



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ. ЧАСТЬ 2

НИКИТИН
НИКОЛАЙ ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
РОМАНЕНКО ГЛЕБА ЭДУАРДОВИЧА



Содержание

1 Лекция 1. Эволюция квантовой системы во времени. Часть 4	8
1.1 Формула Ааронова-Бергмана-Лебовица	8
1.2 Формула Ааронова-Бергмана-Лебовица, проективные измерения и "квантовая стрела времени"	10
1.3 Третья формула или некорректная задача.	11
1.4 Оператор производной оператора по времени для смешанных состояний.	12
1.5 Свойства интегралов движения.	13
1.6 Представление взаимодействия для чистых состояний.	14
2 Лекция 2. Эволюция квантовой системы во времени.	16
2.1 Представление взаимодействия для чистых состояний.	16
2.2 Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана) в представлении взаимодействия.	16
2.3 Решение квантового уравнения Лиувилля в представлении взаимодействия.	18
3 Лекция 3. Эволюция квантовой системы во времени. Часть 6. Описание открытых квантовых систем. Часть 1.	26
3.1 Золотое правило Ферми (продолжение).	26
3.2 Описание открытых квантовых систем. Распад нестабильной микросистемы.	30
3.3 Квантовое уравнение Лиувилля для открытых систем.	31
4 Лекция 4. Описание открытых квантовых систем. Часть 2.	33
4.1 Эволюция матрицы плотности открытых квантовых систем. Общий подход.	33
4.2 Релаксационное уравнение для частицы в термостате.	35
4.3 Операторы Крауса и представление Крауса для матрицы плотности открытой квантовой системы.	36
4.4 Представление Крауса для наблюдаемых.	38
4.5 Неоднозначность представления Крауса.	39
4.6 Теорема Крауса.	40
5 Лекция 5. Описание открытых квантовых систем. Часть 3.	42
5.1 Проекционный постулат и уравнение Шредингера.	45

5.2	Модель Д.Дойча для замкнутых времениподобных кривых в квантовой механике.	45
6	Лекция 6. Описание открытых квантовых систем. Часть 4.	49
6.1	Уравнение Линдблада.	49
6.2	Декогеренция с точки зрения уравнение Линдблада.	52
6.3	Как работает уравнение Линдблада. Типичный пример.	54
6.4	Уравнение Линдблада для наблюдаемых в представлении Гейзенберга.	55
6.5	Физический смысл введения POVM-элементов.	56
7	Лекция 7. Основы классической теории информации. Часть 1.	58
7.1	Классическая энтропия. Биты и наты.	58
7.2	Энтропия и информация.	58
7.3	Механизм декогеренции и парадокс кота Шредингера.	59
7.4	Граница между мирами.	63
8	Лекция 8. Основы классической теории информации. Часть 2.	64
8.1	Ограничения на величину шенноновской энтропии.	64
8.2	Двоичная энтропия.	65
8.3	Неравенство Йенсена и вогнутость энтропии Шеннона.	66
8.4	Классическая относительная энтропия и неравенство Гиббса.	67
8.5	Классическая совместная энтропия и субаддитивность.	68
8.6	Условная вероятность и теорема Байеса.	69
8.7	Классическая условная энтропия.	70
8.8	Доказательство субаддитивности.	71
8.9	Классическая взаимная информация.	71
8.10	Сильная субаддитивность.	72
9	Лекция 9. Основы квантовой теории информации. Часть 1.	74
9.1	Квантовая энтропия (энтропия фон Неймана).	74
9.2	Пример вычислений квантовой энтропии.	75
9.3	Энтропия замкнутой квантовой системы.	76
9.4	Ограничения на величину энтропии фон Неймана.	76
9.5	Энтропия чистого состояния.	77
9.6	Гипотеза о скрытых параметрах.	77
9.7	Квантовая и классическая энтропии смешанного состояния для диагональной матрицы плотности.	79

9.8	Вычисление квантовой и классической энтропии для недиагональной матрицы плотности.	80
10	Лекция 10. Основы квантовой теории информации. Часть 2.	83
10.1	Квантовая относительная энтропия и неравенство Клейна.	83
10.2	Пример использования неравенства Клейна.	85
10.3	Монотонность квантовой относительной энтропии.	86
10.4	Квантовая совместная энтропия и субаддитивность.	87
10.5	Свойство субаддитивности для состояния Вернера.	88
10.6	Субаддитивность и второе начало термодинамики.	89
11	Лекция 11. Основы квантовой теории информации. Часть 3.	91
11.1	Квантовая взаимная информация.	91
11.2	Неравенство треугольника.	92
11.3	Вогнутость квантовой энтропии.	94
11.4	Теорема о невозможности передачи произвольного смешанного состояния.	95
11.5	Приближенное копирование чистого состояния. "Угадайка"	95
11.6	Приближенное копирование чистого состояния. "Идентификация"	97
11.7	Оптимальное копирование чистого состояния.	98
12	Лекция 12. Нерелятивистская квантовая механика с точки зрения теории познания	99
12.1	Теория познания и нерелятивистская квантовая механика (НКМ)	99
12.2	ЭМПИРИЦИЗМ и РЕАЛИЗМ	100
12.3	Онтологические интерпретации нерелятивистской квантовой механики (НКМ)	106
12.4	Классификация онтологических моделей (по Спеккенсу)	111
12.5	Онтологические модели. Общее описание.	115
13	Лекция 13. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 1.	120
13.1	Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit).	120
13.2	Теория Спеккенса и теория спина $1/2$	126
13.3	Аналогии смеси и суперпозиции состояний в теории игрушечных битов Спеккенса.	128

14 Лекция 14. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 2.	131
14.1 Аналогии смеси и суперпозиции состояний в теории игрушечных битов Спеккенса. (продолжение).	131
14.2 Аналог унитарной эволюции в теории игрушечных битов.	132
14.3 Аналоги теории представлений	136
14.4 Формализм стабилизаторов в НКМ.	138
15 Лекция 15. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 3.	141
15.1 Формализм стабилизаторов в НКМ (продолжение).	141
15.2 Формализм стабилизаторов в теории игрушечных битов Спеккенса. . .	143
15.3 Системы двух игрушечных битов в теории Спеккенса.	144
16 Лекция 16. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 4.	151
16.1 Системы двух игрушечных битов в теории Спеккенса (продолжение). .	151
16.2 Степень совпадения или fidelity в теории игрушечных битов.	152
16.3 Теорема о невозможности клонирования неизвестного epistemic state для игрушечных битов.	154
16.4 Измерения в коррелированных системах.	156
16.5 Функции Вигнера как пример эпистемологических моделей.	157
17 Лекция 17. Функция Вигнера (продолжение).	163
17.1 Функции Вигнера как пример эпистемологических моделей (продолжение).	163
17.2 Уравнение эволюции для функции Вигнера (ур-ние Мойала).	167
18 Лекция 18. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 1.	170
18.1 Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории.	170
18.2 Совместная измеримость и неизмеримость.	170
18.3 Совместная измеримость vs. совместное существование.	173
18.4 Понятие об элементах физической реальности.	175
19 Лекция 19. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 2.	178
19.1 BCHSH-неравенства. Историческая справка.	178

19.2	ВЧШН-неравенства. Основная идея.	180
19.3	Простой вывод ВЧШН-неравенства.	180
19.4	Вывод ВЧШН-неравенства из условия неотрицательности совместных вероятностей.	183
19.5	No-signaling Conditions.	186
19.6	Вывод ВЧШН-неравенства при помощи концепции локальных скрытых параметров.	187
20	Лекция 20. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории.	
	Часть 3.	191
20.1	Граница Цирельсона.	191
20.2	Запутанные состояния вступают в игру.	194
20.3	Запутанные состояния продолжают игру.	197
20.4	Локальный реализм и ВЧШН-неравенства.	198
21	Лекция 21. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории.	
	Часть 4.	202
21.1	Вычисление вероятности $w(f^+, f'^-, g'^-)$	202
21.2	Элементы физической реальности, классический реализм и локальность.	203
21.3	Дискуссия: может быть, НКМ все-таки локальна?	203
21.4	Локальность для ВЧШН-неравенств и локальность в КТП - это одно и то же или это разные понятия?	204
21.5	Что такое ЭПР-парадокс?	207
21.6	Ведет ли ЭПР-аргументация к нарушению соотношения неопределенности?	210
22	Лекция 22. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории.	
	Часть 5.	212
22.1	Критерий сепарабельности по Беллу.	212
22.2	Применение критерия сепарабельности по Беллу к состоянию Вернера.	213
22.3	Нарушение ВЧШН-неравенства при помощи любого чистого запутанного состояния двух спинов $s=1/2$	214
22.4	Носки профессора Бертлмана и ВЧШН-неравенство.	216
22.5	Неравенство Вигнера.	218
22.6	Нарушение неравенства Вигнера в квантовой механике.	221
22.7	Информационное неравенство Белла.	224
22.8	Нарушение информационного неравенства Белла в квантовой механике.	226

23 Лекция 23. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории.	
Часть 6.	228
23.1 Парадокс Д. Мермина.	228
23.2 Какие еще существуют идеи проверки концепции LR?	232
23.3 Эксперименты по проверке неравенств Белла.	232
23.4 Дальнейшее развитие экспериментов.	234
23.5 Ящики Попеску-Рорлиха (Popescu-Rohrlich boxes).	235
24 Лекция 24. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 1.	241
24.1 Ящики Попеску-Рорлиха (продолжение).	241
24.2 Игра Белла (по Джефффри Бубу).	244
25 Лекция 25. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 2.	248
25.1 Игра Белла (продолжение).	248
25.2 Протоколы ван Дама.	251
25.3 Обобщение протоколов ван Дама.	253
26 Лекция 26. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 3.	256
26.1 Принцип информационной причинности.	256
27 Лекция 27. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 4.	263
27.1 Принцип информационной причинности (продолжение).	263
27.2 Геометрический взгляд на ящики Попеску-Рорлиха.	267
27.3 Решение парадоксов из курса.	273
28 Лекция 28. Принцип макроскопического реализма и неравенства Леггетта-Гарга.	276
28.1 Макроскопический реализм.	276
28.2 Вывод простейшего неравенства Леггетта-Гарга.	278
28.3 Получение семейства неравенств Леггетта-Гарга.	280
28.4 Нарушение неравенств Леггетта-Гарга в квантовой теории.	281
28.5 Люди, чьи фамилии носит неравенство Леггетта-Гарга.	282
28.6 Сильный и слабый NIM.	282
28.7 No-signaling in time.	283
28.8 Неравенства Леггетта-Гарга в форме Вигнера.	284
28.9 Обобщение неравенств Леггетта-Гарга в форме Вигнера на n различ- ных моментов времени и парадокс Зенона.	286

Лекция 1. Эволюция квантовой системы во времени.

Часть 4

Формула Ааронова-Бергмана-Лебовица

Применяя обобщенное правило фон Неймана, можно найти вероятность того, что квантовая система, которая до измерения находилась в состоянии $\hat{\rho}$, после выполнения измерения $\hat{M}_{\alpha'}$ перешла в состояние, которое описывается матрицей плотности $\hat{\sigma}$:

$$w(\sigma | \alpha' | \rho) = \frac{\text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha'}^\dagger)}{\text{Tr}(\hat{M}_{\alpha'}^\dagger \hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho})} \quad (1.1)$$

Однако часто необходимо решить другую задачу. Пусть имеется известный набор обобщенных измерений $\{\hat{M}_\alpha\}$. После применения какого-то измерения из этого набора к системе, которая до измерения находилась в состоянии $\hat{\rho}$, она перешла в состояние $\hat{\sigma}$. Какова вероятность $w(\alpha' | \rho | \sigma)$ того, что при этом было выполнено конкретное измерение $\hat{M}_{\alpha'}$ из набора измерений $\{\hat{M}_\alpha\}$?

Ответ на данный вопрос может дать формула Ааронова-Бергмана-Лебовица. Ее вывод основывается на предположении о справедливости в квантовой механике теоремы Байеса. (Спорность такого предположения обсуждалась в параграфах "Условная и совместная вероятность в классической и квантовой теориях" , "Формула для полной вероятности в классической теории вероятностей и квантовая теория" и "Теорема Байеса с точки зрения обобщенного правила Людерса" .)

Поэтому формула Ааронова-Бергмана-Лебовица имеет ограниченную применимость.

Предположим, что теорема Байеса справедлива в квантовой физике. Рассмотрим 2 события. X_α – событие, соответствующее тому, что было выполнено измерение \hat{M}_α , если до измерения система находилась в состоянии $\hat{\rho}$. Т.е. $X_\alpha = \alpha/\rho$. Событие Y отвечает тому, что система оказалась в состоянии $\hat{\sigma}$, т.е. $Y = \sigma$. Тогда по теореме Байеса:

$$w(\alpha' | \rho | \sigma) = w(X_{\alpha'} | Y) = \frac{w(Y | X_{\alpha'})w(X_{\alpha'})}{w(Y)} \quad (1.2)$$

При этом предполагаем, что $w(Y) \neq 0$

Согласно обобщенному правилу Людерса:

$$\hat{\rho}_{\alpha'} = \frac{\hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha'}^\dagger}{w(X_{\alpha'})} \quad (1.3)$$

где $w(X_{\alpha'}) = w(\alpha' | \rho) = \text{Tr}(\hat{M}_{\alpha'}^\dagger \hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho})$.

Далее при помощи определения степени совпадения двух матриц плотности имеем:

$$w(Y | X_{\alpha'}) w(X_{\alpha'}) = \text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{\rho}_{\alpha'}) w(X_{\alpha'}) = \frac{\text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha'}^\dagger)}{w(X_{\alpha'})} w(X_{\alpha'}) = \text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha'}^\dagger) \quad (1.4)$$

Если измерения $\{\hat{M}_{\alpha}\}$ являются независимыми событиями, то

$$w(Y) = \sum_{\alpha} w(Y | X_{\alpha}) w(X_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{M}_{\alpha} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha}^\dagger) \quad (1.5)$$

Окончательно получаем:

$$w(\alpha' | \rho | \sigma) = \frac{\text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{M}_{\alpha'} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha'}^\dagger)}{\sum_{\alpha} \text{Tr}(\hat{\sigma} \hat{M}_{\alpha} \hat{\rho} \hat{M}_{\alpha}^\dagger)} \quad (1.6)$$

Полученная формула – *формула Ааронова-Бергмана-Лебовица*.

В литературе более известен другой вариант этой формулы, когда состояния $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ являются чистыми, а операторы измерения \hat{M}_{α} – проекционными. Положим $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\hat{\sigma} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, $\hat{M}_{\alpha} = \hat{P}_{a_n} \equiv |a_n\rangle\langle a_n|$ (проекторы на собственный вектор некоторой наблюдаемой A , спектр которой дискретный и невырожденный). Тогда

$$w(a_{n'} | \psi | \varphi) = \frac{|\langle\varphi|\hat{P}_{n'}|\psi\rangle|^2}{\sum_n |\langle\varphi|\hat{P}_n|\psi\rangle|^2} \quad (1.7)$$

Обобщение формулы Ааронова-Бергмана-Лебовица можно получить для POVM-измерений.

Пусть измерение $\{\alpha\}$ задается набором POVM-операторов $\{E_{\alpha}\}$. Тогда вероятность в результате измерения $\hat{E}_{\alpha'}$ обнаружить наблюдаемую A (считаем, что ее спектр дискретный и невырожденный) в состоянии $a_{i'}$:

$$w(a_{i'} | \rho | \sigma) = \frac{\text{Tr}(\hat{E}_{\alpha'} \hat{P}_{a_{i'}} \hat{\rho} \hat{P}_{a_{i'}})}{\sum_j \text{Tr}(\hat{E}_{\alpha'} \hat{P}_{a_j} \hat{\rho} \hat{P}_{a_j})} \quad (1.8)$$

Формула Ааронова-Бергмана-Лебовица, проективные измерения и "квантовая стрела времени" .

Вспомним проекционный постулат Борна:

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.9)$$

Спектр наблюдаемой A при этом дискретный и невырожденный.

$$w(a_{n'} | \rho) = \text{Tr}(\hat{P}_{a_{n'}}\hat{\rho}) = |\langle a_{n'} | \psi \rangle|^2 \quad (1.10)$$

В результате измерения происходит редукция волновой функции: $|\psi\rangle \rightarrow |a_{n'}\rangle$. При этом обратно по $|a_{n'}\rangle$ вектор состояния получить нельзя: $|\psi\rangle \leftarrow |a_{n'}\rangle$.

Но это не означало, что появляется стрела времени из прошлого в будущее.

В силу симметричности:

$$w(a_{n'} | \rho) = |\langle a_{n'} | \psi \rangle|^2 = |\langle \psi | a_{n'} \rangle|^2 = w(\rho | a_{n'}) \quad (1.11)$$

Заметим, что формула

$$w(P' | \psi | \varphi) = \frac{|\langle \varphi | \hat{P}' | \psi \rangle|^2}{\sum_P |\langle \varphi | \hat{P} | \psi \rangle|^2} \quad (1.12)$$

симметрична относительно замены $|\psi\rangle \longleftrightarrow |\varphi\rangle$. Это позволяет утверждать, что переход из *фиксированного* начального состояния $|i\rangle$ в *фиксированное* конечное состояние $|f\rangle$ *обратим*, даже если в некоторый момент времени t (такой, что $t_i < t < t_f$) над микросистемой произвели *известное* проективное измерение \hat{P}' .

Пусть $|\psi\rangle = \hat{U}(t, t_i) |i\rangle$ и пусть $|\varphi\rangle = \hat{U}(t, t_f) |f\rangle = \hat{U}^\dagger(t_f, t) |f\rangle$.

В последнем равенстве было использовано простое рассуждение. Пусть гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, при помощи которого происходит эволюция, не зависит от времени. Тогда оператор эволюции:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot(t-t_0)} \quad (1.13)$$

$$\hat{U}(t_0, t) = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot(t-t_0)} = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (1.14)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 w_{t_i \rightarrow t \rightarrow t_f} &= \frac{\left| \langle f | \hat{U}(t_f, t) \hat{P}' \hat{U}(t, t_i) | i \rangle \right|^2}{\sum_P \left| \langle f | \hat{U}(t_f, t) \hat{P} \hat{U}(t, t_i) | i \rangle \right|^2} = \frac{\left| \langle i | \hat{U}^\dagger(t, t_i) \hat{P}'^\dagger \hat{U}^\dagger(t_f, t) | f \rangle \right|^2}{\sum_P \left| \langle i | \hat{U}^\dagger(t, t_i) \hat{P}^\dagger \hat{U}^\dagger(t_f, t) | f \rangle \right|^2} = \\
 &= \frac{\left| \langle i | \hat{U}(t_i, t) \hat{P}' \hat{U}(t, t_f) | f \rangle \right|^2}{\sum_P \left| \langle i | \hat{U}(t_i, t) \hat{P} \hat{U}(t, t_f) | f \rangle \right|^2} = w_{t_f \rightarrow t \rightarrow t_i}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

При доказательстве использовалась эрмитовость проекционных операторов \hat{P} . Данное доказательство элементарно обобщается на любое количество известных промежуточных проективных измерений. (Или даже обобщенных, т.к. обобщенный оператор может быть представлен в виде произведения проективного и унитарного операторов)

Равенство $w_{t_i \rightarrow t \rightarrow t_f} = w_{t_f \rightarrow t \rightarrow t_i}$ означает, что при помощи проективного измерения *невозможно* создать квантовую стрелу времени, хотя редукция вектора состояния в процессе измерения и является необратимой процедурой.

В мире только с проективными измерениями для установления стрелы времени необходимы дополнительные соображения. Например, термодинамические. В параграфе "Декогеренция и парадокс кота Шредингера" в результате выполнения измерения над состоянием микросистемы склянка с ядом может разбиться, а кот умереть. Возникает термодинамическая необратимость процедуры измерения, но на макроскопическом уровне.

На микроскопическом уровне нарушение T-инвариантности возникает в электро-слабой теории за счет механизма CP-нарушения, который не сводится к процедуре проективных измерений.

Третья формула или некорректная задача.

При помощи формулы фон Неймана можно найти условную вероятность $w(\sigma | \alpha' | \rho)$, что система, которая до измерения находилась в состоянии $\hat{\rho}$, после проведения измерения $\hat{M}_{\alpha'}$ перейдет в состояние $\hat{\sigma}$.

Формула Ааронова-Бергмана-Лебовица дает условную вероятность $w(\alpha' | \rho | \sigma)$ того, что если система перешла из начального состояния $\hat{\rho}$ в конечное состояние $\hat{\sigma}$, то такой переход произошел под действием измерения $\hat{M}_{\alpha'}$.

Пусть под действием известного измерения $\hat{M}_{\alpha'}$ система перешла в состояние $\hat{\sigma}$. Какова вероятность $w(\rho | \sigma | \alpha')$ того, что до измерения система находилась в состоянии $\hat{\rho}$?

Легко видеть, что если оператор измерения $\hat{M}_{\alpha'}$ не имеет обратного (например, $\hat{M}_{\alpha'}$ совпадает с проекционным оператором), то такая задача не может быть решена. Если обратный оператор существует, то достаточно воспользоваться формулой фон Неймана.

Докажем, что проекционный оператор не имеет обратного (от противного).

Пусть существует проекционный оператор $\hat{P} : \hat{P}^2 = \hat{P}$. Пусть он имеет обратный, т.е. $\hat{P}\hat{P}^{-1} = \hat{1}$. Тогда:

$$\hat{P}^2\hat{P}^{-1} = \hat{P} \quad (1.16)$$

$$\hat{P}\hat{P}^{-1} = \hat{P} \quad (1.17)$$

Т.е. если у проекционного оператора есть обратный, то всегда $\hat{P} = \hat{1}$.

Оператор производной оператора по времени для смешанных состояний.

Обобщим на смешанные состояния Постулат №7 из раздела "Постулаты квантовой механики" для производной оператора по времени.

Постулат №7': оператор $\hat{B} \equiv d\hat{A}/dt$ (читается как единый символ!) называется производной оператора \hat{A} по времени, если выполняется следующее равенство для средних величин наблюдаемой A :

$$\langle B \rangle_{\rho}(t) = \frac{d}{dt} \left(\langle A \rangle_{\rho}(t) \right) \quad (1.18)$$

Хотя сам оператор от времени может не зависеть, но соответствующее среднее значение от времени зависит.

Возьмем в представлении Шредингера оператор некоторой наблюдаемой $\hat{A}^{(S)}$, который явно от времени не зависит. Его среднее значение:

$$\left\langle \psi^{(S)}(t) \left| \hat{A}^{(S)} \right| \psi^{(S)}(t) \right\rangle = \langle A \rangle_{\psi}(t) \quad (1.19)$$

(Вектора состояния зависят от времени.)

Исходя из этого постулата и уравнения фон Неймана в представлении Шредингера можно получить явный вид оператора \hat{B} в представлении Шредингера:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^{(S)}\hat{B}^{(S)}\right) &= \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^{(S)}\hat{A}^{(S)}\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\hat{\rho}^{(S)}}{\partial t}\hat{A}^{(S)} + \hat{\rho}^{(S)}\frac{\partial\hat{A}^{(S)}}{\partial t}\right) = \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}^{(S)},\hat{\rho}^{(S)}\right]\hat{A}^{(S)} + \hat{\rho}^{(S)}\frac{\partial\hat{A}^{(S)}}{\partial t}\right)\end{aligned}\quad (1.20)$$

Чтобы преобразовать первое слагаемое, используем операторное равенство (которое легко доказать):

$$\mathrm{Tr}\left([\hat{A}_1,\hat{A}_2]\hat{B}\right) = -\mathrm{Tr}\left(\hat{A}_2[\hat{A}_1,\hat{B}]\right)\quad (1.21)$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^{(S)}\hat{B}^{(S)}\right) = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^{(S)}\left(-\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}^{(S)},\hat{A}^{(S)}\right] + \frac{\partial\hat{A}^{(S)}}{\partial t}\right)\right)\quad (1.22)$$

Отсюда видно, что

$$\left(\frac{d\hat{A}}{dt}\right)^{(S)} = \hat{B}^{(S)} = \frac{\partial\hat{A}^{(S)}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}^{(S)},\hat{A}^{(S)}\right]\quad (1.23)$$

Т.е. производная оператора по времени для смешанных состояний выглядит точно так же, как и для чистых состояний. Поэтому все рассуждения об интегралах движения тоже остаются в силе.

Свойства интегралов движения.

Пусть наблюдаемой A соответствует оператор $\hat{A}^{(S)}$, который явно не зависит от времени, т.е. пусть $\partial\hat{A}^{(S)}/\partial t = 0$. Тогда наблюдаемая A является интегралом движения, если

$$\left(\frac{d\hat{A}}{dt}(t)\right)^{(S)} = 0\quad (1.24)$$

Из параграфа "Производная оператора по времени для смешанных состояний" следует, что для интегралов движения

$$\left[\hat{H}^{(S)},\hat{A}^{(S)}\right] = 0\quad (1.25)$$

Также в этом случае

$$\left[\hat{A}^{(S)},\hat{\rho}^{(S)}(t)\right] = 0\quad (1.26)$$

Докажем последнее утверждение:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \left[\hat{H}^{(S)}, \hat{A}^{(S)} \right] \right\rangle_{\rho} = \text{Tr} \left(\hat{\rho}^{(S)} \left[\hat{H}^{(S)}, \hat{A}^{(S)} \right] \right) = \\ &= -\text{Tr} \left(\hat{\rho}^{(S)} \left[\hat{A}^{(S)}, \hat{H}^{(S)} \right] \right) = \text{Tr} \left(\left[\hat{A}^{(S)}, \hat{\rho}^{(S)} \right] \hat{H}^{(S)} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Т.к. $\hat{H}^{(S)} \neq 0$, то $\left[\hat{A}^{(S)}, \hat{\rho}^{(S)}(t) \right] = 0$. Также в последнем равенстве было использовано (1.20).

Представление взаимодействия для чистых состояний.

Пусть квантовая система описывается при помощи гамильтониана $\hat{H}^{(S)}(t)$:

$$\hat{H}^{(S)}(t) = \hat{H}_0^{(S)} + \hat{V}^{(S)}(t), \quad (1.28)$$

где $\hat{H}_0^{(S)}$ – гамильтониан "невозмущенной системы" и $\hat{V}^{(S)}(t)$ – т.н. "возмущение". (Пусть оба оператора эрмитовы.)

Как правило $\hat{H}_0^{(S)}$ выбирают так, чтобы соответствующее ему уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi^{(S)}(t)\rangle}{\partial t} = H_0^{(S)} |\psi^{(S)}(t)\rangle \quad (1.29)$$

имело точное решение.

По аналогии с оператором эволюции $\hat{U}(t, t_0)$ (см. параграф "Эволюция матрицы плотности во времени. Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана) ") определим новый унитарный оператор $\hat{U}_0(t, t_0)$:

$$|\psi^{(S)}(t)\rangle = \hat{U}_0(t, t_0) |\psi^{(S)}(t_0)\rangle \quad (1.30)$$

$\hat{U}_0(t, t_0)$ удовлетворяет уравнениям:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_0(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}_0^{(S)} \hat{U}_0(t, t_0) \quad (1.31)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0^{(S)} \quad (1.32)$$

с начальным условием $\hat{U}_0(t_0, t_0) = \hat{1}$. Очевидно, что $\hat{U}_0(t, t_0)$ – частный случай оператора $\hat{U}(t, t_0)$ в пределе, когда $\hat{V}^{(S)}(t) \rightarrow 0$.

С помощью $\hat{U}_0(t, t_0)$ определим векторы состояния и операторы в представлении взаимодействия "(I)":

$$\begin{cases} |\psi^{(I)}(t)\rangle \stackrel{def}{=} \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\psi^{(S)}(t)\rangle \\ \hat{A}^{(I)}(t) \stackrel{def}{=} \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}^{(S)}(t_0) \hat{U}_0(t, t_0) \end{cases} \quad (1.33)$$

Т.к. унитарный оператор $\hat{U}_0(t, t_0)$ является функцией только оператора $\hat{H}_0^{(S)}$, то

$$[\hat{H}_0^{(S)}, \hat{U}_0(t, t_0)] = 0 \quad (1.34)$$

Рассмотрим произвольный оператор \hat{A} и операторную функцию $F(\hat{A}) = \sum_n C_n \hat{A}^n$.

Пример: $e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n$. Очевидно, что $[\hat{A}, \hat{A}^n] = 0$. Следовательно, \hat{A} коммутирует с $F(\hat{A})$.

Тогда из определения оператора в представлении взаимодействия:

$$\hat{H}_0^{(I)} = \hat{H}_0^{(S)} \equiv \hat{H}_0 \quad (1.35)$$

Из определения представления взаимодействия и унитарности оператора $\hat{U}_0(t, t_0)$ легко показать, что:

- 1) Для среднего значения любой наблюдаемой A справедливо:

$$\langle A \rangle_\rho = \langle \psi^{(I)}(t) | \hat{A}^{(I)}(t) | \psi^{(I)}(t) \rangle = \langle \psi^{(S)}(t) | \hat{A}^{(S)}(t_0) | \psi^{(S)}(t) \rangle \quad (1.36)$$

- 2) Собственные значения оператора \hat{A} в представлении взаимодействия совпадают с собственными значениями этого оператора в представлении Шредингера. (А также в любом другом представлении, которое связано с представлением Шредингера или взаимодействия унитарным преобразованием)
- 3) Сохраняется вид любых операторных соотношений (коммутаторов, антикоммутаторов, произведений и т.д.).

Например, если $[\hat{A}^{(S)}, \hat{B}^{(S)}] = \hat{C}^{(S)}$, то $[\hat{A}^{(I)}, \hat{B}^{(I)}] = \hat{C}^{(I)}$

- 4) В представлении взаимодействия уравнения эволюции имеют вид:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial |\psi^{(I)}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) |\psi^{(I)}(t)\rangle \\ i\hbar \frac{\partial \hat{A}^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{A}^{(I)}(t), \hat{H}_0] \end{cases} \quad (1.37)$$

Лекция 2. Эволюция квантовой системы во времени.

Представление взаимодействия для чистых состояний.

Пункты 1) – 3) (из прошлой лекции) очевидны. Докажем соотношение пункта 4):

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial |\psi^{(I)}(t)\rangle}{\partial t} &= i\hbar \left(\frac{\partial \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)}{\partial t} \right) |\psi^{(S)}(t)\rangle + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial |\psi^{(S)}(t)\rangle}{\partial t} = \\
 &= -\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0 |\psi^{(S)}(t)\rangle + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}^{(S)}(t) |\psi^{(S)}(t)\rangle = \\
 &= \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{V}^{(S)}(t) |\psi^{(S)}(t)\rangle = \\
 &= \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{V}^{(S)}(t) \hat{U}_0(t, t_0) \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\psi^{(S)}(t)\rangle = \hat{V}^{(I)}(t) |\psi^{(I)}(t)\rangle
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В процессе дифференцирования используются формулы перехода от представления Шредингера к представлению взаимодействия, выражения для дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет оператор эволюции \hat{U}_0 и уравнение Шредингера.

Аналогично (предположим, что соответствующий наблюдаемой оператор в представлении Шредингера от времени не зависит.):

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \hat{A}^{(I)}(t)}{\partial t} &= \\
 &= i\hbar \left(\frac{\partial \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)}{\partial t} \right) \hat{A}^{(S)}(t_0) \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}^{(S)}(t_0) i\hbar \left(\frac{\partial \hat{U}_0(t, t_0)}{\partial t} \right) = \\
 &= -\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0 \hat{A}^{(S)}(t_0) \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}^{(S)}(t_0) \hat{H}_0 \hat{U}_0(t, t_0) = \\
 &= -\hat{H}_0 \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}^{(S)}(t_0) \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}^{(S)}(t_0) \hat{U}_0(t, t_0) \hat{H}_0 = \\
 &= -\hat{H}_0 \hat{A}^{(I)}(t) + \hat{A}^{(I)}(t) \hat{H}_0 = \left[\hat{A}^{(I)}(t), \hat{H}_0 \right]
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

При доказательстве мы учли, что операторы \hat{U}_0 и \hat{H}_0 коммутируют.

Доказано.

Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана) в представлении взаимодействия.

Данное уравнение получается аналогично соответствующему уравнению в представлении Шредингера (смотри параграф "Эволюция матрицы плотности во време-

ни. Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана)"). Поэтому доказательство проведем конспективно.

Рассмотрим квантовую систему в чистом состоянии $|\psi_l^{(I)}(t)\rangle$. Оно удовлетворяет уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_l^{(I)}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) |\psi_l^{(I)}(t)\rangle \quad (2.3)$$

Его решение по аналогии с решением для нестационарного уравнения Шредингера можно записать при помощи оператора эволюции $\hat{S}(t, t_0)$ в виде:

$$|\psi_l^{(I)}(t)\rangle = \hat{S}(t, t_0) |\psi_l^{(I)}(t_0)\rangle = \hat{S}(t, t_0) |\psi_{l_0}^{(S)}\rangle, \quad (2.4)$$

так как $|\psi_l^{(I)}(t = t_0)\rangle = |\psi_l^{(S)}(t = t_0)\rangle = |\psi_{l_0}^{(S)}\rangle$.

Предположим, что оператор $\hat{V}^{(I)}(t)$ – эрмитов. Тогда уравнение для бра-вектора $\langle \psi_l^{(I)}(t) |$ будет иметь вид:

$$-i\hbar \frac{\partial \langle \psi_l^{(I)}(t) |}{\partial t} = \langle \psi_l^{(I)}(t) | \hat{V}^{(I)}(t) \quad (2.5)$$

Его решение:

$$\langle \psi_l^{(I)}(t) | = \langle \psi_{l_0}^{(S)} | \hat{S}^\dagger(t, t_0) \quad (2.6)$$

При эрмитовом $\hat{V}^{(I)}$ оператор $\hat{S}(t, t_0)$ должен быть унитарным.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\hat{S}(t, t_0)$ и $\hat{S}^\dagger(t, t_0)$ удовлетворяют уравнениям:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) \hat{S}(t, t_0) \quad (2.7)$$

и

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{S}^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = \hat{S}^\dagger(t, t_0) \hat{V}^{(I)}(t) \quad (2.8)$$

с начальным условием $\hat{S}(t_0, t_0) = \hat{1}$.

Заметим, что данные уравнения по виду в точности напоминают операторные уравнения для \hat{U}_0 и соответствуют операторным уравнениям для оператора эволюции \hat{U} .

Матрица плотности чистого состояния $\hat{\rho}_l^{(I)}(t) = |\psi_l^{(I)}(t)\rangle \langle \psi_l^{(I)}(t)|$ зависит от времени по закону:

$$\hat{\rho}_l^{(I)}(t) = \hat{S}(t, t_0) \hat{\rho}_{l_0}^{(S)} \hat{S}^\dagger(t, t_0) \quad (2.9)$$

(где $\hat{\rho}_{l0}^{(S)}$ – проектор на чистое состояние в начальный момент времени), что приводит к дифференцированию:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_l^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{V}^{(I)}(t), \hat{\rho}_l^{(I)}(t)] \quad (2.10)$$

с начальным условием $\hat{\rho}_l^{(I)}(t=t_0) = \hat{\rho}_l^{(S)}(t=t_0) = \hat{\rho}_{l0}^{(S)}$.

В силу линейности $\hat{S}(t, t_0)$ матрица плотности смешанного состояния $\hat{\rho}^{(I)}(t) = \sum_l w_l \hat{\rho}_l^{(I)}(t)$ зависит от времени точно так же, как и матрица плотности чистого состояния:

$$\hat{\rho}^{(I)}(t) = \hat{S}(t, t_0) \hat{\rho}_0^{(S)} \hat{S}^\dagger(t, t_0) \quad (2.11)$$

Следовательно, эта матрица удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{V}^{(I)}(t), \hat{\rho}^{(I)}(t)] \quad (2.12)$$

с начальным условием $\hat{\rho}^{(I)}(t_0) = \hat{\rho}_0^{(S)}$. Это уравнение является искомым.

Решение квантового уравнения Лиувилля в представлении взаимодействия.

Данное решение можно получить без вычислений, если сравнить дифференциальное уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{V}^{(I)}(t), \hat{\rho}^{(I)}(t)], \quad \hat{\rho}^{(I)}(t_0) = \hat{\rho}_0^{(S)} \quad (2.13)$$

с дифференциальным уравнением

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(S)}(t)}{\partial t} = [\hat{H}^{(S)}(t), \hat{\rho}^{(S)}(t)], \quad \hat{\rho}^{(S)}(t_0) = \hat{\rho}_0^{(S)}, \quad (2.14)$$

решение которого было получено в параграфе "Решение квантового уравнения Лиувилля". Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(I)}(t) &= \\ &= \hat{\rho}_0^{(S)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^k \int_{t_0}^t d\tau_k \int_{t_0}^{\tau_k} d\tau_{k-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 [\hat{V}^{(I)}(\tau_k), [\hat{V}^{(I)}(\tau_{k-1}), \dots [\hat{V}^{(I)}(\tau_1), \hat{\rho}_0^{(S)}] \dots]] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Во вложенных коммутаторах каждого из членов ряда переменные интегрирования τ_i удовлетворяют цепочке неравенств:

$$t \geq \tau_k \geq \tau_{k-1} \geq \dots \geq \tau_1 \geq t_0 \quad (2.16)$$

Пример.

Воспользуемся решением уравнения для эволюции матрицы плотности в представлении взаимодействия для вывода золотого правила Ферми.

Пусть есть квантовая система, которая описывается гамильтонианом:

$$\hat{H}^{(S)}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}^{(S)}(t) \quad (2.17)$$

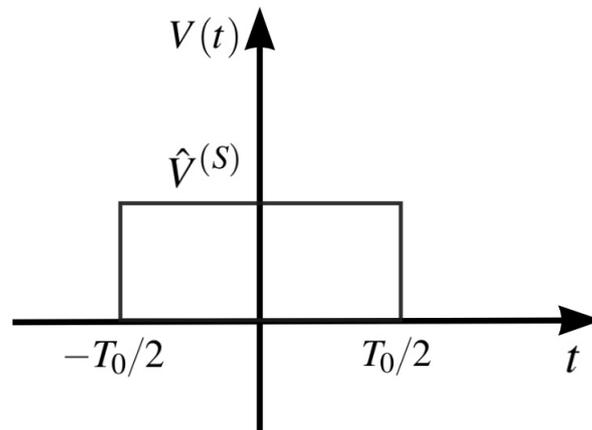


Рис. 2.1. График оператора взаимодействия.

Для простоты пусть взаимодействие "включается" в момент времени $t = -T_0/2$ и "выключается" при $t = T_0/2$ (Рис. 2.1). (T_0 – параметр размерности времени, $T_0 \geq 0$.)

Зададим оператор возмущения в представлении Шредингера:

$$\hat{V}^{(S)}(t) = \begin{cases} 0, t < -T_0/2 \\ 0, t > T_0/2 \\ \hat{V}^{(S)}, t \in [-T_0/2, T_0/2] \end{cases} \quad (2.18)$$

Оператор эволюции:

$$\hat{U}_0(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 \cdot (t - t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (2.19)$$

Если начальный момент времени $t_0 = -T_0/2$, то подобный оператор эволюции будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{U}_0(\tau, -T_0/2) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(\tau+T_0/2)} \quad (2.20)$$

Определим полный набор собственных векторов и собственных значений оператора \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_0 |E_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |E_n^{(0)}\rangle \quad (2.21)$$

Для простоты будем считать, что \hat{H}_0 имеет невырожденный спектр.

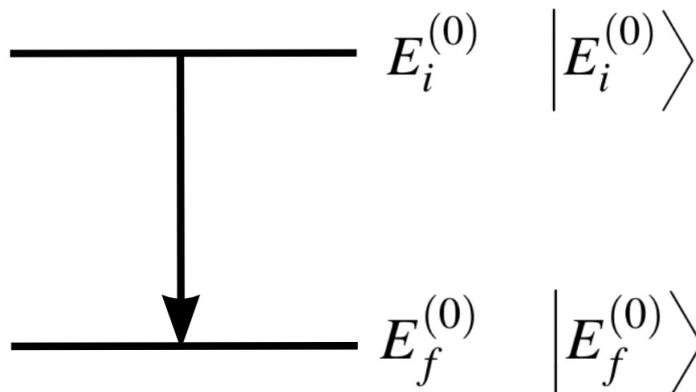


Рис. 2.2. Схема перехода системы из начального состояния $E_i^{(0)}$ в конечное $E_f^{(0)}$.

Имея начальное состояние $E_i^{(0)}$ гамильтониана \hat{H}_0 , надо найти вероятность перехода в единицу времени из этого начального состояния в некоторое конечное состояние $E_f^{(0)}$ (Рис. 2.2). (Понятно, что начальное состояние может быть возбужденным уровнем атома, а конечное состояние – основным уровнем атома плюс фотоном соответствующей энергии.)

Так как $E_i^{(0)}$ и $E_f^{(0)}$ – собственные значения гамильтониана, то они отвечают собственным векторам, соответственно, $|E_i^{(0)}\rangle$ и $|E_f^{(0)}\rangle$. По каждому из этих векторов можно написать матрицу плотности начального состояния:

$$\hat{\rho}_i^{(S)} = |E_i^{(0)}\rangle\langle E_i^{(0)}| \quad (2.22)$$

и матрицу плотности состояния, в которое надо перейти:

$$\hat{\rho}_f^{(S)} = |E_f^{(0)}\rangle\langle E_f^{(0)}| \quad (2.23)$$

Так как состояния отвечают разным собственным значениям эрмитова оператора \hat{H}_0 , то в силу ортогональности:

$$\langle E_i^{(0)} | E_f^{(0)} \rangle = 0 \quad (2.24)$$

Следовательно

$$\hat{\rho}_i^{(S)} \hat{\rho}_f^{(S)} = \hat{\rho}_f^{(S)} \hat{\rho}_i^{(S)} = 0 \quad (2.25)$$

Вероятность перехода в единицу времени из начального состояния i в фиксированное конечное f :

$$w_{fi} = \frac{\text{Tr} \left(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{\rho}_i^{(I)} \left(\frac{T_0}{2} \right) \right)}{T_0} \quad (2.26)$$

Предположим, что возмущение мало по какому-либо параметру. Поэтому будем считать w_{fi} в первом исчезающем порядке теории возмущения.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(I)} \left(\frac{T_0}{2} \right) &= \hat{\rho}_i^{(S)} - \frac{i}{\hbar} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \underbrace{\left[\hat{V}^{(I)}(\tau), \hat{\rho}_i^{(S)} \right]}_{=\hat{V}^{(I)}\hat{\rho}_i^{(S)} - \hat{\rho}_i^{(S)}\hat{V}^{(I)}} + \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_2 \int_{-T_0/2}^{\tau_2} d\tau_1 \left[\hat{V}^{(I)}(\tau_2), \left[\hat{V}^{(I)}(\tau_1), \hat{\rho}_i^{(S)} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{\rho}_i^{(S)} = 0 \quad (2.28)$$

$$\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)} = 0 \quad (2.29)$$

Используем свойство цикличности следа:

$$\text{Tr} \left(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)} \hat{\rho}_i^{(S)} \right) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_i^{(S)} \hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Получаем, что только третье слагаемое дает ненулевой вклад в первый порядок теории возмущений.

Подставим $\hat{\rho}^{(I)}(T_0/2)$ в выражение для w_{fi} . Так как $\hat{\rho}_f^{(S)}$ не зависит от времени, то его можно внести под знак интеграла. В силу линейности следа интегрирование можно вынести за знак следа.

$$w_{fi} = \frac{1}{T_0} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_2 \int_{-T_0/2}^{\tau_2} d\tau_1 \text{Tr} \left(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \hat{V}^{(I)}(\tau_1) \hat{\rho}_i^{(S)} - \right. \\ \left. - \hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) - \hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) + \underbrace{\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{\rho}_i^{(S)}}_{=0} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \right) \quad (2.31)$$

Используя свойства линейности и цикличности следа, легко выяснить, что первое слагаемое также равно 0. Ненулевыми являются только второе и третье слагаемые.

$$w_{fi} = \frac{-1}{T_0} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_2 \int_{-T_0/2}^{\tau_2} d\tau_1 \text{Tr} \left(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) + \right. \\ \left. + \hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \right) \quad (2.32)$$

Обозначим след под интегралом:

$$F(\tau_2, \tau_1) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) + \hat{\rho}_f^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_1) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{V}^{(I)}(\tau_2) \right) \quad (2.33)$$

Легко видеть, что $F(\tau_2, \tau_1) = F(\tau_1, \tau_2)$

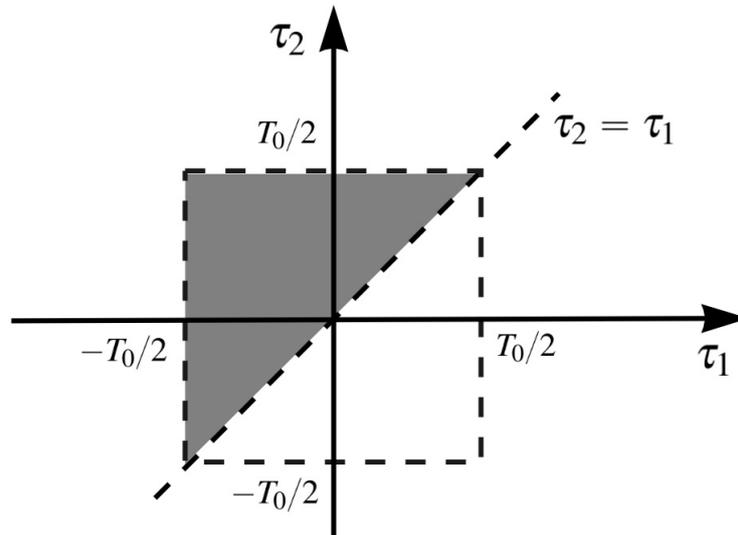


Рис. 2.3. Область интегрирования в w_{fi} . Заштрихованная область – область интегрирования в w_{fi} . Незаштрихованная область (нижний Δ) – область интегрирования при замене $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ в выражении.

На (Рис. 2.3) показана область интегрирования в w_{fi} – заштрихованная область. Если в выражении поменять местами τ_1 и τ_2 , то в силу симметрии $F(\tau_1, \tau_2)$ интеграл будет равен исходному, но его областью интегрирования будет незаштрихованная область на (Рис. 2.3).

Симметризуем выражение в соответствии с рисунком:

$$\begin{aligned} w_{fi} &= \frac{-1}{2T_0} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_2 \int_{-T_0/2}^{\tau_2} d\tau_1 F(\tau_2, \tau_1) + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_1 \int_{-T_0/2}^{\tau_1} d\tau_2 F(\tau_1, \tau_2) \right] = \\ &= \frac{-1}{2T_0} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_1 F(\tau_2, \tau_1) \right] = \end{aligned} \quad (2.34)$$

т.к. теперь в w_{fi} оба слагаемые симметричные, то в выражении для $F(\tau_2, \tau_1)$ оба слагаемых вносят одинаковый вклад.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T_0} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_f^{(S)} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \hat{V}^{(I)}(\tau_2) d\tau_2 \right] \hat{\rho}_i^{(S)} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \hat{V}^{(I)\dagger}(\tau_1) d\tau_1 \right] \right) = \\ &= \frac{1}{T_0} \text{Tr} \left(|E_f^{(0)}\rangle\langle E_f^{(0)}| \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \hat{V}^{(I)}(\tau_2) d\tau_2 \right] |E_i^{(0)}\rangle\langle E_i^{(0)}| \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \hat{V}^{(I)\dagger}(\tau_1) d\tau_1 \right] \right) = \\ &= \frac{1}{T_0} \text{Tr} \left(\langle E_f^{(0)}| \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \hat{V}^{(I)}(\tau_2) d\tau_2 \right] |E_i^{(0)}\rangle\langle E_i^{(0)}| \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \hat{V}^{(I)\dagger}(\tau_1) d\tau_1 \right] |E_f^{(0)}\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{T_0} \left| \langle E_f^{(0)}| \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{-i}{\hbar} d\tau \hat{V}^{(I)}(\tau) |E_i^{(0)}\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Известно Золотое правило Ферми (вероятность перехода из начального состояния в конечное в единицу времени):

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho_f \Big|_{E_i^{(0)}=E_f^{(0)}}, \quad (2.36)$$

где V_{fi} – матричный элемент от оператора взаимодействия между начальным и конечным состоянием в представлении Шредингера, ρ_f – плотность конечных состояний в единицу энергии.

Вспомним простое соотношение: если $\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$ и $F(\hat{A})$ – операторная функция, то $F(\hat{A})|a_n\rangle = F(a_n)|a_n\rangle$.

$$\begin{aligned}
 & \langle E_f^{(0)} | \frac{-i}{\hbar} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \hat{V}^{(I)}(\tau) | E_i^{(0)} \rangle = \\
 & = -\frac{i}{\hbar} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \langle E_f^{(0)} | \hat{U}_0^\dagger(\tau, -T_0/2) \hat{V}^{(S)}(\tau) \hat{U}_0(\tau, -T_0/2) | E_i^{(0)} \rangle = \\
 & = -\frac{i}{\hbar} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \langle E_f^{(0)} | e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 \cdot (\tau + \frac{T_0}{2})} \hat{V}^{(S)}(\tau) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 \cdot (\tau + \frac{T_0}{2})} | E_i^{(0)} \rangle = \\
 & = -\frac{i}{\hbar} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau e^{\frac{i}{\hbar}\tau(E_f^{(0)} - E_i^{(0)})} e^{\frac{i}{2\hbar}T_0(E_f^{(0)} - E_i^{(0)})} \langle E_f^{(0)} | \hat{V}^{(S)} | E_i^{(0)} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Введем обозначения:

$$\Delta E = E_f^{(0)} - E_i^{(0)} \tag{2.38}$$

$$V_{fi} = \langle E_f^{(0)} | \hat{V}^{(S)} | E_i^{(0)} \rangle \tag{2.39}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{\hbar} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau e^{\frac{i}{\hbar}\tau(E_f^{(0)} - E_i^{(0)})} e^{\frac{i}{2\hbar}T_0(E_f^{(0)} - E_i^{(0)})} \langle E_f^{(0)} | \hat{V}^{(S)} | E_i^{(0)} \rangle = \\
 & = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} e^{\frac{i}{2\hbar}\Delta E T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E \tau} - 2i V_{fi} \frac{e^{\frac{i}{2\hbar}\Delta E T_0}}{\Delta E} \sin\left(\frac{\Delta E T_0}{2\hbar}\right)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$w_{fi} = \frac{\pi |V_{fi}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\pi T_0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}\right)^2} \sin^2\left(T_0 \frac{\Delta E}{2\hbar}\right) \tag{2.41}$$

Предположим, что взаимодействие возникло при $t = -\infty$ и действовало до $t = +\infty$. Тогда надо взять предел при $T_0 \rightarrow \infty$.

Воспользуемся известным из теории специальных функций выражением ("Уравнения математической физики" В.С.Владимиров М, "Наука" 1988г., стр. 104):

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi T_0} \frac{\sin^2(T_0 a)}{a^2} = \delta(a) \quad (2.42)$$

Тогда:

$$w_{fi} = \frac{\pi |V_{fi}|^2}{\hbar^2} \delta\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}\right) \quad (2.43)$$

$$\delta(ay) = \frac{1}{|a|} \delta(y) \quad (2.44)$$

Получаем формулу для перехода из точного начального состояния в точное конечное:

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f^{(0)} - E_i^{(0)}) \quad (2.45)$$

Часто бывает интересно рассматривать переходы из фиксированного начального состояния в какое-либо конечное состояние непрерывного спектра. Тогда надо учесть плотность конечных состояний:

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f^{(0)} - E_i^{(0)}) d\Gamma_f \quad (2.46)$$

$$d\Gamma_f = \rho_f dE_f^{(0)} \quad (2.47)$$

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho_f \Big|_{E_f^{(0)}=E_i^{(0)}} \quad (2.48)$$

– Золотое правило Ферми.

Лекция 3. Эволюция квантовой системы во времени.

Часть 6. Описание открытых квантовых систем.

Часть 1.

Золотое правило Ферми (продолжение).

На прошлой лекции было получено Золотое правило Ферми

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho_f \Big|_{E_f^{(0)}=E_i^{(0)}} \quad (3.1)$$

при помощи решения уравнения для матрицы плотности в представлении взаимодействия. Но можно было бы поступить проще. При вычислении w_{fi} можно было подставить $\hat{\rho}^{(I)}(t)$ не в виде решения дифференциального уравнения, а в виде:

$$\hat{\rho}^{(I)}(t) = \hat{S}(t, t_0) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{S}^\dagger(t, t_0) \quad (3.2)$$

Разложим $\hat{S}(t, t_0)$ в ряд:

$$\hat{S}(t, t_0) = \underbrace{\hat{S}^{(0)}(t, t_0)}_{\sim \hat{I}} + \underbrace{\hat{S}^{(1)}(t, t_0)}_{\sim \hat{V}^{(I)}(\tau)} + \underbrace{\hat{S}^{(2)}(t, t_0)}_{\sim \hat{V}^{(I)}(\tau_1) \hat{V}^{(I)}(\tau_2)} \quad (3.3)$$

На прошлой лекции было показано, что $\hat{S}(t, t_0)$ удовлетворяет операторному уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) \hat{S}(t, t_0) \quad (3.4)$$

Приподстановке $\hat{S}(t, t_0)$ в виде ряда понятно, что равенство возможно только при выполнении:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}^{(k)}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) \hat{S}^{(k-1)}(t, t_0) \quad (3.5)$$

Решим данное уравнение:

1) $k = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}^{(0)}(t, t_0)}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

Следовательно

$$\hat{S}^{(0)}(t, t_0) = const = \hat{S}^{(0)}(t_0, t_0) \quad (3.7)$$

Начальное условие для дифференциального уравнения для $\hat{S}(t, t_0)$: $\hat{S}(t_0, t_0) = \hat{I}$

Удобно это начальное условие перенести на нулевой член разложения:

$$\hat{S}^{(0)}(t_0, t_0) = \hat{I}, \quad (3.8)$$

$$\hat{S}^{(1)}(t_0, t_0) = 0, \quad \hat{S}^{(2)}(t_0, t_0) = 0. \quad (3.9)$$

2) $k = 1$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{S}^{(1)}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{V}^{(I)}(t) \hat{S}^{(0)}(t, t_0) = \hat{V}^{(I)}(t) \quad (3.10)$$

$$\hat{S}^{(1)}(t_0, t_0) = 0 \quad (3.11)$$

Следовательно

$$\hat{S}^{(1)}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \hat{V}^{(I)}(\tau) \quad (3.12)$$

Таким образом

$$\hat{S}(t, t_0) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \hat{V}^{(I)}(\tau) + \dots \quad (3.13)$$

$$\hat{\rho}_i^{(I)}(T_0/2) = \hat{S}(T_0/2, -T_0/2) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{S}^\dagger(T_0/2, -T_0/2) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} w_{fi} &= \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{\rho}_i^{(I)}(T_0/2))}{T_0} = \\ &= \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f^{(S)} \hat{S}(T_0/2, -T_0/2) \hat{\rho}_i^{(S)} \hat{S}^\dagger(T_0/2, -T_0/2))}{T_0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\hat{\rho}_f^{(S)} = \left| E_f^{(0)} \right\rangle \left\langle E_f^{(0)} \right| \quad (3.16)$$

$$\hat{\rho}_i^{(S)} = \left| E_i^{(0)} \right\rangle \left\langle E_i^{(0)} \right| \quad (3.17)$$

Воспользуемся свойством цикличности следа:

$$w_{fi} = \frac{1}{T_0} \left| \langle E_f^{(0)} | \hat{S}(T_0/2, -T_0/2) | E_i^{(0)} \rangle \right|^2 \quad (3.18)$$

$$\langle E_f^{(0)} | \hat{S}(T_0/2, -T_0/2) | E_i^{(0)} \rangle = \underbrace{\langle E_f^{(0)} | E_i^{(0)} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle E_f^{(0)} | \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s \tau \hat{V}^{(I)}(\tau) | E_i^{(0)} \rangle}_{\text{был вычислен на прошлой лекции}} \quad (3.19)$$

Пример.

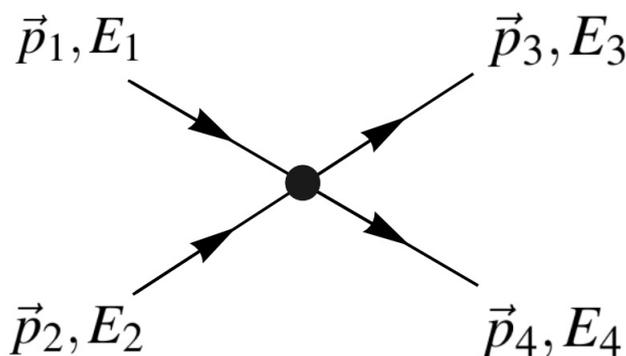


Рис. 3.1. Рассеяние электрона на электроне.

Рассмотрим пример получения плотности конечных состояний на единицу энергии для случая рассеяния электрона на электроне (Рис. 3.1).

$$E_i^{(0)} = E_1 + E_2 \quad (3.20)$$

$$E_f^{(0)} = E_3 + E_4 \quad (3.21)$$

Плотность конечных состояний:

$$d\Gamma_f = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{V d\vec{p}_3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V d\vec{p}_4}{(2\pi\hbar)^3} \quad (3.22)$$

Вычисления будем проводить в СЦМ.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad (3.23)$$

$$d\Gamma_f = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \frac{V d\vec{p}_3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V d\vec{p}_4}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V d\vec{p}_3}{(2\pi\hbar)^3} \Big|_{\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 = \vec{p}} \quad (3.24)$$

$$E_3 = E_4 = E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (3.25)$$

$$E_f^{(0)} = 2E \quad (3.26)$$

$$dE = \frac{dE_f^{(0)}}{2} \quad (3.27)$$

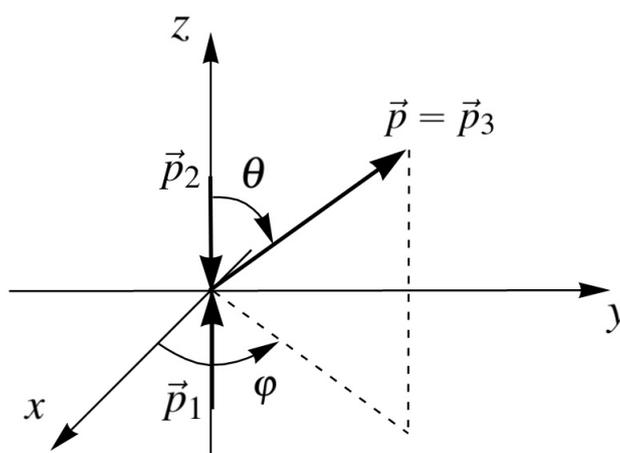


Рис. 3.2. Сферическая система координат.

Перейдем в сферическую систему координат (Рис. 3.2).

$$d\vec{p}_3 = d\vec{p} = |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega_{\vec{p}} = |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\cos\theta d\varphi \quad (3.28)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.29)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad (3.30)$$

$$\int d\Omega_{\vec{p}} = 4\pi \quad (3.31)$$

Взяв полный дифференциал от выражения

$$|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2, \quad (3.32)$$

получим

$$2|\vec{p}|d\vec{p}c^2 + 0 + 2EdE \quad (3.33)$$

Отсюда

$$c^2|\vec{p}|d\vec{p} = EdE \quad (3.34)$$

$$d\vec{p}_3 = \frac{|\vec{p}|EdE}{c^2}d\Omega_{\vec{p}} = \frac{|\vec{p}|E_f^{(0)}dE_f^{(0)}}{4c^2}d\Omega_{\vec{p}} \quad (3.35)$$

Тогда

$$d\Gamma_f = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{|\vec{p}|E_f^{(0)}}{4c^2} dE_f^{(0)} d\Omega_{\vec{p}} = \rho_f dE_f^{(0)} \quad (3.36)$$

Следовательно плотность конечных состояний на единицу энергии:

$$\rho_f = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{|\vec{p}|E_f^{(0)}}{4c^2} d\Omega_{\vec{p}} \quad (3.37)$$

$$\rho_f = \frac{V}{16\pi^2(\hbar c)^3} E_f^{(0)} \sqrt{E_f^{(0)} - (2mc^2)^2} \quad (3.38)$$

Видно, что плотность конечных состояний на единицу энергии определена тогда, когда $E_f^{(0)} - (2mc^2)^2 \geq 0$. Подкоренное выражение здесь определяет порог реакции.

Описание открытых квантовых систем. Распад нестабильной микросистемы.

Выше мы получили уравнение фон Неймана для замкнутых квантовых систем. Теперь напишем аналогичные уравнения для открытых квантовых систем. Простейшая ситуация – в системе происходит радиоактивный распад. В случае радиоактивного распада экспериментально установлено, что скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся частиц, то есть

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} \quad (3.39)$$

Решение этого уравнения с начальным условием $N(t=0) = N_0$ имеет вид:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 e^{-\Gamma t/\hbar} \quad (3.40)$$

и называется законом радиоактивного распада. Величина τ – время жизни нестабильной системы, Γ – ширина распада. В рассматриваемом приближении ширина распада и время жизни предполагаются независимыми от времени. По определению:

$$\Gamma\tau = \hbar \quad (3.41)$$

Согласно частотному определению вероятности при $N(t) \gg 1$ вероятность распада:

$$w(t) = \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\Gamma t/\hbar} \quad (3.42)$$

С точки зрения квантовой механики $w(t) = |\psi(t)|^2$, где $\psi(t)$ – некоторая волновая функция. Если считать, что распадающиеся частицы являются свободными, то такую (для простоты – монохроматическую) волновую функцию можно написать следующим образом:

$$\psi(t) \sim \chi_{SS_z} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p t - px) - \frac{\Gamma t}{2\hbar}} = \chi_{SS_z} e^{-\frac{i}{\hbar}((E_p - \frac{i\Gamma}{2})t - px)} \quad (3.43)$$

Такая волновая функция может быть нормирована на единицу только в момент времени $t = 0$. И она является решением уравнения с неэрмитовым гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i}{2}\hat{\Gamma} \quad (3.44)$$

Здесь нет противоречия с квантовой механикой, поскольку наблюдаемыми отдельности являются энергия частицы E_p и ширина распада Γ (время жизни τ). Поэтому $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^\dagger$ и $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}^\dagger$.

Квантовое уравнение Лиувилля для открытых систем.

Гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}$ – простейший пример гамильтониана открытой квантовой системы. Найдем уравнение фон Неймана для такого гамильтониана.

Начнем с уравнения для матрицы плотности чистого состояния в представлении Шредингера $\hat{\rho}_l^{(S)}(t) = |\psi_l^{(S)}(t)\rangle\langle\psi_l^{(S)}(t)|$. Вектор состояния $|\psi_l^{(S)}(t)\rangle$ удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_l^{(S)}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}^{(S)} |\psi_l^{(S)}(t)\rangle = \left(\hat{H}_0^{(S)} - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}^{(S)} \right) |\psi_l^{(S)}(t)\rangle, \quad (3.45)$$

а вектор состояния $\langle\psi_l^{(S)}(t)|$ – уравнению Шредингера:

$$-i\hbar \frac{\partial \langle\psi_l^{(S)}(t)|}{\partial t} = \langle\psi_l^{(S)}(t)| \hat{H}^{(S)\dagger} = \langle\psi_l^{(S)}(t)| \left(\hat{H}_0^{(S)} + \frac{i}{2}\hat{\Gamma}^{(S)} \right) \quad (3.46)$$

Тогда решения этих уравнений можно записать при помощи оператора $\hat{U}(t, t_0)$:

$$\left| \psi_l^{(S)}(t) \right\rangle = \hat{U}(t, t_0) \left| \psi_{l_0}^{(S)} \right\rangle, \quad \left\langle \psi_l^{(S)}(t) \right| = \left\langle \psi_{l_0}^{(S)} \right| \hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (3.47)$$

Так как вектора состояния теперь не нормированы на единицу, то оператор $\hat{U}(t, t_0)$ НЕ унитарный.

Операторы $\hat{U}(t, t_0)$ и $\hat{U}^\dagger(t, t_0)$ удовлетворяют уравнениям:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \left(\hat{H}_0^{(S)} - \frac{i}{2} \hat{\Gamma}^{(S)} \right) \hat{U}(t, t_0) \quad (3.48)$$

и

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{U}^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \left(\hat{H}_0^{(S)} + \frac{i}{2} \hat{\Gamma}^{(S)} \right) \quad (3.49)$$

Теперь найдем, какому уравнению подчиняется матрица $\hat{\rho}_l^{(S)}(t)$. Прodelывая выкладки, полностью аналогичные выкладкам раздела "Эволюция матрицы плотности во времени ...", получаем:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_l^{(S)}(t)}{\partial t} &= \hat{H}^{(S)} \hat{\rho}_l^{(S)}(t) - \hat{\rho}_l^{(S)}(t) \hat{H}^{(S)\dagger} = \\ &= \left[\hat{H}_0^{(S)}, \hat{\rho}_l^{(S)}(t) \right] - \frac{i}{2} \left\{ \hat{\Gamma}^{(S)}, \hat{\rho}_l^{(S)}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Учтя, что $\hat{\rho}^{(S)}(t) = \sum_l w_l \hat{\rho}_l^{(S)}(t)$, легко находим уравнения точно такого же вида для матрицы плотности смешанного состояния $\hat{\rho}^{(S)}(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(S)}(t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_0^{(S)}, \hat{\rho}^{(S)}(t) \right] - \frac{i}{2} \left\{ \hat{\Gamma}^{(S)}, \hat{\rho}^{(S)}(t) \right\} \quad (3.51)$$

Пример: уравнения Блоха с затуханием (прецессия спина).

В простейшем случае можно подобрать оператор $\hat{\Gamma}$ так, что $\{\hat{\Gamma}, \hat{\rho}\} = 2\gamma \left(\left\langle \vec{S}(t) \right\rangle_\rho \vec{\sigma} \right)$

Тогда уравнение Блоха модифицируется следующим образом:

$$\frac{\partial \left\langle \vec{S}(t) \right\rangle_\rho}{\partial t} + \left[\left\langle \vec{S}(t) \right\rangle_\rho \times \vec{\Omega} \right] + \frac{\gamma}{\hbar} \left\langle \vec{S}(t) \right\rangle_\rho = 0 \quad (3.52)$$

Лекция 4. Описание открытых квантовых систем. Часть 2.

Эрмитов оператор:

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A} \quad (4.1)$$

Антиэрмитов оператор:

$$\hat{A}^\dagger = -\hat{A} \quad (4.2)$$

Если \hat{A} – эрмитов, то любой оператор вида $\hat{B} = i\hat{A}$ – антиэрмитов.

Пусть \hat{O} – произвольный оператор. Какую комбинацию с ним нужно сделать, чтобы получить антиэрмитов оператор?

Простые примеры:

- $\hat{B} = i\hat{O}^\dagger \hat{O}$
- $\hat{B} = \hat{O}^\dagger - \hat{O}$

Отсюда: $\hat{B}^\dagger = \hat{O} - \hat{O}^\dagger = -\hat{B}$

Эволюция матрицы плотности открытых квантовых систем. Общий подход.

Пусть некоторая квантовая система описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$ и состоит из двух подсистем "А" и "В". Предположим, что вся система "А + В" замкнутая. Хотя каждая из подсистем – открытая. Гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB}, \quad (4.3)$$

где $\hat{H}_A = \hat{H}_A^\dagger$ и $\hat{H}_B = \hat{H}_B^\dagger$ – гамильтонианы подсистем "А" и "В" соответственно, $\hat{V}_{AB} \neq \hat{V}_{AB}^\dagger$ – гамильтониан взаимодействия. Матрица плотности системы $\hat{\rho}$ подчиняется модифицированному уравнению фон Неймана:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(S)}}{\partial t} = \hat{H}^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}^{(S)\dagger} \quad (4.4)$$

Вопрос: какому уравнению подчиняется матрица плотности $\hat{\rho}_A$ подсистемы "А"?

Ответ: прежде всего ясно, что "А" – открытая система. Поэтому уравнение, которое будет получено для $\hat{\rho}_A$, станет обобщением уравнения для матрицы плотности распадающейся частицы, которое было получено ранее.

Напомним, что если $\hat{\rho}$ – матрицы плотности системы "A+B", то матрица плотности подсистемы "A" :

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho} \quad (4.5)$$

То есть в гильбертовом пространстве подсистемы "B" нужно выбрать некоторую наблюдаемую, которая относится только в подсистеме "B" и поставить ей в соответствие эрмитов оператор (пусть он обладает дискретным невырожденным спектром):

$$\mathcal{H}_B: F_B \Rightarrow \hat{F}_B^\dagger = \hat{F}_B \quad (4.6)$$

Далее решить уравнение для собственных векторов и собственных значений этого оператора

$$\hat{F}_B |b_n\rangle = b_n |b_n\rangle \quad (4.7)$$

и найти полную систему собственных векторов, которые образуют базис в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_B . Это и будет один из тех базисов, по которым можно найти след:

$$A = \text{Tr}_B \hat{\rho} = \sum_n \langle b_n | \hat{\rho} | b_n \rangle \quad (4.8)$$

Тогда, используя линейность следа получаем:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_A^{(S)}}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \text{Tr}_B \hat{\rho}^{(S)}}{\partial t} = i\hbar \text{Tr}_B \left(\frac{\partial \hat{\rho}^{(S)}}{\partial t} \right) = \\ &= \text{Tr}_B (\hat{H}^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}^{(S)\dagger}) = \\ &= \text{Tr}_B (\hat{H}_A^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}_A^{(S)}) + \text{Tr}_B (\hat{H}_B^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}_B^{(S)}) + \text{Tr}_B (\hat{V}_{AB}^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{V}_{AB}^{(S)\dagger}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Разберемся с первым слагаемым в правой части. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B (\hat{H}_A^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}_A^{(S)}) &= \hat{H}_A^{(S)} (\text{Tr}_B \hat{\rho}^{(S)}) - (\text{Tr}_B \hat{\rho}^{(S)}) \hat{H}_A^{(S)} = \\ &= \hat{H}_A^{(S)} \hat{\rho}_A^{(S)} - \hat{\rho}_A^{(S)} \hat{H}_A^{(S)} = [\hat{H}_A^{(S)}, \hat{\rho}_A^{(S)}] \end{aligned} \quad (4.10)$$

При выводе мы использовали тот факт, что гамильтониан $\hat{H}_A^{(S)}$ не зависит от переменных системы "B" и поэтому может быть вынесен за знак следа.

Рассмотрим второе слагаемое. Воспользуемся определением частичного следа и условием $\hat{H}_B |b\rangle = E_b |b\rangle$. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(\hat{H}_B^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}_B^{(S)}) &= \int db \langle b | \hat{H}_B^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{H}_B^{(S)} | b \rangle = \\ &= \int db \langle b | E_b \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} E_b | b \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поэтому окончательно для матрицы плотности подсистемы "А" находим следующее уравнение фон Неймана:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_A^{(S)}}{\partial t} = [\hat{H}_A^{(S)}, \hat{\rho}_A^{(S)}] + \text{Tr}_B(\hat{V}_{AB}^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{V}_{AB}^{(S)\dagger}) \quad (4.12)$$

В частном случае, когда $\hat{V}_{AB}^{(S)} = \int db' |b'\rangle \frac{i}{2} \Gamma^{(S)} \langle b'|$, воспроизводится уравнение для эволюции матрицы плотности радиоактивного распада частицы из параграфа "Квантовое уравнение Лиувилля для открытых систем" .

Заметим, что, взяв след по переменным подсистемы "В" в последнем слагаемом, мы сделали уравнение для матрицы плотности $\hat{\rho}_A$ подсистемы "А" формально необратимым.

Так как в рассматриваемое уравнение входит как $\hat{\rho}_A$, так и $\hat{\rho}$, то это делает крайне неудобным применение данного уравнения при решении практических задач.

Релаксационное уравнение для частицы в термостате.

Рассмотрим часто используемый приближенный подход, который позволяет, не обладая детальным знанием о матрицах плотности $\hat{\rho}(t)$ и $\hat{\rho}_B(t)$, получить нетривиальную информацию об эволюции матрицы плотности $\hat{\rho}_A(t)$.

Данную задачу удобно решать в *представлении взаимодействия*. Пусть микрочастица (подсистема "А") находится в термостате (подсистема "В"). Матрицу плотности, описывающую состояние термостата, можно положить не зависящей от времени и известной из начального условия. Воспользовавшись результатами параграфа "Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана) в представлении взаимодействия" при $\hat{V}_{AB}^{(I)}(t) = \hat{V}_{AB}^{(I)\dagger}(t)$, для матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ можно написать уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(I)}(t)}{\partial t} = [\hat{V}_{AB}^{(I)}(t), \hat{\rho}^{(I)}(t)] \quad (4.13)$$

Принимая во внимание начальное условие для матрицы плотности: $\hat{\rho}^{(I)}(t_0) = \hat{\rho}^{(S)}(t_0) = \hat{\rho}_0$, данное дифференциальное уравнение можно записать в эквивалентной интегральной форме:

$$\hat{\rho}^{(I)}(t) = \hat{\rho}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(\tau), \hat{\rho}^{(I)}(\tau) \right] \quad (4.14)$$

Формально подставим интегральное уравнение в дифференциальное и получим:

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{(I)}(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(t), \hat{\rho}_0 \right] + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(t), \left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(\tau), \hat{\rho}^{(I)}(\tau) \right] \right] \quad (4.15)$$

Предположим, что в момент времени $t < t_0$ микросистема "А" и термостат "В" не взаимодействовали между собой. Тогда матрица плотности $\hat{\rho}_0$ факторизуется, то есть $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{A0} \hat{\rho}_{B0}$. Когда $t \geq t_0$, термостат продолжит оставаться в состоянии термодинамического равновесия при температуре T . Поэтому с хорошей степенью точности можно заменить полную матрицу плотности $\hat{\rho}^{(I)}(t)$ её факторизованным приближением, то есть $\hat{\rho}^{(I)}(t) \approx \hat{\rho}_A^{(I)}(t) \hat{\rho}_{B0}$. С учетом замены для матрицы плотности подсистемы "А" получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_A^{(I)}(t)}{\partial t} &= \text{Tr}_B \left(\frac{\partial \hat{\rho}^{(I)}(t)}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_B \left(\left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(t), \hat{\rho}_{A0} \hat{\rho}_{B0} \right] \right) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \text{Tr}_B \left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(t), \left[\hat{V}_{AB}^{(I)}(\tau), \hat{\rho}_A^{(I)}(\tau) \hat{\rho}_{B0} \right] \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

которое не зависит от эволюции матрицы плотности подсистемы "В" и описывает необратимые процессы в подсистеме "А".

Операторы Крауса и представление Крауса для матрицы плотности открытой квантовой системы.

Рассмотрим достаточно общее представление для эволюции матрицы плотности открытой квантовой системы. По крайней мере, это представление более общее, чем уравнение из параграфа "Эволюция матрицы плотности открытых квантовых систем. Общий подход". Пусть замкнутая квантовая система состоит из двух подсистем "А" (\equiv частица) и "В" (\equiv термостат или резервуар). Если известен полный гамильтониан системы $\hat{H}^{(S)}$ (не будем задумываться, эрмитов он или неэрмитов), то можно построить и оператор эволюции $\hat{U}(t, t_0)$. (Он будет унитарным, если гамильтониан эрмитов и неунитарным, если гамильтониан неэрмитов.)

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ подсистемы "А" и "В" не взаимодействовали друг с другом. Подсистема "А" находилась в смешанном состоянии $\hat{\rho}_{A0}$, а подсистема "В" в чистом (для простоты!) состоянии $\hat{\rho}_{B0} = |in^{(B)}\rangle\langle in^{(B)}|$.

Тогда матрица плотности подсистемы "А" в представлении Шредингера (S) в произвольный момент времени t будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A^{(S)}(t) &= \text{Tr}_B \hat{\rho}^{(S)}(t) = \text{Tr}_B \left(\hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_{A0} \hat{\rho}_{B0} \hat{U}^\dagger(t, t_0) \right) = \\ &= \text{Tr}_B \left(\hat{U}(t, t_0) |in^{(B)}\rangle \hat{\rho}_{A0} \langle in^{(B)}| \hat{U}^\dagger(t, t_0) \right)\end{aligned}\quad (4.17)$$

Введем для операторов подсистемы "В" базис $|f_{k'}^{(B)}\rangle$ собственных векторов (будем считать, что собственные вектора – невырожденные, а собственные значения – дискретные) некоторой наблюдаемой F_B из этой подсистемы. Выбор базиса определяется лишь удобством дальнейших вычислений. Тогда:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A^{(S)}(t) &= \sum_{k'} \langle f_{k'}^{(B)} | \hat{U}(t, t_0) |in^{(B)}\rangle \hat{\rho}_{A0} \langle in^{(B)} | \hat{U}^\dagger(t, t_0) |f_{k'}^{(B)}\rangle = \\ &= \sum_{k'} \hat{K}_{k'}(t, t_0) \hat{\rho}_{A0} \hat{K}_{k'}^\dagger(t, t_0)\end{aligned}\quad (4.18)$$

Такая форма записи эволюции матрицы плотности открытой квантовой подсистемы называется *представлением Крауса* или *представлением в виде операторной суммы*, а входящие в нее операторы $\hat{K}_{k'}(t, t_0) = \langle f_{k'}^{(B)} | \hat{U}(t, t_0) |in^{(B)}\rangle$ – *операторами Крауса*.

Очевидно, что операторы Крауса неэрмитовы.

Условие полноты для операторов Крауса (для систем, описываемых эрмитовым гамильтонианом $\hat{H}^{(S)} \equiv$ унитарная эволюция):

$$\text{Tr}_A \hat{\rho}_A^{(S)}(t) = 1 = \text{Tr}_A \hat{\rho}_{A0} \quad (4.19)$$

Следовательно

$$\sum_{k'} \hat{K}_{k'}^\dagger(t, t_0) \hat{K}_{k'}(t, t_0) = \hat{1} \quad (4.20)$$

Хотя подсистема "В" может быть достаточно сложной, а ее эволюция – нетривиальной, но часто удается найти простые выражения для операторов $\hat{K}_{k'}$, чтобы описать влияние подсистемы "В" на эволюция подсистемы "А".

Для неэрмитовых гамильтонианов и связанной с ними неунитарной эволюцией (например, в случае рассмотренного выше радиоактивного распада) $\text{Tr}_A \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \leq 1$. Соответствующим образом изменяется и *условие полноты* для операторов Крауса:

$$\sum_{k'} \hat{K}_{k'}^\dagger(t, t_0) \hat{K}_{k'}(t, t_0) \leq \hat{1} \quad (4.21)$$

Представление Крауса является прямым обобщением применения правила Людерса для неселективных проективных измерений (см. параграф "Селективные и неселективные измерения")

$$\hat{\rho}' = \sum_n w_n \hat{\rho}_n^{(F_A)} = \sum_n w_n \frac{\hat{P}_n^{(F_A)} \hat{\rho} \hat{P}_n^{(F_A)}}{w_n} = \sum_n \hat{P}_n^{(F_A)} \hat{\rho} \hat{P}_n^{(F_A)} \quad (4.22)$$

и использования обобщенного правила Людерса для операторов измерения \hat{M}_α (см. параграф "Обобщенные правило Людерса и формула фон Неймана") в случае неселективных измерений

$$\hat{\rho}' = \sum_\alpha w_\alpha \hat{\rho}_\alpha = \sum_\alpha w_\alpha \frac{\hat{M}_\alpha \hat{\rho} \hat{M}_\alpha^\dagger}{w_\alpha} = \sum_\alpha \hat{M}_\alpha \hat{\rho} \hat{M}_\alpha^\dagger \quad (4.23)$$

Рассмотрим представление Крауса как последовательность скачков. Понятно, что композиция преобразований Крауса является преобразованием Крауса. То есть, данный подход, который мы вывели в пределе непрерывного движения, верен и для дискретной эволюции. То есть пока что можем не рассматривать зависимость от времени.

Представление Крауса для наблюдаемых.

Мы знаем, как при преобразованиях Крауса эволюционирует матрица плотности подсистемы "А" .

Вопрос: как в представлении Крауса преобразуются операторы наблюдаемых величин?

Ответ получается прямым вычислением. Рассмотрим одну систему, которая эволюционирует по преобразованию Крауса. Пусть \hat{A} – оператор наблюдаемой А в представлении Шредингера. Тогда (используем свойства линейности и цикличности следа):

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle_{\rho'} &= \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}') = \text{Tr}\left(\hat{A}\sum_{k'}\hat{K}_{k'}\hat{\rho}\hat{K}_{k'}^\dagger\right) = \\
 &= \sum_{k'}\text{Tr}\left(\hat{K}_{k'}^\dagger\hat{A}\hat{K}_{k'}\hat{\rho}\right) = \text{Tr}\left(\left(\sum_{k'}\hat{K}_{k'}^\dagger\hat{A}\hat{K}_{k'}\right)\hat{\rho}\right) = \\
 &= \text{Tr}(\hat{A}'\hat{\rho}) = \langle A' \rangle_{\rho}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Таким образом в представлении Крауса эволюция операторов наблюдаемых дается выражением:

$$\hat{A}' = \sum_{k'}\hat{K}_{k'}^\dagger\hat{A}\hat{K}_{k'} \tag{4.25}$$

Очевидно, что такая запись является обобщением эволюции операторов в представлении Гейзенберга и представлении взаимодействия.

Неоднозначность представления Крауса.

Заметим, что представление Крауса неоднозначно. Сначала покажем это на примере. Пусть размерность подсистем "А" и "В" равна двум. Тогда пусть эволюцию подсистемы "А" определяют два оператора Крауса:

$$\hat{\mathcal{K}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{K}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Рассмотрим еще один набор операторов Крауса:

$$\hat{K}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{K}}_1 + \hat{\mathcal{K}}_2), \quad \hat{K}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{K}}_1 - \hat{\mathcal{K}}_2) \tag{4.27}$$

Оба набора удовлетворяют условию полноты:

$$\sum_k \hat{\mathcal{K}}_k^\dagger \hat{\mathcal{K}}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1} \tag{4.28}$$

и

$$\sum_k \hat{K}_k^\dagger \hat{K}_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1} \tag{4.29}$$

Тогда отображение $\varepsilon(\hat{\rho})$ можно записать как

$$\begin{aligned}\varepsilon(\hat{\rho}) &= \sum_k \hat{K}_k \hat{\rho} \hat{K}_k^\dagger = \\ &= \frac{\hat{K}_1 + \hat{K}_2}{\sqrt{2}} \hat{\rho} \frac{\hat{K}_1 + \hat{K}_2}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{K}_1 - \hat{K}_2}{\sqrt{2}} \hat{\rho} \frac{\hat{K}_1 - \hat{K}_2}{\sqrt{2}} = \sum_k \hat{K}_k \hat{\rho} \hat{K}_k^\dagger\end{aligned}\quad (4.30)$$

Рассмотренный пример делает ясной следующую теорему: если два набора операторов Крауса $\{\hat{K}_k\}$ и $\{\hat{K}'_k\}$ связаны унитарным преобразованием

$$\hat{K}_k = \sum_l U_{kl} \hat{K}'_l, \quad (4.31)$$

то они соответствуют одному и тому же представлению Крауса.

Доказательство теоремы очевидно из приведенного выше примера и свойств унитарности.

Теорема Крауса.

Указанное в параграфе "Операторы Крауса и представление Крауса для матрицы плотности открытой квантовой системы" обобщение доказывается при помощи *теоремы Крауса*: пусть существует отображение

$$\varepsilon(\hat{\rho}) \rightarrow \hat{\rho}', \quad (4.32)$$

которое удовлетворяет следующим свойствам:

- а) линейность: $\varepsilon(\lambda \rho_1 + \mu \rho_2) = \lambda \varepsilon(\rho_1) + \mu \varepsilon(\rho_2)$;
- б) сохранением следа: $0 < \text{Tr}(\varepsilon(\hat{\rho})) \leq 1$;
- в) положительная определенность: диагональные матричные элементы оператора $\hat{\rho}'$ неотрицательны.

(Условия а) – в) накладываются, чтобы отображение $\varepsilon(\hat{\rho})$ матрицу плотности $\hat{\rho}$ переводило в потенциальную матрицу плотности.)

При помощи отображения $\varepsilon(\hat{\rho})$ можно построить матрицу плотности

$$\hat{\rho}' = \frac{\varepsilon(\hat{\rho})}{\text{Tr}(\varepsilon(\hat{\rho}))} \quad (4.33)$$

Основное утверждение теоремы Крауса: отображение $\varepsilon(\hat{\rho})$, удовлетворяющее свойствам а) – в), всегда может быть представлено как

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \sum_{k'} \hat{K}_{k'} \hat{\rho} \hat{K}_{k'}^\dagger, \quad (4.34)$$

где операторы Крауса $\hat{K}_{k'}$ удовлетворяют условию полноты: $\sum_{k'} \hat{K}_{k'}^\dagger \hat{K}_{k'} \leq \hat{1}$.

Лекция 5. Описание открытых квантовых систем.

Часть 3.

Рассмотрим двухуровневую систему (частицу) "А", которая помещена в двухуровневый же резервуар "В". Пусть совместная эволюция этих систем описывается преобразованием \hat{U}_{AB} и устроена следующим образом: если система "А" находится в возбужденном состоянии $|1^{(A)}\rangle$, то с вероятностью w она переходит в основное состояние $|0^{(A)}\rangle$ с излучением фотона. Если фотон испущен, то резервуар его всегда поглощает и переходит в возбужденное состояние $|1^{(B)}\rangle$. Если же система "А" находится в основном состоянии $|0^{(A)}\rangle$, то ничего не происходит, и резервуар "В" остается в основном состоянии $|0^{(B)}\rangle$. (Предположим, что энергетическое расстояние между основным и возбужденным уровнями и в резервуаре, и в частице одно и то же. Пусть также при испускании или поглощении фотона процессов отдачи не происходит.)

Подсистемы "А" и "В" "живут" в двумерных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}^{(A)}$ и $\mathcal{H}^{(B)}$ соответственно. Система "А+В" "живет" в четырехмерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$.

Базис в четырехмерном гильбертовом пространстве:

$$\begin{aligned} |0^{(A)}, 0^{(B)}\rangle &= |0^{(A)}\rangle \otimes |0^{(B)}\rangle \\ |1^{(A)}, 0^{(B)}\rangle &= |1^{(A)}\rangle \otimes |0^{(B)}\rangle \\ |0^{(A)}, 1^{(B)}\rangle &= |0^{(A)}\rangle \otimes |1^{(B)}\rangle \\ |1^{(A)}, 1^{(B)}\rangle &= |1^{(A)}\rangle \otimes |1^{(B)}\rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

(Последний вектор не реализуется в нашей задаче.)

Из физических соображений ясно, что в рассматриваемой задаче оператор эволюции \hat{U}_{AB} имеет три ненулевых матричных элемента:

$$\begin{aligned} \langle 0^{(A)}, 1^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 1^{(A)}, 0^{(B)} \rangle &= \sqrt{w}, \\ \langle 1^{(A)}, 0^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 1^{(A)}, 0^{(B)} \rangle &= \sqrt{1-w} e^{i\varphi_1}, \\ \langle 0^{(A)}, 0^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 0^{(A)}, 0^{(B)} \rangle &= e^{i\varphi_2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где φ_1 и φ_2 – относительные фазы.

В гильбертовом пространстве \mathcal{H} оператор \hat{U}_{AB} можно записать как:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{AB} = & \sqrt{w} |1^{(B)}\rangle |0^{(A)}\rangle \langle 1^{(A)}| \langle 0^{(B)}| + \\ & + \sqrt{1-w} e^{i\varphi_1} |0^{(B)}\rangle |1^{(A)}\rangle \langle 1^{(A)}| \langle 0^{(B)}| + e^{i\varphi_2} |0^{(B)}\rangle |0^{(A)}\rangle \langle 0^{(A)}| \langle 0^{(B)}| \end{aligned} \quad (5.3)$$

Согласно определению параграфа "Операторы Крауса и представление Крауса для матрицы плотности открытой квантовой системы" имеем:

$$\hat{K}_{k'} = \langle f_{k'}^{(B)} | \hat{U}_{AB} | in^{(B)} \rangle \quad (5.4)$$

Из условия задачи ясно, что $|in^{(B)}\rangle \equiv |0^{(B)}\rangle$. В качестве наблюдаемой F_B в подсистеме "B" выберем энергию уровней резервуара. Тогда

$$|f_{k'}^{(B)}\rangle = \{ |0^{(B)}\rangle, |1^{(B)}\rangle \} \quad (5.5)$$

Таким образом в задаче возникает всего два оператора Крауса

$$\hat{K}_0 = \langle 0^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 0^{(B)} \rangle, \quad \hat{K}_1 = \langle 1^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 0^{(B)} \rangle \quad (5.6)$$

В базисе

$$|0^{(A)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1^{(A)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

оператор Крауса \hat{K}_1 записывается как

$$\begin{aligned} \hat{K}_1 &= \langle 1^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 0^{(B)} \rangle = \sqrt{w} |0^{(A)}\rangle \langle 1^{(A)}| = \\ &= \sqrt{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{w} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Аналогично для оператора \hat{K}_0 имеем:

$$\begin{aligned} \hat{K}_0 &= \langle 0^{(B)} | \hat{U}_{AB} | 0^{(B)} \rangle = |0^{(A)}\rangle \langle 0^{(A)}| e^{i\varphi_2} + \sqrt{1-w} e^{i\varphi_1} |1^{(A)}\rangle \langle 1^{(A)}| = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \sqrt{1-w} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Условие полноты:

$$\begin{aligned} \sum_{k'=0}^1 \hat{K}_{k'}^\dagger \hat{K}_{k'} &= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} \sqrt{1-w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} \sqrt{1-w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{w} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{w} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

То есть полученные операторы Крауса удовлетворяют условию полноты.

Отображение $\varepsilon(\hat{\rho}_A)$ матрицы плотности (подсистемы "А" до начала эволюции системы)

$$\hat{\rho}_A = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(\hat{\rho}_A) &= \hat{K}_0 \hat{\rho}_A \hat{K}_0^\dagger + \hat{K}_1 \hat{\rho}_A \hat{K}_1^\dagger = \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{00} + w\rho_{11} & \sqrt{1-w}e^{i\Delta\varphi}\rho_{01} \\ \sqrt{1-w}e^{-i\Delta\varphi}\rho_{10} & (1-w)\rho_{11} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Полученное отображение удовлетворяет условию положительной определенности ($\rho_{00} \geq 0$, $\rho_{11} \geq 0$, $0 \leq w \leq 1$). Так как $1 = \text{Tr} \hat{\rho}_A = \rho_{00} + \rho_{11}$, то

$$\text{Tr} \varepsilon(\hat{\rho}_A) = 1 \quad (5.13)$$

Следовательно

$$\hat{\rho}'_A = \frac{\varepsilon(\hat{\rho}_A)}{\text{Tr}(\varepsilon(\hat{\rho}_A))} = \begin{pmatrix} \rho_{00} + w\rho_{11} & \sqrt{1-w}e^{i\Delta\varphi}\rho_{01} \\ \sqrt{1-w}e^{-i\Delta\varphi}\rho_{10} & (1-w)\rho_{11} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

С помощью представления Крауса можно найти зависимость $\hat{\rho}_A$ от времени. Действительно, при $\Gamma t/\hbar \ll 1$ вероятность распада за время t имеет вид $w = \Gamma t/\hbar$. Тогда $\hat{\rho}_A$ надо трактовать как $\hat{\rho}_A(0)$, а $\hat{\rho}'_A$ как $\hat{\rho}_A(t)$. Кроме того, в первом порядке $1-w \approx e^{-\Gamma t/\hbar}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(t) &= \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) + \rho_{11}(0) - e^{-\Gamma t/\hbar} \rho_{11}(0) & e^{-\Gamma t/(2\hbar)} e^{i\Delta\varphi} \rho_{01}(0) \\ e^{-\Gamma t/(2\hbar)} e^{-i\Delta\varphi} \rho_{10}(0) & e^{-\Gamma t/\hbar} \rho_{11}(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - e^{-\Gamma t/\hbar} \rho_{11}(0) & e^{-\Gamma t/(2\hbar)} e^{i\Delta\varphi} \rho_{01}(0) \\ e^{-\Gamma t/(2\hbar)} e^{-i\Delta\varphi} \rho_{10}(0) & e^{-\Gamma t/\hbar} \rho_{11}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Заметим, что величина $\Delta\phi$ в недиагональных матричных элементах из физических соображений должна быть равна ωt . В параграфе "Как работает уравнение Линдблада. Типичный пример" мы дадим этому утверждению строгое обоснование.

Проекционный постулат и уравнение Шредингера.

Во многих учебниках по квантовой механике обращается внимание на то, что эволюция векторов состояния $|\psi\rangle$ в квантовой теории описывается двумя принципиально различными способами: при помощи проекционного постулата М.Борна и при помощи уравнения Шредингера (см. параграф "Постулаты квантовой механики (для чистых состояний)"). (Для смешанных состояний: уравнение фон Неймана и обобщенное правило Людерса для измерений.) Возникает вопрос: откуда появляется две эволюции? Уравнение Шредингера и уравнение фон Неймана описывают эволюцию квантовой системы, взаимодействие микросистем друг с другом (например, рассеяние электрона на атоме), а проекционный постулат и правило Людерса описывают эволюцию системы при взаимодействии с макроскопическим прибором, когда квантовая система является открытой.

Вопрос: может ли уравнение Шредингера для взаимодействия $N \gg 1$ тел давать хоть в каком-то приближении проекционный постулат? И не надо ли исключить этот постулат из списка постулатов квантовой теории?

Теорема Крауса показывает, что проекционный постулат и уравнение Шредингера являются частными случаями представления Крауса. Первый, когда $\hat{K}_0 = \hat{P}_{n'}^{(A)}$. Второй, когда $\hat{K}_0 = \hat{U}(t, t_0)$, а остальные $\hat{K}_i = 0$. Поэтому проекционный постулат не выводится из уравнения Шредингера. Но оба они выводятся из эволюции Крауса, которую можно включить в перечень постулатов вместо Постулата №4 и Постулата №6.

Модель Д.Дойча для замкнутых времениподобных кривых в квантовой механике.

Можно ли написать эволюцию еще более общую, чем преобразования Крауса? В теореме Крауса нельзя "отменить" пункты б) и в). Можно попробовать "отменить" нелинейность, то есть пункт а).

Приведем интересный пример физически обоснованного отображения, которое можно построить в рамках квантовой механики, и которое НЕ сводится к представлению Крауса.

Пусть микросистема эволюционирует в обычном пространстве-времени, в котором имеется стрела времени и выполняется принцип причинности. Такую микросистему будем называть *CR-системой* ("Causality-respecting system" или "Chronology-respecting system", то есть системой, удовлетворяющей принципу причинности и движущейся вдоль стрелы времени из прошлого в будущее).

Предположим, что имеется другая микросистема, которая движется по замкнутой времениподобной петле. Такие петли существуют, например, в Общей теории относительности как решения уравнения Эйнштейна с космологическим членом (см. *K. Godel, Rev. Mod. Phys. 21, pp. 447 (1949)*). Назовем подобные микросистемы *СТС-системами* ("Closed Time-like Curves system").

Пусть теперь CR-система и СТС-система взаимодействуют друг с другом в определенный момент времени при помощи унитарного преобразования \hat{U} . До взаимодействия общая матрица плотности факторизуется, то есть

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{CR} \otimes \hat{\rho}_{СТС} \quad (5.16)$$

В результате взаимодействия общая матрица плотности приобретает вид:

$$\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger = \hat{U} (\hat{\rho}_{CR} \otimes \hat{\rho}_{СТС}) \hat{U}^\dagger \quad (5.17)$$

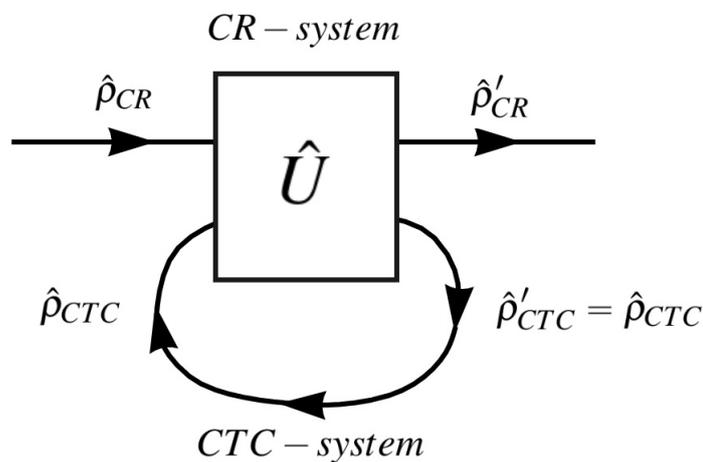


Рис. 5.1. Диаграмма взаимодействия CR- и СТС-микросистем.

Этот процесс можно изобразить при помощи интуитивно понятной диаграммы (Рис. 5.1).

Если мы хотим непротиворечиво описать эволюцию СТС-системы, то матрица плотности СТС-системы после взаимодействия должна удовлетворять *условию самосогласованности* (условию Дойча):

$$\hat{\rho}'_{СТС} = \hat{\rho}_{СТС} \quad (5.18)$$

Поскольку

$$\hat{\rho}'_{СТС} = \text{Tr}_{CR} \hat{\rho}' = \text{Tr}_{CR} \left(\hat{U} (\hat{\rho}_{CR} \otimes \hat{\rho}_{СТС}) \hat{U}^\dagger \right) \quad (5.19)$$

то условие Дойча приводит к *нелинейному уравнению* на матрицу плотности $\hat{\rho}_{СТС}$:

$$\hat{\rho}_{СТС} = \text{Tr}_{CR} \left(\hat{U} (\hat{\rho}_{CR} \otimes \hat{\rho}_{СТС}) \hat{U}^\dagger \right), \quad (5.20)$$

решение которого зависит от матрицы плотности $\hat{\rho}_{CR}$ и имеет как минимум одну неподвижную точку.

Заметим, что условие Д.Дойча предполагает, что при возвращении вспять во времени СТС-система теряет всякую "память" о своем "будущем-прошлом" взаимодействии с CR-системой, поскольку в правой части условия самосогласования стоит факторизованная матрица плотности $\rho_{CR} \otimes \rho_{СТС}$, что предполагает отсутствие взаимодействия между системами, даже если оно "было в будущем" .

Потерю "памяти" и факторизацию, по-видимому, должны обеспечивать некоторые "сохраняющие хронологию переменные" или свойства из внешнего окружения СТС-системы. Но конкретное действие данного механизма не совсем понятно. За этот подход Д.Дойча критикуют.

Заметим, что условие самосогласования Д.Дойча не позволяет путешественнику во времени вернуться в прошлое и убить, например, своего дедушку, чтобы предотвратить рождение своих родителей и свое (так называемый "парадокс дедушки") и вообще сделать в прошлом изменения, которые повлияют на будущее и сделают невозможным возвращение в прошлое, типа жесткого варианта "эффекта бабочки"

Матрица плотности CR-системы после взаимодействия в фиксированной точке запишется как

$$\hat{\rho}'_{CR} = \text{Tr}_{СТС} \hat{\rho}' = \text{Tr}_{СТС} \left(\hat{U} (\hat{\rho}_{CR} \otimes \hat{\rho}_{СТС}) \hat{U}^\dagger \right) \equiv \frac{\mathcal{M}(\hat{\rho}_{CR})}{\text{Tr}(\mathcal{M}(\hat{\rho}_{CR}))} \quad (5.21)$$

Отображение $\mathcal{M}(\hat{\rho}_{CR})$ нелинейно, то есть НЕ подчиняется теореме Крауса. Это и есть обещанный пример.

Более подробное обсуждение парадоксов путешествия во времени в свете условия самосогласования Д.Дойча можно найти в работе *D.Deutsch, "Quantum mechanics near closed timelike lines" , PRD 44, 3197 (1991).*

Пример.

Приведем конкретный пример реализации модели Дойча, который взят из работы *D. Bacon, "Quantum computational complexity in the presence of closed timelike curves"*, *PRA* 70, 032309 (2004).

Пусть имеются два спина $S = \frac{1}{2}$ каждый. Частицу "1" отождествим с CR-системой, а частицу "2" – с CTC-системой. Каждая частица со спином $S = \frac{1}{2}$ "живет" в двумерном гильбертовом пространстве. Две частицы "живут" в четырехмерном гильбертовом пространстве. Тогда можно ввести базис $|1\rangle, \dots, |4\rangle$ в пространстве состояний двух частиц как это сделано в параграфе "Явный вид матрицы плотности состояния $|\psi^-\rangle$ ". Пусть оператор взаимодействия между CR- и CTC-системами в указанном базисе имеет вид:

$$\hat{U} = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2| - |4\rangle\langle 4| \quad (5.22)$$

Если

$$\hat{\rho}_{CR} = \frac{1}{2}(\hat{1} + \vec{n}\vec{\sigma}), \quad (5.23)$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, то условие самосогласованности Дойча позволяет однозначно найти матрицу плотности CTC-системы в виде

$$\hat{\rho}_{CTC} = \frac{1}{2}(\hat{1} + \vec{m}\vec{\sigma}), \quad (5.24)$$

где $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$. Матрица плотности CR-системы после взаимодействия

$$\hat{\rho}'_{CR} = \frac{1}{2}(\hat{1} + \vec{n}'\vec{\sigma}') \quad (5.25)$$

будет *нелинейно* зависеть от матрицы плотности CR-системы до взаимодействия, поскольку прямые вычисления дают $\vec{n}' = (n_1 n_3^2, n_2 n_3^2, n_3)$.

Лекция 6. Описание открытых квантовых систем.

Часть 4.

Уравнение Линдблада.

В параграфе "Эволюция матрицы плотности открытых квантовых систем. Общий подход" уже было найдено уравнение для эволюции матрицы плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$. Однако, чтобы получить эволюцию матрицы плотности подсистемы "А" в таком подходе, необходимо знать явную зависимость от времени матрицы плотности $\hat{\rho}^{(S)}(t)$ всей квантовой системы, что делает практически бессмысленным написание подобных уравнений эволюции для каждой из подсистем по отдельности.

При помощи представления Крауса появляется возможность написать уравнение эволюции для матрицы плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$ БЕЗ использования явного вида матрицы плотности $\hat{\rho}^{(S)}(t)$. Для этого применим разложение Крауса к двум моментам времени t и $t + \Delta t$. Имеем:

$$\sum_{k'} \hat{K}_{k'}(t + \Delta t) \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{K}_{k'}^\dagger(t + \Delta t) = \hat{\rho}_A^{(S)}(t + \Delta t) \approx \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \Delta \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \quad (6.1)$$

так как матрица плотности – достаточно гладкая функция, а Δt – мал.

Выберем базис в подсистеме "В" таким образом, чтобы оператор \hat{K}_0 мало отличался от единичного оператора $\hat{1}$. То есть пусть оператор $\hat{K}_0 = \hat{1} + \Delta \hat{K}_0$.

Произвольный оператор можно записать как сумму эрмитового и антиэрмитового операторов. Используем этот математический факт для нахождения общего вида оператора $\Delta \hat{K}_0$.

Кроме того, в левой части равенства оставим только линейные по Δt слагаемые. Из всего вышесказанного следует, что в самом общем виде операторы Крауса можно написать следующим образом:

$$\hat{K}_0 = \hat{1} + \left(\hat{L}_0 - \frac{i\hat{H}_A}{\hbar} \right) \Delta t; \quad (6.2)$$

остальные операторы:

$$\hat{K}_{k'} = \hat{L}_{k'} \sqrt{\Delta t} \quad \text{при} \quad k' \neq 0 \quad (6.3)$$

(так как их действие должно обеспечивать поправку $\sim \Delta t$), где $\hat{L}_0^\dagger = \hat{L}_0$ и $\hat{H}_A^\dagger = \hat{H}_A$. Заметим, что операторы $\hat{L}_{k'}$ при $k' \neq 0$ не обязательно должны быть эрмитовыми. Тогда в линейном приближении по Δt имеем:

$$\hat{K}_0 \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{K}_0^\dagger \approx \hat{\rho}_A^{(S)} + \left(\left\{ \hat{L}_0, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right\} - \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_A, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right] \right) \Delta t \quad (6.4)$$

и

$$\hat{K}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{K}_{k'}^\dagger = \hat{L}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{L}_{k'}^\dagger \Delta t \quad (6.5)$$

Операторы $\hat{L}_{k'}$ называются *операторами Линдблада*.

Подставляем выражения для операторов Линдблада в левую часть разложения Крауса и получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{k'} \hat{K}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{K}_{k'}^\dagger - \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_A, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right] + \left\{ \hat{L}_0, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right\} + \sum_{k' \neq 0} \hat{L}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{L}_{k'}^\dagger \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из условий нормировки $\text{Tr} \hat{\rho}_A^{(S)}(t + \Delta t) = 1$ и $\text{Tr} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) = 1$ следует, что

$$0 = \text{Tr} \frac{\Delta \hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{\Delta t} = \text{Tr} \left(\left\{ \hat{L}_0, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right\} + \sum_{k' \neq 0} \hat{L}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{L}_{k'}^\dagger \right) \quad (6.7)$$

При взятии следа используем условие цикличности (то есть считаем, что рассматриваем операторы в конечномерном пространстве. Если же пространство бесконечномерное, то нужно отдельно проверить, выполняется ли условие цикличности для данных переменных.) Мы сразу учли, что след от коммутатора двух операторов равен нулю. След от антикоммутатора двух операторов равен удвоенному произведению этих операторов.

$$\text{Tr} \left(2\hat{L}_0 \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \sum_{k' \neq 0} \hat{L}_{k'}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right) = 0 \quad (6.8)$$

Отсюда находим связь между \hat{L}_0 и $\hat{L}_{k'}$ в виде:

$$\hat{L}_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k' \neq 0} \hat{L}_{k'}^\dagger \hat{L}_{k'} \quad (6.9)$$

(Отметим, что из равенства следов двух операторов не следует равенство этих операторов. Если же равны следы двух операторов с произвольным оператором, то операторы равны.)

Используя это условие и заменяя приращения Δ на дифференциалы, приходим к следующему уравнению эволюции для матрицы плотности подсистемы "А" :

$$\frac{d\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_A, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)] + \sum_{k' \neq 0} \left(\hat{L}_{k'} \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{L}_{k'}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{k'}^\dagger \hat{L}_{k'}, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \} \right) \quad (6.10)$$

Сравнивая полученное уравнение с аналогичным уравнением из параграфа "Эволюция матрицы плотности открытых квантовых систем. Общий подход"

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_A^{(S)}}{\partial t} = [\hat{H}_A^{(S)}, \hat{\rho}_A^{(S)}] + \text{Tr}_B \left(\hat{V}_{AB}^{(S)} \hat{\rho}^{(S)} - \hat{\rho}^{(S)} \hat{V}_{AB}^{(S)\dagger} \right), \quad (6.11)$$

видим, что оператор \hat{H}_A следует отождествить с гамильтонианом подсистемы "А", записанным в представлении Шредингера.

Запишем данное уравнение в более симметричной форме. Для этого воспользуемся операторным тождеством:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{A}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{B} \} = \frac{1}{2} \left([\hat{A}\hat{B}, \hat{A}^\dagger] + [\hat{A}, \hat{B}\hat{A}^\dagger] \right) \quad (6.12)$$

Тогда:

$$\frac{d\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_A^{(S)}, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)] + \frac{1}{2} \sum_k \left([\hat{L}_k \hat{\rho}_A^{(S)}(t), \hat{L}_k^\dagger] + [\hat{L}_k, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{L}_k^\dagger] \right) \quad (6.13)$$

Мы получили уравнение неунитарной эволюции матрицы плотности открытой квантовой системы, в котором первое слагаемое отвечает за эволюцию системы, когда никакого внешнего взаимодействия нет, а второе слагаемое отвечает за взаимодействие открытой квантовой системы с некоторым внешним окружением. Оно называется *уравнением Линдблада*.

Ясно, что данное уравнение не является самым общим уравнением для описания открытых квантовых систем. (Оно следует из представления Крауса, а мы на примере машин Д.Дойча показали, что можно написать эволюцию матрицы плотности более общую, чем в представлении Крауса. Кроме того, при выводе мы предположили цикличность следа.)

Часто данное уравнение называют *квантовым марковским уравнением*. В окончательной записи мы специально заменили k' на k , чтобы подчеркнуть, что индексы, которыми нумеруются операторы Линдблада \hat{L}_k , достаточно условны.

Впервые уравнение Линдблада было получено в работе *G.Lindblad, "On the generators of quantum dynamical semigroups", Commun. Math. Phys. 48, pp. 119-130 (1976)* с использованием аппарата квантовой теории групп. Ясный физический вывод уравнения был предложен в статье *V.Gorini, A.Kossakowski, E.C.G.Sudarshan, "Completely positive dynamical semigroups of N-level systems", J. Math. Phys. 17, pp. 821-825 (1976)*.

Декогеренция с точки зрения уравнение Линдблада.

Приведем простой пример явления декогеренции. Рассмотрим наблюдаемую A , которой соответствует оператор \hat{A} :

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \quad (6.14)$$

Если $[\hat{A}, \hat{\rho}] \neq 0$, то матрица плотности $\hat{\rho}$ в базисе наблюдаемой A недиагональна:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \rho_{11}|a_1\rangle\langle a_1| + \rho_{12}|a_1\rangle\langle a_2| + \rho_{21}|a_2\rangle\langle a_1| + \rho_{22}|a_2\rangle\langle a_2| \end{aligned} \quad (6.15)$$

Диагональные элементы матрицы плотности дают вероятность в процессе измерения найти значение a_1 или a_2 наблюдаемой A . Можно показать, что в процессе взаимодействия микрочастицы с матрицей плотности ρ с макроприбором происходит уничтожение недиагональных матричных элементов и в процессе измерения матрица плотности $\hat{\rho}$ приобретает диагональный вид:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\text{изм.}} \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 \\ 0 & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Данный процесс диагонализации матрицы плотности в процессе измерения состояния микроскопической системы макроприбором называется процессом декогеренции.

Напомним, что измерение не ограничивается процессом декогеренции. В каждом конкретном измерении происходит редукция:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\text{изм.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

– редукция к a_1 .

В параграфе "Суперпозиция или смесь!" обсуждалось явление исчезновения недиагональных матричных элементов матрицы рассеяния – явление декогеренции – за счет усреднения по произвольно меняющейся относительной фазе.

При помощи уравнения Линдблада покажем, что декогеренцию можно трактовать иначе как *эволюционный процесс* (экспоненциального затухания недиагональных матричных элементов матрицы плотности квантовой системы в процессе ее взаимодействия с внешним окружением).

Рассмотрим микросистему, которая описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}$ размерности 2×2 . Положим $\hat{H}_A^{(S)} = \hat{0}$ (для простоты), а влияние окружения будем описывать при помощи всего одного оператора Линдблада $\hat{L} = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\hbar}} \sigma_3$, где $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – третья матрица Паули.

Это легко понять, так как гамильтониан нестабильной квантовой системы имеет вид:

$$\hat{H}_A + \frac{i\hat{\Gamma}}{2} \quad (6.18)$$

Отсюда, считая, что $\hat{\Gamma}$ диагонален и имеет вид

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

легко получить оператор Крауса, а из него тривиальным способом получить оператор Линдблада.

Тогда уравнение Линдблада принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_A^{(S)}}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\left[\hat{L}\hat{\rho}_A^{(S)}, \hat{L}^\dagger \right] + \left[\hat{L}, \hat{\rho}_A^{(S)}\hat{L}^\dagger \right] \right) = \\ &= \frac{\Gamma}{4\hbar} \left(\sigma_3 \hat{\rho}_A^{(S)} \sigma_3 - \sigma_3^2 \hat{\rho}_A^{(S)} + \sigma_3 \hat{\rho}_A^{(S)} \sigma_3 - \hat{\rho}_A^{(S)} \sigma_3^2 \right) = \\ &= \frac{\Gamma}{2\hbar} \left(\sigma_3 \hat{\rho}_A^{(S)} \sigma_3 - \hat{\rho}_A^{(S)} \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Перейдем к матричной форме записи:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{A00} & \rho_{A01} \\ \rho_{A10} & \rho_{A11} \end{pmatrix} = -\frac{\Gamma}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \rho_{A01} \\ \rho_{A10} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Данное матричное дифференциальное уравнение разбивается на четыре простейших дифференциальных уравнения, после решения которых с учетом начального условия получаем:

$$\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{A00}(0) & \rho_{A01}(0)e^{-\Gamma t/\hbar} \\ \rho_{A10}(0)e^{-\Gamma t/\hbar} & \rho_{A11}(0) \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

Мы видим, что недиагональные матричные элементы подсистемы "А" за счет взаимодействия с внешним окружением экспоненциально убывают, и при достаточно больших временах становятся, фактически, нулевыми. То есть любая суперпозиция за время $t \sim 10\hbar/\Gamma$ с точки зрения любого экспериментального измерения становится

смесью. Поскольку все макроскопические тела непрерывно взаимодействуют с внешним окружением (см., например, параграф "Механизм декогеренции и парадокс кота Шредингера"), то для наблюдателя они никогда не находятся в суперпозиции состояний, но только в смеси.

Как работает уравнение Линдблада. Типичный пример.

Пусть "А" – двухуровневая квантовая система, имеющая основное состояние $|0^{(A)}\rangle$ и возбужденное состояние $|1^{(A)}\rangle$, которое за счет радиоактивного распада переходит в основное состояние.

Выше было показано, что подобный процесс описывается неэрмитовым гамильтонианом и неунитарным оператором эволюции, не сохраняющим норму состояния. Для описания перехода $|1^{(A)}\rangle \rightarrow |0^{(A)}\rangle$ необходимо написать единственный оператор Линдблада:

$$\hat{\mathcal{L}} \sim |0^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| = \sqrt{\frac{\Gamma}{\hbar}} |0^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| \quad (6.23)$$

Поскольку размерность операторов Линдблада равна $\sqrt{(\text{сек}^{-1})}$, то размерность параметра Γ совпадает с размерностью энергии. Состояния $|0^{(A)}\rangle$ и $|1^{(A)}\rangle$ ортогональны друг другу. Тогда легко проверить, что

$$\hat{\mathcal{L}}^\dagger \hat{\mathcal{L}} = \frac{\Gamma}{\hbar} |1^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| \quad (6.24)$$

и

$$\hat{\mathcal{L}} \hat{\mathcal{L}}^\dagger = \frac{\Gamma}{\hbar} |0^{(A)}\rangle\langle 0^{(A)}| \quad (6.25)$$

Невозмущенный гамильтониан двухуровневой системы можно написать в виде:

$$\hat{H}_A^{(S)} = E_0 |0^{(A)}\rangle\langle 0^{(A)}| + E_1 |1^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| \quad (6.26)$$

Матрица плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$ в этом же базисе $|0^{(A)}\rangle$ и $|1^{(A)}\rangle$ в самой общей форме запишется как:

$$\hat{\rho}_A^{(S)} = \rho_{00} |0^{(A)}\rangle\langle 0^{(A)}| + \rho_{11} |1^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| + \rho_{01} |0^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| + \rho_{10} |1^{(A)}\rangle\langle 0^{(A)}| \quad (6.27)$$

Тогда

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_A^{(S)}, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)] = i\omega_{10}\rho_{01} |0^{(A)}\rangle\langle 1^{(A)}| - i\omega_{10}\rho_{10} |1^{(A)}\rangle\langle 0^{(A)}|, \quad (6.28)$$

где $\omega_{10} = (E_1 - E_0)/\hbar$

Для дальнейших вычислений удобно ввести базис

$$|0^{(A)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1^{(A)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

и перейти к матричному представлению. С учетом всего вышесказанного уравнение Линдблада в матричной форме будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{00}(t) & \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma}{\hbar} \rho_{11}(t) & (i\omega_{01} - \frac{\Gamma}{2\hbar}) \rho_{01}(t) \\ - (i\omega_{01} + \frac{\Gamma}{2\hbar}) \rho_{10}(t) & -\frac{\Gamma}{\hbar} \rho_{11}(t) \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Решение уравнения:

$$\begin{pmatrix} \rho_{00}(t) & \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{11}(0)e^{-\Gamma t/\hbar} & \rho_{01}(0)e^{i\omega_{01}t}e^{-\Gamma t/(2\hbar)} \\ \rho_{10}(0)e^{-i\omega_{01}t}e^{-\Gamma t/(2\hbar)} & \rho_{11}(0)e^{-\Gamma t/\hbar} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

(Заметим, что здесь везде матричные элементы матрицы плотности подсистемы "А". Индексы А опущены для простоты.)

Легко видеть, что число частиц в возбужденном состоянии (которое, очевидно, $\sim \rho_{11}(t)$) убывает согласно закону радиоактивного распада. Как и в параграфе "Декогеренция с точки зрения уравнения Линдблада" недиагональные матричные элементы подвержены декогеренции из-за взаимодействия квантовой системы с внешним окружением.

Попутно мы строго показали, почему фаза в недиагональных матричных элементах из параграфа "Применение формализма операторов Крауса" должна быть равна ωt .

Уравнение Линдблада для наблюдаемых в представлении Гейзенберга.

В параграфе "Эволюция матрицы плотности во времени. Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана)" было показано, что среднее значение наблюдаемой F_A , которая относится к подсистеме "А", можно записать как в представлении Шредингера, так и в представлении Гейзенберга:

$$\langle F_A \rangle_{\rho_A} = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_A^{(S)}(t) \hat{F}_A^{(S)} \right) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_{A0} \hat{F}_A^{(H)}(t) \right) \quad (6.32)$$

Отсюда, с учетом явного вида уравнение Линдблада для матрицы плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$ в представлении Шредингера, получаем уравнение Линдблада для эволюции оператора $\hat{F}_A(t)$ наблюдаемой F_A в представлении Гейзенберга:

$$\frac{d\hat{F}_A^{(H)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_A^{(H)}, \hat{F}_A^{(H)}(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_k \left(\left[\hat{L}_k \hat{F}_A^{(H)}(t), \hat{L}_k^\dagger \right] + \left[\hat{L}_k, \hat{F}_A^{(H)} \hat{L}_k^\dagger \right] \right), \quad (6.33)$$

которое описывает неунитарную эволюцию наблюдаемой в открытой квантовой системе. (При этом понятно, что при вычислениях можно использовать свойства перестановочности и цикличности следа, так как их наличие предполагалось при выводе уравнение Линдблада.)

Физический смысл введения POVM-элементов.

В параграфе "Понятие о POVM-элементах" мы ввели специальное описание измерений, когда не нужно интересоваться конечным состоянием микросистемы (интересна только вероятность того, что мы получим какое-либо значение из набора измерений). Ниже мы покажем, как можно обосновать существование POVM-элементов с точки зрения описания открытых квантовых систем.

POVM-измерение можно интерпретировать как измерение состояния некоторой вспомогательной микросистемы (по-английски "ancilla"), которая ранее взаимодействовала с интересующей нас квантовой системой "S". (Нам интересно ее состояние, но по каким-то причинам мы его измерить не можем.) Обозначим матрицу плотности квантовой системы через $\hat{\rho}_S$, а вспомогательной – через $\hat{\rho}_A$. Понятно, что системы начали взаимодействовать в какой-то момент времени, поэтому матрица плотности "S + ancilla" в начальный момент времени факторизуется:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_A \quad (6.34)$$

$\hat{\rho}$ как матрица плотности замкнутой системы подчиняется унитарной эволюции

$$\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \quad (6.35)$$

В пространстве квантовой системы "S" введем базис $\{|f_i^{(S)}\rangle\}$ из собственных векторов наблюдаемой F_S , относящейся только к системе "S". В пространстве вспомогательной системы введем базис $\{|a_\alpha\rangle\}$, который также связан с измеримыми характеристиками ancilla.

Измерение состояния вспомогательной системы задается при помощи проекционного оператора вида

$$\hat{P}_{\alpha'} = \hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}, \quad (6.36)$$

где $\hat{P}_{\alpha'} = |a_{\alpha'}\rangle\langle a_{\alpha'}|$ – проектор на чистое состояние $|a_{\alpha'}\rangle$ вспомогательной системы. Тогда (используем свойство цикличности следа):

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha'} &= \text{Tr}(\hat{\rho}' \mathcal{P}_{\alpha'}) = \text{Tr}\left(\hat{U}(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_A)\hat{U}^\dagger(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'})\right) = \\
 &= \text{Tr}\left((\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_A)\hat{U}^\dagger(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'})\hat{U}\right) = \\
 &= \sum_{i,\alpha} \langle f_i^{(S)} | \langle a_\alpha | (\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_A) \hat{U}^\dagger(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}) \hat{U} | a_\alpha \rangle | f_i^{(S)} \rangle = \\
 &= \sum_i \langle f_i^{(S)} | \hat{\rho}_S \left(\sum_\alpha \langle a_\alpha | (\hat{1}_S \otimes \hat{\rho}_A) \hat{U}^\dagger(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}) \hat{U} | a_\alpha \rangle \right) | f_i^{(S)} \rangle = \\
 &= \sum_i \langle f_i^{(S)} | \hat{\rho}_S \hat{E}_{\alpha'} | f_i^{(S)} \rangle = \text{Tr}_S(\hat{\rho}_S \hat{E}_{\alpha'}),
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

где POVM-оператор (действующий только в системе "S")

$$\hat{E}_{\alpha'} = \sum_\alpha \langle a_\alpha | (\hat{1}_S \otimes \hat{\rho}_A) \hat{U}^\dagger(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}) \hat{U} | a_\alpha \rangle \tag{6.38}$$

Лекция 7. Основы классической теории информации. Часть 1.

Классическая энтропия. Биты и наты.

Классические компьютеры работают в *двоичной логике* "1" и "0" (есть напряжение в ячейке или нет). В этом случае считают, что каждая ячейка содержит один *бит* информации. Регистр из N ячеек содержит N бит информации. С их помощью можно записать 2^N сообщений (сообщение – состояние всех N ячеек). Если сообщения равновероятны, то вероятность каждого сообщения $w_N = 1/2^N$. Введем информационную энтропию по формуле:

$$H = -\log_2 w_N \quad (7.1)$$

Для нашего простейшего случая $H = N$. На самом деле, есть сообщения более вероятные и менее вероятные. Поэтому Клод Шеннон обобщил *информационную энтропию* следующим образом:

$$H = -\sum_{l=1}^N w_l \ln(w_l) \quad (7.2)$$

Последняя формула записана через натуральный логарифм, а не через \log_2 . Поэтому информацию по Шеннону измеряют в "*натах*" :

$$1_{\text{нат}} = \frac{1}{\ln 2} \text{бит} \approx 1,44 \text{бит} \quad (7.3)$$

$$1 \text{бит} = \ln 2_{\text{нат}} \approx 0,69_{\text{нат}} \quad (7.4)$$

Энтропия и информация.

Вернемся к записи сообщений в регистр из N ячеек. Если все сообщения равновероятны, то до прочтения содержания регистра мы не имеем никакой информации о том, какое из 2^N сообщений в нем записано. Пусть I – *мера информации*. Тогда до прочтения регистра $I_{in} = 0$, но энтропия $H_{in} = N$. Когда сообщение из регистра прочитано, то мы стали обладать информацией из N бит, то есть $I_{fin} = N$. При этом мы точно знаем, какое сообщение записано в регистре. Поэтому $W_{Nfin} = 1$. Следовательно $H_{fin} = 0$. Таким образом, в нашем примере выполняется следующее равенство

$$H_{in} + I_{in} = N = H_{fin} + I_{fin} \quad (7.5)$$

В общем случае, связь энтропии и информации задается следующим образом:

$$H + I = const \quad (7.6)$$

или

$$\Delta H = -\Delta I \quad (7.7)$$

Следовательно, шенноновскую информационную энтропию можно рассматривать как меру недостатка информации о классической системе. Чем меньше энтропия, тем больше информация. В этом случае говорят о том, что система упорядочена. Чем больше энтропия, тем меньше информация о системе. Часто говорят о том, что система приближается к состоянию хаоса.

Механизм декогеренции и парадокс кота Шредингера.

С понятием энтропии тесно связан один из механизмов перехода суперпозиции состояний в смесь состояний, который был опубликован в книге *Б.Б. Кадомцева "Динамика и информация"*, М. УФН, 1999.

Какие проблемы могут возникнуть при описании такого перехода в рамках формализма квантовой теории, показал Э. Шредингер в 1935 г. – *парадокс кота Шредингера*.

Парадокс кота Шредингера формулируется следующим образом. (Рис. 7.1) Пусть живой кот помещен в непрозрачный закрытый ящик с атомом, находящимся в возбужденном состоянии (двухуровневая система) и ФЭУ. При в ФЭУ фотона создается импульс тока, который взрывает гранату, также находящуюся в ящике. У атома (для простоты) имеются всего две возможности:

- 1) остаться в возбужденном состоянии;
- 2) испустить фотон и перейти в основное состояние.

Вектор состояния атома:

$$|A\rangle = C_1 |1\rangle + C_2 |0\rangle, \quad (7.8)$$

где $|1\rangle$ – возбужденное состояние атома, $|0\rangle$ – основное состояние.

Фотон плюс атом:

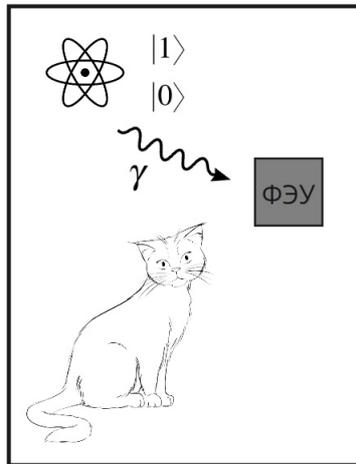


Рис. 7.1. Схема парадокса кота Шредингера.

$$|\gamma + A\rangle = C_1 |1\rangle |0_\gamma\rangle + C_2 |0\rangle |1_\gamma\rangle, \quad (7.9)$$

где $|0_\gamma\rangle$ – фото не испущен, $|1_\gamma\rangle$ – фотон испущен.

Предположим, что испущенный фотон всегда регистрируется ФЭУ в следствие чего обязательно взрывается граната и убивает кота.

Фотон плюс атом плюс ФЭУ:

$$|\gamma + A + \text{ФЭУ}\rangle = C_1 |1\rangle |0_\gamma\rangle |-\rangle + C_2 |0\rangle |1_\gamma\rangle |+\rangle, \quad (7.10)$$

где $|-\rangle$ – граната целая, $|+\rangle$ – граната взорвалась.

Кот плюс ФЭУ плюс фотон плюс атом:

$$|C + \text{ФЭУ} + \gamma + A\rangle = C_1 |1\rangle |0_\gamma\rangle |-\rangle |\text{кот жив}\rangle + C_2 |0\rangle |1_\gamma\rangle |+\rangle |\text{кот мертв}\rangle \quad (7.11)$$

Не вызывает сомнений, что атом находится в суперпозиции основного и возбужденного состояний. Из этого, казалось бы, можно сделать (неверный!) вывод, что граната должна находиться в суперпозиции целой и взорвавшейся, а кот в суперпозиции живого и мертвого существа. Такого явления суперпозиции двух макроскопически различимых состояниях в природе не наблюдается. Считается, что этот парадокс показывает, что невозможно распространить идеи квантовой механики на макроскопический мир.

Абсолютно неправильно трактовать последнее выражение как выражение для суперпозиции живого и мертвого кота, но как суперпозицию состояний атома, фотона, ФЭУ и кота. Суперпозиция состояний живого и мертвого кота выглядела бы как:

$$|C\rangle = D_1 |\text{кот жив}\rangle + D_2 |\text{кот мертв}\rangle \quad (7.12)$$

Обозначим:

$$|V\rangle = |C + \text{ФЭУ} + \gamma + A\rangle \quad (7.13)$$

Рассмотрим матрицу плотности всей системы

$$\hat{\rho} = |V\rangle\langle V| \quad (7.14)$$

Тогда матрица плотности кота:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{кота}} &= \text{Tr}_{A,\gamma,\text{ФЭУ}} \hat{\rho} = \text{Tr}_{\gamma,\text{ФЭУ}} (\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle + \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle) = \\ &= \text{Tr}_{A,\gamma,\text{ФЭУ}} (|C_2|^2 |1_\gamma\rangle|+\rangle|\text{кот мертв}\rangle\langle\text{кот мертв}| + |\langle 1_\gamma| + \\ &+ |C_1|^2 |0_\gamma\rangle|-\rangle|\text{кот жив}\rangle\langle\text{кот жив}| - |\langle 0_\gamma| = \\ &= |C_1|^2 |\text{кот жив}\rangle\langle\text{кот жив}| + |C_2|^2 |\text{кот мертв}\rangle\langle\text{кот мертв}| \end{aligned} \quad (7.15)$$

Мы получили, что состояние кота в данном опыте описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho}_{\text{кота}} = |C_1|^2 |\text{кот жив}\rangle\langle\text{кот жив}| + |C_2|^2 |\text{кот мертв}\rangle\langle\text{кот мертв}| \quad (7.16)$$

То есть мы получили смесь двух состояний.

Если в любой момент времени экспериментатор откроет непрозрачный ящик, то он увидит либо живого с вероятностью $|C_1|^2$, либо мертвого с вероятностью $|C_2|^2$ кота, но никогда живо-мертвого или мертво-живого. То есть экспериментатор всегда увидит смесь макроскопически различимых состояний кота, но никогда не увидит суперпозицию.

Важно, что в данном эксперименте кот никогда не находится в чистом состоянии $|\psi\rangle$ таком, что $\hat{\rho}_{\text{кота}} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Парадокс кота Шредингера говорит нам о том, что описания измерения в терминах вектора состояния нам недостаточно, чтобы получить информацию о результатах измерения. Для этого достаточно описания измерения в терминах матрицы плотности. Тогда парадокс кота Шредингера не является парадоксом.

Вопрос: почему так происходит, ведь породивший всю цепочку событий атом находился в суперпозиции состояний? Иначе, за счет какого физического механизма произошла декогеренция и суперпозиция превратилась в смесь?

Приведем один из возможных механизмов, описывающих ответ на этот вопрос. Все предметы на Земле, в том числе и макроприборы, находятся в потоке излучения Солнца, который у поверхности Земли составляет $\frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx 1,4 \cdot 10^6$ эрг/см² сек (так называемая солнечная постоянная). Этот поток излучения, в конечном счете, преобразуется в тепловую энергию атомов и молекул со средней температурой $\langle T \rangle \sim 300$ К. Тогда поток изменения энтропии от Солнца (в битах!) у поверхности Земли равен:

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} \sim \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta Q}{k_B \langle T \rangle} = -\frac{1}{k_B \langle T \rangle} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx -3 \cdot 10^{19} \frac{\text{бит}}{\text{см}^2 \text{сек}}, \quad (7.17)$$

где $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ бит эрг/К – постоянная Больцмана. Потоку солнечной энтропии должен соответствовать поток информации

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{\Delta H}{\Delta t} \approx 3 \cdot 10^{19} \frac{\text{бит}}{\text{см}^2 \text{сек}} \quad (7.18)$$

В этом потоке информации "купаются" все макроприборы. Взаимодействие с потоком информации от Солнца приводит к постоянному измерению состояния макроприбора внешней средой и, следовательно, к редукции матрицы плотности макроприбора. Но редукция матрицы плотности макроприбора автоматически приводит к редукции запутанной (в смысле модели измерения фон Неймана) матрицы плотности "микросистема + макроприбор" (в рассматриваемом случае это матрица плотности $\hat{\rho}$ системы "атом + граната + кот").

Оценим время Δt_R между актами редукции. Чтобы произошла редукция, необходимо передать информацию о состоянии макроприбора. Минимальное количество требуемой информации – 1 бит. Поэтому

$$1 \text{ бит} \sim \frac{\Delta I}{\Delta t} \Delta t_R L^2, \quad (7.19)$$

где L – характерный размер макроприбора. Примем $L = 10$ см. Тогда

$$\Delta t_R \sim 3 \cdot 10^{-22} \text{ сек} \quad (7.20)$$

Это время необходимо сравнить с характерным временем срабатывания макроприбора. Даже для лучших макроприборов оно не превосходит $\Delta t_D \sim 10^{-10}$ сек.

Поэтому, пока макроприбор производит одно измерение над микросистемой, в объединенной системе происходит порядка $\Delta t_D / \Delta t_R \approx 10^{11}$ актов редукции. Столько же раз меняется относительная фаза между состояниями $\hat{\rho}_1$ (атом в возбужденном

состоянии + граната не взорвалась + кот жив) и $\hat{\rho}_2$ (атом перешел в основное состояние + граната взорвалась + кот мертв). Следовательно, процесс измерения должен включать в себя усреднение по огромному числу этих различных относительных фаз.

Основываясь на данной оценке и результатах параграфа "Суперпозиция или смесь!" приходим к выводу, что в земных условиях появление мертво-живых и живо-мертвых котов маловероятно. Так решается парадокс кота Шредингера по Б.Б. Кадомцеву.

Параллельно мы показали, что для описания процесса измерения микросистемы (атом) макроприбором (кот) недостаточно дираковского формализма векторов состояния, а требуется привлекать аппарат матрицы плотности. В этом состоит сущность оригинального парадокса кота Шредингера 1935г.

Граница между мирами.

Исходя из представленной выше "солнечной" модели декогеренции по Б.Б. Кадомцеву мы способны оценить масштаб, начиная с которого систему уже можно считать микроскопической и применять к ней квантовые законы.

Сам по себе размер, который бы отделял микро и макро миры друг от друга, – плохой пример (вспомним нейтронные звезды или сверхпроводник, которые являются квантовыми объектами и при этом имеют большие размеры). Но в большинстве случаев такой критерий можно применить.

Согласно соотношению неопределенностей, $\Delta p \Delta x \sim \hbar$. Положим $\Delta x \sim L$, а характерное изменение импульса оценим как:

$$\Delta p \sim mv \sim m \frac{L}{\Delta t_R} \sim \rho L^3 L \frac{\Delta I}{\Delta t} L^2 = \rho \frac{\Delta I}{\Delta t} L^6, \quad (7.21)$$

где ρ – характерная плотность тела. Таким образом:

$$\frac{\rho \Delta I}{\hbar \Delta t} L^7 \sim 1 \quad (7.22)$$

Тогда характерный масштаб, с которого начинают проявляться квантовые свойства:

$$L \sim \left(\frac{\hbar}{\rho \Delta I / \Delta t} \right)^{1/7} \quad (7.23)$$

Если принять $\rho \sim 10 \text{ г/см}^3$, то $L \sim 10^{-7} \text{ см} \ll 10^{-4} \text{ см}$ – длины волны видимого света. Таким образом, квантовые явления нельзя видеть невооруженным глазом. Заметим, что L порядка размеров типичных молекул.

Лекция 8. Основы классической теории информации. Часть 2.

Ограничения на величину шенноновской энтропии.

Введенную выше энтропию по Шеннону $H = -\sum_l w_l \ln(w_l)$ можно определить более строго (как это принято в теории информации). Пусть имеется набор из N случайных величин x_l , каждая из которых появляется с вероятностью $1 \geq w(x_l) \geq 0$ (например, буквы в тексте, грани несимметричной игральной кости и т.д.). Тогда говорят, что задан ансамбль $X = \{x_l, w(x_l), l = \{1, \dots, N\}\}$, энтропия по Шеннону для которого записывается как

$$H(X) = -\sum_{l=1}^N w(x_l) \ln(w(x_l)), \quad (8.1)$$

где

$$\sum_{l=1}^N w(x_l) = 1 \quad (8.2)$$

Поскольку все $w(x_l)$ неотрицательны и не превосходят единицы, то очевидно, что $H(X) \geq 0$. Равенство достигается, когда $w(x_k) = 1$ и $w(x_1) = \dots = w(x_{k-1}) = w(x_{k+1}) = \dots = w(x_N) = 0$.

Напомним, что в классической и квантовой теории информации:

$$0 \cdot \ln 0 \stackrel{def}{=} 0 \quad (8.3)$$

Теперь найдем максимальное значение энтропии $H(X)$. Из условия нормировки вероятности имеем:

$$w(x_N) = 1 - \sum_{l=1}^{N-1} w(x_l) \quad (8.4)$$

Тогда энтропию можно записать в виде

$$H(X) = -\sum_{l=1}^{N-1} w(x_l) \ln(w(x_l)) - w(x_N) \ln(w(x_N)) \quad (8.5)$$

При $k \neq N$ с учетом условия нормировки получаем

$$\frac{\partial}{\partial w(x_k)} (w(x_N) \ln(w(x_N))) = -\ln(w(x_N)) - 1 \quad (8.6)$$

Максимум $H(X)$ находим из условия

$$0 = \frac{\partial H(X)}{\partial w(x_k)} = \ln(w(x_N)) - \ln(w(x_k)) \quad (8.7)$$

Таким образом, $w(x_k) = w(x_N)$. Поскольку k пробегает любые целые значения от 1 до $N - 1$, то максимум функции $H(X)$ достигается, когда вероятности $w(x_1) = w(x_2) = \dots = w(x_{N-1}) = w(x_N) = 1/N$. И этот максимум равен

$$H_{max} = -N \frac{1}{N} \ln \left(\frac{1}{N} \right) = \ln(N) \quad (8.8)$$

Из вышесказанного следует, что энтропия Шеннона $H(X)$ лежит в диапазоне

$$0 \leq H(X) \leq \ln(N), \quad (8.9)$$

где N – количество элементов в ансамбле X .

Двоичная энтропия.

В теории информации (как классической, так и квантовой) важную роль играет ансамбль X_2 , который состоит из элементов x_1 и x_2 , каждый из которых возникает с вероятностями $w(x_1) = w$ и $w(x_2) = 1 - w$ соответственно ($0 \leq w \leq 1$). Энтропия по Шеннону для такого ансамбля

$$H(X_2) \equiv H(w) = H(x_1) + H(x_2) = -w \ln w - (1 - w) \ln(1 - w) \quad (8.10)$$

носит название *двоичной энтропии*.

Очевидно, что двоичная энтропия обладает симметрией относительно значения $w = 1/2$, то есть

$$H(w) = H(1 - w) \quad (8.11)$$

Легко проверить, что максимальное значение двоичной энтропии $H_{max}(X_2) = \ln 2$ и достигается при $w = 1/2$, а минимальное значение $H_{min}(X_2) = 0$ соответствует $w = 0$ или $w = 1$ в полном согласии с общими результатами параграфа "Ограничения на величину шенноновской энтропии".

Из графика функции $H(w)$ (Рис. 8.1) видно, что двоичная энтропия является вогнутой функцией (то есть любая прямая, соединяющая две точки на графике лежит ниже графика самой функции $H(w)$).

$$H(X_2) = H(x_1) + H(x_2) = -w \ln w - (1 - w) \ln(1 - w) \quad (8.12)$$

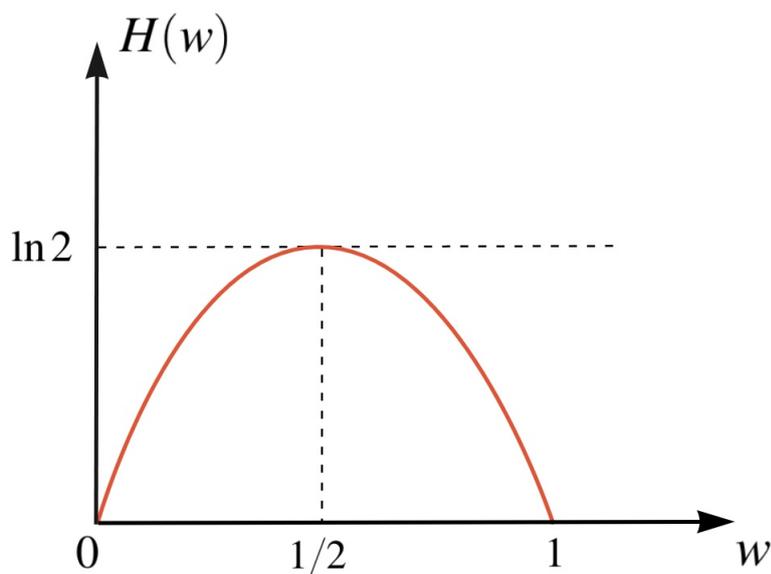


Рис. 8.1. График функции $H(w)$.

Домножив на w выражение для $H(x_1)$, получим: $-w^2 \ln w$. Домножив на $(1-w)$ выражение для $H(x_2)$, получим: $-(1-w)^2 \ln(1-w)$. Сравним выражение для $H(X_2)$ с суммой $-w^2 \ln w - (1-w)^2 \ln(1-w)$. Прежде всего, $-\ln w$ – неотрицательная величина. В диапазоне изменения вероятности $w^2 < w$. Значит

$$-w \ln w \geq -w^2 \ln w \quad (8.13)$$

Понятно, что $-\ln(1-w)$ всегда неотрицательная величина, так же как и $(1-w)$. Тогда

$$-(1-w) \ln(1-w) \geq -(1-w)^2 \ln(1-w) \quad (8.14)$$

Отсюда сразу получаем, что

$$H(X_2) \equiv H(wx_1 + (1-w)x_2) \geq wH(x_1) + (1-w)H(x_2) \quad (8.15)$$

Равенство достигается только если $x_1 = x_2$ или $w = 0$, или $w = 1$. Данное свойство называется вогнутостью двоичной энтропии.

Неравенство Йенсена и вогнутость энтропии Шеннона.

Свойство вогнутости можно сформулировать математически более строго. Функция $f(x)$ называется *вогнутой* при $x \in [a, b]$, если $f''_{xx} \leq 0$.

Для вогнутой функции выполняется следующее неравенство, которое называется *неравенство Йенсена*. Пусть функция $f(x)$ вогнутая на интервале $[a, b]$ и пусть точки x_1, \dots, x_N принадлежат этому интервалу. Кроме того, пусть w_1, \dots, w_N – некоторые положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{l=1}^N w_l = 1$. Тогда:

$$f\left(\sum_{l=1}^N w_l x_l\right) \geq \sum_{l=1}^N w_l f(x_l) \quad (8.16)$$

Доказательство этого факта можно найти, например, на стр.10 книги Ю.П. Соловьева "Неравенства", Издательство Московского центра непрерывного математического образования, Москва, 2005 г.

Наконец, в качестве функции $f(x)$ рассмотрим функцию $f(x) = -x \ln x$. Легко проверить, что эта функция является вогнутой при $x \geq 0$. Тогда неравенство Йенсена приводит к *свойству вогнутости* для энтропии Шеннона:

$$H\left(\sum_{l=1}^N w_l x_l\right) \geq \sum_{l=1}^N w_l H(x_l) \quad (8.17)$$

Классическая относительная энтропия и неравенство Гиббса.

Пусть теперь для величин $\{x_l\}$ ($l = 1, \dots, N$) существуют два различных набора вероятностей $\{p(x_l)\}$ и $\{q(x_l)\}$, которые порождают два ансамбля $P = \{x_l, p(x_l)\}$ и $Q = \{x_l, q(x_l)\}$ соответственно, где $0 \leq p(x_l) \leq 1$, $0 \leq q(x_l) \leq 1$ и $\sum_{l=1}^N p(x_l) = \sum_{l=1}^N q(x_l) = 1$. Тогда *классической относительной энтропией* ансамбля "P" относительно ансамбля "Q" (relative entropy) называется величина

$$H(P||Q) = -\sum_{l=1}^N p(x_l) \ln q(x_l) - H(P) = -\sum_{l=1}^N p(x_l) \ln \left(\frac{q(x_l)}{p(x_l)}\right) \quad (8.18)$$

С аналогичной величиной мы уже встречались в разделе "Количественное сравнение квантовых состояний". И там эта величина называлась *метрикой Кульбака-Лейблера*.

Поэтому $H(P||Q)$ нужно рассматривать как классическую меру различия двух вероятностных распределений $\{p(x_l)\}$ и $\{q(x_l)\}$ для одного и того же набора величин $\{x_l\}$.

В дальнейших вычислениях всегда будем полагать, что $0 \ln 0 = 0$ и $-p(x_l) \ln 0 = +\infty$.

Теперь докажем, что классическая относительная энтропия неотрицательна, т.е.

$$H(P||Q) \geq 0 \quad (8.19)$$

Это неравенство называется *неравенством Гиббса*. Доказательство основано на простом факте, что при $x \geq 0$ верно неравенство $-\ln x \geq 1 - x$ (можно проверить это при помощи разложения в ряд Тейлора). Тогда:

$$\begin{aligned} H(P||Q) &= -\sum_{l=1}^N p(x_l) \ln \left(\frac{q(x_l)}{p(x_l)} \right) \geq \sum_{l=1}^N p(x_l) \left(1 - \frac{q(x_l)}{p(x_l)} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^N p(x_l) - \sum_{l=1}^N q(x_l) = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

Неравенство доказано. Равенство достигается, когда оба распределения совпадают, т.е. когда $\{p(x_l)\} = \{q(x_l)\}$. Неравенство Гиббса удобно использовать для исследования свойств других энтропийных величин.

Классическая совместная энтропия и субаддитивность.

Пусть имеется два набора случайных величин $X = \{x_l\}$ ($l = 1, \dots, N$) и $Y = \{y_m\}$ ($m = 1, \dots, M$), для которых определены совместные вероятности $w(x_l, y_m)$. Тогда для этих наборов естественно определить понятие *классической совместной энтропии* (joint entropy)

$$H(X, Y) = -\sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln w(x_l, y_m) \quad (8.21)$$

Поскольку $w(x_l, y_m) = w(y_m, x_l)$ и $\sum_{l,m} \dots = \sum_{m,l} \dots$, то

$$H(X, Y) = H(Y, X) \quad (8.22)$$

Совместная энтропия является мерой полной неопределенности для пары наборов случайных величин (X, Y) .

Можем предположить, что совместной энтропии можно поставить в соответствие совместную информацию: информация о каждом наборе X и Y и как они скоррелированы друг с другом. Информация же только о наборе X и наборе Y по отдельности не включает в себя информацию о том, как эти наборы скоррелированы друг с другом и скоррелированы вообще. То есть, информации о двух наборах по отдельности меньше, чем совместной информации о них. Из этого простого рассуждения можно понять, что совместная энтропия обладает свойством *субаддитивности* (строгое доказательство будет дано позже)

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (8.23)$$

Равенство достигается, когда наборы X и Y являются независимыми, т.е. когда $w(x_l, y_m) = w(x_l)w(y_m)$.

Очевидно, что понятие совместной энтропии может быть расширено на любое число наборов случайных величин.

Условная вероятность и теорема Байеса.

Обозначим через $w(y_m|x_l)$ – *условную вероятность* найти величину y_m при условии, что величина x_l уже известна. Тогда по определению классической условной вероятности

$$w(y_m|x_l) = \frac{w(y_m, x_l)}{w(x_l)} \quad \text{и} \quad w(x_l|y_m) = \frac{w(x_l, y_m)}{w(y_m)} \quad (8.24)$$

При этом

$$w(y_m) = \sum_l w(y_m, x_l) = \sum_l w(y_m|x_l)w(x_l) \quad (8.25)$$

и

$$w(x_l) = \sum_m w(x_l, y_m) = \sum_m w(x_l|y_m)w(y_m) \quad (8.26)$$

Из равенства совместных вероятностей $w(y_m, x_l)$ и $w(x_l, y_m)$ для наборов классических случайных величин немедленно следует *теорема Байеса*:

$$w(x_l|y_m)w(y_m) = w(x_l, y_m) = w(y_m, x_l) = w(y_m|x_l)w(x_l) \quad (8.27)$$

Классическая условная энтропия.

$$\begin{aligned}
 H(X, Y) &= - \sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln w(x_l, y_m) = \\
 &= - \sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln (w(y_m|x_l)w(x_l)) = \\
 &= - \sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln w(y_m|x_l) - \sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln w(x_l) = \\
 &= - \sum_{l,m} w(y_m, x_l) \ln w(y_m|x_l) - \sum_l w(x_l) \ln w(x_l) = \\
 &= H(Y|X) + H(X)
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

(При преобразованиях мы применили определение условной вероятности.)

Величина

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= - \sum_{l,m} w(y_m, x_l) \ln w(y_m|x_l) = \\
 &= - \sum_l w(x_l) \sum_m w(y_m|x_l) \ln w(y_m|x_l) = \sum_l w(x_l) H(Y|x_l)
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

называется *классической условной энтропией* набора случайных величин Y относительно набора случайных величин X (conditional entropy) или общей классической условной энтропией.

А величина

$$H(Y|x_l) = - \sum_m w(y_m|x_l) \ln w(y_m|x_l) \tag{8.30}$$

называется *частной (парциальной) классической условной энтропией*.

Функция $H(Y|X)$ служит мерой неопределенности набора случайной величины Y при известном значении набора X . А функция $H(Y|x_l)$ служит мерой неопределенности набора Y при известном значении величины x_l .

Поскольку $0 \leq w(y_m|x_l) \leq 1$, то $-\ln w(y_m|x_l) \geq 0$. Поэтому

$$H(Y|X) \geq 0 \quad \text{и} \quad H(Y|x_l) \geq 0 \tag{8.31}$$

Аналогично величине $H(Y|X)$ можно определить классическую условную энтропию $H(X|Y)$ из соотношения:

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \tag{8.32}$$

Очевидно, что $H(X|Y) \geq 0$.

Доказательство субаддитивности.

Выше было получено, что $H(Y|X) \geq 0$ и $H(X|Y) \geq 0$. Отсюда немедленно следуют неравенства:

$$H(X, Y) \geq H(X) \quad \text{и} \quad H(X, Y) \geq H(Y) \quad (8.33)$$

Теперь докажем субаддитивность энтропии. Для этого воспользуемся неравенством Гиббса. Рассмотрим относительную энтропию ансамблей $P = \{x_l, y_m, w(x_l, y_m)\}$ и $Q = \{x_l, y_m, w(x_l)w(y_m)\}$. Тогда:

$$\begin{aligned} 0 \leq H(P||Q) &= - \sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln \left(\frac{w(x_l)w(y_m)}{w(x_l, y_m)} \right) = \\ &= - \sum_l \ln w(x_l) \sum_m w(x_l, y_m) - \sum_m \ln w(y_m) \sum_l w(x_l, y_m) + \sum_{l,m} w(x_l, y_m) \ln w(x_l, y_m) = \\ &= - \sum_l w(x_l) \ln w(x_l) - \sum_m w(y_m) \ln w(y_m) - H(X, Y) = \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (8.34)$$

Неравенство доказано. Окончательно получаем, что

$$2 \cdot H(X, Y) \geq H(X) + H(Y) \geq H(X, Y) \quad (8.35)$$

Классическая взаимная информация.

Классической взаимной информацией (mutual information) называется информация, которая является общей для наборов X и Y . Она записывается в виде:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (8.36)$$

откуда немедленно следует, что $I(X : Y) \geq 0$. По своему определению $I(X : Y)$ должна быть симметричной функцией наборов X и Y , то есть

$$I(X : Y) = I(Y : X) \geq 0 \quad (8.37)$$

Отметим полезное равенство

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (8.38)$$

Из этого равенства и неотрицательности взаимной информации сразу получаем, что

$$H(X) \geq H(X|Y) \quad \text{и} \quad H(Y) \geq H(Y|X) \quad (8.39)$$

Заметим, что взаимная информация НЕ обладает свойством субаддитивности, т.е.

$$I(X, Y : Z) \not\leq I(X : Z) + I(Y : Z) \quad (8.40)$$

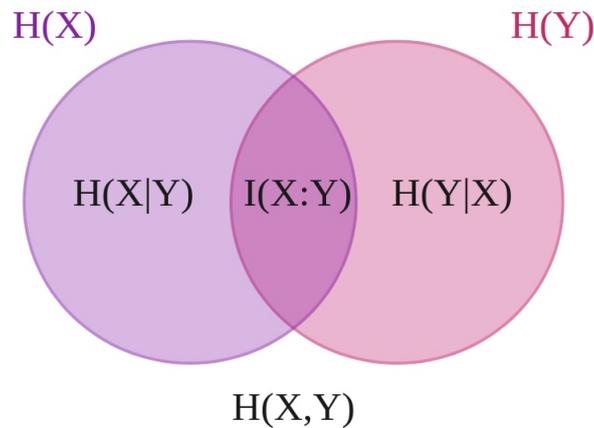


Рис. 8.2. Наглядная связь между различными энтропиями и взаимной информацией.

Сильная субаддитивность.

Довольно очевидно, что можно узнать больше информации о наборе X , если известна информация о наборах Y и Z , которые каким-то образом связаны с набором X (например, при помощи совместных распределений вероятностей или найденных на опыте эмпирических корреляций), чем когда известна информация только об одном таком наборе Y . В силу соотношения между энтропией и информацией для условной энтропии должно иметь место обратное неравенство

$$H(X|Y, Z) \leq H(X|Y) \quad (8.41)$$

Распишем правую и левую части данного неравенства согласно определению условной энтропии. Имеем

$$H(X|Y,Z) = H(X,Y,Z) - H(Y,Z) \quad \text{и} \quad H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) \quad (8.42)$$

Отсюда получаем *свойство сильной субаддитивности* для энтропии Шеннона

$$H(X,Y,Z) + H(Y) \leq H(X,Y) + H(Y,Z) \quad (8.43)$$

Лекция 9. Основы квантовой теории информации. Часть 1.

Квантовая энтропия (энтропия фон Неймана).

Рассмотрим микросистему, которая описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$. Пусть $|\rho_i\rangle$ – собственные векторы матрицы плотности, отвечающие собственным значениям ρ_i (для простоты будем считать их невырожденными):

$$\hat{\rho} |\rho_i\rangle = \rho_i |\rho_i\rangle \quad (9.1)$$

Вспомним, что ρ_i имеет смысл вероятности найти квантовую систему в чистом состоянии $\hat{\rho}_i = |\rho_i\rangle\langle\rho_i|$. Поэтому $0 \leq \rho_i \leq 1$.

В базисе $\{|\rho_i\rangle\}$ матрица плотности имеет диагональный вид. Поэтому в базисе собственных векторов *квантовая энтропия* (или *энтропия фон Неймана*) может быть определена аналогично классической (информационной) энтропии $H(X)$ Шеннона при помощи собственных значений:

$$S = - \sum_i \rho_i \ln \rho_i \quad (9.2)$$

Докажем, что полученное выражение для энтропии можно переписать в универсальном виде:

$$S \equiv S(\hat{\rho}) \equiv \langle \hat{S} \rangle_{\rho} = - \langle \ln \hat{\rho} \rangle_{\rho} = - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad (9.3)$$

где $\hat{S} = -\ln \hat{\rho}$ – *оператор энтропии*. Формула для энтропии фон Неймана S верна в любом представлении матрицы плотности, и никак не связана со специфическим базисом собственных векторов матрицы $\hat{\rho}$.

Доказательство начнем с того факта, что в базисе собственных векторов $F(\hat{\rho}) |\rho_i\rangle = F(\rho_i) |\rho_i\rangle$. Тогда:

$$- \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = - \sum_i \langle \rho_i | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | \rho_i \rangle = - \sum_i \rho_i \ln \rho_i \quad (9.4)$$

При помощи унитарного преобразования \hat{U} перейдем от матрицы $\hat{\rho}$ в базисе собственных векторов к матрице плотности в каком-либо другом базисе (понятно, что мы не предполагаем, что она будет диагональна). Обозначим эту матрицу через $\hat{\rho}_*$. То есть

$$\hat{\rho}_* = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \quad (9.5)$$

Поскольку физическое состояние микросистемы при таком преобразовании не меняется, то для наблюдаемой A :

$$\langle A \rangle_{\rho} = \langle A \rangle_{\rho_*} \quad (9.6)$$

Кроме того:

$$\begin{aligned} \ln \hat{\rho}_* &= \ln (\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) = \ln \hat{U} + \ln (\hat{\rho} \hat{U}^\dagger) = \ln (\hat{\rho} \hat{U}^\dagger) + \ln \hat{U} = \\ &= \ln (\hat{\rho} \hat{U}^\dagger \hat{U}) = \ln \hat{\rho} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Учитывая два последних результата, получаем:

$$-\langle \ln \hat{\rho}_* \rangle_{\rho_*} = -\langle \ln \hat{\rho}_* \rangle_{\rho} = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle_{\rho} \quad (9.8)$$

Таким образом, наше утверждение доказано. Из него сразу следует, что энтропия S не изменяется при любых унитарных преобразованиях базиса, в котором записана матрица $\hat{\rho}$, то есть

$$s(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) = s(\hat{\rho}) \quad (9.9)$$

То есть и при унитарной эволюции замкнутой квантовой системы энтропия не меняется.

Заметим: для практических вычислений удобнее находить собственные векторы и собственные значения матрицы плотности. При этом считается, что $0 \cdot \ln(0) = 0$.

А потом вычислять энтропию по формуле $S = -\sum_i \rho_i \ln \rho_i$.

Заметим: наоборот, для доказательства общих соотношений удобно операторное выражение для энтропии в виде $S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$.

Пример вычислений квантовой энтропии.

Найдем энтропию фон Неймана для системы, задаваемой матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

Для этого надо отыскать собственные значения матрицы $\hat{\rho}$. Записываем характеристическое уравнение:

$$\det(\hat{\rho} - \lambda \hat{1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{i}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{i}{6} & \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{i}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{i}{6} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.11)$$

Получившееся в результате вычисления детерминанта кубическое уравнение решается разложением на множители. В результате находим следующие корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{6}$ и $\lambda_3 = \frac{2}{3}$. Тогда

$$S = -2 \frac{1}{6} \ln \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} = \ln 3 - \frac{1}{3} \ln 2 \approx 0,87 \text{ нат} \approx 1,25 \text{ бит} \quad (9.12)$$

Энтропия замкнутой квантовой системы.

Из курса термодинамики и статистической физики известно, что *энтропия замкнутой системы сохраняется*. Докажем это утверждение для энтропии замкнутой квантовой системы.

Первый способ. Как было показано в параграфе "Эволюция матрицы плотности во времени. Квантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана)" эволюция замкнутых квантовых систем определяется унитарным оператором $\hat{U}(t, t_0)$ по формуле

$$\hat{\rho}^{(S)}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_0^{(S)} \hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (9.13)$$

Поскольку энтропия S не меняется при унитарных преобразованиях, то утверждение доказано.

Второй способ. Используя уравнение фон Неймана можно прямо показать, что

$$S(\hat{\rho})_t = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})) = 0, \quad (9.14)$$

откуда опять следует сохранение энтропии замкнутой квантовой системы. Рекомендуется провести это доказательство самостоятельно. Для него нужно помнить о цикличности следа и о том, что $[\hat{\rho}, \ln \hat{\rho}] = 0$.

Ограничения на величину энтропии фон Неймана.

С учетом определения энтропии фон Неймана S в терминах собственных значений ρ_i и принимая во внимание, что все $0 \leq \rho_i \leq 1$, немедленно приходим к неравенству $S \geq 0$. Равенство достигается, когда одно из значений $\rho_k = 1$, а остальные значения равны нулю.

Если энтропия S имеет N ненулевых собственных значений, то $S \leq \ln(N)$. Равенство достигается, когда все $\rho_i = 1/N$, то есть когда квантовая система находится в максимально однородном состоянии. Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству неравенства $H(X) \leq \ln(N)$, которое было проведено в параграфе "Ограничения на величину шенноновской энтропии".

Таким образом, аналогично классической энтропии Шеннона $H(X)$, квантовая энтропия фон Неймана S удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leq S \leq \ln(N) \quad (9.15)$$

Энтропия чистого состояния.

Возьмем произвольное чистое состояние ψ . Ему отвечает матрица плотности $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, для которой уравнение на собственные векторы и собственные значения записывается в виде:

$$\hat{\rho} |\rho_i\rangle = \rho_i |\rho_i\rangle \quad (9.16)$$

Отсюда

$$\langle\psi|\rho_i\rangle|\psi\rangle = \rho_i |\rho_i\rangle \quad (9.17)$$

Поэтому матрица плотности чистого состояния имеет один собственный вектор $|\rho_1\rangle = |\psi\rangle$, которому соответствует единственное собственное значение $\rho_1 = \langle\psi|\rho_1\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$. Тогда энтропия чистого состояния

$$S_\psi = -1 \cdot \ln 1 = 0 \quad (9.18)$$

Поскольку $S \geq 0$, то мы показали, что любое чистое состояние обладает максимально возможной для макроскопического наблюдателя (!!!) информацией о свойствах квантовой системы. Это утверждение полностью согласуется с примечанием к Постулату №1 из раздела "Постулаты квантовой механики".

Гипотеза о скрытых параметрах.

Вообще говоря, понятие максимально возможного количества информации, которое доступно макроскопическому наблюдателю, может быть НЕ эквивалентно понятию полной информации, которой обладает квантовая система в чистом или смешанном состоянии.

Например, можно предположить, что существует некие "тонкие" характеристики квантовой системы, которые принципиально не улавливаются при помощи наших грубых макроскопических приборов. И, если бы экспериментаторы могли знать эти характеристики, то предсказания поведения квантовых систем можно было бы проводить абсолютно детерминистически в духе классической физики. Но мы не знаем и никогда не узнаем эти "тонкие" параметры. Поэтому вынуждены строить вероятностную теорию, которая относится к реальному поведению микрообъектов как, например, классическая термодинамика и статистическая физика к поведению классического идеального газа.

Такие "тонкие" параметры получили название *скрытых параметров* квантовой механики.

В настоящее время:

- кроме изящной теории волны-пилота де Бройля-Бома (работает только в координатном представлении) не удалось построить ни одной логически непротиворечивой теории со скрытыми параметрами, которая могла бы в какой-то степени конкурировать с квантовой механикой по количеству описываемых явлений микромира при минимальных предположениях относительно базовых постулатов теории;
- экспериментально подтвержденное нарушение неравенств Белла исключает самые простые и естественные концепции скрытых параметров (локальные скрытые параметры, т.е. совместимые с аксиомами теории относительности);
- нелокальные скрытые параметры не исключены, но тогда требуется пересмотреть основы современной физики. А к этому нет серьезных оснований.

С помощью скрытых параметров можно описать, почему измерение в квантовой механике имеет случайный характер: происходит усреднение по неизвестным величинам и переход от точных значений к распределениям.

Проще всего вслед за Н.Бором постулировать, что *в квантовом мире случайность имеет фундаментальную природу*. Но следует ли это делать?

Рассмотрим парадокс. Пусть до измерения квантовая система находилась в чистом состоянии $|\psi\rangle$. Проводится измерение некоторой наблюдаемой F , которой в соответствие ставится эрмитов оператор

$$\hat{F}^\dagger = \hat{F} \quad (9.19)$$

Оператор \hat{F} имеет набор собственных векторов и собственных значений (гильбертово пространство имеет конечную размерность):

$$\hat{F} |f_i\rangle = f_i |f_i\rangle \quad (9.20)$$

Теперь, измеряя наблюдаемую F , мы получили значение f_i . Это значит, что после измерения система перешла в чистое состояние $|f_i\rangle$. Вероятность возникновения этого состояния:

$$w_i = |\langle \psi | f_i \rangle|^2 \quad (9.21)$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{F} f_i \longrightarrow |f_i\rangle \quad (9.22)$$

Энтропия начального чистого состояния:

$$S_\psi = 0 \quad (9.23)$$

Конечное состояние также является чистым, так что его энтропия:

$$S_i = 0 \quad (9.24)$$

Значит изменение энтропии во время измерения:

$$\Delta S = 0 \quad (9.25)$$

Отсюда следует, что количество информации, полученное во время измерения:

$$\Delta I = 0 \quad (9.26)$$

То есть мы не получаем информацию о системе во время измерения. Пришли к парадоксу. Его решение существует. Рекомендуется подумать самостоятельно.

Квантовая и классическая энтропии смешанного состояния для диагональной матрицы плотности.

Рассмотрим двумерное гильбертово пространство. Ранее было показано, что матрица плотности

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

отвечает смешанному состоянию. Найдем энтропию этого состояния. Собственные значения данной матрицы очевидно равны $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$. Поэтому энтропия фон Неймана состояния $\hat{\rho}$

$$S = -2 \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln 2 \approx 0,69 \text{ нат} = 1 \text{ бит} \quad (9.28)$$

Можем ввести два состояния:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

Тогда вероятности этих состояний: $w(+)=\frac{1}{2}$ и $w(-)=\frac{1}{2}$. Тогда можно ввести ансамбль $P = \{|+\rangle, |-\rangle, w(+)=1/2, w(-)=1/2\}$.

Тогда энтропия Шеннона для состояния $\hat{\rho}$ составляет:

$$H = -2 \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{ бит} \quad (9.30)$$

Видно, что энтропия смешанного состояния больше нуля. Поэтому в матрице плотности смешанного состояния содержится меньше информации о квантовой системе, чем в матрице плотности или векторе состояния, который соответствует чистому состоянию квантовой системы. Это легко понять, поскольку в процессе декогеренции уничтожается информация об относительных фазах между чистыми состояниями.

Если бы мы имели чистое состояние, то его можно разложить в суперпозицию:

$$|\psi\rangle = C_1 |+\rangle + e^{i\varphi} C_2 |-\rangle \quad (9.31)$$

В то время, как смешенное состояние:

$$\hat{\rho} = C_1^2 |+\rangle\langle +| + C_2^2 |-\rangle\langle -| \quad (9.32)$$

Информация об относительной фазе φ между состояниями $|+\rangle$ и $|-\rangle$, содержащаяся в чистом состоянии, в смешанном состоянии потеряна. Имеем меньше информации. То есть энтропия больше.

Вычисление квантовой и классической энтропии для недиагональной матрицы плотности.

В предыдущем параграфе $S = H$. Это равенство выполняется только тогда, когда матрица плотности диагональна. Что будет, когда матрица плотности имеет НЕдиа-

гональный вид? Для ответа на данный вопрос рассмотрим двухуровневую квантовую систему с базисом

$$|+\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

В этом базисе определим два чистых состояния:

$$|\psi_1\rangle = |+\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad (9.34)$$

Построим матрицу плотности смешанного состояния, если для состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ вероятности $W_1 = W_2 = 1/2$. Имеем:

$$\hat{\rho} = W_1 \hat{\rho}_1 + W_2 \hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

Собственные значения этой матрицы:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 0,854, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 0,146 \quad (9.36)$$

При вычислении энтропии фон Неймана в битах удобно перейти от логарифмов по основанию "e" к логарифмам по основанию "2". Тогда находим:

$$\begin{aligned} S &= -(\rho_1 \ln \rho_1 + \rho_2 \ln \rho_2) = -\ln 2 \cdot (\rho_1 \log_2 \rho_1 + \rho_2 \log_2 \rho_2) = \\ &= \ln 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log_2 \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \right) \approx 0,6 \ln 2 = 0,6 \text{ бит} \approx 0,42 \text{ нат} \end{aligned} \quad (9.37)$$

Для того же самого состояния классическая энтропия Шеннона равна:

$$H = -W_1 \log_2 W_1 - W_2 \log_2 W_2 = -2 \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{ бит} \approx 0,69 \text{ нат} \quad (9.38)$$

Практическое наблюдение: таким образом в рассматриваемом случае $H > S$. То есть, принципиально, при помощи квантовых систем можно передать или обработать БОЛЬШЕ информации, чем с помощью их классических аналогов. На этом основаны методы квантового сверхплотного кодирования и эффективные алгоритмы квантовых вычислений, которые реализуются с помощью запутанных состояний.

Вопрос: всегда ли $H \geq S$, или неравенство можно обратить?

Ответ: ВСЕГДА. Сформулируем это утверждение более строго. Пусть имеется наблюдаемая F , которая (для простоты!) обладает дискретным невырожденным

спектром $\{f_l\}$. Если квантовая система описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, то каждое значение спектра измеряется с вероятностью

$$w_l = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_l) = \langle f_l|\hat{\rho}|f_l\rangle, \quad (9.39)$$

где $\hat{P}_l = |f_l\rangle\langle f_l|$ – проектор на состояние $|f_l\rangle$. Следовательно, для величины f_l можно задать ансамбль $Q_F = \{f_l, w_l\}$. Тогда

$$H(Q_F) \geq S(\hat{\rho}) \quad (9.40)$$

Равенство достигается, если $[\hat{F}, \hat{\rho}] = 0$, то есть когда $w_l \equiv \rho_l$.

Докажем данное неравенство. Рассмотрим матрицу $\hat{\rho}$ в базисе собственных векторов $\hat{\rho} = \sum_i \rho_i |\rho_i\rangle\langle\rho_i|$. Тогда для вероятностей w_l можем записать

$$w_l \langle f_l|\hat{\rho}|f_l\rangle = \sum_i \rho_i \langle f_l|\rho_i\rangle\langle\rho_i|f_l\rangle = \sum_i |C_{li}|^2 \rho_i, \quad (9.41)$$

где $C_{li} = \langle f_l|\rho_i\rangle$

Коэффициенты C_{li} удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_l |C_{li}|^2 = \langle\rho_i|\sum_l \hat{P}_l|\rho_i\rangle = \langle\rho_i|\hat{1}|\rho_i\rangle = \langle\rho_i|\rho_i\rangle = 1 \quad (9.42)$$

Энтропия Шеннона ансамбля Q_F имеет вид:

$$H(Q_F) = -\sum_l w_l \ln w_l = \sum_l H(w_l) \quad (9.43)$$

Применим к ней неравенство Йенсена. Поскольку функция $f(x) = -x \ln x$ является вогнутой, то с учетом разложения w_l по ρ_i , которое было получено выше, и используя нормировку $\sum_l |C_{li}|^2 = 1$ для коэффициентов C_{li} , находим:

$$\begin{aligned} H(Q_F) &= \sum_l H(w_l) = \sum_l H\left(\sum_i |C_{li}|^2 \rho_i\right) \geq \sum_l \sum_i |C_{li}|^2 H(\rho_i) = \\ &= \sum_i H(\rho_i) \sum_l |C_{li}|^2 = \sum_i H(\rho_i) = -\sum_i \rho_i \ln \rho_i = S(\hat{\rho}) \end{aligned} \quad (9.44)$$

Неравенство доказано.

Лекция 10. Основы квантовой теории информации. Часть 2.

Квантовая относительная энтропия и неравенство Клейна.

Пусть проводятся измерения наблюдаемой F с дискретным невырожденным спектром $\{f_i\}$ на микросистемах, которые заданы матрицами плотности $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ соответственно. Тогда *квантовой относительной энтропией* матрицы плотности $\hat{\rho}$ по отношению к матрице $\hat{\sigma}$ называется величина

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\sigma}) + \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\sigma}) - S(\hat{\rho}) \quad (10.1)$$

Квантовая относительная энтропия удовлетворяет *неравенству Клейна*

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \geq 0, \quad (10.2)$$

которое является квантовым аналогом неравенства Гиббса. Докажем это неравенство.

Пусть в базисе собственных векторов матрицы $\hat{\rho} = \sum_i \rho_i |\rho_i\rangle\langle\rho_i|$ и $\hat{\sigma} = \sum_k \sigma_k |\sigma_k\rangle\langle\sigma_k|$. Тогда (т.к. значение следа не зависит от выбора базиса, то его в первом слагаемом можно взять в базисе собственных векторов оператора $\hat{\rho}$)

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) &= -\sum_i \langle\rho_i|\hat{\rho} \ln \hat{\sigma}|\rho_i\rangle + \sum_i \rho_i \ln \rho_i = \\ &= -\sum_i \rho_i \langle\rho_i|\ln \hat{\sigma}|\rho_i\rangle + \sum_i \rho_i \ln \rho_i = \\ &= -\sum_i \rho_i \sum_k \ln \sigma_k |\langle\rho_i|\sigma_k\rangle|^2 + \sum_i \rho_i \ln \rho_i \end{aligned} \quad (10.3)$$

При преобразованиях мы использовали математический факт: если имеется эрмитов оператор \hat{A} и набор его собственных векторов и собственных значений

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle, \quad (10.4)$$

то согласно спектральной теореме:

$$\hat{A} = \sum_i \langle a_i|a_i\rangle \quad (10.5)$$

При этом также для операторной функции $F(\hat{A})$:

$$F(\hat{A}) = \sum_i F(a_i) |a_i\rangle\langle a_i| \quad (10.6)$$

Отсюда:

$$\ln \hat{\sigma} = \sum_k (\ln \sigma_k) |\sigma_k\rangle\langle \sigma_k| \quad (10.7)$$

В силу вогнутости функции $f(x) = \ln x$ при $x \in (0, 1]$ (рекомендуется проверить самостоятельно) можно воспользоваться неравенством Йенсена

$$\sum_k |\langle \rho_i | \sigma_k \rangle|^2 \ln \sigma_k \leq \ln \left(\sum_k |\langle \rho_i | \sigma_k \rangle|^2 \sigma_k \right) = \ln \zeta_i \quad (10.8)$$

Рассмотрим величины $\zeta_i = \sum_k |\langle \rho_i | \sigma_k \rangle|^2 \sigma_k$. Т.к. σ_k – диагональные элементы матрицы плотности, то они всегда неотрицательны. Следовательно каждое слагаемое в выражении для ζ_i – неотрицательное число. Значит $\zeta_i \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sum_i \zeta_i &= \sum_i \sum_k |\langle \rho_i | \sigma_k \rangle|^2 \sigma_k = \\ &= \sum_i \sum_k \langle \rho_i | \sigma_k \rangle \langle \sigma_k | \rho_i \rangle \sigma_k = \sum_i \sum_k \langle \rho_i | \sigma_k \rangle \sigma_k \langle \sigma_k | \rho_i \rangle = \\ &= \sum_i \langle \rho_i | \sum_k \sigma_k |\sigma_k\rangle\langle \sigma_k | \rho_i \rangle \end{aligned} \quad (10.9)$$

Здесь $\sum_k \sigma_k |\sigma_k\rangle\langle \sigma_k|$ – спектральное представление для оператора матрицы плотности $\hat{\sigma}$. Следовательно

$$\sum_i \zeta_i = \sum_i \langle \rho_i | \hat{\sigma} | \rho_i \rangle = \text{Tr } \hat{\sigma} \quad (10.10)$$

Если сумма равна 1, то все ее слагаемые не превосходят единицы, т.е. $\zeta_i \leq 1$.

Мы доказали, что $0 \leq \zeta_i \leq 1$ и $\sum_i \zeta_i = 1$. Тогда величины ζ_i можно трактовать как вероятности, и, следовательно,

$$S(\hat{\rho} || \hat{\sigma}) \geq - \sum_i \rho_i \ln \zeta_i + \sum_i \rho_i \ln \rho_i = \sum_i \rho_i \ln \left(\frac{\rho_i}{\zeta_i} \right) = H(P || Q) \geq 0, \quad (10.11)$$

где используются ансамбли $P = \{f_i, \rho_i\}$, $Q = \{f_i, \zeta_i\}$. Неравенство доказано.

Пример использования неравенства Клейна.

Пусть к системе, которая находилась в состоянии $\hat{\rho}$, применили неселективное измерение наблюдаемой F (см. параграф "Селективные и неселективные измерения").

Вопрос: как будет вести себя энтропия получившегося состояния $\hat{\rho}'$ относительно начального состояния $\hat{\rho}$?

Ответ. Сопоставим наблюдаемой F эрмитов оператор \hat{F} с дискретным невырожденным (для простоты!) спектром. Определим собственные векторы $\hat{F} |f_n\rangle = f_n |f_n\rangle$ и проекторы на них $\hat{P}_n = |f_n\rangle\langle f_n|$. Поскольку набор $\{|f_n\rangle\}$ образует базис в пространстве состояний системы, то $\sum_n \hat{P}_n = \hat{1}$. После неселективного измерения матрица плотности $\hat{\rho}'$ квантовой системы будет иметь вид:

$$\hat{\rho}' = \sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \quad (10.12)$$

(Напомним, что такой вид матрицы плотности является частным случаем преобразования Крауса.)

Пусть имеется набор проекторов \hat{P}_n на собственные состояния оператора \hat{F} и пусть $\hat{P}_{\tilde{n}}$ – один из проекторов из этого набора. Легко проверить, что $[\hat{P}_{\tilde{n}}, \hat{\rho}'] = 0$.

$$[\hat{P}_{\tilde{n}}, \hat{\rho}'] = \hat{P}_{\tilde{n}} \hat{\rho}' - \hat{\rho}' \hat{P}_{\tilde{n}} = \sum_n (\hat{P}_{\tilde{n}} \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n - \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \hat{P}_{\tilde{n}}) \quad (10.13)$$

Для двух собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям наблюдаемой F : $\langle f_{\tilde{n}} | f_n \rangle = \delta_{\tilde{n}n}$

Отсюда следует, что

$$\hat{P}_{\tilde{n}} \hat{P}_n = \delta_{\tilde{n}n} \hat{P}_n \quad (10.14)$$

Тогда

$$[\hat{P}_{\tilde{n}}, \hat{\rho}'] = \sum_n \delta_{\tilde{n}n} (\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n - \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n) = 0 \quad (10.15)$$

Из того, что $[\hat{P}_{\tilde{n}}, \hat{\rho}'] = 0$, следует и $[\hat{P}_{\tilde{n}}, \ln \hat{\rho}'] = 0$ для любого $\tilde{n} \in \{n\}$. Заметим, вообще говоря, $[\hat{P}_{\tilde{n}}, \hat{\rho}] \neq 0$. Теперь все готово, чтобы ответить на вопрос задачи.

Согласно неравенству Клейна

$$0 \leq S(\hat{\rho} || \hat{\rho}') = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}') - S(\hat{\rho}) \quad (10.16)$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}') &= \text{Tr}(\hat{1} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}') = \text{Tr} \left(\sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} \ln \hat{\rho}' \right) = \\
 &= \text{Tr} \left(\sum_n \hat{P}_n^2 \hat{\rho} \ln \hat{\rho}' \right) = \sum_n \text{Tr}(\hat{P}_n^2 \hat{\rho} \ln \hat{\rho}') = \sum_n \text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho} \ln \hat{\rho}' \hat{P}_n) = \\
 &= \sum_n \text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \ln \hat{\rho}') = \text{Tr} \left(\left(\sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \right) \ln \hat{\rho}' \right) = \\
 &= \text{Tr}(\hat{\rho}' \ln \hat{\rho}') = -S(\hat{\rho}')
 \end{aligned} \tag{10.17}$$

Таким образом

$$0 \leq S(\hat{\rho}') - S(\hat{\rho}), \tag{10.18}$$

то есть

$$S(\hat{\rho}') \geq S(\hat{\rho}) \tag{10.19}$$

Следовательно при любом проективном неселективном измерении энтропия квантовой системы увеличивается, а информация о системе теряется.

Монотонность квантовой относительной энтропии.

Унитарное преобразование \hat{U} не меняет относительную энтропию, т.е.

$$S(\hat{\rho} || \hat{\sigma}) = S(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger || \hat{U} \hat{\sigma} \hat{U}^\dagger) \tag{10.20}$$

Доказательство данного равенства проводится аналогично доказательству соотношения $S(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) = S(\hat{\rho})$ из параграфа "Квантовая энтропия (энтропия фон Неймана)". Рекомендуется сделать это самостоятельно.

Для преобразования Крауса $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ (см. параграф "Теорема Крауса") справедливо неравенство

$$S(\hat{\rho} || \hat{\sigma}) \geq S(\mathcal{E}(\hat{\rho}) || \mathcal{E}(\hat{\sigma})) \tag{10.21}$$

Доказательство можно найти в книге *А.С. Холево "Квантовые системы, каналы, информация"*, М. "МЦНМО" (2010), стр. 138-144.

Отображение \mathcal{E} относится к классу вполне положительных отображений. В работе *Alexander Muller-Hermes and David Reeb, "Monotonicity of the Quantum Relative Entropy Under Positive Maps"*, *Annales Henri Poincaré* 18, pp. 1777-1788 (2017) было

доказано более сильное утверждение: если Φ – любое положительное сохраняющее след линейное отображение из пространства \mathcal{H} в пространство \mathcal{H}' , то

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \geq S(\Phi(\hat{\rho})||\Phi(\hat{\sigma})) \quad (10.22)$$

Квантовая совместная энтропия и субаддитивность.

Пусть имеется квантовая система, которая описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_{AB}$. И пусть эта система состоит из двух подсистем "A" и "B" (которые могут как взаимодействовать, так и не взаимодействовать между собой). Тогда *квантовой совместной энтропией* рассматриваемой квантовой системы называется величина

$$S(\hat{\rho}_{AB}) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_{AB}) \quad (10.23)$$

Как и классическая совместная энтропия, квантовая совместная энтропия обладает *свойством субаддитивности*

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B), \quad (10.24)$$

где $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB}$ и $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A \hat{\rho}_{AB}$ – матрицы плотности подсистем "A" и "B" соответственно. Для доказательства свойства субаддитивности воспользуемся неравенством Клейна и очевидным свойством частичного следа

$$\text{Tr}(\dots) = \text{Tr}_A (\text{Tr}_B(\dots)) = \text{Tr}_B (\text{Tr}_A(\dots)) \quad (10.25)$$

Докажем это выражение. Гильбертово пространство всей системы – прямое произведение гильбертовых пространств двух подсистем: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$. В $\mathcal{H}^{(A)}$ "живут" наблюдаемые, относящиеся к подсистеме "A" и их собственные векторы. Так же и для подсистемы "B".

Рассмотрим подсистему "A" и ее наблюдаемую $F^{(A)}$, которой в соответствие ставится эрмитов оператор:

$$F^{(A)} \Rightarrow \hat{F}^{(A)} |f_n\rangle = f_n |f_n\rangle \quad (10.26)$$

В подсистеме "B" :

$$G^{(B)} \Rightarrow \hat{G}^{(B)} |g_m\rangle = g_m |g_m\rangle \quad (10.27)$$

Собственные векторы наблюдаемой $F^{(A)}$ образуют базис в $\mathcal{H}^{(A)}$, а собственные векторы наблюдаемой $G^{(B)}$ образуют базис в $\mathcal{H}^{(B)}$.

Из законов прямого произведения следует, что базисные векторы в гильбертовом пространстве \mathcal{H} всей системы:

$$|n, m\rangle = |f_n\rangle \otimes |g_m\rangle \quad (10.28)$$

Пусть оператор \hat{O} действует в \mathcal{H} . Тогда его след:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{O} &= \sum_{n,m} \langle n, m | \hat{O} | n, m \rangle = \sum_{n,m} \langle f_n | \otimes \langle g_m | \hat{O} | g_m \rangle \otimes | f_n \rangle = \\ &= \sum_n \langle f_n | \sum_m \langle g_m | \hat{O} | g_m \rangle | f_n \rangle = \sum_n \langle f_n | \text{Tr}_B \hat{O} | f_n \rangle = \text{Tr}_A (\text{Tr}_B \hat{O}) \end{aligned} \quad (10.29)$$

Теперь докажем свойство субаддитивности. Имеем:

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(\hat{\rho}_{AB} || \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_{AB} \ln(\hat{\rho}_A \hat{\rho}_B)) - S(\hat{\rho}_{AB}) = \\ &= -\text{Tr}(\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_A) - \text{Tr}(\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}) = \\ &= -\text{Tr}_A(\text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_A)) - \text{Tr}_B(\text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_B)) - S(\hat{\rho}_{AB}) = \\ &= -\text{Tr}_A((\text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB}) \ln \hat{\rho}_A) - \text{Tr}_B((\text{Tr}_A \hat{\rho}_{AB}) \ln \hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}) = \\ &= -\text{Tr}_A(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A) - \text{Tr}_B(\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}), \end{aligned} \quad (10.30)$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается для *некоррелированных* подсистем "A" и "B", то есть когда $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$.

Для квантовой энтропии выполняется *свойство сильной субаддитивности*, которое аналогично соответствующему свойству для классической энтропии. Пусть квантовая система описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_{ABC}$ и состоит из трех подсистем "A", "B" и "C". Тогда

$$S(\hat{\rho}_{ABC}) + S(\hat{\rho}_B) \leq S(\hat{\rho}_{AB}) + S(\hat{\rho}_{BC}) \quad (10.31)$$

В квантовом случае доказательство гораздо сложнее классического. Его можно найти, например, в книге *М. Нильсен, И. Чанг, "Квантовые вычисления и квантовая информация"*, М. "Мир" (2006), параграф 11.4. Мы это доказательство приводить не будем.

Свойство субаддитивности для состояния Вернера.

Напомним, что такое состояние Вернера. Пусть имеется две двухуровневые системы "A" и "B": два спина 1/2. Сложив эти спины, можно получить спиновый триплет и спиновый синглет.

Спиновому синглету будет соответствовать запутанное белловское состояние:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^{(A)} \otimes |-\rangle^{(B)} - |-\rangle^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \right), \quad (10.32)$$

где

$$|\pm\rangle^{(i)} = \left| S = \frac{1}{2}, S_z = \pm \frac{1}{2} \right\rangle^{(i)} \quad (10.33)$$

При помощи чистого состояния $|\psi^-\rangle$ можно построить смешанное состояние Вернера, которое имеет вид:

$$\hat{\rho}^{(W)} = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + \frac{1}{4} (1-x) \hat{1}, \quad (10.34)$$

где $0 \leq x \leq 1$ называется параметром чистоты, а $\hat{1}$ – единичная матрица 4×4 .

Матрица плотности состояния Вернера $\hat{\rho}^{(W)}$ "живет" в Гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$, значит $\dim \mathcal{H} = 4$.

Покажем, что *состояние Вернера* автоматически удовлетворяет свойству *субаддитивности* при любых значениях $x \in [0, 1]$. Для рассматриваемого состояния размерность Гильбертова пространства $N = 4$. Поэтому из раздела "Ограничения на величину энтропии фон Неймана" сразу следует, что

$$S(\hat{\rho}^{(W)}) \leq \ln 4 = 2 \ln 2 \quad (10.35)$$

В разделе "Редукционное условие сепарабельности" были найдены матрицы плотности подсистем "А" и "В" со спином 1/2 в виде

$$\hat{\rho}_A^{(W)} = \hat{\rho}_B^{(W)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.36)$$

Используя результаты раздела "Пример вычисления энтропии смешанного состояния" для энтропий подсистем "А" и "В" немедленно можно написать, что $S(\hat{\rho}_A^{(W)}) = S(\hat{\rho}_B^{(W)}) = \ln 2$. Тогда

$$S(\hat{\rho}_A^{(W)}) + S(\hat{\rho}_B^{(W)}) = 2 \ln 2 \geq S(\hat{\rho}^{(W)}) \quad (10.37)$$

при любых $x \in [0, 1]$, что и требовалось доказать.

Субаддитивность и второе начало термодинамики.

Часто второе начало термодинамики формулируют следующим образом: энтропия любой замкнутой системы (например, нашей Вселенной) не может убывать со

временем. Покажем, что второе начало термодинамики может быть получено из свойства субаддитивности энтропии фон Неймана.

Рассмотрим микрочастицу "А" в термодинамическом окружении (термостате) "В". Пусть при $t \leq t_0$ микрочастица и окружение не взаимодействовали друг с другом. Тогда в момент времени t_0 матрицу плотности всей замкнутой системы $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{AB}(t_0)$ можно записать в виде $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{A0} \otimes \hat{\rho}_{B0}$. По свойству субаддитивности

$$S(\hat{\rho}_0) = S(\hat{\rho}_{A0}) + S(\hat{\rho}_{B0}) \quad (10.38)$$

В произвольный момент времени эволюция матрицы плотности замкнутой квантовой системы может быть записана при помощи УНИТАРНОГО оператора эволюции $\hat{U}(t, t_0)$ в виде:

$$\hat{\rho}_{AB}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_0 \hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (10.39)$$

В разделе "Квантовая энтропия" было показано, что энтропия фон Неймана не меняется при унитарных преобразованиях. Поэтому

$$S(\hat{\rho}_{AB}(t)) = S(\hat{\rho}_0) \quad (10.40)$$

С другой стороны при $t > t_0$ между микрочастицей и термостатом началось взаимодействие. Поэтому матрицу плотности всей системы $\hat{\rho}_{AB}(t)$ уже нельзя записать в простом факторизованном виде. Согласно условию субаддитивности это приводит к тому, что

$$S(\hat{\rho}_{AB}(t)) \leq S(\hat{\rho}_A(t)) + S(\hat{\rho}_B(t)) \quad (10.41)$$

Поэтому

$$S(\hat{\rho}_{A0}) + S(\hat{\rho}_{B0}) \leq S(\hat{\rho}_A(t)) + S(\hat{\rho}_B(t)) \quad (10.42)$$

Если рассматривать Вселенную как набор микрочастиц во внешнем окружении (например, в поле Хиггса, в поле реликтовых фотонов или нейтрино), то при помощи последнего неравенства можно сразу заключить, что энтропия Вселенной не может убывать.

Лекция 11. Основы квантовой теории информации. Часть 3.

Квантовая взаимная информация.

Квантовая взаимная информация вводится по аналогии с классической $I(X : Y)$ по формуле

$$I_Q(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}) \geq 0, \quad (11.1)$$

что следует из свойства субаддитивности энтропии фон Неймана. Величина $I_Q(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B)$ является мерой степени корреляции двух квантовых подсистем "А" и "В". Чтобы пояснить сказанное, приведем несколько примеров.

1) Для чистого состояния Белла

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^{(A)} |-\rangle^{(B)} - |-\rangle^{(A)} |+\rangle^{(B)} \right) \quad (11.2)$$

матрица плотности $\hat{\rho}_{AB} = |\psi^-\rangle \langle \psi^-|$. Это матрица плотности чистого состояния. Поэтому $S(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ (см. раздел "Матрица плотности чистого состояния"). В то время как матрицы плотности каждой из подсистем

$$\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

(см. параграф "Квантовое происхождение вероятностей W_l "). Для них $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = \ln 2$

Тогда квантовая взаимная информация двух подсистем в состоянии Белла

$$I_Q(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B) = 2 \ln 2, \quad (11.4)$$

что означает максимальную возможную степень корреляции.

2) Для смеси состояний

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{2} \left(|+\rangle^{(A)} \langle +|^{(A)} \otimes |-\rangle^{(B)} \langle -|^{(B)} + |-\rangle^{(A)} \langle -|^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \langle +|^{(B)} \right) \quad (11.5)$$

энтропия всей квантовой системы $S(\hat{\rho}_{AB}) = -2 \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln 2$. Матрицы плотности каждой из подсистем

$$\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

Для них $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = \ln 2$. Тогда квантовая взаимная информация смеси будет

$$I_Q^{mix}(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B) = 2 \ln 2 - \ln 2 = \ln 2 \quad (11.7)$$

меньше, чем для запутанного белловского состояния.

3) Если же $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$, то

$$I_Q^{prod}(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B) = 0 \quad (11.8)$$

Любые корреляции отсутствуют.

Для лучшего понимания поведения взаимной информации рекомендуется посчитать взаимную информацию для примера:

$$|\psi\rangle = \cos \alpha |+\rangle^{(A)} |-\rangle^{(B)} + e^{i\zeta} \sin \alpha |-\rangle^{(A)} |+\rangle^{(B)} \quad (11.9)$$

Неравенство треугольника.

Иначе оно называется *неравенством Араки-Луба*:

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \geq |S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_B)| \quad (11.10)$$

Данное неравенство является квантовым аналогом неравенств $H(X, Y) \geq H(X)$ и $H(X, Y) \geq H(Y)$, которые были найдены в разделе "Доказательство субаддитивности"

Докажем неравенство треугольника (т.н. методом дополнения до чистого состояния). Введем чистое состояние $|\psi_{ABC}\rangle$ так, что $\hat{\rho}_{AB} = \text{Tr}_C \hat{\rho}_{ABC} = \text{Tr}(|\psi_{ABC}\rangle\langle\psi_{ABC}|)$. Тогда из свойства субаддитивности следует неравенство

$$S(\hat{\rho}_{AC}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_C) \quad (11.11)$$

Напомним, что если система (состоящая из двух подсистем "А" и "В") находится в чистом $|\psi\rangle$, "А" $\{ |a_i\rangle \}$, в подсистеме "В" всегда можно найти наблюдаемую и соответствующий ей базис $\{ |b_j\rangle \}$ такие, что состояние $|\psi\rangle$ представимо в виде разложения:

$$|\psi\rangle = \sum_l \sqrt{W_l} |a_l\rangle |b_l\rangle, \quad \text{где} \quad \sum_l W_l = 1 \quad (11.12)$$

Данное разложение называется разложение Шмидта и было доказано в параграфе "Разложение Шмидта" .

В базисе, в котором выполняется разложение Шмидта, матрица плотности подсистемы "А" :

$$\hat{\rho}_A = \sum_l W_l |a_l\rangle\langle a_l|, \quad (11.13)$$

матрица плотности подсистемы "В"

$$\hat{\rho}_B = \sum_l W_l |b_l\rangle\langle b_l|, \quad (11.14)$$

при этом в обоих случаях суммирование производится по одним и тем же индексам l с одними и теми же весами W_l .

Отсюда для энтропии подсистем "А" и "В" (если вся система "АВ" описывается чистым состоянием):

$$S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) \quad (11.15)$$

Продолжим доказательство неравенства треугольника. Разобьем систему "АВС" на две подсистемы: "АС" и "В" . Тогда согласно теореме Шмидта $S(\hat{\rho}_{AC}) = S(\hat{\rho}_B)$. Теперь разделим систему "АВС" на подсистемы "АВ" и "С" . В этом случае $S(\hat{\rho}_C) = S(\hat{\rho}_{AB})$. Подставляем найденные равенства в последнее неравенство и получаем

$$S(\hat{\rho}_B) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_{AB}) \quad (11.16)$$

Аналогично из условия субаддитивности

$$S(\hat{\rho}_{BC}) \leq S(\hat{\rho}_B) + S(\hat{\rho}_C) \quad (11.17)$$

приходим к неравенству

$$S(\hat{\rho}_A) \leq S(\hat{\rho}_B) + S(\hat{\rho}_{AB}) \quad (11.18)$$

Поскольку энтропия неотрицательна, то, объединяя два доказанных результата при помощи модуля, немедленно приходим к неравенству Араки-Либа, которое принципиально отличается от своего классического аналога.

Вогнутость квантовой энтропии.

Рассмотрим матрицу плотности $\hat{\rho} = \sum_l W_l \hat{\rho}_l$ такую, что матрицы плотности $\hat{\rho}_l$ сами являются матрицами плотности смешанных состояний. Тогда задача на собственные вектора и собственные значения каждой из таких матриц имеет вид:

$$\hat{\rho}_l |\rho_{li}\rangle = \rho_{li}, \quad \text{где} \quad \langle \rho_{li} | \rho_{l'i'} \rangle = \delta_{i'i'} \quad \text{и} \quad \sum_i \rho_{li} = 1 \quad (11.19)$$

Наложим на вектора $|\rho_{li}\rangle$ дополнительное условие

$$\langle \rho_{li} | \rho_{l'i'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{ii'}, \quad (11.20)$$

которое является обобщением свойства ортогональности проекторов на макроскопически различимые состояния. Тогда:

$$\hat{\rho} |\rho_{li}\rangle = \left(\sum_{l'} W_{l'} \hat{\rho}_{l'} \right) |\rho_{li}\rangle = W_l \rho_{li} |\rho_{li}\rangle, \quad (11.21)$$

то есть вектор $|\rho_{li}\rangle$ является собственным вектором оператора $\hat{\rho}$, отвечающим собственному значению $W_l \rho_{li}$.

С учетом сказанного выше, получаем:

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}) &= - \sum_{li} (W_l \rho_{li}) \ln(W_l \rho_{li}) = - \sum_l W_l \ln W_l \left(\sum_i \rho_{li} \right) - \sum_l W_l \left(\sum_i \rho_{li} \ln \rho_{li} \right) = \\ &= H(X) + \sum_l W_l S(\hat{\rho}_l), \end{aligned} \quad (11.22)$$

где ансамбль $X = \{\rho_{\{i\}l}, W_l\}$. Поскольку энтропия Шеннона всегда неотрицательна (т.е. $H(X) \geq 0$), то получаем *свойство вогнутости энтропии фон Неймана*:

$$S \left(\sum_l W_l \hat{\rho}_l \right) \geq \sum_l W_l S(\hat{\rho}_l) \quad (11.23)$$

Это свойство полностью аналогично свойству вогнутости энтропии Шеннона. Его также можно вывести при помощи неравенства Йенсена или свойства субаддитивности (см., например, книгу Дж. Прескилл, "Квантовая информация и квантовые вычисления", т.1, стр.278, М. "РХД" (2008)). Рекомендуется проделать эти выводы самостоятельно.

Теорема о невозможности передачи произвольного смешанного состояния.

В параграфе "Постулаты квантовой механики" была доказана теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния. (Пусть имеется неизвестное чистое состояние и некоторое известное состояние. Нельзя придумать ни одного физического преобразования, которое сделало бы копию из неизвестного чистого состояния (не разрушая его) в известное чистое состояние. Если бы такая операция была возможна, то это противоречило бы принципу суперпозиции.)

Имеется аналогичная теорема о невозможности передачи произвольного смешанного состояния (так называемая "No-broadcast theorem").

Теорема: предположим, что имеется некоторое квантовое состояние, которое описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$. Тогда невозможно создать микросистему с матрицей плотности $\hat{\rho}_{AB}$ в прямом произведении гильбертовых пространств $\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$ такую, что $\text{Tr}_A \hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}$ и $\text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}$.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе *Barnum, H. C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa and B. Schumacher, Physical Review Letters vol.76, p.2818 (1996)*.

Хотя точная передача смешанного состояния невозможна, но приближенная, иначе, неточная передача смешанного состояния осуществима. Это было показано в работе: *V. Buzek and M. Hillery, Physical Review A 54, p. 1844 (1996)*.

Приближенное копирование чистого состояния. "Угадайка" .

Чтобы понимать эффективность различных алгоритмов неточного копирования, данную эффективность необходимо определить количественно и с чем-то сравнивать. Примем за меру эффективности *степень совпадения* (fidelity)

$$F_0(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\sigma}^\dagger) \quad (11.24)$$

между матрицей плотности $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ чистого состояния, которое надо скопировать, и матрицей плотности $\hat{\sigma}$, которая получилась в результате процедуры копирования.

В качестве реперной степени совпадения возьмем среднюю степень совпадения, которая получается, если пробовать случайно угадать искомую матрицу плотности $\hat{\rho}$.

Для вычисления $F_0(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ рассмотрим "угадайку" чистого состояния спина $s = 1/2$, записанного в самой общей форме

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \quad (11.25)$$

Ему соответствует матрица плотности $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Пусть в результате угадывания неизвестному состоянию $|\psi\rangle$ мы сопоставили известное состояние

$$|\varphi\rangle = \cos\frac{\alpha}{2}|+\rangle + e^{i\beta}\sin\frac{\alpha}{2}|-\rangle, \quad (11.26)$$

которому соответствует матрица плотности $\hat{\sigma} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Тогда средняя степень совпадения

$$\begin{aligned} F_0^{base}(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) &= \int \frac{d\cos\theta d\phi}{4\pi} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger) = \int \frac{d\cos\theta d\phi}{4\pi} |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 = \\ &= \int \frac{d\cos\theta d\phi}{4\pi} \left| \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + e^{i(\phi-\beta)}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \right|^2 = \\ &= \int \frac{d\cos\theta d\phi}{4\pi} \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\sin\alpha\cos(\phi-\beta) \right) = \\ &= \int \frac{d\cos\theta}{2} \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (11.27)$$

Мы видим, что результат никак не зависит от выбора случайного состояния $|\varphi\rangle$.

В процессе вычисления мы воспользовались тем, что интегрирование периодической функции по периоду дает ноль, а

$$\int_{-1}^1 d\cos\theta \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 d\cos\theta \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 \quad (11.28)$$

Остальные детали интегрирования восстановить несложно.

Таким образом мы получили, что если клонировать угадыванием неизвестное состояние $\hat{\rho}$, то степень совпадения полученного состояния $\hat{\sigma}$ с оригиналом будет

$$F_0^{base}(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \quad (11.29)$$

Любой алгоритм, который приводит к степени совпадения между клоном и оригиналом больше, чем к $1/2$, уже может быть назван осмысленным алгоритмом приближенного копирования.

Приближенное копирование чистого состояния.

"Идентификация" .

Опять рассмотрим состояние спина $s = 1/2$ в виде

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \quad (11.30)$$

Идея алгоритма идентификации заключается в том, чтобы сначала провести измерение над состоянием $|\psi\rangle$ в базисе $|\pm\rangle$. А затем копировать получившееся в результате измерения ИЗВЕСТНОЕ состояние $|+\rangle$ или $|-\rangle$.

Поскольку состояние $|+\rangle$ возникает с вероятностью $\cos^2 \frac{\theta}{2}$, а состояние $|-\rangle$ – с вероятностью $\sin^2 \frac{\theta}{2}$, то матрица плотности состояния, которое получается при подобной процедуре копирования, имеет вид

$$\hat{\sigma} = \cos^2 \frac{\theta}{2} |+\rangle\langle +| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |-\rangle\langle -| \quad (11.31)$$

Введем матрицу плотности $\hat{\rho} |\psi\rangle\langle \psi|$ неизвестного чистого состояния $|\psi\rangle$ и вычислим среднюю степень совпадения алгоритма идентификации.

$$\begin{aligned} F_0^{ident}(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) &= \int \frac{d\cos \theta d\phi}{4\pi} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\sigma}^\dagger) = \int \frac{d\cos \theta d\phi}{4\pi} \langle \psi | \hat{\sigma} | \psi \rangle = \\ &= \int \frac{d\cos \theta d\phi}{4\pi} \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (11.32)$$

В процессе вычисления мы воспользовались следующими интегралами

$$\int_{-1}^1 d\cos \theta \cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 d\cos \theta \sin^4 \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \quad (11.33)$$

Поскольку

$$F_0^{ident}(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \quad (11.34)$$

то процедура идентификации дает результат лучший, чем простое угадывание. То есть алгоритм идентификации можно рассматривать как один из возможных алгоритмов неточного копирования. Однако этот алгоритм не дает наибольшего возможного значения степени совпадения.

Оптимальное копирование чистого состояния.

Для оптимального копирования, при котором достигается максимально возможная степень совпадения, необходимо ввести помимо состояний спина копируемой системы $|\pm\rangle$ еще вспомогательную систему ("ancilla") в некотором состоянии $|a\rangle$ и универсальную копирующую машину (UCM), которая обладает двумя ортогональными состояниями $|q_+\rangle$ и $|q_-\rangle$. Алгоритм оптимального копирования следующий:

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |a\rangle \otimes |Q\rangle &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} |+\rangle \otimes |a\rangle \otimes |q_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Psi^+\rangle \otimes |q_-\rangle, \\ |-\rangle \otimes |a\rangle \otimes |Q\rangle &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} |-\rangle \otimes |a\rangle \otimes |q_-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Psi^+\rangle \otimes |q_+\rangle, \end{aligned} \quad (11.35)$$

где $|\Psi^+\rangle$ определено в параграфе "Состояния Белла". Если до процедуры копирования система находилась в состоянии $|\psi\rangle$, то после копирования "ANCILLA" будет находиться в состоянии

$$\hat{\rho}_a = \frac{5}{6} \langle \psi | \psi \rangle + \frac{1}{6} \langle \psi^\perp | \psi^\perp \rangle, \quad (11.36)$$

где $|\psi^\perp\rangle$ – состояние, ортогональное $|\psi\rangle$. Таким образом

$$F_0^{max}(\hat{\rho}, \hat{\rho}_a) = \frac{5}{6} > \frac{1}{2} \quad (11.37)$$

Доказательство см. в работе *V. Buzek, M. Hillery, "Quantum copying: beyond the no-cloning theorem", Phys. Rev. A 54, 1844 (1996)*.

Достаточно ли (а если не достаточно, то почему) степени совпадения $F_0 = \frac{5}{6}$, чтобы передавать сигналы быстрее скорости света (даже передавать информацию не точно, а приближенно)? Над этим вопросом рекомендуется подумать самостоятельно.

Лекция 12. Нерелятивистская квантовая механика с точки зрения теории познания

Теория познания и нерелятивистская квантовая механика (НКМ)

Мы продолжаем курс “Матрица плотности”. Сегодня наша лекция сделает крутой поворот. Если предыдущие лекции были насыщены математикой и вычислениями, то несколько последующих лекций будут насыщены, прежде всего, рассуждениями. Мы попытаемся взглянуть на нерелятивистскую квантовую механику с точки зрения теории познания.

Приблизительно на рубеже 2007–2010 годов в “Quantum Mechanics Foundations” (раздел квантовой механики, который изучает ее основания) полностью или почти полностью сменилась терминология. И если раньше мы привыкли говорить об основаниях квантовой механики в терминах, скажем, копенгагенской, многомировой или статистической интерпретаций (что, собственно, можно делать и сейчас), то на рубеже 2007–2010 годов говорить о различных аспектах квантовой механики, различных ее подходах и интерпретациях стало модно в других терминах. Эти термины связаны с двумя ключевыми понятиями, больше философскими, нежели физическими. Эти два термина: **ОНТОЛОГИЯ** и **ЭПИСТЕМОЛОГИЯ**.

ОНТОЛОГИЯ – раздел науки, который изучает самые общие закономерности окружающего нас мира/реальности, пытается, классифицировать эту реальность, разбить ее на различные категории (сущности), выделить самые общие законы.

ЭПИСТЕМОЛОГИЯ – раздел науки, который изучает знание как таковое. То есть для того, чтобы узнать окружающую нас реальность, мы должны получить некоторое знание, как-то его обработать, интерпретировать, классифицировать. То, как появляется это знание, как оно передается, изменяется, какова его возможная природа изучает такой раздел философии как **ЭПИСТЕМОЛОГИЯ**.

Нам, поскольку мы не философы, не интересно говорить “вообще” об **ОНТОЛОГИИ** и “вообще” об **ЭПИСТЕМОЛОГИИ**. Нам интересно говорить об этих подходах применительно к нерелятивистской квантовой механике, которую мы изучаем в рамках курса “Матрица плотности”.

Вся лекция будет основана на одной работе, опубликованной в 2010 году в журнале “Foundations of Physics”. В этой работе введена та самая новая терминология (или новая классификация различных теорий), о которой я хочу вам рассказать. Ссылка на работу: N. Harrigan, R. Spekkens, Found. Phys. **40**, pp. 125-157 (2010). Журнал

"Foundations of Physics" далеко не самый доступный из всех возможных, поэтому дополнительно привожу ссылку на данную статью в arXiv: <http://arxiv.org/abs/0706.2661v1> (18 Jun 2007).

Итак, пусть мы хотим изучить некоторое явление или группу явлений. Для этого мы можем взять какие-то входные параметры, воздействовать на это явление и посмотреть, как изменяются какие-нибудь выходные параметры, и построить, к примеру, соответствующие эмпирические графики (Рис. 12.1).



Рис. 12.1. Пример графиков зависимостей выходных параметров системы от ее входных параметров

Теперь перед нами встает задача как-то наши эмпирические знания, которые мы получили о данном явлении, классифицировать или систематизировать. Здесь мы можем подойти к этой классификации или систематизации при помощи двух возможных подходов. Кстати, оба из этих подходов в истории физики были успешно реализованы и привели к тем или иным прорывам в физике. Об этом будет немного рассказано.

Итак, первый из подходов называется ЭМПИРИЦИЗМ, а второй – РЕАЛИЗМ.

Примечание: поскольку изложение работы Спеккенса и Харригана на русском языке не встречается, то часть терминологии используемой далее будет приводиться на английском языке.

ЭМПИРИЦИЗМ и РЕАЛИЗМ

ЭМПИРИЦИЗМ (Empiricism)

Этот подход в свое время привел В. Гейзенберга к созданию нерелятивистской квантовой механики. До 1925-го года для описания квантовых явлений использовалась так называемая «наивная» квантовая механика, в которую, например, входила модель атома водорода Н. Бора, где вокруг протона вращается электрон, который при переходе с одной фиксированной орбиты на другую, мог либо излучать, либо поглощать гамма-кванты, чем объяснялась спектроскопия атомов, постулировалась их стабильность (электрон вращался по конкретным орбитам без излучения). В результате была некоторая смесь классической физики и новых, еще только зарождавшихся тогда, квантовых понятий. Этим теория Бора была непоследовательна и В. Гейзенберг впервые предложил подойти к описанию атома с точки зрения эмпирицизма и спросим себя: что мы измеряем? А измеряем мы уровни энергии в атоме. Тогда давайте описывать электрон не через его траектории или положение которые мы не знаем и не измеряем, давайте попытаемся создать квантовую теорию на основе того, что мы измеряем, на основе уровней энергии. Это соображение привело В. Гейзенберга к созданию матричной механики, что стало первым вариантом нерелятивистской квантовой механики.

РЕАЛИЗМ (Realism)

Реализм куда ближе любому человеку, который не изучал квантовую механику, и, наверное, поэтому все теории скрытых параметров, которые являются частным случаем подхода описания квантовых систем, действующего в рамках концепции реализма, так живучи. Реализм реализуется при помощи, так называемых, онтологических моделей (The ontological models).

Определение 12.1. *Онтологические модели – модели, которые характеризуют состояние физической системы в терминах ее "истинных" свойств.*

Вопрос: а знаем ли мы истинные свойства системы, в том числе и квантовой?

Ответ: некоторые свойства, может быть, знаем, а некоторые свойства, может быть, нет. Нам придется их либо угадать, либо еще как-то выяснить. То есть, в рамках реализма мы отказываемся от результата эксперимента и пытаемся выяснить первоосновы, если они есть. Хорошим примером такого подхода является теория скрытых параметров, которая безуспешно пытается описать вероятностную структуру квантовой механики при помощи некоторых скрытых параметров, которые мы не можем измерить, но которые, согласно этому подходу, существуют. И по которым мы должны усреднять, в результате чего возникают вероятности.

То есть, справедливость и эффективность подхода эмпирицизма уже доказана делом, поскольку с помощью него создана одна из величайших теорий физики, возможно, за все время ее существования – квантовая теория.

Цель: эффективное описание и систематизация экспериментальных данных

Средства: для описания и систематизации экспериментальных данных мы используем только известные из эксперимента понятия, либо такие понятия, для которых мы можем указать соответствующую процедуру измерения.

В рамках эмпирицизма мы создаем, так называемые, операциональные теории, изобразить которые проще всего на рисунке. Согласно эмпирицизму есть экспериментатор, который изучает какое-то явление, например, квантовую систему. Чтобы квантовую систему изучить, ее необходимо сначала приготовить, поэтому операциональные теории включают в себя процедуру приготовления.

Давайте нарисуем такой прибор. Данный прибор описывается при помощи некоторых переменных приготовления P (Preparation). Также у нас есть переменные T (Transformation), которые задают эволюцию квантовой системы.

В случае онтологических моделей у нас несколько иной взгляд на процесс приготовления и процесс измерения. С точки зрения онтологических моделей процедура приготовления P приготавливает систему в каком-то состоянии с определенными свойствами λ ; процедура измерения M пытается что-то узнать об этих свойствах

Примечание: Процедура измерения может узнать об этих свойствах не все, а может и все. Например, в классической теории мы предполагаем, что все реальные свойства классической физической системы могут быть описаны при помощи различных процедур измерения, которые мы применяем к классической системе. В квантовой механике, если ее рассматривать как теорию скрытых параметров, мы принципиально не можем узнать некоторые свойства.

Определение 12.2. *Полный (исчерпывающий) набор свойств системы называется *ontic state* (лат. *ontic* – реальный).*

Полный набор свойств системы λ говорит нам о том, что система находится в состоянии, описываемом этими свойствами, или в состоянии λ .

Множество различных *ontic state* λ образуют пространство состояний Λ – *ontic state space*, то есть $\lambda \in \Lambda$.

Например, в квантовой механике, если мы рассматриваем заряженную частицу, мы можем подать магнитное поле, и наблюдать эволюцию квантовой частицы под действием некоторого известного потенциала или напряженности электрического и магнитного поля. Также у нас есть прибор, при помощи которого мы можем наблюдать квантовую систему. Для этого прибора мы тоже можем задать состояние при помощи переменных M (Measurement). Однако, измерительный прибор характеризуется не только набором переменных, описывающих его состояние, но еще тем, что измерительный прибор обязан выдавать результат наблюдения k . Итак, в таком виде (Рис. 12.2) мы можем условно представить картину операциональных теорий.

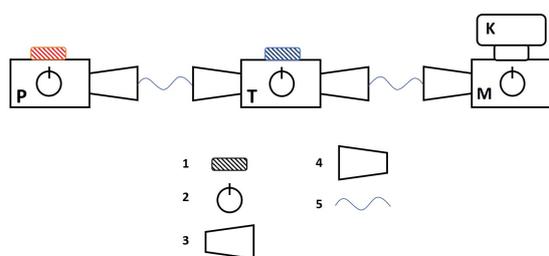


Рис. 12.2. Условный вид установки, включающей в себя приготовление P , эволюцию T и измерение M квантовой системы. 1 – кнопка действия прибора; 2 – ручка настройки параметров; 3 – излучатель; 4 – приемник; 5 – квантовая система.

До этого момента мы считали, что экспериментатор с помощью процедуры приготовления приготовил систему в ontic state, описываемом набором параметров $\lambda: P \rightarrow \lambda$.

Рассмотрим другой сценарий. Пусть у экспериментатора есть прибор (Рис. 12.3) для приготовления систем, о параметрах которого он все знает. Однако, прибор prepares на выходе не строго определенное состояние, а набор состояний, каждое из которых реализуется с некоторой вероятностью. То есть, мы имеем семейство состояний, описываемых функцией вероятности $W(\lambda|P)$, получения состояния λ , при условии применения процедуры приготовления P .

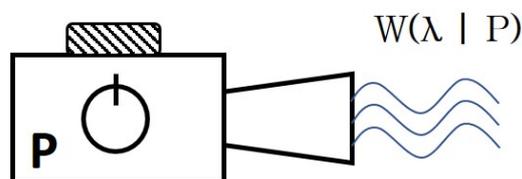


Рис. 12.3. Условный вид установки для приготовления epistemic states.

Подобные системы (о которых мы можем говорить в терминах вероятностей) называются epistemic states.

В реальности, экспериментатор, приготовив систему, не знает точного ontic state (значения параметров λ). Это состояние существует, и система находится в некотором таком состоянии, но экспериментатор о нем не знает.

Подобную логику, изложенную схематически на Рис. 12.2 можно применить к большому числу экспериментов, включающих в себя не только квантовые. Данная теория, как и любая другая, должна давать предсказания. В каком виде теория может давать предсказания? В наиболее общем виде операциональная теория может давать вероятностное предсказание $\omega(k|P, T, M)$ получить результат k , при условии, что мы задали процедуру приготовления P , процедуру эволюции T и процедуру измерения M . Наборы таких вероятностей и есть результат работы любой операциональной теории.

Заметим, что нерелятивистскую квантовую механику можно рассматривать в контексте операциональных теорий. Рассмотрим это в качестве примера. Тогда процедура приготовления P описывается тем, что некоторая квантовая система до начала эволюции описывается определенной матрицей плотности $\hat{\rho}_P$; процедура эволюции T описывается, например, при помощи отображения в представлении Крауса $\mathcal{E}(\hat{\rho}_P)$; процедуру измерения M мы можем описывать при помощи набора POVM-операторов $\{\hat{E}_\alpha\}$; измерение $k \in \{\alpha\}$. Тогда с точки зрения квантовой механики соответствующая искомая вероятность:

То есть epistemic state – это состояние нашего незнания об истинном состоянии системы.

Из рассмотрения ontic и epistemic states понятно, что те состояния, которые не являются ontic states обязательно являются epistemic states (либо мы точно знаем состояние приготовленной квантовой системы, либо мы знаем распределение возможных состояний, в которых мы ее приготовили).

Для лучшего понимания терминологии приведем примеры, один из которых будет из классической физики, а другой из термодинамики.

Пример ontic state: пусть есть свободная частица, для которой нам известны: функции координаты и импульса от времени, масса, заряд.

$$x = x(t), \quad p = p(t), \quad m, \quad e$$

Тогда в любой момент времени t_0 в пространстве ontic state λ мы можем вероятность нахождения этой частицы характеризовать при помощи δ -функций (Рис. 12.4).

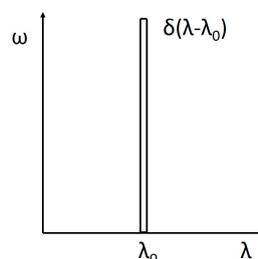


Рис. 12.4. Вероятность нахождения частицы в пространстве ontic state λ .

$$\omega(k|P, T, M) = \omega(k|\hat{\rho}_P, \varepsilon(\hat{\rho}_P), \hat{E}_k) = \text{Tr}(\hat{E}_k \hat{\rho}_f) = \text{Tr}\left(\hat{E}_k \frac{\varepsilon(\hat{\rho}_P)}{\text{Tr}(\varepsilon(\hat{\rho}_P))}\right)$$

Таким образом, структуру нерелятивистской квантовой механики, мы смогли представить в рамках соответствующих операциональных теорий.

где $\lambda_0 = \{x(t_0), p(t_0), m, e, \dots\}$;
 $\delta(\lambda - \lambda_0) = \delta(x - x(t_0)) \times \delta(p - p(t_0)) \times \delta(\mu - m) \times \delta(q - e)$

Это наиболее очевидное описание точечной частицы.

Пример epistemic state: рассмотрим хорошо известное распределение по скоростям частиц идеального одноатомного газа (распределение Максвелла) (Рис. 12.5).

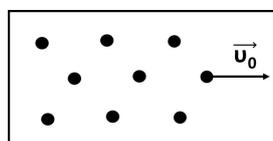


Рис. 12.5. Распределение по скоростям частиц идеального одноатомного газа в сосуде (распределение Максвелла).

Выберем одну частицу этого газа. Пусть она имеет скорость $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Состояние, определяющее скорость этой частицы есть ее ontic state. Вероятность нахождения частицы в некотором состоянии выражается как:

$$\omega(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = \delta(v_x - v_{0x}) \times \delta(v_y - v_{0y}) \times \delta(v_z - v_{0z}).$$

Но экспериментатор не может измерить скорость каждой частицы в сосуде, из-за их огромного количества. Поэтому экспериментатор вводит понятие температуры газа T , и с помощью этого усредненного понятия можно сказать, что любая частица газа находится в epistemic state по скорости. Вероятность нахождения частицы с некоторой скоростью

$\omega(\mathbf{v}_{0x}, \mathbf{v}_{0y}, \mathbf{v}_{0z})$ задается распределением Максвелла:

$$\omega(\mathbf{v}_{0x}, \mathbf{v}_{0y}, \mathbf{v}_{0z}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2)}{2kT}\right\}$$

Распределение Максвелла, очевидно, надо полагать как epistemic state, поскольку оно является состоянием нашего незнания реальной скорости частицы.

Онтологические интерпретации нерелятивистской квантовой механики (НКМ)

Этот параграф немного в иных терминах пересказывает или определяет все то, о чем говорили основатели квантовой механики еще со времен создания квантовой теории в 1925 году и дальше, то есть копенгагенская и статистическая интерпретации квантовой механики, либо прагматичный взгляд на математический аппарат квантовой механики.

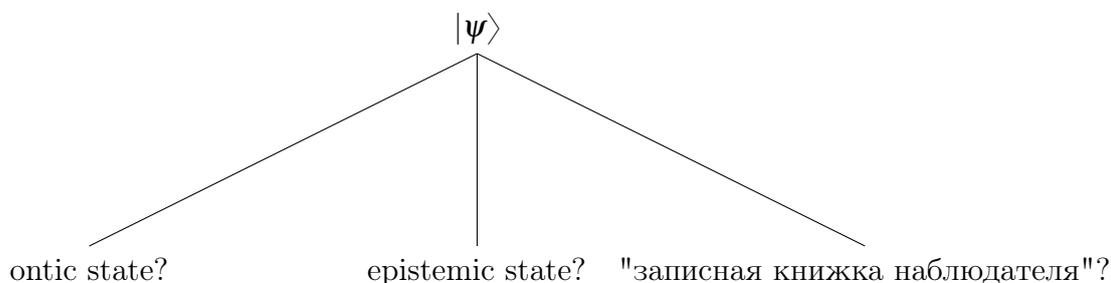
Рассмотрим квантовую механику чистых состояний. Пусть система описывается вектором состояния $|\psi\rangle$. Вопрос: а что такое вектор состояния $|\psi\rangle$? Это есть реальное отражение состояний квантовой системы, содержащее в себе полный набор свойств квантовой системы, или это просто удобный способ описания состояний квантовой системы, к которому мы вынуждены прибегнуть, поскольку мы можем не знать всей информации об этой системе? А может это просто удобный формализм с математической точки зрения, позволяющий нам переводить состояния наших приборов в нечто, что, по нашему мнению, является состоянием микрочастицы, а потом состояние микрочастицы переводить в то, что является результатом измерения этого состояния при помощи наших макроприборов?

Переформулируем эти вопросы в тех определениях, которые у нас уже есть:

- 1) Если вектор состояния $|\psi\rangle$ отражает реальное состояние квантовой системы, то он должен быть ontic state квантовой системы.
- 2) Если вектор состояния $|\psi\rangle$ отражает меру нашего незнания состояния квантовой системы, то он должен быть epistemic state квантовой системы.

- 3) Или вектор состояния $|\psi\rangle$ является просто удобным инструментом. В свое время, академик Д.И. Блохинцев назвал подобный подход «записной книжкой наблюдателя».

Итак, что же есть вектор состояния?



Положительный ответ на первый вопрос о том, является ли вектор состояния *ontic state*, дается в рамках копенгагенской интерпретации квантовой механики.

Положительный ответ на второй вопрос о том, является ли вектор состояния *epistemic state*, обычно, отстаивается в рамках статистической интерпретации.

Рассмотрение вектора состояния как «записной книжкой наблюдателя», находит место в большом количестве интерпретаций, таких как прагматическая, квантовый байесианизм, в какой-то степени во многомировых интерпретациях (например, в формулировке проф. М.Б. Менского).

На самом деле, эти три взгляда можно переформулировать и переименовать. Мы попытаемся это сделать, но для начала нужно провести некоторую подготовку.

Рассмотрим квантовую систему, описываемую с помощью вектора состояния $|\psi\rangle$. Пусть в этой системе есть наблюдаемая A , которой соответствует эрмитов оператор: $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Пусть у этого оператора есть собственные векторы (СВ) и собственные значения (СЗ): $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$. Для простоты будем считать, что число СВ и СЗ конечно, а также спектр оператора \hat{A} дискретный и невырожденный.

Тогда вектор состояния принадлежит некоторому гильбертову пространству \mathcal{H} : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, где набор собственных векторов $\{|a_i\rangle\}$ эрмитова оператора \hat{A} образует ортонормированный базис: $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$. И, естественно, что вектор состояния можно разложить по этому базису (12.1):

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |a_i\rangle \quad (12.1)$$

Теперь давайте введем еще несколько терминов. Перепишем рассмотренные нами взгляды на вектор состояния в терминах, которые использовал Спеккенс в своей статье, и которые используются в настоящее время:

- 1) **ψ -ontism.** Этот взгляд утверждает, что если мы рассматриваем разложение вектора состояний (12.1), то считаем, что до измерения квантовая система находится во всех возможных состояниях $|a_i\rangle$. После измерения происходит коллапс вектора состояний к одному конкретному значению $|a'_i\rangle$. То есть, с точки зрения $|\psi\rangle$ -ontism состояние $|\psi\rangle$ интерпретируется как ontic state (истинное/реальное) состояние квантовой системы.

Здесь косвенно дается ответ на вопрос о применимости квантовой механики к одной микросистеме. Если мы считаем, что вектор состояния это ontic state для каждой системы, то квантовомеханическое описание в терминах векторов состояния применимо не только для большого количества одинаково приготовленных микросистем (ансамбля), но и для каждой отдельной микросистемы. В этом, собственно, и есть суть копенгагенской интерпретации, в рамках которой, вводится дополнительный закон квантовой механики о том, что при взаимодействии квантовомеханической системы с измерительным прибором система коллапсирует в одно из возможных значений $|a_i\rangle$ абсолютно случайным образом (закон абсолютной случайности).

Мнение лектора: Фактически $|\psi\rangle$ -ontism в таком подходе можно отождествить с копенгагенской интерпретацией. Понимая, что здесь можно обсуждать большое количество вопросов о том, что копенгагенская интерпретация несколько шире, чем $|\psi\rangle$ -ontism, тем не менее эти расширения не принципиальны по сравнению с главным утверждением о том, что $|\psi\rangle$ – это ontic state для каждой отдельной квантовой системы и коллапс получается абсолютно случайным образом.

Пара слов о копенгагенской интерпретации. Копенгагенская интерпретация (по мнению лектора) не есть какая-то единая интерпретация, появившаяся в 1925-1926 году, и без изменений дожившая до настоящего времени (2020 год). Скорее она изначально была попыткой Н. Бора и В. Гейзенберга осознать что за теорию они создали. И копенгагенская интерпретация 1926-1927 года совсем не похожа на копенгагенскую интерпретацию, которую предлагали Бор и Гейзенберг уже в 50-е годы, поскольку с тех пор их взгляды сильно эволюционировали, и то, что казалось раньше в копенгагенской интерпретации главным (например, соотношение неопределенности), в конце концов, ушло на второй, третий план, или даже было исключено. А то, что раньше даже не рассматривали, например, закон абсолютной случайности, к 50-м годам в процессе споров со сторонниками статистической интерпретации стал одним из краеугольных камней копенгагенской интерпретации.

Более того нет какой-то единой копенгагенской интерпретации даже если рассматривать ее как эволюцию взглядов Бора и Гейзенберга, потому что к Бору в Копенгаген в 20-е, 30-е, 40-е, 50-е годы приезжали молодые талантливые физики со всего света, чтобы работать над квантовой механикой. И каждый из них в своем понимании квантовой механики, пропуская ее через свои ощущения, по-своему преломляли ее. Поэтому, например, когда про копенгагенскую интерпретацию пишет Н. Бор – это одна копенгагенская интерпретация, а когда, например, пишет Р. Опенгеймер, то это уже несколько другая интерпретация, когда говорит В. Паули – это третий вариант интерпретации, когда говорит В. Гейзенберг – это четвертый вариант копенгагенской интерпретации, отличный от интерпретации Н. Бора.

Конечно, есть некоторые основные положения, в которых все эти люди сходились, собственно, поэтому и можно сказать, что все они находились в рамках копенгагенской интерпретации. А именно, они признавали случайность как фундаментальный закон природы, и не признавали различных скрытых параметров, которые, возможно, управляют реальным состоянием квантовой системы, и не признавали того, что квантовая механика когда-нибудь сведется к теории содержащей классическую статистику. Наверное, это стоит считать основным признаком того, что человек придерживается копенгагенской интерпретации.

- 2) **ψ -epistemism.** Вернемся к разложению (12.1). Согласно ψ -эпистемизму, не следует рассматривать отдельную квантовую систему в состоянии $|\psi\rangle$. Вместо этого необходимо рассматривать целый набор квантовых систем $\{|\psi\rangle\}$, приготовленных при помощи процедуры приготовления P . Однако процедура приготовления приготовила нам не систему вида (12.1), а одна из систем с некоторой вероятностью находится в состоянии $|a_1\rangle$, другая – в состоянии $|a_3\rangle$, третья – опять в состоянии $|a_1\rangle$ и т. д. А значит, что в этом смысле вектор состояния $|\psi\rangle$ в разложении (12.1) означает только степень нашего незнания о том, в каком состоянии прибор, при одной и той же процедуре приготовления P , приготовил нам конкретную квантовую систему. Поэтому, мы записываем наше незнание в качестве принципа суперпозиции (12.1), и тогда для каждой квантовой системы из этого ансамбля у нас есть свое ontic state, но с точки зрения наблюдателя каждая система находится в epistemic state $|\psi\rangle$.

Из этого следует, что квантовая механика не может быть применена для описания одной квантовой системы. Нужен обязательно ансамбль систем, приготовленных одной процедурой приготовления. Такие квантовые системы находятся

в одинаковых epistemic states $\{|\psi\rangle\}$, хотя на самом деле каждая из них находится в своем ontic state. Следовательно, когда мы измеряем каждую конкретную систему мы и получаем то ontic state $|a_i\rangle$, в котором она находится. Вероятность измерения равна $|c_i|^2$.

Таким образом, $|\psi\rangle$ -epistimism можно назвать доведенной до логического конца статистической интерпретацией квантовой механики, которую создал М. Борн (за что получил Нобелевскую премию), которой придерживался А. Эйнштейн. Статистическая интерпретация очень хороша для экспериментаторов, поскольку они имеют дело с большим количеством приготовленных одинаковым образом частиц (ансамблем систем). Их не интересует одна система, они с помощью ансамбля ищут статистические вероятностные закономерности. В этом отношении такая интерпретация очень удобна и логична.

Однако, у такой интерпретации есть своя ахиллесова пята, заключающаяся в том, что подход ψ -эпистемизма открыт для введения скрытых параметров, вопрос существования которых очень серьезный, ответу на который будут посвящены несколько будущих лекций. Забегая вперед, могу сказать, что существование или отсутствие скрытых параметров, оказывается, при определенных условиях, поддается экспериментальной проверке. Эта проверка называется нарушением неравенств Белла.

- 3) **Epistemism** . Он же «записная книжка наблюдателя», он же прагматизм. В рамках этой интерпретации мы игнорируем вопрос о том, какую реальность описывает вектор состояния $|\psi\rangle$. Описывает ли он реальное состояние, т. е. является ли он ontic state, или описывает ли он степень нашего незнания реального состояния, т. е. является ли он epistemic state. Все, что для нас имеет значение – это предсказание $|c_i|^2$.

Такой подход с одной стороны железобетонный, а с другой стороны очевидно, что ахиллесова пята такого подхода в том, что он противоречит духу науки, поскольку делает бессмысленными попытки узнать как все устроено, открыть скрытые законы, понять неизвестные закономерности. Такой подход переводит науку из категории творчества и поиска в разряд ремесла. Наверно, поэтому среди ученых подобный подход не очень популярен.

Классификация онтологических моделей (по Спеккенсу)

С момента выхода статьи Спеккенса и Харригана (2010 год) до времени чтения данной лекции (2020 год) прошло 10 лет. Естественно, что за эти 10 лет статья подвергалась критике, улучшению, осмыслению, поэтому со временем появилось несколько классификаций онтологических моделей. Все они примерно следовали идеям Спеккенса, но были где-то чуть детальнее, где-то представляли немного иной взгляд, отличались концепциями, подходами.

Но (по мнению лектора) классификация Спеккенса была первой и наиболее сбалансированной. С одной стороны, в ней не было большого количества деталей, затемняющих основную суть, с другой стороны, была достаточно богата, чтобы показать, что эта классификация интересна, полезна, что ее можно и нужно использовать.

Итак, классификация онтологических моделей с применением к тому, что мы хотим найти такие онтологические модели, которые описывали бы иначе нерелятивистскую квантовую механику. Поэтому мы будем использовать понятия нерелятивистской квантовой механики, чтобы обосновать эту классификацию.

Пусть квантовой системе отвечает некоторое ontic state $\lambda \in \Lambda$, где Λ – ontic state space. Рассмотрим два неортогональных друг другу состояния (12.2):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\in \mathcal{H} \\ |\varphi\rangle &\in \mathcal{H} \\ \langle\psi|\varphi\rangle &\neq 0 \end{aligned} \tag{12.2}$$

Также введем наблюдаемую A и соответствующий ей оператор \hat{A} с дискретным невырожденным спектром и собственными векторами, образующими базис в пространстве \mathcal{H} (12.3):

$$\begin{aligned} \hat{A}|a_i\rangle &= a_i|a_i\rangle \\ |a_i\rangle &\in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{12.3}$$

Предположим, что мы знаем, что у нас есть всего два (!) различных состояния $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$. Мы можем разложить их в базисе оператора \hat{A} (12.4):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_i c_i(\lambda)|a_i\rangle \\ |\varphi\rangle &= \sum_i d_i(\lambda)|a_i\rangle \end{aligned} \tag{12.4}$$

Теперь мы хотим различить эти состояния. Естественно, что у нас есть по одному измерению: один раз мы измеряем состояние $|\psi\rangle$, другой раз – состояние $|\phi\rangle$.

Вопрос: можем ли мы их различить? Скорее всего нет, потому что если мы измеряем, к примеру, состояние $|\psi\rangle$ и получаем какое-то значение $|a_{i'}\rangle$, то мы можем лишь сказать, что с вероятностью $|c_{i'}(\lambda)|^2$ это состояние $|\psi\rangle$, а с вероятностью $|d_{i'}(\lambda)|^2$ – состояние $|\phi\rangle$.

Предположим теперь, что у нас есть ансамбль состояний $|\psi\rangle$ и ансамбль состояний $|\phi\rangle$. Тогда мы можем сделать множество измерений состояния $|\psi\rangle$ и получить распределение вероятностей $W(\lambda|\psi)$, и аналогично можем получить распределение $W(\lambda|\phi)$. И теперь мы можем попытаться посмотреть многопараметрическое пространство для ontic state λ , и попытаться в нем рассмотреть, как ведут себя эти вероятности для состояний $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$, и, может быть, различить эти два состояния если есть какая-то часть пространства, в которой эти вероятности друг с другом не пересекаются.

Сейчас мы посмотрим, как это сделать, но сначала давайте немного изменим наши вероятности. Поскольку мы помним, что при рассмотрении «вообще» любых онтологических моделей мы говорим не о состояниях $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$, а о различных процедурах приготовления. В квантовой механике результатом этих процедур являются состояния $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$. Но, вообще правильно говорить о процедуре приготовления состояния $|\psi\rangle$ и процедуре приготовления состояния $|\phi\rangle$: P_ψ и P_ϕ соответственно. Тогда вероятности следует записывать как:

$$W(\lambda|P_\psi),$$

$$W(\lambda|P_\phi).$$

Далее, при классификации онтологических моделей, мы будем пользоваться именно этими понятиями, где $\lambda \in \Lambda$ – это наборы различных ontic states, характеризующих нашу систему.

Определение 12.3. *Онтологическая модель называется ψ -ontic моделью, если для любых двух состояний ψ и ϕ , приготовленных при помощи процедур приготовления P_ψ и P_ϕ , соответствующие распределения ontic states никогда не пересекаются (12.5):*

$$W(\lambda|P_\psi)W(\lambda|P_\phi) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (12.5)$$

Графически это выглядит достаточно тривиально (по крайней мере для одномерного случая) (Рис. 12.6):

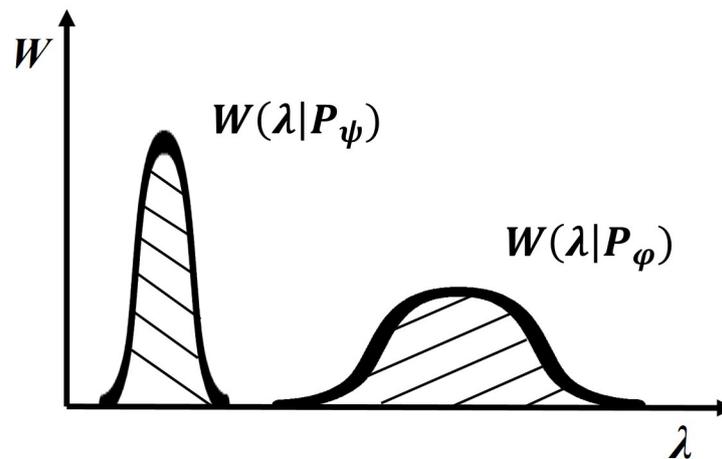


Рис. 12.6. Непересекающиеся распределения ontic states $W(\lambda|P_\psi)$ и $W(\lambda|P_\phi)$.

Есть важнейший случай ψ -ontic онтологических моделей – это, так называемые ψ -complete модели.

Определение 12.4. ψ -complete моделью называется модель, в которой процедура приготовления P prepares систему ровно в одном ontic state $\lambda: P_\psi \rightarrow \lambda_\psi, P_\phi \rightarrow \lambda_\phi$ и т. п..

Тогда пространство Λ изоморфно гильбертовому пространству в котором находятся векторы состояния, описывающие квантовую систему.

Из вышеизложенного следует, что распределение вероятности для ψ -complete моделей является δ -функцией (12.6):

$$W(\lambda|P_\psi) = \delta(\lambda - \lambda_\psi) \quad (12.6)$$

Поскольку δ -функции, отвечающие разным значениям $\lambda_\psi, \lambda_\phi$ и т. п. никогда не пересекаются, то ψ -complete модели по определению являются ψ -ontic моделями. Графически представлено на рисунке (Рис. 12.7)

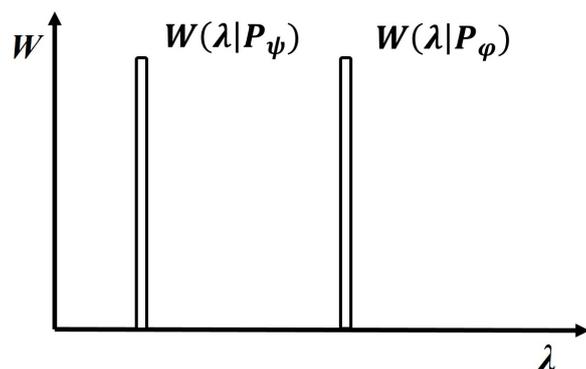


Рис. 12.7. Непересекающиеся распределения ontic states $W(\lambda|P_\psi)$ и $W(\lambda|P_\phi)$ для ψ -complete моделей.

Определение 12.5. Все модели, которые не являются ψ -complete моделями называются ψ -incomplete моделями.

Определение 12.6. Онтологическая модель называется ψ -epistemic если существует хотя бы одна пара состояний $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$ и хотя бы одно значение ontic state $\tilde{\lambda}$, при котором произведение вероятностей $W(\tilde{\lambda}|P_\psi)W(\tilde{\lambda}|P_\phi) \neq 0$:

$$\exists \tilde{\lambda} \in \Lambda : W(\tilde{\lambda}|P_\psi)W(\tilde{\lambda}|P_\phi) \neq 0$$

Графически это можно изобразить следующим образом: (Рис. 12.8).

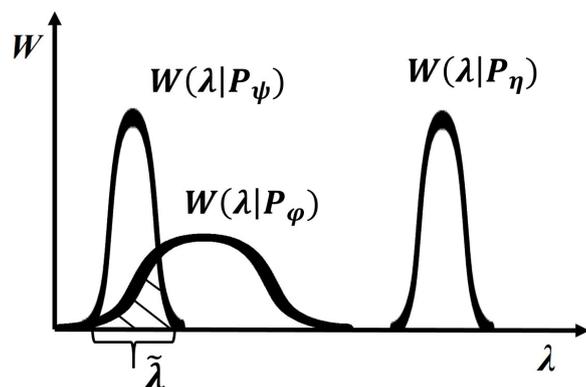


Рис. 12.8. Схематическое изображение ψ -epistemic модели с пересекающимися распределениями для хотя бы одного ontic state λ .

Очевидно, что любая онтологическая модель, которая не является ψ -ontic, должна относиться к ψ -epistemic моделям.

Приведенный набор исчерпывает виды онтологических моделей. Теперь систематизируем приведенное выше в виде таблицы (Таблица 27.1) и дерева (Схема 1.1.).

Таблица 12.1. Классификация онтологических моделей.

	Ψ -ontic	Ψ -epistemic
Ψ -complete		\emptyset
Ψ -incomplete		
	Ψ -supplemented	Ψ -epistemic

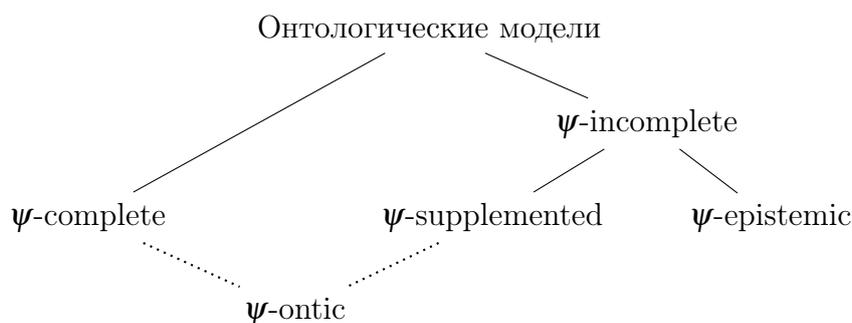


Схема 1.1. Иерархия онтологических моделей.

Онтологические модели. Общее описание.

Рассмотрим некоторую серию экспериментов над квантовой системой, которую мы попытаемся описать при помощи некоторой онтологической модели. Над этой серией экспериментов мы сделаем два предположения:

- 1) Single World Realism (SWR). В каждом эксперименте из серии и ontic state λ , и наблюдаемая k принимают вполне определенное значение.
- 2) Независимость (Independence) (I). Каждый из экспериментов не зависит от предыдущего (предыдущих) эксперимента. То есть, если значения параметров для приборов приготовления P , эволюции T и измерения M фиксированы, то значения λ и k зависят только от этих параметров в данном конкретном эксперименте/измерении.

В онтологических моделях, которые соответствуют данным условиям, реализуются следующие распределения вероятности: $W(k, \lambda | P, T, M)$.

Рассмотрим эксперимент (Рис. 12.9) исключая процедуру эволюции. То есть распределения вероятности в этом случае будут выглядеть так: $W(k, \lambda | P, M)$.

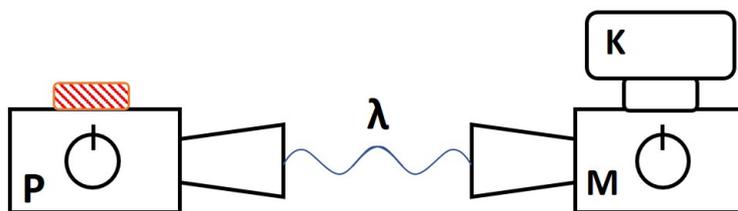


Рис. 12.9. Схематическое изображение эксперимента.

Онтологическая модель должна описывать такой эксперимент в терминах распределения вероятности $W(k, \lambda | P, T, M)$. Но, как мы помним, есть еще операциональные теории (в число которых входит квантовая механика), которые описывают данный эксперимент в терминах других распределений вероятности: $\omega(k | P, M)$. Поэтому если мы хотим, чтобы наша онтологическая модель совпала с теорией, то необходимо потребовать (12.7):

$$\omega(k | P, M) = \int_{\Lambda} d\lambda W(k, \lambda | P, M) \quad (12.7)$$

Теперь воспользуемся известной формулой для условной вероятности (12.8):

$$\omega(A | B) \omega(B) = \omega(A, B) \quad (12.8)$$

Зададим переменные в соответствии с нашими параметрами:

$$\begin{aligned} A &= k | P, M \\ B &= \lambda | P, M \end{aligned}$$

Тогда формула (12.7) переходит в следующую формулу (12.9):

$$\omega(k|P, M) = \int_{\Lambda} d\lambda W(k|\lambda, P, M) W(\lambda|P, M) \quad (12.9)$$

Давайте разберемся что дает нам данное преобразование. Обратим внимание на схему эксперимента (Рис. 12.9). Сначала квантовая система приготавливается некоторым прибором в ontic state λ , а уже потом происходит измерение. Следовательно, если принцип причинности не нарушается (причина предшествует следствию), то причина, а именно – ontic state λ , не должна зависеть от следствия – последующей процедуры измерения.

Боле того, если мы считаем что наблюдатель выбирает измерительный прибор независимо от того, какую систему он приготовил, то в силу принципа причинности и независимости наблюдателя величина λ не зависит от M , и формулу (??) можно записать в виде (12.10):

$$\omega(k|P, M) = \int_{\Lambda} d\lambda W(k|\lambda, P, M) W(\lambda|P) \quad (12.10)$$

Теперь заметим, что система находится в ontic state λ вследствие того, что мы ее приготовили с помощью некоторой процедуры приготовления, и проводя измерение этой системы мы ничего не знаем о том, какой процедурой приготовления она была приготовлена. Значит, с точки зрения физики, результат, полученный при измерении, зависит только от самой квантовой системы и параметров измерительного прибора. Тогда формула (12.10) переходит в формулу (12.11), выражающую операциональные теории ($\omega(k|P, M)$) через онтологические модели ($W(k|\lambda, M)W(\lambda|P)$):

$$\omega(k|P, M) = \int_{\Lambda} d\lambda W(k|\lambda, M) W(\lambda|P) \quad (12.11)$$

Но это еще не все, мы можем несколько усложнить наши теории и сказать, что процедура измерения сама по себе является процедурой приготовления новой системы в состоянии λ' , которую мы впоследствии будем еще чем-то мерить (Рис. 12.10). Тогда, мы можем ввести вероятность того, что после измерения система, находившаяся до этого в ontic state λ , в результате измерения M , которое показало значение k , перешла в новое ontic state λ' : $W(\lambda'|\lambda, M, k)$.

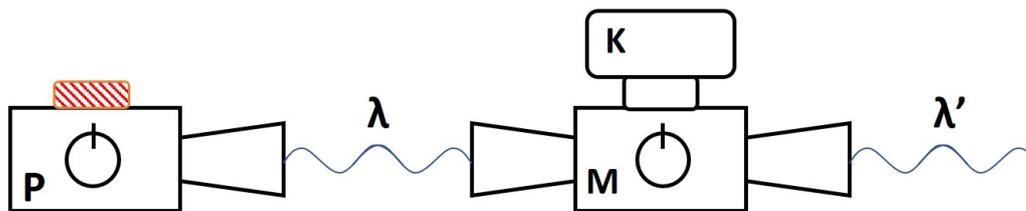


Рис. 12.10. Схематическое изображение эксперимента.

Тогда приготавливающий и измерительный приборы в данной схеме эксперимента (Рис. 12.10) можно фактически представить в виде нового приготавливающего прибора P' , приготавливающего квантовую систему в ontic state λ' . Соответствующие вероятности переписутся в виде (12.12):

$$W(\lambda'|P') = \int_{\Lambda} d\lambda W(\lambda'|\lambda, M, k) W(\lambda|P) \quad (12.12)$$

Поговорим о нормировках некоторых вероятностей. Если имеется ontic state λ из ontic state space Λ , то процедура приготовления одно из таких λ подготовит. Поэтому если просуммировать все вероятности при данной процедуре приготовления, то получим единицу (12.13):

$$\int_{\Lambda} d\lambda W(\lambda|P) = 1 \quad (12.13)$$

С другой стороны, если при измерении на выходе было получено некоторое ontic state λ' , то наша система в любом случае перейдет в некоторое состояние, поэтому (12.14):

$$\int_{\Lambda'} d\lambda' W(\lambda'|\lambda, M, k) = 1 \quad (12.14)$$

Теперь давайте посмотрим, как нерелятивистская квантовая механика укладывается в общее описание онтологических моделей. Описание нерелятивистской квантовой механики с точки зрения формализма онтологических моделей называется Beltrametti-Bugajski Model (E. G. Beltrametti, S. Bugajski, J Phys A Mat Gen 28, p3329 (1995)).

Пусть, есть пространство ontic state space $\Lambda = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. В этом пространстве существуют матрицы плотности $\hat{\rho}_{\lambda} \in \Lambda$, которые являются ontic states для данной модели. Процедура приготовления P prepares систему в некоторую конкретную матрицу плотности $\hat{\rho}_P$, зависящую от процедуры приготовления. Отсюда следует, что вероятность нахождения системы в ontic state λ при условии процедуры приготовления P

задается операторной δ -функцией (12.15):

$$\hat{\rho}_\lambda \in \Lambda = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, P \rightarrow \hat{\rho}_P \implies W(\lambda|P) = \delta(\hat{\rho}_\lambda - \hat{\rho}_P) \quad (12.15)$$

Измерение дается набором POVM-операторов $\{\hat{E}_\alpha\}$. Тогда измерение $k \in \{\alpha\}$. Тогда вероятность (12.16):

$$M \rightarrow \{\hat{E}_\alpha\}, k \in \{\alpha\}, W(k|\lambda, M) = \text{Tr}(\hat{E}_k \hat{\rho}_\lambda) \quad (12.16)$$

Либо мы можем задать измерение при помощи набора обобщенных измерений (12.17):

$$M \rightarrow \{\hat{M}_i\}, k \in \{i\}, W(k|\lambda, M) = \text{Tr}(\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}_\lambda) \quad (12.17)$$

Тогда вероятность, даваемая операциональными теориями, выражается (12.18):

$$\omega(k|P, M) = \int_\Lambda d\lambda \delta(\hat{\rho}_\lambda - \hat{\rho}_P) \text{Tr}(\hat{E}_k \hat{\rho}_\lambda) = \text{Tr}(\hat{E}_k \hat{\rho}_P) \quad (12.18)$$

Либо, можно записать с помощью обобщенных измерений через обобщенное правило Людерса (12.19):

$$W(\lambda'|\lambda, M, k) = \delta\left(\frac{\hat{M}_k \hat{\rho}_\lambda \hat{M}_k^\dagger}{\text{Tr}(\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}_\lambda)} - \hat{\rho}_{\lambda'}\right) \quad (12.19)$$

На этом мы завершили рассмотрение нового подхода, предложенного Спеккенсом, для описания различных теорий.

Лекция 13. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 1.

Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit).

В данной лекции мы рассмотрим один из интересных примеров онтологических моделей - теорию игрушечных битов Спеккенса (по-английски: Spekkens toy bit). Согласно классификации предыдущей лекции, данная теория относится к классу Ψ -epistemic моделей.

Поскольку на русском языке нет статей, в которых излагается данная теория, приведу оригинальные английские статьи по теме:

- 1) R. W. Spekkens, "Evidence for the epistemic view of quantum states: A toy theory", Phys. Rev. A **75**, 032110 (2007).
- 2) M. Pusey, "Stabilizer notation for Spekkens' toy theory", Found. of Phys. **42**, pp 688-708 (2012).
- 3) M. Leifer, "Is the Quantum State real?", Quanta **3**, p. 67 (2014).

(Примечание: обозначения в работе Лефера отличаются от обозначений оригинальных работ Спеккенса и Пуся. В лекциях мы будем придерживаться обозначений первых двух работ, и приводить к ним обозначения третьей работы.)

Роберт Спеккенс создавал и развивал свою теорию несколько лет. Первая версия работы об игрушечных битах была положена в arXiv в январе 2004 года, а окончательная версия была опубликована только в марте 2007 года.

Вернемся к рассуждениям о природе вероятности в квантовой механике. Как мы помним, существуют две различные позиции по отношению к природе вероятности в квантовой механике.

Первая позиция – пытаться описать квантовую механику при помощи теорий, в которых есть некие ontic states. То есть мы предполагаем, что есть некие реальные состояния, которое описывают квантовую систему. Однако, изучая микросистемы при помощи классических макроскопических измерительных приборов мы просто не можем найти эти состояния или не можем измерить часть переменных, которые описывают эти самые реальные состояния. Поэтому из-за недостатка нашего знания о реальных состояниях квантовой системы (то есть об ontic states) возникают различные вероятностные распределения, различные квантовомеханические парадоксы.

Попытки создания таких теорий, вообще говоря, на сегодняшний день не увенчались успехом и нарушение неравенства Белла, о котором будет рассказано в следующих лекциях, будет свидетельствовать о том, что, возможно, такие попытки никогда не увенчаются успехом.

Вторая позиция – случайность квантовой механики является фундаментальным законом природы. Тогда, вектор состояния или матрица плотности являются не выражением нашего знания о системе, а, скорее, выражением объективного состояния квантовой системы.

Тем не менее, интересно задать вопрос: *если ontic states существуют, но мы действительно не знаем реальное состояние квантовой системы, то какие известные нам квантовомеханические эффекты в такой модели останутся, а какие – пропадут?*

Для ответа на этот вопрос хорошо бы придумать простенькую модель, которая не будет квантовой механикой, а будет подражанием квантовой механике. Эта модель должна отражать наиболее простые и наиболее известные квантовомеханические аспекты с одной стороны, с другой стороны эта модель должна быть достаточно наглядна и в ней должно быть относительно легко вычислять. А, самое главное, эта модель должна базироваться исключительно на нашем принципиальном незнании реального состояния той физической системы, которую мы будем рассматривать. Наиболее удачной из всех подобных моделей, придуманных к настоящему времени, является модель игрушечных битов Спеккенса.

По классификации, введенной на предыдущей лекции модель Спеккенса относится к классу Ψ -epistemic моделей. То есть, мы имеем какое-то реальное состояние системы, которое мы не знаем (ontic state), и есть такое состояние нашей физической системы о котором мы имеем некие знания (epistemic state), которое содержит в себе в качестве составной части ontic state.

Спеккенс работает с классическими объектами – toy bit-ами – при помощи которых пытается максимально близко воспроизвести свойства спина $1/2$, которые известны из нерелятивистской квантовой механики. Рассмотрим модель toy bit-ов.

Любой toy bit может быть описан при помощи пары переменных: (η, ζ) . Каждая из этих переменных может принимать два значения: ± 1 . То есть, всего может быть четыре различные пары. Для удобства такие пары будем обозначать следующим образом: $(\eta = +1, \zeta = -1) = (+, -)$ и так далее. Каждая пара (η, ζ) описывает истинное состояние той бита или ontic state игрушечного бита. Четыре истинных состояния обозначаются следующим образом: $1 = (+, +)$, $2 = (+, -)$, $3 = (-, +)$ и $4 = (-, -)$.

Состояния игрушечного бита удобно изобразить на плоскости (η, ζ) в виде четы-

рех квадратов (Рис. 13.1). Каждый квадрант соответствует одному из возможных реальных состояний (ontic states) той бита.

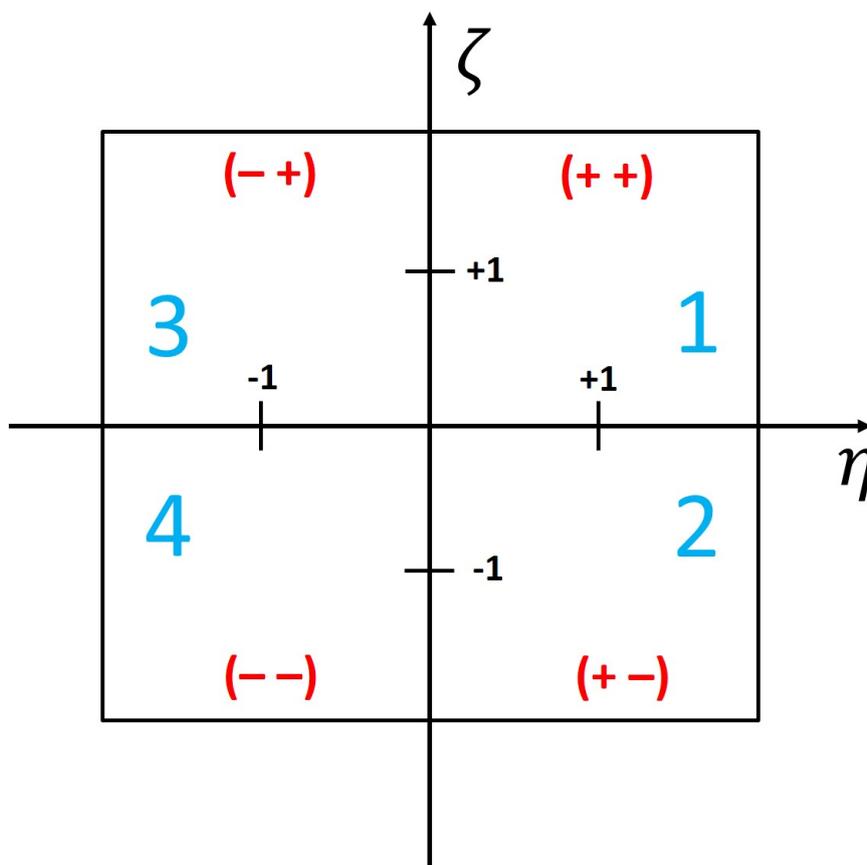


Рис. 13.1. Графическое представление игрушечного бита Спеккенса.

Теперь, зададимся вопросом: как измерять состояние данной системы? При этом измерение должно быть устроено так, чтобы ни при каких условиях экспериментатор не мог бы узнать ontic state, в котором в данный момент находится игрушечный бит.

Для любого измерения в теории игрушечных битов Спеккенс предложил так называемый принцип баланса знания (Knowledge balance principle – KBP).

Принцип баланса знания заключается в том, что *после выполнения любого измерения сумма знаний, которой владеет экспериментатор относительно реального состояния (ontic state) игрушечного бита, в точности равна сумме незнания относительно этого реального состояния (ontic state)*. Звучит немного непонятно. Однако далее мы рассмотрим конкретные примеры измерений, которые прояснят ситуацию. Отметим, что KBP в теории игрушечных битов играет ту же роль, что и соотношение неопределенности в нерелятивистской квантовой механике.

Введем измерения, которые удовлетворяют принципу баланса знания относитель-

но состояния той бита, и будем считать, что только такие и никакие другие измерения над той битом доступны экспериментатору. Измерение формулируется в виде некоторого вопроса к той биту. Результатом измерения является ответ той бита на заданный вопрос и изменение ontic state той битов в результате условного взаимодействия той бита с экспериментатором, который задает вопрос.

Давайте сначала перечислим вопросы. Первый вопрос (измерение): *равно ли η значению $+1$? (сокращенно $\eta = +1$?)*; или эквивалентный ему вопрос: *$\eta = -1$?* Если система находится в каком-то определенном ontic state (одном из четырех) то ответ на такой вопрос не выделяет нам одно из ontic states той бита, но выделяет нам два состояния, с соответствующим значением η . И когда экспериментатор, например, получает положительный ответ на вопрос равно ли значение η величине $+1$, то он имеет дело не с одним реальным состоянием той бита, а узнает лишь, что той бит находится в одном из двух ontic states: либо в состоянии $1 = (+, +)$, либо в состоянии $2 = (+, -)$.

Состояние из двух той битов является состоянием максимального знания экспериментатора, после того как был проделан аналог измерения. Такое состояние из двух той битов следует трактовать как epistemic state той бита.

Второй вопрос (измерение): *равно ли значение $\zeta = +1$?*; или эквивалентный ему вопрос: *равно ли значение $\zeta = -1$?*

Для того чтобы сделать третье измерение введем новую переменную $\varepsilon = \eta * \zeta$. Например для третьего ontic state: $\eta = -1, \zeta = +1 \implies \varepsilon = -1$.

Итак, третий вопрос (измерение): *равно ли значение $\varepsilon = +1$?*; или эквивалентный ему вопрос: *равно ли значение $\varepsilon = -1$?*

Итого мы имеем три измерения (вопроса) доступных экспериментатору:

- 1) $\eta = +1? \Leftrightarrow \eta = -1?$
- 2) $\zeta = +1? \Leftrightarrow \zeta = -1?$
- 3) $\varepsilon = +1? \Leftrightarrow \varepsilon = -1?$, где $\varepsilon = \eta * \zeta$

Рассмотрим пример. Пусть экспериментатор имеет в своем распоряжении некоторый той бит (Рис. 13.2). Он не знает в каком ontic state этот той бит находится, поэтому для него любое из ontic state равновероятно. Вероятность каждого из этих ontic state = $1/4$. Такое состояние той бита называется единичным состоянием или состоянием полного незнания. Это пример epistemic state, в котором может находиться той бит.

Однако, той бит должен находиться в каком-то конкретном ontic state (одном из четырех). Предположим, что это состояние $(++)$ (Рис. 13.3). Но, как уже было

сказано, экспериментатор об этом ничего не знает, для него той бит находится в epistemic state полного незнания.

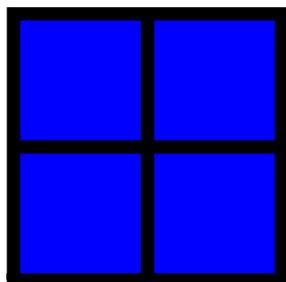


Рис. 13.2. Той бит в состоянии полного незнания.

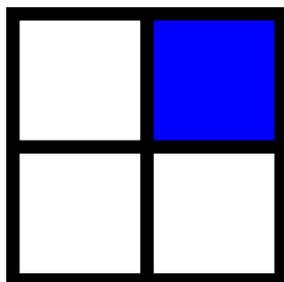


Рис. 13.3. Той бит в ontic state.

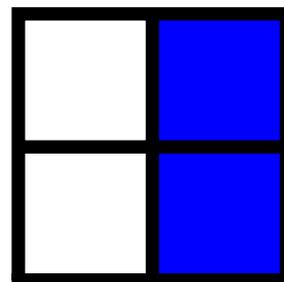


Рис. 13.4. Той бит в epistemic state с $\eta = +1$.

Теперь экспериментатор хочет провести измерения над той битом, например измерение над параметром η и задает вопрос: верно ли что $\eta = +1$? Он задает этот вопрос системе, о состоянии которой ничего не знает (Рис. 13.2), однако, как мы знаем, система находится в ontic state, для которого $\eta = +1$ (Рис. 13.3).

Тогда ответ системы будет положительным. В результате такого измерения экспериментатор узнает, что той бит находится в состоянии где $\eta = +1$ (Рис. 13.4). В нотации Спекенса такое состояние записывается либо как $|0\rangle$, либо как $1 \vee 2$.

У нас есть еще одно дополнительные условия в теории Спекенса: в результате взаимодействия той бита с экспериментатором игрушечный бит может менять свое ontic state в согласии с ответом на вопрос экспериментатора. То есть, если до измерения той бит находился в состоянии $\mathbf{1} = (++)$, то после измерения он с вероятностью $1/2$ может остаться в состоянии $\mathbf{1}$ или с вероятностью $1/2$ перейти в состояние $\mathbf{2} = (+-)$, в котором также $\eta = +1$.

Предположим, что в результате "броска монеты" игрушечный бит решил остаться в состоянии $\mathbf{1}$. И вот только после того, как сам той бит определился, в каком из двух состояний он останется, измерение считается законченным.

Экспериментатор может продолжить измерения. Он может задать какой-нибудь другой вопрос, например: верно ли, что параметр $\zeta = -1$? В результате этого измерения экспериментатор получает от системы отрицательный ответ, поскольку система все еще находится в состоянии $\mathbf{1} = (++)$ (Рис. 13.3). Отсюда экспериментатор делает вывод что система теперь находится в новом epistemic state, которое обозначается как $|+\rangle$, либо как $1 \vee 3$ (Рис. ??). То есть, с точки зрения экспериментатора, с вероятностью $1/2$ система может остаться в состоянии $\mathbf{1} = (++)$ или с вероятностью $1/2$ перейти в новое состояние $\mathbf{3} = (-+)$.

А что происходит с самим той битом? Сам той бит еще не закончил свою эволюцию, поскольку теперь он должен выбрать, в какое из двух равновероятных состояний: **1** или **3** он перейдет после такого, как ответил на вопрос экспериментатора. Предположим, что ontic state той бита поменялся и из **1** стал **3**.

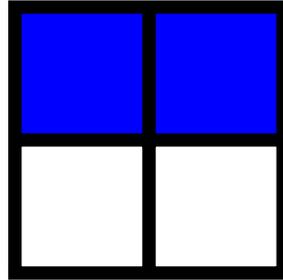


Рис. 13.5. Той бит в epistemic state $1 \vee 3$.

Таким образом, той бит продолжает находиться в одном из четырех реальных состояний (ontic states), однако экспериментатор знает лишь то, что той бит находится в одном из двух своих реальных состояний, то есть для экспериментатора он находится в epistemic state.

Дальше можно проводить сколь угодно много измерений, и всякий раз той бит будет находиться в одном из ontic states, и вполне определенно реагировать на любой наш вопрос по поводу переменных η , ζ и ϵ . И всякий раз экспериментатор будет знать только в каком из двух ontic state может находиться той бит. Такие состояния мы будем называть состояниями максимального знания для экспериментатора или просто состояниями максимального знания. Естественно, что все состояния максимального знания являются epistemic states.

Перечислим все epistemic states для той бита (13.1):

$I/2 = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4$ – единичное состояние или состояние максимального незнания.

(далее покажем почему мы обозначили это состояние как $I/2$ вместо I) (Рис. 13.2)

$|0\rangle = (++) \vee (+-) = 1 \vee 2 = |12\rangle$. Графически выглядит как (Рис. 13.4)

$|1\rangle = (-+) \vee (--) = 3 \vee 4 = |34\rangle$

$|+\rangle = (++) \vee (-+) = 1 \vee 3 = |13\rangle$

$|-\rangle = (+-) \vee (--) = 2 \vee 4 = |24\rangle$

$|+i\rangle = (+-) \vee (-+) = 2 \vee 3 = |23\rangle$

$|-i\rangle = (++) \vee (--) = 1 \vee 4 = |14\rangle$

(13.1)

Теория Спеккенса и теория спина 1/2.

У читателя, знакомого с теорией спина 1/2, могли появиться какие-то аналогии с квантовомеханическим спином 1/2, который изучается в нерелятивистской квантовой теории. И это правильно. В дальнейшем будет показано, что подобные аналогии в большинстве случаев работают. Но для этого нужно будет установить соответствие между обозначениями Спеккенса и обозначениями, которые мы использовали при разработке теории спина 1/2 в квантовой теории.

В рамках нерелятивистской квантовой механики мы рассматривали спин $S = 1/2$ и его проекцию $S_{\vec{n}} = \pm 1/2$ на некоторую ось, направление которой задается единичным вектором

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (\text{Рис. 13.6}) \quad (13.2)$$

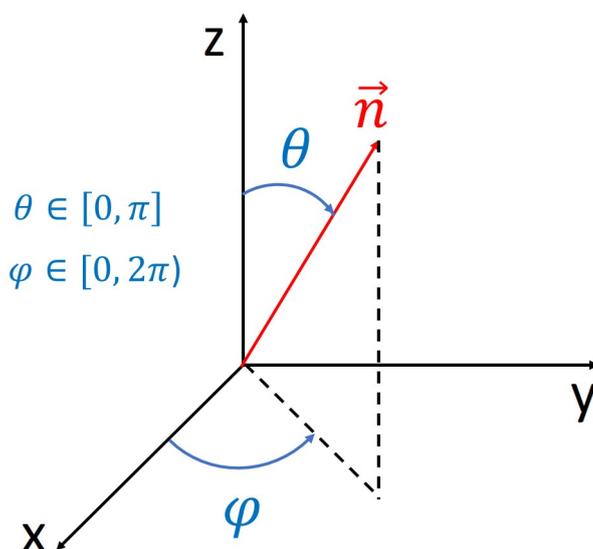


Рис. 13.6. координаты вектора в сферической СК.

В одной из предыдущих лекций мы показали, что состояние со спином 1/2 и проекции спина $\pm 1/2$ на ось \vec{n} задается следующим образом (13.3):

$$|+\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp\{i\varphi\} \end{pmatrix}; \quad |-\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \exp\{i\varphi\} \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

Вектор $|+\vec{n}\rangle$ относительно вектора $|-\vec{n}\rangle$ может иметь произвольную фазу, и мы выбрали ее таким образом, что в верхней компоненте $|-\vec{n}\rangle$ перед синусом стоит минус. У Спеккенса вектор $|-\vec{n}\rangle$ имеет обратный знак по сравнению с выбранным нами.

Теперь напишем те состояния в квантовомеханической теории спина $1/2$, которые имеют полную аналогию с состояниями игрушечных битов Спеккенса. Запишем сначала так, как это принято в нерелятивистской квантовой механике, а потом введем обозначения, аналогичные теории игрушечных битов Спеккенса.

Сперва рассмотрим состояние с проекцией спина на ось "Z" и их аналоги в теории Спеккенса (13.4). В этом случае мы должны выбрать углы θ и φ равными нулю. У нас возникают два состояния:

$$|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |0\rangle; \quad |-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle \quad (13.4)$$

Переходим к проекциям спина $1/2$ на ось "X" и аналогичным им состояниям в теории Спеккенса (13.5). В этом случае $\theta = \pi/2$ и $\varphi = 0$. Тогда состояния с проекциями спина $\pm 1/2$ на ось "X":

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |+\rangle; \quad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv -|-\rangle \quad (13.5)$$

Обратите внимание на знак минус перед вектором $|-\rangle$, соответствующим теории Спеккенса. Этот минус связан с тем, какую фразу для описания двухкомпонентных спиноров $S = 1/2$ в нерелятивистской квантовой механике мы выбрали. Для сохранения обозначений Спеккенса было выбрано такое соответствие.

Осталось рассмотреть проекцию на ось "Y" (13.6). Здесь углы $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$. Тогда состояния с проекцией спина $\pm 1/2$ на ось "Y":

$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \equiv |+i\rangle; \quad |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \equiv -|-i\rangle \quad (13.6)$$

Знак минус перед вектором $|-i\rangle$, появляется по той же самой причине, что и в предыдущем случае.

Итак, мы разобрались с аналогией между теорией Спеккенса и теорией спина $1/2$ в нерелятивистской квантовой механике. Естественно, теория Спеккенса не предусматривает состояний с проекцией спина на произвольное направление. Поэтому теория Спеккенса не является полной аналогией теории спина $1/2$ в нерелятивистской квантовой механике. Более того, теория игрушечных битов – даже не подмножество этой теории. Это своя теория, в которой можно проследить определенные аналогии с квантовой механикой, но не квантовая механика, и даже не упрощенная квантовая механика.

Аналогии смеси и суперпозиции состояний в теории игрушечных битов Спеккенса.

Рассмотрим два произвольных чистых состояния $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ в квантовой механике. Из этих состояний мы можем построить смесь или суперпозицию (13.7):

$$W_\psi|\psi\rangle\langle\psi| + W_\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| \\ C_1|\psi\rangle + C_2|\varphi\rangle \quad (13.7)$$

Если состояния (13.1) в какой-то степени являются соответствующими аналогами векторов состоянием спина $1/2$, то что же является аналогом смеси и суперпозиции состояний в теории Спеккенса? Окажется что понятие смеси состояний в теории Спеккенса достаточно тривиальная вещь, а понятие суперпозиции состояний будет вещь достаточно нетривиальной, интересной и богатой.

Сначала разберемся с аналогом смеси в теории той битов. В теории той битов два epistemic states могут образовывать выпуклую комбинацию (иначе, выпуклую сумму или по-английски convex combination \equiv CX). Именно выпуклая комбинация является аналогом смеси состояний. Операцию сложения с помощью такой комбинации будем обозначать как “+_{cx}”.

Не всегда выпуклая комбинация в теории той битов корректно определена. Чтобы выпуклая комбинация была корректно определена необходимо выполнение двух условий:

- 1) Входящие в CX epistemic states не пересекаются (не содержат общих ontic states). Например:

$$|0\rangle = 1 \vee 2 \text{ и } |1\rangle = 3 \vee 4 - \text{могут образовывать CX.}$$

$$|0\rangle = 1 \vee 2 \text{ и } |+\rangle = 1 \vee 3 - \text{не могут образовывать CX.}$$

- 2) Входящие в CX ontic states должны пробегать все значения от 1 до 4.

На самом деле второе условие до какой-то степени является следствием первого условия, потому что если мы складываем два любые epistemic states из (13.1), не имеющие общих ontic states, то такие epistemic states автоматически содержат все четыре возможных ontic states. То есть, первое условие практически задает второе условие на выпуклую комбинацию.

Разберем пример. Сложим состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ с помощью операции выпуклой суммы (13.8). Такая процедура не противоречит приведенным выше условиям, по-

сколькx эти состояния не пересекаются.

$$|0\rangle +_{cx} |1\rangle = (1 \vee 2) \vee (3 \vee 4) = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \quad (13.8)$$

В случае выпуклой суммы состояний, например, $|0\rangle$ и $|+\rangle$ результат такой суммы не определен (13.9).

$$|0\rangle +_{cx} |+\rangle = \text{не определена} \quad (13.9)$$

Легко заметить, что можно построить всего три различные выпуклые комбинации (13.10).

$$\begin{aligned} |0\rangle +_{cx} |1\rangle &= 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 = I/2 \\ |+\rangle +_{cx} |-\rangle &= 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 = I/2 \\ |+i\rangle +_{cx} |-i\rangle &= 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 = I/2 \end{aligned} \quad (13.10)$$

Больше ничего интересного для выпуклых комбинаций той битов в теории Спеккенса предложить нельзя.

Однако, с помощью аналогии между выпуклой комбинацией и смешанным состоянием можно показать, что такие суммы равны $I/2$. Для этого еще раз рассмотрим комбинацию (13.8). Аналогом состояний $|0\rangle$ и $|+\rangle$ в НКМ будут проекции $+1/2$ и $-1/2$ на ось “Z” соответственно, а выпуклая комбинация – аналог смеси. Тогда записав выражение (13.8) в обозначения НКМ, получаем (13.11).

$$\frac{1}{2}|+_z\rangle\langle+_z| + \frac{1}{2}|-_z\rangle\langle-_z| = \frac{1}{2}(\hat{P}_{+_z} + \hat{P}_{-_z}) = \frac{1}{2}\hat{I} \quad (13.11)$$

Покажем, как эта комбинация работает в терминах картинок для epistemic states той битов (Рис. 13.7).

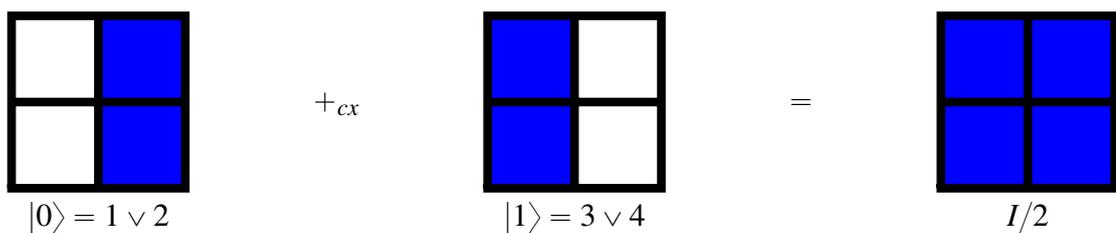


Рис. 13.7. Графическое представление смеси в теории ТВ.

Следует обратить внимание на тот факт, что если в теории спина $1/2$ каждый проектор берется с соответствующей ему вероятностью, то в теории той битов такие коэффициенты отсутствуют. Теория той битов не является теорией векторов состояния и поэтому сложение (например, выпуклая комбинация) состояний не является сложением векторов состояний. Это просто удобная запись. Поэтому проводить

полную аналогию между теоретической квантовой механики и теорией игрушечных битов неверно.

Теперь давайте рассмотрим аналог суперпозиции в теории той битов, которая в этой теории называется когерентной суперпозицией или когерентной суммой (coherent superposition). Возьмем два epistemic states (13.12)

$$\begin{aligned} a \vee b & \quad c \vee d \\ a < b & \quad c < d \\ a \neq b & \quad c \neq d \end{aligned} \tag{13.12}$$

a , b , c и d должны прибегать все ontic states от одного до четырех.

В НКМ суперпозиция это установление соответствия между двумя векторами состояния и некоторым третьим вектором состояния. По аналогии мы должны определить такую операцию (13.13).

$$a \vee b + c \vee d \Rightarrow A \vee B \tag{13.13}$$

В получившимся epistemic state должно присутствовать что-то от первого epistemic state и что-то от второго. Таким образом мы можем составить всего четыре комбинации вида:

$$a \vee c; a \vee d; b \vee c; b \vee d;$$

В теории то битов никакая одна из подобных комбинаций не является более предпочтительной, чем другая.

Лекция 14. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 2.

Аналогии смеси и суперпозиции состояний в теории игрушечных битов Спеккенса. (продолжение).

На прошлой лекции мы остановились на аналоге принципа суперпозиции в теории той битов – когерентной суперпозиции. В этом случае двум произвольным epistemic states необходимо поставить в соответствие некоторое epistemic state. Сделать это можно четырьмя различными способами (14.1) (обозначим их как $+_1$, $+_2$, $+_3$, $+_4$):

Такие состояния называют когерентной суперпозицией, а сами операции (“ $+_i$ ”) называют когерентными бинарными операциями. Данные операции перечислены ниже:

$$\begin{aligned}(\underline{a} \vee \underline{b}) +_1 (\underline{c} \vee \underline{d}) &= a \vee c \\(a \vee \underline{b}) +_2 (\underline{c} \vee \underline{d}) &= b \vee d \\(a \vee \underline{b}) +_3 (\underline{c} \vee \underline{d}) &= b \vee c \\(\underline{a} \vee \underline{b}) +_4 (\underline{c} \vee \underline{d}) &= a \vee d\end{aligned}\tag{14.1}$$

Чтобы понять, зачем использовать четыре когерентные бинарные операций, рассмотрим пример. Этот пример хорошо продемонстрирует аналогию между теорией той битов и НКМ.

Сначала рассмотрим сложение той битов $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (14.2):

$$\begin{aligned}|0\rangle +_1 |1\rangle &= (\underline{1} \vee 2) +_1 (\underline{3} \vee 4) = 1 \vee 3 = |+\rangle \\|0\rangle +_2 |1\rangle &= (1 \vee \underline{2}) +_2 (\underline{3} \vee \underline{4}) = 2 \vee 4 = |-\rangle \\|0\rangle +_3 |1\rangle &= (1 \vee \underline{2}) +_3 (\underline{3} \vee \underline{4}) = 2 \vee 3 = |+i\rangle \\|0\rangle +_4 |1\rangle &= (\underline{1} \vee 2) +_4 (\underline{3} \vee \underline{4}) = 1 \vee 4 = |-i\rangle\end{aligned}\tag{14.2}$$

Далее рассмотрим аналогичную ситуацию с точки зрения НКМ. Здесь складываются состояния с проекцией спина вдоль оси ”Z”. В НКМ проекциям $+1/2$ и $-1/2$ соответствуют состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно. В результате сложения этих состояний мы хотим получить квантовомеханические аналоги состояний, получившихся в (14.2), например (14.3):

$$\begin{aligned}|+\rangle &= |+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\|-i\rangle &= -|-_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{14.3}$$

Глядя на это, можно понять, что в теории той битов Спеккенса каждая когерентная бинарная операция отвечает выбору различной фазы при сложении двух векторов состояния в принципе суперпозиции НКМ. То есть, в НКМ принцип сложения векторов один, однако мы можем выбирать различную фазу. В случае той битов фаза при сложении не определена, но имеется четыре разные операции сложения, которые в некоторой степени эквивалентны выбору фазы.

Обратим внимание на еще одно свойство когерентной суперпозиции в теории той битов:

$$\begin{aligned} "+_1" \text{ и } "+_2" & - \text{ коммутативны} \\ "+_3" \text{ и } "+_4" & - \text{ некоммутативны} \end{aligned}$$

Рассмотрим иллюстративный пример: возьмем операцию $+_1$ и покажем, что при перестановке слагаемых результат не меняется (14.4).

$$\begin{aligned} (\underline{a} \vee b) +_1 (\underline{c} \vee d) &= a \vee c \\ (\underline{c} \vee d) +_1 (\underline{a} \vee b) &= c \vee a = a \vee c \end{aligned} \tag{14.4}$$

Теперь в качестве примера некоммутативной бинарной операции возьмем $+_4$ и покажем, что перестановка слагаемых приводит к разному результату (14.5).

$$\begin{aligned} (\underline{a} \vee b) +_4 (c \vee \underline{d}) &= a \vee d \\ (\underline{c} \vee d) +_4 (a \vee \underline{b}) &= c \vee b = b \vee c \end{aligned} \tag{14.5}$$

В качестве самостоятельного упражнения рекомендуется проверить коммутативность и некоммутативность оставшихся бинарных операций, а также посмотреть, как с точки зрения некоммутативности связаны между собой бинарные операции $+_3$ и $+_4$ и сделать выводы об устройстве алгебры epistemic states в теории Спеккенса.

Аналог унитарной эволюции в теории игрушечных битов.

Вспомним еще одну важную вещь из теории спина $1/2$ в НКМ. А именно то, что в нерелятивистской квантовой механике спин может эволюционировать. В замкнутых квантовых системах эволюция спина описывается при помощи унитарных преобразований. Как мы помним любая унитарная эволюция в НКМ является обратимой. Что же является аналогом унитарной эволюции в теории игрушечных битов Спеккенса?

Очевидно, что никакой непрерывной эволюции в теории той битов быть не может, поскольку сами по себе ontic states дискретны, то есть непрерывные переходы между этими состояниями отсутствуют по определению.

Эволюция той бита происходит при переходе одного ontic state в другое, но поскольку остальные ontic states никуда не делись, то для перехода ontic states должны поменяться местами. В рассматриваемом нами той бите всего четыре ontic states. А значит эволюция – это перестановка данных ontic states всеми возможными способами. Нашей задачей будет эти способы выяснить.

Эволюция \equiv перестановки в теории ТВ:

- 1) Простейшей перестановкой является циклическая перестановка (Рис. 14.1). Графически будем обозначать ее как $(1, 2, 3, 4)$.

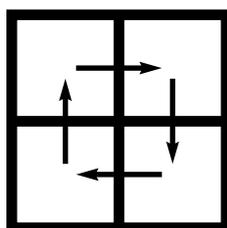


Рис. 14.1. Перестановка вида $(1, 2, 3, 4)$.

Рассмотрим пример такой эволюции для epistemic state $|0\rangle$ (Рис. 14.2).

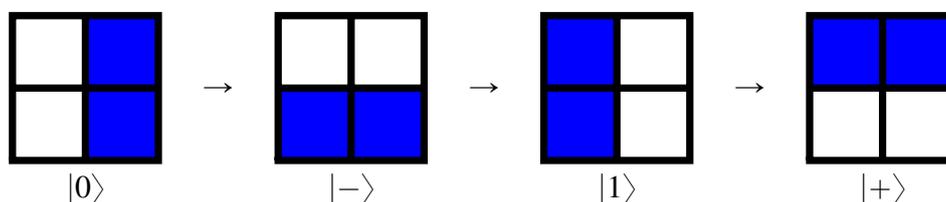


Рис. 14.2. Эволюция типа $(1, 2, 3, 4)$ состояния $|0\rangle$.

Упражнение: доказать циклическую замкнутость эволюции состояний $| - i \rangle \rightarrow | + i \rangle \rightarrow | - i \rangle$ при перестановке вида $(1, 2, 3, 4)$.

- 2) В качестве второго примера рассмотрим перестановку, при которой ontic state 1 меняется местами с ontic state 2, а ontic state 3 меняется местами с ontic state 4 (Рис. 14.3). Записывается такая перестановка как $(12)(34)$.

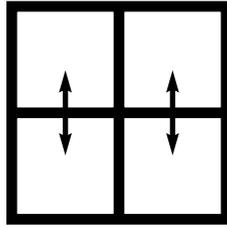


Рис. 14.3. Перестановка вида $(1,2)(3,4)$.

При такой перестановке epistemic states эволюционируют следующим образом:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |0\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |1\rangle \\ |\pm\rangle &\rightarrow |\mp\rangle \\ |\pm i\rangle &\rightarrow |\mp i\rangle \end{aligned}$$

В качестве упражнения рекомендуется самостоятельно потренироваться с различными перестановками и нарисовать их графически.

- 3) Рассмотрим третий пример перестановок. В нем меняются местами только ontic state 1 и ontic state 2 (Рис. 14.4). Записывается такая перестановка как $(12)(3)(4)$.

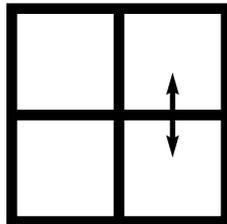


Рис. 14.4. Перестановка вида $(1,2)(3)(4)$.

При такой перестановке epistemic states эволюционируют следующим образом:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |0\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |1\rangle \\ |+i\rangle &\rightarrow |+ \rangle \\ |-i\rangle &\rightarrow |- \rangle \\ |+ \rangle &\rightarrow |+i\rangle \\ |- \rangle &\rightarrow |-i\rangle \end{aligned}$$

- 4) Перейдем к четвертому примеру перестановки, при которой ontic state 1 остается на месте, а ontic states 2, 3 и 4 циклически переставляются (Рис. 14.5). Такая перестановка записывается как $(1)(234)$.

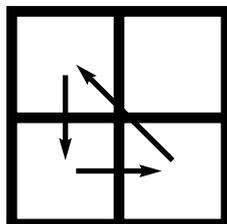


Рис. 14.5. Перестановка вида $(1)(234)$.

Эволюцию epistemic states при такой перестановке оставляю в качестве самостоятельного упражнения. Здесь также будет полезно порисовать.

- 5) И последний пятый тип перестановок является самым тривиальным: каждое ontic state остается на своем месте (Рис. 14.6). Обозначается как $(1)(2)(3)(4)$.

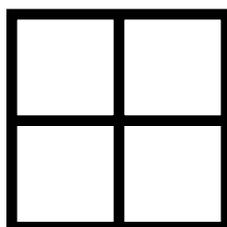


Рис. 14.6. Перестановка вида $(1)(2)(3)(4)$.

Очевидно, что epistemic states при такого рода перестановке переходят сами в себя.

Этими пятью примерами исчерпываются все возможные типы перестановок, которые можно сделать, если мы хотим имитировать эволюцию ontic states в той бите. Однако, тройных перестановок может быть не одна, и двойных тоже не одна. Вопрос: а можно ли посчитать сколько их всего? Да, можно. Покажем, как это выглядит ???. Пять основных типов перестановок будем маркировать согласно рассмотренным выше примерам.

Таблица 14.1. Виды перестановок.

(1234)	(12)(34)	(12)(3)(4)	(1)(234)	(1)(2)(3)(4)
(1432)	(13)(24)	(13)(2)(4)	(1)(243)	
(1243)	(14)(23)	(14)(2)(3)	(2)(134)	
(1342)		(23)(1)(4)	(2)(143)	
(1324)		(24)(1)(3)	(3)(124)	
(1423)		(34)(1)(2)	(3)(142)	
			(4)(123)	
			(4)(132)	

Всего получаем $6 + 3 + 6 + 8 + 1 = 24$ различные перестановки, определяющие эволюцию той бита. Эти перестановки образуют группу дискретных перестановок S_4 .

Аналоги теории представлений

Изображения той бита в виде квадрата *ontic states* – это не единственное возможное его изображение. Есть другие подходы к описанию той бита, каждый из которых позволяет проще осветить те или иные аспекты соответствующей модели и упростить вычисления.

Той бит можно рассматривать не только в виде квадрата на плоскости (Рис. 13.1), изначально его рассматривали в виде строки (Рис. 14.7).

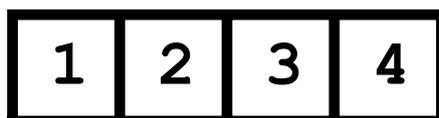


Рис. 14.7. Той бит в представлении строки.

Например, состояния $|0\rangle$ и $|+i\rangle$ той бита в различных представлениях изображаются следующим образом (Рис. 14.8).

Вопрос: в чем преимущество представления в виде строки над представлением в виде квадрата.

Ответ: при рассмотрении одного той бита, его различных состояний, эволюции, преобразований и измерений над ним, той бит действительно удобно представлять в виде квадрата. Так нагляднее. Однако, при рассмотрении состояния из двух той битов (аналог запутанного состояние двух спинов $1/2$ в НКМ) сочетать между собой квадраты и рассматривать на них аналог прямого произведения непонятно как. В

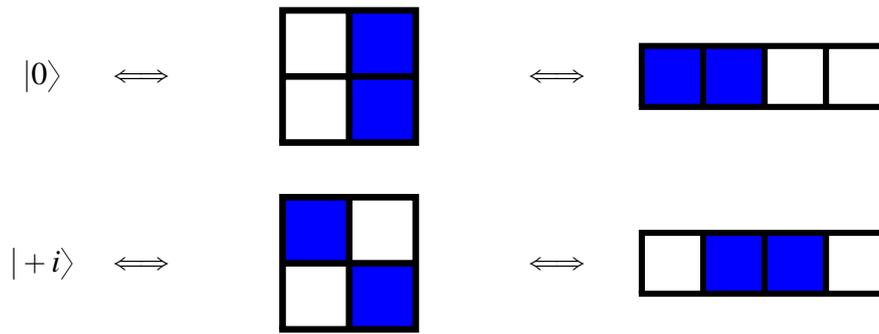


Рис. 14.8. Состояния той бита $|0\rangle$ и $|+i\rangle$ в различных представлениях.

случае же строк можно к одной строчке подцепить в виде столбцов другие строчки. В случае трех той битов добавляется еще одно пространственное измерение. И в этом отношении система, состоящая из нескольких той битов записанная в виде строчек, представляется гораздо удобнее и логичнее.

К сожалению, при рассмотрении той бита в виде строчек менее красиво можно сформулировать измерение, которое соответствует принципу баланса знания. Вместо вопроса, например, “является ли $\eta = +1$?” в случае квадрата, при рассмотрении строчки эквивалентный вопрос будет звучать следующим образом: “находится ли той бит в ontic state 1 или в ontic state 2?”. Отвечать на такой вопрос можно только “Да” или “Нет”. И, например, ответ “Нет” означает, что игрушечный бит находится либо в состоянии 3, либо в состоянии 4.

Теорию той битов также можно описывать при помощи некоторых базисных векторов, которым соответствуют различные ontic states, и операций над этими базисными векторами. Например, выберем такие базисные векторы (14.6)

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.6)$$

Тогда состояния той бита, например, $|0\rangle$ и $|+i\rangle$ записываются следующим образом (14.7).

$$|0\rangle = |12\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |+i\rangle = |23\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.7)$$

Преимуществом подобного представления является то, что при помощи подобных векторов удобно описывать динамику. Рассмотрим циклическую перестановку (1243). С помощью таких векторов ее можно записать в виде соответствующей матрицы $\hat{U}_{(1234)}$ (14.8).

$$\hat{U}_{(1234)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.8)$$

Предлагаю читателю самостоятельно убедиться в том, что рамках такого матричного формализм получаются корректные перестановки.

Для перестановки вида (1)(2)(4)(3) соответствующая матрица $\hat{U}_{(1)(2)(3)(4)}$ (14.9) выглядит тривиально.

$$\hat{U}_{(1)(2)(3)(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.9)$$

Матрицы для оставшихся преобразований предлагаю читателю выписать самостоятельно.

Формализм стабилизаторов в НКМ.

Термин “стабилизатор” относится к квантовой теории информации. Оригинальная работа на эту тему (запишем ее под номером “4”, продолжая список работ, необходимых для освоения той битов Спеккенса):

4) D. Gottesman, “Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound”, PRA 54, pp. 1862-1868 (1996)

Теория, предложенная Даниелем Готсманом была введена для квантовой коррекции ошибок (коррекции ошибок в квантовых алгоритмах), то есть теория, стабилизирующая квантовые алгоритмы, поэтому ее элементы были названы стабилизаторами. Мы не будем здесь рассматривать квантовую теорию информации. Нас будет интересовать только формализм стабилизаторов.

Перейдем к основной идее формализма стабилизаторов. Предположим, что квантовая система задается про помощь вектора состояния $|\psi\rangle$, которое в рамках квантовой механики полностью характеризует квантовую систему.

Вопрос: существует ли еще что-то, что может также полностью характеризовать квантовую систему, но не являться при этом вектором состояния $|\psi\rangle$?

Д. Готсман показал, что если взять некий набор операторов, возьмем, к примеру \hat{A} , такой что (14.10):

$$\hat{A}|\psi\rangle = +|\psi\rangle, \quad (14.10)$$

то есть, состояние $|\psi\rangle$ является собственным вектором этого оператора (операторов) с собственным значением $+1$. Тогда, нет разницы задавать систему в терминах вектора состояния или задавать систему при помощи набора операторов, по которым однозначно восстанавливается вектор состояния. Более того, Д. Готсман показал, что в теории коррекций квантовых ошибок задавать состояние квантовой системы при помощи набора соответствующих операторов даже лучше. Так проще записывать соответствующие алгоритмы. Такие операторы называются стабилизаторами: \hat{A} – стабилизатор состояния $|\psi\rangle$. Обозначаются они как $\langle A \rangle$ или в случае нескольких операторов как $\{A, B, \dots\}$.

Теперь посмотрим какие стабилизаторы соответствуют различным проекциям спина $1/2$ на различные оси в НКМ, какие стабилизаторы соответствуют запутанным состояниям из двух спинов, а также увидим какие стабилизаторы можно ввести в теорию той битов и найдем взаимно однозначное соответствие между стабилизаторами в НКМ и стабилизаторами в теории той битов. На основе этого попытаемся через стабилизаторы построить запутанные состояния в теории той битов, что в иных подходах сделать довольно трудно.

Для спина $1/2$ все стабилизаторы принадлежат к группе Паули. Это набор матриц Паули 2×2 , полностью замкнутый относительно всевозможных матричных умножений. Обозначим группу Паули как \mathcal{P} . Искомый набор отличается от обычного набора матриц Паули и включает в себя (14.11):

$$\mathcal{P} = \{\pm \hat{1}, \pm i\hat{1}, \pm \sigma_x, \pm i\sigma_x, \pm \sigma_y, \pm i\sigma_y, \pm \sigma_z, \pm i\sigma_z\} \quad (14.11)$$

Рассмотрим примеры стабилизаторов для состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (14.12):

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv |+_z\rangle : \langle \sigma_z \rangle \\ |1\rangle &\equiv |-_z\rangle : \langle -\sigma_z \rangle \\ \sigma_z |+_z\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +|+_z\rangle \\ -\sigma_z |+_z\rangle &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = +|-_z\rangle \end{aligned} \quad (14.12)$$

Еще один пример. Рассмотрим стабилизатор состояния $|-\rangle$ (14.13):

$$\begin{aligned} |-\rangle &\equiv -| -_x \rangle : \langle -\sigma_x \rangle \\ -\sigma_x |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = +|-\rangle \end{aligned} \quad (14.13)$$

В качестве задачи предлагаю выяснить какие матрицы являются стабилизаторами для состояний $|+i\rangle$ и $|-i\rangle$.

Лекция 15. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 3.

Формализм стабилизаторов в НКМ (продолжение).

Продолжим работать в рамках НКМ и разберем, какие стабилизаторы задают запутанные состояния двух спинов 1/2. Рассмотрим состояние Белла $|\Phi^+\rangle$ (15.1):

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+_z\rangle^{(A)} \otimes |+_z\rangle^{(B)} + |-_z\rangle^{(A)} \otimes |-_z\rangle^{(B)} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)} + |1\rangle^{(A)} \otimes |1\rangle^{(B)} \right) \end{aligned} \quad (15.1)$$

Как правило, в предыдущих лекциях мы рассматривали состояние $|\Psi^-\rangle$. Но, как будет показано ниже, состояние $|\Phi^+\rangle$ в теории той битов Спеккенса имеет более простой вид чем состояние $|\Psi^-\rangle$. Поэтому в качестве примера мы рассмотрим состояние $|\Phi^+\rangle$.

Напомню, что вектор состояния каждого спина принадлежит своему двумерному гильбертовому пространству (15.2):

$$\begin{aligned} |\dots\rangle^{(A)} &\in \mathcal{H}^{(A)} \\ |\dots\rangle^{(B)} &\in \mathcal{H}^{(B)} \\ |\Phi^+\rangle &\in \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)} \end{aligned} \quad (15.2)$$

Теперь посмотрим, что является стабилизатором для состояния $|\Phi^+\rangle$. Логично предположить, что если какая-то матрица из группы Паули является стабилизатором для проекции спина на какую-то из осей, то стабилизаторы подобного рода запутанных состояний будут иметь вид прямого произведения таких матриц:

$$\sigma_i^{(A)} \otimes \sigma_j^{(B)}$$

Далее нужно перебрать все подобные произведения (16 штук) и выяснить какие из них при действии $|\Phi^+\rangle$ дают то же самое состояние со знаком плюс. Это упражнение перебора предлагается сделать самостоятельно, а ниже приведем то множество операторов, которое является стабилизаторами для состояния $|\Phi^+\rangle$ (15.3):

$$\hat{O}^{(AB)} = \{ \hat{1}^{(A)} \otimes \hat{1}^{(B)}, \sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, \sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}, \sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)} \} \quad (15.3)$$

Рассмотрим следующий вопрос. При рассмотрении системы из одного спина 1/2 стабилизатором для состояния проекции спина на одну из осей являлась одна матрица. Здесь имеем четыре разных стабилизатора.

Вопрос: минимальное ли это количество для определения состояния $|\Phi^+\rangle$, или можно ограничиться меньшим числом?

Вполне очевидно, что стабилизатор, составленный из прямого произведения единичных матриц, не несет в себе никакой полезной информации о состоянии $|\Phi^+\rangle$. Также можно вспомнить о коммутационных соотношениях между матрицами Паули, которые позволяют выражать одну из матриц через две оставшиеся. То есть, для определения состояния $|\Phi^+\rangle$ можно выбрать два стабилизатора. Остальные будут от них зависеть либо как единичный вообще ничего не говорить о самом состоянии.

Вопрос: а можно меньше двух? Меньше двух нельзя, потому что один стабилизатор, характеризующий только одно спиновое состояние, не может характеризовать линейную комбинацию таких состояний.

Таким образом, можно записать, что состояние $|\Phi^+\rangle$ эквивалентно следующему набору из двух стабилизаторов (15.4).

$$|\Phi^+\rangle \iff \langle \sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, \sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)} \rangle \quad (15.4)$$

Проверим, что $\sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}$ действительно является стабилизатором состояния $|\Phi^+\rangle$ (15.5):

$$\sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)} |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_x|+z\rangle)^{(A)} \otimes (\sigma_x|+z\rangle)^{(B)} + (\sigma_x|-z\rangle)^{(A)} \otimes (\sigma_x|-z\rangle)^{(B)} \right) = |\Phi^+\rangle \quad (15.5)$$

Теперь приведу две задачи, полезные для тренировки работы со стабилизаторами: Доказать, что для состояния $|\Psi^-\rangle$ в качестве стабилизаторов можно выбрать следующую пару:

$$\langle -\sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(B)}, -\sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(B)} \rangle$$

Найти стабилизаторы для белловских состояний $|\Psi^+\rangle$ и $|\Phi^-\rangle$.

(Подсказка: их можно найти в том же наборе, что приведен в первом задании, но, нужно понять какие знаки “+” или “-” стоят перед стабилизаторами.)

Формализм стабилизаторов в теории игрушечных битов Спеккенса.

Вернемся к одиночному той биту (Рис. 13.1) (Рис. 14.1), который является аналогом спина $1/2$ в НКМ. Например, состояние $|+_z\rangle$ соответствует состоянию $|0\rangle$ в теории той битов (15.6):

$$|+_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.6)$$

Если стабилизаторами для спина $1/2$ были матрицы Паули 2×2 , то легко предположить, что стабилизаторами для той битов должны быть матрицы 4×4 , если записывать их в матричной форме. И как и в теории спина $1/2$, где у нас были три матрицы Паули и одна единичная размерности 2×2 . Тогда в теории той битов тоже следует ввести четыре матрицы, аналогичные матрицам Паули. Напишем эти матрицы (15.7):

$$\begin{aligned} \sigma_x &\rightarrow \mathbb{X} = \text{diag}(1, -1, 1, -1) \\ \sigma_y &\rightarrow \mathbb{Y} = \text{diag}(1, -1, -1, 1) \\ \sigma_z &\rightarrow \mathbb{Z} = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \\ \hat{1} &\rightarrow \mathbb{I} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \end{aligned} \quad (15.7)$$

где $\text{diag}(\dots)$ обозначает, что все ненулевые элементы стоят только на диагонали.

Примеры из теории ТВ:

- 1) Для состояния $|0\rangle = |12\rangle$ стабилизатором является $\langle \mathbb{Z} \rangle$.
- 2) Для состояния $|-\rangle = |24\rangle$ стабилизатором является $\langle -\mathbb{X} \rangle$.
- 3) Для состояния $|+i\rangle = |23\rangle$ стабилизатором является $\langle \mathbb{Y} \rangle$.

В качестве примера покажем явно, что $\langle -\mathbb{X} \rangle$ – стабилизатор для состояния $|-\rangle$ (15.9):

$$(-\mathbb{X})|-\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = +|-\rangle \quad (15.8)$$

Для остальных состояний предлагаю читателю, в качестве упражнения, самостоятельно найти оставшиеся стабилизаторы и проверить, что они действительно являются стабилизаторами. Это поможет лучше понять устройство формализма стабилизаторов в теории той битов Спеккенса.

Системы двух игрушечных битов в теории Спеккенса.

Перейдем к рассмотрению системы из двух той битов в теории Спеккенса. Система двух той битов, как и в случае одного той бита, должна в каждый конкретный момент времени находиться в каком-то ontic state, который должен являться комбинацией ontic states первого и второго той битов. Поскольку один той бит имеет четыре различных ontic states, то система двух той битов имеет $4 \times 4 = 16$ различных ontic states.

Эти 16 ontic states удобнее представлять если рассматривать один той бит в виде строки (Рис. 14.7), а другой в виде столбца. В таком случае схематически система двух той битов будет выглядеть следующим образом (Рис. 15.1).

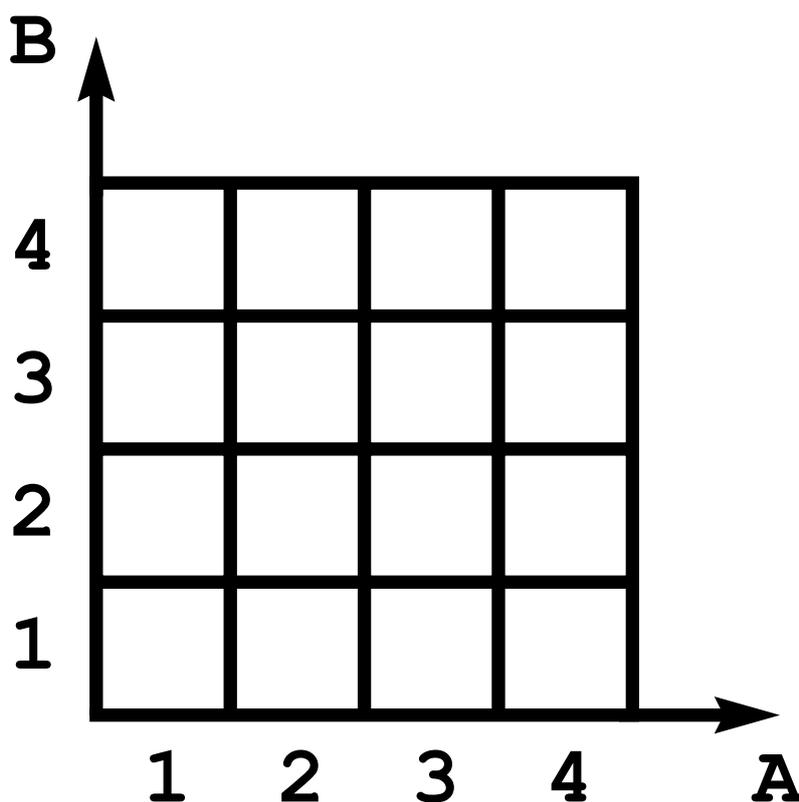


Рис. 15.1. Схематическое представление системы двух той битов.

В качестве одного из важнейших понятий при рассмотрении одного той бита вводился так называемый “принцип баланса знаний”: после каждого измерения количе-

ство знания, которое экспериментатор имеет о состоянии той бита, равно количеству незнания о состоянии той бита. Из этого мы вывели то, что той бит должен находиться в одном из epistemic states, являющимся комбинацией любых двух имеющихся в той бите ontic states. Тот же принцип баланса знания должен быть применен к любым изменениям, которые относятся к системам двух (и более) той битов.

Рассмотрим систему двух той битов A и B . Пусть до измерения той бит A находился в ontic state 1 и второй то бит B тоже находился в ontic state 1. Запишем такое состояние как $1^{(A)} \otimes 1^{(B)}$. Графически это можно представить как (Рис. 15.2).

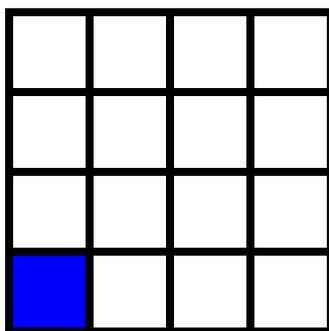


Рис. 15.2. Система двух той битов в ontic state $1^{(A)} \otimes 1^{(B)}$.

Однако, с точки зрения экспериментатора все ontic states равновероятны (вероятность = $1/16$). Чтобы выяснить что-нибудь о системе этих двух той битов экспериментатор должен провести измерение. Разберем как такое измерение устроено.

Измерение должно состоять из двух вопросов к каждому из той битов. В примере (Рис. 15.2) оба той бита находятся в состоянии 1. Если рассмотреть состояние каждого из них, то, вспоминая представление (Рис. 13.1), видим, что каждый из них находится в состоянии $(++)$. Поэтому простейшее измерение (вопрос к системе) и его результат может звучать так (15.9):

$$\begin{cases} \eta^{(A)} = +1? & \text{Да}^{(A)} \\ \zeta^{(B)} = -1? & \text{Нет}^{(B)} \end{cases} \quad (15.9)$$

В результате экспериментатор узнает, что в системе двух той битов (Рис. 15.1) той бит “ A ” находится либо в ontic state 1, либо 2, а той бит “ B ” находится либо в ontic state 1, либо 3. Очевидно, что epistemic state системы двух той битов находится на пересечении epistemic states той битов “ A ” и “ B ”. Графически можно представить как (Рис. 15.3).

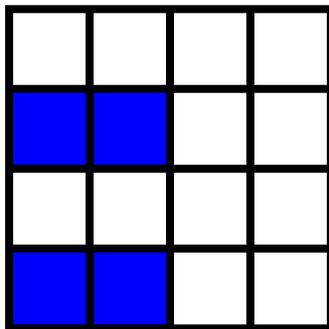


Рис. 15.3. Epistemic state системы двух той битов после измерения (15.9).

После такого измерения с точки зрения экспериментатора с вероятностью $1/4$ система двух той битов может находиться в одном из четырех состояний: $1^{(A)} \otimes 1^{(B)}$, $1^{(A)} \otimes 3^{(B)}$, $2^{(A)} \otimes 1^{(B)}$ и $2^{(A)} \otimes 3^{(B)}$. На самом же деле система двух той битов, например, в ontic state $2^{(A)} \otimes 1^{(B)}$.

Это был пример измерения, подчиняющегося принципу баланса знания. Можно придумать измерения, нарушающее этот принцип. Но в лекциях подобного рода измерения рассматриваться не будут.

В НКМ для системы из двух спинов $1/2$ можно построить, например, сепарабельное состояние с полным спином равным единице, и проекцией спина на ось “Z” равной “+1” (15.10):

$$|1, +1\rangle = |+_z\rangle^{(A)} \otimes |+_z\rangle^{(B)} \quad (15.10)$$

А можно построить запутанное состояние, например, (15.11):

$$|0, 0\rangle \equiv |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+_z\rangle^{(A)} \otimes |-_z\rangle^{(B)} - |-_z\rangle^{(A)} \otimes |+_z\rangle^{(B)} \right) \quad (15.11)$$

В теории Спеккенса для системы двух той битов также могут быть как сепарабельные, так и запутанные состояния, а еще может быть третий класс состояний, которые не существуют в НКМ – невозможные состояния. Это состояния априори нарушают принцип баланса знания. То есть состояния, в которых можно каким-то образом выяснить либо еще до измерения, либо в процессе измерения, в каком конкретном ontic state находится один или даже оба той бита.

Поясним на примерах. Рассмотрим состояние $|0\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)}$ – типичный пример сепарабельного состояния. В таком состоянии каждый из той битов находится в epistemic state, состоящим из двух ontic states $1 \vee 2$. Следовательно система из двух той битов находится в epistemic state, находящимся на пересечении (Рис. 15.4).

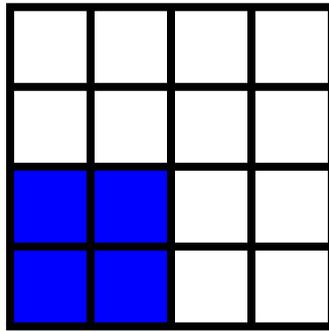


Рис. 15.4. Epistemic state системы двух той битов в состоянии $|0\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)}$.

Рассмотрим пример посложнее – состояние $| -i\rangle^{(A)} \otimes | +i\rangle^{(B)}$. Здесь той бит “A” находится в epistemic state $1 \vee 4$, а той бит “B” в epistemic state $2 \vee 3$. Тогда epistemic state соответствующее их прямому произведению будет выглядеть как (Рис. 15.5).

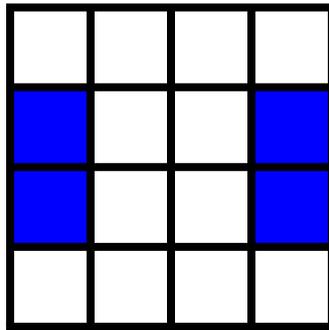


Рис. 15.5. Epistemic state системы двух той битов в состоянии $| -i\rangle^{(A)} \otimes | +i\rangle^{(B)}$.

Теперь рассмотрим пример невозможного состояния. Предположим, что мы просто хотим изобразить состояние двух битов как четыре произвольных ontic state на плоскости размерности четыре на четыре, не обращаясь к прямому произведению (Рис. 15.6). И потом попытаться понять, чему оно соответствует.

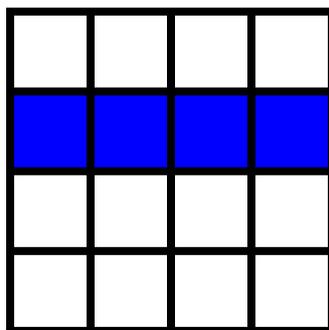


Рис. 15.6. Пример невозможного состояния системы двух той битов.

Это пример невозможного состояния, потому, что это состояние противоречит принципу баланса знаний: той бит “*B*” находится в конкретном ontic state 3 с точки зрения экспериментатора. Но согласно принципу баланса знания экспериментатор никаким образом не может узнать в каком именно ontic state находится любой той бит в системе. Таким образом не все состояния из четырех ontic states на плоскости двух той битов являются возможными, т. е. не противоречат принципу баланса знаний.

Однако, есть менее очевидные невозможные состояния (Рис. 15.7).

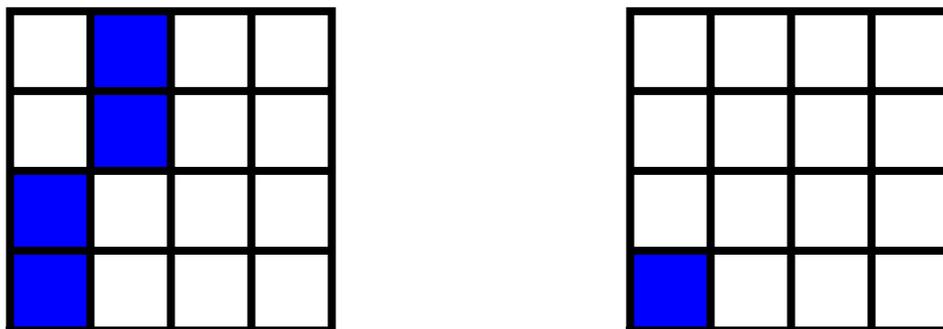


Рис. 15.7. Пример невозможного состояния системы двух той битов и ontic state для него.

В этом примере той бит “*A*” находится в epistemic state $|0\rangle$, а той бит “*B*” в состоянии максимального незнания $I/2$. Также предположим, что той бит находится в ontic state (Рис. 15.7). Но если экспериментатор захочет провести, например, такое измерение:

$$\begin{cases} \eta^{(A)} = +1? \\ \eta^{(B)} = +1? \end{cases}$$

То он на оба вопроса получит положительные ответы. Тогда с его точки зрения той бит “*A*” должен находится в epistemic state $1 \vee 2$, и той бит “*B*” тоже должен находится в epistemic state $1 \vee 2$. Но, сопоставляя результат измерения с первоначальным ontic state экспериментатор получает систему двух той битов, находящуюся в epistemic state (Рис. 15.8).

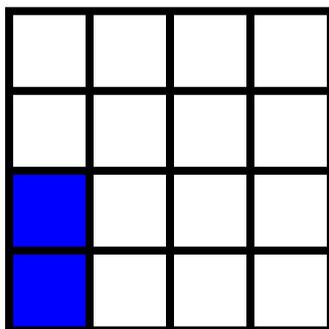


Рис. 15.8. Той бит в невозможном epistemic state.

Такое состояние нарушает принцип баланса знаний, поскольку в таком случае экспериментатор точно знает ontic state для той бита “A” – 1.

Теперь перейдем к тому, как в теории той битов Спеккенса определять запутанные состояния, которые не являются невозможными с одной стороны, а, с другой стороны, не сводятся к сепарабельным состояниям.

Рассмотрим состояние $|\Phi^+\rangle$, являющиеся аналогом запутанного состояния в теории спина 1/2. Для задания запутанного состояния здесь удобно воспользоваться формализмом стабилизаторов. В случае НКМ для такого состояния стабилизаторы были получены выше (15.4).

Сначала определим состояние $|\Phi^+\rangle$ в системе той битов. По аналогии с (15.4) это состояние также задается набором стабилизаторов (15.12):

$$|\Phi^+\rangle \iff \langle \mathbb{X}^{(A)} \otimes \mathbb{X}^{(B)}, \mathbb{Z}^{(A)} \otimes \mathbb{Z}^{(B)} \rangle \quad (15.12)$$

Теперь нужно определить аналог прямого произведения в системе той битов. Такое произведение называется **произведением Адамара** (15.2):

$$\left(\mathbb{X}^{(A)} \otimes \mathbb{X}^{(B)} \right)_{mn} = \left(\text{diag} \mathbb{X}^{(A)} \right)_m \times \left(\text{diag} \mathbb{X}^{(B)} \right)_n \quad (15.13)$$

Элемент получившейся матрицы с индексами (m, n) в таком случае будет действовать на соответствующее ontic state системы двух той битов (Рис. 15.1). И если такой элемент равен “+1”, то такой элемент будет являться стабилизатором (по крайней мере его частью), а если наоборот равен “−1”, то такой элемент не может быть частью стабилизатора.

Тогда задать состояние $|\Phi^+\rangle$ как состояние двух стабилизаторов значит задать состояние, при котором из пересечения “таблицы” ontic states смстемы той битов (Рис. 15.1) со стабилизаторами выбираются только положительные значения и от первого, и от второго стабилизаторов.

Рассмотрим пример. Изобразим в виде таблицы ontic states стабилизаторы $\langle X^{(A)} \otimes X^{(B)} \rangle$ и $\langle Z^{(A)} \otimes Z^{(B)} \rangle$ (Рис. 15.9) (Рис. 15.10), согласно (15.13).

		B			
-1 4		-1	1	-1	1
1 3		1	-1	1	-1
-1 2		-1	1	-1	1
1 1		1	-1	1	-1
		1	2	3	4
		1	-1	1	-1

		B			
-1 4		-1	-1	1	1
-1 3		-1	-1	1	1
1 2		1	1	-1	-1
1 1		1	1	-1	-1
		1	2	3	4
		1	1	-1	-1

Рис. 15.9. Табличное представление произведения $X^{(A)} \otimes X^{(B)}$.

Рис. 15.10. Табличное представление произведения $Z^{(A)} \otimes Z^{(B)}$.

Из получившегося нужно выбрать только такие состояния, для которых получились значения “+1”, причем на пересечении обоих стабилизаторов. Таким образом получаем состояние (Рис. 15.11), соответствующее запутанному состоянию $|\Phi^+\rangle$ для системы двух той битов.

Рис. 15.11. Запутанное состояние $|\Phi^+\rangle$ для системы двух той битов.

Лекция 16. Теория игрушечных битов Спеккенса (Spekkens toy bit). Часть 4.

Системы двух игрушечных битов в теории Спеккенса (продолжение).

В качестве самостоятельных упражнений предлагаю читателю решить следующие задачи:

- 1) Построить запутанное состояние $|\Psi^-\rangle$ для системы двух той битов. Для проверки полученного ответа приведу результат, который должен в итоге получиться (Рис. 16.1).

■			
	■		
		■	
			■

Рис. 16.1. Запутанное состояние $|\Psi^-\rangle$ для системы двух той битов.

- 2) Построить состояние соответствующее следующим стабилизаторам $\langle \mathbb{Z}^{(A)} \otimes \mathbb{X}^{(B)}, \mathbb{X}^{(A)} \otimes \mathbb{Z}^{(B)} \rangle$. Результат должен получиться следующим (Рис. 16.2).

			■
	■		
		■	
■			

Рис. 16.2. Epistemic state системы двух той битов соответствующее стабилизаторам $\langle \mathbb{Z}^{(A)} \otimes \mathbb{X}^{(B)}, \mathbb{X}^{(A)} \otimes \mathbb{Z}^{(B)} \rangle$.

- 3) Построить запутанные состояния $|\Psi^+\rangle$ и $|\Phi^-\rangle$ для системы двух той битов.

Подсказка: в НКМ сумма проекторов на все четыре белловских состояния дает единичную матрицу; в теории той битов выпуклая сумма соответствующая сумма двух возможных состояний той бита также дает единичное состояние $I/2$. И если обратить внимание на уже приведенные выше состояния $|\Psi^-\rangle$ и $|\Phi^+\rangle$, каждое из которых занимает четыре ontic states, то можно заметить, что эти состояния не пересекаются. Тогда оставшиеся два состояния займут оставшиеся восемь ontic states в системе двух той битов.

Рассмотрим снова состояние $|\Phi^+\rangle$ (Рис. 15.11), соответствующее стабилизаторам $\langle X^{(A)} \otimes X^{(B)}, Z^{(A)} \otimes Z^{(B)} \rangle$. Теперь попробуем сдвинуть его (Рис. 16.3) и попробуем понять, есть ли физический смысл у таких состояний.

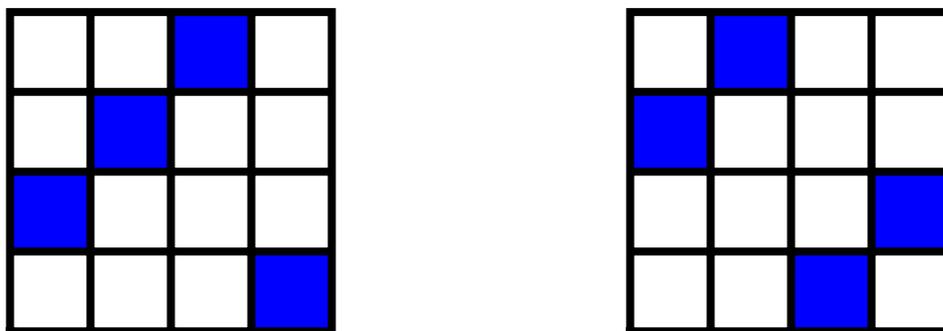


Рис. 16.3. Состояния полученные сдвигом относительно состояния $|\Phi^+\rangle$.

При рассмотрении состояния $|\Phi^+\rangle$ из четырех возможных стабилизаторов мы выбрали набор из двух стабилизаторов $\langle X^{(A)} \otimes X^{(B)}, Z^{(A)} \otimes Z^{(B)} \rangle$. Однако, также для состояния $|\Phi^+\rangle$ можно выбрать наборы стабилизаторов $\langle Y^{(A)} \otimes Y^{(B)}, Z^{(A)} \otimes Z^{(B)} \rangle$ и $\langle X^{(A)} \otimes X^{(B)}, Y^{(A)} \otimes X^{(B)} \rangle$. Эти наборы тоже определяют состояние $|\Phi^+\rangle$, но им должны соответствовать картинки, отличные от (Рис. 15.11). Соответствие между приведенными выше наборами стабилизаторов и (Рис. 16.3) читателю предлагается выяснить самостоятельно.

Степень совпадения или fidelity в теории игрушечных битов.

В НКМ, если одна система (или ансамбль) может быть описана при помощи матрицы плотности $\hat{\rho}$, а вторая при помощи матрицы плотности $\hat{\sigma}$, то чтобы понять степень совпадения между системами или вероятность перехода одной в другую, вводится вероятность перехода $\omega(\sigma|\rho)$, она же fidelity (16.1):

$$\omega(\sigma|\rho) = \text{Tr}(\hat{\sigma}\hat{\rho}) \quad (16.1)$$

В теории той битов степень совпадения проще всего вычислять графически – наложением изображения одной системы и той битов на другую систему. Рассмотрим две системы, каждая из которых содержит два той бита, находящиеся в разрешенных epistemic states (Рис. 16.4). Чтобы найти степень совпадения этих систем их изображения нужно наложить друг на друга и посмотреть какие из ontic states пересекаются (Рис. 16.5).

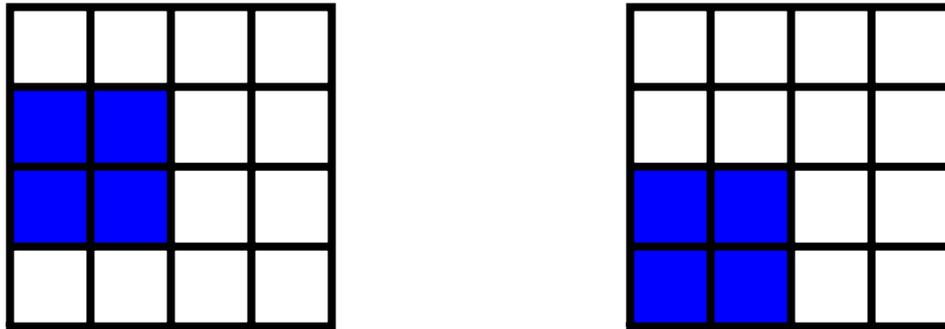


Рис. 16.4. Две системы из той битов, находящиеся в разрешенных epistemic state.

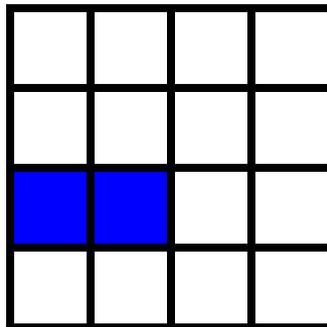


Рис. 16.5. Пересечение этих систем – fidelity.

В результате получаем два ontic states, вероятность системы находиться в каждом из которых равна $1/4$. Таким образом fidelity (Рис. 16.4) равна:

$$\text{fidelity} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Очевидно, что степень совпадения в теории той битов может варьироваться в пределах следующих значений:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$$

Других степеней совпадения для подобных систем быть не может. При рассмотрении систем из большего количества той битов значения fidelity могут быть другими, но тем не менее, в отличие от квантовой механики, они всегда будут дискретны.

Вспомним, что в системах той битов можно делать перестановки, однако, если осуществляется перестановка какого-либо ontic state из одной системы той битов, то необходимо переставить соответствующее ontic state в другой системе (Рис. 16.6). Следовательно, fidelity в системах той битов не меняется. Это явление является прямой аналогией того, что в НКМ унитарное преобразование не меняет скалярного произведения.

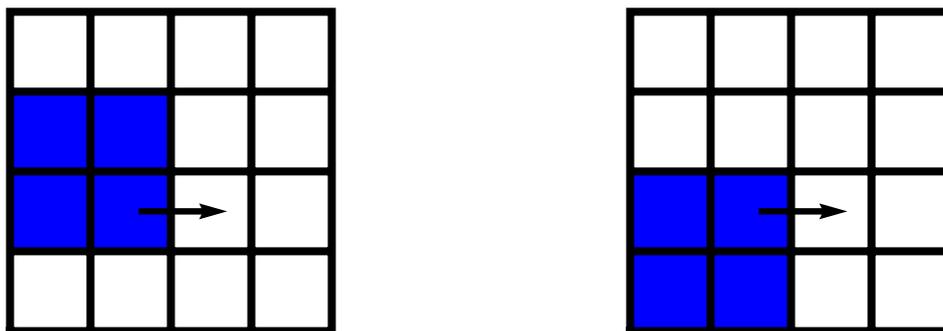


Рис. 16.6. Перестановки ontic states в двух системах той битов.

Теорема о невозможности клонирования неизвестного epistemic state для игрушечных битов.

В предыдущих лекциях курса доказывалась важная теорема в квантовой теории информации – теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния. Оказывается, подобная теорема может быть сформулирована в теории той битов Спеккенса.

Рассмотрим той бит “ A ”, находящийся в неизвестном epistemic state $|\ ? \rangle^{(A)}$, и той бит “ B ”, находящийся в известном, с точки зрения экспериментатора, epistemic state $|0\rangle^{(B)}$. Пусть экспериментатор хочет скопировать неизвестное epistemic state $|\ ? \rangle^{(A)}$ в известное epistemic state $|0\rangle^{(B)}$.

Если такая клонирующая машина существует, то она должна работать следующим образом (16.2):

$$|\ ? \rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)} \rightarrow |\ ? \rangle^{(A)} \otimes |\ ? \rangle^{(B)} \quad (16.2)$$

Для осуществления клонирования той бита необходимо провести соответствующие перестановки ontic states. Рассмотрим два случая. В качестве первого неизвестного состояния положим состояние $|1\rangle^{(A)}$, а в качестве второго – $|+\rangle^{(B)}$. Для первого случая, клонирующая (перестановочная) машина должна работать следующим образом (16.3), графически (Рис. 16.7):

$$|1\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)} \rightarrow |1\rangle^{(A)} \otimes |1\rangle^{(B)} \quad (16.3)$$

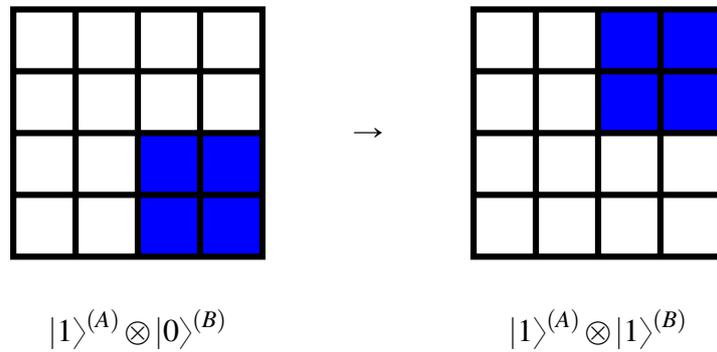


Рис. 16.7. Клонирование той бита по принципу (15.3).

Во втором случае результат работы такой машины должен быть следующим (16.4), графически (Рис. 16.8):

$$|+\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)} \rightarrow |+\rangle^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \quad (16.4)$$

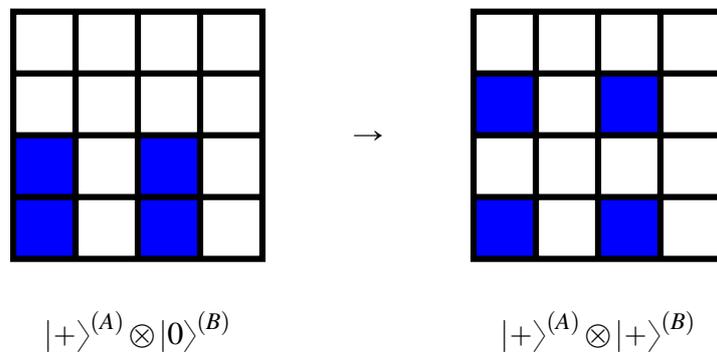


Рис. 16.8. Клонирование той бита по принципу (15.4).

Теперь посчитаем fidelity начального и конечного состояний. Нетрудно видеть, что:

$$fidelity_{initial} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$fidelity_{final} = \frac{1}{4}$$

Но, поскольку такая клонирующая машина должна быть универсальной, то процедура перестановки должна быть одинакова в обоих случаях, и как было показано выше, fidelity при перестановке должна сохраняться. Следовательно, существование универсальной клонирующей перестановки противоречит закону сохранения fidelity.

Измерения в коррелированных системах.

При графическом изображении системы двух той битов, для обозначения осей были выбраны буквы “A” и “B”. Пусть эти буквы соответствуют двум экспериментаторам: “A” – Аленушка, а “B” – Братцеванушка (на манер английских Алисы и Боба).

Рассмотрим снова состояние $|\Phi^+\rangle$ для системы двух той битов (Рис. ??), и пусть такая система находится в ontic state (Рис. 16.10). Пусть один той бит принадлежит Аленушке, а другой – Братцеванушке. Каждый из них может проводить измерения над своим той битом.

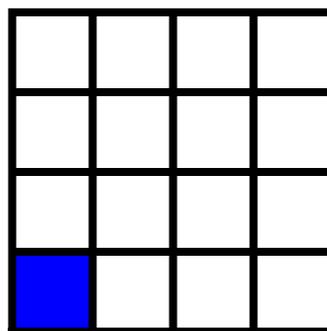
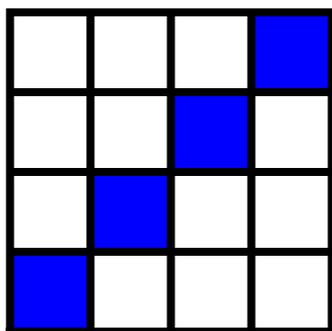


Рис. 16.9. Состояние $|\Phi^+\rangle$ для системы двух той битов. Рис. 16.10. Ontic state двух той битов.

С помощью соответствующего измерения Аленушка может отличить состояние $|0\rangle^{(A)} = 1^{(A)} \vee 2^{(A)}$ от состояния $|1\rangle^{(A)} = 3^{(A)} \vee 4^{(A)}$ для той бита “A”. И проведя такое измерения она узнает, что той бит “A” находится в epistemic state $|0\rangle$.

Но, поскольку система изначально скоррелирована, то обо всей системе из двух той битов она в результате измерения узнала, что ее состояние – $|0\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)}$. То есть она узнала epistemic state не только для своего той бита, но и для той бита Братцаиванушки. Таким образом, Аленушка, проведя измерение для своего той бита, схлопнула epistemic state той бита Братцаиванушки (Рис. 16.11):

$$|\Phi^+\rangle \rightarrow |0\rangle^{(A)} \otimes |0\rangle^{(B)}$$

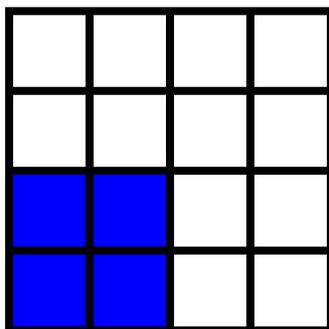


Рис. 16.11. Epistemic state системы двух той битов после измерения Аленушки.

Вспомним, однако, что в результате измерения той бит “А” может из ontic state 1 с вероятностью $1/2$ перейти в состояние 2 (Рис. 16.12), или остаться в начальном ontic state с той же вероятностью. Тем не менее, не зависимо от того, перейдет он или нет, той бит Братцаиванушки “В” останется в прежнем ontic state.

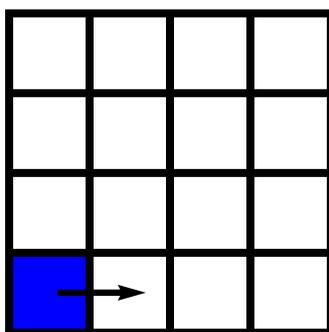


Рис. 16.12. Возможный переход той бита “А” после измерения Аленушки.

Это является проявлением свойства локальности на макроскопическом уровне в теории той битов Спеккенса, или полный аналог теоремы Эберхарда в НКМ. Также в теории той битов можно получить аналог теоремы о квантовой телепортации, но в таком случае нужно будет рассматривать систему из трех той битов по аналогии с системой из трех спинов $1/2$ в НКМ. С этим эффектом можно подробно ознакомиться в оригинальной статье, приведенной в начале лекций, посвященных теории той битов. На этом рассмотрение теории той битов в данных лекциях заканчивается.

Функции Вигнера как пример эпистемологических моделей.

Функции Вигнера являются попыткой создания альтернативы квантовой теории в терминах функций распределения для некоммутирующих величин, а именно совместной функции распределения координаты-импульса. В теории углового момента

также есть функции вращения Вигнера, которые не стоит путать с теми, что будут рассмотрены ниже.

Любая система в квантовой механике может быть описана в терминах матрицы плотности $\hat{\rho}$. Пусть для такой системы необходимо получить распределение по координате (16.5):

$$\begin{aligned}\omega_{\rho}(x) &= \langle x | \hat{\rho} | x \rangle = Tr(\hat{P}_x \hat{\rho}) = \rho(x, x) \\ \hat{x} | x \rangle &= x | x \rangle \\ \hat{P}_x &= | x \rangle \langle x |\end{aligned}\tag{16.5}$$

Аналогичным образом можно получить распределение по импульсу (16.6):

$$\begin{aligned}\omega_{\rho}(p) &= \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = Tr(\hat{P}_p \hat{\rho}) = \rho(p, p) \\ \hat{p} | p \rangle &= p | p \rangle \\ \hat{P}_p &= | p \rangle \langle p |\end{aligned}\tag{16.6}$$

Такие распределения в квантовой механике вычисляются отдельно. А можно ли вычислять их вместе, как это делается в классической механике, где можно определить совместное распределение $W(x, p)$, и чтобы найти нужное распределение нужно проинтегрировать по соответствующей переменной (16.7):

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \int W(x, p) dp \\ \omega(p) &= \int W(x, p) dx\end{aligned}\tag{16.7}$$

Можно ли в квантовой механике построить такое совместное распределение по матрице плотности $W_{\rho}(x, p)$, с помощью которого можно тем же образом (16.7) вычислять распределения? А также, чтобы такое распределение позволяло считать средние (16.8):

$$\langle A \rangle = Tr(\hat{A} \hat{\rho}) = \int dx dp W_{\rho}(x, p) A(x, p),\tag{16.8}$$

где $A(x, p)$ некоторый аналог наблюдаемой, зависящей от координаты-импульса?

Сформулируем вопросы следующим образом:

- 1) Можно ли построить такую функцию $W_{\rho}(x, p)$ для матрицы плотности?
- 2) Можно ли эту функцию трактовать как функцию совместного распределения вероятности по координатам и импульсам.

Ответ на первый вопрос: да, такую функцию можно найти, и она получила название функции Вигнера.

Ответ на второй вопрос: нет, такая трактовка невозможна. Ниже будет показано почему.

Покажем, как можно построить функцию Вигнера для матрицы плотности. Все показанное ниже относится к одномерному случаю.

Введем оператор Вейля (16.9):

$$\hat{W} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} |x - \frac{y}{2}\rangle \langle x + \frac{y}{2}| \quad (16.9)$$

Также введем две переменных U и V (16.10):

$$\begin{aligned} U &= x + \frac{y}{2} \\ V &= x - \frac{y}{2} \end{aligned} \quad (16.10)$$

Тогда функция Вигнера и соответствующая функция оператора наблюдаемой могут быть построены следующим образом (16.11):

$$\begin{aligned} W_\rho(x, p) &= Tr(\hat{\rho}\hat{W}) \\ A(x, p) &= 2\pi\hbar Tr(\hat{A}\hat{W}) \end{aligned} \quad (16.11)$$

Проверим правильность написанных выражений. Рассмотрим функцию Вигнера и подставим в нее оператор Вейля (16.12):

$$\begin{aligned} W_\rho(x, p) &= Tr(\hat{\rho}\hat{W}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \rho\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) \\ \text{где } \rho\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) &\text{ — ядро матрицы плотности:} \\ \langle x|\hat{\rho}|x'\rangle &= \rho(x, x') \end{aligned} \quad (16.12)$$

Чтобы функция Вигнера была совместной вероятностью, она должна нормирована на единицу и удовлетворять через нее должны выражаться распределения координаты и импульса (16.13):

$$\begin{aligned} \int dp dx W_\rho(x, p) &= 1 \\ \omega_\rho(x) &= \int dp W_\rho(x, p) \\ \omega_\rho(p) &= \int dx W_\rho(x, p) \end{aligned} \quad (16.13)$$

Покажем, что это верно. Для доказательства первого выражения воспользуемся нормировкой матрицы плотности на единицу (16.14):

$$1 = \text{Tr } \hat{\rho} = \int dx \langle x | \hat{\rho} | x \rangle \quad (16.14)$$

Здесь мы рассматриваем матрицу плотности для непрерывного спектра по координате, следовательно интегрируем. Далее проведем тождественное преобразование (16.15) введя под интеграл переменную y и δ -функцию таким образом, чтобы вклад по переменной y был нулевым, что гарантировало бы тождественность.

$$\int dx \langle x | \hat{\rho} | x \rangle = \int dx dy \delta(y) \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{y}{2} \rangle \quad (16.15)$$

Теперь подставим интегральное выражение δ -функции (16.16) в (16.15) получаем (16.17):

$$\delta(y) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}py} \quad (16.16)$$

$$\int dx dy \delta(y) \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dx dp \frac{dy}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{y}{2} \rangle \quad (16.17)$$

Вспоминая выражения для ядра матрицы плотности и сопоставляя подынтегральное выражение с видом функции Вигнера (16.12) получаем (16.18):

$$\int dx dp \frac{dy}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dx dp \frac{dy}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}py} \rho \left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2} \right) = \int dx dp W_{\rho}(x, p) = 1 \quad (16.18)$$

Фактически, функция Вигнера – это Фурье-преобразование по одной из переменных для ядра матрицы плотности. Но, если есть Фурье-преобразование, то должно быть и обратное ему, с помощью которого матрицу плотности можно получить из функции Вигнера (16.19)

$$\rho(x, x') = \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')} W_{\rho} \left(\frac{x+x'}{2}, p \right) \quad (16.19)$$

Покажем, что это действительно так, подставив (16.19) в (16.12), получим (16.20):

$$\begin{aligned} W_{\rho}(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \rho \left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy d\tilde{p} e^{-\frac{i}{\hbar}py} e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{p}(x+\frac{y}{2}-x+\frac{y}{2})} W_{\rho} \left(\frac{x+\frac{y}{2}+x-\frac{y}{2}}{2}, \tilde{p} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy d\tilde{p} e^{-\frac{i}{\hbar}py} e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{p}y} W_{\rho}(x, \tilde{p}) \end{aligned} \quad (16.20)$$

Поскольку функция Вигнера от переменной y не зависит, то под интегралом по этой переменной оказываются только экспоненты, которые есть не что иное, как δ -функция от аргумента $(p - \tilde{p})$, в результате получаем (16.21):

$$W_\rho(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy d\tilde{p} e^{-\frac{i}{\hbar}py} e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{p}y} W_\rho(x, \tilde{p}) = \int d\tilde{p} \delta(p - \tilde{p}) W_\rho(x, \tilde{p}) = W_\rho(x, p) \quad (16.21)$$

Таким образом, выражение (16.19) действительно является обратным Фурье-преобразованием для функции Вигнера.

Докажем выражение (16.13) для распределений вероятности. Используя нормировку таких распределений на единицу, несложно показать, что (16.22):

$$\begin{aligned} 1 &= \int dx \omega_\rho(x) = \int dx dp W_\rho(x, p) = 1 \\ 1 &= \int dp \omega_\rho(p) = \int dp dx W_\rho(x, p) = 1 \end{aligned} \quad (16.22)$$

Теперь рассмотрим, как выглядит функция для оператора наблюдаемой \hat{A} . Она строится аналогично функции Вигнера (16.23):

$$\begin{aligned} A(x, p) &= 2\pi\hbar \text{Tr}(\hat{A}\hat{W}) = \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} A\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) \\ A\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) &= \langle x + \frac{y}{2} | \hat{A} | x - \frac{y}{2} \rangle - \text{ядро оператора } \hat{A} \end{aligned} \quad (16.23)$$

Рассмотрим следующую формулу (16.24), выражающую дифференцирование по переменным x и y через переменные U и V :

$$\begin{aligned} U &= x + \frac{y}{2} \\ V &= x - \frac{y}{2} \\ dudv &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{pmatrix} \right| dx dy = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| dx dy = \\ &= \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| dx dy = dx dy \end{aligned} \quad (16.24)$$

Пусть теперь имеется два оператора \hat{A} и \hat{B} , и их соответствующие ядра. С помощью (16.23) (16.24) покажем, как будет выглядеть их след (16.25):

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \int du \langle u | \hat{A}\hat{B} | u \rangle \quad (16.25)$$

Проведем тождественное преобразование, вставив между операторами \hat{A} и \hat{B} единичный в следующем разложении (16.26), и получим (16.27):

$$\hat{1} = \int du |u\rangle\langle u| \quad (16.26)$$

$$Tr(\hat{A}\hat{B}) = \int du \langle u|\hat{A}\hat{1}\hat{B}|u\rangle = \int du dv \langle u|\hat{A}|v\rangle\langle v|\hat{B}|u\rangle \quad (16.27)$$

Теперь перейдем к переменным x и y согласно (16.24), получаем (16.28):

$$Tr(\hat{A}\hat{B}) = \int dx dy \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle\langle x + \frac{y}{2}|\hat{B}|x - \frac{y}{2}\rangle \quad (16.28)$$

Ядро оператора \hat{A} мы определили согласно (16.23), однако, ядро оператора \hat{B} следует определить по-другому. Введем переменную $y' = -y$, и для того, чтобы ввести интегрирование по этой переменной внесем в выражение следующую δ -функцию: $\delta(y - y')$, чтобы преобразование было тождественным. Таким образом получаем (16.29):

$$\int dx dy \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle\langle x + \frac{y}{2}|\hat{B}|x - \frac{y}{2}\rangle = \int dx dy dy' \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle\langle x + \frac{y'}{2}|\hat{B}|x - \frac{y'}{2}\rangle\delta(y + y') \quad (16.29)$$

Представим δ -функцию в интегральной форме (16.30) и подставим в (16.29), получим (16.31).

$$\delta(y - y') = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p(y-y')} \quad (16.30)$$

$$\begin{aligned} & \int dx dy dy' \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle\langle x + \frac{y'}{2}|\hat{B}|x - \frac{y'}{2}\rangle\delta(y + y') = \\ & = \int dx dy dy' dp \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle\langle x + \frac{y'}{2}|\hat{B}|x - \frac{y'}{2}\rangle \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p(y-y')} \end{aligned} \quad (16.31)$$

Перепишем (16.31) в виде (16.32) и сопоставляя полученное с выражением для функции $A(x, y)$ (16.23) (выражение для функции $B(x, y')$, только $y \rightarrow y'$) окончательно получаем (16.33).

$$\begin{aligned} & \int dx dy dy' dp \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle\langle x + \frac{y'}{2}|\hat{B}|x - \frac{y'}{2}\rangle \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p(y-y')} = \\ & = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle \int dy' e^{-\frac{i}{\hbar}py'} \langle x + \frac{y'}{2}|\hat{B}|x - \frac{y'}{2}\rangle \end{aligned} \quad (16.32)$$

$$Tr(\hat{A}\hat{B}) = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} A(x, p)B(x, p) \quad (16.33)$$

Лекция 17. Функция Вигнера (продолжение).

Функции Вигнера как пример эпистемологических моделей (продолжение).

Используя (16.12) и (16.23) с помощью формулы (16.33) запишем выражение для среднего значения любой наблюдаемой (17.1):

$$\langle A \rangle_{\rho} = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} A(x, p) 2\pi\hbar W_{\rho}(x, p) = \int dx dp A(x, p) W_{\rho}(x, p) \quad (17.1)$$

Если интерпретировать $W_{\rho}(x, p)$ как функцию распределения совместной вероятности по координатам и импульсам, то выражение среднего для наблюдаемой A в состоянии ρ (17.1) записывается точно также, как соответствующее выражение для физической величины в классической физике. То есть, $W_{\rho}(x, p)$, согласно данной формуле, формально опять удовлетворяет требованию того, что она может служить совместной вероятностью.

Рассмотрим пример: вычислим $\langle x \rangle_{\rho}$ – среднее значение координаты для частицы, описываемой матрицей плотности ρ . Для начала необходимо для оператора координаты \hat{x} построить функцию $X(x, p)$:

$$\begin{aligned} \hat{x} \rightarrow X(x, p) &= \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{x} | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \left(x - \frac{y}{2} \right) \langle x + \frac{y}{2} | x - \frac{y}{2} \rangle = \\ &= \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \left(x - \frac{y}{2} \right) \delta(y) = e^{-\frac{i}{\hbar}py} \left(x - \frac{y}{2} \right) \Big|_{y=0} = x \end{aligned} \quad (17.2)$$

Здесь мы воспользовались тем, что обкладки оператора \hat{x} являются его собственными векторами:

$$\begin{aligned} \hat{x} | x - \frac{y}{2} \rangle &= \left(x - \frac{y}{2} \right) | x - \frac{y}{2} \rangle \\ \langle x + \frac{y}{2} | x - \frac{y}{2} \rangle &= \delta \left(x + \frac{y}{2} - x + \frac{y}{2} \right) = \delta(y) \end{aligned}$$

В качестве домашнего упражнения читателю предлагается самостоятельно найти функцию $P(x, p)$ для оператора \hat{p} .

Запишем среднее значение координаты в состоянии ρ (17.3), которое представляется фактически в классическом виде:

$$\langle x \rangle_{\rho} = \int dx dp W_{\rho}(x, p) X(x, p) = \int dx dp x W_{\rho}(x, p) \quad (17.3)$$

Теперь вспомним, что любую простейшую квантовомеханическую задачу можно представить с помощью прибора “ P ”, приготавливающего квантовую систему в некотором состоянии с матрицей плотности ρ , ее эволюции “ T ” и измерительного прибора “ M ”, который в результате измерения выдает некоторый результат “ K ” (Рис. 17.1). Простейшим описанием для подобных квантовых систем, с точки зрения операциональных теорий, является описание в терминах условных вероятностей $\omega(K|\hat{\rho})$.

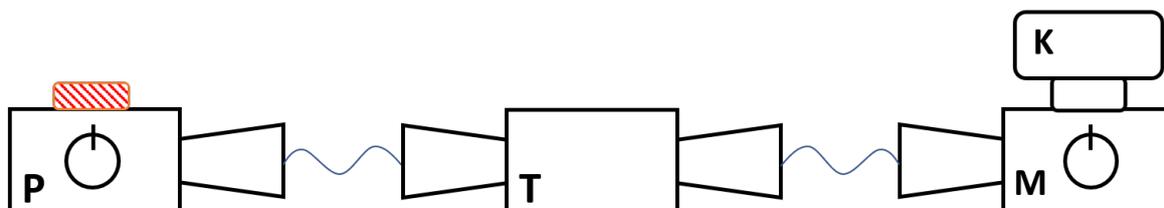


Рис. 17.1. Схематическое представление простейшей квантовомеханической задачи.

Покажем, как строить такие вероятности с помощью функций Вигнера. Для начала сопоставим набор POVM-элементов $\{\hat{E}_k\}$ соответствующему измерительному прибору. Теперь каждому POVM-элементу сопоставим функцию:

$$W_{E_k}(x, p) = 2\pi\hbar \text{Tr}(\hat{E}_k, \hat{W}) = \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{E}_k | x - \frac{y}{2} \rangle \equiv \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \hat{E}_k \left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2} \right) \quad (17.4)$$

Напомним, что в квантовой механике соответствующую условную вероятность, при условии отсутствия эволюции системы (с помощью POVM-операторов сразу проводим измерение приготовленной системы), записывается в виде (17.5) и далее выражается через приведенное выражение (17.4):

$$\omega(K|\rho) = \text{Tr}(\hat{E}_k, \hat{\rho}) = \int dx dp W_\rho(x, p) W_{E_k}(x, p) \quad (17.5)$$

Проверим согласованность полученного выражения с нашими знаниями о POVM-элементах, вероятностях и их нормировках. Во-первых, если W_{E_k} является некоторой вероятностью соответствующего распределения при использовании POVM-элемента E_k , то при использовании всех POVM-элементов (или какого-нибудь полного набора) должно получаться измерение с вероятностью, равной единице (17.6). Покажем это, используя тот факт, что сумма всех POVM-элементов (или их полного набора)

является неортогональным разложением единичного оператора:

$$\begin{aligned} \sum_k W_{E_k}(x, p) &= \sum_k \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{E}_k | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \sum_k \hat{E}_k | x - \frac{y}{2} \rangle = \\ &= \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{1} | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \delta(y) = \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}py} \Big|_{y=0} = 1 \end{aligned} \quad (17.6)$$

Действительно, если применить к системе все измерения, то всегда должен получиться какой-то результат.

Теперь рассмотрим, как это условие (17.6) согласуется с другим условием (17.7), а именно, условием нормировки вероятности.

$$1 = \sum_k \omega(K|\rho) = \int dx dp W_\rho(x, p) \left(\sum_k W_{E_k}(x, p) \right) = \int dx dp W_\rho(x, p) = 1 \quad (17.7)$$

Однако для того, чтобы функция Вигнера являлась аналогом классического совместного распределения вероятности необходимо удовлетворение еще одного требования – совместная вероятность всегда неотрицательна:

$$W_\rho(x, p) \geq 0$$

Покажем на примере, что для функции Вигнера это не так. Рассмотрим гармонический осциллятор (17.8). Запишем его гамильтониан, выражения для собственных векторов и собственных значений, а также волновые функции для основного и первого возбужденного состояний:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2; \quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \Psi_0(x) = \langle x|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\ \Psi_1(x) = \langle x|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma}\sqrt{\pi}} \frac{2x}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (17.8)$$

С помощью этих волновых функций построим функцию Вигнера. Для этого воспользуемся гауссовыми интегралами (17.9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c} \quad (17.9)$$

Перейдем к построению функции Вигнера. Рассмотрим случай основного состояния одномерного гармонического осциллятора, для которого функция матрица плотности представляет собой проектор на это основное состояние (17.10). Тогда функция Вигнера запишется в виде (17.10):

$$\begin{aligned} |0\rangle &\implies \hat{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0| \\ W_0(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho}_0 | x - \frac{y}{2} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \langle x + \frac{y}{2} | 0 \rangle \langle 0 | x - \frac{y}{2} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \Psi_0\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi_0^*\left(x - \frac{y}{2}\right) \end{aligned} \quad (17.10)$$

Используя выражение для волновой функции (17.8) и выражение (17.9), перепишем (17.10) в виде (17.11) проводя попутно некоторые преобразования.

$$\begin{aligned} W_0(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} \Psi_0\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi_0^*\left(x - \frac{y}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma\sqrt{\pi}} \int dy e^{-\frac{i}{\hbar}py} e^{-\frac{(x+\frac{y}{2})^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \int dy e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2} - \frac{i}{\hbar}py} = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma\sqrt{\pi}} 2\sigma\sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{p^2}{\hbar^2} \frac{4\sigma^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 p^2}{\hbar^2}} \end{aligned} \quad (17.11)$$

Выпишем теперь выражение функции Вигнера для первого возбужденного состояния одномерного гармонического осциллятора (17.12). Вывод данного выражения читателю предлагается выполнить самостоятельно в качестве упражнения.

$$W_1(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \left[2 \left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2 p^2}{\hbar^2} \right) - 1 \right] e^{-\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 p^2}{\hbar^2}} \quad (17.12)$$

Обратим теперь внимание на эти (17.11) (17.12) функции Вигнера. Функция Вигнера для основного невозбужденного состояния (17.11) действительно не принимает отрицательных значений, однако функция Вигнера для первого возбужденного состояния (17.12) может принимать отрицательные значения при малых x и p . Но совместная вероятность должна быть неотрицательна, и функция Вигнера не может являться совместным распределением вероятности.

Таким образом, мы вновь убедились в невозможности сведения квантовой механики к классической (или хотя бы классической статистике). Тем не менее, иногда формализм функции Вигнера бывает весьма удобен для некоторых задач.

Уравнение эволюции для функции Вигнера (ур-ние Мойала).

Для получения этого уравнения необходимо воспользоваться уравнением фон Неймана в координатном представлении. Напомним, что это уравнение записывалось для следующего ядра матрицы плотности (17.13):

$$\rho(z, z', t) = \langle z | \hat{\rho}(t) | z' \rangle \quad (17.13)$$

Запишем его в удобном виде для последующего перехода к функции Вигнера (17.14):

$$\begin{aligned} z &\rightarrow x + \frac{y}{2} \\ z' &\rightarrow x - \frac{y}{2} \\ \rho(z, z', t) &= \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho}(t) | x - \frac{y}{2} \rangle \end{aligned} \quad (17.14)$$

Напомним как выглядит само уравнение фон Неймана (17.15):

$$i\hbar \frac{\partial \rho(z, z', t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) + U(z, t) - U(z', t) \right] \rho(z, z', t) \quad (17.15)$$

Далее необходимо подставить это уравнение в функцию Вигнера. Для этого будет удобнее воспользоваться функцией Вигнера в виде обратного преобразования Фурье (16.19). Здесь будет удобно воспользоваться следующим преобразованием (17.16):

$$\begin{cases} z = x + \frac{y}{2} \\ z = x - \frac{y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + z') \\ y = z - z' \end{cases}$$

Перепишем уравнение (16.19), используя новые переменные:

$$\rho(z, z', t) = \int dp e^{i p(z - z')} W_p\left(\frac{z + z'}{2}, p, t\right) \quad (17.16)$$

При последующей подстановке уравнения (17.16) в (17.15) возникнут структуры,

которые будет удобно выписать заранее (17.17-17.20):

$$\begin{aligned} z\rho(z, z', t) &= \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(z-z')} W_\rho\left(\frac{z+z'}{2}, p, t\right) z = \int dp W_\rho(x, p, t) \left(x + \frac{y}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}py} = \\ &= \int dp W_\rho(x, p, t) \left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) e^{\frac{i}{\hbar}py} = \left| \begin{array}{c} \text{ПО} \\ \text{ЧАСТЯМ} \end{array} \right| = \\ &= \int dp e^{\frac{i}{\hbar}py} \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) W_\rho(x, p, t) \end{aligned} \quad (17.17)$$

Аналогично:

$$z'\rho(z, z', t) = \int dp e^{\frac{i}{\hbar}py} \left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) W_\rho(x, p, t) \quad (17.18)$$

Записанные выражения есть не что иное, как Фурье-преобразование. Теперь разберемся с дифференцированием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z, z', t) &= \int dp \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\frac{i}{\hbar}p(z-z')} W_\rho\left(\frac{z+z'}{2}, p, t\right) \right) = \\ &= \int dp e^{\frac{i}{\hbar}py} \left(\frac{i}{\hbar}p + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) W_\rho(x, p, t) \end{aligned} \quad (17.19)$$

Аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial z'} \rho(z, z', t) = \int dp e^{\frac{i}{\hbar}py} \left(-\frac{i}{\hbar}p + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) W_\rho(x, p, t) \quad (17.20)$$

Теперь, используя полученные выражения (17.17-17.20), подставляем (17.16) в (17.15), и выписывая подынтегральное выражение, опуская экспоненту, получаем (17.21):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial W_\rho(x, p, t)}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{ip}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ip}{\hbar} \right)^2 \right) + \right. \\ &\left. + U\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, t\right) - U\left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, t\right) \right] W_\rho(x, p, t) \end{aligned} \quad (17.21)$$

Полученное уравнение можно упростить. Можно показать, что:

$$\begin{aligned} U\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, t\right) - U\left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, t\right) &= i\hbar U\left(x, \frac{\partial}{\partial p}, t\right) \\ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{ip}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ip}{\hbar} \right)^2 &= \left| \frac{a^2 - b^2}{(a-b)(a+b)} \right| = \frac{2ip}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Приводя подобные, окончательно получаем уравнение эволюции для функции Вигнера (уравнение Мойала):

$$\frac{\partial W_{\rho}(x, p, t)}{\partial t} = \left(-\frac{p}{m_0} \frac{\partial}{\partial x} + U(x, \frac{\partial}{\partial p}, t) \right) W_{\rho}(x, p, t) \quad (17.22)$$

В качестве примера, покажем как будет выглядеть это уравнение для свободной частицы. Член $U(x, \frac{\partial}{\partial p}, t)$ равен нулю (поскольку является разностью двух потенциалов, которые равны нулю для свободной частицы), и, следовательно, уравнение эволюции для функции Вигнера для свободной частицы будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial W_{\rho}(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{p}{m_0} \frac{\partial}{\partial x} W_{\rho}(x, p, t) \quad (17.23)$$

В качестве задачи читателю предлагается самостоятельно получить функцию Вигнера для свободной частицы, задав монохроматическое начальное условие, и, далее с помощью нее получить матрицу плотности свободной частицы и сравнить с предыдущим результатом, полученным в рамках данных лекций.

На этом заканчивается рассмотрение функции Вигнера.

Лекция 18. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 1.

Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории.

В предыдущих лекциях были достаточно подробно рассмотрены всевозможные онтологические и эпистемологические модели, которые до какой-то степени были призваны заменить собой квантовую теорию (или по крайней мере делать то же самое). Однако, как было показано, эти модели не могут воспроизвести те или иные особенности квантовой теории.

Подобные неудачи вызывают закономерный вопрос: чем квантовая механика отличается от всех подобных теорий? Возможно есть какая-нибудь характеристика, имеющая одно значение для этих теорий и другое значение для квантовой механики, которая позволит понять может ли одна из таких теорий конкурировать с квантовой механикой или, может, существует что-то за пределами квантовой механики? Да, такая характеристика существует, и дальнейшие рассуждения будут направлены на ее рассмотрение.

Первой частью этих рассуждений станет рассмотрение неравенств Белла, которые напрямую связаны с корреляциями в классической и квантовой теории.

Совместная измеримость и неизмеримость.

Определение. Будем говорить, что две наблюдаемые F и F' **совместно** или **одновременно** (второй термин представляется мне менее удачным) **измеримы**, если на ансамбле одинаково приготовленных систем (классических или квантовых) значения этих величин **принципиально** могут быть найдены с нулевой дисперсией при помощи одного и того же измерительного прибора. То есть если принципиально возможно, что

$$\Delta F = \Delta F' = 0 \quad (18.1)$$

Часто в литературе вместо термина "совместная измеримость" двух наблюдаемых величин используют об "одновременной измеримости". В общем случае это синонимы, однако термин "совместной измеримости" более общий, и кажется более подходящим. В данных лекциях чаще будет использоваться "совместная измеримость".

Теперь необходимо понять насколько принципиальна совместная измеримость для известных нам теорий.

С точки зрения **классической** физики любые наблюдаемые можно полагать совместно измеримыми, поскольку считается, что в классике возмущение физической системы в процессе измерения принципиально можно сделать бесконечно малым. Поэтому измерения значения одной из наблюдаемых никак не влияют на состояния других наблюдаемых классической системы.

Например, в одномерном пространстве имеется ансамбль одинаково приготовленных свободных классических частиц массы m , каждая из которых в начальный момент времени находится в точке $x = 0$ и обладает импульсом p . Тогда по прошествии времени t каждая из частиц этого ансамбля будет находиться в точке $x = \frac{p}{m}t$ с дисперсией $\Delta x = 0$, а измерение импульса частицы в этой точке даст значение p с дисперсией $\Delta p = 0$.

Стоит заметить, что дисперсию в измерение можно изначально внести, например тем, что в реальности невозможно с абсолютной точностью задать начальное положение частицы и т. п. Однако, как было подчеркнуто в данном выше определении, важно, чтобы сама процедура измерения **принципиально** не создавала неопределенности.

В **квантовой физике** ситуация принципиально иная. Пусть имеется ансамбль одинаково приготовленных квантовых систем, который описывается при помощи матрицы плотности $\hat{\rho}$. Наблюдаемой F этого ансамбля сопоставим эрмитов оператор \hat{F} , а наблюдаемой F' — оператор \hat{F}' . Тогда согласно **соотношению неопределенностей Гейзенберга**

$$\Delta F \Delta F' \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{F}, \hat{F}'] \rangle_{\rho} \right| \quad (18.2)$$

где, например, дисперсия $\Delta F = \sqrt{\langle (\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle_{\rho})^2 \rangle_{\rho}}$. Таким образом в квантовой механике наблюдаемые F и F' могут быть принципиально совместно измеримы только тогда, когда их операторы коммутируют. Например, в теории спина s коммутатор

$$[\hat{s}^2, \hat{s}_z] = 0, \quad \text{где } \hat{s}^2 = \sum_j \hat{s}_j^2.$$

Поэтому квадрат спина $s(s+1)$ и его проекция s_z на ось "Z" являются совместно измеримыми величинами.

В то же самое время для любых двух декартовых компонент оператора спина \hat{s} справедливо соотношение

$$[\hat{s}_j \hat{s}_k] = i \varepsilon_{jkl} \hat{s}_l$$

где ϵ_{jkl} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга такой, что $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = +1$. Поэтому, например, проекции спина s_x и s_z на оси "X" и "Z" соответственно с точки зрения квантовой теории принципиально НЕ могут быть совместно измерены.

Еще один пример: координата x и импульс p квантовой частицы. Хорошо известно, что $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Тогда произведение дисперсий координаты и импульса подчиняется соотношению неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

То есть, согласно квантовой механике, координата и импульс квантовой частицы совместно не измеримы. С другой стороны, в пузырьковой камере можно видеть как трек заряженной частицы и то, как этот трек изгибается в магнитном поле (Рис. 18.1). По кривизне трека легко измерить импульс частицы. Однако, произведение ширины трека Δx и разрешения по импульсу Δp для всех реальных пузырьковых камер на много порядков превосходят величину $\frac{\hbar}{2}$.

Тут хотелось бы подчеркнуть, что, как можно видеть, совместная неизмеримость не есть совместная ненаблюдаемость.

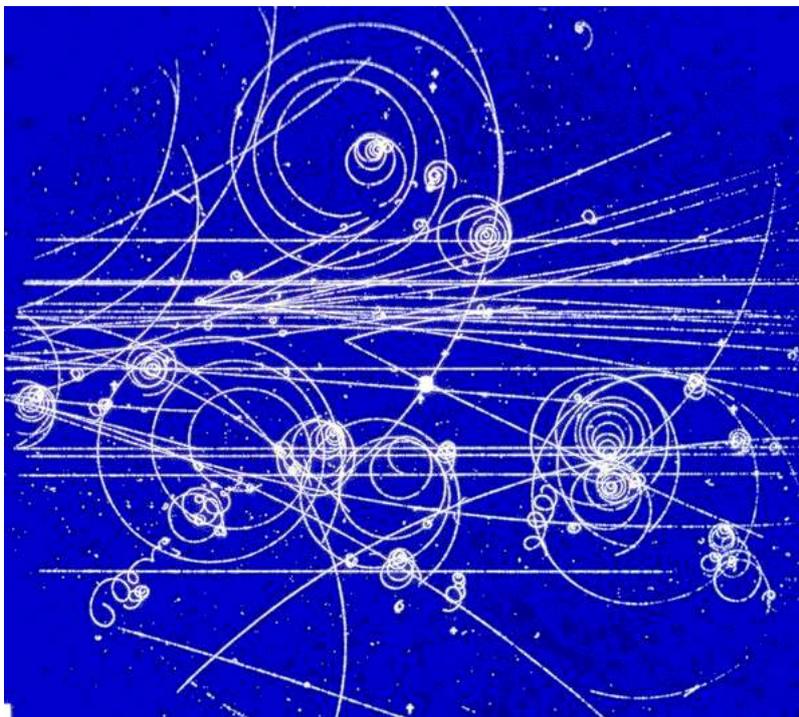


Рис. 18.1. Треки частиц в пузырьковой камере Д.Глейзера, 1952 год.

Совместная измеримость vs. совместное существование.

Чтобы охарактеризовать любую квантовую систему необходимо знать ее вектор состояния $|\psi\rangle$. Выше мы уже задавали вопрос о том, является ли вектор состояния $|\psi\rangle$ (матрица плотности $\hat{\rho}$) реальным отражением состояния квантовой системы, содержащим в себе полный набор свойств данной системы, или это только удобный способ описания степени нашего знания/незнания об истинном состоянии квантовой системы?

Стоит добавить, что "экспериментатор" не оперирует векторами состояния $|\psi\rangle$, он рассматривает наблюдаемые A, B, C, \dots . И чтобы изучить квантовую систему и сравнить результаты эксперимента и предсказания теории он измеряет средние значения этих наблюдаемых $\langle A \rangle_\psi, \langle B \rangle_\psi, \langle C \rangle_\psi, \dots$. То есть, с точки зрения экспериментатора (в отличие от теоретика) свойства квантовой системы это не свойства вектора состояния $|\psi\rangle$, а то, какими наблюдаемыми описывается квантовая система, какие из них совместно измеримы и какие средние значения они принимают.

Теперь к этому вопросу следует добавить еще один: **в какой степени физические свойства квантовой системы определяются процедурой измерения и конструкцией измерительного прибора**, использующегося в эксперименте? Под физическими свойствами изучаемой квантовой системы мы понимаем совокупность свойств наблюдаемых данной системы.

Почему одни физические характеристики (наблюдаемые) могут наблюдаться одновременно, а другие нет? Потому что они не существуют одновременно или все характеристики существуют совместно, но используемые макроскопические приборы не позволяют некоторые из них измерять совместно?

Например, согласно Копенгагенской интерпретации квантовой механике не имеет смысла говорить о свойствах квантовой системы без конкретизации, при помощи какого измерительного прибора эти свойства изучаются. Сторонники данной интерпретации считают, что принципиально доступная информация о физических свойствах квантовой системы ограничивается набором наблюдаемых, которым в квантовой теории соответствуют коммутирующие операторы (**операциональные теории**).

То есть, согласно этой интерпретации не имеет смысла рассуждать ни о каких свойствах квантовой системы (координата, импульс и т. п.) без конкретизации того, при помощи какого измерительного прибора изучаются данные свойства.

Напомним, что математический аппарат квантовой механики, а именно теория представлений, очень хорошо приспособлен под подобную интерпретацию. Действительно, пусть есть квантовая система, описываемая вектором состояния $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (\mathcal{H} – некоторое гильбертово пространство). Этот вектор состояния объективно описы-

вает квантовую систему и не включает себя никакой информации о свойствах наблюдаемых. Далее, пусть в данном гильбертовом пространстве есть базис, которые состоит, например, из собственных векторов оператора координаты:

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

Тогда любой вектор состояния можно разложить по этому базису (например непрерывно):

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle$$

и коэффициенты разложения (в данном случае это волновая функция $\psi(x)$) позволяют говорить о распределении частицы по координате или о средних значениях, например среднее значение квадрата координаты:

$$\langle x^2 \rangle_\psi = \int dx \psi^*(x) x^2 \psi(x)$$

Для рассмотрения распределений другой наблюдаемой нужно будет также получить коэффициенты разложения волновой функции, но в базисе оператора уже этой наблюдаемой.

то есть, действительно, математический аппарат квантовой механики идеально подходит взглядам Копенгагенской интерпретации. Соответственно, максимально возможное знание о квантовой системе, полученное в результате измерения, ограничено свойствами тех наблюдаемых, операторы которых коммутируют и следовательно эти наблюдаемые совместно измеримы.

Статистическая интерпретация допускает, что квантовая система изначально обладает полным набором наблюдаемых, даже если в квантовой теории такому набору соответствуют некоммутирующие операторы (**онтологические модели**).

Согласно этой интерпретации следует рассматривать ансамбль одинаково приготовленных квантовых систем, в которых могут быть какие-то свойства которые могут быть измерены, а какие-то нет. Это приводит к появлению различных статистических распределений, совместной измеримости/неизмеримости. Однако, реально все свойства квантовых систем совместно существуют, но макроскопические приборы **принципиально не могут** извлечь некоторую информацию посредством измерения квантовой системы.

Понятие об элементах физической реальности.

По-видимому, в статье *A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. 47, p. 777 (1935)* (для ознакомления на русском языке советуется замечательный перевод В. А. Фока в журнале "Успехи физических наук 1936 г. с комментариями Фока) впервые был поставлен **вопрос** о том, могут ли наблюдаемые ("характеристики" по А. Эйнштейну) некоторой физической системы, которым в квантовой теории соответствуют некоммутирующие операторы, "на самом деле" существовать совместно (или "**быть одновременно элементами физической реальности**" в терминологии А. Эйнштейна), даже если эти наблюдаемые невозможно совместно измерить ни одним макроскопическим прибором, который был, есть или будет в нашем распоряжении?

Заметим, что этот вопрос является частной формулировкой более **общего вопроса**: можно ли квантовую механику, которая по своей сути является операциональной теорией, заменить некоторой онтологической моделью?

Для дальнейшего обсуждения необходимо четко определить понятие **элемента физической реальности**. Согласно Альберту Эйнштейну с соавтора-ми: "Если мы можем без какого бы то ни было возмущения системы предсказать с вероятностью, равной единице, значение некоторой физической характеристики этой системы, то существует элемент физической реальности, который соответствует такой характеристике" и "каждый элемент физической реальности должен иметь отражение в физической теории".

На первый взгляд может показаться, что определение А. Эйнштейна бесполезно и не вносит ничего нового в понимание квантовой теории. Действительно, если две наблюдаемые совместно измеримы, то не нужно сначала без возмущения квантовой системы пытаться предсказывать значение одной из них, чтобы потом провести измерение другой наблюдаемой, которое уже приведет к редукции состояния квантовой системы.

Если же две наблюдаемые совместно не измеримы, то, на первый взгляд, не существует никакой возможности точно предсказать значение одной из наблюдаемых без изменения состояния изучаемой квантовой системы, а потом точно измерить значение другой наблюдаемой в первоначальном состоянии. Например потому, что такая процедура должна противоречить соотношению неопределенностей Гейзенберга. Однако в этом месте интуиция нас подводит. На самом деле, подобная процедура **возможна**, если использовать **свойства запутанных состояний** и понятие **косвенного измерения**. Выше в параграфе "Нелокальность нерелятивистской квантовой механики на микроскопическом уровне" мы уже использовали косвенные измерения,

хотя и не акцентировали на них внимание.

Вернемся к ранее разобранному примеру, чтобы посмотреть на него под другим углом. Пусть два спина $s^{(A)} = 1/2$ и $s^{(B)} = 1/2$ находятся в состоянии Белла

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^{(A)} \otimes |-\rangle^{(B)} - |-\rangle^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \right) \quad (18.3)$$

Матрица плотности всей системы $\hat{\rho} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$. Пусть теперь в подсистеме B измерено значение спина $s_z^{(B)} = +1/2$. Тогда со-гласно проекционному постулату Дирака – фон Немана матрица плотности подсистемы A будет иметь вид:

$$\hat{\rho}^{(A)} = Tr_B \left(\frac{(\hat{1}^{(A)} \otimes \hat{P}_+^{(B)}) \hat{\rho} (\hat{1}^{(A)} \otimes \hat{P}_+^{(B)})}{Tr \left((\hat{1}^{(A)} \otimes \hat{P}_+^{(B)}) \hat{\rho} \right)} \right) = \hat{P}_-^{(A)} \quad (18.4)$$

где $\hat{P}_\pm^{(\alpha)} = |\pm\rangle^{(\alpha)}\langle\pm|^{(\alpha)}$ – соответствующие проекционные операторы, $\alpha = \{A, B\}$ – индекс подсистем.

Согласно формуле фон Неймана условная вероятность того, что в подсистеме A значение $s_z^{(A)} = -1/2$, если в подсистеме B было измерено значение $s_z^{(B)} = +1/2$, равна:

$$w(-^{(A)}|+^{(B)}) = Tr \left(\hat{P}_-^{(A)} \hat{\rho}^{(A)} \right) = Tr \left(\hat{P}_-^{(A)} \hat{P}_-^{(A)} \right) = Tr \left(\hat{P}_-^{(A)} \right) = 1 \quad (18.5)$$

Таким образом, только по измерению в подсистеме B и НЕ разрушая подсистему A можно с **равной единице вероятностью КОСВЕННО предсказать** значение проекцию спина $s_z^{(A)}$ на ось "z". Таким образом согласно определению . Эйнштейна данную проекцию следует признать элементом физической реальности. Теперь в подсистеме A можно измерить проекцию спина на любую другую ось, не параллельную оси z .

Может показаться, что данный результат опровергает принцип неопределенностей Гейзенберга, но это не так. Вернемся к случаю, который используется при рассмотрении соотношения неопределенностей.

Пусть есть две наблюдаемые F и F' для подсистемы A и соответствующие им некоммутирующие операторы:

$$\begin{aligned} F &\Rightarrow \hat{F} \in \mathcal{H}^{(A)} \\ F' &\Rightarrow \hat{F}' \in \mathcal{H}^{(A)} \\ [\hat{F}, \hat{F}'] &\neq 0 \end{aligned}$$

Однако случай, рассмотренный выше отличается от него. Здесь рассматривались наблюдаемые в различных подсистемах:

$$\begin{aligned} F &\Rightarrow \hat{F} \in \mathcal{H}^{(A)} \\ G &\Rightarrow \hat{G} \in \mathcal{H}^{(B)} \end{aligned}$$

И тогда, зная результат действия оператора \hat{G} в подсистеме B можно косвенно судить о значении наблюдаемой F' . Как можно видеть, структуры данных примеров принципиально различны.

Если теперь рассмотреть полное пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$, то тогда операторы наблюдаемых принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{F} &\Rightarrow \hat{F} \otimes \hat{1}^{(B)} \\ \hat{G} &\Rightarrow \hat{1}^{(A)} \otimes \hat{G} \\ &\stackrel{def}{\Rightarrow} [\hat{F}, \hat{G}] = 0 \\ &\Rightarrow \Delta F \Delta G \geq 0 \end{aligned}$$

Тогда принципиально возможен случай $\Delta F = \Delta G = 0$. А если возможно получить значение наблюдаемой G с дисперсией $\Delta G = 0$, то косвенно возможно получить значение наблюдаемой F' также с дисперсией $\Delta F' = 0$.

Из рассмотренного примера мы видим, что при помощи запутанного состояния и понятия условной вероятности можно придать операционный смысл эйнштейновскому понятию "элемента физической реальности".

Заметим, что проекции спинов подсистем A и B на любые непараллельные направления совместно измеримы, поскольку для соответствующих проекторов

$$\left[\hat{P}_i^{(A)} \otimes \hat{1}^{(B)}, \hat{1}^{(A)} \otimes \hat{P}_j^{(B)} \right] = 0 \quad (18.6)$$

где $\{i, j\} = \{+, -\}$. То есть мы НЕ вступили в противоречие с соотношением неопределенностей Гейзенберга, как это наивно казалось с самого начала.

Лекция 19. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 2.

ВЧШН-неравенства. Историческая справка.

Спор между Копенгагенской и статистической интерпретациями (между Н. Бором и А. Эйнштейном) квантовой механики о совместном существовании/несуществовании наблюдаемых квантовой системы даже в том случае, если соответствующие им операторы не коммутируют в 1930-х годах воспринимался как схоластический. Тогда считалось, что не существует никаких экспериментальных возможностей проверить кто прав. Действительно как возможно при помощи макроскопических приборов измерить совместное существование каких-то наблюдаемых если провести такое измерение по определению невозможно.

Первая удачная попытка перевести вопрос о совместном существовании элементов физической реальности, соответствующих совместно неизмеримым величинам, из области умозрительных рассуждений в экспериментальную плоскость была принята Дж. Беллом в двух работах 1964-ого и 1966-ого годов (*J.S. Bell, "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", Physics 1, p.195 (1964)* и *J.S. Bell, "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. 38, p.447 (1966)*).

В дальнейшем идеи Дж. Белла были развиты Клаузером, Хорном, Шимони и Хольтом в работе *J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden variable theories", Phys. Rev. Lett. 23, p.880 (1969)*. (так называемые **ВЧШН-неравенства**). Обычно именно эти неравенства называют неравенствами Белла, хотя сам Дж. Белл не имел к их выводу прямого отношения.

Ниже мы приведем три различных доказательства ВЧШН-неравенства ("простое"; "сложное", основанное на неотрицательности совместных вероятностей; "исторически первое", использующее гипотезу о скрытых параметрах) и покажем, что ВЧШН-неравенства нарушаются в квантовой механике на любых запутанных состояниях.

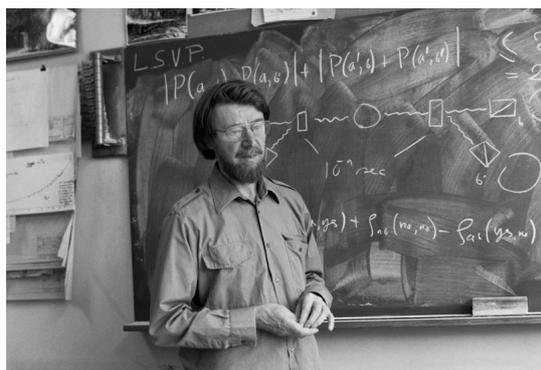


Рис. 19.1. Дж. Белл (1928 – 1990)

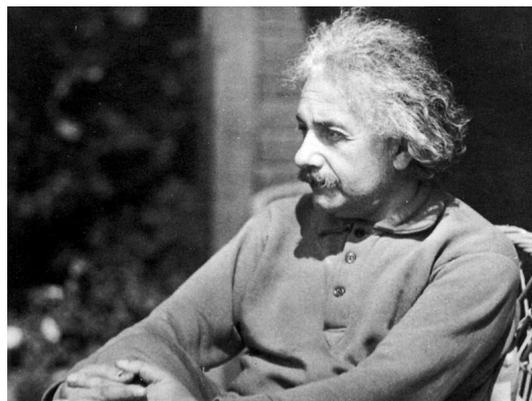


Рис. 19.2. А. Эйнштейн (1879 – 1955)



Рис. 19.3. Б. Подольский (1896 – 1966)

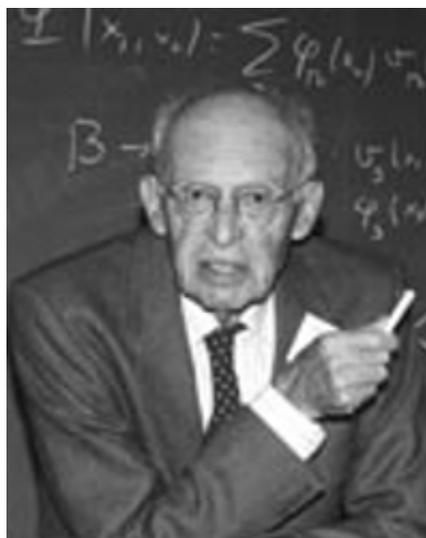


Рис. 19.4. Н. Розен (1909 – 1995)



Рис. 19.5. J.F. Clauser

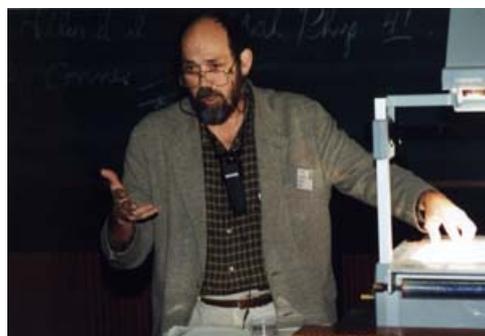


Рис. 19.6. М.А. Horne



Рис. 19.7. A. Shimony



Рис. 19.8. R.A. Holt

ВНСН-неравенства. Основная идея.

Как записать, что некоторая совокупность наблюдаемых одновременно является элементом физической реальности, даже если эта совокупность совместно не может быть зафиксирована никаким измерительным прибором? Хорошая возможность заключается в предположении, что совместная вероятность одно-временного существования рассматриваемой совокупности наблюдаемых неотрицательна.

Далее необходимо найти соотношение, которое:

- 1) может быть получено из предположения о существовании неотрицательных совместных вероятностей и, возможно, некоторых дополнительных условий, накладываемых на процедуру измерения (обычно требуется локальность);
- 2) может быть вычислено в рамках квантовой теории;
- 3) поддается экспериментальной проверке с помощью макроприборов.

Предсказания пунктов 1) и 2) НЕ должны полностью совпадать, чтобы можно было выполнить **критический эксперимент**.

Простой вывод ВНСН-неравенства.

Рассмотрим подсистемы A и B , которые являются составными частями некоторой физической системы. Для подсистемы A определим две наблюдаемые F_A и F'_A , относящиеся только подсистеме A . Для подсистемы B также введем две наблюдаемые G_B и G'_B , которые относятся только подсистеме B .

Дополнительно потребуем, чтобы наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B были дихотомными, то есть, чтобы спектры $\{f_i^{(A)}\}$, $\{f'_j^{(A)}\}$, $\{g_k^{(B)}\}$ и $\{g'_m^{(B)}\}$ каждой из наблюдаемых соответственно принимали всего два значения ± 1 . Очевидно, что дихотомными переменными являются, например, удвоенные проекции спинов электрона на любое направление.

Если все 4 наблюдаемые совместно существуют (одновременно являются элементами физической реальности по А. Эйнштейну), то в этом случае любой набор, состоящий из элементов спектров каждой из четырех наблюдаемых $\{f_i^{(A)}, f'_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g'_m^{(B)}\}$, существует с некоторой неотрицательной вероятностью. Из элементов каждого набора составим суммы вида:

$$S_{ijkm} = (f'_j^{(A)} + f_i^{(A)})g_k^{(B)} + (f'_j^{(A)} - f_i^{(A)})g'_m^{(B)} \quad (19.1)$$

Рассмотрим свойства такой комбинации. Возьмем, к примеру, следующую комбинацию: $\{+1, -1, -1, -1\}$. Подставляя в (19.1), получаем:

$$S = (-1 + 1)(-1) + (-1 - 1)(-1) = 2$$

Для комбинации $\{+1, -1, -1, +1\}$:

$$S = (-1 + 1)(-1) + (-1 - 1)(+1) = -2$$

Для $\{+1, -1, +1, +1\}$:

$$S = (-1 + 1)(+1) + (-1 - 1)(+1) = -2$$

Для $\{+1, +1, +1, +1\}$:

$$S = (+1 + 1)(+1) + (+1 - 1)(+1) = 2$$

Легко проверить, что для любых комбинаций $\{i, j, k, m\} = \{+, -\}$ справедливо равенство:

$$S_{ijkm} = \pm 2$$

Выполним $N \gg 1$ измерений всевозможных комбинаций $\{i, j, k, m\}$. Пусть каждое значение S_{ijkm} встречается в этой выборке $N_{ijkm} \gg 1$ раз. Тогда для среднего значения величины S (ее часто называют суммой Белла) по данной выборке можем записать:

$$|\langle S \rangle| = \left| \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,m} S_{ijkm} N_{ijkm} \right| \leq 2 \quad (19.2)$$

Далее введем коррелятор. Обычно коррелятор определяют так:

$$\langle F_A G_B \rangle = \sum_{i,k} f_i^{(A)} g_k^{(B)} \omega_{ik} \quad (19.3)$$

где $f_i^{(A)}$ и $g_k^{(B)}$ принимают всевозможные значения в рамках их спектров, а $\omega_{i,k}$ – вероятность пар $f_i^{(A)} g_k^{(B)}$.

Теперь, пусть вероятность это отношение числа всех двоек, в которых встречаются пары i и k , к числу всех возможных двоек:

$$\omega_{ik} = \frac{N_{ik}}{N} \quad (19.4)$$

Это частотное определение вероятности. Теперь выразим число двоек N_{ik} как число четверок, в которых встречаются пары i и k , то есть просуммируем по остальным индексам:

$$N_{ik} = \sum_{j,m} N_{ijkm} \quad (19.5)$$

Теперь, подставляя (19.4-19.5) в (19.3), получаем:

$$\langle F_A G_B \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i,k} f_i^{(A)} g_k^{(B)} \sum_{j,m} N_{ijkm} = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,m} f_i^{(A)} g_k^{(B)} N_{ijkm} \quad (19.6)$$

Вернемся к выражению (19.2). Если в него подставить выражение для суммы Белла (19.1), раскрыть скобки и воспользоваться выражением для корреляторов (19.6), то получим:

$$\begin{aligned} |\langle S \rangle| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,m} S_{ijkm} N_{ijkm} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,m} (f_j'^{(A)} g_k^{(B)} + f_i^{(A)} g_k^{(B)} + f_j'^{(A)} g_m'^{(B)} - \right. \\ &\left. - f_i^{(A)} g_m'^{(B)}) N_{ijkm} \right| = |\langle F'_A G_B \rangle + \langle F_A G_B \rangle + \langle F'_A G'_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle| \leq 2 \end{aligned} \quad (19.7)$$

Неравенство (19.7) называется неравенством Белла. Таким образом, если дихотомные наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B совместно существуют, то среднее значение суммы Белла S для любой выборки **НИКОГДА** не превзойдет по модулю двойки (19.7). Это и есть одна из форм **ВЧШН-неравенства**.

Данное предсказание нужно сравнить с тем, что можно получить для величины $|\langle S \rangle|$ в квантовой механике. Если в квантовой механике окажется, что такое выражение (19.7) тоже никогда не превзойдет двойки, то критерий не подходит для выяснения факта одновременного существования/несуществования наблюдаемых.

Однако, если окажется, что в квантовой механике неравенство Белла (19.7) нарушается, и это может быть экспериментально доказано, то тогда окажется возможным сделать вывод о справедливости факта одновременного существования/несуществования наблюдаемых.

Вывод BCHSH-неравенства из условия неотрицательности совместных вероятностей.

Предыдущий вывод BCHSH-неравенства лишь косвенно использовал предположение о неотрицательности совместных вероятностей совокупности наблюдаемых. Теперь покажем, как это предположение может быть использовано явно.

Пусть для всех наборов $\{f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}\}$ четверные совместные вероятности

$$1 \geq \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) \geq 0 \quad (19.8)$$

Элементарно проверить, что любые тройные и двойные совместные вероятности также неотрицательны. Действительно, например

$$\begin{aligned} \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) &= \sum_{m=\pm 1} \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) \geq 0 \\ \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) &= \sum_{j=\pm 1} \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) \geq 0 \end{aligned} \quad (19.9)$$

Помимо этого совместные вероятности подчиняются естественным условиям нормировки:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,m} \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) &= 1 \\ \sum_{i,j,k} \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) &= 1 \quad \text{плюс все остальные тройные} \\ \sum_{i,k} \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) &= 1 \quad \text{плюс все остальные двойные} \end{aligned} \quad (19.10)$$

и условиям соответствия типа:

$$\begin{aligned} \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) &\geq \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) \\ \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) &\geq \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) \end{aligned} \quad (19.11)$$

плюс все аналогичные им.

Поскольку величины $f_i^{(A)}$, $f_j^{(A)}$, $g_k^{(B)}$ и $g_m^{(B)}$ принимают значения только ± 1 , то любое суммирование по индексам может быть записано в явной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega(\dots, x_\alpha, y_\beta, \dots) &= \sum_{\dots l \dots} \omega(\dots, x_\alpha, h_l, y_\beta, \dots) = \\ &= \omega(\dots, x_\alpha, +h_l, y_\beta, \dots) + \omega(\dots, x_\alpha, -h_l, y_\beta, \dots)\end{aligned}\quad (19.12)$$

Теперь можно начать доказательство. Рассмотрим величину

$$\begin{aligned}\Lambda(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) &= \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) - \omega(f_i^{(A)}, g_m^{(B)}) + \\ &+ \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_m^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}) - \omega(g_k^{(B)})\end{aligned}\quad (19.13)$$

Можно заметить, что первая часть (первые четыре слагаемых) этой линейной комбинации очень похожа на корреляторы в сумме Белла (19.7). Проверим, что эта величина удовлетворяет неравенству

$$-1 \leq \Lambda(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) \leq 0 \quad (19.14)$$

1) Начнем с неположительности $\Lambda(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})$. Используя (19.12) имеем

$$\begin{aligned}0 \leq \omega(f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, -g_m^{(B)}) &= \omega(f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) = \\ &= \omega(f_j^{(A)}) - \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}, g_m^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})\end{aligned}\quad (19.15)$$

Далее, используя (19.11) и (19.12), получаем

$$\begin{aligned}\omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) &= \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) + \omega(-f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) \leq \\ &\leq \omega(f_i^{(A)}, g_m^{(B)}) + \omega(-f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) = \omega(f_i^{(A)}, g_m^{(B)}) + \omega(g_k^{(B)}) - \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)})\end{aligned}\quad (19.16)$$

Подставив неравенство (19.16) в (19.15) немедленно получаем утверждение о неположительности $\Lambda(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})$.

2) Теперь докажем, что $\Lambda(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})$ не превосходит величину "-1".

Используя аналогичный подход получаем

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \omega(-f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, -g_m^{(B)}) = \omega(-g_k^{(B)}, -g_m^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, -g_m^{(B)}) = \\
 &= \omega(-g_k^{(B)}) - \omega(-g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, -g_m^{(B)}) = \\
 &= 1 - \omega(g_k^{(B)}) - \omega(g_m^{(B)}) + \omega(g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, -g_m^{(B)}) = \\
 &= 1 - \omega(f_j^{(A)}) - \omega(g_k^{(B)}) - \omega(g_m^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_m^{(B)}) + \\
 &+ \omega(g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) - \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) = 1 - \omega(f_j^{(A)}) - \omega(g_k^{(B)}) + \\
 &+ \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_m^{(B)}) + [\omega(-f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) - \omega(g_m^{(B)})]
 \end{aligned} \tag{19.17}$$

Воспользуемся следующим неравенством (читателю предлагается доказать его его самостоятельно):

$$\omega(-f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)}) - \omega(g_m^{(B)}) \leq \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) - \omega(f_i^{(A)}, g_m^{(B)}) \tag{19.18}$$

Тогда, подставив (19.18) в (19.17) получим:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq 1 - \omega(f_j^{(A)}) - \omega(g_k^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_k^{(B)}) + \omega(f_j^{(A)}, g_m^{(B)}) + \\
 &+ \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) - \omega(f_i^{(A)}, g_m^{(B)}) = 1 + \Lambda(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})
 \end{aligned} \tag{19.19}$$

Таким образом доказана и вторая часть неравенства.

3) На заключительном этапе доказательства распишем подробно, например, выражение для $\langle F_A G_B \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle F_A G_B \rangle &= \sum_{i,k} f_i^{(A)} g_k^{(B)} \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}) = \\
 &= (+1)(+1)\omega(+1, +1) + \\
 &= (+1)(-1)\omega(+1, -1) + \\
 &= (-1)(+1)\omega(-1, +1) + \\
 &= (-1)(-1)\omega(-1, -1) = \\
 &= \omega(+1, +1) + \omega(-1, -1) - \omega(+1, -1) - \omega(-1, +1)
 \end{aligned} \tag{19.20}$$

Аналогично можно расписать $\langle F_A G'_B \rangle$, $\langle F'_A G_B \rangle$ и $\langle F'_A G'_B \rangle$. Тогда простыми алгебраическими преобразованиями находим, что

$$\begin{aligned} \langle F_A G_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle + \langle F'_A G_B \rangle + \langle F'_A G'_B \rangle = \Lambda(+1, +1, +1, +1) + \\ + \Lambda(-1, -1, -1, -1) - \Lambda(+1, -1, +1, -1) - \Lambda(-1, +1, -1, +1) \end{aligned} \quad (19.21)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} -2 \leq \Lambda(+1, +1, +1, +1) + \Lambda(-1, -1, -1, -1) \leq 0 \\ 0 \leq \Lambda(+1, -1, +1, -1) - \Lambda(-1, +1, -1, +1) \leq 2 \end{aligned} \quad (19.22)$$

то

$$|\langle F_A G_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle + \langle F'_A G_B \rangle + \langle F'_A G'_B \rangle| \leq 2 \quad (19.23)$$

Таким образом мы получили BCHSH-неравенство другим способом. Именно, **из условия неотрицательности четверных совместных вероятностей**. Заметим, что при доказательстве неявно было также использовано **условие отсутствия** каких-либо **корреляций** между наблюдаемыми F_A , F'_A , G_B и G'_B .

Впервые такой вывод BCHSH-неравенства был дан в работе *W.M. de Muynck, "The Bell inequalities and their irrelevance to the problem of locality in quantum mechanics", Phys. Lett. 114A, p.65 (1986)*. Более ясный и простой вариант можно найти в статье *А.В. Белинского "Неравенства Белла без предположения о локальности", "Успехи физических наук" т.164, N2, стр.231 (1994)*.

No-signaling Conditions.

Вывод BCHSH-неравенства из условия неотрицательности совместных вероятностей содержит в себе дополнительную тонкость. Именно, все четверные $\omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})$, тройные, двойные и одинарные вероятности на самом деле являются еще более сложными конструкциями: совместными-условными вероятностями вида

$$\omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)} | F_A, F'_A, G_B, G'_B)$$

а любое суммирование устроено следующим образом:

$$\omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)} | F_A, F'_A, G_B) = \sum_{m=\pm} \omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)} | F_A, F'_A, G_B, G'_B) \quad (19.24)$$



Рис. 19.9. Willem M. de Muynck, Рис. 19.10. А.В. Белинский, МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия
Netherlands

То есть при суммировании, например, по всем значениям переменной $g'_m{}^{(B)}$ одновременно исчезает зависимость от G'_B . И так далее. Такие условия являются естественными следствиями локальности и называются **”условиями отсутствия обмена информацией”** (англ. ”No-signaling Conditions”) или **”NS–условиями”**. Напомним, что в квантовой механике эти условия выполнены автоматически (см. параграф ”Локальность нерелятивистской квантовой механики на макроскопическом уровне и теорема Эберхарда”).

Вывод BCHSH-неравенства при помощи концепции локальных скрытых параметров.

Дадим еще один вывод BCHSH–неравенств. В предыдущей секции ”Вывод BCHSH–неравенства из условия неотрицательности совместных вероятностей” мы не задумывались, какой механизм может обеспечивать существование четверных $\omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g'_m{}^{(B)})$, тройных и так далее совместных вероятностей.

Предположим, что скрытые параметры λ **полностью определяют состояние микросистемы** в том смысле, как это было описано в параграфе ”Гипотеза о скрытых параметрах” и обеспечивают существование любых неотрицательных совместных и условных вероятностей. Дополнительно **потребуем локальности**, то есть невозможности в процессе выполнения измерения обмена любой информацией о настройках макроприборов и результатах измерения в каждой из подсистем между подсистемами A и B . Скрытые параметры λ , удовлетворяющие условию локально-

сти, называются **локальными скрытыми параметрами**. Они могут относиться как к каждой из подсистем микросистемы, так к измерительным макроприборам и окружению (**контекстуально зависимые скрытые параметры**).

Тогда можно ввести вероятность измерения конкретного значения $f_i^{(A)}$ наблюдаемой F_A при данном наборе скрытых параметров λ как **условную вероятность** $\omega(f_i^{(A)}|F_A, \lambda)$. В силу требования **локальности**

$$\omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}|F_A, G_B, \lambda) = \omega(f_i^{(A)}|F_A, \lambda) \omega(g_k^{(B)}|G_B, \lambda) \quad (19.25)$$

Если принять **дополнительную гипотезу**, что экспериментаторы обладают **свободой воли**, а потому могут выбирать настройки макроприборов вне зависимости от текущего набора скрытых параметров λ , то

$$\begin{aligned} \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}|F_A, G_B) &= \int d\lambda \omega(\lambda) \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}|F_A, G_B, \lambda) = \\ &= \int d\lambda \omega(\lambda) \omega(f_i^{(A)}|F_A, \lambda) \omega(g_k^{(B)}|G_B, \lambda) \end{aligned} \quad (19.26)$$

где $\omega(\lambda)$ — нормированная функция распределения для скрытых параметров: $1 = \int d\lambda \omega(\lambda)$, которая не зависит от способа измерения, то есть

$$\omega(\lambda) = \omega(\lambda|F_A, G_B) = \omega(\lambda|F_A, G'_B) = \omega(\lambda|F'_A, G_B) = \omega(\lambda|F'_A, G'_B) \quad (19.27)$$

С учетом всего вышесказанного для $\langle F_A G_B \rangle$ можем записать

$$\begin{aligned} \langle F_A G_B \rangle &= \sum_{i,k} f_i^{(A)} g_k^{(B)} \omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}|F_A, G_B) = \\ &= \int d\lambda \omega(\lambda) \left(\sum_i f_i^{(A)} \omega(f_i^{(A)}|F_A, \lambda) \right) \left(\sum_k g_k^{(B)} \omega(g_k^{(B)}|G_B, \lambda) \right) = \\ &= \int d\lambda \omega(\lambda) \langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda \end{aligned} \quad (19.28)$$

Далее при доказательстве мы будем использовать следующий факт: поскольку F_A, F'_A, G_B и G'_B — дихотомные переменные, то

$$\begin{aligned} |\langle F_A \rangle_\lambda| &\leq 1 \\ |\langle F'_A \rangle_\lambda| &\leq 1 \\ |\langle G_B \rangle_\lambda| &\leq 1 \\ |\langle G'_B \rangle_\lambda| &\leq 1 \end{aligned} \quad (19.29)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned} |1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda| &= 1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda \\ |1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda| &= 1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda \end{aligned} \quad (19.30)$$

Наконец при доказательстве нам понадобятся очевидные неравенства: $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ и $0 \leq a \pm b \Leftrightarrow |b| \leq a$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle F_A G_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle| &= \left| \int d\lambda \omega(\lambda) (\langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda - \langle F_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda) \right| = \\ &= \left| \int d\lambda \omega(\lambda) (\langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda \pm \langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \langle F_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda \mp \langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda) \right| = \\ &= \left| \int d\lambda \omega(\lambda) \langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \int d\lambda \omega(\lambda) \langle F_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda) \right| \leq \\ &\leq \left| \int d\lambda \omega(\lambda) \langle F_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda) \right| + \\ &\quad + \left| \int d\lambda \omega(\lambda) \langle F_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda) \right| \leq \\ &\leq \left| \int d\lambda \omega(\lambda) (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda) \right| + \left| \int d\lambda \omega(\lambda) (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda) \right| = \\ &= \int d\lambda \omega(\lambda) (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G'_B \rangle_\lambda) + \int d\lambda \omega(\lambda) (1 \pm \langle F'_A \rangle_\lambda \langle G_B \rangle_\lambda) = \\ &= 1 \pm \langle F'_A G'_B \rangle + 1 \pm \langle F'_A G_B \rangle = 2 \pm (\langle F'_A G'_B \rangle + \langle F'_A G_B \rangle) \end{aligned} \quad (19.31)$$

Отсюда сразу же следует **новое сильное** неравенство

$$|\langle F_A G_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle| + |\langle F'_A G_B \rangle - \langle F'_A G'_B \rangle| \leq 2 \quad (19.32)$$

из которого получается **более слабое** (!) BCHSH-неравенство:

$$|\langle F_A G_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle + \langle F'_A G_B \rangle - \langle F'_A G'_B \rangle| \leq 2 \quad (19.33)$$

Таким образом, если предположить, что скрытые параметры существуют, то экспериментальное нарушение полученного неравенства будет означать, что микромир не может быть описан никакой теорией, совместимой со специальной теорией относительности, но устроенной по образцу классической статфизики, когда вероятности

возникают из-за усреднения по некоторым неизмеряемым в эксперименте параметрам.

Если квантовая механика предсказывает нарушение данных неравенств, то это означает, что случайность в квантовой механике не сводится к усреднению только по локальным контекстуально зависимым скрытым параметрам. Нелокальные скрытые параметры НЕ запрещаются.

Лекция 20. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 3.

Граница Цирельсона.

ВCHSH-неравенство получено в предположении, что наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B совместно существуют (одновременно являются элементами физической реальности по А. Эйнштейну). Естественно задаться **вопросом**: может ли (и если может, то при каких условиях) ВCHSH-неравенство нарушаться в нерелятивистской квантовой механике (НКМ)?

Чтобы ответить на этот вопрос, сопоставим наблюдаемым F_A, F'_A, G_B и G'_B эрмитовы операторы $\hat{F}_A, \hat{F}'_A, \hat{G}_B$ и \hat{G}'_B . Пусть для наблюдаемых, относящихся к одной подсистеме (A или B), эти операторы не коммутируют, то есть

$$\begin{aligned} \hat{F}_A, \hat{F}'_A &\in \mathcal{H}^{(A)} \\ \hat{G}_B, \hat{G}'_B &\in \mathcal{H}^{(B)} \\ [\hat{F}_A, \hat{F}'_A] &\neq 0 \\ [\hat{G}_B, \hat{G}'_B] &\neq 0 \end{aligned} \quad (20.1)$$

Согласно т. Эберхарда (см. параграф "Локальность нерелятивистской квантовой механики на макроскопическом уровне и теорема Эберхарда"), можно написать следующие дополнительные коммутационные условия на операторы $\hat{F}_A, \hat{F}'_A, \hat{G}_B$ и \hat{G}'_B :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)} \\ \hat{F}_A \otimes \hat{1}_B &= \hat{F}_A \in \mathcal{H} \\ \hat{F}'_A \otimes \hat{1}_B &= \hat{F}'_A \in \mathcal{H} \\ \hat{1}_A \otimes \hat{G}_B &= \hat{G}_B \in \mathcal{H} \\ \hat{1}_A \otimes \hat{G}'_B &= \hat{G}'_B \in \mathcal{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\hat{F}_A, \hat{G}_B] = [\hat{F}_A, \hat{G}'_B] = [\hat{F}'_A, \hat{G}_B] = [\hat{F}'_A, \hat{G}'_B] = 0 \quad (20.2)$$

Данные условия играют роль NS-условий в НКМ.

Тогда, согласно Копенгагенской интерпретации квантовой механики, имеет смысл говорить, например, об одновременной измеримости (совместном существовании) (20.2) наблюдаемых F_A и G_B , но нельзя говорить об одновременной измеримости (совместном существовании) (20.1) наблюдаемых F_A и F'_A .

Поскольку наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B отвечают дихотомным величинам, то можно получить дополнительное условие (20.3) на их операторы. Рассмотрим, например, дихотомный оператор \hat{F} , его собственные векторы и собственные значения:

$$\hat{F}|\pm\rangle = \pm 1|\pm\rangle$$

Тогда, для квадрата оператора \hat{F} легко показать:

$$\hat{F}^2|\pm\rangle = \pm 1\hat{F}|\pm\rangle = (\pm 1)^2|\pm\rangle = |\pm\rangle$$

Теперь, поскольку дихотомный оператор \hat{F} – эрмитов, и действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_2 размерности $\dim(\mathcal{H}_2) = 2$, то его собственные векторы можно рассматривать в качестве базиса в пространстве \mathcal{H} . Тогда любой вектор состояния в пространстве \mathcal{H} может быть разложен по собственным векторам оператора \hat{F} :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \in \mathcal{H}_2 : |\psi\rangle &= C_+|+\rangle + C_-|-\rangle \\ \langle\psi|\psi\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Согласно полученному выше выражению для \hat{F}^2 для любого $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ справедливо

$$\hat{F}^2|\psi\rangle = C_+\hat{F}^2|+\rangle + C_-\hat{F}^2|-\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle = |\psi\rangle$$

Но таким свойством обладает только единичный оператор, следовательно квадрат дихотомного оператора есть единичный оператор. Таким образом получаем дополнительное условие для операторов наблюдаемых F_A , F'_A , G_B и G'_B :

$$\hat{F}_A^2 = \hat{F}'_A{}^2 = \hat{G}_B^2 = \hat{G}'_B{}^2 = \hat{1} \quad (20.3)$$

Определим следующий оператор (**оператор Белла**):

$$\hat{S} = \hat{F}_A\hat{G}_B - \hat{F}'_A\hat{G}'_B + \hat{F}'_A\hat{G}_B + \hat{F}_A\hat{G}'_B \quad (20.4)$$

Тогда, учитывая (20.2) можно записать:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})\hat{1} - \hat{S} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{F}_A^2 + \hat{F}'_A{}^2 + \hat{G}_B^2 + \hat{G}'_B{}^2) - \hat{S} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{F}'_A{}^2 - \frac{\hat{G}_B^2 + \hat{G}'_B{}^2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{F}_A^2 - \frac{\hat{G}_B^2 - \hat{G}'_B{}^2}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned} \quad (20.5)$$

Рассмотрим первую скобку в правой части (20.5). Обозначим ее как оператор \hat{O} . Этот оператор эрмитов, поскольку является суммой трех эрмитовых операторов:

$$\hat{O} = \frac{\hat{F}'_A{}^2 - \hat{G}'_B{}^2 + \hat{G}'_B{}^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}^\dagger \Rightarrow \hat{O}^2 = \hat{O}^\dagger \hat{O}$$

Теперь усредним \hat{O}^2 по произвольному чистому состоянию $|\psi\rangle$:

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O}^\dagger \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2 \geq 0$$

Аналогично для второй скобки в правой части (20.5). Таким образом, усредняя выражение (20.5), получаем неотрицательную величину.

Усредняем это равенство по состоянию ρ произвольной микросистемы. Правая часть равенства неотрицательна (читателю предлагается доказать самостоятельно). Поэтому

$$0 \leq 2\sqrt{2}\langle \hat{1} \rangle_\rho - \langle \hat{S} \rangle_\rho = 2\sqrt{2} - \langle \hat{S} \rangle_\rho \quad (20.6)$$

Таким образом

$$\langle \hat{S} \rangle_\rho \leq 2\sqrt{2} \quad (20.7)$$

Полностью аналогично можно показать, что

$$\langle \hat{S} \rangle_\rho \geq -2\sqrt{2} \quad (20.8)$$

Объединяя оба неравенства в одно при помощи модуля

$$|\langle \hat{S} \rangle_\rho| \leq 2\sqrt{2} \quad (20.9)$$

приходим к выражению для так называемой **границы Цирельсона** квантовых корреляций (B.S. Cirel'son, "Quantum generalizations of Bell's inequality", "Letters in Mathematical Physics", Vol.4, p.93 (1980)). Перепишем последнее неравенство в терминах средних для наблюдаемых F_A , F'_A , G_B и G'_B согласно (20.4):

$$\left| \langle \hat{F}_A \hat{G}_B \rangle_\rho - \langle \hat{F}_A \hat{G}'_B \rangle_\rho + \langle \hat{F}'_A \hat{G}_B \rangle_\rho + \langle \hat{F}'_A \hat{G}'_B \rangle_\rho \right| \leq 2\sqrt{2} \quad (20.10)$$

Этот результат надо сравнить с BCHSH-неравенством (19.23). Из сравнения обоих неравенств видно, что в квантовой теории BCHSH-неравенство принципиально может нарушаться. Таким образом (при определенных предположениях) открывается возможность экспериментальной проверки, являются ли наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B одновременно элементами физической реальности (т.е. совместно существуют),

или это не имеет места, как утверждает НКМ. Более аккуратно: нарушение BCHSH-неравенства может подтвердить правоту квантовой теории. Выполнение неравенства НЕ противоречит квантовой теории.

Остается важный вопрос: существуют ли такие квантовые состояния $|\Psi\rangle$ или $\hat{\rho}$ и наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B , на которых в реальных экспериментах можно достичь границы Цирельсона?

Запутанные состояния вступают в игру.

Ответ на вопрос из предыдущего параграфа: для достижения границы Цирельсона в квантовой механике можно использовать состояние Белла

$$\begin{aligned} |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^{(A)} \otimes |-\rangle^{(B)} - |-\rangle^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(A)} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(B)} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(A)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(B)} \right) \end{aligned} \quad (20.11)$$

Рассмотрим мысленный эксперимент, в котором подсистема А отвечает фермиону, распространяющемуся вдоль оси "у", подсистема В — фермиону, который движется против направления оси "у". Наблюдаемые F_A и F'_A соответствуют удвоенным проекциям спина фермиона А на направления \vec{a} и \vec{a}' . Наблюдаемые G_B и G'_B — удвоенным проекциям спина фермиона В на направления \vec{b} и \vec{b}' соответственно. Пусть все четыре направления непараллельны друг другу. Их удобно выбрать лежащими в плоскостях, которые параллельны плоскости (x, z) , как это показано на рисунке (Рис. 20.1).

Рассмотрим направление \vec{a} , которое задается единичным вектором $\vec{a} = (\sin\theta_a, 0, \cos\theta_a)$. Тогда оператор \hat{F}_A можно записать как

$$\hat{F}_A = \left(\vec{a} \vec{\sigma}^{(A)} \right) = \sigma_x^{(A)} \sin\theta_a + \sigma_z^{(A)} \cos\theta_a \quad (20.12)$$

где $\sigma_i^{(A)}$ — матрицы Паули. Абсолютно аналогичные формулы имеют место для операторов \hat{F}'_A, \hat{G}_B и \hat{G}'_B .

Теперь вычислим корреляторы входящие в состав формулы (20.10). Прежде всего выпишем ненулевые матричные элементы матриц Паули σ_x :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x |x\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle \\ \sigma_x |-\rangle &= \dots = |+\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \langle - | \sigma_x | + \rangle &= 1 \\ \langle + | \sigma_x | - \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (20.13)$$

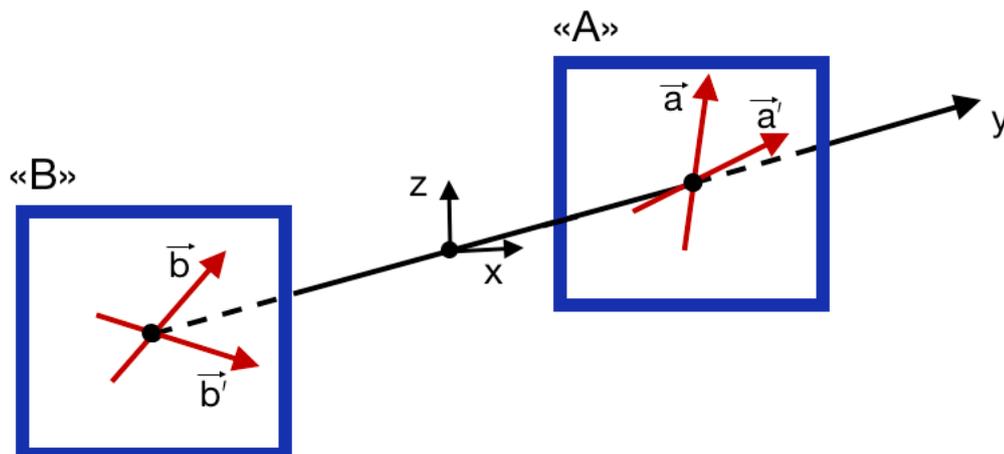


Рис. 20.1. Схематическое изображение мысленного эксперимента.

Аналогично можно получить соответствующие выражения для σ_z :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \langle +|\sigma_x|+ \rangle &= 1 \\ \langle -|\sigma_x|- \rangle &= -1 \end{aligned} \quad (20.14)$$

Остальные матричные элементы для σ_z равны нулю. Теперь вычислим один из корреляторов по состоянию $|\Psi^-\rangle$ (20.11) следуя правилам прямого произведения и используя (20.12-20.14):

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_A \hat{G}_B \rangle_{\Psi^-} &= \langle \Psi^- | (\hat{F}_A \otimes \hat{G}_B) | \Psi^- \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle +|\hat{F}_A|+ \rangle^{(A)} \langle -|\hat{G}_B|- \rangle^{(B)} - \right. \\ &- \langle +|\hat{F}_A|- \rangle^{(A)} \langle -|\hat{G}_B|+ \rangle^{(B)} - \langle -|\hat{F}_A|+ \rangle^{(A)} \langle +|\hat{G}_B|- \rangle^{(B)} + \\ &+ \left. \langle -|\hat{F}_A|- \rangle^{(A)} \langle +|\hat{G}_B|+ \rangle^{(B)} \right] = \frac{1}{2} [\cos\theta_a (-1) \cos\theta_b - \sin\theta_a \sin\theta_b - \\ &- \sin\theta_a \sin\theta_b + (-\cos\theta_a) \cos\theta_b] = (\cos\theta_a \cos\theta_b - \sin\theta_a \sin\theta_b) = -\cos\theta_{ab} \end{aligned} \quad (20.15)$$

где $\cos\theta_{ab} = \cos(\theta_a - \theta_b)$

Вычисление оставшихся средних, входящих в BCHSH-неравенство (19.23), производится аналогично (читателю предлагается сделать это самостоятельно). В итоге

получаем среднее значение оператора Белла по состоянию $|\Psi^-\rangle$

$$|\langle S \rangle_{\Psi^-}| = |\cos\theta_{ab} - \cos\theta_{ab'} + \cos\theta_{a'b} + \cos\theta_{a'b'}| \quad (20.16)$$

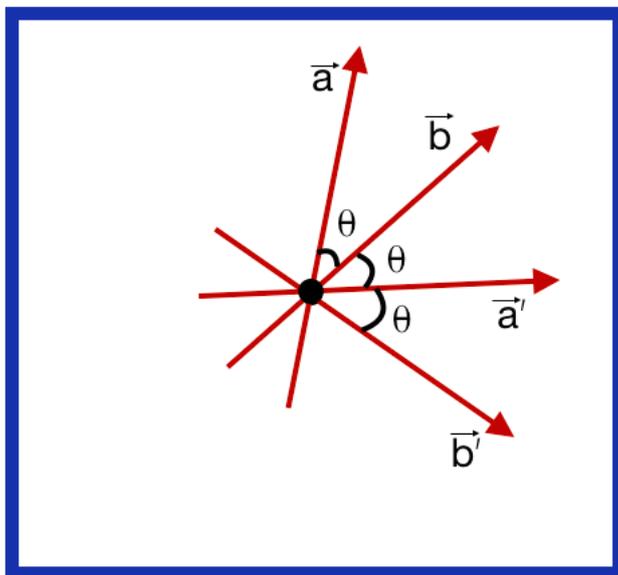


Рис. 20.2. Выбор углов для состояния $|\Psi^-\rangle$.

Максимум $|\langle S \rangle_{\Psi^-}|$ достигается для углов $\theta_{ab} = \theta_{ba'} = \theta_{a'b} = \theta = \pi/4$ и $\theta_{ab'} = 3\theta = 3\pi/4$ (находится при помощи метода множителей Лагранжа; будет разобран в одном из примеров ниже). В этом случае

$$|\langle S \rangle_{\Psi^-}| = \left| 3\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} \right| = \left| 4\cos\frac{\pi}{4} \right| = 2\sqrt{2} \quad (20.17)$$

попадает на границу Цирельсона и нарушает BCHSH-неравенство.

График функции

$$S(\theta) = 3\cos\theta - \cos3\theta \quad (20.18)$$

приведен на рисунке (Рис. 20.3). По оси абсцисс отложен угол θ в градусах. BCHSH-неравенство нарушается при углах θ , когда функция $S(\theta)$ больше +2 или меньше -2.

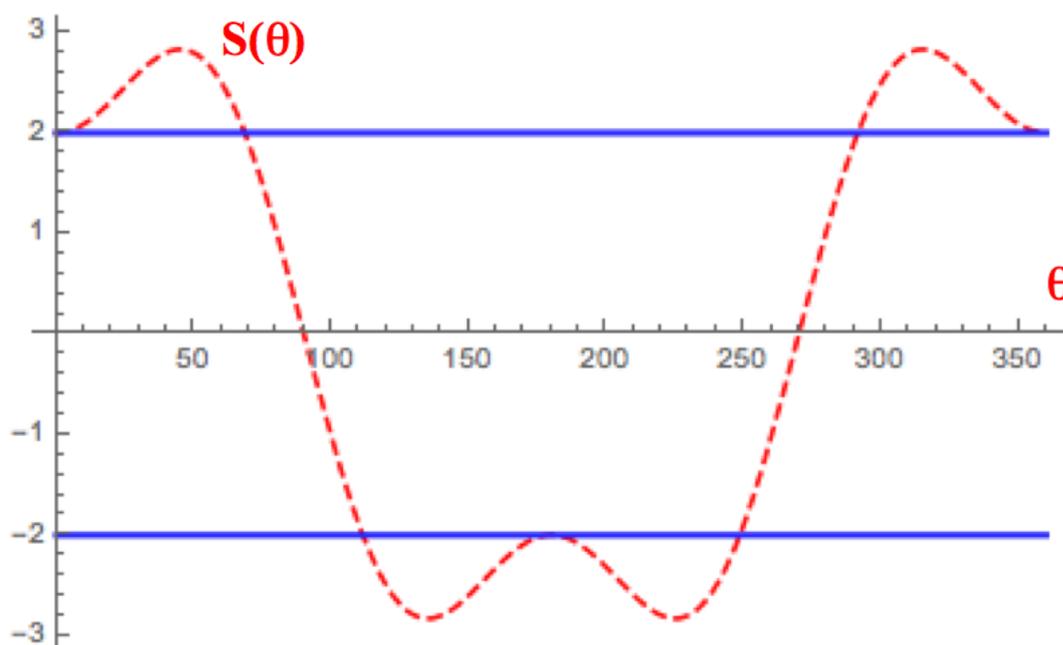


Рис. 20.3. График функции $S(\theta)$ (20.18).

Запутанные состояния продолжают игру.

Вопрос: что будет, если единичные векторы \vec{a} , \vec{a}' , \vec{b} и \vec{b}' имеют произвольные направления в пространстве, а запутанное по спину состояние микросистемы описывается некоторой матрицей плотности $\hat{\rho}$? Можно ли в этом случае попытаться превзойти границу Цирельсона?

Ответ: нет, этого сделать нельзя. Для доказательства рассмотрим оператор Белла вида:

$$\hat{S} = (\vec{a}\vec{\sigma}^{(A)}) (\vec{b}\vec{\sigma}^{(B)}) - (\vec{a}\vec{\sigma}^{(A)}) (\vec{b}'\vec{\sigma}^{(B)}) + (\vec{a}'\vec{\sigma}^{(A)}) (\vec{b}\vec{\sigma}^{(B)}) - (\vec{a}'\vec{\sigma}^{(A)}) (\vec{b}'\vec{\sigma}^{(B)}) \quad (20.19)$$

Идейно простые, но достаточно громоздкие алгебраические вычисления дают, что

$$\hat{S}^2 = 4 \left[\hat{1} + (\vec{n}_a \vec{\sigma}^{(A)}) (\vec{n}_b \vec{\sigma}^{(B)}) \right] \quad (20.20)$$

где $\vec{n}_a = [\vec{a} \times \vec{a}']$ и $\vec{n}_b = [\vec{b}' \times \vec{b}]$ – единичные вектора, построенные из векторных произведений (обратите внимание, как расставлены штрихи!).

Примем во внимание, что $\langle \hat{1} \rangle_{\rho} = Tr \hat{\rho} = 1$ и $\langle (\vec{n} \vec{\sigma}) \rangle_{\rho} \leq 1$. Тогда

$$\langle S^2 \rangle_{\rho} \leq 4(1 + 1) = 8 \quad (20.21)$$

Поскольку квадрат дисперсии любого эрмитового оператора неотрицателен, то

$$\langle S \rangle_\rho^2 \leq \langle S^2 \rangle_\rho \quad (20.22)$$

откуда опять следует известная граница Цирельсона

$$|\langle S \rangle_\rho| \leq 2\sqrt{2} \quad (20.23)$$

В этом нет ничего удивительного, поскольку мы, фактически, повторили доказательство из параграфа "Граница Цирельсона" на частном примере системы двух спинов $s = 1/2$.

Самостоятельно докажите, что равенство достигается только при условиях, которые были рассмотрены в параграфе "Запутанные состояния вступают в игру".

Локальный реализм и BCHSH-неравенства.

Большинство исследователей считает, что BCHSH-неравенства можно получить в предположениях "Локального реализма" (по-английски "Local Realism" или сокращенно "LR"). Сформулируем, что физики понимают под "Локальным реализмом":

- 1) **Классический реализм** (сокращенно "CR"): совокупность физических характеристик микросистемы существует совместно и независимо от наблюдателя, даже если наблюдатель не может измерить эти характеристики никаким классическим измерительным прибором (см. параграф "Неравенства Белла. Основная идея").
- 2) **Локальность**: если два измерения выполнены в точках 4-мерного пространства-времени и разделены между собой пространственноподобным интервалом, то показания одного классического измерительного прибора, находящегося в первой точке, никак не влияют на показания другого классического измерительного прибора, находящегося во второй точке (поскольку скорость обмена информацией не может превышать скорость света).
- 3) **Свобода воли** (или в английском варианте "Freedom of choice"): экспериментатор совершенно свободно может выбрать любые параметры эксперимента из набора доступных параметров.

Поскольку считается, что при выводе BCHSH-неравенств используется исключительно предположения LR, то часто можно встретить утверждение, что нарушение BCHSH-неравенств экспериментально доказывает НЕвозможность CR на микроуровне. Покажем, что это не совсем корректный вывод.

Вспомним, что согласно теореме Эберхарда даже для нерелятивистской квантовой механики выполняется условие локальности или то, что мы в лекциях называем "локальностью на макроуровне" (см. параграф "Локальность нерелятивистской квантовой механики на макроскопическом уровне и теорема Эберхарда"). Теорема Эберхарда использовалась нами при вычислении границы Цирельсона (см. параграф "Граница Цирельсона"). Эта граница превосходит верхнюю границу для BCHSH-неравенства. Поэтому на макроуровне нарушение BCHSH-неравенства не должно быть связано с нелокальностью.

В англоязычной литературе чтобы подчеркнуть, что условие локальности из определения LR и классической физики (которое не имеет отношения к квантовой теории!) и теорема Эберхарда из нерелятивистской квантовой механики (которая, в свою очередь, не имеет отношения к классике!) отражают одно и то же универсальное свойство окружающего мира. Напомним, что это свойство называют NS-условием (см. параграф "No-signaling conditions").

Однако при выводе BCHSH-неравенства фактически использовалось другое условие локальности: отсутствие нелокальности на МИКРОскопическом уровне между любыми наборами элементов спектров четырех рассматриваемых наблюдаемых. Именно это допущение позволило корректно определить вероятностную меру и рассматривать совместные вероятности, отвечающие условию CR, суммировать вероятности и пользоваться условиями нормировки для вероятностей. Но, как уже обсуждалось ранее, условие локальности на микроуровне в НКМ нарушается по построению самой теории!

Действительно, **во-первых**, белловское состояние $|\Psi^-\rangle$ дает абсолютную (анти)корреляцию по проекциям спинов фермионов A и B на любое направление. Поэтому данные проекции и соответствующие им элементы спектров рассматриваемых наблюдаемых независимыми потенциально считать нельзя.

Во-вторых, вероятности некоторых совместных распределений, вычисленные в НКМ по состоянию $|\Psi^-\rangle$ оказываются отрицательными при углах, которые обеспечивают максимальное нарушение BCHSH-неравенства. Например

$$\omega(f_+^{(A)}, f_-^{(B)}, g_-^{(B)}) = \langle \Psi^- | \hat{P}_a^{(+)} \hat{P}_a^{(-)} \hat{P}_b^{(-)} | \Psi^- \rangle = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{2}) \leq 0 \quad (20.24)$$

где $\hat{P}_n^{(\pm)}$ – проекторы на состояния с проекцией спина $\pm 1/2$ на направление \vec{n} . Этот результат и аналогичные ему косвенно задают нелокальные ограничения для наборов значений спектров наблюдаемых F_A, F'_A, G_B и G'_B . Вычисление этой вероятности (20.24) будет дано ниже.

То есть, при наличии запутанности нелокальность НКМ на микроуровне необ-

ходимо рассматривать как **главную причину нарушения ВСНСН-неравенств**, поскольку эти неравенства были выведены в предположении условия локальности, неявно распространенном на микроуровень.

Нарушение ВСНСН-неравенств за счет нелокальности на микроуровне **может конкурировать** с нарушением ВСНСН-неравенств за счет невозможности совместного существования различных физических характеристик микросистемы (условие **CR**).

Так о чем же тогда говорит нам нарушение ВСНСН-неравенств в НКМ? О том, что можно выбирать из трех альтернатив:

- 1) хотя наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B совместно существуют и выполняется **CR**, но на микроуровне присутствуют нелокальные взаимодействия между этими наблюдаемыми, которые нарушают ВСНСН-неравенства;
- 2) наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B совместно НЕ существуют, то есть НЕ выполняется **CR**; в дополнение к этому на микроуровне имеют место нелокальные взаимодействия между наблюдаемыми; то есть оба условия **LR** ведут к нарушению ВСНСН-неравенства;
- 3) наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B совместно НЕ существуют (нарушается условие **CR**), однако нелокальные взаимодействия между наблюдаемыми **ОТСУТСТВУЮТ**. Тогда только первое условие **LR** нарушает ВСНСН-неравенство.

Чтобы делать уверенные суждения только о возможности выполнения/нарушения условия **CR**, **следует исключить нелокальность на микроуровне**. Возможно от нелокальности можно избавиться перейдя к квантовой теории поля (КТП), которая локальна на микроуровне по построению (например, из-за принципа микропричинности Н.Н.Боголюбова).

То есть, если попытаться вычислить соответствующие неравенства Белла в рамках КТП и проверить их экспериментально, то их нарушение будет говорить, что несправедлив только классический реализм на микроуровне.

Несмотря на достаточно очевидную формулировку данной задачи она до сих пор окончательно не решена в силу определенных трудностей при построении запутанных квантовых систем в КТП и проведении вычислений с этими запутанными релятивистскими квантовыми системами.

Еще интересно задать вопрос: за счет чего математически нарушаются неравенства Белла? почему при их выводе получалась граница равная 2, а квантовая механика дает $2\sqrt{2}$? на каком этапе добавляются лишние слагаемые?

Оказывается, что при вычислении неравенств Белла (19.33) четверная вероятность $\omega(f_i^{(A)}, f_j^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m^{(B)})$ по определению считалась неотрицательной, также как тройная и двойная. Но с точки зрения квантовой механики далеко не все совместные вероятности имеют смысл и могут быть вычислены. Потому что если, например, две наблюдаемые совместно неизмеримы, то с точки зрения квантовой механики совместная вероятность двух каких-то их значений теряет смысл.

Квантовая же механика говорит, что те совместные вероятности, которые не существуют, будут не положительными, а отрицательными (??).



Лекция 21. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 4.

Вычисление вероятности $w(f+, f'-, g'-)$.

В предыдущем параграфе было упомянуто, что совместная вероятность $\omega(f_+^{(A)}, f_-'^{(B)}, g_-'^{(B)}) < 0$. Ввиду важности этого утверждения, дадим необходимые указания к его получению.

Если вектор \vec{a} (Рис. 20.2) совпадает с осью z , то при максимальном нарушении BCHSH-неравенств в эксперименте из параграфа "Запутанные состояния вступают в игру" углы $\theta_a/2 = 0$, $\theta_b/2 = \pi/8$, $\theta_{a'}/2 = \pi/4$ и $\theta_{b'}/2 = 3\pi/8$. Кроме того $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_{a'} = \varphi_{b'} = 0$. При помощи формул из параграфа "Явный вид матриц плотности спина $s = 1/2$ для его проекций $\pm 1/2$ на произвольную ось" можем записать

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\vec{a}}^{(+)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_{\vec{a}'}^{(-)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_{\vec{b}'}^{(-)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (21.1)$$

Вычислим прямое произведение проекторов и вектора состояния $|\Psi^-\rangle$. Поскольку подсистема "A" принадлежит двумерному гильбертовому пространству \mathcal{H}_A , а подсистема "B" — двумерному гильбертовому пространству \mathcal{H}_B , то вся система находится в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

$$\langle \Psi^- | \hat{P}_{\vec{a}}^{(+)} \hat{P}_{\vec{a}'}^{(-)} \hat{P}_{\vec{b}'}^{(-)} | \Psi^- \rangle = \langle \Psi^- | \hat{P}^{(A)} \otimes \hat{P}_{\vec{b}'}^{(-)} | \Psi^- \rangle \quad (21.2)$$

где

$$\hat{P}^{(A)} = \hat{P}_{\vec{a}}^{(+)} \hat{P}_{\vec{a}'}^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21.3)$$

Посчитаем соответствующие матричные элементы, которые получатся при под-

становке (21.3) в (21.2):

$$\begin{aligned}\langle +|\hat{P}^{(A)}|+\rangle &= \frac{1}{2}(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \\ \langle +|\hat{P}^{(A)}|-\rangle &= \frac{1}{2}(1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \\ \langle +|\hat{P}^{(A)}|\pm\rangle &= 0\end{aligned}\tag{21.4}$$

Аналогично вычисляются матричные элементы для проектора подсистемы "B".
Теперь вычисляем матричный элемент (21.2):

$$\begin{aligned}\langle \Psi^-|\hat{P}^{(A)} \otimes \hat{P}_{b'}^{(-)}|\Psi^- \rangle &= \frac{1}{2} \left[\langle +|\hat{P}^{(A)}|+\rangle \langle -|\hat{P}_{b'}^{(-)}|-\rangle - \right. \\ &- \langle +|\hat{P}^{(A)}|-\rangle \langle -|\hat{P}_{b'}^{(-)}|+\rangle - \langle -|\hat{P}^{(A)}|+\rangle \langle +|\hat{P}_{b'}^{(-)}|-\rangle + \\ &+ \left. \langle -|\hat{P}^{(A)}|-\rangle \langle +|\hat{P}_{b'}^{(-)}|+\rangle \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{2}-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} [\sqrt{2}-1-1] = \frac{1}{8\sqrt{2}} [\sqrt{2}-2] = \frac{1}{8} (1-\sqrt{2}) < 0\end{aligned}\tag{21.5}$$

Элементы физической реальности, классический реализм и локальность.

Вопрос: как соотносятся между собой понятие элементов физической реальности и концепция классического реализма (CR)?

Ответ: они дополняют друг друга. CR предполагает, что характеристики микросистемы существуют независимо от наблюдателя, но не дает рецепта, как экспериментально проверить это утверждение в микромире. В то время как эйнштейновское определение элементов физической реальности дает один из возможных способов, как это можно проверить на микроуровне, чтобы не вступить в противоречие с соотношением неопределенностей Гейзенберга. Для этого приходится привлекать специфическое свойство микрообъектов – запутанность. Взаимоотношение запутанности и локальности следующее: запутанность противоречит локальности на микроуровне и согласуется с локальностью на макроуровне и условием NS.

Дискуссия: может быть, НКМ все-таки локальна?

Процитируем отрывок из работы *C.A. Fuchs, D. Mermin, R. Schack, "An Introduction to QBism with an Application to the Locality of Quantum Mechanics", Am. J. Phys. 82, pp. 749-754 (2014):*

«В квантовой теории нелокальность отсутствует. Существуют лишь некоторые нелокальные интерпретации квантовой механики. Наиболее известной из них является **Бомовская механика** (*D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables, I and II", Phys. Rev. 85, p.166 (1952)*), нелокальность которой вдохновила Джона Белла показать, что нелокальность должна быть включена в любую интерпретацию, которая "завершает" квантовую механику в духе работы Эйнштейна, Подольского и Розена.

Но имеется множество локальных интерпретаций. Многие авторы отмечали, что квантовая нелокальность не может возникать во **многомировой интерпретации** (*D. Deutsch, P. Hayden, "Information Flow in Entangled Quantum Systems", Proc. R. Soc. Lond. A 456, 1759 (2000)*; *F. J. Tipler, "Does Quantum Nonlocality Exist? Bell's Theorem and the Many-Worlds Interpretation", arXiv: quant-ph/0003146 (2000)*). Роберт Гриффитс утверждает, что квантовая механика является локальной в рамках **подхода совместных историй** (*R. Griffiths, "Quantum locality", Found. Phys. 41, p.705 (2011)*)».

Комментарий. Из приведенного выше отрывка не вполне ясно, о каком из уровней локальности идет речь. Если о локальности на макроуровне, то утверждение Фукса и соавторов полностью соответствует теореме Эберхарда (см. параграф "Локальность нерелятивистской квантовой механики на макроскопическом уровне и теорема Эберхарда") и не привносит ничего нового в наше понимание структуры НКМ. Если же указанные авторы считают, что НКМ локальна именно на микроуровне, то подобное утверждение требует дополнительного осмысления, поскольку явно противоречит аргументам параграфа "Нелокальность нерелятивистской квантовой механики на микроскопическом уровне".

Таким образом мы имеем открытую проблему, которая нуждается в более детальном уточнении.

Локальность для BCHSH-неравенств и локальность в КТП - это одно и то же или это разные понятия?

Выше мы предположили, что нелокальность на микроуровне можно исключить при помощи перехода к КТП. Однако существует иная точка зрения, которая существенно опирается на концепцию скрытых параметров и утверждает, что локальность BCHSH-неравенств отличается от локальности КТП. Протицируем тут достаточно длинный отрывок из книги *Francois David, "The Formalisms of Quantum Mechanics. An Introduction", "Springer", pp. 133-134 (2015)*, который пояснит сказанное:

”Концепция Локального реализма, которая несовместима с квантовой механикой и, как известно, была исключена экспериментально, на самом деле **отличается от** концепции **локальности**, используемой в **квантовой теории поля**. Как уже обсуждалось выше локальный реализм соответствует свойству ”локальной контекстуальности” для моделей со скрытыми переменными. Эта идея пропагандировалась Альбертом Эйнштейном и продвигалась Эйнштейном, Подольским и Розеном в их статье 1935 года. Это означает, что для двух причинно независимых систем могут быть назначены различные и индивидуальные (но локально зависимые) скрытые переменные (”элементы реальности”), и что классических корреляций между этими локальными скрытыми переменными достаточно, чтобы объяснить квантовые корреляции между двумя запутанными системами.

Поясним вышесказанное на примере (Рис. 21.1). Пусть есть световой конус, в котором находятся подсистемы A и B (также изображенные в виде световых конусов). Также пусть есть моменты времени когда световые конусы подсистем A и B не пересекаются. При этом считается что нелокальность этих двух состояний, разделенных пространственно-подобным интервалом, была однажды заданна в виде наборов скрытых параметров λ в начальном конусе. И этот набор скрытых параметров определяет состояния систем A и B . Таким образом появляется запутанность для систем изначально разделенных пространственно-подобным интервалом.

Локальность в квантовой теории поля подразумевает нечто иное и соответствует концепции локальных событий (локализованных в пространстве и времени) и причинно-следственных связей между этими событиями, зависящих от геометрии пространства-времени. В частности, независимость двух точек, которые разделены пространственно-подобным интервалом. Такие концепции локальности и причинности были сформулированы А. Эйнштейном в 1905 году в рамках специальной теории относительности, а затем распространены на общую теорию относительности. Требования локальности и причинности необходимы в квантовой теории, чтобы сформулировать последовательную квантовую теорию поля. Эти требования являются ограничениями на наблюдаемые (на операторы) квантовой теории, а не ограничениями на квантовые состояния (которые гипотетически могли бы задаваться в терминах скрытых переменных). Они подразумевают, что никакая информация не может распространяться быстрее скорости света (эффекты причинно-следственной связи). По этой причине ЭПР-подобные эксперименты и нарушение любых неравенств Белла не следует рассматривать как проявление какого-то ”ужасного дальнего действия”, которое работает в составных запутанных системах.

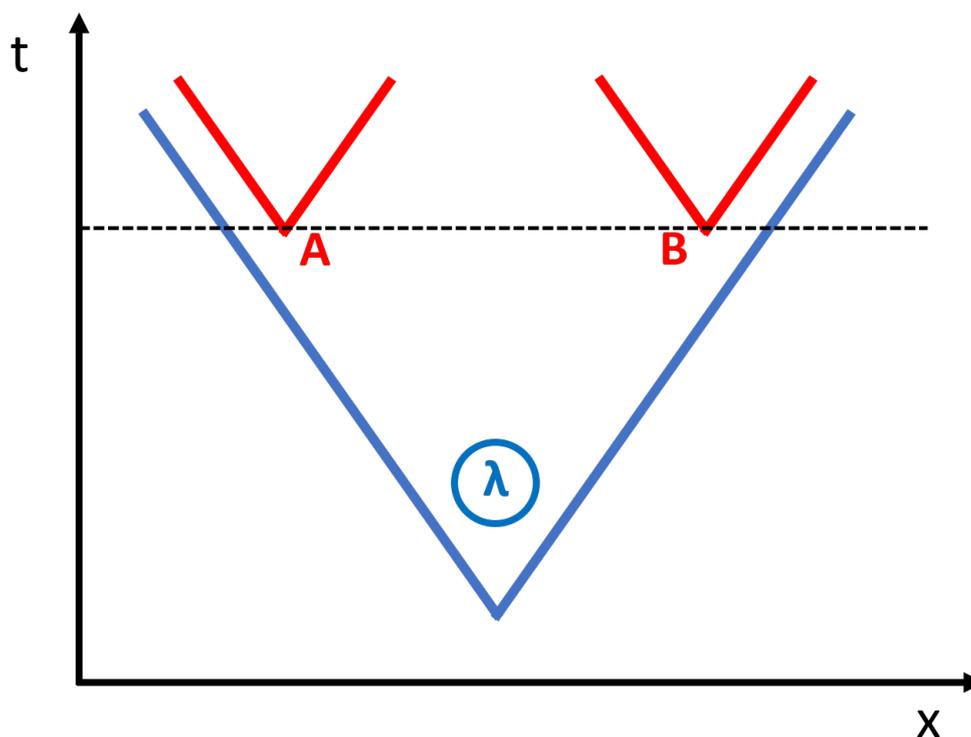


Рис. 21.1. Схематический пример идеи локального реализма Эйнштейна, Подольского и Розена.

Локальность в КТП \neq Концепция локального реализма

Комментарий от лектора. В КТП, и этим она отличается от НКМ, нет отдельно состояний и операторов. Любые состояния задаются при помощи действия операторов рождения и уничтожения на вакуум. А для этих операторов нет разницы между понятиями "локального реализма" и "локальности СТО и ОТО". Например, аналог белловского состояния $|\Psi^-\rangle$ получается при действии на вакуум локального псевдоскалярного тока фермионов и двух локальных операторов рождения:

$$(\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x))_N a_{p_2,s_2}^\dagger b_{p_1,s_1}^\dagger |0\rangle$$

Поэтому говорить, что подход локальности Эйнштейна, значит говорить не о локальной КТП а о нелокальной КТП. Такие теории действительно пытались построить, но все они либо приводили к экспериментальным противоречиям, либо были неперенормируемы. Поэтому если говорить о КТП, значит говорить о локальной теории.

Что такое ЭПР-парадокс?

В настоящее время так называемый парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена или ЭПР–парадокс представляет интерес исключительно для историков науки. Но его часто и далеко не всегда корректно любят упоминать в различных ”высокоинтеллектуальных дискуссиях”, которые во множестве процветают на просторах интернета. Поэтому студенты–физики должны знать аргументацию ЭПР, понимать ее логику и недостатки.

Сущность ЭПР–парадокса заключается в том, что концепция локального реализма (“LR” – см. ”Локальный реализм и BCHSH–неравенства”) противоречит свойствам запутанных состояний в квантовой механике.

В ранее упоминавшейся работе *A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. 47, p. 777 (1935)* Эйнштейн, Подольский и Розен сильно опередив свое время впервые обратили внимание на свойства запутанных состояний в квантовой механике и на возможность проведения с их помощью косвенных измерений. Указанные свойства оказались столь необычными даже по меркам квантовой механики, не говоря уже о классической физике, что авторами статьи эти свойства интерпретировались в качестве доказательства несовершенства или ”неполноты” квантовой теории, а многими другими физиками рассматривались как парадокс, опровергающий квантовую механику.

Читателю перед тем как перейти к описанию парадокса ниже настоятельно предлагается ознакомиться с оригинальной статьей Эйнштейна, Подольского и Розена приведенной в предыдущем абзаце.

Эйнштейн с соавторами начинает с анализа требований, которым должна удовлетворять **”настоящая” физическая теория.**

Прежде всего ”настоящая” теория должна давать только такие предсказания, которые возможно экспериментально проверить (подтвердить или опровергнуть). По–видимому, данное условие универсально для любых научных теорий. Оно тесно перекликается с принципом **”верификации”** неопозитивистов (1920–е гг.) и принципом **”фальсификации”** (т. е. принцип опровержимости), предложенным К. Поппером в книге ”Логика и рост научного знания” (1–е изд. 1934 г.).

Далее ЭПР вводят **условие полноты** для ”настоящей” физической теории: каждая характеристика физической системы (иначе, элемент физической реальности, см. параграф ”Понятие об элементах физической реальности”), которая может быть измерена прямо или косвенно, должна иметь отражение в физической теории. В определении полноты Эйнштейн с соавторами неявно подразумевают сугубо классический

взгляд на характеристики физической системы, которые в реальном мире почему-то должны существовать совместно. Впоследствии условие полноты трансформировалось в понятие "CR" (см. параграф "Локальный реализм и BCHSH-неравенства").

После этого Эйнштейн и соавторы рассматривают две микросистемы "A" и "B", которые при $t < t_0$ взаимодействовали друг с другом и образовали запутанное состояние. При $t \geq t_0$ **взаимодействие** между микросистемами **прекратилось**, и квантовые системы разошлись на очень большое расстояние. Последующие интерпретаторы ЭПР-парадокса, такие как Д. Бом, образно говорили, что система "A" улетела в Париж, а система "B" – в Пекин. Тогда в координатном представлении (запутанное) состояние микросистемы может быть записано в виде

$$|\psi_{12}\rangle = \int dx_1 dx_2 \delta(x_1 - x_2 - d) |x_1\rangle^{(A)} |x_2\rangle^{(B)} \quad (21.6)$$

где d – некоторая константа размерности длины. В импульсном представлении тот же самый вектор состояния может быть записан в виде:

$$|\psi_{12}\rangle = \int dp_1 dp_2 \delta(p_1 + p_2) e^{\frac{i}{\hbar} p_1 d} |p_1\rangle^{(A)} |p_2\rangle^{(B)} \quad (21.7)$$

Покажем, как получить $|\psi_{12}\rangle$ в импульсном представлении. Для этого вспомним, что собственные функции оператора \hat{x} в импульсном представлении имеют вид

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \quad (21.8)$$

а проекторы на состояния с определенным импульсом образуют ортогональное разложение единицы. Тогда

$$\begin{aligned} |\psi_{12}\rangle &= \int dx_1 dx_2 \delta(x_1 - x_2 - d) |x_1\rangle^{(A)} |x_2\rangle^{(B)} = \\ &= \int dp_1 dp_2 dx_1 dx_2 \delta(x_1 - x_2 - d) \langle p_1|x_1\rangle^{(A)} \langle p_2|x_2\rangle^{(B)} |p_1\rangle^{(A)} |p_2\rangle^{(B)} = \\ &= \int dp_1 dp_2 \frac{dx_1 dx_2}{2\pi\hbar} \delta(x_1 - x_2 - d) e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x_1} e^{-\frac{i}{\hbar} p_2 x_2} |p_1\rangle^{(A)} |p_2\rangle^{(B)} = \\ &= \int dp_1 dp_2 \frac{dx_2}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_1 + p_2) x_2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 d} |p_1\rangle^{(A)} |p_2\rangle^{(B)} = \\ &= \int dp_1 dp_2 \delta(p_1 + p_2) e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 d} |p_1\rangle^{(A)} |p_2\rangle^{(B)} = \end{aligned} \quad (21.9)$$

На последнем шаге мы воспользовались интегральным представлением δ -функции в виде $\int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-\tilde{x})} = \delta(x-\tilde{x})$.

Дальше ЭПР предлагают следующее рассуждение. Проведем измерение координаты микросистемы "A". Пусть измерение дало значение x'_1 . Отсюда следует, что

координата подсистемы "B" равна $x'_2 = x'_1 d$. Поскольку при $t \geq t_0$ системы "A" и "B" **не взаимодействуют**, то "в результате каких бы то ни было операций над первой системой, во второй системе уже не может получиться никаких реальных изменений". Поэтому согласно определению элемента физической реальности (см. параграф "Понятие об элементах физической реальности") координата x'_2 должна быть признана таким элементом. Но вместо координаты микросистемы "A" мы можем измерить импульс этой микросистемы. Тогда импульс микросистемы "B", о котором, по мнению ЭПР, без возмущения системы "B" известно, что он равен $p'_2 = p'_1$, тоже должен быть признан элементом физической реальности. Но состояние $|\psi_{12}\rangle$ **относится к одной** и той же **реальности**. Поэтому импульс и координата подсистемы "B" совместно должны быть элементами физической реальности. И, следовательно, "хорошая" физическая теория должна уметь их совместно описывать.

Однако в квантовой механике $[\hat{x}_2, \hat{p}_2] \neq 0$, поэтому координата x'_2 и импульс p'_2 не могут совместно существовать, то есть одновременно быть элементами физической реальности. Из этого Эйнштейн с соавторами делают вывод, что квантовая механика не удовлетворяет критерию полноты, то есть не является "хорошей" физической теорией. И надо искать новую "более правильную" теорию, которая заменит квантовую механику.

В других терминах: в силу того что получил Эйнштейн квантовая механика является операциональной теорией и не является онтологической моделью. Он предлагает искать онтологическую модель полностью эквивалентную квантовой механике в смысле тех предсказаний, которые делает квантовая механика, и, которая бы имела в себе что-то еще, чтобы полностью описывать реальность.

Чтобы сформулировать в современных терминах результат Эйнштейна, Подольского и Розена заметим, что приняв тезис о невлиянии микросистем "A" и "B" друг на друга при $t \geq t_0$, авторы статьи неявно вводят требование локальности. А утверждая, что экспериментатор волен выбирать, измерять ли ему координату или импульс микросистемы "A", используют понятие свободы воли. Выше мы обсуждали, что ЭПР также придерживаются "CR". Поэтому можно определенно полагать, что **Эйнштейн с соавторами в своей работе придерживается концепции "LR"** и, фактически, утверждает, что "хорошими" являются только те физические теории, которые удовлетворяют условиям "LR". А квантовая механика из-за свойств запутанных состояний этим условиям не удовлетворяет.

Понятно, что в утверждении ЭПР не содержится никакого парадокса. Более того, это просто иной взгляд на причину нарушений неравенств Белла (которые будут сформулированы через 29 лет после статьи Эйнштейна с соавторами, а эксперимен-

тальная проверка нарушений неравенств Белла, свободная почти от всех ”лазеек”, будет выполнена только в 2015 году).

Ведет ли ЭПР-аргументация к нарушению соотношения неопределенности?

Часто можно услышать (**НЕВЕРНОЕ!**) утверждение, что приводимая в статье ЭПР аргументация ведет к нарушению соотношения неопределенности Гейзенберга между импульсом и координатой. Прежде всего подчеркнем, что ни сам Эйнштейн, ни его соавторы некогда не делали подобного утверждения. Оно появилось у других авторов при попытках ”прояснить” и ”упростить” аргументацию ЭПР, исключить из нее ”лишнее” понятие об элементах физической реальности.

Обычно ”доказательство” нарушения соотношения неопределенности звучит примерно так. Пусть у микросистемы ”А”, которая, напомним, при $t > t_0$ не взаимодействует с микросистемой ”В”, со сколь угодно большой точностью измеряют координату x_1 , а у микросистемы ”В” в тоже самое время со сколь угодно большой точностью измеряют импульс p_2 . Поскольку $x_2 = x_1 d$, то измерение со сколь угодно большой точностью координаты x_1 дает знание со сколь угодно большой точностью координаты x_2 . Таким образом при помощи запутанного состояния для подсистемы ”В” мы, якобы, можем со сколь угодно большой точностью знать как p_2 , так и x_2 . Налицо явное противоречие с соотношением неопределенности.

Если бы это было именно так, то квантовая механика на самом деле оказалась бы противоречивой теорией.

Покажем, что запутанные состояния **НЕ нарушают** соотношение неопределенности. Для этого ведем гильбертово пространство \mathcal{H}_1 микросистемы ”А” и гильбертово пространство \mathcal{H}_2 микросистемы ”В”. Запутанное состояние определено на пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

На векторах из пространства \mathcal{H}_1 выполняется коммутационное соотношение

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar \hat{1}_1 \quad (21.10)$$

а на векторах из пространства \mathcal{H}_2 соотношение

$$[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar \hat{1}_2 \quad (21.11)$$

где $\hat{1}_1$ и $\hat{1}_2$ — единичные операторы в пространствах \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 соответственно. В

пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ запутанной системы определим операторы

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{p}_1 \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes \hat{p}_2 \\ \hat{X} &= \hat{X}_1 + \hat{X}_2 = \hat{x}_1 \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes \hat{x}_2\end{aligned}\quad (21.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned}[\hat{X}_1, \hat{P}_1] &= [\hat{X}_2, \hat{P}_2] = i\hbar \hat{1}_1 \otimes \hat{1}_2 \\ [\hat{X}_1, \hat{P}_2] &= [\hat{X}_2, \hat{P}_1] = 0\end{aligned}\quad (21.13)$$

Например $[\hat{X}_1, \hat{P}_1] = [\hat{x}_1, \hat{p}_1] \otimes \hat{1}_2 = i\hbar \hat{1}_1 \otimes \hat{1}_2$. Остальные коммутаторы вычисляются аналогично.

Поэтому

$$[\hat{X}, \hat{P}] = [\hat{X}_1, \hat{P}_1] = i\hbar \hat{1}_1 \otimes \hat{1}_2 \quad (21.14)$$

То есть в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ можно записать следующее соотношение неопределенности: $\Delta X \Delta p_1 \sim \hbar$. Кроме того

$$[\hat{X}, \hat{P}] = [\hat{X}_1, \hat{P}_1] + [\hat{X}_2, \hat{P}_2] = 2i\hbar \hat{1}_1 \otimes \hat{1}_2 \quad (21.15)$$

Следовательно $\Delta X \Delta P \sim 2\hbar$ в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Теперь предположим, что мы со сколь угодно большой точностью измерили координату подсистемы "А" и импульс подсистемы "В", то есть $\Delta x_1 \rightarrow 0$ и $\Delta p_2 \rightarrow 0$. Тогда в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$\begin{aligned}2\hbar \sim \Delta X \Delta P &= \Delta X (\Delta p_1 + \Delta p_2) = \Delta X \Delta p_1 + (\Delta x_1 + \Delta x_2) \Delta p_2 \sim \\ &\sim \hbar + \Delta x_1 \Delta p_2 + \Delta x_2 \Delta p_2 \rightarrow \hbar + \Delta x_2 \Delta p_2\end{aligned}\quad (21.16)$$

Таким образом в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ запутанной системы

$$\Delta x_2 \Delta p_2 \sim \hbar \quad (21.17)$$

несмотря на то, что $\Delta x_1 \rightarrow 0$ и $\Delta p_2 \rightarrow 0$. То есть в микросистеме "В" соотношение неопределенности **НЕ нарушено**. В чем же ошибка рассуждений, которые приведены в начале параграфа? В том, что в них не учтено соотношение неопределенности $\Delta X \Delta P \sim 2\hbar$ для всей системы.

Лекция 22. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 5.

Критерий сепарабельности по Беллу.

Заметим, что запутанность квантовых состояний играет ключевую роль при нарушении BCHSH-неравенств. Ниже мы докажем, что **сепарабельные состояния** самого общего вида

$$\hat{\rho} = \sum_l W_l \hat{\rho}_l^{(A)} \otimes \hat{\rho}_l^{(B)} \quad (22.1)$$

никогда **НЕ** нарушают BCHSH-неравенство, в том числе там где может быть достигнута граница Цирельсона на запутанных белловских состояниях, если

$$\begin{aligned} [\hat{F}_A, \hat{F}'_A] &\neq 0 \\ [\hat{G}_B, \hat{G}'_B] &\neq 0 \end{aligned} \quad (22.2)$$

Заметим, что это, тем не менее, не позволяет исключить из рассмотрения пункт ”в)” параграфа ”Локальный реализм и BCHSH-неравенства”, поскольку запутанность относится к состоянию квантовой системы, а НЕ к способу взаимодействия между наблюдаемыми.

Начнем доказательство. Для двойных корреляторов имеем

$$\langle F_A G_B \rangle_\rho = Tr(\hat{\rho}(\hat{F}_A \otimes \hat{G}_B)) = \sum_l W_l f_l^{(A)} g_l^{(B)} \quad (22.3)$$

где

$$\begin{aligned} f_l^{(A)} &= Tr_A(\hat{\rho}_l^{(A)} \hat{F}_A) \langle F_A \rangle_{\hat{\rho}_l^{(A)}} \\ g_l^{(B)} &= Tr_B(\hat{\rho}_l^{(B)} \hat{G}_B) \langle G_B \rangle_{\hat{\rho}_l^{(B)}} \end{aligned} \quad (22.4)$$

Оставшиеся корреляторы вычисляются аналогично.

Очевидно, что если операторы \hat{F}_A и \hat{G}_B являются операторами дихотомных наблюдаемых, то $|f_l| \leq 1$ и $|g_l| \leq 1$. Воспользуемся этим фактом и известным неравенством

$|f + g| \leq |f| + |g|$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \left| \langle S \rangle_\rho \right| &= \left| \langle F_A G_B \rangle_\rho - \langle F_A G'_B \rangle_\rho + \langle F'_A G_B \rangle_\rho + \langle F'_A G'_B \rangle_\rho \right| = \\
 &= \left| \sum_l W_l \left\{ f_l^{(A)} g_l^{(B)} - f_l^{(A)} g'_l{}^{(B)} + f'_l{}^{(A)} g_l^{(B)} + f'_l{}^{(A)} g'_l{}^{(B)} \right\} \right| \leq \\
 &\leq \sum_l W_l \left\{ \left| f_l^{(A)} g_l^{(B)} - f_l^{(A)} g'_l{}^{(B)} \right| + \left| f'_l{}^{(A)} g_l^{(B)} + f'_l{}^{(A)} g'_l{}^{(B)} \right| \right\} = \\
 &= \sum_l W_l \left\{ \left| f_l^{(A)} \right| \left| g_l^{(B)} - g'_l{}^{(B)} \right| + \left| f'_l{}^{(A)} \right| \left| g_l^{(B)} + g'_l{}^{(B)} \right| \right\} \leq \\
 &\leq \sum_l W_l \left\{ \left| g_l^{(B)} - g'_l{}^{(B)} \right| + \left| g_l^{(B)} + g'_l{}^{(B)} \right| \right\} \leq 2 \sum_l W_l = 2
 \end{aligned} \tag{22.5}$$

Таким образом неравенство Белла никогда не нарушается на сепарабельных состояниях в нерелятивистской квантовой механике. Кстати, попутно мы нашли еще один критерий сепарабельности. Действительно, если BCHSH-неравенство нарушено на некотором состоянии $\hat{\rho}$, то данное состояние не может быть сепарабельным. Это так называемый **критерий сепарабельности по Беллу**.

Хотя этот критерий применим к достаточно узкому кругу состояний (поскольку наблюдаемые должны быть дихотомными), тем не менее он оказывается весьма удобен, например, в квантовой теории информации.

Применение критерия сепарабельности по Беллу к состоянию Вернера.

Состояние Вернера

$$\hat{\rho}^{(W)} = x \hat{\rho}^{(\Psi^-)} + \frac{1}{4}(1-x) \hat{1} \tag{22.6}$$

где $x \in [0, 1]$ и $\hat{1}$ – единичная матрица размерности 4×4 . Данное состояние ранее рассматривалось в параграфах ”Состояние Вернера и критерий сепарабельности Переса” и ”Состояние Вернера и редуционный критерий”. В этих параграфах было найдено, что при $1/3 < x \leq 1$ состояние Вернера гарантированно оказывается запутанным состоянием. Что к этому знанию может добавить критерий сепарабельности по Беллу? Для ответа на данный вопрос вычислим

$$\begin{aligned}
 \langle F_A G_B \rangle_{\rho(w)} &= x \langle F_A G_B \rangle_{\Psi^-} + \frac{1}{4}(1-x) \text{Tr} (\hat{1}(\hat{F}_A \otimes \hat{G}_B)) = \\
 &= x \langle F_A G_B \rangle_{\Psi^-} + \frac{1}{4}(1-x) \text{Tr} \hat{F}_A \text{Tr} \hat{G}_B = \\
 &= x \langle F_A G_B \rangle_{\Psi^-} + \frac{1}{4}(1-x) a_i b_j \text{Tr} \sigma_i^{(A)} \text{Tr} \sigma_j^{(B)}
 \end{aligned} \tag{22.7}$$

где $\hat{F}_A = (\vec{a} \vec{\sigma})$, a_i и b_j – единичные векторы, а $\sigma_i^{(A)}$ и $\sigma_j^{(B)}$ – матрицы Паули. Поскольку $\text{Tr} \sigma_i^{(A)} = \text{Tr} \sigma_j^{(B)} = 0$, то

$$\langle F_A G_B \rangle_{\rho(w)} = x \langle F_A G_B \rangle_{\Psi^-} = -x \cos \theta_{ab} \tag{22.8}$$

На последнем шаге мы воспользовались результатом из параграфа ”Запутанные состояния вступают в игру”. Тогда

$$\left| \langle S \rangle_{\rho(w)} \right| = |x| |\cos \theta_{ab} - \cos \theta_{ab'} + \cos \theta_{a'b} + \cos \theta_{a'b'}| \tag{22.9}$$

Согласно этому же параграфу, второй сомножитель не может превысить значение $2\sqrt{2}$. Отсюда находим минимальное значение $|x|$, при котором неравенство Белла может нарушаться: $2\sqrt{2}|x| = 2$. Тогда согласно критерию сепарабельности по Беллу состояние Вернера гарантированно является запутанным, если

$$x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$$

К сожалению, применив критерий Белла, мы **не получили новой информации** о состоянии Вернера, поскольку

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] \in \left(\frac{1}{3}, 1 \right]$$

То есть для данного состояния критерий сепарабельности по Беллу **оказался менее мощным**, чем критерий сепарабельности Переса и редукционный критерий.

Нарушение BCHSH-неравенства при помощи любого чистого запутанного состояния двух спинов $s=1/2$.

Приведенная ниже теорема должна рассматриваться как важное дополнение критерия сепарабельности по Беллу (см. параграф ”Критерий сепарабельности по Беллу”) для чистых состояний специального вида.

Критерий сепарабельности по Беллу рассматривает матрицы плотности, а именно смешанные состояния и если соответствующее неравенство Белла нарушается, то

такое состояние гарантированно запутанное. Теперь рассмотрим следующий частный случай: чистое запутанное состояние.

Теорема: любое ЧИСТОЕ запутанное состояние вида

$$|\Psi\rangle = C_1|+\rangle^{(A)}|-\rangle^{(B)} + C_2|-\rangle^{(A)}|+\rangle^{(B)} \quad (22.10)$$

с нормировкой $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ нарушает ВСНСН-неравенство. Максимальное нарушение достигается на состояниях Белла $|\Psi^\pm\rangle$ (для состояния $|\Psi^-\rangle$ было показано – достигает границы Цирельсона, а для состояния $|\Psi^+\rangle$ читателю предлагается показать это самостоятельно и показать до какой степени оно нарушается).

Для доказательства теоремы найдем $\langle F_A G_B \rangle_\Psi$ в условиях, которые были сформулированы в параграфе ”Запутанные состояния вступают в игру”. Данный коррелятор уже вычислялся для состояния $|\Psi^-\rangle$ (20.15), теперь же читателю предлагается провести соответствующие вычисления самостоятельно и получить:

$$\langle F_A G_B \rangle_\Psi = -\cos\theta_a \cos\theta_b + 2 \operatorname{Re}(C_1^* C_2) \sin\theta_a \sin\theta_b \quad (22.11)$$

Остальные средние вычисляются аналогично. Пусть теперь направление \vec{a} совпадает с осью ”z”, а направление \vec{a}' перпендикулярно оси ”z”. Это ведет к тому, что $\theta_a = 0$ и $\theta_{a'} = \pm\pi/2$.

Для унификации дальнейшего доказательства воспользуемся произволом в выборе знака угла $\theta_{a'}$. Именно, всякий раз, когда

$$\operatorname{Re}(C_1^* C_2) = -|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|$$

будем полагать $\theta_{a'} = +\pi/2$, в то время когда

$$\operatorname{Re}(C_1^* C_2) = +|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|$$

будем брать $\theta_{a'} = -\pi/2$. Тогда:

$$\begin{aligned} \langle F_A G_B \rangle_\Psi &= -\cos\theta_b \\ \langle F_A G'_B \rangle_\Psi &= -\cos\theta_{b'} \\ \langle F'_A G_B \rangle_\Psi &= -2|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|\sin\theta_b \\ \langle F'_A G'_B \rangle_\Psi &= -2|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|\sin\theta_{b'} \end{aligned}$$

Используя полученные выше результаты, находим:

$$\begin{aligned} & |\langle F_A G_B \rangle_\Psi - \langle F_A G'_B \rangle_\Psi + \langle F'_A G_B \rangle_\Psi + \langle F'_A G'_B \rangle_\Psi| = \\ & = |\cos\theta_b - \cos\theta_{b'} + 2|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)| (\sin\theta_b + \sin\theta_{b'})| \end{aligned} \quad (22.12)$$

Для нарушения BCHSH-неравенства выберем

$$\begin{aligned} \cos\theta_b = -\cos\theta_{b'} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|^2}} \geq 0 \\ \sin\theta_b = \sin\theta_{b'} &= \sqrt{1 - \cos^2\theta_b} = \frac{2|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|}{\sqrt{1 + 4|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|^2}} \geq 0 \end{aligned} \quad (22.13)$$

Подставляя (22.13) в (22.12) находим:

$$\begin{aligned} & |\langle F_A G_B \rangle_\Psi - \langle F_A G'_B \rangle_\Psi + \langle F'_A G_B \rangle_\Psi + \langle F'_A G'_B \rangle_\Psi| = \\ & = 2\sqrt{1 + 4|\operatorname{Re}(C_1^* C_2)|^2} \geq 2 \end{aligned} \quad (22.14)$$

при любых ненулевых действительных значениях коэффициентов C_1 и C_2 и вполне очевидных условиях на комплексные коэффициенты. Максимальное значение $2\sqrt{2}$ достигается на состояниях Белла $|\Psi^\pm\rangle$. Теорема доказана.

Впервые данная теорема была доказана в работе *N. Gisin, "Bell's inequality holds for all non-product states", Physycs Letters A154, pp.201-202 (1991)*. Однако эта статья в ключевых местах содержит две опечатки, которые чрезвычайно осложняют воспроизведение финального результата. Более общий и свободный от опечаток результат можно найти в работе *S.Popescu, D.Rohrlich, "Generic quantum nonlocality", Physycs Letters A166, pp.293-297 (1992)*.

Носки профессора Бертлмана и BCHSH-неравенство.

В своем докладе *"Bertlmann's socks and the nature of reality"* ("Носки Бертлмана и природа реальности"), прочитанном в Колледж де Франс 17 июня 1980 года и опубликованном в книге *J.S. Bell, "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics", "Cambridge University Press", Cambridge (1987)*, Джон Белл приводит красивый пример, который лишний раз подчеркивает **важность совместной измеримости / неизмеримости** наблюдаемых характеристик квантовой системы для сохранения / нарушения BCHSH-неравенства.

Приведем тут вольный перевод основной идеи статьи: *"Дилетант, который не утруждал себя изучением квантовой механики, будет совершенно не впечатлен*

корреляционными свойствами запутанных состояний. Он сразу же укажет на множество примеров аналогичных корреляций, которые можно найти в повседневной жизни. Широко известен случай с носками профессора Бертлмана. Профессор Бертлман всегда носит носки разных цветов. Совершенно невозможно угадать какого цвета будет носок в данный день на данной ноге профессора.

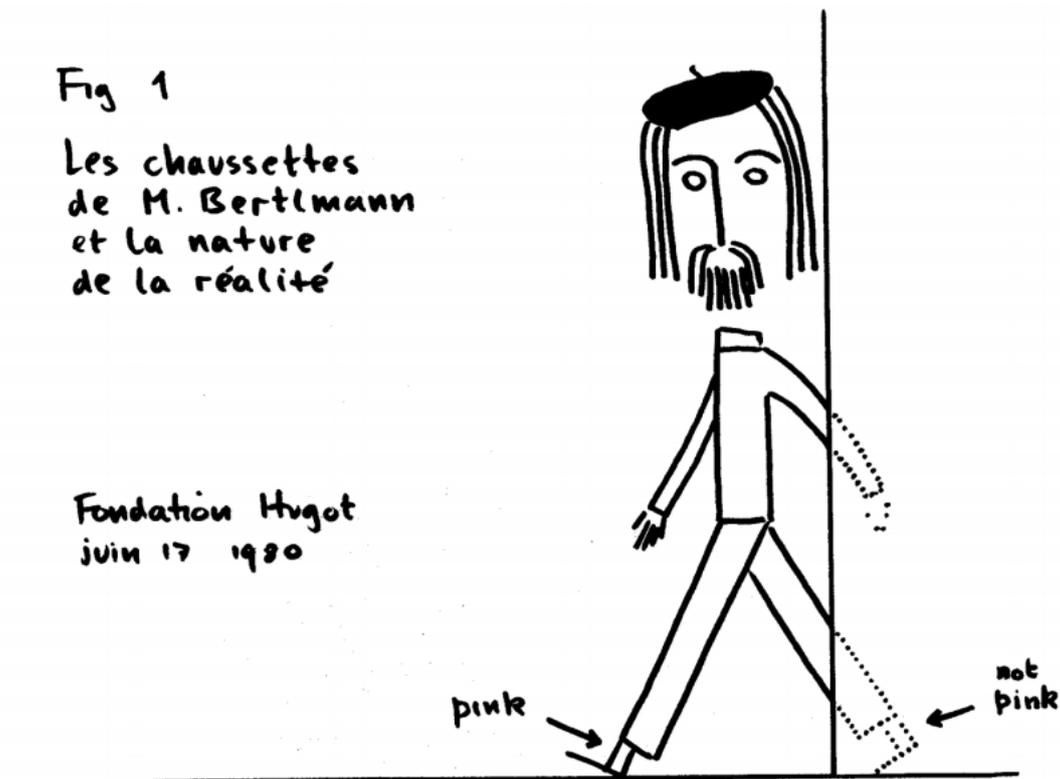


Рис. 22.1. Иллюстрация профессора Бертлмана.

Но если Вы увидели (см. рисунок), что один носок Бертлмана розового цвета, то можете быть абсолютно уверены, что на другой ноге будет носок нерозового цвета, даже если Вы не видите эту ногу. Таким образом, наблюдение цвета первого носка и знание привычек профессора Бертлмана немедленно дает нам информацию о втором носке. Если не удивляться странному поведению профессора Бертлманна, то в носочной антикорреляции нет никакой тайны. И из этой привычки никак нельзя получить нарушение "носочного BCHSH-неравенства".

То есть, даже при использовании 100% классических, но локальных корреляций неравенство Белла никогда не будут нарушены. Но большой класс квантовых состояний (например запутанные) коррелированы в некотором смысле сильнее, чем 100% классические корреляции, и поэтому они нарушают неравенство Белла.

Кстати профессор Бертлман реальный человек, который в свое время был аспи-

рантом, а потом и другом Белла, и он действительно носит носки разного цвета.



Рис. 22.2. Носки профессора Рейнхолда Бертлмана Рис. 22.3. и сам профессор в 2010 году

Очевиден и ответ, почему "носочное ВСНСН-неравенство" не может быть нарушено. Сколько бы не было разноцветных носков у профессора Бертлмана, их всегда можно сложить в одну общую кучу. А потом эту кучу разделить на любое количество меньших куч. Таким образом все совместные вероятности существования носков разного цвета неотрицательны. А это, как мы видели выше, не может привести к нарушению ВСНСН-неравенства.

На самом деле из любых совместных вероятностей любых классических величин, которые по определению неотрицательны (эти предметы могут быть наблюдаемы) следует, что ни при каких классических корреляциях неравенства Белла не нарушаются.

Неравенство Вигнера.

ВСНСН-неравенство – это неравенство для корреляторов.

Вопрос: можно ли исходя из концепции Локального реализма (LR) написать неравенство для совместных вероятностей, которое несло бы ту же смысловую нагрузку, что и ВСНСН-неравенство для корреляторов? Подобное желание возникает, поскольку нерелятивистской квантовой механике и квантовой теории поля процедура вычисления совместных вероятностей является универсальной и хорошо определенной процедурой, а процедура вычисления корреляторов – нет.

Ответ: да, такое неравенство написать можно. Впервые подобное неравенство получил Юджин Вигнер: *E. P. Wigner, On hidden variables and quantum mechanical probabilities, Am. J. Phys. 38, 1005 (1970)*. Поэтому оно теперь называется **нера-**

венством Вигнера. Реже данное неравенство называют **неравенством Белла в форме Вигнера** или даже **неравенством треугольника**.

В рамках концепции LR (см. параграф "Локальный реализм и BCHSH-неравенства") получим неравенство Вигнера.

Обозначим через n_{\pm} состояния фермиона с проекциями спина $\pm 1/2$ на ось, направление которой в пространстве задается единичным вектором \vec{n} .

Рассмотрим пару фермионов "A" и "B" со спинами $s = 1/2$ каждый, для которых проекции спинов на любое направление \vec{n} подчиняются **условию антикорреляции**

$$n_{\pm}^{(B)} = -n_{\pm}^{(A)} \quad (22.15)$$

В квантовой механике примером подобного состояния является состояние Белла $|\Psi^{-}\rangle$.

Далее предположим, что состояние системы двух антикоррелированных по спину фермионов подчиняется концепции LR, а не законам квантовой механики. Выберем в пространстве три некопланарных направления, которые задаются единичными векторами \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Согласно условию CR **все проекции** спинов обоих фермионов на оси \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} должны **существовать совместно**.

Из этого следует, что всегда определена любая совместная тройная вероятность, например совместная вероятность

$$\omega(a_{+}^{(B)}, b_{+}^{(A)}, c_{+}^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)})$$

Величины $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ и $C^{(i)}$ обозначают состояния классических измерительных приборов, которые были использованы для измерения проекций спинов каждого из фермионов на направления \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} соответственно. Кроме того выполняются обычные ограничения для вероятностей:

$$0 \leq \omega(a_{+}^{(B)}, b_{+}^{(A)}, c_{+}^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) \leq 1 \quad (22.16)$$

Аналогичное утверждение справедливо для любых других совместных вероятностей. При выписывании совместных вероятностей не следует забывать об условии антикорреляции.

При помощи NS-условия (см. параграф "No-signaling Condition"), которое в данном случае является следствием условия локальности, можем записать, что

$$\omega(a_{+}^{(B)}, b_{+}^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}) = \sum_{c^{(B)} = -}^{+} \omega(a_{+}^{(B)}, b_{+}^{(A)}, c_{+}^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) \quad (22.17)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\omega(c_+^{(B)}, b_+^{(A)} | C^{(B)}, B^{(A)}) &= \sum_{a_+^{(B)}=-}^{+} \omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) \\ \omega(a_+^{(B)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, C^{(A)}) &= \sum_{b_+^{(A)}=-}^{+} \omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)})\end{aligned}\quad (22.18)$$

Для второго слагаемого из последнего равенства воспользуемся **условием антикорреляции** проекций спинов и **условием локальности**, чтобы для проекции спина на ось \vec{c} заменить фермион "A" на фермион "B":

$$\omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) = \omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)}, c_-^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(B)})\quad (22.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\omega(a_+^{(B)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, C^{(A)}) &= \omega(a_+^{(B)}, b_-^{(A)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) + \\ &+ \omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)}, c_-^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)})\end{aligned}\quad (22.20)$$

Учтя, что

$$\begin{aligned}\omega(a_-^{(B)}, b_+^{(A)}, c_+^{(B)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) &\geq 0 \\ \omega(a_+^{(B)}, b_-^{(A)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}, C^{(A)}) &\geq 0\end{aligned}\quad (22.21)$$

находим

$$\begin{aligned}\omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}) &\leq \omega(c_+^{(B)}, b_+^{(A)} | C^{(B)}, B^{(A)}) + \\ &+ \omega(a_+^{(B)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, C^{(A)})\end{aligned}\quad (22.22)$$

Полученное неравенство является **неравенством Вигнера**.

Нарушение неравенства Вигнера в квантовой механике будет означать **НЕСправедливость** концепции LR на микроуровне. Однако утверждать, что из нарушения неравенства Вигнера следует нелокальность квантовой механики, неверно, поскольку не отброшен альтернативный источник нарушения неравенства Вигнера за счет нарушения условия CR.

Нарушение неравенства Вигнера в квантовой механике.

Покажем, что **неравенство Вигнера может нарушаться в квантовой механике**. Для этого рассмотрим квантовую систему, которая состоит из двух фермионов в состоянии Белла. Пусть фермион "A" распространяется вдоль оси "y", а фермион "B" — против оси "y". Выберем тройку некопланарных единичных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , лежащих в плоскостях, параллельных плоскости (x, z) . Заметим, что данная экспериментальная ситуация похожа на ситуацию, которая была описана в параграфе "Запутанные состояния вступают в игру".

Поскольку векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} лежат в плоскости (x, z) , то азимутальные углы

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = 0 \quad (22.23)$$

В базисе

$$\begin{aligned} |_{+}^{(i)}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |_{-}^{(i)}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22.24)$$

где $i = \{A, B\}$, состояние Белла $|\Psi^{-}\rangle$ запишется как

$$|\Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(A)} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(B)} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(A)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(B)} \right] \quad (22.25)$$

В этом же базисе двухкомпонентный спинор с проекцией спина n_+ на направление, задаваемое единичным вектором

$$\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta) \quad (22.26)$$

имеет вид (см. параграф "Явный вид матриц плотности спина $s = 1/2$ для его проекций $\pm 1/2$ на произвольную ось"):

$$|n_{+}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (22.27)$$

Тогда вектор, который отвечает состоянию $a_{+}^{(B)}b_{+}^{(A)}$, имеет вид

$$|b_{+}^{(A)}\rangle \otimes |a_{+}^{(B)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_b}{2} \\ \sin\frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix}^{(A)} \otimes \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_a}{2} \\ \sin\frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix}^{(B)} \quad (22.28)$$

Амплитуда перехода в рамках прямого произведения

$$\begin{aligned}
 & \langle a_+^{(B)} | \otimes \langle b_+^{(A)} | \Psi^- \rangle = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_b}{2} & \sin \frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix}^{(A)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(A)} \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_a}{2} & \sin \frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix}^{(B)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(A)} - \right. \\
 & \left. - \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_b}{2} & \sin \frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix}^{(A)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(A)} \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_a}{2} & \sin \frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix}^{(B)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(B)} \right] = \quad (22.29) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \frac{\theta_b}{2} \sin \frac{\theta_a}{2} - \sin \frac{\theta_b}{2} \cos \frac{\theta_a}{2} \right] = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_a - \theta_b}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{ab}}{2}
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)} | A^{(B)}, B^{(A)}) = \left| \langle a_+^{(B)} | \otimes \langle b_+^{(A)} | \Psi^- \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \quad (22.30)$$

Для других вероятностей, входящих в неравенство Вигнера (22.22), можно аналогично показать, что

$$\begin{aligned}
 \omega(c_+^{(B)}, b_+^{(A)} | C^{(B)}, B^{(A)}) &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2} \\
 \omega(a_+^{(B)}, c_+^{(A)} | A^{(B)}, C^{(A)}) &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}
 \end{aligned} \quad (22.31)$$

Подставляя все три вероятности в неравенство Вигнера, находим его квантово-механическую версию для любых трех направлений \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , лежащих в плоскости (x, z) (перпендикулярную направлению распространения фермионов "у"):

$$\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \quad (22.32)$$

Если концепция LR справедлива на микроуровне, то при любых тройках углов θ_{ij} данное неравенство НЕ должно нарушаться.

Однако это не так. Покажем, что полученное выше неравенство нарушается, и максимальное нарушение происходит при выборе углов

$$\begin{aligned}
 \theta_{ac} = \theta_{cb} &= \frac{\pi}{3} \\
 \theta_{ab} &= \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned} \quad (22.33)$$

Без потери общности можем положить, что вектор \vec{c} лежит между векторами \vec{a} и \vec{b} . Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим функцию

$$F(\theta_{ab}, \theta_{ac}, \theta_{cb}) = \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2} - \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} - \lambda(\theta_{ab} - \theta_{ac} - \theta_{cb}) \quad (22.34)$$

Для нахождения максимума запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\theta_{ab}, \theta_{ac}, \theta_{cb})}{\partial \theta_{ab}} = 0 \\ \frac{\partial F(\theta_{ab}, \theta_{ac}, \theta_{cb})}{\partial \theta_{ac}} = 0 \\ \frac{\partial F(\theta_{ab}, \theta_{ac}, \theta_{cb})}{\partial \theta_{cb}} = 0 \\ \theta_{ab} - \theta_{ac} - \theta_{cb} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \theta_{ab} = 2\lambda \\ \sin \theta_{ac} = 2\lambda \\ \sin \theta_{cb} = 2\lambda \\ \theta_{ab} - \theta_{ac} - \theta_{cb} = 0 \end{cases} \quad (22.35)$$

Заметим, что поскольку векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} некопланарны, то ни один из углов не может быть равен 0 или π . Более того, ни один из трех углов не может превосходить π . Поэтому из соотношения

$$\sin \theta_{ac} = 2\lambda = \sin \theta_{cb}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \theta_{ac} &= \theta_{cb} = \theta \\ \theta_{ab} &= 2\theta \end{aligned}$$

Тогда

$$\sin(2\theta) = 2\lambda = \sin \theta \quad (22.36)$$

Как было сказано выше $\theta \neq 0$. Поэтому $\sin \theta \neq 0$. Это приводит к равенству $\cos \theta = \frac{1}{2}$, то есть $\theta = \frac{\pi}{3}$. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \theta_{ac} &= \theta_{cb} = \frac{\pi}{3} \\ \theta_{ab} &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad (22.37)$$

Такой выбор углов приводит к некорректному неравенству при подстановке в (22.32):

$$\sin^2 \frac{\pi}{3} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \implies \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} \quad (22.38)$$

Следовательно, в квантовой механике неравенство Вигнера может нарушаться, а значит принцип Локального реализма несправедлив в квантовой механике.

Информационное неравенство Белла.

При выводе BCHSH-неравенства основную роль играли совместные вероятности. Вспомним, что через вероятности определяются и энтропии. Поэтому возникает естественная идея, написать неравенство для энтропии Шеннона, которое бы нарушалось для квантовых коррелированных систем.

Сопоставим наблюдаемой F_A ансамбль

$$X_A = \left\{ f_i^{(A)}, \omega \left(f_i^{(A)} \right) \right\}$$

где $f_i^{(A)}$ – дискретный конечный невырожденный спектр наблюдаемой F_A . Заметим, что мы **НЕ** накладываем условие дихотомности на F_A . Аналогично наблюдаемым F'_A , G_B и G'_B сопоставим ансамбли

$$\begin{aligned} X_{A'} &= \left\{ f'_j^{(A)}, \omega \left(f'_j^{(A)} \right) \right\} \\ Y_B &= \left\{ g_k^{(B)}, \omega \left(g_k^{(B)} \right) \right\} \\ Y_{B'} &= \left\{ g'_m{}^{(B)}, \omega \left(g'_m{}^{(B)} \right) \right\} \end{aligned}$$

соответственно.

В параграфе ”Доказательство субаддитивности” было написано неравенство

$$H(X) \leq H(X, Y) \tag{22.39}$$

которое, очевидно, можно расширить до следующей цепочки:

$$H(X) \leq H(X, Y) \leq H(X, Y, V) \leq H(X, Y, V, W) \tag{22.40}$$

А из доказанного в параграфе ”Классическая взаимная информация” неравенства для условной вероятности

$$H(X|Y) \leq H(X) \tag{22.41}$$

без труда получается серия неравенств

$$H(X|Y, V, W) \leq H(X|Y, V) \leq H(X|Y) \leq H(X) \tag{22.42}$$

Теперь можно доказать информационное неравенство Белла. Имеем:

$$\begin{aligned}
 H(X_A|Y_{B'}) + H(Y_{B'}) &= H(X_A, Y_{B'}) \leq H(X_A, X_{A'}, Y_B, Y_{B'}) = \\
 &= H(X_A|X_{A'}, Y_B, Y_{B'}) + H(X_{A'}, Y_B, Y_{B'}) = \\
 &= H(X_A|X_{A'}, Y_B, Y_{B'}) + H(Y_B|X_{A'}, Y_{B'}) + H(X_{A'}, Y_{B'}) = \\
 &= H(X_A|X_{A'}, Y_B, Y_{B'}) + H(Y_B|X_{A'}, Y_{B'}) + H(X_{A'}|Y_{B'}) + H(Y_{B'}) \leq \\
 &\leq H(X_A|Y_B) + H(Y_B|X_{A'}) + H(X_{A'}|Y_{B'}) + H(Y_{B'})
 \end{aligned} \tag{22.43}$$

Таким образом получаем неравенство на условные энтропии

$$0 \leq H(X_A|Y_B) - H(X_A|Y_{B'}) + H(Y_B|X_{A'}) + H(X_{A'}|Y_{B'}) \tag{22.44}$$

которое в англоязычной литературе обычно называют "Information-Theoretic Bell Inequality". Впервые это неравенство было выведено в работе: *Samuel L. Braunstein and Carlton M. Caves, "Information-Theoretic Bell Inequalities", Phys. Rev. Lett. 61, p.662 (1988); Erratum Phys. Rev. Lett. 63, p.1896 (1989).*

Подчеркнем, что данное энтропийное неравенство справедливо тогда и только тогда, когда справедливы выражения для совместных и условных классических энтропий Шеннона, а значит, соответствующие четверные, тройные, двойные и одинарные вероятности совместного существования спектров наблюдаемых F_A, F'_A, G_B и G'_B неотрицательны.

Информационное неравенство Белла более общее, чем BCHSH-неравенство, поскольку его нарушение, в принципе, можно было бы проверять не только для дихотомных наблюдаемых. Но в основе доказательства данного неравенства лежит тоже самое предположение, что и в основе доказательства BCHSH-неравенства. Именно, чтобы совместная энтропия $H(X_A, X_{A'}, Y_B, Y_{B'})$ имела смысл, необходимо выполнение условия:

$$1 \geq \omega \left(f_i^{(A)}, f_j'^{(A)}, g_k^{(B)}, g_m'^{(B)} \right) \geq 0 \tag{22.45}$$

Не существует прямых экспериментальных методов измерения энтропии квантовых систем. Поэтому информационное неравенство на эксперименте может быть проверено только косвенно, если измерить все возможные двойные совместные вероятности, а затем подставить их значения в формулы для энтропии.

Нарушение информационного неравенства Белла в квантовой механике.

Вопрос: нарушается ли информационное неравенство Белла в квантовой механике?

Ответ: да, нарушается. Мы не будем искать максимальную степень нарушения, а просто приведем пример, когда нарушение имеет место.

Рассмотрим мысленный эксперимент из параграфа ”Запутанные состояния вступают в игру”, то есть отождествим наблюдаемые F_A , F'_A , G_B и G'_B с удвоенными проекциями спина $s = 1/2$ на четыре непараллельные оси. В этом случае очевидно, что

$$\begin{aligned} H(X_A|Y_B) &= H(Y_B|X_{A'}) = H(X_{A'}|Y_{B'}) = f(\theta) \\ H(X_A|Y_{B'}) &= f(3\theta) \end{aligned}$$

а информационное неравенство Белла сводится к неравенству

$$0 \leq 3f(\theta) - f(3\theta) \quad (22.46)$$

Осталось найти функцию $f(\theta)$, что эквивалентно вычислению условной энтропии $H(X_A|Y_B)$ как функции угла θ .

Простые вычисления вероятностей дают (не забудьте, что в белловском состоянии $|\Psi^-\rangle$ спины антикоррелированы!):

$$\begin{aligned} \omega\left(s_{\vec{a}}^{(A)} = +\frac{1}{2}, s_{\vec{b}}^{(B)} = +\frac{1}{2}\right) &= \omega\left(s_{\vec{a}}^{(A)} = -\frac{1}{2}, s_{\vec{b}}^{(B)} = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \omega\left(s_{\vec{a}}^{(A)} = +\frac{1}{2}, s_{\vec{b}}^{(B)} = -\frac{1}{2}\right) &= \omega\left(s_{\vec{a}}^{(A)} = -\frac{1}{2}, s_{\vec{b}}^{(B)} = +\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Этот результат позволяет вычислить совместную энтропию

$$\begin{aligned} H(X_A, Y_B) &= - \sum_{s_{\vec{a}}^{(A)}, s_{\vec{b}}^{(B)}} \omega\left(s_{\vec{a}}^{(A)}, s_{\vec{b}}^{(B)}\right) \ln \omega\left(s_{\vec{a}}^{(A)}, s_{\vec{b}}^{(B)}\right) = \\ &= -\sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right) + \ln 2 \end{aligned}$$

Чтобы вычислить условную энтропию $H(X_A|Y_B)$, необходимо найти еще энтропию ансамбля Y_B .

Поскольку наблюдаемая G_B совпадает с $s_{\frac{b}{2}}^{(B)}$, то $g_1^{(B)} = +1/2$ и $g_2^{(B)} = -1/2$. В силу симметрии задачи

$$\omega\left(g_1^{(B)} = +\frac{1}{2}\right) = \omega\left(g_2^{(B)} = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Таким образом, ансамбль Y_B задан. Тогда имеем

$$H(Y_B) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} f(\theta) &= H(X_A|Y_B) = H(X_A, Y_B) - H(Y_B) = \\ &= -\sin^2\frac{\theta}{2}\ln\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}\ln\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (22.47)$$

Выберем $\theta = \pi/8$. Прямые вычисления дают: $f(\pi/8) \approx 0,161$ и $f(3\pi/8) \approx 0,618$. Тогда **информационное неравенство Белла**

$$0 \leq 0.483 - 0.618 = -0.135 \quad (22.48)$$

нарушается в квантовой механике. И это нарушение можно наблюдать при помощи косвенных экспериментов.

Лекция 23. Неравенства Белла и корреляции в квантовой теории. Часть 6.

Парадокс Д. Мермина.

Основываясь на концепции LR (см. параграф "Локальный реализм и BCHSH-неравенства"), можно получить не только неравенства, но и **равенства**, которые противоречат квантовой теории. Самое известное из подобных противоречий было найдено в работе *N.D. Mermin, "Quantum mysteries revisited", American Journal of Physics 58, pp. 731–734 (1990)*.

Рассмотрим три частицы "A", "B" и "C" со спинами $s = 1/2$ каждая, находящиеся в состоянии Гринберга-Хорна-Цалингера:

$$|\Psi^{(GHZ)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \otimes |+\rangle^{(C)} + |-\rangle^{(A)} \otimes |-\rangle^{(B)} \otimes |-\rangle^{(C)} \right) \quad (23.1)$$

Данное состояние является запутанным состоянием трех спинов $s = 1/2$. Заметим, что данное трехчастичное запутанное состояние не сводится к двухчастичным запутанным состояниям Белла $|\Psi^\pm\rangle, |\Phi^\pm\rangle$. Действительно, попробуем найти любое двухчастичное состояние, например подсистем "A" и "B" при условии что системы "A", "B" и "C" находящиеся в состоянии Гринберга-Хорна-Цалингера. Для этого выпишем матрицу плотности для состояния ГХЦ:

$$\hat{\rho}_{GHZ} = |\Psi^{(GHZ)}\rangle \langle \Psi^{(GHZ)}| \quad (23.2)$$

Теперь, чтобы найти матрицу плотности подсистем "A" и "B" нужно взять след по квантовым числам подсистемы "C" от этой матрицы плотности.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AB} = Tr \hat{\rho}_{GHZ} &= \frac{1}{2} |+\rangle^{(A)} \langle +|^{(A)} \otimes |+\rangle^{(B)} \langle +|^{(B)} + \\ &+ \frac{1}{2} |-\rangle^{(A)} \langle -|^{(A)} \otimes |-\rangle^{(B)} \langle -|^{(B)} \end{aligned} \quad (23.3)$$

Из получившегося выражения (23.3) видно, что получившаяся двухчастичная матрица плотности отвечает смешанному состоянию а не запутанному и не сводится к суперпозиции.

То есть трехчастичное запутанное состояние Гринберга-Хорна-Цалингера не сводится к двухчастичным запутанным состояниям Белла.

Теперь вернемся к рассмотрению трех частицы “A”, “B” и “C” со спинами $s = 1/2$ каждая, находящиеся в состоянии Гринберга-Хорна-Цалингера. Предположим, что все частицы хорошо разделены в пространстве. Это достигается, если свернуть спиновое состояние $|\Psi^{(GHZ)}\rangle$ с функцией локализованных частиц $f(\vec{r}^{(A)}, \vec{r}^{(B)}, \vec{r}^{(C)})$ в координатном представлении.

Введем четыре оператора

$$\begin{aligned}\hat{O}_1 &= \sigma_1^{(A)} \otimes \sigma_2^{(B)} \otimes \sigma_2^{(C)} \\ \hat{O}_2 &= \sigma_2^{(A)} \otimes \sigma_1^{(B)} \otimes \sigma_2^{(C)} \\ \hat{O}_3 &= \sigma_2^{(A)} \otimes \sigma_2^{(B)} \otimes \sigma_1^{(C)} \\ \hat{O}_4 &= \sigma_1^{(A)} \otimes \sigma_1^{(B)} \otimes \sigma_2^{(C)}\end{aligned}\quad (23.4)$$

где σ_i – матрицы Паули. Заметим, что операторы \hat{O}_k попарно коммутируют, то есть совместно измеримы. Например

$$[\hat{O}_k, \hat{O}_l] = 0 \quad (23.5)$$

где $\{k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Вычислим, например,

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_4] = [\sigma_1, \sigma_1]^{(A)} \otimes [\sigma_2, \sigma_1]^{(B)} \otimes [\sigma_2, \sigma_1]^{(C)}$$

Поскольку $[\sigma_1, \sigma_1]^{(A)} = 0$, то $[\hat{O}_1, \hat{O}_4] = 0$. Остальные коммутаторы вычисляются аналогично. Следовательно, все четыре оператора \hat{O}_k совместно измеримы.

Учитывая действие операторов $\sigma_{1,2}^{(i)}$ на состоянии $|\pm^{(i)}\rangle$:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(i)} |\pm^{(i)}\rangle &= |\mp^{(i)}\rangle \\ \sigma_2^{(i)} |\pm^{(i)}\rangle &= \pm i |\mp^{(i)}\rangle\end{aligned}$$

где $i = \{A, B, C\}$. Прямыми вычислениями можно показать, что

$$\begin{aligned}\hat{O}_1 |\Psi^{(GHZ)}\rangle &= + |\Psi^{(GHZ)}\rangle \\ \hat{O}_2 |\Psi^{(GHZ)}\rangle &= + |\Psi^{(GHZ)}\rangle \\ \hat{O}_3 |\Psi^{(GHZ)}\rangle &= + |\Psi^{(GHZ)}\rangle \\ \hat{O}_4 |\Psi^{(GHZ)}\rangle &= - |\Psi^{(GHZ)}\rangle\end{aligned}\quad (23.6)$$

Проверим, например, соотношение для оператора \hat{O}_2 . Имеем:

$$\begin{aligned} \hat{O}_2 |\Psi^{(GHZ)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i^2 |-(A)\rangle \otimes |-(B)\rangle \otimes |-(C)\rangle + \right. \\ &\left. + (-i)^2 |+(A)\rangle \otimes |+(B)\rangle \otimes |+(C)\rangle \right) = -|\Psi^{(GHZ)}\rangle \end{aligned} \quad (23.7)$$

Аналогично проверяются равенства для операторов \hat{O}_1 , \hat{O}_3 и \hat{O}_4 .

После необходимых подготовительных шагов перейдем к **изложению аргументации Д. Мермина**.

Поскольку частицы хорошо разделены в пространстве, то попробуем найти результат действия операторов $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ на каждую из частиц без возмущения состояния остальных двух частиц. В рамках концепции LR (см. параграф "Локальный реализм и BCHSH-неравенства") данная задача имеет решение. Действительно, согласно утверждению CR физические характеристики каждой из частиц, которые отвечают результатам действия операторов $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$, существуют. А согласно свойству локальности, измерение над любой из трех частиц возможно выполнить, не затронув состояния остальных двух.

Подробнее посмотрим, что предсказывает концепция LR относительно результата измерения действия операторов $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ на каждую из частиц.

Обозначим результаты измерения действия операторов $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ через $m_1^{(i)}$ и $m_2^{(i)}$ соответственно. Легко понять, что $m_1^{(i)}$ и $m_2^{(i)}$ – дихотомные переменные, поскольку оператор Паули связан с удвоенной проекцией спина на соответствующее направление. Тогда результат измерения действия оператора \hat{O}_4 на состояние $|\Psi^{(GHZ)}\rangle$ в терминологии LR можно записать как

$$m_1^{(A)} m_1^{(B)} m_1^{(C)} = -1 \quad (23.8)$$

Аналогично можно записать результаты действия операторов \hat{O}_1 , \hat{O}_2 и \hat{O}_3 на состояние $|\Psi^{(GHZ)}\rangle$:

$$\begin{aligned} m_1^{(A)} m_2^{(B)} m_2^{(C)} &= +1 \\ m_2^{(A)} m_1^{(B)} m_2^{(C)} &= +1 \\ m_2^{(A)} m_2^{(B)} m_1^{(C)} &= +1 \end{aligned} \quad (23.9)$$

Перемножим последние три равенства. Поскольку **результат измерений** может быть только **действительным** числом, то для каждой дихотомной переменной $m_2^{(i)}$ справедливо: $(m_2^{(i)})^2 = +1$.

С учетом этого находим, что

$$m_1^{(A)} m_1^{(B)} m_1^{(C)} = +1 \quad (23.10)$$

Таким образом получаем абсурдное равенство

$$-1 = m_1^{(A)} m_1^{(B)} m_1^{(C)} = +1 \quad (23.11)$$

которое явно нуждается в объяснении.

Прежде всего заметим, что в силу коммутативности, действие всех четырех операторов $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3$ и \hat{O}_4 на состояние $|\Psi^{(GHZ)}\rangle$ можно совместно измерить при помощи одного макроскопического прибора. В то время как для измерения совместного действия шестерки операторов $\sigma_1^{(A)}, \sigma_1^{(B)}, \sigma_1^{(C)}, \sigma_2^{(A)}, \sigma_2^{(B)}$ и $\sigma_2^{(C)}$ такого макроприбора не существует, поскольку $[\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}] \neq 0$.

Однако согласно предположениям **CR** + **локальности** результат действия прямого произведения трех операторов Паули должен совпадать с произведением результатов действия каждого из рассматриваемых операторов, то есть вопреки квантовой механике результат совместного действия набора операторов $\sigma_1^{(A)}, \sigma_1^{(B)}, \sigma_1^{(C)}, \sigma_2^{(A)}, \sigma_2^{(B)}$ и $\sigma_2^{(C)}$ на состояние $|\Psi^{(GHZ)}\rangle$ может быть измерен при помощи некоторого макроприбора. Это **решает** поставленный **парадокс**.

На парадокс Д. Мермина можно взглянуть с формальной точки зрения. Концепция LR требует, чтобы $[\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}] = 0$. Тогда с учетом условия $\sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)} = \hat{1}^{(i)}$ получаем

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{(A)} \otimes (\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2)^{(B)} \otimes (\sigma_2 \sigma_2 \sigma_1)^{(C)} = \\ &= \sigma_1^{(A)} \otimes \sigma_1^{(B)} \otimes \sigma_1^{(C)} = +\hat{O}_4 \end{aligned} \quad (23.12)$$

В рамках квантовой теории матрицы Паули удовлетворяют антикоммутиационному соотношению $\{\sigma_k^{(i)}, \sigma_l^{(i)}\} = 2\delta_{kl} \hat{1}^{(i)}$. То есть:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)} &= \hat{1}^{(i)} \\ \sigma_2^{(i)} \sigma_1^{(i)} &= -\sigma_2^{(i)} \sigma_1^{(i)} \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений для матриц Паули находим, что:

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{(A)} \otimes (\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2)^{(B)} \otimes (\sigma_2 \sigma_2 \sigma_1)^{(C)} = \\ &= \sigma_1^{(A)} \otimes (-\sigma_1^{(B)}) \otimes \sigma_1^{(C)} = -\hat{O}_4 \end{aligned} \quad (23.13)$$

Поэтому требования к описанию результатов измерения с точки зрения концепции LR и квантовой механики отличаются знаком (23.12) и (23.13). Это также можно проверить прямым экспериментом.

Какие еще существуют идеи проверки концепции LR?

Неравенства Белла можно расширить для частиц с произвольным спином s , то есть неравенства **НЕ ТОЛЬКО** для дихотомных величин:

- 1) A. Peres, "Finite violation of a Bell inequality for arbitrarily large spin", Phys. Rev. A46, pp.4413 – 4414 (1992);
- 2) L. De Caro, A. Garuccio, "Bell's inequality, trichotomic observables, and supplementary assumptions", Phys.Rev.A54, pp.174 - 181 (1996);
- 3) X. A. Wu, H. S. Zong, H. R. Pang, and F. Wang, "A new Bell inequality for a two spin-1 particle system", Phys. Lett. A281, 203206 (2001).

Парадокс Л. Харди (см. параграф "Парадокс Харди (Hardy's Paradox)") также можно рассматривать как еще один способ проверки концепции LR в квантовой механике:

- 1) L. Hardy, "Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states", Phys. Rev. Lett. 71, 1665 (1993).

Распространение **идей Д. Мермина** (см. параграф "Парадокс Д. Мермина") в том числе на частицы с произвольным спином (также, например, обобщение на n частиц):

- 1) N. D. Mermin, "Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems", Phys. Rev. Lett. 65, p.3373 (1990);
- 2) S. Kunkri, S. K. Choudhary, "Nonlocality without inequality for spin-s systems", Phys. Rev. A72, 022348 (2005).

Эксперименты по проверке неравенств Белла.

Самый первый эксперимент с коррелированными парами фотонов, в котором BCHSH-неравенства нарушались на уровне 5σ , был выполнен в Беркли: *S. J. Freedman and J. F. Clauser, "Experimental Test of Local Hidden Variable Theories", Phys. Rev. Lett. 28, p.938-941 (1972)*. Однако этот эксперимент не был свободен от нескольких **"лазеек"** (англ. "loopholes"), которые ставили под сомнение связь нарушения BCHSH-неравенств с доказательством справедливости квантовомеханического описания мира.

Этого можно избежать если расстояние между приборами будет больше (а лучше много больше) расстояния, которое свет проходит за время срабатывания прибора τ (Рис. 23.1), чтобы пока срабатывает один прибор, второй чисто гипотетически не мог передать ему какой-либо информации о корреляциях.

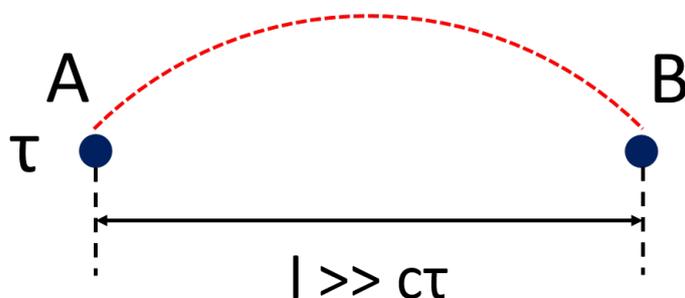


Рис. 23.1. Постановка эксперимента исключаяющая "лазейку локальности". "А" и "В" – макроприборы.

В первых экспериментах этого не получалось сделать, потому что такие эксперименты проводились на коррелированных фотонах, а такого рода эксперименты (и вообще эксперименты квантовой оптики) проводятся на так называемых "оптических столах" размеры которых не превышают 10 м. Поэтому получается, что эксперименты "А" и "В" разделены времениподобным интервалом, а не пространственноподобным как это требуется.

Тем не менее эту "лазейку" удалось преодолеть. Эксперименты А.Аспе с коллегами в Орсе: идея отложенного выбора Дж.Уиллера и случайная ориентация осей поляризаторов обеспечили пространственно-подобный интервал между выбором конфигурации обоих детекторов, то есть закрыта "лазейка локальности" (англ. "locality loophole" или "communication loophole") измерения: A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers", *Phys. Rev. Lett.* 49, pp.1804-1807 (1982). "Лазейка локальности" связана с тем, при совместном измерении наблюдаемых для каждой из квантовых систем пространственно-временной интервал между системами оказывается времениподобным. Поэтому в процессе измерения чисто гипотетически не исключен обмен информацией между макроприборами. Такой обмен гипотетически обеспечивает нелокальную корреляцию между двумя измерениями. Таким образом, подобная корреляция, а не квантовая механика, может приводить к нарушению ВСШН-неравенства.

Уже на рубеже 21-го века "лазейку нелокальности" преодолели "грубой силой" при помощи разнесения пар фотонов на сотни километров с помощью световодов. А

несколько лет назад в одном из китайских экспериментов при помощи спутника удалось разделить коррелированные пары фотонов на несколько тысяч километров.

Дальнейшее развитие экспериментов.

- 1) В экспериментах с коррелированными парами фотонов учитываются только те результаты, которые получаются при регистрации двух фотонов. Но обычно эффективность такого детектирования не превосходит 10%. Обычно экспериментатор полагает, что эффективность измерения понижает выборку, но вид распределения сохраняется, и, в среднем, повторяет вид распределения генеральной выборки. Однако, может быть какое-либо "дополнительное" взаимодействие управляет отбором зарегистрированных событий и делает экспериментальную выборку нерепрезентативной, внося дополнительные корреляции ("лазейка измерения")? И для уменьшения этого эффекта следует использовать приборы со все более и более высокой эффективностью.

В работе *P.H. Eberhard, Phys. Rev. A 47, R747 (1993)* показано, что для опровержения этого утверждения необходимо иметь детекторы фотонов с эффективностью $\eta = 2/3 \approx 66.7\%$ (т. н. предел Эберхарда) и выше.

В настоящее время в эксперименте с фотонами получена максимальная эффективность детектирования $\eta_{max\,exp} \approx 78.6\%$ (см. *A. Zeilinger et al., "Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption", Nature 497, pp.227–230 (2013)* и *B. G. Christensen et al., "Detection-Loophole-Free Test of Quantum Nonlocality, and Applications", Phys. Rev. Lett. 111, 130406 (2013)*). Необходимый результат **достигнут!** Неравенства Белла по-прежнему нарушаются.

- 2) До недавнего времени в каждом из экспериментов по проверке BCHSH-неравенств можно было закрыть только одну из двух лазеек, либо локальности, либо измерения. Однако в **2015** году были успешно проведены сразу три эксперимента (два с фотонными парами: *M. Giustina et al., "Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons", Phys. Rev. Lett. 115, 250401 (2015)*, *L. K. Shalm et al., "Strong Loophole-Free Test of Local Realism", Phys. Rev. Lett. 115, 250402 (2015)* и один на коррелированных спинах 1/2: *B. Hensen et al., "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres", Nature 526, pp.682–686 (2015)*), которые успешно **смогли закрыть сразу обе лазейки**. Во всех этих трех экспериментах неравенства Белла нарушались.

- 3) Во всех экспериментах по проверке BCHSH-неравенств необходимо сделать че-

тыре серии измерений, для получения величины каждого из корреляторов. Однако нет абсолютно никаких гарантий, что все четыре серии измерений проводятся при одних и тех же условиях (“лазейка контекстуальности” или “contextuality loophole”). Даже если используются одни и те же экспериментальные приборы, то все равно невозможно точно воспроизвести все внутренние физические параметры макроприбора и, вообще говоря, гарантировать идентичность квантовых ансамблей коррелированных частиц. **Эта проблема не решена до сих пор.**

Чтобы закрыть эту лазейку достаточно сделать одну серию измерений по проверке равенства Мермина. Однако пока таких экспериментов не было проведено.

Таким образом на сегодняшний день нельзя говорить об экспериментах, доказывающих нарушение неравенств Белла, в которых исключены все “лазейки” и вопрос о неверности концепции Локального реализма остается открытым.

Ящики Попеску-Рорлиха (Popescu-Rohrlich boxes).

Теперь попробуем обобщить все, что нам теперь известно о корреляциях и сформулировать некоторый новый обобщенный язык, который мог бы описывать две физические системы и их корреляции. В дальнейшем такой язык позволит рассматривать как классические корреляции, которые приводят к неравенствам Белла, так и квантовые корреляции, которые приводят к границе Цирельсона, а также он позволит задать вопрос: что за границей Цирельсона? Такой вопрос равносильен вопросу: а какая концепция является более общей чем концепция квантовой механики и существует ли она?

Ссылка на оригинальную статью авторов концепции: S. Popescu, D. Rohrlich, Found. Phys. 24, p. 379 (1994).

Рассмотрим физическую систему, состоящую из двух подсистем (Рис. 23.2): “А” – принадлежит «Аленушке» и подсистема «В» – принадлежит «Братцеванушке». На вход подсистемы «А» подаются либо дихотомные наблюдаемые F_A , либо значения этих наблюдаемых F'_A .

Пусть ящик работает таким образом, что при подаче на вход “0” на выходе из ящика будет получаться результат измерения наблюдаемой F_A , а при подаче на вход “1” – значение наблюдаемой F'_A . То есть на вход подается бит “ x ”, который может принимать значения $x = \{0, 1\}$.

Пусть, выходной переменной ящика будет бит $a = \{0, 1\}$, который будет преобра-

зовываться как степень минус единицы: $(-1)^a = \{+1, -1\}$.

Ящик “*B*” работает по такому же принципу: на вход будет подаваться бит $y = \{G_B, G'_B\} = \{0, 1\}$, а на выходе будем получать бит $b = \{0, 1\}$. Выход ящика “*B*” будет преобразовываться аналогичным образом: $(-1)^b = \{+1, -1\}$.

Теперь пусть между ящиками задан некоторый закон корреляции: если на входы ящиков одновременно передаются переменные x и y , то значения на выходе будут коррелированы согласно заданному закону.

Если описывать взаимодействие этих ящиков с помощью операциональных теорий (универсальный способ для любой физической системы), то необходимо использовать распределения вероятностей следующего вида: $\omega(a, b | x, y)$.

Такой способ описания коррелированных физических систем получил название «ящики Попеску-Рорлиха» или «no-signaling boxes».

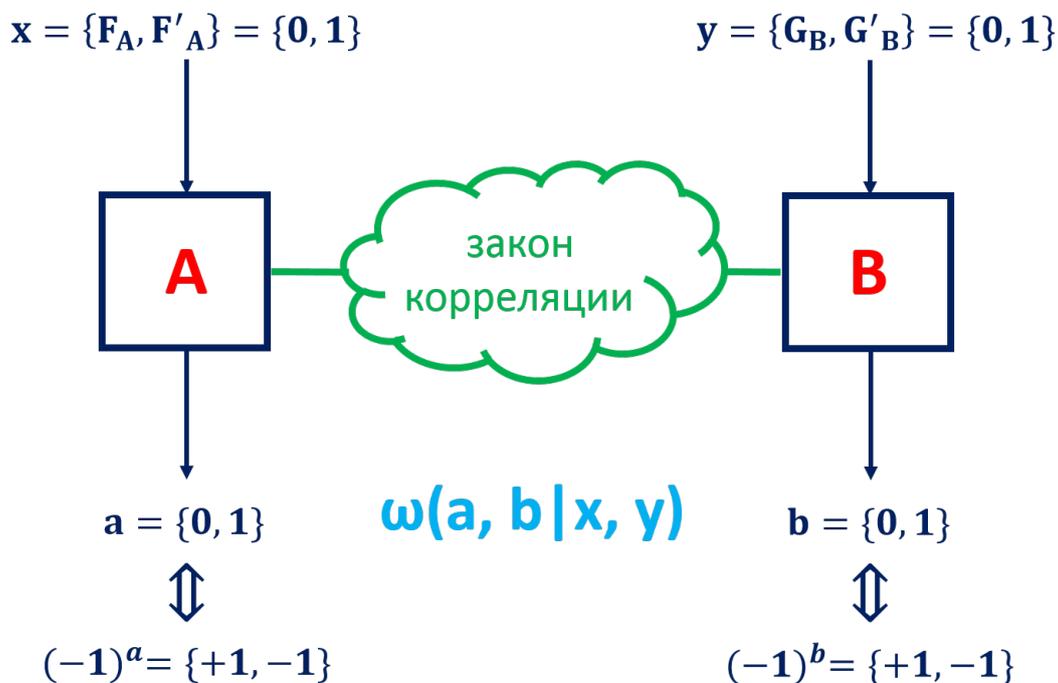


Рис. 23.2. Схематическое изображение систем “*A*” и “*B*” в виде ящиков Попеску-Рорлиха.

На ящики наложим также дополнительные условия:

- 1) **No-signaling condition:** при суммировании вероятностей по всем возможным значениям в подсистеме “*B*” (23.14), таким образом исключая факт того, что «Аленушка» знает выходное значение «Братециванушки».

$$\sum_{b=0}^1 \omega(a, b|x, y) = \omega(a|x) \quad (23.14)$$

То есть при суммировании по всем значениям выхода «Братециванушки» исчезает зависимость от того, что было подано на ящик «*B*»: выход «Аленушки» зависит только от того, что она подала на вход. Другими словами, на результат измерения в подсистеме «*A*» не влияет никакое измерение в подсистеме «*B*», а только метод измерения и запрос.

Аналогично

$$\sum_{a=0}^1 \omega(a, b|x, y) = \omega(b|y) \quad (23.15)$$

2) Условие абсолютной случайности выходов ящиков Попеску-Рорлиха:

$$\begin{aligned} x = \{0, 1\} : \omega(a = 0|x) = \omega(a = 1|x) &= \frac{1}{2} \\ y = \{0, 1\} : \omega(b = 0|y) = \omega(b = 1|y) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (23.16)$$

Это следует из нормировки вероятностей на единицу, неотрицательности вероятностей и, получении результата измерения в любом случае при его проведении.

В предыдущих лекциях были получены неравенства Белла. Было показано как вычислять сумму Белла для теории, подчиняющейся Локальному реализму, и для квантовой механики. Теперь попробуем понять, как выглядит сумма Белла для двух дихотомных величин произвольного ящика Попеску-Рорлиха. Начнем с корреляторов, их мы выражали как (19.20). Обобщим это выражение в терминах ящиков Попеску-Рорлиха:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 (-1)^a (-1)^b \omega(a, b|x, y) \quad (23.17)$$

Например, при выборе $F_A = 0$ и $G_B = 0$:

$$\langle 0, 0 \rangle = \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 (-1)^a (-1)^b \omega(a, b|0, 0) \quad (23.18)$$

Также при выводе неравенств Белла мы использовали “no-signaling conditions” (19.24), что аналогично записанному для ящиков Попеску-Рорлиха (23.14). Как можно видеть, что формализм ящиков Попеску-Рорлиха обобщает полученные ранее выражения что для Локального реализма, что для квантовой механики.

Рассмотрим типы ящиков, которые уже рассматривались до этого, но не используя концепцию Попеску-Рорлиха.

- 1) **Локальные теории, совместимые с СТО.** В этом случае выход «Аленушки» зависит только от входа ее ящика, а выход «Братециванушки» зависит только от его входа (Рис. 23.3). Тогда совместные вероятности факторизуются:

$$\omega(a, b|x, y) = \omega(a|x) \omega(b|y) \quad (23.19)$$

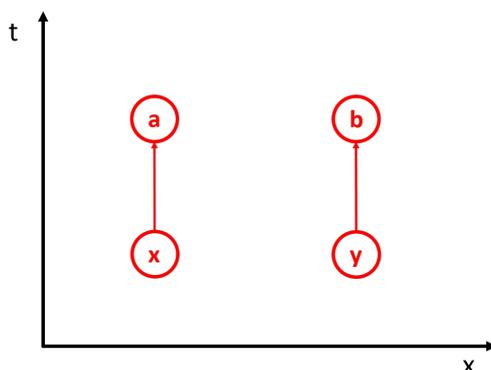


Рис. 23.3. Локальные теории, совместимые с СТО в концепции ящиков Попеску-Рорлиха.

При этом неравенство Белла (19.33) никогда не нарушается.

- 2) **Теории с локальными скрытыми параметрами.** В этом случае выход «Аленушки» зависит уже не только от входа ее ящика, но и от каких-то скрытых локальных параметров, аналогично и для «Братециванушки», причем скрытые параметры общие и влияют на оба ящика (Рис. 23.4). Тогда вероятности будут выглядеть как (сравнить с (19.26)):

$$\omega(a, b|x, y) = \int_{\Lambda} \omega(\lambda) \omega(a|x, \lambda) \omega(b|y, \lambda) \quad (23.20)$$

где Λ – ontic state space, а λ – ontic states. В этом случае неравенство Белла также не нарушается.

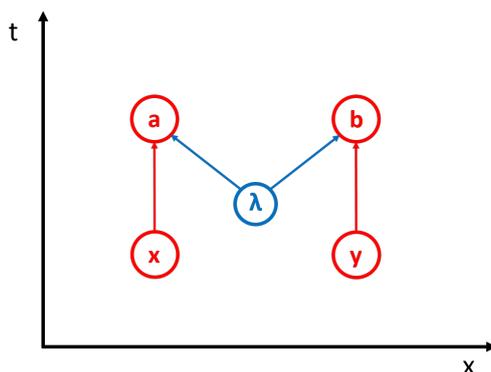


Рис. 23.4. Теории с локальными скрытыми параметрами в концепции ящиков Попеску-Рорлиха.

- 3) **Нерелятивистская квантовая механика.** Вероятность измерения в подсистеме “A” выписывали при помощи набора POVM-элементов $\{\hat{E}_{a|x}^{(A)}\}$, в подсистеме “B” – $\{\hat{E}_{b|y}^{(B)}\}$, систему описывали с помощью матрицы плотности $\hat{\rho}$ (Рис. 23.5). Вероятность в таком случае запишется как:

$$\omega(a, b|x, y) = \text{Tr} \left((\hat{E}_{a|x}^{(A)} \otimes \hat{E}_{b|y}^{(B)}) \hat{\rho} \right) \quad (23.21)$$

В таком случае сумма Белла не превосходит границы Цирельсона (20.10) (достигает на белловском состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}_{\Psi^-} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$).

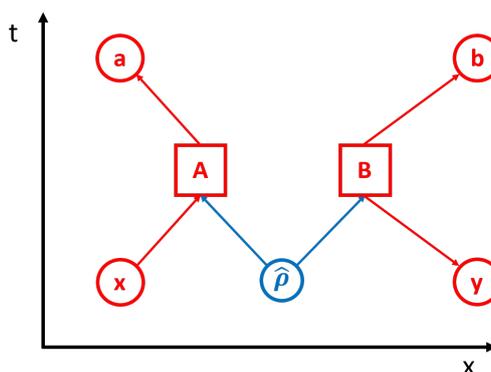


Рис. 23.5. НКМ в концепции ящиков Попеску-Рорлиха.

- 4) **Вопрос:** А есть ли теория, в которой корреляторы входящие в сумму Белла (19.33) принимают такие значения (1-й – “+1”, 2-й – “-1”, 3-й – “+1” и 4-й – “+1”), что сумма Белла достигает максимального значения равного 4?

Ответ: Как таковой физической такой теории нет (по крайней мере пока). Однако ящики Попеску-Рорлиха позволяют построить такую абстрактную модель с такими корреляциями (Рис. 23.6) (не создавая при этом теорию). Такая корреляция будет иметь следующий вид:

$$x \times y = a \oplus b \quad (23.22)$$

где \oplus – сумма по модулю 2 (результатом этой операции является остаток от деления на два суммы чисел a и b).

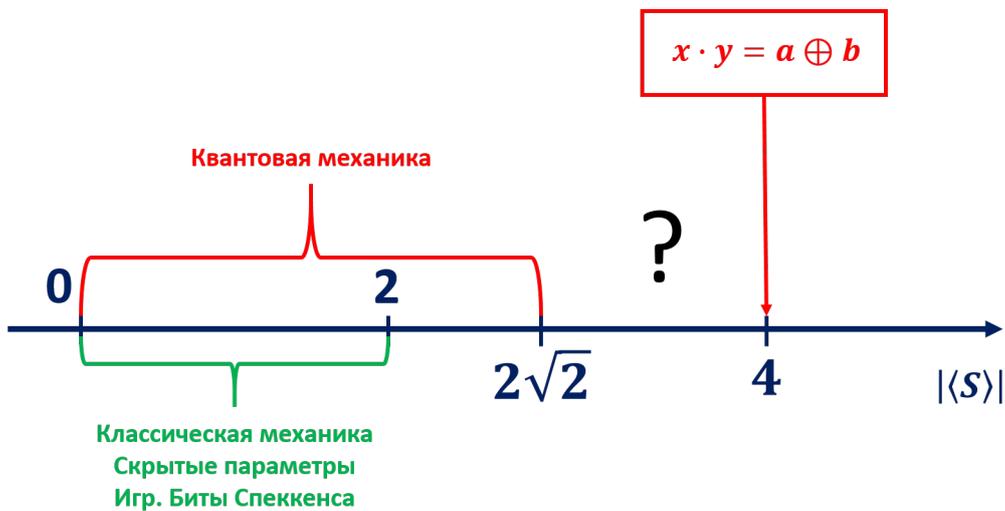


Рис. 23.6. Иерархия различных физических теорий по значению суммы Белла.

Лекция 24. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 1.

Ящики Попеску-Рорлиха (продолжение).

В прошлой лекции было сказано, что для ящиков Попеску-Рорлиха с корреляцией вида (23.22) достигается максимальное значение суммы Белла равно 4. Покажем это.

Для начала немного изменим обозначения, принятые в прошлой лекции (Рис. 23.2), а именно

$$\begin{aligned}F'_A &\rightarrow x = 0 \\F_A &\rightarrow x = 1 \\G_B &\rightarrow y = 0 \\G'_B &\rightarrow y = 1\end{aligned}\tag{24.1}$$

Запишем сумму Белла в таких обозначениях

$$\begin{aligned}\langle F_A G_B \rangle - \langle F_A G'_B \rangle + \langle F'_A G_B \rangle + \langle F'_A G'_B \rangle = \\= \langle 10 \rangle - \langle 11 \rangle + \langle 00 \rangle + \langle 01 \rangle\end{aligned}\tag{24.2}$$

Теперь для вычисления средних входящих в (24.2) составим таблицу всех возможных вероятностей $\omega(a, b|x, y)$. Поскольку в вероятность входит четыре переменные (две на вход ящиков и две на выход), каждая из которых принимает два значения, то общее количество принимаемых значений будет равно $2^4 = 16$.

Для начала, например, разберем как работает корреляция вида (23.22). Рассмотрим на простом примере (Таблица 27.1) корреляцию вида $x \times y$

Таблица 24.1. Закон корреляции $x \times y$.

x	y	$x \times y$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Теперь рассмотрим на простом примере (Таблица 24.2) корреляцию вида $a \oplus b$

Таблица 24.2. Закон корреляции $a \oplus b$.

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Используя это выпишем таблицу (Таблица 24.3) для вероятностей $\omega(x, y|a, b)$, считая что вероятность принимает значение 1 если корреляция вида (23.22) выполняется, и значение 0 – если не выполняется. Используя (Таблица 27.1) и (Таблица 24.2), сверяя значения для различных пар $\{x, y\}$ и $\{a, b\}$ и проверяя условие (23.22) можем записать

Таблица 24.3. Условные вероятности для ящиков Попеску-Рорлиха.

x	y	a, b	$\omega(a, b, x, y)$
0	0	{0, 0}	$\omega(0, 0 0, 0) = \frac{1}{2}$
		{1, 1}	$\omega(1, 0 0, 0) = 0$
			$\omega(0, 1 0, 0) = 0$
			$\omega(1, 1 0, 0) = \frac{1}{2}$
1	0	{0, 0}	$\omega(0, 0 1, 0) = \frac{1}{2}$
		{1, 1}	$\omega(1, 0 1, 0) = 0$
			$\omega(0, 1 1, 0) = 0$
			$\omega(1, 1 1, 0) = \frac{1}{2}$
0	1	{0, 0}	$\omega(0, 0 0, 1) = \frac{1}{2}$
		{1, 1}	$\omega(1, 0 0, 1) = 0$
			$\omega(0, 1 0, 1) = 0$
			$\omega(1, 1 0, 1) = \frac{1}{2}$
1	1	{0, 0}	$\omega(0, 0 1, 1) = 0$
		{1, 1}	$\omega(1, 1 1, 1) = 0$
			$\omega(1, 0 1, 1) = \frac{1}{2}$
			$\omega(0, 1 1, 1) = \frac{1}{2}$

Поясним полученные значения для вероятностей на примере значений из первой строки (Таблица 24.3). Используя (23.16) запишем

$$\begin{aligned} \sum_{a=0}^1 \omega(a, b=0|x=0, y=0) &= \omega(a=0, b=0|x=0, y=0) + \\ &+ \omega(a=1, b=0|x=0, y=0) = \omega(b=0|y=0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Но поскольку $\omega(a=1, b=0|x=0, y=0) = 0$ (см. (Таблица 24.3)) получаем, что $\omega(a=0, b=0|x=0, y=0) = \frac{1}{2}$. В качестве упражнения читателю рекомендуется самостоятельно посчитать $\omega(1, 1|0, 0)$. Здесь же приведем еще один способ ее расчета.

Теперь, зная, что $\omega(0, 0|0, 0) = \frac{1}{2}$ если посчитать сумму всех вероятностей в блоке первой строки (Таблица 24.3)

$$\begin{aligned} \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 \omega(a, b|x=0, y=0) &\stackrel{NS}{=} \sum_a \omega(a|x=0) = \\ &= \omega(a=0|x=0) + \omega(a=1|y=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

легко посчитать что оставшаяся вероятность $w(1, 1|0, 0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Аналогично вычисляются и остальные вероятности.

Используя “No-signaling condition” еще раз проверим правильность вероятностей изложенных в (Таблица 24.3).

$$\sum_{a=0}^1 \omega(a, b=0|x, y=1) = \begin{cases} x=0 : \omega(0, 1|0, 1) + \omega(1, 1, |0, 1) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \omega(b=1|y=1) \\ x=1 : \omega(0, 1|1, 1) + \omega(1, 1, |1, 1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} = \omega(b=1|y=1) \end{cases}$$

Сравнивая с (23.15) убеждаемся в правильности вышеизложенного.

Теперь приступим к вычислению корреляторов в сумме Белла.

$$\begin{aligned} \langle 00 \rangle &= \langle x=0y=0 \rangle = \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 (-1)^a (-1)^b \omega(a, b|0, 0) = \\ &= (-1)^0 (-1)^0 \omega(0, 0|0, 0) + (-1)^1 (-1)^0 \omega(1, 0|0, 0) + \\ &+ (-1)^0 (-1)^1 \omega(0, 1|0, 0) + (-1)^1 (-1)^1 \omega(1, 1|0, 0) = \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned} \tag{24.3}$$

Корреляторы $\langle 01 \rangle$ и $\langle 10 \rangle$ вычисляются аналогично (читателю предлагается получить их самостоятельно)

$$\langle 01 \rangle = \langle 10 \rangle = 1 \quad (24.4)$$

Теперь посчитаем последний коррелятор

$$\begin{aligned} \langle 11 \rangle &= \langle x=1, y=1 \rangle = \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 (-1)^a (-1)^b \omega(a, b|1, 1) = \\ &= (-1)^1 (-1)^0 \omega(1, 0|1, 1) + (-1)^0 (-1)^1 \omega(0, 1|1, 1) + 0 + 0 = \\ &= (-1) \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = -1 \end{aligned} \quad (24.5)$$

Теперь подставляем полученные значения корреляторов в модуль суммы Белла (24.2)

$$\begin{aligned} |\langle S \rangle| &= |\langle 10 \rangle - \langle 11 \rangle + \langle 00 \rangle + \langle 01 \rangle| = \\ &= |1 + (-1) + 1 + 1| = 4 \end{aligned} \quad (24.6)$$

Таким образом сумма Белла для ящиков Попеску-Рорлиха с корреляцией вида (23.22) достигает максимального значения.

Игра Белла (по Джеффри Бубу).

Литература:

- 1) J. Bub, "Quantum probabilities an information-theoretic interpretation", quant-ph: 10052448.
- 2) Н. Жизан, "Квантовая случайность", "АНФ", 2016

Рассмотрим игру с двумя игроками (Рис. 24.1): «Аленушкой» и «Братециванушкой» у каждого из которых по черному ящику «А» и «В». Обозначим вход и выход ящика «А» через x и a , а ящика «В» через y и b . Также пусть имеется «мастер игры», который устанавливает правила игры, но при этом не говорит о них игрокам.

Принципы игры:

- 1) Игра состоит из раундов в каждом из которых на входы ящиков «А» и «В» случайным образом (с вероятностью $\frac{1}{2}$) могут подаваться либо 0, либо 1: $x = \{0, 1\}$ и $y = \{0, 1\}$.

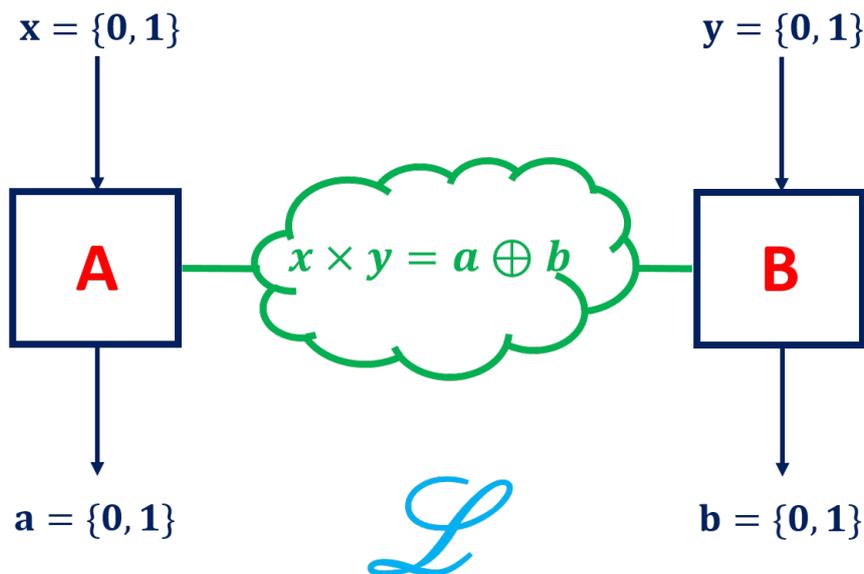


Рис. 24.1. Схема игры Белла между «Аленушкой» и «Братециванушкой».

- 2) До начала игры «Аленушке» и «Братециванушке» разрешается договориться об общей стратегии \mathcal{L} , которой они будут придерживаться каждый раунд.
- 3) После начала игры игрокам запрещается общаться.
- 4) После начала раунда каждому игроку известно только значение случайной величины, поданное на его ящик.
- 5) В каждом раунде каждый игрок на выход своего ящика выставляет значение соответствующей переменной согласно принятой стратегии \mathcal{L} . Обозначим такую переменную для «Аленушки» за $a = \{0, 1\}$, а для «Братециванушки» – за $b = \{0, 1\}$.
- 6) «Мастер игры» знает все переменные поданные как входы, так и на выходы ящиков игроков, и может сказать кто выиграл, а кто проиграл текущий раунд, согласно тем правилам, которые он («мастер игры») придумал для данной игры.

Правила «мастера игры»:

- 1) Если в раунде выпала одна из трех пар $(x, y) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ при том, что «Аленушка» и «Братециванушка» выставили значения a и b таким образом, что $a \oplus b = 0$, то они выигрывают раунд.

- 2) Если случайно выпала пара $(x, y) = (1, 1)$, при том, что «Аленушка» и «Братециванушка» выставили значения a и b таким образом, что $a \oplus b = 1$, то они также выигрывают раунд.

Соответственно все что не выигрыш – проигрыш.

Теперь если обратить внимание, то станет понятно, что правила «мастера игры» эквивалентны закону корреляции (23.22). Заметим, что такая игра эквивалентна рассматриваемым ранее ящикам Попеску-Рорлиха (Рис. 23.2), только с некоторым заданным (а не условным) законом корреляции. При этом “no-signaling condition” также выполняются, поскольку игроки не могут общаться во время игры.

Запишем некоторые условия для вероятностей, воспользовавшись при этом симметрией между ящиками:

$$\begin{aligned}\omega(a = 0|x = 1) &= \omega(a = 0|x = 0) = \omega(b = 0|y = 1) = \omega(b = 0|y = 0) \\ \omega(a = 1|x = 1) &= \omega(a = 1|x = 0) = \omega(b = 1|y = 1) = \omega(b = 1|y = 0)\end{aligned}\tag{24.7}$$

Теперь разберем концепцию стратегии. Предложим следующие варианты стратегий:

- 1) **Случайная стратегия** Предположим, игроки не хотят выбирать стратегию и решают подавать на выходы случайные величины.
- 2) **Стратегия $|\Psi^-\rangle$** Пусть до начала игры «Аленушка» и «Братециванушка» выбрали каждый себе свой спин и провели сколь угодно большую серию измерений ансамбля состояний $|\Psi^-\rangle$, составили таблицу этих значений. И в процессе игры руководствуются данными проведенных ранее измерений. Таким образом, хотя они и не будут общаться в процессе игры, но согласование входов и выходов их ящиков будет присутствовать.
- 3) Не исключено, что они могут договориться о стратегии согласно закону корреляции (23.22) и выигрывать каждый раунд.

Создание подобных стратегий и корреляций в теории игр называется «ресурс». На примере, не относящемся к ящикам Попеску-Рорлиха, продемонстрируем насколько может быть важен выбор «ресурса».

Пусть есть тюрьма с камерой, в которой живут 100 узников. Каждому из них присвоен номер от 1 до 100. В один из дней к заключенным приходит начальник тюрьмы и предлагает игру: каждого узника будут заводить в комнату, в которой случайным образом расставлены 100 стаканов, на дне каждого из которых написан номер от 1

до 100; стаканы не переставляются после раундов, т. е. их начальная конфигурация сохраняется на протяжении всей игры. Далее первому узнику предлагается открыть любые 50 стаканов (после раунда стаканы возвращаются в начальное положение), после чего его уводят в другую изолированную комнату. И так с каждым заключенным. Если каждый найдет стакан с номером, совпадающим с номером на робе, то всех узников отпускают, но если хоть один ошибся, то всех казнят.

Узники могут договориться об одной стратегии до начала игры. Очевидно, что с первого взгляда вероятность каждого узника найти свой порядковый номер равна $\frac{1}{2}$, а вероятность спасения $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$. Однако, оказывается, что существует классическая стратегия которая может поднять шансы на освобождения до $> 31\%$.

Лекция 25. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 2.

Игра Белла (продолжение).

В прошлой лекции были разобраны правила игры Белла для «Аленушки» и «Братцеванушки». Теперь попробуем вычислить вероятность выигрыша при условии выбора некоторой стратегии $\omega(\text{win}|\mathcal{L})$. Как будет показано ниже величина такой вероятности определяется суммой Белла. Выпишем все возможные победные случаи (см. прошлую лекцию).

$$\begin{aligned}\omega(\text{win}|\mathcal{L}) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \omega(a \oplus b = 0 | x = 0, y = 0, \mathcal{L}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \omega(a \oplus b = 0 | x = 0, y = 1, \mathcal{L}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \omega(a \oplus b = 0 | x = 1, y = 0, \mathcal{L}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \omega(a \oplus b = 0 | x = 1, y = 1, \mathcal{L})\end{aligned}\tag{25.1}$$

Множители $\frac{1}{2}$ появляются потому, что вероятность выпадения одного из двух значений для каждого бита $x = \{0, 1\}$ и $y = \{0, 1\}$ равна $\frac{1}{2}$.

Теперь выразим данное выражение (25.1) через сумму Белла (24.2). Запишем выражение для суммы Белла при данной стратегии \mathcal{L}

$$S_{\mathcal{L}} = \langle 00 \rangle_{\mathcal{L}} + \langle 01 \rangle_{\mathcal{L}} + \langle 10 \rangle_{\mathcal{L}} - \langle 11 \rangle_{\mathcal{L}}\tag{25.2}$$

Перепишем выражение (23.17) добавив в условную вероятность выбранную стратегию \mathcal{L}

$$\begin{aligned}\langle xy \rangle &= \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 (-1)^a (-1)^b \omega(a, b | \mathcal{L}, x, y) = \\ &= \omega(0, 0 | \mathcal{L}, x, y) + \omega(1, 1 | \mathcal{L}, x, y) - \\ &- \omega(0, 1 | \mathcal{L}, x, y) - \omega(1, 0 | \mathcal{L}, x, y) = \\ &= \omega(\text{so} | \mathcal{L}, x, y) - \omega(\text{do} | \mathcal{L}, x, y)\end{aligned}\tag{25.3}$$

$$\omega(\text{so} | \mathcal{L}, x, y) \iff \omega(\text{same outputs} | \mathcal{L}, x, y)$$

$$\omega(\text{do} | \mathcal{L}, x, y) \iff \omega(\text{different outputs} | \mathcal{L}, x, y)$$

Заметим, что при одинаковых значениях выходных битов a и b вероятности входящие в коррелятор имеют положительный знак, а при разных значениях выходных битов – отрицательный, поэтому вероятности с одинаковым выходом были объединены в одну вероятность, также как и вероятности с разным выходом (25.3).

Теперь запишем условие нормировки для вероятностей при фиксированном x и y

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 \omega(a,b|\mathcal{L},x,y) = \\
 &= \omega(0,0|\mathcal{L},x,y) + \omega(1,1|\mathcal{L},x,y) + \\
 &+ \omega(0,1|\mathcal{L},x,y) + \omega(1,0|\mathcal{L},x,y) = \\
 &= \omega(so|\mathcal{L},x,y) + \omega(do|\mathcal{L},x,y)
 \end{aligned} \tag{25.4}$$

Таким образом имеем систему уравнений (25.3-25.4) на вероятности. Решая ее получаем

$$\begin{aligned}
 \omega(so|\mathcal{L},x,y) &= \frac{1}{2}(1 + \langle xy \rangle_{\mathcal{L}}) \\
 \omega(do|\mathcal{L},x,y) &= \frac{1}{2}(1 - \langle xy \rangle_{\mathcal{L}})
 \end{aligned} \tag{25.5}$$

Выразим слагаемые входящие в выражение (25.1) согласно новым обозначениям

$$\begin{aligned}
 \omega(a \oplus b = 0|x=0,y=0,\mathcal{L}) &= \omega(0,0|x=0,y=0,\mathcal{L}) + \\
 &+ \omega(0,0|x=0,y=0,\mathcal{L}) = \omega(so|\mathcal{L},0,0) = \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \langle 00 \rangle_{\mathcal{L}})
 \end{aligned} \tag{25.6}$$

Аналогично получаем для остальных вероятностей из выражения (25.1)

$$\begin{aligned}
 \omega(a \oplus b = 0|\mathcal{L},0,1) &= \omega(so|\mathcal{L},0,1) = \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \langle 01 \rangle_{\mathcal{L}}) \\
 \omega(a \oplus b = 0|\mathcal{L},1,0) &= \frac{1}{2}(1 + \langle 10 \rangle_{\mathcal{L}})
 \end{aligned} \tag{25.7}$$

$$\begin{aligned}
 \omega(a \oplus b = 1|\mathcal{L},1,1) &= \omega(0,1|\mathcal{L},1,1) + \\
 &+ \omega(1,0|\mathcal{L},1,1) = \omega(do|\mathcal{L},1,1) = \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \langle 11 \rangle_{\mathcal{L}})
 \end{aligned}$$

Подставляя (25.6-25.7) в (25.1) и используя (25.2) выражаем вероятность выигрыша при выбранной стратегии \mathcal{L}

$$\begin{aligned}\omega(\text{win}|\mathcal{L}) &= \frac{1}{4} \left(\omega(\text{so}|\mathcal{L}, 0, 0) + \omega(\text{so}|\mathcal{L}, 0, 1) + \right. \\ &\quad \left. + \omega(\text{so}|\mathcal{L}, 1, 0) + \omega(\text{do}|\mathcal{L}, 1, 1) \right) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + \langle 00 \rangle_{\mathcal{L}} + 1 + \langle 01 \rangle_{\mathcal{L}} + 1 + \langle 10 \rangle_{\mathcal{L}} + 1 - \langle 11 \rangle_{\mathcal{L}}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)\end{aligned}\tag{25.8}$$

Таким образом вероятность выигрыша в каждом раунде игры Белла, если «Аленушка» и «Братециванушка» придерживаются изначально выбранной стратегии \mathcal{L} , дается выражением (25.8). Нетрудно понять чему равна вероятность проигрыша $\omega(\overline{\text{win}}|\mathcal{L})$

$$\omega(\overline{\text{win}}|\mathcal{L}) = 1 - \omega(\text{win}|\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)\tag{25.9}$$

Теперь оценим шансы на выигрыш «Аленушки» и «Братециванушки» при выборе различных стратегий:

- 1) Пусть «Аленушка» и «Братециванушка» выбрали некоторую стратегию, основанную на любых классических теориях (классических ресурсах). Например, это могут быть стратегии: скрытых параметров; случайная; релятивистская и т. п. Для суммы Белла в таком случае известно, что (неравенство Белла)

$$|S_{\text{classic}}| \leq 2$$

Тогда получаем ограничение на вероятность выигрыша при выборе классической стратегии

$$\omega(\text{win}|\text{classic}) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{4} \right) = \frac{3}{4}\tag{25.10}$$

- 2) Теперь, пусть «Аленушка» и «Братециванушка» выбрали некоторую стратегию, основанную на квантовой механике. Например, чистое запутанное состояние двух спинов $\frac{1}{2}$ (даже не обязательно белловским) $|\Psi\rangle$. Для суммы Белла в таком случае известно, что (граница Цирельсона)

$$|S_{\text{quant}}| \leq 2\sqrt{2}$$

Тогда получаем ограничение на вероятность выигрыша при выборе квантовой стратегии

$$\omega(\text{win}|\text{quant}) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.85 \quad (25.11)$$

- 3) Наконец, если «Аленушка» и «Братециванушка» выбрали стратегию, основанную на корреляции Попеску-Рорлиха (23.22), тогда для суммы Белла в таком случае известно, что

$$|S_{a \oplus b = xy}| = 4$$

Тогда вероятность выигрыша

$$\omega(\text{win}|a \oplus b = xy) \leq 1 \quad (25.12)$$

Таким образом, было показано, что вероятность выигрыша в игре Белла зависит не только от выбранной стратегии (и естественно случайности), но и та физика, что лежит в основе данной стратегии.

Протоколы ван Дама.

Литература:

- 1) Win van Dam, "Nonlocality and communication complexity Oxford Univ. (2000)
- 2) Win van Dam, quant-ph/0501159

Вернемся к рассмотрению ящичков Попеску-Рорлиха (Рис. 23.2), приняв закон корреляции согласно (23.22).

Только теперь, пусть «Аленушка» может подавать на вход подсистемы "А" два независимых бита x_0 и x_1 и один бит a на выходе. Из этих трех битов она может сформировать один классический бит z , который по классическому каналу связи можно передать «Братециванушке».

«Братециванушка» в свою очередь может подавать на вход подсистемы "В" один независимый бит $y = \{0, 1\}$ (может подать либо 0, либо 1) и получить на выходе бит b . Заметим, что значение выхода b скоррелировано со значением в подсистеме «Аленушки» (23.22).

После получения классического бита z перед «Братециванушкой» ставится задача: скомпоновать бит y , бит b и полученный от «Аленушки» бит z таким образом, чтобы узнать значение одного из входных битов «Аленушки», причем при выборе $y = 0$ необходимо узнать значение бита x_0 , а при выборе $y = 1$ – бита x_1 .

То есть, имея два ящика Попеску-Рорлиха, связанных законом корреляции (23.22), и получив от «Аленушки» один бит классической информации, «Братециванушке» необходимо придумать процедуру при помощи которой он сможет узнать значение любого из двух классических битов находящихся у «Аленушки». Схема такой задачи изображена на (Рис. 25.1).

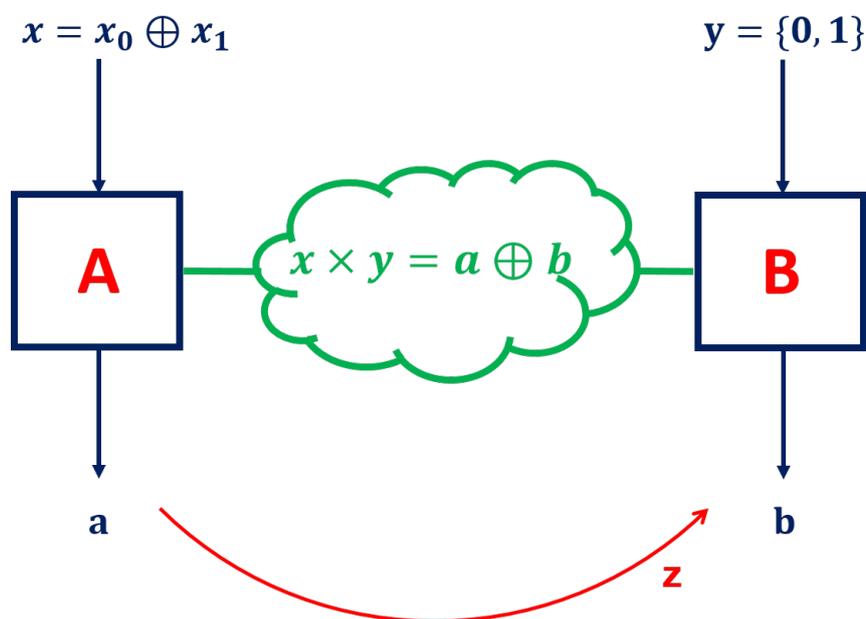


Рис. 25.1. Схема для иллюстрации протоколов ван Дама.

Заметим что при использовании классических корреляций (для которых сумма Белла не превосходит двойки) это сделать невозможно: получив информацию в один бит невозможно произвольно узнать информацию о любом из двух (трех, четырех, десяти и т. д.) битов.

Начнем:

- 1) На вход ящика "А" «Аленушка» подает бит $x = x_0 \oplus x_1$.
- 2) Далее «Аленушка» формирует классический бит $z = x_0 \oplus a$ и передает его «Братециванушке».

3) «Братециванушка» получает бит z и по модулю два складывает с выходным битом своего ящика

$$\begin{aligned} z \oplus b &= x_0 \oplus a \oplus b = x_0 \oplus (a \oplus b) = x_0 \oplus x \times y = \\ &= x_0 \oplus (x_0 \oplus x_1)y = x_0(1 \oplus y) \oplus x_1y \end{aligned}$$

а) Теперь, если «Братециванушка» захочет узнать значение бита x_0 , то он должен на вход своего ящика подать $y = 0$, тогда

$$(z \oplus b)|_{y=0} = x_0$$

б) А если «Братециванушка» на вход своего ящика подаст $y = 1$, то

$$(z \oplus b)|_{y=1} = x_0(1 \oplus 1) \oplus x_1 = x_1$$

Таким образом «Братециванушка» получив один классический бит и имея ящик с корреляцией (23.22) может узнать значение любого из двух классических битов «Аленушки».

Более того, при наличии нескольких коррелированных ящиков, «Братециванушка» может узнать значение любого из 2^n входных битов «Аленушки», получив от нее только один классический бит.

Обобщение протоколов ван Дама.

Покажем как обобщить протоколы ван Дама для $4 = 2^2$ битов (Рис. 25.2).

Пусть «Аленушка» имеет четыре бита x_1, x_2, x_3 и x_4 входных бита. На первом шаге у «Аленушки» имеется два ящика A_L и A_R , а у «Братециванушки» – один ящик B'' . Каждый из двух ящиков «Аленушки» связан законом корреляции вида (23.22) с ящиком «Братециванушки».

На левый ящик «Аленушка» подает бит $x_L = x_0 \oplus x_1$, а на правый – $x_R = x_2 \oplus x_3$. На выходах «Аленушка» получает биты a_L и a_R для левого и правого ящиков соответственно. «Братециванушка» в свою очередь имеет бит y'' на входе и b'' – на выходе.

На втором шаге у «Аленушки» имеется один ящик A , и у «Братециванушки» также имеется один ящик B' . Эти ящики также связаны законом корреляции вида (23.22). «Аленушка» на вход ящика A подает $(x_0 \oplus a_L) \oplus (x_2 \oplus a_R)$, а на выходе получает бит a . «Братециванушка» же имеет бит y' на входе и b' – на выходе.

Далее «Аленушка» формирует классический бит $z = x_0 \oplus a_L \oplus a$ и передает «Братцеванушке».

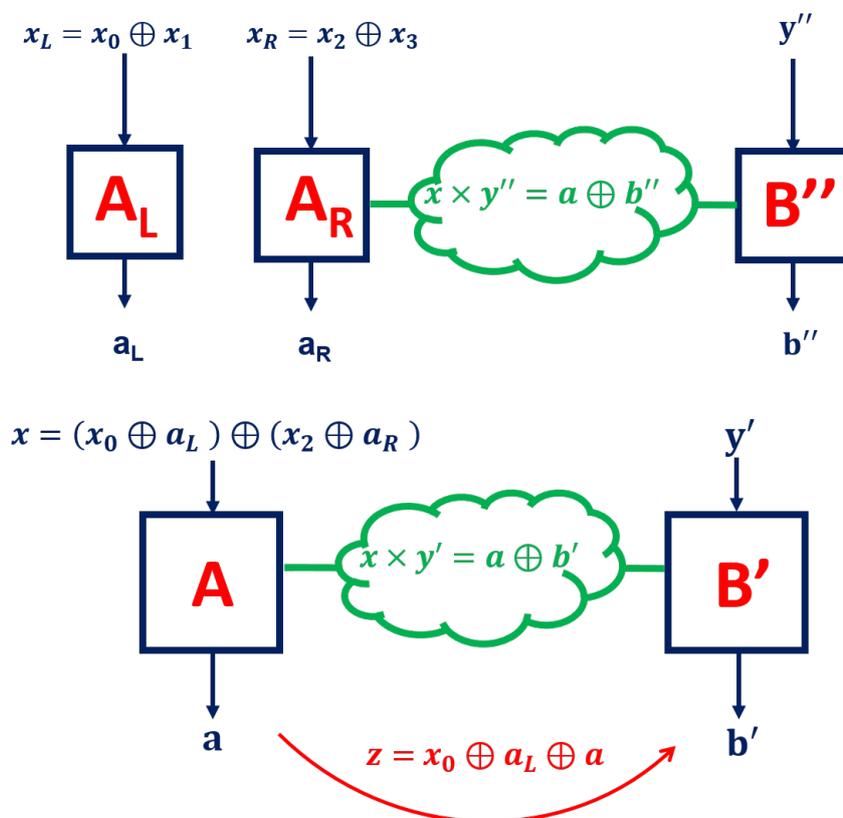


Рис. 25.2. Схема для иллюстрации обобщения протоколов ван Дама для $4 = 2^2$ битов.

Теперь «Братцеванушка» составляет следующую конструкцию, в которой дважды применяется протокол ван Дама

$$\begin{aligned}
 z \oplus b' \oplus b'' &= x_0 \oplus a_L \oplus (a \oplus b') \oplus b'' = x_0 \oplus a_L \oplus x \times y' \oplus b'' = \\
 &= x_0 \oplus a_L \oplus (x_0 \oplus a_L)y' \oplus (x_2 \oplus a_R)y' \oplus b'' = \\
 &= (x_0 \oplus a_L)(1 \oplus y') + (x_2 \oplus a_R)y' \oplus (1 \oplus 2y')b'' = \\
 &= (x_0 \oplus a_L)(1 \oplus y') + (x_2 \oplus a_R)y' \oplus (1 \oplus y' \oplus y')b'' = \\
 &= (x_0 \oplus a_L \oplus b'')(1 \oplus y') + (x_2 \oplus a_R \oplus b'')y' = \\
 &= \left(x_0(1 \oplus y'') \oplus x_1 y'' \right) (1 \oplus y') + \left(x_2(1 \oplus y'') \oplus x_3 y'' \right) y'
 \end{aligned} \tag{25.13}$$

Теперь рассмотрим следующие случаи:

- 1) Если «Братцеванушка» подает на вход ящика B'' бит $y'' = 0$, а на вход B' бит

$y' = 0$, то согласно (25.13) он узнает

$$(z \oplus b' \oplus b'')|_{00} = x_0$$

- 2) Аналогично можно показать, что если «Братециванушка» подает на вход ящика B'' бит $y'' = 1$, а на вход B' бит $y' = 0$, то согласно (25.13) он узнает x_1 .
- 3) Если «Братециванушка» подает на вход ящика B'' бит $y'' = 0$, а на вход B' бит $y' = 1$, то согласно (25.13) он узнает x_2 .
- 4) Наконец, если «Братециванушка» подает на вход ящика B'' бит $y'' = 0$, а на вход B' бит $y' = 1$, то согласно (25.13) он узнает x_3 .

Таким образом выбирая значения битов y'' и y' «Братециванушка» может узнать любой из четырех входных битов «Аленушки» x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , получив от нее только один классический бит z .

Эту процедуру можно обобщить на количество битов $N = 2^n$ добавив соответствующее количество шагов.

Остается добавить, что в реальном мире выполняются только те теории, в которых невозможно выполнить аналог протоколов ван Дама, то есть только теории с корреляциями, которые позволяют при передаче от одного локального наблюдателя другому одного классического бита, имея какие-то корреляции, узнать только один бит. В этом заключается содержание принципа информационной причинности.

Лекция 26. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 3.

Принцип информационной причинности.

Литература:

- 1) M. Pawlowski, T. Paterek, D. Kozlikowski, V. Scarani, A. Winter, M. Zukowski, "A New Physical Principle: Informational Causality Nature 461, p1101 (2009)

Снова рассмотрим "игру" с двумя игроками (Рис. 26.1): «Аленушкой» и «Братециванушкой», у каждого из которых есть по ящику Попеску-Рорлиха "А" и "В" соответственно. Также пусть в игре опять присутствует "мастер игры". «Аленушке» подается два случайных некоррелированных бита $\vec{x} = (x_0, x_1)$, из которых она может составить некоторую комбинацию в виде бита x , подаваемого на вход ящика "А". На вход ящика «Братециванушки» случайным образом подается одно из двух значений бита $y = \{0, 1\}$.

Во время игры «Аленушке» и «Братециванушке» запрещается обмениваться информацией, но они могут выбрать до начала игры некоторую стратегию \mathcal{L} . На выход ящика "А" «Аленушка» может подать бит a , выбор которого зависит от входного бита x и выбранной стратегии \mathcal{L} . Соответственно, «Братециванушка» на выход своего ящика "В" может подать бит y , выбор которого также зависит от входного бита b и выбранной стратегии \mathcal{L} .

"Мастер игры" устанавливает между ящиками корреляцию согласно (23.22). При этом игрокам неизвестно о корреляции. Также, до того как «Братециванушка» выберет выходной бит b для своего ящика «Аленушке» разрешается из битов x_0, x_1, a сформировать один классический бит z и передать его «Братециванушке», после чего он зная значения битов y и z может выбрать значение выходного бита b согласно выбранной стратегии \mathcal{L} .

Далее «Братециванушка» может на основе значений битов y, z и b сконструировать "суждение" в виде бита g . И если получив бит $y = 1$ его "суждение" совпадает со случайным битом x_1 выпавшим «Аленушке», то "мастер игры" засчитывает данный раунд как победный. Также победным считается раунд, в котором "суждение" g совпадает со случайным битом x_0 , при условии, что «Братециванушка» получил бит $y = 0$. В остальных случаях игра будет считаться проигранной.

Вычислим вероятность выигрыша каждого раунда. Она состоит из двух вероятностей: вероятность угадывания бита $x_0 - \omega_0(\mathcal{L})$ и вероятность угадывания бита $x_1 - \omega_1(\mathcal{L})$.

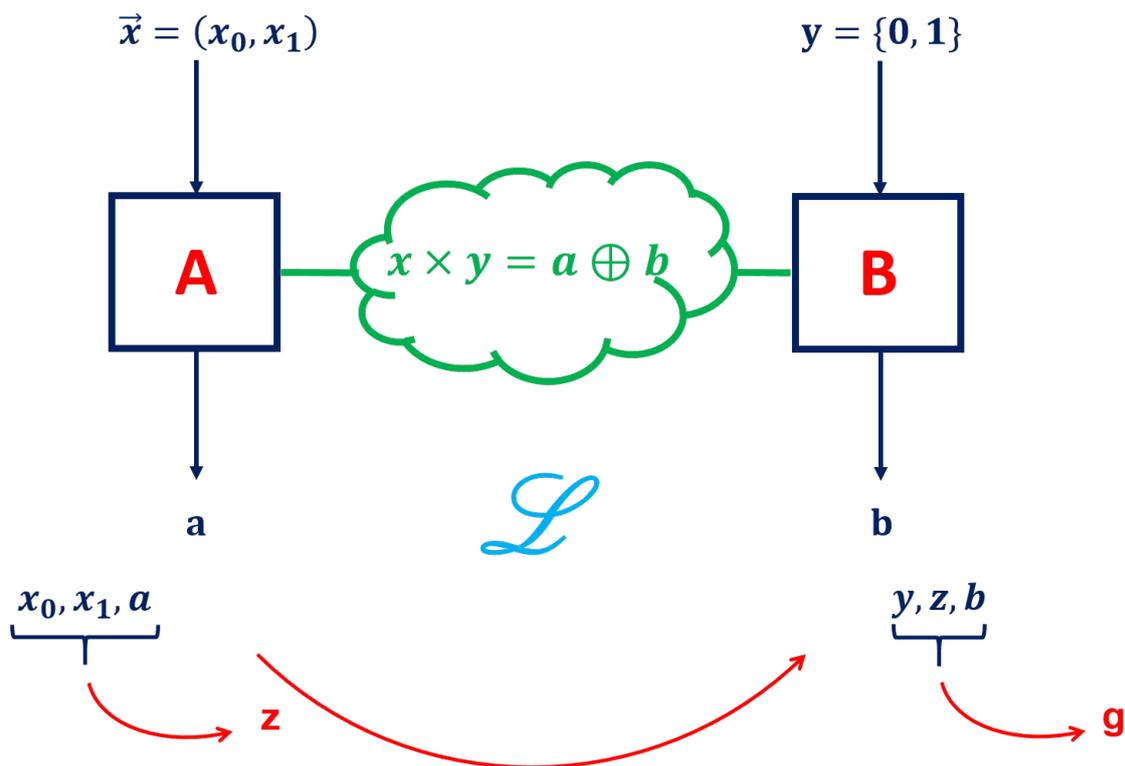


Рис. 26.1. Игра иллюстрирующая принцип информационной причинности.

Угадывание бита x_0 возможно при условии, что «Братециванушке» выпал бит $y = 0$. Тогда используя (23.22) получаем геомет

$$x_0, y = 0 \implies a \oplus b = x \times 0 = 0 \quad (26.1)$$

В свою очередь вероятность угадывания бита x_0 , при выбранной стратегии \mathcal{L}

$$\omega_0(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(\omega(a \oplus b = 0 | \mathcal{L}, x = 0, y = 0) + \omega(a \oplus b = 0 | \mathcal{L}, x = 1, y = 0) \right) \quad (26.2)$$

Далее, угадывание бита x_1 возможно при условии, что «Братециванушке» выпал бит $y = 1$. Тогда, согласно (23.22) получаем два случая

$$x_1, y = 1 \implies a \oplus b = \begin{cases} (x, y) = (0, 1), & a \oplus b = 0 \times 1 = 0 \\ (x, y) = (1, 1), & a \oplus b = 1 \times 1 = 1 \end{cases} \quad (26.3)$$

Тогда вероятность угадывания бита x_1 , при выбранной стратегии \mathcal{L}

$$\omega_1(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(\omega(a \oplus b = 0 | \mathcal{L}, x = 0, y = 1) + \omega(a \oplus b = 1 | \mathcal{L}, x = 1, y = 1) \right) \quad (26.4)$$

Используя (26.2) и (26.4) выражаем общую вероятность победы

$$\begin{aligned}\omega(\text{win}|\mathcal{L}) &= \frac{1}{2} \left(\omega_0(\mathcal{L}) + \omega_1(\mathcal{L}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\omega(a \oplus b = 0 | \mathcal{L}, 0, 0) + \omega(a \oplus b = 0 | \mathcal{L}, 0, 1) + \right. \\ &\quad \left. + \omega(a \oplus b = 0 | \mathcal{L}, 1, 0) + \omega(a \oplus b = 1 | \mathcal{L}, 1, 1) \right)\end{aligned}\quad (26.5)$$

В прошлой лекции подобная вероятность уже встречалась и была выражена через сумму Белла (25.8). Хотя правила игры в том случае и отличались (и вероятности на самом деле разные), но формально вид выражения одинаковый, поэтому

$$\omega(\text{win}|\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \quad (26.6)$$

Теперь попытаемся количественно оценить эффективность выбранной стратегии $\mathcal{L} - I$. Запишем ее в виде суммы от взаимных информаций между значением k -го случайного бита «Аленушки» и суждением g относительно этого бита «Братециванушки».

$$\begin{aligned}I(2^1) &= \sum_{k=0}^1 I(x_k : g | y = k) = \\ &= \sum_{k=0}^1 [H(x_k | y = k) + H(g | y = k) - H(x_k, g | y = k)] = \\ &= H(x_0 | y = 0) + H(g | y = 0) - H(x_0, g | y = 0) + \\ &\quad + H(x_1 | y = 1) + H(g | y = 1) - H(x_1, g | y = 1)\end{aligned}\quad (26.7)$$

где $H(\dots)$ – энтропии. Информацию о взаимной информации и то, как она выражается через энтропию можно найти в предыдущих лекциях по "Классической теории информации". Выше была использована формула, полученная в тех лекциях.

Заметим, что $H(x_0 | y = \dots)$, $H(x_1 | y = \dots)$ и $H(g | y = \dots)$ это энтропии одного бита, поскольку какое бы значение $y = \{0, 1\}$ не выпало, вероятность существования уже выпавшего значения всегда единица. Следовательно

$$\begin{aligned}H(x_0 | \dots) &= 1 \text{ бит} = \ln 2 \text{ нат} \\ H(x_1 | \dots) &= 1 \text{ бит} = \ln 2 \text{ нат} \\ H(g | \dots) &= 1 \text{ бит} = \ln 2 \text{ нат}\end{aligned}\quad (26.8)$$

Также заметим, что поскольку x_0 и x_1 случайные величины, не зависящие от значения бита y , то энтропии $H(x_0, g|y = 0)$ и $H(x_0, g|y = 1)$ симметричны и должны быть равны друг другу. Переобозначим их

$$H(x_0, g|y = 0) = H(x_0, g|y = 1) \stackrel{def}{=} H(x_k, g) \quad (26.9)$$

Тогда, переписывая эффективность (26.7) получаем

$$\begin{aligned} I(2^1) &= \sum_{k=0}^1 I(x_k : g|y = k) = \\ &= 2 \left(2 \ln 2 - H(x_k, g) \right) \end{aligned} \quad (26.10)$$

Обратим внимание, что эффективность стратегии – это классическая взаимная информация между суждением «Братециванушки» и битом «Аленушки». А вся взаимная информация, которая переходит от «Аленушки» к «Братециванушке» есть по определению один классический бит z . Следовательно эффективность стратегии \mathcal{L} не может превосходить один бит:

$$I(2^1) \leq 1 \text{ бит} = \ln 2 \text{ нат} \quad (26.11)$$

Это утверждение (26.11) и называется "принципом информационной причинности".

Подставим в принцип информационной причинности (26.11) выражение для эффективности стратегии (она же полная взаимная информация):

$$\begin{aligned} 2 \left(2 \ln 2 - H(x_k, g) \right) &\leq \ln 2 \iff \\ \iff 4 \ln 2 - \ln 2 &\leq 2 H(x_k, g) \implies \\ \implies H(x_k, g) &\geq \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned} \quad (26.12)$$

То есть совместная энтропия суждения «Братециванушки» об одном из случайных битов «Аленушки» должна быть ограничена в соответствии (26.12).

Попробуем вычислить взаимную энтропию. Вероятность того, что «Братециванушка» угадывает значение x_k , при условии, что они с «Аленушкой» придерживаются стратегии \mathcal{L} на ящиках Попеску-Рорлиха (Рис. 26.1) с корреляцией (23.22), равна

вероятности победы, следовательно

$$\begin{aligned}\omega_k(\mathcal{L}) &= \omega(x_k = 0, g = 0|\mathcal{L}) + \omega(x_k = 1, g = 1|\mathcal{L}) = \\ &= \omega(\text{win}|\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)\end{aligned}\quad (26.13)$$

Далее, поскольку x_k – случайный бит (выпадение 0 и 1 – равновероятны), то вероятности угадывания значений (двух) случайного бита должны быть равны, следовательно

$$\omega(x_k = 0, g = 0|\mathcal{L}) = \omega(x_k = 1, g = 1|\mathcal{L}) \quad (26.14)$$

Для удобства переобозначим вероятности

$$\begin{aligned}\omega(x_k = 0, g = 0|\mathcal{L}) &\rightarrow \omega(0, 0|\mathcal{L}) \\ \omega(x_k = 1, g = 1|\mathcal{L}) &\rightarrow \omega(1, 1|\mathcal{L})\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (26.13-26.14), получаем

$$\omega(0, 0|\mathcal{L}) = \omega(1, 1|\mathcal{L}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \quad (26.15)$$

Теперь рассмотрим ситуацию, при которой при данной стратегии \mathcal{L} «Братециванушка» не угадает значение бита «Аленушки». Тогда вероятность неугадывания

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_k(\mathcal{L}) &= \omega(x_k = 0, g = 1|\mathcal{L}) + \omega(x_k = 1, g = 0|\mathcal{L}) = \\ &= \omega(\overline{\text{win}}|\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)\end{aligned}\quad (26.16)$$

Поскольку значение x_k – случайно, то аналогично (26.14)

$$\omega(x_k = 0, g = 1|\mathcal{L}) = \omega(x_k = 1, g = 0|\mathcal{L}) \quad (26.17)$$

Решая систему уравнений (26.16-26.17), получаем

$$\omega(0, 1|\mathcal{L}) = \omega(1, 0|\mathcal{L}) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \quad (26.18)$$

Теперь, выразив все соответствующие вероятности (26.15) (26.18), вычислим совместную энтропию $H(x_k, g)$ по определению:

$$\begin{aligned}
 H(x_k, g) &= \sum_i \omega_i \ln \omega_i = \\
 &= - \left[\omega(0, 0 | \mathcal{L}) \ln \omega(0, 0 | \mathcal{L}) + \omega(0, 1 | \mathcal{L}) \ln \omega(0, 1 | \mathcal{L}) + \right. \\
 &+ \left. \omega(1, 0 | \mathcal{L}) \ln \omega(1, 0 | \mathcal{L}) + \omega(1, 1 | \mathcal{L}) \ln \omega(1, 1 | \mathcal{L}) \right] = \\
 &= - \left[2 \frac{1}{4} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \right) + 2 \frac{1}{4} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{4} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \right) \right] = \\
 &= - \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \ln \frac{1}{2} \right] = \\
 &= - \left[\omega_k \ln \omega_k + (1 - \omega_k) \ln (1 - \omega_k) - \ln 2 \right]
 \end{aligned} \tag{26.19}$$

где $\omega_k(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)$

Итак, мы получили двоичную энтропию. Теперь, можем ввести ансамбль $x_2 = \{\text{угадал, неугадал} = \{\omega_k, 1 - \omega_k\}\}$. Следовательно, можем свести (26.19) к двоичной энтропии

$$H(x_k, g) = H(X_2) + \ln 2 \tag{26.20}$$

Теперь, подставляя (26.20) в (26.12), получаем

$$H(X_2) \geq \frac{1}{2} \ln 2 \tag{26.21}$$

Мы получили еще одну запись принципа информационной причинности.

Полученное выше неравенство, вообще говоря, не решается. Но получим важное приближение. Введем новые обозначения в выражении для двоичной энтропии (26.21)

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \\
 \Downarrow \\
 \omega(\text{win} | \mathcal{L}) &= \frac{1}{2} (1 + x)
 \end{aligned} \tag{26.22}$$

Рассмотрим случай $x \ll 1$. Воспользуемся разложением логарифма:

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x - \frac{x^2}{2} \quad (26.23)$$

Здесь мы ограничились членом второго порядка, поскольку двоичная энтропия симметрична и уместно предположить, что первым членом, который не сократиться в дальнейшем будет x^2 . Посчитаем двоичную энтропию при помощи этого разложения:

$$\begin{aligned} H(X_2) &= - \left[\frac{1}{2}(1+x) \ln \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) \ln \frac{1}{2}(1-x) \right] = \\ &= - \left[\frac{1}{2}(1+x) \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-x) \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x) \ln(1+x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(1-x) \ln(1-x) \right] \approx - \left[-\ln 2 + \frac{1}{2}(1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(1-x) \left(-x - \frac{x^2}{2} \right) \right] = \ln 2 - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (26.24)$$

Подставив (26.24) в принцип информационной причинности (26.21), получаем

$$\ln 2 - \frac{x^2}{2} \geq \frac{1}{2} \ln 2 \implies 1 \geq \frac{2x^2}{2 \ln 2} \quad (26.25)$$

Лекция 27. Ящики Попеску-Рорлиха. Часть 4.

Принцип информационной причинности (продолжение).

Рассмотрим ситуацию, при которой у «Аленушки» имеется система из трех ящиков, на которые подается четыре случайных бита x_1, x_2, x_3 и x_4 , а у «Братециванушки» – два ящика, на которые подается два случайных бита $y'' = \{0,1\}$ и $y' = \{0,1\}$ (Рис. 27.1) (см. параграф "Протоколы ван Дама").

Основываясь на значениях битов y'' и y' «Братециванушка» на выходе формирует два бита b' и b'' . Аналогично игре из прошлого параграфа «Братециванушка» может на основе значений битов y', y'', z, b' и b'' сконструировать "суждение" в виде бита $g = x_k, k = \{0,1,2,3\}$, которое в зависимости от того, какое число от 0 до 3 записано (в двоичной записи) в виде битов y' и y'' совпадает с одним из случайных битов x_1, x_2, x_3 и x_4 .

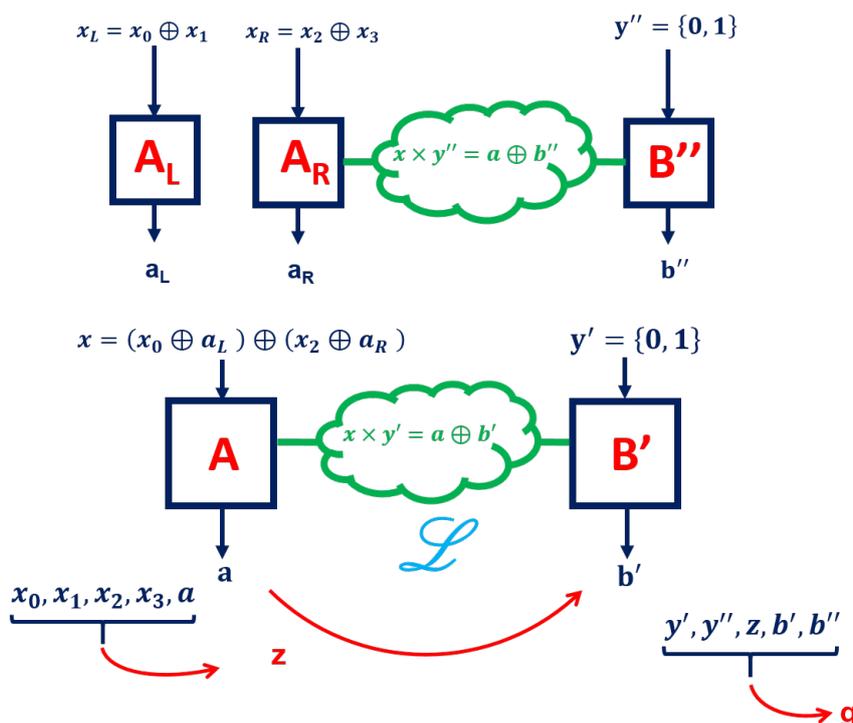


Рис. 27.1. Расширение игры, иллюстрирующей принцип информационной причинности.

Рассмотрим вероятность победы «Братециванушки» в таком раунде. «Братециванушка» сможет угадать значение бита x_k , если комбинация $z \oplus b'$ укажет на пра-

вильную пару, например

$$z \oplus b' \rightarrow (x_0, x_1)$$

Вероятность такого угадывания дается выражением (26.13). Следующая комбинация должна указать на искомый бит, например

$$z \oplus b' \oplus b'' \rightarrow x_1$$

В данном случае вероятность угадывания также равна (26.13). Тогда вероятность правильного угадывания бита x_k равна

$$\omega(\text{win}|\mathcal{L}) \times \omega(\text{win}|\mathcal{L}) = \omega^2(\text{win}|\mathcal{L})$$

Однако, как ни странно, «Братециванушка» может два раза ошибиться (с обоими комбинациями) и все равно правильно угадать бит x_k .

Ошибка на первом этапе приводит к тому, что вместо бита b' «Братециванушка» угадал бит $b' \oplus 1$. Далее, если есть ошибка на втором этапе, то вместо бита b'' был угадан бит $b'' \oplus 1$. Теперь если рассмотреть финальную комбинацию, то

$$\left. \begin{array}{l} b' \rightarrow b' \oplus 1 \\ b'' \rightarrow b'' \oplus 1 \end{array} \right\} z \oplus b' \oplus b'' \implies z \oplus (b' \oplus 1) \oplus (b'' \oplus 1) = \\ = z \oplus b' \oplus b'' \oplus 2 = z \oplus b' \oplus b''$$

То есть, действительно, две ошибки приводят к правильному ответу. Вероятность ошибки в каждом случае дается выражением (26.16). Вероятность правильного угадывания бита x_k при совершении двух ошибок равна

$$\omega(\overline{\text{win}}|\mathcal{L}) \times \omega(\overline{\text{win}}|\mathcal{L}) = \omega^2(\overline{\text{win}}|\mathcal{L})$$

Таким образом, полная вероятность правильного угадывания бита x_k

$$\begin{aligned} \omega(\text{win}|\mathcal{L}|2^2) &= \omega^2(\text{win}|\mathcal{L}) + \omega^2(\overline{\text{win}}|\mathcal{L}) = \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (27.1)$$

Теперь перейдем к числу битов $N = 2^n$ в которой каждый бит задан в двоичной системе

$$k = 2^0 y' + 2^1 y'' + \dots + 2^{n-1} y''' \dots''''$$

Схематически такая "игра" представлена на (Рис. 27.2).

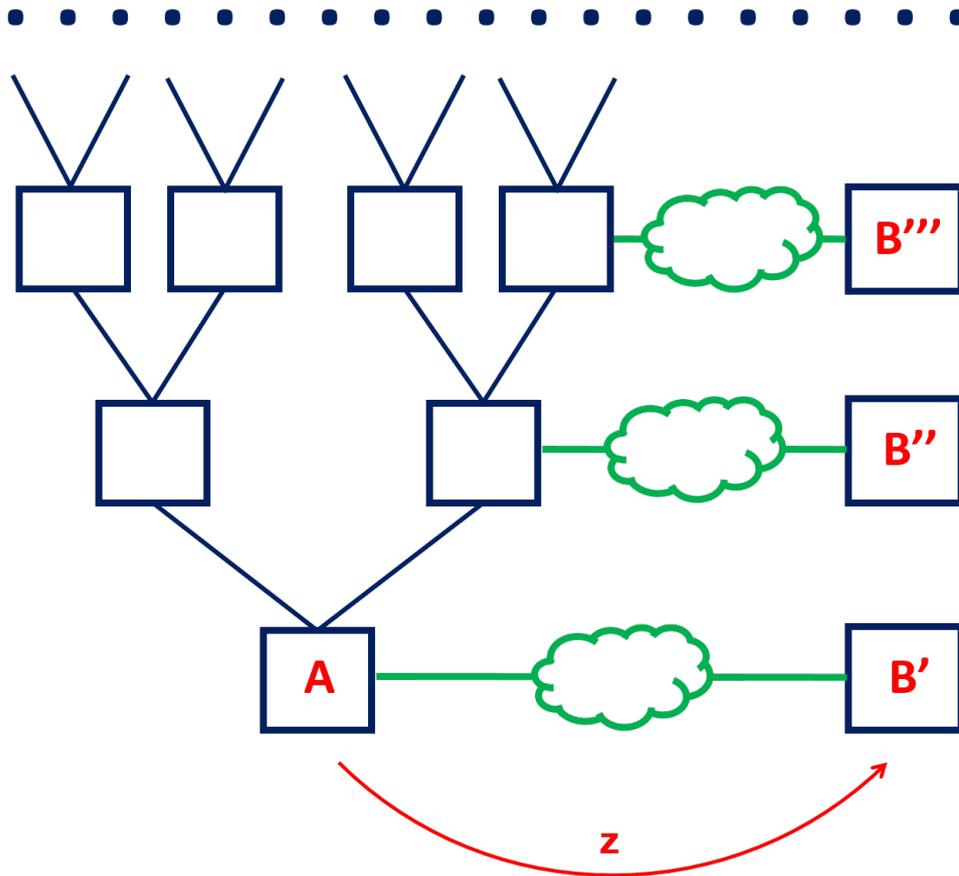


Рис. 27.2. Обобщение игры, иллюстрирующей принцип информационной причинности на случай $N = 2^n$ битов.

Можно показать, что вероятность правильного угадывания в таком случае равна

$$\omega(\text{win} | \mathcal{L} | 2^n) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)^n \right) \quad (27.2)$$

Теперь обобщим эффективность выбранной стратегии на случай 2^n битов.

$$I(2^n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} I(x_k : g |_{\text{совокупность } \{y^m \dots^m\} \text{ которые дают } k}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} I(x_k : g) \quad (27.3)$$

Согласно принципу информационной причинности мера эффективности (27.3), которая есть суммарная классическая взаимная информация, не может превосходить

количества классической информации переданной «Аленушкой» «Братециванушке», то есть

$$I(2^n) \leq 1 \text{ бит} = \ln 2 \text{ нат} \quad (27.4)$$

Продолжим высчитывать эффективность выбранной стратегии для 2^n битов (27.3). Пользуясь результатами прошлой лекции (26.7), (26.8), (26.10) и (26.20) получаем

$$\begin{aligned} I(2^n) &= \sum_{k=0}^{2^n-1} I(x_k : g) = \left(H(x_k) + H(g) - H(x_k, g) \right) = \\ &= 2^n \left(2 \ln 2 - H(x_k, g) \right) = 2^n \left(2 \ln 2 - H(X_2) - \ln 2 \right) = \\ &= 2^n \left(\ln 2 - H(X_2) \right) \end{aligned} \quad (27.5)$$

В прошлой лекции при расчете двоичной энтропии использовалось следующее обозначение (26.22). Теперь проведем аналогичное переобозначение в вероятности (27.2)

$$x = \left(\frac{S_{\mathcal{L}}}{4} \right)^n \lll 1 \quad (27.6)$$

В этом выражении $x \lll 1$ потому, что максимальное значение суммы Белла равно 4 и даже если она будет сколь угодно меньше четырех, всегда найдется такое n , при котором $x \lll 1$.

Теперь, считая двоичную энтропию, можем просто воспользоваться результатом (26.24), поскольку хоть выражения для вероятностей (26.13) и (27.2) разные, но переобозначения (26.22) и (27.6) дают один и тот же результат. Тогда

$$H(X_2) = \ln 2 - \frac{x^2}{2} \quad (27.7)$$

Подставляя (27.7) в (27.5) получаем

$$\begin{aligned} I(2^n) &= 2^n \left(\ln 2 - \ln 2 + \frac{x^2}{2} \right) = 2^n \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2S_{\mathcal{L}}^2}{16} \right)^n = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{S_{\mathcal{L}}^2}{8} \right)^n \end{aligned} \quad (27.8)$$

Подставляя результат (27.8) в (27.4) получаем

$$\frac{\left(\frac{S_{\mathcal{L}}^2}{8} \right)^n}{2 \ln 2} \leq 1 \quad (27.9)$$

Рассмотрим это неравенство. Если $S_{\mathcal{L}}^2 \geq 8$, то всегда можно подобрать такое n что неравенство (27.9) будет нарушаться. Следовательно, если неравенство (27.9) должно выполняться при произвольном n , то

$$\frac{S_{\mathcal{L}}^2}{8} \leq 1 \implies |S_{\mathcal{L}}| \leq 2\sqrt{2} \quad (27.10)$$

Таким образом, мы получили следующий результат: если есть теории, в которых не превосходится сумма Белла, то для них верен принцип информационной причинности. То есть если передать от одного наблюдателя другому один бит классической информации, то этот наблюдатель, не имея локально ничего больше, не может делать никаких суждений о передававшем ему бит наблюдателе больше чем на один бит.

Этому условию удовлетворяет классическая физика и квантовая механика. А любая другая теория, которая выражается при помощи ящиков Попеску-Рорлиха с такой корреляцией, что сумма Белла превосходит границу Цирельсона, нарушает принцип информационной причинности.

Означает ли это что за квантовой механикой нет ничего? Может быть. Но, вообще говоря, в ящиках Попеску-Рорлиха есть много ограничений (например, абсолютная случайность, "no-signaling conditions") и возможно в следующей будущей теории, которая будет выходить за рамки квантовой механики, какое-нибудь из этих ограничений будет снято.

Тем не менее, мы уже кое-что знаем о тех гипотетических теориях, которые могут следовать за квантовой механикой и обеспечивать корреляции сильнее чем те, что обеспечивает квантовая механика. У нас даже есть язык, на котором мы можем говорить – это язык суммы Белла.

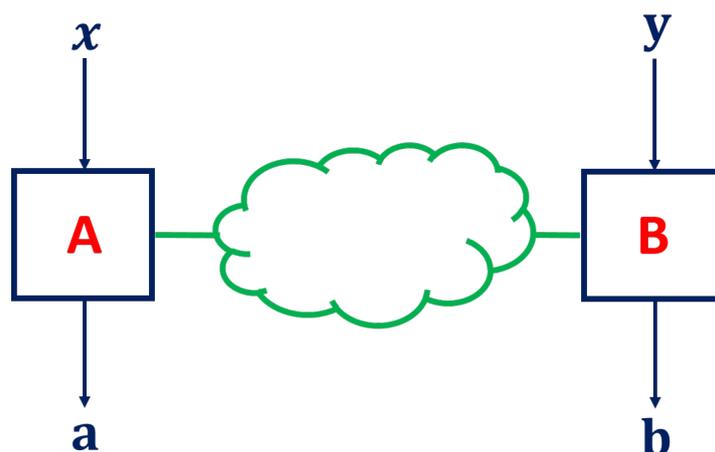
Геометрический взгляд на ящики Попеску-Рорлиха.

Сделаем важное замечание: изначально ящиками Попеску-Рорлиха (Popescu-Rohrlich boxes) называли ящики с любой корреляцией, но со временем многие авторы к ящикам Попеску-Рорлиха стали относить только ящики с корреляцией вида (23.22). А любые ящики "A" и "B" с входными битами x, y , выходными – a, b , и подчиняющиеся NS-условию чаще называют "No-signaling boxes" (Рис. 27.3).

Если раньше это терминологическое расхождение было несущественным, далее, при геометрическом взгляде на ящики Попеску-Рорлиха, станет некомфортным.

Литература:

- 1) J. Barrett et al., PRA 71, 022101 (2005)



NS-условие

Рис. 27.3. "No-signaling boxes".

Рассмотрим два коррелированных ящика Попеску-Рорлиха "A" и "B" (Рис. 27.4), на входы которых подаются биты $x = \{0, 1\}$ и $y = \{0, 1\}$, а на выходы – $a = \{0, 1\}$ и $b = \{0, 1\}$.

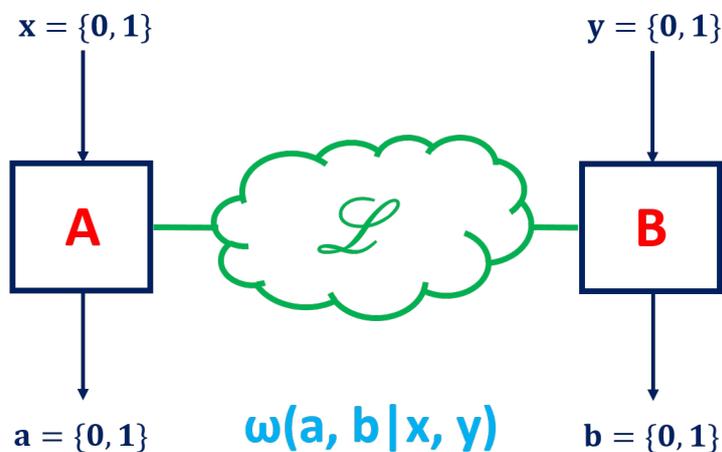


Рис. 27.4. Ящики Попеску-Рорлиха (Пример 1).

Такие ящики описываются в терминах вероятностей $\omega(a, b | x, y)$. Поскольку как на входы, так и на выходы ящиков можно подать четыре комбинации битов, то количество таких вероятностей будет равно $2^4 = 16$.

Напомним условия, накладываемые на эти вероятности:

1) Неотрицательность.

$$\forall x, y, a, b: \omega(a, b|x, y) \geq 0 \quad (27.11)$$

2) Нормировка.

$$\forall x, y: \sum_a \sum_b \omega(a, b|x, y) = 1 \quad (27.12)$$

3) NS-условия.

$$\forall y: \sum_b \omega(a, b|x, y) = \omega(a|x) \quad (27.13)$$

$$\forall x: \sum_a \omega(a, b|x, y) = \omega(b|y) \quad (27.14)$$

Данные условия накладывают дополнительные связи на вероятности: формула (27.12) накладывает 4 связи (при различных комбинациях $\{x, y\}$); формула (27.13) записывается для любого y , которые может принимать только два значения, то есть эквивалентна двум уравнениям на вероятности – значит накладывает 2 связи; аналогичным образом формула (27.14) накладывает также 2 связи. Следовательно из всех 16-ти вероятностей независимых может быть только $16 - 8 = 8$.

Теперь рассмотрим 16-мерное пространство, каждая точка которого есть координата какого-то ящика Попеску-Рорлиха с некоторой корреляцией \mathcal{L} :

$$\left(\omega(00|00|\mathcal{L}), \omega(00|10|\mathcal{L}), \dots, \omega(11|11|\mathcal{L}) \right)$$

То есть каждая точка такого 16-мерного задает какой-то ящик Попеску-Рорлиха или не задает никакого, если не удовлетворяет условиям (27.11-27.14).

Заметим, что условие (27.11) выделяет некоторое полупространство. Условия (27.12-27.14) – линейные и задают в 16-мерном пространстве некий многогранник, внутри (из-за условия (27.11)) которого лежат все возможные ящики Попеску-Рорлиха. Такие многогранники получили название "No-signaling polytope" и обозначаются буквой \mathbf{P} . Размерность такого многогранника $\dim \mathbf{P} = 16 - 4 - 2 - 2 = 8$. То есть в 16-мерном пространстве условия (27.11-27.14) выделяют 8-мерный многогранник, каждая точка которого является набором вероятностей, соответствующих ящику Попеску-Рорлиха с некоторой локальной/нелокальной корреляцией.

Можно провести классификацию точек в таком многограннике. Любые точки в многограннике \mathbf{P} можно разделить по сумме Белла:

1) Удовлетворяют неравенству Белла:

$$|S_{\mathcal{L}}| \leq 2$$

Это многогранники, основанные на каких-то локальных ресурсах: классическая физика, скрытые параметры, факторизация и т. д.

Множеству локальных ящиков Попеску-Рорлиха должен соответствовать некий локальный многогранник \mathbf{L} , который лежит внутри многогранника \mathbf{P} .

2) Удовлетворяют границе Цирельсона:

$$|S_{\mathcal{L}}| \leq 2\sqrt{2}$$

На самом деле, граница Цирельсона дается не в терминах многогранников, а в терминах векторов состояния (матриц плотности), на которых достигается эта граница. Поэтому фигура, задаваемая границей Цирельсона, хоть и лежит внутри нелокального NS-многогранника \mathbf{P} , сама многогранником не является. Она является какой-то выпуклой поверхностью, в которой содержатся локальные многогранники.

Итак, имеем следующую иерархию (Рис. 27.5):

$$\mathbf{L} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$$

\mathbf{L} – локальные многогранники

\mathbf{Q} – фигура, описываемая квантовой механикой

\mathbf{P} – NS-многогранник

Рассмотрим вопрос о вершинах многогранника. Все вершины многогранника \mathbf{P} делятся на локальные и нелокальные, некоторые его вершины совпадают и с нелокальными вершинами многогранника \mathbf{L} , и с вершинами многогранника квантовой механики \mathbf{Q} .

Локальные вершины – это те вершины тех многогранников, для которых максимальное число таких (27.11) неравенств обращается в равенство (пересекается максимальное количество плоскостей) и, соответственно, для ящиков (Рис. 27.3) задаваемых такими вершинами выход ящика "А" зависит только от его входа, также как и выход ящика "В". Все подобные вероятности будут выглядеть следующим образом:

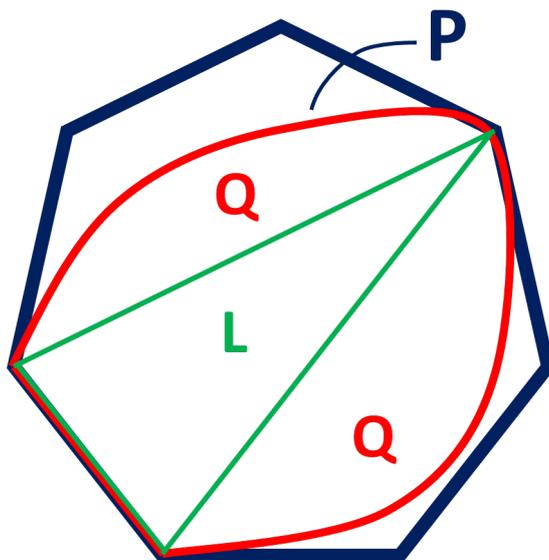


Рис. 27.5. Иерархия многогранников.

$$\omega^{\alpha\beta\gamma\delta}(a, b|x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = \alpha \times x \oplus \beta \\ & b = \gamma \times y \oplus \delta \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (27.15)$$

Покажем что это действительно экстремальные многогранники. Рассмотрим многогранник с $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$, тогда

$$\omega^{1001}(a, b|x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = x \\ & b = 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Приведем таблицу вероятностей для такого экстремального многогранника.

Видно, что такой экстремальный многогранник обратил максимально возможное количество неравенств (27.11) в равенства, удовлетворяя при этом условию нормировки (27.12).

Поскольку $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ принимают по два значения, то всего у локального многогранника 16 вершин.

Рассмотрим нелокальные экстремальные многогранники. Для них запишем

$$\omega^{\alpha\beta\gamma\delta}(a, b|x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } a \oplus b = x \times y \oplus \alpha \times x \oplus \beta \times y \oplus \gamma \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (27.16)$$

Таблица 27.1. Таблица вероятностей экстремального многогранника.

x	y	a, b	$\omega(a, b, x, y)$
0	0	{0, 1}	$\omega(0, 0 0, 0) = 0$ $\omega(1, 0 0, 0) = 0$ $\omega(0, 1 0, 0) = 1$ $\omega(1, 1 0, 0) = 0$
1	0	{1, 1}	$\omega(0, 0 1, 0) = 0$ $\omega(1, 0 1, 0) = 0$ $\omega(0, 1 1, 0) = 0$ $\omega(1, 1 1, 0) = 1$
0	1	{0, 1}	$\omega(0, 0 0, 1) = 0$ $\omega(1, 0 0, 1) = 0$ $\omega(0, 1 0, 1) = 1$ $\omega(1, 1 0, 1) = 0$
1	1	{1, 1}	$\omega(0, 0 1, 1) = 0$ $\omega(1, 1 1, 1) = 1$ $\omega(1, 0 1, 1) = 0$ $\omega(0, 1 1, 1) = 0$

Нетрудно посчитать, что количество нелокальных вершин равно 8.

Таким образом, у многогранника размерности 8, каждая точка которого описывает некоторый ящик Попеску-Рорлиха с некоторой корреляцией, всего вершин – $16 + 8 = 24$.

Причиной выпуклости локальных и нелокальных многогранников является то, что сумма двух локальных ящиков Попеску-Рорлиха тоже является локальным ящиком Попеску-Рорлиха, а сумма двух нелокальных ящиков входит в выпуклый NS-многогранник. Квантовая механика, описываемая при помощи векторов состояний и принципа суперпозиции, соответственно, сумма векторов состояния с некоторыми коэффициентами есть также вектор состояния, поэтому квантовая механика чистых состояний это некоторая выпуклая фигура. И поскольку сумма матриц плотности, взятых с некоторыми вероятностями, тоже является матрицей плотности, а множество матриц плотности образует выпуклое множество, то фигура, образующая квантовую механику чистых и смешанных состояний является выпуклой.

Решение парадоксов из курса.

Дадим решение парадокса о равенстве нулю энтропии фон Неймана любого чистого состояния $|\Psi\rangle$:

$$S_{\Psi} = 0$$

Пусть до измерения система находится в чистом состоянии $|\Psi\rangle$ и необходимо измерить значение наблюдаемой A , которой сопоставлен эрмитов оператор $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$, с дискретным невырожденным спектром собственных векторов и собственных значений

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

Как известно получение некоторого значения a_j при измерении будет означать, что система перешла из состояния $|\Psi\rangle$ перешла в чистое состояние $|a_j\rangle$. То есть была получена некоторая ненулевая информация о системе:

$$\Delta I > 0$$

С другой стороны, если опираться на то, что энтропия любого чистого состояния равна нулю, то изменение энтропии в результате измерения

$$\Delta S = S_{a_j} - S_{\Psi} = 0 - 0 = 0$$

А поскольку изменение информации связано с изменением энтропии

$$\Delta I = -\Delta S = 0$$

Таким образом получаем парадокс: с одной стороны очевидно, что в процессе измерения была получена информация о состоянии системы, а с другой стороны было показано, что при измерении чистого состояния не может быть получено никакой информации.

Здесь следует вспомнить, что квантовая механика – это не только наука о квантовых системах, а прежде всего наука о взаимодействии измерительных макроскопических приборов с квантовыми системами.

Теперь учтем наличие прибора в рассуждения. Используем для этого простейшую модель фон Неймана. Разложим начальное состояние $|\Psi\rangle$ в базисе собственных векторов наблюдаемой A :

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

Теперь возьмем состояние $|\Psi\rangle$ до взаимодействия с измерительным прибором, запишем его состояние как $|\Phi_0\rangle$

$$|\Psi\rangle|\Phi_0\rangle = \sum_i c_j |a_j\rangle|\Phi_0\rangle$$

Далее прибор начинает взаимодействовать с квантовой системой и происходит запутывание между состояниями прибора и состояниями системы

$$\sum_i c_j |a_j\rangle|\Phi_0\rangle \rightarrow \sum_i c_j |a_j\rangle|\Phi_j\rangle = |\Sigma\rangle$$

Теперь найдем в этом запутанном состоянии то состояние, в котором находится только квантовая система. Состояние микросистемы описывается следующие матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_{\Phi_j} |\Sigma\rangle\langle\Sigma| = \sum_j |c_j|^2 |a_j\rangle\langle a_j|$$

Поскольку мы рассматриваем состояние при котором все $c_j \neq 0$, то энтропия такого состояния будет больше нуля как энтропия смешанного состояния

$$\hat{S}(\hat{\rho}) > 0$$

Далее происходит измерение и редукция, при которой выбирается состояние a_i квантовой системы и Φ_i – прибора. Теперь матрица плотности системы

$$\hat{\rho}_i = |a_i\rangle\langle a_i|$$

То есть система будет находиться в чистом состоянии, и ее энтропия

$$\xi_{a_i} = 0$$

Тогда в изменение энтропии в процессе измерения

$$\Delta S = \xi_{a_i} - S(\hat{\rho}) = -S(\hat{\rho})$$

А полученная информация

$$\Delta I = -\Delta S = S(\hat{\rho}) > 0$$

То есть если учесть прибор и то, что до измерения он взаимодействовал с микро-системой, то получается, что в процессе измерения все-таки была получена некоторая информация. Парадокс снят.

Лекция 28. Принцип макроскопического реализма и неравенства Леггетта-Гарга.

Макроскопический реализм.

Вопрос: Чем макроскопические системы отличаются от микроскопических?

В параграфе "Механизм декогеренции и парадокс кота Шредингера" был дан один из возможных **ответов:** макроскопические системы, в отличие от микроскопических, могут находиться только в смеси макроскопически различимых состояний, но не в их суперпозиции. Смесь состояний является следствием непрерывного измерения макросистемы ее термодинамическим окружением.

Однако, в повседневной жизни люди, как правило, пользуются "более простыми и наглядными" критериями макроскопичности, которые получили название "**макроскопического реализма**" или "классичности" (в англоязычной литературе для обозначения этой концепции применяется термины "Macroscopic realism" или "Macrorealism" ; сокращенно "MR").

Концепцию макроскопического реализма не следует путать с концепцией локального реализма (см. параграф "Локальный реализм"). Это связанные, но не тождественные концепции.

В своей пионерской работе *A. J. Leggett, A. Garg, "Quantum Mechanics versus Macroscopic Realism: Is the Flux There when Nobody Looks?"*, *Phys.Rev.Lett.* 54, p.857 (1985) Леггетт и Гарг конкретизировали наши интуитивные представления об окружающем классическом мире в виде двух (или трех, смотря, как считать) простых принципов, которые будут сформулированы ниже. Используя эти принципы авторы предложили неравенства, которым удовлетворяет любая физическая система, отвечающая привычной и каждодневно используемой "макроскопической интуиции". Эти неравенства получили название **неравенств Леггетта-Гарга** (Leggett-Garg inequalities или, сокращенно, LGIs).

Неравенства Леггетта-Гарга дают возможность в самом общем виде экспериментально проверить ошибочность любых концепций, основанных на классических представлениях, при переходе к микроскопическим масштабам. Для корректной реализации такой экспериментальной проверки требуются макроприборы, с помощью которых можно выполнить так называемые **неразрушающие** (или **невозмущающие** систему) измерения.

"MR" основывается на следующих принципах:

- 1) Первый принцип носит название **принципа макроскопического реализма**

per se (MRps – Macroscopic realism per se – макроскопический реализм в чистом виде). Поскольку в англоязычной литературе применяется термин на смеси английского и латыни, то в лекциях мы тоже смешаем русский с латынью. MRps гласит, что макроскопическая система, обладающая двумя (или более) макроскопически различимыми состояниями, в каждый момент времени будет находиться в одном и только в одном из всех своих возможных состояний.

Например, в каждый момент времени кот Шредингера будет либо живым, либо мертвым, но не живомертвым или мертво-живым. Кроме того, принцип MRps предполагает, что измерение, выполненное над макроскопической системой, **однозначно показывает**, в каком состоянии эта система находится в момент измерения. Тут нельзя не заметить фундаментального различия между принципом MRps и проекционными постулатами Борна и Дирака – фон Неймана.

Кроме того, на знаменитый вопрос А.Эйнштейна *”Существует ли Луна, когда на нее никто не смотрит?”*, принцип MRps однозначно дает положительный ответ.

- 2) Второй принцип утверждает, что можно определить состояние макроскопической системы и, при этом, сколь угодно мало повлиять на дальнейшую динамику этой макросистемы. Другими словами, на макроуровне всегда возможно измерить физические характеристики системы без ее разрушения или сильного изменения. Это так называемый **принцип неразрушающего измерения** (NIM – Non-invasive measurability).
- 3) К принципам MRps и NIM часто считают необходимым добавлять **принцип индукции** (Induction), который отражает ”обывательское” понимание свободы воли экспериментатора: результат текущего измерения характеристик физической системы не может повлиять на то, какие измерения будут проводиться или не проводиться над системой в будущем. Только экспериментатор решает, как он будет действовать дальше.

Принципы MSps и NIM нарушаются в квантовой механике. Первый, поскольку в квантовом мире выполняется принцип суперпозиции или его аналоги. Второй, так как согласно проекционным постулатам Борна или Дирака-фон Неймана при измерении состояния микросистемы макроскопическим прибором происходит редукция состояния микросистемы. Принцип индукции выполняется как в классической физике, так и в квантовой, поскольку он является следствием принципа причинности.

Принцип NIM для концепции MR играет ту же роль, что и принцип локальности для LR. А принцип индукции в MR весьма похож на принцип свободы воли в LR.

Вывод простейшего неравенства Леггетта-Гарга.

Рассмотрим некоторую физическую систему (специально не конкретизируя, микроскопическая это система или макроскопическая), которая удовлетворяет концепции "Макроскопического реализма". И пусть эта **система обладает** дихотомной **наблюдаемой** Q . Мы нарочно обозначили эту наблюдаемую другой буквой, чтобы не путать ее с наблюдаемыми F_A, \dots, G'_B , используемыми при получении BCHSH-неравенств.

Согласно MRps-принципу в каждый момент времени t_i , вне зависимости от того, измеряют эту величину или нет, наблюдаемая Q находится в одном из двух определенных значений: либо $Q(t_i) = +1$, либо $Q(t_i) = -1$. Для краткости будем писать, что $Q(t_i) = q_i$, где индекс "i" означает момент времени измерения. Пусть теперь измерение наблюдаемой Q проводилось в два разных момента времени t_i и t_j . Тогда для такого измерения можно ввести совместные двойные и тройные вероятности $\omega_{ij}(q_i, q_j)$ и $\omega_{ij}(q_i, q_j, q_k)$, $k \neq \{i, j\}$. Момент t_k – это какой-то момент, в который измерение не проводилось. Но физическая система в момент времени t_k находилась в состоянии q_k . Все вероятности, относящиеся ко временам измерения t_i и t_j , записываются при помощи нижних индексов как $\omega_{ij}(\dots)$.

Подчеркнем, что совместные вероятности $\omega_{ij}(\dots)$ ПРИНЦИПИАЛЬНО отличаются от совместных вероятностей $\omega(f_i^{(A)}, g_k^{(B)})$ или $\omega(f_i^{(A)}, f_i^{(A)}, g_k^{(B)})$, которые использовались для доказательства BCHSH-неравенства, поскольку вероятности $\omega_{ij}(\dots)$ относятся к корреляциям **ОДНОЙ** наблюдаемой в **РАЗНЫЕ** моменты времени. В то время как совместные вероятности для BCHSH-неравенств описывают корреляции **РАЗНЫХ** наблюдаемых в **ОДИН** момент времени.

Из MRps и NIM принципов сразу следует, $\omega_{ij}(\dots) = \omega_{ji}(\dots)$. Поскольку измерения предполагаются неразрушающими, то совершенно неважно, в каком порядке следуют аргументы в тройных и более высоких совместных вероятностях $\omega_{ij}(q_i, q_j, q_k)$.

Пусть промежутки времени удовлетворяют условию $t_3 > t_2 > t_1$. Тогда договоримся, что в вероятностях соответствующие им значения наблюдаемых всегда будут идти по возрастающей справа налево. То есть будем записывать вероятности в виде:

$$\omega_{ij}(q_i, q_j, q_k), \text{ где } \{i, j\} = \{1, 2, 3\}$$

Введем корреляционную функцию

$$C_{12} = \langle Q(t_2), Q(t_1) \rangle = \sum_{q_2=\pm 1, q_1=\pm 1} q_2 q_1 \omega(q_2, q_1) \quad (28.1)$$

Поскольку двойные вероятности можно следующим образом записать через тройные

$$\omega_{21}(q_2, q_1) = \sum_{q_3=\pm 1} \omega_{21}(q_3, q_2, q_1) \quad (28.2)$$

то корреляционная функция имеет вид

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sum_{q_3=\pm 1, q_2=\pm 1, q_1=\pm 1} q_2 q_1 \omega_{21}(q_3, q_2, q_1) = \\ &= \omega_{21}(+, +, +) + \omega_{21}(-, +, +) + \omega_{21}(+, -, -) + \omega_{21}(-, -, -) - \\ &- \omega_{21}(+, +, -) - \omega_{21}(-, +, -) - \omega_{21}(+, -, +) - \omega_{21}(-, -, +) \end{aligned} \quad (28.3)$$

Аналогично можно ввести корреляционные функции

$$\begin{aligned} C_{32} = \langle Q(t_3), Q(t_2) \rangle &= \sum_{q_3=\pm 1, q_2=\pm 1, q_1=\pm 1} q_3 q_2 \omega_{32}(q_3, q_2, q_1) = \\ &= \omega_{32}(+, +, +) + \omega_{32}(+, +, -) + \omega_{32}(-, -, +) + \omega_{32}(-, -, -) - \\ &- \omega_{32}(-, +, +) - \omega_{32}(-, +, -) - \omega_{32}(+, -, +) - \omega_{32}(+, -, -) \end{aligned} \quad (28.4)$$

и

$$\begin{aligned} C_{31} = \langle Q(t_3), Q(t_1) \rangle &= \sum_{q_3=\pm 1, q_2=\pm 1, q_1=\pm 1} q_3 q_1 \omega_{31}(q_3, q_2, q_1) = \\ &= \omega_{31}(+, +, +) + \omega_{31}(+, -, +) + \omega_{31}(-, +, -) + \omega_{31}(-, -, -) - \\ &- \omega_{31}(+, +, -) - \omega_{31}(+, -, -) - \omega_{31}(-, +, +) - \omega_{31}(-, -, +) \end{aligned} \quad (28.5)$$

Поскольку согласно принципу NIM измерение не влияет на динамику системы, то вероятности $\omega_{ij}(q_i, q_j, q_k)$ не должны зависеть от того, в какие два из трех возможных моментов времени произведено измерение над рассматриваемой физической системой. Из этого сразу следует, что

$$\begin{aligned} \omega_{21}(+, +, +) &= \omega_{31}(+, +, +) = \omega_{32}(+, +, +) = \omega(+, +, +) \\ \omega_{21}(+, +, -) &= \omega_{31}(+, +, -) = \omega_{32}(+, +, -) = \omega(+, +, -) \end{aligned} \quad (28.6)$$

и так далее для всех возможных значений вероятностей.

При этом, вообще говоря, совершенно очевидно, что

$$\omega(+, +, -) \neq \omega(+, -, +) \neq \dots \quad (28.7)$$

Учитывая, что тройные вероятности удовлетворяют стандартному условию нормировки

$$\sum_{q_3=\pm 1, q_2=\pm 1, q_1=\pm 1} \omega(q_3, q_2, q_1) = 1 \quad (28.8)$$

найдем величину

$$K^{(3)} = C_{21} + C_{32} - C_{31} \quad (28.9)$$

Индекс «(3)» означает, что величина $K^{(n)}$ содержит три корреляционные функции C_{ij} . Простые вычисления дают

$$K^{(3)} = 1 - 4(\omega(+, -, +) + \omega(-, +, -)) \quad (28.10)$$

Найдем интервал возможных значений $K^{(3)}$. В силу условия нормировки тройных вероятностей $\omega(+, -, +) + \omega(-, +, -) \leq 1$. Поэтому $K^{(3)} \geq -3$. С другой стороны, все совместные вероятности положительны, то есть $\omega(+, -, +) + \omega(-, +, -) \geq 1$. Это приводит к неравенству $K^{(3)} \leq 1$. Таким образом,

$$-3 \leq K^{(3)} \leq 1 \quad (28.11)$$

Получение семейства неравенств Леггетта-Гарга.

Результат для $K^{(3)}$ можно обобщить, если ввести величину

$$K^{(n)} = C_{21} + C_{32} + C_{43} + \dots + C_{n n-1} - C_{n1} \quad (28.12)$$

Тогда для нечетных $n \geq 3$ имеем

$$-n \leq K^{(n)} \leq n - 2 \quad (28.13)$$

а для четных $n \geq 4$ можно записать, что

$$-(n - 2) \leq K^{(n)} \leq n - 2 \quad \text{или} \quad |K^{(n)}| \leq n - 2 \quad (28.14)$$

В частности, при $n = 4$ легко написать неравенство Леггетта-Гарга, которое по виду очень похоже на BCHSH-неравенство

$$|C_{21} + C_{32} + C_{43} - C_{41}| \leq 2 \quad (28.15)$$

но имеет совершенно иной физический смысл. Именно последнее неравенство было получено в работе *A. J. Leggett, A. Garg, Phys.Rev.Lett. 54, p.857 (1985)*.

Нарушение неравенств Леггетта-Гарга в квантовой теории.

Рассмотрим дихотомную наблюдаемую

$$\hat{Q}_i \equiv \hat{Q}(t_i) = (\vec{a}(t_i)\vec{\sigma}) = a_{i\alpha}\sigma_\alpha \quad (28.16)$$

где σ_α – матрицы Паули, \vec{a}_i – единичные векторы. Следующим образом определим корреляционную функцию

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \langle \hat{Q}_i \hat{Q}_j + \hat{Q}_j \hat{Q}_i \rangle_\psi \quad (28.17)$$

Воспользовавшись формулой антикоммутирования матриц Паули

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \hat{1}$$

находим выражение для корреляционной функции:

$$C_{ij} = (\vec{a}_i \vec{a}_j) \langle \hat{1} \rangle_\psi = (\vec{a}_i \vec{a}_j) = \cos \theta_{i,j} \quad (28.18)$$

Тогда величина $K^{(n)}$ задается формулой

$$K^{(n)} = \sum_{m=1}^{n-1} \cos(\theta_{m,m+1}) - \cos\left(\sum_{m=1}^{n-1} \theta_{m,m+1}\right) \quad (28.19)$$

Для нахождения максимального значения величины $K^{(n)}$ выберите $\theta_{m,m+1} = \pi/n$. Тогда

$$K_{max}^{(n)} = n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (28.20)$$

В самых простейших случаях

$$\begin{aligned} K_{max}^{(3)} &= \frac{3}{2} \\ K_{max}^{(4)} &= 2\sqrt{2} \\ K_{max}^{(5)} &= \frac{5}{4} (1 + \sqrt{5}) \\ K_{max}^{(6)} &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Таким образом, например, в квантовой механике

$$|C_{21} + C_{32} + C_{43} - C_{41}| \leq 2\sqrt{2} \quad (28.21)$$

Неравенства Леггетта-Гарга впервые были экспериментально проверены в работе *C. Robens, W. Alt, D. Meschede, C. Emary, A. Alberti, "Ideal Negative Measurements in Quantum Walks Disprove Theories Based on Classical Trajectories", Phys.Rev.X5, 011003 (2015)*.

Люди, чьи фамилии носит неравенство Леггетта-Гарга.

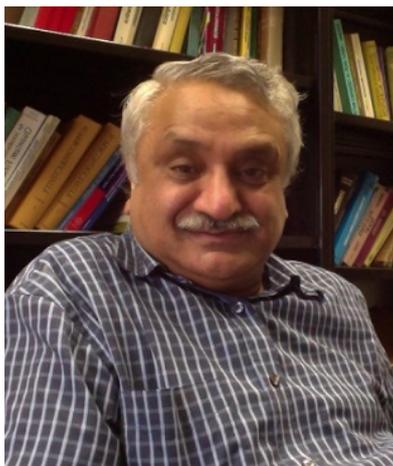


Рис. 28.1. Профессор Northwestern University Анупам Гарг

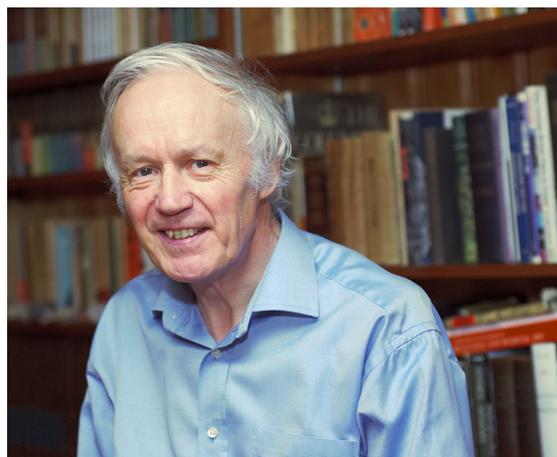


Рис. 28.2. Лауреат Нобелевской премии по физике 2003 года сэр Энтони Джеймс Леггетт

Неравенство Леггетта-Гарга считается одним из самых значительных достижений такого направления науки как **"Science Foundations"** в последней четверти XX века (см., например, *G. A. D. Briggs, J. N. Butterfield, A. Zeilinger, "The Oxford Questions on the foundations of quantum physics", Proceedings of The Royal Society A 469, 20130299, 2013*).

Сильный и слабый NIM.

Часто можно встретить утверждение, что NIM уже содержится как необходимое условие в MRps. Поэтому NIM не следует выделять в отдельный принцип. Однако это не так. В качестве контрпримера можно привести теорию волны-пилота де Бройля-Бома. В этой теории MRps выполнен, поскольку в каждый момент времени состояние микрочастицы определено однозначно. Но измерение является разрушающим. Поэтому необходимо более четко сформулировать принцип NIM. В последнее время в литературе обсуждаются две формулировки NIM.

Слабый NIM (англ. "Weak NIM" или $wNIM$). Если физическая система находится в конкретном состоянии, это физическое состояние можно определить без каких-либо последствий для самого состояния и дальнейшей динамики системы.

Понятно, что $wNIM \iff NIM$.

Сильный NIM (англ. "Strong NIM" или $sNIM$). Всегда можно измерить состояние физической системы без какого-либо влияния на само это состояние или на последующую динамику системы.

Докажем, что $sNIM$ уже содержит в себе $MRps$. Если предполагать справедливость $sNIM$, то гипотетическое неразрушающее измерение может быть выполнено в любой момент времени t . Тем самым в любой момент времени t возможно однозначно определить значение наблюдаемой $Q(t)$. Из-за неразрушающего характера измерения следует, что наблюдаемая $Q(t)$ должна иметь определенное значение еще ДО измерения. Это гарантирует, что наблюдаемая Q всегда имеет определенное значение, то есть система в каждый момент времени существует в одном и только в одном из своих состояний. Таким образом, $sNIM \iff MRps$, ч.т.д. Заметим, что наше доказательство остается справедливым, даже если $sNIM$ дается в менее строгой форме, которая позволяет измерениям менять последующую динамику системы, но, при этом, все еще однозначно определять значение наблюдаемой (состояния).

Если в приведенном выше рассуждении дополнительно (или неявно) подразумеваются наличие стрелы времени (англ. "Arrow of Time" , сокращ. AoT) и свободы воли экспериментатора относительно выбора начальных состояний и времени проведения измерений (в том числе, проводить ли измерение вообще), то $sNIM$ достаточно даже для обоснования MR , то есть

$$sNIM(Induction, AoT) \iff (MRps \wedge NIM) \iff MR$$

No-signaling in time.

В 2013 году было предложено так называемое условие "no signaling in time" (**NSIT**) (см. *J. Kofler, C. Brukner, "Condition for macroscopic realism beyond the Leggett–Garg inequalities", Phys. Rev. A 87, 052115 (2013).*). Это условие можно рассматривать как аналог NS-условия, используемого при выводе неравенств Белла (см. параграф "No-signaling conditions"). Также это условие можно рассматривать как альтернативную статистическую версию NIM. Данное условие требует, чтобы вероятность измерения величины $Q(t)$ в момент времени t_j (обозначается как $\omega_j(q_j)$ или $\omega(q_j|t_j)$) не зависела

от того, было ли проведено измерение величины $Q(t)$ в момент времени $t_i < t_j$, то есть

$$NSIT_{(i)j}: \quad \omega_j(q_j) = \omega_{ij}(q_j) = \sum_{q_i=\pm 1} \omega_{ij}(q_i, q_j) \quad (28.22)$$

Отметим, что вероятности $\omega_j(q_j)$ и $\omega_{ij}(q_j)$ соответствуют различным постановкам физических экспериментов. Вероятность $\omega_j(q_j)$ получается из измерений, которые проводились только в момент времени t_i , в то время как вероятность $\omega_{ij}(q_j)$ получается из измерений, которые выполнялись как в момент времени t_j , так и в предшествующий ему момент времени t_i .

Легко видеть аналогию с "No-signaling conditions" с одним маленьким замечанием. При выводе неравенств Белла использовалось NS-условие, при выводе границы Цирельсона NS-условие также работало (согласно теореме Эберхарда) и это условие было одним из важнейших условий. Здесь же NSIT-условие не использовалось при выводе неравенств Леггетта-Гарга и закономерно возникает вопрос: а в чем же оно тогда? За ответом на этот вопрос читателю предлагается обратиться к оригинальной статье, там содержится утверждение о том, что несколько NSIT-условий может заменить концепцию Локального реализма. И в этом смысле NSIT-условие совсем нетождественно NS-условию.

Неравенства Леггетта-Гарга в форме Вигнера.

Неравенства Леггетта–Гарга в форме Вигнера для трех различных моментов времени впервые изучались в работе *D. Saha, S. Mal, P. K. Panigrahi, D. Home, "Wigner's form of the Leggett-Garg inequality, the no-signaling-in-time condition, and unsharp measurements", Phys. Rev. A 91, 032117 (2015)*. Однако в этой работе соответствующие неравенства были написаны "по аналогии" с неравенствами Вигнера. И не была прослежена их связь с концепцией MR. В статье *N. Nikitin, K. Toms, "Wigner inequalities for testing the hypothesis of realism and concepts of macroscopic and local realism", Phys. Rev. A 100, 062314 (2019)* было показано, что *прямая аналогия не работает*. И предложен вывод неравенств Леггетта–Гарга в форме Вигнера непосредственно использующий концепцию MR. Именно на эту работу мы будем опираться при дальнейшем изложении.

Получим неравенства Леггетта–Гарга в форме Вигнера при помощи концепции MR. Согласно MRps некоторая дихотомная наблюдаемая Q в каждый момент времени t_i может принимать одно и только одно из двух своих значений $Q(t_i) \equiv q_i = \pm 1$.

Рассмотрим различные тройные вероятности $\omega(q_k, q_j, q_i | t_j, t_i)$, $\omega(q_j, q_k, q_i | t_j, t_i)$, $\omega(q_j, q_i, q_k | t_j, t_i)$ и так далее, где $k \neq \{i, j\}$. При этом предполагается, что в моменты

времени t_i и $t_j \neq t_i$ **проводились** измерения наблюдаемой Q , а в момент времени t_k измерение наблюдаемой Q **НЕ проводилось**, хотя согласно MRps в этот момент времени наблюдаемая Q имела вполне определенное значение.

Поскольку согласно NIM измерение состояния физической системы не влияет на ее дальнейшую динамику, то знание, в какие два из трех моментов времени были сделаны измерения наблюдаемой $Q(t)$, не важно для определения вероятностей конкретных совокупностей значений наблюдаемой $Q(t)$. Это значит, что мы можем писать $\omega(q_k, q_j, q_i | t_k, t_j, t_i)$ и $\omega(q_j, q_k, q_i | t_j, t_k, t_i)$ вместо $\omega(q_k, q_j, q_i | t_j, t_i)$ и $\omega(q_j, q_k, q_i | t_j, t_i)$.

Пусть имеются три несовпадающих вполне определенных момента времени $t_3 > t_2 > t_1$, в любые два из которых проводятся измерения наблюдаемой $Q(t)$. Тогда в тройных вероятностях присутствуют по разу все три значения q_1, q_2 и q_3 . Поэтому все равно, в каком порядке их записывать. Условимся, что будем записывать значения наблюдаемой Q справа налево в порядке возрастания временного аргумента.

Это же правило применим и к двойным вероятностям. То есть будем иметь дело с тройными вероятностями $\omega(q_3, q_2, q_1 | t_3, t_2, t_1)$ или с двойными вида $\omega(q_3, q_1 | t_3, t_2, t_1)$ и так далее. Кроме того, если значение $q_i = \pm 1$, то для краткости будем обозначать это как $q_{i\pm}$.

Поскольку мы считаем, что возникновение разных значений наблюдаемой Q в любой момент времени являются независимыми событиями, то можем написать

$$\begin{aligned}\omega(q_{3+}, q_{2-} | t_3, t_2, t_1) &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \omega(q_{3+}, q_{2-}, q_1 | t_3, t_2, t_1) \\ \omega(q_{2-}, q_{1+} | t_3, t_2, t_1) &= \sum_{q_3=-1}^{+1} \omega(q_3, q_{2-}, q_{1+} | t_3, t_2, t_1) \\ \omega(q_{3+}, q_{1-} | t_3, t_2, t_1) &= \sum_{q_2=-1}^{+1} \omega(q_{3+}, q_2, q_{1-} | t_3, t_2, t_1)\end{aligned}\tag{28.23}$$

Учтя, что все вероятности, входящие в написанные выше суммы, неотрицательны, немедленно приходим к неравенству Леггетта–Гарга в форме Вигнера для **одной** частицы:

$$\omega(q_{3+}, q_{2-} | t_3, t_2, t_1) \leq \omega(q_{2-}, q_{1+} | t_3, t_2, t_1) + \omega(q_{3+}, q_{1-} | t_3, t_2, t_1)\tag{28.24}$$

Данное неравенство поучительно сравнить с неравенством Вигнера для **пары** антикоррелированных частиц:

$$\omega(a_+^{(B)}, b_+^{(A)} | \mathcal{A}^{(B)}, \mathcal{B}^{(A)}) \leq \omega(c_+^{(B)}, b_+^{(A)} | \mathcal{C}^{(B)}, \mathcal{B}^{(A)}) + \omega(a_+^{(B)}, c_+^{(A)} | \mathcal{A}^{(B)}, \mathcal{C}^{(A)})$$

При выводе неравенства Вигнера существенно использовались локальность и теорема Эберхарда (\equiv NS-условие). При получении неравенства Леггетта–Гарга в форме Вигнера локальность вообще НЕ нужна. Кроме того, НЕ используется условие NSIT. Все это, в конечном счете, приводит к тому, что **пространства состояний** обоих неравенств **НЕ изоморфны** друг другу.

Обобщение неравенств Леггетта–Гарга в форме Вигнера на n различных моментов времени и парадокс Зенона.

Неравенство неравенств Леггетта–Гарга для трех различных моментов времени можно обобщить на n различных моментов времени $t_n > t_{n-1} > \dots > t_1$. Например, аналог двойной совместной вероятности $\omega(q_{3+}, q_2 | t_3, t_2, t_1)$ запишется как:

$$\begin{aligned} \omega(q_{3+}, q_2 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) &= \\ &= \sum_{q_n} \dots \sum_{q_4} \sum_{q_1} \omega(q_n, \dots, q_4, q_{3+}, q_{2-}, q_1 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) \end{aligned} \quad (28.25)$$

Почти дословно повторяя вывод неравенства для трех различных моментов времени можно записать цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \omega(q_{n+}, q_1 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) &\leq \omega(q_{n+}, q_2 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) + \\ &+ \omega(q_{2+}, q_1 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1); \\ \omega(q_{n+}, q_2 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) &\leq \omega(q_{n+}, q_3 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) + \\ &+ \omega(q_{3+}, q_2 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1); \\ &\dots\dots\dots \\ \omega(q_{n+}, q_{(n-2)-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) &\leq \omega(q_{n+}, q_{(n-1)} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) + \\ &+ \omega(q_{(n-1)+}, q_{(n-2)-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1); \end{aligned} \quad (28.26)$$

Из этой цепочки немедленно получается следующее обобщение неравенств Леггетта–Гарга в форме Вигнера для одной частицы на n различных моментов времени

$$\begin{aligned} \omega(q_{n+}, q_1 | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) &\leq \\ &\leq \omega(q_{n+}, q_{(n-1)-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) + \omega(q_{(n-1)+}, q_{(n-2)-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) + \dots \\ &\dots + \omega(q_{3+}, q_{2-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) + \omega(q_{2+}, q_{1-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1); \end{aligned} \quad (28.27)$$

Из данного неравенства вытекает **теорема**: концепция MR приводит к тому, что вероятность $\omega(q_{n+}, q_{1-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1)$, вычисленная в рамках квантовой механики при

$n \rightarrow \infty$, не может быть положительной. Фактически данная теорема эквивалентна утверждению, что из MR следует ”замораживание” динамики любой квантовой системы (квантовый парадокс Зенона).

Пусть эволюция замкнутой квантовой системы задается при помощи эрмитового гамильтониана \hat{H} . С учетом условия ортогональности $\langle q_{i+} | q_{(i-1)-} \rangle = 0$ находим

$$\begin{aligned} \omega(q_{i+}, q_{(i-1)-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) &= \left| \langle q_{i+} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{t_n - t_1}{n-1}} | q_{(i-1)-} \rangle \right|^2 \approx \\ &\approx \frac{(t_n - t_1)^2}{(n-1)^2} \frac{1}{\hbar^2} \sigma_{i-1}^{(H)} \end{aligned} \quad (28.28)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{i-1}^{(H)} &= \langle q_{i+} | \hat{H} | q_{(i-1)-} \rangle \langle q_{(i-1)-} | \hat{H} | q_{i+} \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \left(\langle q_{i+} | \hat{H}^2 | q_{(i-1)-} \rangle + \langle q_{(i-1)-} | \hat{H}^2 | q_{i+} \rangle \right) \end{aligned} \quad (28.29)$$

Отсюда следует, что все $\sigma_{i-1}^{(H)} \geq 0$. Обозначим максимальное значение по набору $\left\{ \frac{1}{\hbar^2} \sigma_{i-1}^{(H)} \right\}$ через $|\mathcal{M}|^2$. Тогда получим, что

$$\omega(q_{n+}, q_{1-} | t_n, t_{n-1}, \dots, t_1) \leq \frac{(t_n - t_1)^2}{(n-1)^2} |\mathcal{M}|^2 \rightarrow 0 \quad (28.30)$$

при $n \rightarrow \infty$, поскольку $t_n t_1$ и $|\mathcal{M}|^2$ являются конечными величинами. Теорема доказана.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ