigma)_h - F_\sigma||_{H^1(\Pi_a)} \to 0, h \to 0,$$

и, следовательно,

$$||D^\alpha (F_\sigma)_h - D^\alpha F_\sigma||_{L_2(\Pi_a)} \to 0, h \to 0, \tag{7.8}$$

где $|\alpha| \leq 1$.
Докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma_0 > 1$, такое, что

$$||D^\alpha F_{\sigma_0} - \phi_\alpha||_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon, |\alpha| \leq 1. \tag{7.9}$$

Заметим, что если (7.9) будет доказано, то утверждение теоремы также будет доказано.

Действительно, из (7.8) следует, что для данного σ_0 и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $h_0 > 0$, что при $h < h_0$

$$||(F_{\sigma_0})_h - F_{\sigma_0}||_{H^1(\Pi_a)} < \varepsilon. \tag{7.10}$$

Принимая во внимание, что $(F_{\sigma_0})_h \in C^\infty(\overline{\Pi_a})$, выводим из (7.9) и (7.10)

$$||(F_{\sigma_0})_h - u||_{H^1(\Pi_a)} \leq ||(F_{\sigma_0})_h - F_{\sigma_0}||_{H^1(\Pi_a)} + ||F_{\sigma_0} - u||_{H^1(\Pi_a)} \leq$$

$$\leq \varepsilon + ||F_{\sigma_0} - \phi_0||_{L_2(\Pi_a)} + ||u - \phi_o||_{L_2(\Pi_a)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} ||(F_{\sigma_0})_{x_j} - \phi_j||_{L_2(\Pi_a)} + ||u_{x_j} - \phi_j||_{L_2(\Pi_a)} < 5\varepsilon.$$

Итак, докажем (8.2). Имеем для $|\alpha| = 0$

$$||F_\sigma - \phi_0||^2_{L_2(\Pi_a)} = \int\limits_{\Pi_a} \left(u\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_0(x)\right)^2 dx \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{\Pi_a} \left(u\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)^2 dx + 2\int\limits_{\Pi_a} \left(\phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_0(x)\right)^2 dx \leq$$

$$\leq 2\sigma^2 ||u - \phi_0||^2_{L_2(\Pi_a)} + 2||\phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_0(x)||^2_{L_2(\Pi_a)}. \tag{7.11}$$

Учитывая, что $\phi_0 \in C^\infty(\overline{\Pi_a})$, и, следовательно, при $\sigma \to 1$ имеем, что

$$||\phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_0(x)||_{L_2(\Pi_a)} \to 0.$$

Поэтому найдется такое $\sigma_0 > 1$, что $||\phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_0(x)||_{L_2(\Pi_a)} \leq \varepsilon$ для произвольного $1 \leq \sigma \leq \sigma_0$.

Отсюда и из (7.8), (7.11) выводим

$$||F_\sigma - \phi_0||_{L_2(\Pi_a)} \leq C_0\varepsilon,$$

где $C_0 = const > 0$.

Аналогично, имеем

$$\int\limits_{\Pi_a} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_j(x)\right)^2 dx \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{\Pi_a} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_j\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)^2 dx + 2\int\limits_{\Pi_a} \left(\phi_j\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \phi_j\right)^2 dx \leq$$

$$\leq \sigma^{n-2} \int\limits_{\Pi_a} \left(\partial_{y_j} u(y) - \phi_j\right)^2 dy + \sigma^n (1 - \sigma^{-1})^2 \int\limits_{\Pi_a} \phi_j^2 dy + 2\varepsilon^2.$$

Принимая во внимание, что $1 - \sigma^{-1} \to 0$ при $\sigma \to 1$, получим, что правая часть последнего неравенства при $1 \leq \sigma \leq \sigma_1$ (существует такое $\sigma_1 > 1$), меньше $C_1\varepsilon$. Это завершает доказательство теоремы. □

Неравенство Пуанкаре

Пусть $u \in H^1(\Pi_a)$, $\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^n, |x_j| < a_j, j = 1, \ldots, n\}$.

Тогда

$$\int\limits_{\Pi_a} u^2 dx \le |\Pi_a|^{-1} \left(\int\limits_{\Pi_a} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{n} (2a_j)^2 \int\limits_{\Pi_a} u_{x_j}^2 dx. \tag{7.12}$$

Доказательство. Пусть $u \in C^\infty(\overline{\Pi_a})$.

Обозначим через $\Pi_1 = \{x : |x_j| < 1/2, j = 1, \ldots, n\}$.

Докажем неравенство (7.12) для гладкой функции u и для Π_1, то есть будем доказывать неравенство

$$\int\limits_{\Pi_1} u^2 dx \le \left(\int\limits_{\Pi_1} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \int\limits_{\Pi_1} |\nabla_x u|^2 dx. \tag{7.13}$$

Возьмем две произвольные точки $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $P_* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, лежащие в Π_1.

Рассмотрим последовательность точек, лежащих в Π_1, в которой каждая последующая точка отличается от предыдущей только в одной координате:

$P_0, P_1 = (x_1^*, x_2^0, \ldots, x_n^0), P_2 = (x_1^*, x_1^*, x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, P_{n-1} = (x_1^*, \ldots, x_{n-2}^*, x_{n-1}^0, x_n^0), P_n = P_*$.

Имеем

$$u(P_0) - u(P_*) = (u(P_0) - u(P_1)) + (u(P_1) - u(P_2)) + \ldots + (u(P_{n-1}) - u(P_*)) =$$

$$= \int\limits_{x_1^*}^{x_1^0} u_{x_1}(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) dx_1 + \int\limits_{x_2^*}^{x_2^0} u_{x_2}(x_1^*, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) dx_2 + \ldots +$$

$$+ \int\limits_{x_n^*}^{x_n^0} u_{x_n}(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, x_n) dx_n.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и воспользуемся неравенством $(a_1 + \ldots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$ (Докажите!). Получим

$$u^2(P_0) + u^2(P_*) - 2u(P_0)u(P_*) \le n \left(\int\limits_{-1/2}^{1/2} u_{x_1}^2 dx_1 + \ldots + \int\limits_{-1/2}^{1/2} u_{x_n}^2 dx_n \right). \tag{7.14}$$

Интегрируем (7.14) сначала по $P_0 \in \Pi_1$, а затем по $P_* \in \Pi_1$, получим (7.13)

$$2\int\limits_{\Pi_1} u^2(x)dx - 2\left(\int\limits_{\Pi_1} u(x)dx\right)^2 \leq n\int\limits_{\Pi_1} |\nabla_x u|^2 dx. \tag{7.15}$$

Делая в неравенстве (7.15) замену переменных $x_j = \frac{y_j}{2a_j}$, $j = 1, \ldots, n$, получим (7.12) для гладких в $\overline{\Pi_a}$ функций.

Для того, чтобы доказать неравенство Пуанкаре для произвольного элемента $u \in H^1(\Pi_a)$, воспользуемся теоремой 7.14.

Пусть $\{u_m\}$ - последовательность функций из пространства $C^\infty(\overline{\Pi_a})$, сходящаяся к элементу u в норме $H^1(\Pi_a)$. Для каждой функции u_m имеем неравенство (7.11):

$$\int\limits_{\Pi_a} u_m^2 dx \leq |\Pi_a|^{-1}\left(\int\limits_{\Pi_a} u_m dx\right)^2 + \frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}(2a_j)^2\int\limits_{\Pi_a}(u_m)_{x_j}^2 dx. \tag{7.16}$$

переходя в неравенстве (7.16) к пределу при $m \to \infty$, получим (7.12) для $u \in H^1(\Pi_a)$. $\square$

След функции из H_0^1 на $(n-1)$-мерной гладкой поверхности

Для функции u, заданной почти всюду (п.в.) в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ (т.е. считаем, что функции равны, если они совпадают в Ω п.в.), нельзя однозначно сказать, что такое значение u на $(n-1)$ - мерной поверхности $S \subset \overline{\Omega}$, поскольку $mesS = 0$, то функция может иметь на S произвольные значения. В частности, для такой функции не определено однозначно значение u на границе области, т.е. на $\partial\Omega$.

Однако, для функции $u \in L_2(\Omega)$ в определенном смысле можно говорить о ее значении на некоторых $(n-1)$ - мерных поверхностях (см. теорему Фубини).

Для произвольной функции $u \in C(\overline{\Omega})$ ее значение на поверхности S понимается естественным образом - как поточечное ограничение u на S, обозначаемое $u|_S$. Функцию $u|_S$ будем называть следом функции $u \in C(\overline{\Omega})$ на $(n-1)$ - мерной поверхности S.

Покажем, что для произвольной функции $u \in H_0^1(\Omega)$ можно говорить о ее следе на $(n-1)$ - мерной гиперповерхности, в частности, имеет смысл говорить о ее значении на границе области Ω.

Предположим, что $S = \{x : x_j = C = const\} \cap \Omega \neq \emptyset$. Имеет место

Теорема 7.15. *Если последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, фундаментальна в пространстве $H_0^1(\Omega)$, то она фундаментальна в $L_2(S)$.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $S = \{x : x_1 = x_1^0\} \cap \Omega \neq \emptyset$ и $\overline{\Omega} \subset \Pi_A = \{x : |x_j| < A, j = 1, \dots, n$. Продолжим функции из $C_0^\infty(\Omega)$ нулем на $\Pi_A \setminus \Omega$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница и неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\left(u_m(x_1^0, \hat{x}) - u_p(x_1^0, \hat{x})\right)^2 = \left(\int\limits_{-A}^{x_1^0} \partial_{x_j}(u_m(x) - u_p(x))dx_1\right)^2 \leq$$

$$\leq 2A \int\limits_{\Pi_A} |\nabla(u_m - u_p)|^2 dx_1. \tag{7.17}$$

Интегрируя неравенство (7.17) по S, получим

$$\int\limits_S (u_m - u_p)^2 \, d\hat{x} \leq 2A \int\limits_{\Pi_A} |\nabla(u_m - u_p)|^2 dx,$$

откуда следует, что

$$||u_m - u_p||_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{2A} ||u_m - u_p||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{7.18}$$

Теорема доказана. □

Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда существует последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $||u_m - u||_{H_0^1(\Omega)}$.

Учитывая, что $\{u_m\}$ является фундаментальной последовательностью в $H_0^1(\Omega)$ и применяя Теорему 7.15, заключаем, что последовательность $\{u_m|_S\}$ является фундаментальной в $L_2(S)$.

В силу того, что пространство $L_2(S)$ гильбертово, существует элемент $u|_S \in L_2(S)$ (обозначим его таким образом), такой, что $||\, u_m|_S - u|_S \,||_{L_2(S)}, m \to \infty$.

Функцию $u|_S$ назовем **следом функции** u **из пространства** $H_0^1(\Omega)$ **на сечении** S.

Независимость следа от выбора последовательности u_m

Докажем, что след не зависит от выбора последовательности u_m, $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, сходящейся по норме $H_0^1(\Omega)$ к функции $u \in H_0^1(\Omega)$.

Предположим, что u_m и $\widetilde{u}_m$ - две последовательности функций из $C_0^\infty(\Omega)$, сходящиеся к u по норме $H_0^1(\Omega)$.

Пусть $u|_S \in L_2(S)$ и $\widetilde{u}|_S \in L_2(S)$ - два следа функции u на сечении S, построенные по последовательностям u_m и $\widetilde{u}_m$ соответственно.
Имеем

$$|| \, u|_S - \widetilde{u}|_S \, ||_{L_2(S)} \leq || \, u_m|_S - u|_S \, ||_{L_2(S)} + || \, u_m|_S - \widetilde{u}_p|_S \, ||_{L_2(S)} + || \, \widetilde{u}_p|_S - u_m|_S \, ||_{L_2(S)} \leq$$

$$\leq C\{||u_m - u||_{H_0^1(\Omega)} + ||\widetilde{u}_p - u||_{H_0^1(\Omega)} + ||u_m - \widetilde{u}_p||_{H_0 1(\Omega)}\} \to 0, m, p \to \infty.$$

Здесь мы воспользовались тем, что, в силу Теоремы 7.14 имеем

$$||u_m - u_p||_{L_2(S)} \leq C||u_m - u_p||_{h_0^1(\Omega)}. \tag{7.19}$$

Переходя в неравенстве (9.3) к пределу при $p \to \infty$, получим

$$|| \, u_m|_S - u|_S \, ||_{L_2(S)} \leq C||u_m - u||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Итак, для многообразия S, представляющего собой часть плоскости $x_j = C_j$, мы определили понятие следа на S для любой функции $u \in H_0^1(\Omega)$.
В частности, если $S \subset \partial\Omega$, то, так как $u_m|_S = 0$ для любого $m = 1, 2, \ldots$, имеем, что $u|_S = 0$.

Пусть теперь S - поверхность класса C^1, лежащая в $\overline{\Omega}$, и однозначно проектирующаяся на некоторую область D плоскости $\{x_n = 0\}$ и заданную уравнением $x_n = \phi(\hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.
Согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем, что

$$u_m^2(\hat{x}, \phi(\hat{x})) = C \int\limits_0^{\phi(\hat{x})} \partial_{x_n} u_m(\hat{x}, x_n) dx_n. \tag{7.20}$$

Возведем теперь обе части равенства (7.20) в квадрат и применим неравенство Коши Буняковского.
Получим

$$u_m^2(\hat{x}, \phi(\hat{x})) \leq C \int\limits_0^A |\partial_{x_j} u_m|^2(\hat{x}, x_n) dx_n. \tag{7.21}$$

Умножим обе части неравенства (7.21) на $\sqrt{1 + |\nabla_{\hat{x}}\phi|^2}$ и проинтегрируем по $\hat{x} \in D$.
Придем к следующему неравенству

$$\int\limits_D u_m^2(\hat{x}, \phi(\hat{x}))\sqrt{1 + |\nabla_{\hat{x}}\phi|^2} d\hat{x} = \int\limits_S u_m^2 ds \leq C_0 \int\limits_\Omega |\nabla u_m|^2 dx. \tag{7.22}$$

Полагая в (9.6) вместо u_m разность $u_p - u_k$, получим неравенство, аналогичное (7.18). Дальнейшие рассуждения повторяются без каких-либо изменений.

Таким образом, мы имеем понятие следа функции $u \in H_0^1(\Omega)$ на $(n-1)$ - мерной поверхности $S \subset \overline{\Omega}$, которую можно покрыть конечным числом кусков, каждый из которых можно спроектировать на координатную плоскость.
Для такой поверхности S и произвольной функции $u \in H_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$||u||_{L_2(S)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)}. \tag{7.23}$$

Кроме того, заметим, что, если $S = \partial\Omega$, то для $u \in H_0^1(\Omega)$ след ее на $\partial\Omega$ нулевой, т.е. $u|_{\partial\Omega} = 0$, так как $u_m|_{\partial\Omega} = 0$, где $\{u_m\}$ - последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$, сходящаяся к u по норме $H^1(\Omega)$.

Лекция 8

Общая задача Дирихле для уравнения Пуассона

Рассмотрим сначала задачу, называемую задачей Дирихле для уравнения Пуассона с нулевыми (однородными) краевыми условиями

$$-\Delta u = f, x \in \Omega; u = 0, x\ in \partial\Omega, \tag{8.1}$$

где f - заданная в Ω функция.

Определение 8.19. *Под классическим решением задачи* (8.1) *понимаем функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, такую, что $u|_{\partial\Omega}$ и будучи подставленной в уравнение , дает верное равенство в каждой точке области Ω.*

Предполагаем, что $f \in C(\Omega)$

Если $u \in C^2(\overline{\Omega})$ - классическое решение задачи (8.1) и $f \in C(\overline{\Omega})$, то выполено следующее интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = \int\limits_{\Omega} f \phi dx, \tag{8.2}$$

где ϕ - произвольный элемент из $H_0^1(\Omega)$.
Действительно, если $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u \phi dx = \int\limits_{\Omega} f \phi dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям в многомерном случае, получим

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx - \int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu u \phi ds = \int\limits_{\Omega} f \phi dx, \tag{8.3}$$

гдк ν - единичный вектор внешней нормали к границе области Ω, $\partial_\nu u$ - производная от функции u по нормали ν.

Учитывая, что $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, из равенства (8.3) немедленно получаем (8.2) для произвольной функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Если теперь $\phi \in H_0^1(\Omega)$, то существует последовательность функций $\{\phi_m\}$, $\phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $||\phi_m - \phi||_{H^1(\Omega)} \to 0$, если $m \to \infty$.

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_m dx = \int\limits_{\Omega} f \phi_m dx,$$

получим (8.2) для любой функции $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Определение 8.20. *Функцию $u \in H_0^1(\Omega)$ назовем обобщенным (слабым) решением задачи (8.2), где $f \in L_2(\Omega)$, если для произвольной функции $\phi in H_0^1(\Omega)$ имеет место равенство*

$$(u, \phi)_{h_0^1(\Omega)} = (f, \phi)_{L_2(\Omega)}. \tag{8.4}$$

Теорема 8.16. *Задача (8.1) имеет единственное обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$. Для него имеет место неравенство*

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq C||f||_{L_2(\Omega)}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой Рисса о представлении линейного ограниченного функционала на гильбертовом пространстве.

Теорема Рисса утверждает , что, если $l : H \to \mathbb{R}$ - линейный ограниченный функционал на гильбертовом пространстве H, то существует единственный элемент $h \in H$, такой, что для любого элемента $z \in H$ имеем $l(z) = (h, z)_H$.

Рассмотрим функционал $l : H_0^2\Omega \to \mathbb{R}$, заданный следующим образом

$$l(\psi) = \int\limits_{\Omega} f\psi dx.$$

Применяя неравенство Фридрихса, получим

$$|l(\psi)| \leq ||f||_{L_2(\Omega)}||\psi||_{H_0^1(\Omega}. \tag{8.6}$$

Отсюда следует, что l - линейный ограниченный функционал на гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$.
Полагая в (8.6) $\phi = u$, и применяя (8.5), получим неравенство (8.4). □

Задача Дирихле для уравнения Пуассона с неоднородными краевыми условиями

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Пуассона с неоднородными краевыми условиями

$$-\Delta u = f, x \in \Omega; u = \psi, x \in \partial\Omega. \tag{8.8}$$

Определение 8.21. *Классическим решением задачи (8.8) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}))$ такая, что $u|\,\partial\Omega = \psi$ и $-\Delta u = f$ в точках область Ω. Предполагаем, что $f \in C(\Omega)$, $\psi \in C(\partial\Omega)$.*

Предположим, что $\psi \in H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ и $\partial\Omega \subset C^1$.

Определение 8.22. *Обобщенным (слабым) решением задачи (8.8) назовем функцию $u \in H^1(\Omega)$, такую, что $u-\psi \in H_0^1(\Omega)$ и для произвольного элемента $\phi \in H_0^1(\Omega)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = \int\limits_{\Omega} f\phi dx. \tag{8.9}$$

Теорема 8.17. *Задача (8.8) имеет единственное обобщенное решение и для него имеет место неравенство*

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C\{||f||_{L_2(\Omega)} + ||\psi||_{H^1\Omega}\}. \tag{8.10}$$

Доказательство. Функция $u \in H^1(\Omega)$ - обобщенное решение задачи (8.8) тогда и только тогда, когда функция $v = u - \psi \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = \int\limits_{\Omega} d\phi dx - \int\limits_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi dx \tag{8.11}$$

для произвольной функции $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Обозначим правую часть равенства (8.11) через $l(\phi)$.
Заметим, что $l : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ является линейным ограниченным функционалом на гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$.
Действительно, применяя неравенства Коши-Буняковского и Фридрихса, получим

$$|l(\phi)| \leq C\{||f||_{L_2(\Omega)+||\psi||_{H^1\Omega}}\}||\phi||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{8.12}$$

Применяя теорему Рисса, заключаем, что обобщенное решение задачи (8.8) существует и единственно.

Из оценки (8.12) немедленно следует неравенство (8.10).

□

Вариационный метод решения задачи Дирихле

Пусть H - замкнутое подпространство гильбертова пространства $H_1(\Omega)$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.
Предположим, что на H задана норма, эквивалентная норме в $H^1(\Omega)$. Рассмотрим на H функционал

$$E : H \to \mathbb{R},$$

$$E(u) \equiv ||u||_H^2 + 2(f, u)_{L_2(\Omega)}, \tag{8.13}$$

где $f \in L^2(\Omega)$.

В силу неравенств Коши-Буняковского и Фридрихса имеем

$$E(u) \geq ||u||_H^2 - 2C||f||_{L^2(\Omega)}||u||_H + C^2||f||_{L^2(\Omega)} - C^2||f||_{L^2(\Omega)} \geq -C^2||f||_{L^2(\Omega)}. \tag{8.14}$$

Из неравенства (8.14) выводим, что существует конечная нижняя грань

$$\inf_H E(u) = d. \tag{8.15}$$

Определение 8.23. *Функция $u \in H$ называется функцией, реализующей минимум функционала E на H, если $E(u) = d$.*

По определению точной нижней грани, существует последовательность $\{v_m\}$, $v_m \in H$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty} E(v_m) = d.$$

Любая такая последовательность называется последовательностью, минимизирующей функционал E на H.

Теорема 8.18. *a) Существует единственный элемент $u \in H$, реализующий минимум функционала E на H, то есть $E(u) = d$.*
b) Любая минимизирующая последовательность сходится к u по норме $H^1(\Omega)$.

Доказательство. Начнем доказательство теорему с пункта b).
Пусть $\{v_m\}$ - минимизирущая функционал последовательность элементов гильбертова пространства H. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех $m \geq N(\varepsilon)$ имеем

$$d \leq E(v_m) \leq d + \varepsilon. \tag{8.16}$$

Учитывая, что

$$||\frac{v_m \pm v_s}{2}||_H^2 = \frac{1}{4}||v_m||_H^2 + \frac{1}{4}||v_s||_H^2 \pm \frac{1}{2}(v_m, v_s)_H,$$

получим

$$||\frac{v_m - v_s}{2}||_H^2 + ||\frac{v_m + v_s}{2}||_H^2 = \frac{1}{2}\left(||v_m||_H^2 + ||v_s||_H^2\right).$$

Из последнего равенства и определения функционала E выводим

$$||\frac{v_m - v_s}{2}||_H^2 = \frac{1}{2}\left(||v_m||_H^2 + ||v_s||_H^2\right) - ||\frac{v_m + v_s}{2}||_H^2 =$$

$$= \frac{1}{2}E(v_m) + \frac{1}{2}E(v_s) - E\left(\frac{v_m + v_s}{2}\right).$$

Предположим, что $m, s \geq N(\varepsilon)$.
Тогда, учитывая, что $E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right) \geq d$, имеем

$$0 \leq ||\frac{v_m + v_s}{2}||_H^2 \leq \frac{1}{2}(d + \varepsilon + d + \varepsilon) - d = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{v_m\}$ фундаментальна в H. В силу полноты H, существует функция $u \in H$, к которой эта последовательность сходится по норме $H^1(\Omega)$ (и по норме H).
Но тогда $||v_m||_H \to ||u||_H$ и $(f, v_m)_{L^2(\Omega)} \to (f, u)_{L^2(\Omega)}$, если $m \to \infty$, и, поэтому $E(v_m) \to E(u)$ и $E(u) = d$.

Покажем, что такой элемент u, на котором достигается минимум данного функционала, единственен.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предположим, что существует два различных элемента из пространства H, реализующих минимум функционала E, то есть $E(u_1) = E(u_2) = d$. Тогда последовательность $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ является минимизирующей функционал на H.

Но по доказанному она должна быть сходящейся в H, что невозможно.
Теорема доказана. □

Установим теперь важное свойство функции u, реализующей минимум функционала E на H.

Пусть $v \in H$ - произвольный элемент и $t \in \mathbb{R}$. Пусть u - элемент, такой, что $E(u) = d$, и v - произвольный элемент пространства H.

Рассмотрим многочлен

$$R(t) \equiv E(u+tv) = ||u+tv||_H^2 + 2(f, u+tv)_{L^2(\Omega)} =$$
$$= ||u||_H^2 + t^2||v||_H^2 + 2t(u,v)_H + 2(f,u)_{L^2(\Omega)} + 2t(f,v)_{L^2(\Omega)} \geq d,$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Заметим, что $P(0) = d$. Следовательно, $P'(0) = 0$, то есть при всех $v \in H$ выполнено тождество

$$(u,v)_H + (f,v)_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{8.17}$$

Пусть $H = H_0^1(\Omega)$ и $(u,v)_H = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx$.

Тогда (8.17) означает, что $u \in H_0^1(\Omega)$ и для произвольной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполняется тождество

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int\limits_\Omega f v dx. \tag{8.18}$$

Следовательно, функция u является обобщенным решением задачи Дирихле (см. Определение 8.22):

$$\begin{cases} \Delta u = f, x \in \Omega, \\ u = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.19}$$

Итак, доказана теорема

Теорема 8.19. *Существует единственная функция $u \in H_0^1(\Omega)$, реализующая минимум функционала E на $H_0^1(\Omega)$.*
Если скалярное произведение на $H_0^1(\Omega)$ задано формулой 7.4, то эта функция является обобщенным решением задачи Дирихле (8.19).

Эта теорема указывает на вариационный смысл обобщенного решения задачи Дирихле и дает еще один способ доказательства теоремы существования и единственности слабого решения.

Изложим теперь метод Ритца построения минимизирующей последовательности.

Метод Ритца

Пусть $\{\psi_k\}$ - линейно независимая система функций, линейная оболочка которой всюду плотна в H.

Например, если $H = H_0^1(\Omega)$, то в качестве такой системы функций можно взять собственные функции оператора Лапласа задачи Дирихле в области Ω, а если $H = H^1(\Omega)$, то в качестве такой системы функций можно взять множество всех одночленов вида $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс.

Пусть $R_k =< \psi_1, \ldots, \psi_k >$ - линейная оболочка, натянутая на первые k элементов $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Заметим, что R_k — k- мерное подпространство H.
По доказанному ранее, существует единственный элемент $x_k \in R_k$, такой, что

$$E(v_k) = \inf_{u \in R_k} E(u).$$

Опишем процедуру нахождения v_k.

Так как любой элемент из R_k, представляется в виде $c_1\psi_1 + \ldots + c_k\psi_k$, то задача нахождения минимума функционала E на R_k эквивалентна нахождению минимума по $c_1, \ldots, c_k$ функции k вещественных переменных

$$F(c_1, \ldots, c_k) \equiv E(c_1\psi_1 + \ldots + c_k\psi_k)$$

Координаты точки $(c_1, \ldots, c_k)$, в которой достигается минимум функции F, являются решением системы уравнений

$$\partial_{c_j} F = 0, j = 1, \ldots, k. \tag{8.20}$$

Учитывая, что

$$F(c_1, \ldots, c_k) = ||c_1\psi_1 + \ldots + c_k\psi_k||_H^2 + 2(f, c_1\psi_1 + \ldots + c_k\psi_k)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} c_i c_j (\psi_i, \psi_j)_H + 2\sum_{j=1}^{k} c_j (f, \psi_j)_{L^2(\Omega)}.$$

Поэтому, система (8.20) является линейной системой уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (\psi_i, \psi_j)_H + (f, \psi_j)_{L^1(\Omega)} = 0, j = 1, \ldots, k. \tag{8.21}$$

Определитель системы (8.21) $||(\psi_i, \psi_j)_H|| \neq 0$, называемый определителем Грама, отличен от нулю в силу линейной независимости функций $\psi_1, \ldots, \psi_k$.

Поэтому, система (8.21) имеет единственное решение, и, соответствующая этому решению функция $v_k \in R_k$ реализует минимум функционала E на R_k.

Последовательность $\{v_k\}$ называется последовательностью Ритца для функционала E по системе $\{\psi_k\}$.

Теорема 8.20. *Последовательность Ритца $\{v_k\}$ функционала E по произвольной линейно независимой системе функций $\{\psi_k\}$ со всюду плотной в H оболочкой, является последовательностью, минимизирующей функционал E на H. Последовательность $\{v_k\}$ сходится в пространстве $H^1(\Omega)$ к функции u, реализующей минимум E на H.*

Доказательство. Учитывая

$$R_1 \subset R_2 \subset \dots R_k \subset \dots \subset H,$$

имеем

$$E(v_1) \geq E(v_2) \geq \dots \geq d,$$

то есть $\{E(v_k)\}$ - монотонно убывающая числовая последовательность.

Так как линейная оболочка системы $\{\psi_k\}$ всюду плотна в H, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $k(\varepsilon)$ и числа $c_1(\varepsilon), \dots, c_k(\varepsilon)$, что для функции

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} c_j(\varepsilon)\psi_j \in R_{k(\varepsilon)}$$

имеем

$$||u_\varepsilon - u||_H < \varepsilon. \tag{8.22}$$

Из определения функционала E имеем

$$E(u_\varepsilon) = ||u_\varepsilon||_H^2 + 2(f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= ||u_\varepsilon - u + u||_H^2 + 2(f, u_\varepsilon - u + u)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= ||u_\varepsilon||_H^2 + ||u_\varepsilon - u||_H^2 + 2(u_\varepsilon - u, u)_H + 2(f, u)_{L^2(\Omega)} + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_H \leq$$

$$\leq d + |E(u_\varepsilon) - u)| + 2||u_\varepsilon - u||_H||u||_h. \tag{8.23}$$

Учитывая неравенство (8.23) и эквивалентность норм в H и $H^1(\Omega)$, получим

$$|E(u_\varepsilon) - u)| = ||u_\varepsilon) - u||_H^2 + |2(f, u_\varepsilon) - u)_{L^2(\Omega)}| \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 + 2C||f||_{L^2(\Omega)}||u_\varepsilon) - u||_H \leq \varepsilon^2 + 2C||f||_{L^2(\Omega)}\varepsilon.$$

Отсюда и из (8.23) выводим неравенство

$$E(u_\varepsilon) \leq d + \varepsilon^2 + \varepsilon(||u||_H + 2C||f||_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq d + C_0\varepsilon, C_0 = const.$$

Так как минимум функционала E на $R_{k(\varepsilon)}$ достигается на $v_{k(\varepsilon)}$ имеем

$$E(v_{k(\varepsilon)}) \leq E(u_\varepsilon) \leq d + C_0\varepsilon.$$

В силу того, что последовательность $E(v_s)$ - монотонно убывающая, получим, что для всех $s > k(\varepsilon)$

$$d \leq E(v_s) \leq E(v_k) \leq d + C_0\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{s\to\infty} E(v_s) \to d$.

Сходимость последовательности $\{v_s\}$ к функции u, на которой достигается минимум функционала E на пространстве H, следует из Теоремы 8.18.

$\square$

Из Теорем 8.19 и 8.20 следует, что последовательность Ритца функционала E, заданного на пространстве $H_0^1(\Omega)$, построенная по произвольной линейно независимой системе функций, линейная оболочка которой всюду плотна в $H_0^1(\Omega)$, сходится в $H^1(\Omega)$ к обобщенному решению задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Лекция 9

Теорема Реллиха-Кондрашова

Теорема 9.21. ***(Реллиха-Кондрашова)***
Ограниченное в $H_0^1(\Omega)$ множество компактно в $L_2(\Omega)$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что
$\overline{\Omega} \subset \Pi_l = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < l_j, j = 1, \dots, n\}$, $l = (l_1, \dots, l_n), l_j > 0, j = 1, \dots, n$.

Продолжим все элементы из $H_0^1(\Omega)$ нулем на $\Pi_l \backslash \overline{\Omega}$. Продолженные функции будут элементами $H_0^1(\Pi_l)$. (Докажите!)

Разобьем параллелепипед Π_l на элементарные параллелепипеды w_i со сторонами $l_i/N, i = 1, \dots, n$ и гранями, параллельными координатным плоскостям. Заметим, что количество таких элементарных параллелепипедов равно N^n.

Для каждого элементарного параллелепипеда w_i и функции $u \in H^1(w_i)$ имеет место неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{w_i} u^2 dx \le \frac{1}{|w_i|} \left(\int\limits_{w_i} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{n} (l_j/N)^2 \int\limits_{w_i} u_{x_j}^2 dx. \tag{9.1}$$

Просуммируем неравенства (9.1) по $i = 1, \dots, N^n$. Получим

$$\int \lim_{\Omega} u^2 dx \le \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|w_i|} \left(\int\limits_{w_i} u dx \right) + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{n} (l_j/N)^2 \int\limits_{\Omega} u_{x_j}^2 dx. \tag{9.2}$$

Пусть $\{u_m\}$ - последовательность элементов, лежащих в шаре пространства $H_0^1(\Omega)$, то есть $||u_m|||_{H^1(\Omega)} \le C$, $C = const > 0$.

Положим в (9.2) $u = u_m - u_p$. Придем к неравенству

$$\int \lim_{\Omega} (u_m - u_p)^2 dx \le \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{w_i} \left(\int\limits_{w_i} (u_m - u_p) dx \right)^2 +$$

$$+ \frac{n}{2} \sum \lim_{j=1}^{n} (l_j/N)^2 \int\limits_{\Omega} |\partial_{x_j} (u_m - u_p)|^2 dx. \tag{9.3}$$

Так как $||u_m||_{H^1\Omega} \le C$, то $||u_m||_{L_2\Omega} \le C$. Учитывая, что $L_2\Omega$ - гильбертово пространство, и, следовательно, шар слабо компактен в нем, существует подпоследовательность (будем ее обозначать так же как исходную последовательность), такая,

что $u_m \to u$ и слабо в $L_2\Omega$ при $m \to \infty$. Докажем, что $\{u_m\}$ является фундаментальной в $L_2\Omega$ последовательностью.
Заметим, что

$$\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{l_j}{N}\right)^2\int\limits_{\Omega}|\partial_{x_j}(u_m-u_p)|^2dx \leq$$
$$\leq \frac{n}{2}\max_{1\leq j\leq n} l_j^2 N^{-2}\int\limits_{\Omega}|\nabla(u_m-u_p)|^2dx \leq C_0N^{-2}. \tag{9.4}$$

Поэтому, для произвольного $\varepsilon > 0$ можем взять такое большое N, что $C_0N^{-2} < \varepsilon/2$. Теперь мы можем считать, что N фиксировано, и фиксировано разбиение нашего параллелепипеда на элементарные параллелепипеды w_i.

По определению слабой в $L_2(\Omega)$ сходимости имеем

$$\lim_{m,p\to\infty}\int\limits_{w_k}(u_m-u_p)dx = \lim_{m,p\to\infty}\int\limits_{\Omega}(u_m-u_p)\chi_{w_k}dx = 0, \tag{9.5}$$

где χ_{w_k} - характеристическая функция множества w_k. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое большое число K_0, что при $m, p > K_0$

$$\sum_{i=1}^{N^n}|w_i|^{-1}\left(\int\limits_{w_i}(u_m-u_p)dx\right)^2 < \varepsilon/2. \tag{9.6}$$

Из (9.2) – (9.6) вытекает, что $\{u_m\}$ - фундаментальная в $L_2\Omega$ последовательность.

Учитывая, что $L_2(\Omega)$ - гильбертово пространство, выводим, что последовательность $\{u_m\}$ сходится к u по норме $L_2(\Omega)$.

Упражнение 9.7. *Почему $u \in H_0^1(\Omega)$?*

□

Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа задачи Дирихле

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.
Рассмотрим задачу на собственные функции (с.ф.) и собственные значения (с.з.) для оператора Лапласа

$$\begin{cases}\Delta u = \lambda u, x \in \Omega,\\ u = 0, x \in \partial\Omega.\end{cases} \tag{9.7}$$

Определение 9.24. *Функцию $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, будем называть с.ф. задачи Дирихле для оператора Лапласа, если существует такое число λ, что для любого элемента $v \in H_0^1(\Omega)$ выполняется интегральное тождество*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = -\lambda \int\limits_{\Omega} uv dx. \tag{9.8}$$

Число λ называют с.з. оператора Лапласа, соответствующим собственной функции u.

Заметим, что с.ф. определены с точностью до умножения на число, то есть, если u - с.ф., то и Cu - тоже с.ф., котрой отвечает тоже самое с.з.
Поэтому всегда можем считать, $||u||_{L^2\Omega} = 1$.
Будем предполагать, что скалярное произведение на $H_0^1(\Omega)$ задано формулой (7.4).

Теорема о существовании линейного оператора с определенными свойствами

Теорема 9.22. *Существует линейный ограниченный оператор $A : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ с областью определения $L^2(\Omega)$, для которого:*
1) $(u, v)_{L^2(\Omega)} = (Au, v)_{H_0^1(\Omega)}$ для любого $u \in L^2(\Omega)$ и произвольного $v \in H_0^1(\Omega)$;
2) существует обратный оператор A^{-1};
3) Оператор A, если его рассматривать как оператор из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$, является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным оператором.

Доказательство. 1) Построим оператор A. Пусть $u \in L^2(\Omega)$.
Рассмотрим функционал $l_u : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, действующий по правилу $l_u(v) = \int\limits_{\Omega} uv dx$ для произвольного $v \in H_0^1(\Omega)$.

Покажем, что l_u - линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$.
Применяя неравенства Коши-Буняковского и Фридрихса, получим

$$|l_u(v)| \leq ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Из теоремы Рисса следует, что существует единственный элемент $V \in H_0^1(\Omega)$ такой, что

$$l_u(v) = (V, v)_{H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Положим

$$A : u \in L^2(\Omega) \to V \in H_0^1(\Omega),$$

Имеем

$$l_u(v) = (Au, v)_{H_0^1(\Omega)}. \tag{9.9}$$

Покажем, что A - линейный ограниченный оператор.
Действительно, применяя неравенство Фридрихса, получим

$$||Au||^2_{H^1_0(\Omega)} = (Au, Au)_{H^1_0(\Omega)} = (u, Au)_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$\leq ||u||_{L^2(\Omega)}||Au||_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)||u||_{L^2(\Omega)}||Au||_{H^1_0(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$||Au||_{H^1_0(\Omega)} \leq C(\Omega)||u||_{L^2(\Omega)}. \tag{9.10}$$

Следовательно,

$$||A|| \leq C(\Omega).$$

2) Покажем теперь, что существует обратный оператор A^{-1}.

Докажем, что $KerA = \{0\}$.
Предположим, что $Au = 0$ при некотором $u \in L^2(\Omega)$. Тогда для произвольного элемента $v \in H^1_0(\Omega)$ имеем

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = (Au, v)_{H^1_0(\Omega)} = 0.$$

Учитывая, что пространство $C^\infty_0(\Omega)$ - всюду плотно в $L^2(\Omega)$, выводим, что $u = 0$.

3) Из равенства $(u, v)_{L^2(\Omega)} = (Au, v)_{H^1_0(\Omega)}$ следует, что оператор A, действующий из пространства $H^1_0(\Omega)$ в пространство $H^1_0(\Omega)$, является самосопряженным: для любых $u, v \in H^1_0(\Omega)$ имеем

$$(Au, v)_{H^1_0(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} = (v, u)_{L^2(\Omega)} = (Av, u)_{H^1_0(\Omega)} = (u, Av)_{H^1_0(\Omega)}.$$

Оператор A положительный.
(Напомним, что самосопряженный оператор A, заданный на гильбертовом пространстве H, называется положительным, если для всех $u \in H$ выполнено неравенство $(Au, u)_H \geq 0$ и $(Au, u)_H = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.)
Действительно,

$$(Au, u)_{H^1_0(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Покажем теперь, что A - вполне непрерывный оператор.
Оператор $A : H \to H$, заданный на гильбертовом пространстве H, называется вполне непрерывным, если он переводит любое ограниченное множество в компактное.

Возьмем произвольное ограниченное множество в $H^1_0(\Omega)$ - $\{u_k\}$, $||u_k||_{H^1_0(\Omega)} \leq C$, где постоянная C не зависит от k.

Покажем, что последовательность $\{Au_k\}$ содержит сходящуюся в $H_0^1(\Omega)$ подпоследовательность.

В силу теоремы Реллиха-Кондрашова существует подпоследовательность $\{u_{k'}\}$, сильно в $L^2(\Omega)$ сходящаяся при $k' \to \infty$.
Применяя неравенство (9.10), получим

$$||Au_{k'} - Au_{m'}||_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega)||u_{k'} - u_{m'}||_{L^2(\Omega)} \to 0, k', m' \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\{Au_{k'}\}$ - фундаментальная последовательность в пространстве $H_0^1(\Omega)$.
Так как $H_0^1(\Omega)$ - полное пространство, то последовательность $\{Au_{k'}\}$ - сходящаяся.

Итак, A - вполне непрерывный оператор.

□

Заметим, что, если $u \in H_0^1(\Omega)$ - с.ф. задачи (11.1) и λ - с.з., соответствующее с.ф. u, то

$$-\lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} = -\lambda(Au, v)_{H_0^1(\Omega)} = (u, v)_{H_0^1(\Omega)},$$

где v - произвольный элемент из $H_0^1(\Omega)$.
Поэтому, u - с.ф. оператора A и $-\lambda^{-1}$ - соответствующее ему с.з.
Верно и обратное утверждение: если $u \in H_0^1(\Omega)$ - с.ф. оператора A и μ - отвечающее ей с.з., то есть $Au = \mu u$, то

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = (Au, v)_{H_0^1(\Omega)} = \mu(u, v)_{H_0^1(\Omega)},$$

откуда

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \mu^{-1}(u, v)_{L^2(\Omega)},$$

следовательно, u - с.ф. задачи (9.7) и $-\lambda^{-1}$ - отвечающее ей с.з.

Известно, что с.ф. и с.з. самосопряженного, положительного, вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве Я обладают следующими свойствами:

1) с.з. положительные, их счетное множество $\{\mu_m > 0\}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m = 0$;

2) каждое с.з. имеет конечную кратность. Поэтому можем расположить с.з. в виде невозрастающей последовательности, в которой каждое с.з. повторяется столько раз, какова его кратность:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m \geq \ldots \to 0, m \to \infty.$$

3) с.ф. $\{u_m\}$ образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве H.
Следовательно, задача (9.7) имеет счетное множество с.ф. $\{u_s \in H_0^1(\Omega)\}$, образующих ортогональный базис в $H_0^1(\Omega)$ и учитывая, что $H_0^1(\Omega)$ - всюду плотно

в $L^2(\Omega)$, можем считать, что система $\{u_s\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$;

соответствующие с.з. отрицательны, каждое с.з. имеет конечную кратность и $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = -\infty$.
Поэтому их можно расположить в виде невозрастающей последовательности, в которой каждое с.з. повторяется столько раз, какова его кратность:

$$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq \ldots \to -\infty.$$

Итак, имеем

$$||u_s||_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{-\lambda_s},$$
$$||u_s||_{L^2(\Omega)} = 1,$$
$$(u_s, u_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0,$$
$$v(u_s, u_m)_{L^2(\Omega)} \neq 0, \text{если } s \neq m,$$

и функции $\{\dfrac{u_s}{\sqrt{-\lambda_s}}\}$ образуют ортонормированный базис в $H_0^1(\Omega)$.

Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Тогда, в силу теоремы Гильберта-Шмидта, любой элемент $f \in L^2(\Omega)$ раскладывается в сходящийся в $L^2(\Omega)$ ряд Фурье по системе функций $\{u_s\}$:

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \text{где} f_s = (f, u_s)_{L^2(\Omega)} \tag{9.11}$$

и имеет место равенство Парсеваля-Стеклова

$$||f||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 < \infty. \tag{9.12}$$

Аналогично, если $f \in H_0^1(\Omega)$, то f можно разложить в сходящийся в $H_0^1(\Omega)$ ряд Фурье по системе функций $\{\dfrac{u_s}{\sqrt{-\lambda_s}}\}$:

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \frac{u_s}{\sqrt{-\lambda_s}}, \tag{9.13}$$

где $C_s = f_s\sqrt{-\lambda_s}$ и выполнено равенство Парсеваля-Стеклова

$$||f||_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s| < \infty. \tag{9.14}$$

Если $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, где $Q_T = \{x \in \Omega, 0 < r < T\}$ - цилиндр.
Тогда по теореме Фубини для п.в. $t \in (0,T)$ $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ и $f(x,t)$ можно разложить в ряд Фурье по системе функций $\{u_s\}$:

$$f(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(t) u_s(x),$$

сходящийся в $L^2(Q_T)$ и для п.в. $t \in (0,T)$ выполнено равенство Парсеваля-Стеклова

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2(t) = \int\limits_{\Omega} f^2(x,t)dx, \tag{9.15}$$

где $f_s(t) = (f(x,t), u_s(x))_{L^2(\Omega)}$. Так как

$$|f_s|^2 \leq \int\limits_{\Omega} f^2(x,t)dx \int\limits_{\Omega} u_s^2 dx,$$

то $f_s(t) \in L^2(0,T)$. Поэтому, применяя теорему Леви, получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_0^T f_s^2(t)dt = \int\limits_{Q_T} f^2(x,t)dxdt. \tag{9.16}$$

Напомним теорему Б. Леви.

Теорема 9.23. *Монотонная п.в. последовательность $\{v_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ интегрируемых в Ω функций с ограниченной последовательностью интегралов п.в. в Ω, сходится к некоторой интегрируемой функции $v(x)$ и при этом*

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega} v_s(x)dx = \int\limits_{\Omega} v(x)dx.$$

Лекция 10

Смешанная задача для волнового уравнения

Смешанной задачей для волнового уравнения (или первой начально-краевой задачей) назовем следующую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x,t), (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T), \\ u|_{\Gamma_T} = 0, \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{10.1}$$

Определение 10.25. *Функция $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega})$ удовлетворяющая уравнению $u_{tt} = \Delta u + f(x,t)$ в Q_T, начальным условиям при $t = 0$:*

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \Omega$$

и одному из краевых условий

$$u|_{\Gamma_T} = g(x,t), \tag{10.2}$$

либо

$$\partial_\nu u + a(x,t)u = b(x,t) на \Gamma_T, \tag{10.3}$$

называется классическим решением первой начально-краевой задачи, если выполнено краевое условие (10.2),
второй начально-краевой задачи,если выполнено краевое условие (10.3) *с $a \equiv 0$,*
и, третьей начально-краевой задачи, если $a \neq 0$.

Введем теперь понятие обобщенного решения первой начально-краевой задачи (10.1).
Предположим сначала, что $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ - классическое решеие задачи (12.1).
Пусть $v \in C^1(\overline{Q}_T)$, $v|_{t=T} = 0, x \in \Omega$, $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Умножим обе части уравнения на v и проинтегрируем по Q_T:

$$\int\limits_{Q_T} (u_{tt} - \Delta u) v dx dt = \int\limits_{Q_T} f v dx dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{Q_T} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v) dx dt + \int\limits_{\partial Q_T} u_t v \nu_t ds -$$

$$- \int\limits_{Q_T} \partial_\nu u v ds = \int\limits_{Q_T} f v dx dt.$$

Принимая во внимание начальные и краевые условия, приходим к интегральному равенству

$$\int\limits_{Q_T} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v) dxdt - \int\limits_{Q_T} u_1(x) v(x,0) dx = \int\limits_{Q_T} f v dxdt. \tag{10.4}$$

Итак, если u - классическое решение задачи (10.1), то для него выполнено интегральное тождество (10.4) с произвольной функцией $v \in C^1(\overline{Q}_T)$, $v = 0$ на Γ_T и $v = 0$ при $y = T, x \in \Omega$.
Это интегральное тождество положим в основу понятия обобщенного решения задачи (10.1).

Определение обобщенного решения

Определение 10.26. *Обобщенным решение задачи* (10.1) *назовем функцию* $u \in H^1(Q_T)$,*удовлетворяющую условиям* $u|_{t=0} = 0,\ u|_{\Gamma_T} = 0$ *в смысле следа функции из* $H^1(Q_T)$, *и удовлетворяющую интегральному тождеству* (10.4) *для произвольной* $v \in H^1(Q_T),\ v|_{\Gamma_T} = 0,\ u|_{\Omega_T} = 0,\ \Omega_T = Q_T \cap \{t = T\}$.

Теорема о единственности обобщенного решения

Теорема 10.24. *Если задачи* (10.1) *имеет обобщенное решение, то это решение единственно.*

Доказательство. Предположим, что есть два обобщенных решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$. Тогда $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-w_t v_t + \nabla w \nabla v) dxdt = 0, \tag{10.5}$$

где $v \in H^1(Q_T),\ v|_{\Gamma_T} = 0,\ v|_{\Omega_T} = 0$.

Положим

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^T w(x,s)ds, 0 < t \le \tau, \\ 0, \tau \le t \le T, \end{cases} \tag{10.6}$$

где τ - произвольное значение из интервала $(0,T)$.
Тогда

$$v_x = \begin{cases} \int\limits_t^T w_x(x,s)ds, 0 < t \le \tau, \\ 0, \tau \le t \le T, \end{cases} \tag{10.7}$$

$$v_t = \begin{cases} -w(x,t), 0 < t \le \tau, \\ 0, \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{10.8}$$

Упражнение 10.8. *Проверить, что функция v удовлетворяет условиям: $v \in H^1(Q_T)$, написанные выше производные являются обобщенными производными в смысле Соболева, и, кроме того, след этой функции равен нулю на Γ_T при $t = T$.*

Возьмем в тождестве (10.5) в качестве пробной функции, функцию, введенную формулой (10.6).
Учитывая равенства (10.7), (12.8), получим

$$\int_{Q_T} -w_t v_t dxdt = \int_{Q_\tau} w_t w dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_\Omega \partial_t w^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} w^2(x,\tau)dx. \tag{10.9}$$

Положим $\eta \equiv \int\limits_t^\tau \nabla w(x,s)ds$. Заметим, что

$$\nabla w = -\eta_t, \nabla v = \eta.$$

Поэтому,

$$\int_{Q_T} \nabla w \nabla v dxdt = -\int_{Q_T} \eta\eta_t dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{Q_T} \partial_t \eta^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2(x,0)dx. \tag{10.10}$$

Итак, из (10.9), (10.10) выводим равенство

$$\int_{\Omega_\tau} w^2(x,\tau)dx + \int_{\Omega_0} \eta^2(x)dx = 0, \tag{10.11}$$

где τ - произвольное число из интервала $(0,T)$.
Из (10.11) следует, что $w = 0$ п.в. $x \in \Omega$ и любого $\tau \in (0,T)$. □

Теорема существования обобщенного решения

Теорема 10.25. *Задача* (10.1) *имеет обобщенное решение.*

Доказательство. Пусть $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ - ортогональный в $H_0^1(\Omega)$ и ортонормированный в $L^2(\Omega)$ базис, составленный из с.ф. задачи Дирихле для оператора Лапласа (9.7), и, $\{\lambda_k\}$ - соответствующее w_k с.з.

Напомним, что $||w_k||_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{-\lambda_k}$.
Учитывая, что $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $u_1 \in L^2(\Omega)$, получим

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^\infty u_{0,k} w_k,$$

$$u_{0,k} = (u_0, w_k)_{L^2(\Omega)}, \tag{10.12}$$

$$\begin{gathered}
||u_0||_{H_0^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0,k}^2 |\lambda_k| < \infty, \\
u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1,k} w_k, \\
u_{1,k} = (u_1, w_k)_{L^2(\Omega)}, \\
||u_1||_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1,k}^2 < \infty,
\end{gathered} \tag{10.13}$$

Аналогично, для $f \in L^2(Q_T)$, справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}
f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) w_k(t) \in L^2(0,T), \\
f_k(x,t) = (f(x,t), w_k(x))_{L^2(\Omega)} \in L^2(0,T).
\end{gathered} \tag{10.14}$$

Действительно, имеем

$$\int_0^T f_k^2(t)dt = \int_0^T \left(\int_\Omega f w_k dx \right)^2 dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left(\int_\Omega f^2(x,t)dx \right) \left(\int_\Omega w_k^2(x)dx \right) dt = \int_{Q_T} f^2 dxdt < \infty.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)dt = \int_{Q_T} f^2(x,t)dxdt, \tag{10.15}$$

так как

$$\sum_{k=1} \infty f_k^2 = \int_\Omega f^2 dx,$$

и, применяя теорему Леви о монотонно сходящейся последовательности функций (см. (9.7), получим равенство (10.15).

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases}
u_{ktt} - \Delta u_k = f_k(t) w_k(x), (x,t) \in Q_T, \\
u_k|_{S_T} = 0, \\
u_k|_{t=0} = u_{0,k} w_k(x), \\
u_{kt}|_{t=0} = u_{1,k} w_k(x).
\end{cases} \tag{10.16}$$

Покажем, что обобщенным решением задачи (10.16) является функция $u_k(x,t) = V_k(t)w_k(x)$, где V_k - решение задачи Коши:

$$\begin{cases} V_k'' - \lambda_k V_k = f_k(t), \\ V_k(0) = u_{0,k}, \\ V_k'(0) = u_{1,k}. \end{cases} \tag{10.17}$$

Легко видеть, что

$$V_k(t) = u_{0,k}\cos\sqrt{|\lambda_k|}t + \frac{u_{1,k}}{\sqrt{|\lambda_k|}}\sin\sqrt{|\lambda_k|}t+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\Big(\sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)\Big)d\tau.$$

Следовательно, $V_k \in H^1(0,T)$ и $V_k'' \in L^2(0,T)$.
Функция $u_k(x,t) \in H^1(Q_T)$ такая, что $u_k|_{S_T} = 0$ и $u_k|_{t=0} = u_{0,k}w_k(x)$, называется обобщенным решением задачи (10.16), если для произвольной функции $v \in H^1(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $v|_{S_T} = 0$, $v|_{t=T} = 0$, имеет место интегральное тождество:

$$\int\limits_{Q_T}(-u_{kt}v_t + \nabla u_k \nabla v)dxdt = \int\limits_{Q_T} f_k(t)w_k(x)v(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} u_{1,k}w_k v(x,0)dx. \tag{10.18}$$

Подставляя в левую часть интегрального тождества (10.18) $u_k = V_k(t)w_k(x)$, получим

$$M_k \equiv \int\limits_{Q_T}(-V_k'(t)\partial_t v w_k(x) + (\nabla_x w_k, \nabla v)V_k(t))dxdt. \tag{10.19}$$

Учитывая, что $w_k(x)$ - собственная функция задачи Дирихле для оператора Лапласа, имеем

$$\int\limits_{\Omega}(\nabla w_k, \nabla\psi)dx = -\lambda_k\int\limits_{\Omega} w_k\psi dx,$$

где ψ - произвольная функция из $H_0^1(\Omega$.
Отсюда и из (10.19) выводим

$$M_k = -\int\limits_{Q_T} V_k'\partial_t v w_k(x)dxdt - \lambda_k\int\limits_{Q_T} V_k(t)w_k(x)vdxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} V_k''(t)v v_k(x)dxdt - \lambda_k\int\limits_{Q_T} V_k(t)w_k(x)vdxdt + \int\limits_{\Omega} u_{1,k}w_k(x)v(x,0)dx =$$

$$= \int\limits_{Q_T}(V_k'' - \lambda_k V_k)w_k(x)v(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} u_{1,k}w_k(x)v(x,0)dx =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f_k(t)w_k(x)v(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} u_{1,k}w_k(x)v(x,0)dx.$$

Итак, функция $u_k(x,t) = V_k(t)w_k(x)$ - обобщенное решение задачи (10.16). Отсюда следует, учитывая линейность рассматриваемой задачи, что

$$S_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} V_k(t)w_k(x)$$

является обобщенным решением следующей проблемы

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}S_N = \Delta S_N + \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t)w_k(x), (x,t) \in Q_T, \\ S_N|_{S_T} = 0, x \in \Omega, \\ S_N|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{N} u_{0,k}w_k(x), x \in \Omega, \\ S_{Nt}|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{N} u_{1,k}w_k(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{10.20}$$

Доказательство сходимости ряда

Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k(t)w_k(x)$ сходится в $H^1(Q_T)$ и его сумма является обобщенным решением исходной задачи.

1. Докажем, что $S_N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} V_k(t)w_k(x)$ сходится для п.в. $t \in [0,T]$ при $N \to \infty$ в пространстве $H^1_0(\Omega_T)$, (напомним, что Ω_T - сечение цилиндра Q_T плоскостью $t = \tau$). Имеем

$$||S_N - S_M||^2_{H^1_0(\Omega_t)} = ||\sum_{k=M+1}^{N} V_k(t)w_k(x)||^2_{H^1_0(\Omega_t)} =$$

$$\sum_{k=M+1}^{N} V_k^2(t)||w_k||^2_{H^1_0(\Omega_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} V_k^2(t)\lambda_k. \tag{10.21}$$

Учитывая представление $V_k(t)$, имеем

$$V_k^2(t) \le 3\left(u_{0,k}^2 + \frac{u_{1,k}^2}{|\lambda_k|} + \frac{1}{|\lambda_k|}\left(\int\limits_0^T f_k(\tau)\sin\sqrt{||\lambda_k}(t-\tau)d\tau\right)^2\right) \le$$

$$\le 3\left(u_{0,k}^2 + \frac{u_{1,k}^2}{|\lambda_k|} + \frac{T}{|\lambda_k|}\int\limits_0^T f_k^2 dt\right). \tag{10.22}$$

Из $(10.21), (10.22)$ следует

$$||S_N - S_M||^2_{H^1_0(\Omega_t)} \le 3 \left(\sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k| u^2_{0,k} + \sum_{k=M+1}^{N} u^2_{1,k} + T \sum_{k=M+1}^{N} \int_0^T f_k^2 dt \right) \to 0, M, N \to \infty.$$

Отсюда выводим, что

$$\int_0^T ||S_N - S_M||^2_{H^1_0(\Omega_t)} dt = \int_{\Omega_t} |\nabla (S_N - S_M)|^2 dx dt \to 0, M, N \to \infty.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Конец доказательства теоремы о существовании обобщенного решения

Напомним формулировку теоремы существования обобщенного решения первой начально-краевой задачи:
Задача

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x,t), (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T), \\ u|_{\Gamma_T} = 0, \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

имеет обобщенное решение.
2. Докажем, что

$$||\partial_t S_N - \partial_t S_M||_{L^2(\Omega_t)} \to 0, M, N \to \infty.$$

Действительно,

$$\partial_t S_N - \partial_t S_M = \sum_{k=M+1}^{N} V_k'(t) w_k(x),$$

поэтому

$$||\partial_t S_N - \partial_t S_M||^2_{L^2(\Omega_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} |V_k'|^2. \tag{11.1}$$

В силу определения функции $V_k(t)$ имеем оценку

$$(V_k'(t))^2 \leq 3 \left(|\lambda_k| u_{0,k}^2 + u_{1,k}^2 + T \int\limits_0^T f_k^2 dt \right).$$

Из этого неравенства и из (11.1) выводим

$$||\partial_t S_N - \partial_t S_M||^2_{L^2(\Omega_t)} \leq$$

$$\leq 3 \left(\sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k| u_{0,k}^2 + \sum_{k=M+1}^{N} u_{1,k}^2 + T \sum_{k=M+1}^{N} \int\limits_0^T f_k^2 dt \right) \to 0,$$

если $M, N \to \infty$.

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{Q_T} (\partial_t S_N - \partial_t S_M)^2 dx dt \to 0, M, N \to \infty.$$

Учитывая, что $H^1(Q_T)$ - гильбертово пространство, выводим, что существует $u \in H^1(Q_T)$, что $||S_N - u||_{H^1(Q_T)} \to 0, N \to \infty$, то есть $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k(t) w_k(x)$.

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в интегральном тождестве для S_N, получим, что u - обобщенное решение начально-краевой задачи (10.1).

Заметим, что кроме доказательства существования обобщенного решения , мы можем получить и оценку этого решения через данные задачи в нормах соответствующих пространств.

Действительно,

$$||S_N||^2_{H^1(\Omega_t)} \le \sum_{k=1}^{N} V_k^2(t)|\lambda_k| \le$$

$$\le K_0(T)\left(\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|u_{0,k}^2 + \sum_{k=1}^{N}u_{1,k}^2 + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_0^T f_k^2 dt\right). \tag{11.2}$$

Аналогично, имеем

$$||\partial_t S_N||^2_{L^2(\Omega_t)} \le \sum_{k=1}^{N} |V_k'|^2 \le$$

$$\le K_0\left(\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|u_{0,k}^2 + \sum_{k=1}^{N}u_{1,k}^2 + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_0^T f_k^2 dt\right) \tag{11.3}$$

Интегрируя эти неравенства по t от 0 до T и складывая, получим

$$||S_N||^2_{H^1(\Omega_t)} \le K(T)\left(||u_0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u_1||^2_{L^2(\Omega} + ||f||^2_{L^2(Q_T)}\right),$$

откуда, при $N \to \infty$, получаем оценку решения

$$||u||_{H^1(Q_T)} \le K(T)\left(||u_0||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||u_1||^2_{L^2(\Omega} + ||f||^2_{L^2(Q_T)}\right).$$

□

Пример о классическом решении методом Фурье

Задача.

Рассмотрим задачу о колебании струны длины l с закрепленными концами.

Пусть на струну не действуют внешние силы, и она колеблется только под воздействием начальных условий: начального отклонения и начальной скорости.

Покажем, что при

$$u_0 \in C^3[0, l],$$

$$u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0,$$

$$u_1 \in C^2[0, l],$$

$$u_1(0) = u_1(l) = 0,$$

решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, x \in (0,l), t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = u_1(x), x \in [0,l], \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{cases}$$

построенное методом Фурье, является классическим решением, то есть $u \in C^2([0,l] \times [0,T])$.

Действительно, имеем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\phi_k \cos \frac{\pi k t}{l} + \frac{\psi_k l}{\pi k} \sin \frac{\pi k t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l},$$

где ϕ_k, ψ_k - коэффициенты разложения в ряд Фурье по системе функций $\sin \frac{\pi k x}{l}$ функций ϕ и ψ соответственно.

Учитывая условия на $\phi(x)$ и $\psi(x)$, выводим

$$\phi_k = \frac{2}{3} \left(\phi(x), \sin \frac{\pi k x}{l} \right)_{L^2(0,l)} = \frac{2l^2}{\phi^3(x) k^2} \int\limits_0^l \phi^3(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \tag{11.4}$$

$$\psi_k = \frac{2l}{\pi^2 k^2} \int\limits_0^l \psi''(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx. \tag{11.5}$$

Итак,

$$\phi_k = \frac{l^3}{\pi^3 k^3} d_k,$$

где d_k - коэффициент разложения в ряд Фурье функции $\psi'''(x)$ по полной в $L^2(0,l)$ системе функций $\{1, \cos \frac{\pi k x}{l}, k = 1, 2, \ldots\}$.

Аналогично,

$$\psi_k = -\frac{l^2}{\pi^2 k^2} C_k,$$

где C_k - разложение в ряд Фурье функции $\psi''(x)$ по системе $\{\sin \frac{\pi k x}{l}, k = 1, 2, \ldots\}$.

В силу равенства Парсеваля, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k^2 + d_k^2) \leq +\infty.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(|d_k| + |C_k|) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(2\sum_{k=1}^{\infty}(d_k^2 + C_k^2)\right)^{1/2} \leq +\infty.$$

Выполнение этого неравенства эквивалентно выполнению неравенству вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2|\phi_k| + k|\psi_k|) \leq +\infty,$$

из которого следует, что ряд для $u(x,t)$ можно два раза дифференцировать по переменным x и t.

Таким образом, решение является классическим.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ