ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)

НИКИТИН
НИКОЛАЙ ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
РОМАНЕНКО ГЛЕБА ЭДУАРДОВИЧА

Содержание

Лекция 1. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 1).

Введение.

Основной курс лекций по матрице плотности завершен. Он был направлен на решение слудующих задач: первая – ознакомление студентов с матрицей плотности, методани работы с ней и областями применения; вторая – показать студентам "красоту"квонтовой механики с помощью некоторых "красивых"квантовомеханических задач (которые как правило остаются за рамками стандартных курсов по квантовой механике).

Лекции предложенные в данном приложении также будут разбиты на две части: в первой части будут рассмотрены "красивые"задачи по квантовой механике; во второй – дополнительные примеры применения матрицы плотности, не вошедшие в основной курс лекций в силу их громоздскости или по каким-либо еще причинам.

И первая лекция в данном дополнении будет посвящена одной из "красивых"идей (систем) квантовой механики – система нейтральных псевдоскалярных мезонов.

Обычно, эта тема рассматривается в курсах по физике элементарных частиц, при этом, подразумевая, что студенты знают квантовую механику "в совершенстве"и опуская многие важные вещи. Однако, рассматривать системы нейтральных псевдоскалярных мезонов в рамках обычной квантовой механики тоже можно, но для этого необходимо предварительно пояснить некоторые моменты, как правило, известные студентам прошедшим курсы лекций, на которых рассказывалось об элементарных частицах. Здесь же мы не будем ничего оставлять за рамками, поскольку автору лекций заранее не известен уровень подготовки читателя.

Определение нейтральных псевдоскалярных мезонов.

Для начала, определим, что же такое нейтральный псевдоскалярный мезон. Как известно, в природе есть всего четыре вида взаимодействий: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Но, поскольку в физике элементарных частиц гравитационное не играет никакой роли, то рассматривать мы будем только оставшиеся три вида.

Также известно, что все элементарные частицы состоят из фундаментальных:

1) кварки;

2) лептоны;

3) переносчики взаимодействий:

   a) глюоны – переносчики сильного взаимодействия;

   b) $W^{\pm}$ и Z бозоны – переносчики слабого взаимодействия;

   c) фотоны – переносчики электромагнитного взаимодействия.

В этой секции нас больше будут интересовать кварки – фундаментальные частицы со спином $s = \frac{1}{2}$, участвующие в сильном, слабом и электромагнитных взаимодействиях. Всего существует 6 сортов (ароматов) кварков, которые делятся следующие группы:

u	c	t	верхние кварки с зарядом $+\frac{2}{3}\,|e|$
d	s	b	нижние кварки с зарядом $-\frac{1}{3}\,|e|$

где $|e|$ – модуль заряда электрона.

Легкие кварки – кварки, токовые массы которых меньше, чем характерный адронный масштаб (1 ГэВ). Тяжелые кварки – кварки, токовые массы которых больше, чем характерный адронный масштаб.

Все 6 кварков экспериментально открыты. В силу сильного взаимодействия кварки не встречаются в свободном виде (в отличие от лептонов – электронов, мюонов, нейтрино), а лишь в составе более сложных частиц – адронов – частиц состоящих из кварков (и/или антикварков).

Мезоны – адроны состоящие из пары кварк-антикварк

$$|M\rangle = |q_1\,\overline{q}_2\rangle \tag{1.1}$$

Кварк и антикварк в составе мезонов могут быть как одинаковых ароматов $1 = 2$, так и разных $1 \neq 2$. Если записывать более подробно, то вектор состояния мезона будет выглядеть следующим образом:

$$|M\rangle = C_0\,|q_1\overline{q}_2\rangle + C_1\,|q_1\overline{q}_2 g\rangle + C_2\,|q_1\overline{q}_2 Q\overline{Q}\rangle + \ldots \tag{1.2}$$

где g – глюон; $Q\overline{Q}$ – некоторая пара кварк-антикварк.

Процесс вычисления такого рода поправок очень нетривиальный, выходящий за рамки теории возмущений и относящийся к, так называемой, непертурбативной физике, которая выходит за рамки данного курса. Однако, поскольку для нерелятивистских мезонов квадрат первого коэффициента (вероятность возникновения пары кварк-антикварк $|q_1\overline{q}_2\rangle$) $|C_0|^2 \gg |C_i|^2$ мы будем определять мезоны согласно (1.1).

Очевидно, что под выражением "нейтральный"подразумевается отсутствие у мезона электрического заряда $Q_M = 0$.

Слово "скалярный"означает, что полный момент мезона (который в данном случае совпадает с его спином) нулевой: $J_M = S_M = 0$.

Слово "псевдоскалярный"связано с пространственной четностью (P-четность). Псевдоскалярным называется такой мезон, вектор состояния которого при P-преобразовании (Рис. 1.1) меняется следующим образом:

$$\hat{P}\,|M\rangle = -|M\rangle \tag{1.3}$$

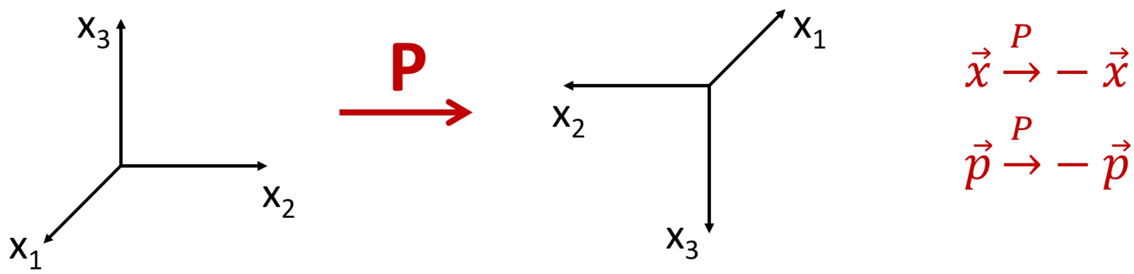


Рис. 1.1. P-преобразование, при котором происходит отражение системы координат. При таком преобразовании радиус вектор и импульс точки переходят в противоположные.

Если бы в результате P-преобразования **вектор состояния мезона не изменялся** $\hat{P}\,|M\rangle = -|M\rangle$, то тогда такой мезон назывался бы просто **скалярным**.

Примеры нейтральных псевдоскалярных мезонов.

Приведем примеры нейтральных псевдоскалярных мезонов. Наверное, самым известным примером является нейтральный пион:

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\overline{u}\rangle - |d\overline{d}\rangle\right) \tag{1.4}$$

Это достаточно простой пример, поскольку кварковый состав нейтрального пиона представляет собой линейную комбинацию двух состояний (1.1), в каждом из которых кварки одного аромата: $q_1 = q_2$.

Приведем еще более простой пример:

$$\eta_b(1S) = |b\overline{b}\rangle$$

Это легчайшая разновидность η_b-мезона (обозначается "1S").

Однако, нас будут мало интересовать такие простые примеры мезонов, в которых ароматы кварка и антикварка совпадают. Мы будем рассматривать легчайшие нейтральные псевдоскалярные мезоны, в составе которых кварк и антикварк имеют различные ароматы. Выпишем такие мезоны:

$$\begin{gathered}
\left|K^0\right\rangle = |\overline{s}d\rangle \\
\left|\overline{K^0}\right\rangle = |\overline{s}d\rangle \\
\left|D^0\right\rangle = |c\overline{u}\rangle \\
\left|\overline{D^0}\right\rangle = |\overline{c}u\rangle \\
\left|B^0\right\rangle = \left|\overline{b}d\right\rangle \\
\left|\overline{B^0}\right\rangle = \left|b\overline{d}\right\rangle \\
\left|B_s^0\right\rangle = \left|\overline{b}s\right\rangle \\
\left|\overline{B_s^0}\right\rangle = |b\overline{s}\rangle
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Легко проверить с помощью приведенной выше таблицы ароматов кварков, что данные мезоны являются нейтральными, то есть, имеют нулевой электрический заряд. Также, эти мезоны являются легчайшими из тех, в состав которых входит s, c или b кварки.

Глядя на приведенные мезоны может возникнуть вопрос: почему в одних частицах кварки, в других антикварки? Можно ли это как-то обосновать и структурировать?

Как возникли определения состояний нейтральных псевдоскалярных мезонов?

Используемые определения закрепились в физике элементарных частиц в результате исторического развития данной области. И, если при взгляде на них со стороны, они могут показаться несколько нелогичными, то учтя исторический контекст, все встает на свои места.

Первой открытой сильно взаимодействующей частицей состоящей из кварков был протон p^+ (знак "+"отражает электрический заряд частицы и обычно не пишется). На момент открытия протона не было известно ни о каких кварках и его долгое время считали неделимой частицей. Дальше, по мере открытия все большего количества сильно взаимодействующих частиц те из них, которые имели **положительный заряд** называли **частицами**, а те, которые обладали **теми же свойствами**, но имели **отрицательный заряд – античастицами**.

В 1964 году была предложена кварковая модель для систематизации всех открытых к тому времени частиц. Оказалось, что K^+-мезон ($K^+ = \bar{s}u$), считавшийся тогда частицей содержит в себе $\bar{s}$ в роли базовой частицы. Это стало причиной того, что и нейтральный мезон $K^0 = \bar{s}d$ с базовым $\bar{s}$ кварком стали называть частицей, а $\overline{K^0} = s\overline{d}$ с базовым s кварком, в свою очередь, стали называть античастицей.

Следующим был открыт мезон $D^+ = c\overline{d}$, состав которого не противоречит логике названия его частицей (в отличие от рассмотренного выше K^+-мезона). Аналогично, нейтральный мезон $D^0 = c\overline{u}$ называется частицей.

Далее следовал мезон $B^+ = \overline{b}u$. Здесь, как и в случае с K^+ базовый кварк оказался антикварком, и, следуя исторически сложившимся наименованиям, нейтральный мезон $B^0 = \overline{b}d$ стал называться частицей, а $\overline{B^0} = b\overline{d}$ – античастицей.

Поэтому не стоит пугаться кажущейся с первого взгляда нелогичности наименований. Просто следует помнить исторический аспект, ведь что называть частицей, а что античастицей является предметом исторически сложившегося договора: что первое нашли, то и частица.

Например, если рассмотреть электрон – первый обнаруженный лептон, имеющий отрицательный заряд, называют частицей, а найденный позже позитрон – античастицей. Так, все обнаруженные впоследствии лептоны с отрицательным зарядом называются частицами, а с положительными – античастицами. А с адронами все наоборот.

Про PDG.

С 1957 года выпускается справочник включающий в себя все известные частицы и их свойства – справочник PDG (Particle Data Group). Сайт PDG: http://pdg.lbl.gov.

На данном сайте представлена информация о всех известных частицах, их свойства, а также статьи, поясняющие используемые в справочнике определениями, ставшие эталонами для физики элементарных частиц. Поэтому при возникновении вопросов автор курса советует обращаться либо к данному справочнику, либо к рекомендуемым учебникам по физике элементарных частиц.

Базис в пространстве ароматов.

Перед исследованием систем псевдоскалярных мезонов (1.5) дадим в некотором роде эпиграф:

"Если бы нейтральных псевдоскалярных мезонов не было, их надо было бы специально выдумать, чтобы объяснить студентам основные принципы квантовой механики" – Лев Борисович Окунь, выдающийся советский физик-теоретик, один из ведущих не только отечественных, но и мировых специалистов по физике электрослабого взаимодействия. Также был прекрасным педагогом и автором замечательных учебников.

Также следует заранее договориться об используемых обозначениях. Поскольку специальность и вся научная деятельность автора лекций связана с B-*мезоном*, то ему будет удобнее употреблять его как *синоним понятия нейтральный псевдоскалярный мезон.*

Рассмотрим B-мезон:

$$|B\rangle = |\overline{b}q\rangle; \qquad B = +1 \tag{1.6}$$

где в зависимости от аромата кварка q $|B\rangle$-мезон может быть $|B^0\rangle$-мезоном, если $q = d$, $|B_s^0\rangle$-мезоном, если $q = s$ и т.п. Также, у кварка b есть квантовое число "beauty"– B, которое определяет аромат $|B\rangle$-мезона.

У анти-$|B\rangle$-мезона соответствующий кварковый состав и аромат следующие:

$$|\overline{B}\rangle = |b\overline{q}\rangle; \qquad B = -1 \tag{1.7}$$

Если рассматривать пространство ароматов, то в таком пространстве мезоны (или вектора состояния мезонов) могут обладать только $B = +1$ и $B = -1$, которые являются абсолютно разными состояниями, которые не могут быть линейно выражены одно через другое.

Мы можем рассматривать пространство, в котором определяются вектора состояния нейтральных псевдоскалярных мезонов, в виде двумерного Гильбертова пространства $\mathscr{H}_2$, а записанные мезоны (1.6-1.7) как один из возможных базисов (так называемый базис ароматов) в этом пространстве.

Невозможность выразить $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$ через друг друга означает, что эти базисные состояния ортогональны друг другу:

$$\langle B|\overline{B}\rangle = 0 \tag{1.8}$$

Также введем для них свойство нормировки:

$$\langle B|B\rangle = \langle\overline{B}|\overline{B}\rangle = 0 \tag{1.9}$$

Принимая во внимание (1.8-1.9), запишем явное выражение этих базисных векторов:

$$\begin{aligned} |B\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\overline{B}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Вопрос: является ли аромат мезона физически наблюдаемой величиной?

Ответ; да, является. Например, рассмотрим следующие распады:

$$B^0 \to D^- e^+ \nu_e$$

$$\overline{B^0} \to D^+ e^- \overline{\nu_e}$$

Если в результате распада B-мезона в детекторе был зарегистрирован положительно заряженный лептон – позитрон, то это говорит о том, что распался именно B^0-мезон с значением "beauty"$B = +1$, а если электрон – значит распался $\overline{B^0}$ со значением $B = -1$.

И поскольку "beauty"(аромат) B – наблюдаемая величина, то ей должен соответствовать некоторый оператор.

Оператор аромата.

Очевидно, что поскольку пространство ароматов имеет размерность равную двум, то оператор аромата должен иметь вид матрицы размерности 2×2. Также, необходимо, чтобы он был эрмитовым, поскольку, как мы выяснили, аромат является физической наблюдаемой. Обозначим такой оператор $\hat{B}$ и Найдем его внешний вид.

Поскольку вектора (1.10) обладают определенным ароматом, то они должны быть собственными для оператора аромата $\hat{B}$, со следующими собственными значениями:

$$\begin{aligned} \hat{B}\,|B\rangle &= +|B\rangle \\ \hat{B}\,|\overline{B}\rangle &= -|\overline{B}\rangle \end{aligned} \tag{1.11}$$

Теперь запишем оператор $\hat{B}$ в базисе (1.10):

$$\begin{aligned} \hat{B} = \begin{pmatrix} \langle B|\underline{\hat{B}|B\rangle} & \langle B|\underline{\hat{B}|\overline{B}\rangle} \\ \langle\overline{B}|\underline{\hat{B}|B\rangle} & \langle\overline{B}|\underline{\hat{B}|\overline{B}\rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle B|\underline{B\rangle} & -\langle B|\underline{\overline{B}\rangle} \\ \langle\overline{B}|\underline{B\rangle} & -\langle\overline{B}|\underline{\overline{B}\rangle} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь при первом переходе были использованы свойства (1.11), а при втором переходе – свойства ортогональности (1.8) и нормировка (1.9).

Далее мы будем опускать столь тривиальные вычисления.

Оператор пространственной четности.

Поскольку мы рассматриваем псевдоскалярные мезоны, то действие на такой мезон оператора пространственной четности (инверсии) будет следующим:

$$\begin{aligned} \hat{P}\,|B\rangle &= -|B\rangle \\ \hat{P}\,|\overline{B}\rangle &= -|\overline{B}\rangle \end{aligned} \tag{1.13}$$

Тогда оператор пространственной четности $\hat{P}$ должен записываться следующим образом:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\hat{1} \tag{1.14}$$

Данное утверждение читателю предлагается проверить самостоятельно.

Оператор зарядового сопряжения.

По определению оператор зарядового сопряжения $\hat{C}$ меняет заряд частицы на противоположный, то есть, из частицы делает античастицу:

$$\hat{C}\,|B\rangle = \zeta\,|\overline{B}\rangle$$

где ζ – некоторый множитель (комплексное число). Поскольку нет гарантий того, что оператор $\hat{C}$ точно переводит частицу в античастицу. Его вид еще предстоит выяснить.

Аналогично, результатом действия оператора зарядового сопряжения $\hat{C}$ на античастицу является частица:

$$\hat{C}\,|\overline{B}\rangle = \eta\,|B\rangle$$

где η – также является некоторым комплексным числом, которое нужно будет определить.

Теперь рассмотрим случай, когда оператор $\hat{C}$ дважды действует на B-мезон. Логично предположить, что в таком случае должен получиться B-мезон:

$$\hat{C}^2\,|B\rangle = |B\rangle$$

Аналогично:

$$\hat{C}^2\,|\overline{B}\rangle = |\overline{B}\rangle$$

С другой стороны, если расписать это действие подробно, получим:

$$\hat{C}^2\,|B\rangle = \hat{C}\hat{C}\,|B\rangle = \zeta\hat{C}\,|\overline{B}\rangle = \zeta\eta\,|B\rangle$$

Теперь, сравнивая результаты, можно сделать вывод о том, что

$$\zeta\eta = +1 \tag{1.15}$$

Теперь покажем, что оператор $\hat{C}$ – унитарный. Воспользуемся условием нормировки (1.9):

$$\begin{aligned}\langle B|\hat{1}|B\rangle = \langle B|B\rangle = 1 = \langle\overline{B}|\overline{B}\rangle = \\ = \frac{1}{|\eta|^2}\,\langle B|\hat{C}^\dagger\hat{C}|B\rangle\end{aligned} \tag{1.16}$$

Откуда получаем следующее операторное тождество:

$$\hat{1} = \frac{1}{|\eta|^2}\,\hat{C}^\dagger\hat{C} \tag{1.17}$$

Аналогично, запишем

$$\begin{gathered}\langle\overline{B}|\hat{1}|\overline{B}\rangle = \langle\overline{B}|\overline{B}\rangle = 1 = \langle B|B\rangle = \\ = \frac{1}{|\zeta|^2}\,\langle\overline{B}|\hat{C}^\dagger\hat{C}|\overline{B}\rangle\end{gathered} \tag{1.18}$$

Откуда

$$\hat{1} = \frac{1}{|\zeta|^2}\,\hat{C}^\dagger\hat{C} \tag{1.19}$$

Из выражений (1.17) и (1.19) получаем:

$$\frac{\hat{C}}{|\eta|} = \frac{\hat{C}}{|\zeta|} \implies |\eta| = |\zeta| \tag{1.20}$$

Вспомнив, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей:

$$z = z\,e^{i\varphi} \quad \text{– комплексное число в показательной форме}$$

$$\implies |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

Применяя это правило к выражению (1.15), получаем

$$|\zeta\eta| = |\zeta|\,|\eta| = +1 \tag{1.21}$$

Сравнивая (1.20) и (1.21), получаем

$$|\eta| = |\zeta| = 1 \tag{1.22}$$

Подставив (1.22) в (1.18) получим

$$\hat{1} = \hat{C}^\dagger\hat{C} \tag{1.23}$$

То есть, оператор зарядового сопряжения $\hat{C}$ действительно унитарный.

Теперь рассмотрим подробнее коэффициенты ζ и η с учетом полученных соотношений (1.22):

$$\begin{gathered} \zeta = |\zeta|\, e^{i\varphi_C} = e^{i\varphi_C} \\ \eta = |\eta|\, e^{i\varkappa_C} = e^{i\varkappa_C} \end{gathered} \tag{1.24}$$

Подставим (1.24) в (1.15)

$$1 = e^{i\,(\varphi_C + \varkappa_C)} \implies \varphi_C + \varkappa_C = 0 \tag{1.25}$$

здесь мы опускаем множитель $2\pi n$, поскольку он не представляет для нас ценности с физической точки зрения.

С помощью полученного выражения (1.25) перепишем η (1.24):

$$\eta = e^{i\varkappa_C} = e^{i\varphi_C} \tag{1.26}$$

Окончательно можем записать как оператор зарядового сопряжения $\hat{C}$ действует на базис в пространстве ароматов, то есть на $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$ мезоны:

$$\begin{gathered} \hat{C}\,|B\rangle = e^{i\varphi_C}\,|\overline{B}\rangle \\ \hat{C}\,|\overline{B}\rangle = e^{-i\varphi_C}\,|B\rangle \end{gathered} \tag{1.27}$$

Легко заметить, что действия данного оператора на частицу и античастицу не являются независимыми, поскольку у них совпадает абсолютное значение фазы в экспоненте.

Теперь запишем матрицу оператора зарядового сопряжения $\hat{C}$ в явном виде:

$$\hat{C}(\varphi_C) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_C} \\ e^{i\varphi_C} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

Как показано, оператор $\hat{C}$ зависит от произвольной фазы φ_C. Часто ее фиксируют в вычислениях (серии вычислений). Однако, не зная принцип работы оператора зарядового сопряжения с произвольной фазой могут возникнуть проблемы с сопряжением того, что изложено в разных статьях и книгах. В данном курсе мы будем производить вычисления для произвольной фазы, чтобы они при необходимости могли быть легко адаптированы к любой книге или статье.

Для оператора $\hat{C}$ (1.28) легко показать, что

$$\begin{aligned} \hat{C}^{\dagger}(\varphi_C)\hat{C} &= \hat{1} \\ \hat{C}^{\dagger}(\varphi_C) &= \hat{C}(\varphi_C) \end{aligned} \tag{1.29}$$

То есть, оператор зарядового сопряжения $\hat{C}$ не только унитарен, но еще и эрмитов. Данный вывод является вполне логичным, поскольку заряд частицы является наблюдаемой величиной, а наблюдаемой величине должен соответствовать эрмитов оператор.

Свойства оператора зарядового сопряжения.

Воспользовавшись правилом Эйлера для комплексных чисел, матрицу (1.28) можно разложить по матрицам Паули:

$$\hat{C}(\varphi_C) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_C} \\ e^{i\varphi_C} & 0 \end{pmatrix} = cos\,(\varphi_C)\,\sigma_1 + sin\,(\varphi_C)\,\sigma_2 \tag{1.30}$$

где

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– матрицы Паули.

Итак, мы уже познакомились со следующими наблюдаемыми: аромат, пространственная честность, зарядовая четность. Теперь зададимся вопросом: а являются ли это наблюдаемыми совместно измеримыми?

Чтобы ответить на этот вопрос необходимо узнать коммутируют ли операторы этих наблюдаемых друг с другом.

Очевидно, что оператор пространственной четности $\hat{P} = -\hat{1}$ будет коммутировать со всеми остальными в силу, того что единичная матрица коммутирует с любым оператором.

$$[\hat{P}, \hat{C}] = 0 \tag{1.31}$$

Читателю предлагается самостоятельно показать, что

$$[\hat{C}, \hat{B}] \neq 0 \tag{1.32}$$

То есть, что для системы обладающей некоторым ароматом и некоторым зарядом невозможно совместно измерить эти величины.

Лекция 2. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 2).

Оператор CP-четности.

Как было показано в прошлой лекции, операторы четности и зарядового сопряжения коммутируют (1.31), а значит мы можем построить оператор $\hat{C}\hat{P}$-сопряжения:

$$\begin{aligned} &\hat{C}\hat{P} = (cos\,\varphi_C\;\sigma_1 + sin\,\varphi_C\;\sigma_2)\,\left(-\hat{1}\right) = \\ &= cos\,(\varphi_C+\pi)\;\sigma_1 + sin\,(\varphi_C+\pi)\;\sigma_2 = cos\,(\alpha)\;\sigma_1 + sin\,(\alpha)\;\sigma_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\alpha = \varphi_C + \pi \tag{2.2}$$

Заметим что оператор $\hat{C}\hat{P}$-четности является эрмитовым, то есть, является наблюдаемой величиной, а также, что он не коммутирует с оператором аромата:

$$[\hat{C}\hat{P},\,\hat{B}] \neq 0 \tag{2.3}$$

Базис состояний с определенным значением CP-четности.

Перепишем оператор CP-четности в виде

$$\hat{C}\hat{P}(\alpha) = cos\,\alpha\;\sigma_1 + sin\,\alpha\;\sigma_2 \tag{2.4}$$

Посмотрим, какие состояния диагонализует оператор CP-четности. Для этого найдем собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{C}\hat{P}$. Начнем с нахождения собственных значений:

$$0 = det\,\left(\hat{C}\hat{P} - \lambda\,\hat{1}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Откуда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Теперь введем векторы отвечающие этим собственным значениям. По определению:

$$\begin{aligned} \hat{C}\hat{P}\,|B_1\rangle &\overset{def}{=} +|B_1\rangle \\ \hat{C}\hat{P}\,|B_2\rangle &\overset{def}{=} -|B_2\rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

Найдем явный вид этих векторов в базисе ароматов (1.10). Для этого разложим вектор $|B_1\rangle$ в этом базисе:

$$|B_1\rangle = C_1\,|B\rangle + C_2\,|\overline{B}\rangle = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Теперь явно запишем матрицу $\hat{C}\hat{P}$ в базисе ароматов, явно записать матрицу $|B_1\rangle$ (2.7) и найти собственные векторы.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \begin{cases} C_2\,e^{-i\alpha} = C_1 \\ C_1\,e^{i\alpha} = C_2 \end{cases} \Longrightarrow C_2 = e^{i\alpha}\,C_1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставим это в условие нормировки:

$$1 = \langle B_1|B_2\rangle = |C_1|^2 + |C_2|^2 =$$

$$= |C_1|^2 + \left|C_1\,e^{i\alpha}\right|^2 = 2\,|C_1|^2$$

Откуда находим

$$|C_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{e^{i\varepsilon}}{\sqrt{2}} \\ C_2 = \frac{e^{i\varepsilon}}{\sqrt{2}}\,e^{i\alpha} \end{cases} \tag{2.9}$$

где ε – некоторая произвольная фаза.

Подставляя (2.9) в (2.7) находим $|B_1\rangle$:

$$|B_1\rangle = C_1\,|B\rangle + C_2\,|\overline{B}\rangle = \frac{e^{i\varepsilon}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\alpha}\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Поскольку ε – произвольная фаза, то, как правило, для удобства ее определяют равной нулю. Тогда

$$|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\alpha}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|B\rangle + e^{i\alpha}\,|\overline{B}\rangle\right) \tag{2.11}$$

Обратим внимание на произвольную фазу α при CP-преобразовании (или на связанную с ней фазу φ_C), при ее изменении будет меняться и вектор $|B_1\rangle$ и вектор $|B_2\rangle$. Иногда в книгах опускают обсуждение этого- момента, что может запутать читателя (например выбор знака "$+$" или "$-$" перед экспонентой).

Теперь найдем вектор $|B_2\rangle$. Сделать это можно несколькими способами. Например, используя то, что оператор $\hat{C}\hat{P}$ – эрмитов, и то, что вектор $|B_1\rangle$ относится к одному его собственному значению, а вектор $|B_2\rangle$ – к другому, а следовательно, они ортогональны друг другу, и таким образом найти $|B_2\rangle$ с точностью до фазу. А можно, проделать тот же самый порядок действий что и для $|B_1\rangle$: выписать его собственное значение и найти его как собственный вектор оператора $\hat{C}\hat{P}$. Так и поступим:

$$\begin{gathered}|B_2\rangle = D_1\,|B\rangle + D_2\,|\overline{B}\rangle = \begin{pmatrix}D_1\\ D_2\end{pmatrix} \Longrightarrow D_2 = -e^{i\alpha}\,D_1 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow |B_2\rangle = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -e^{i\alpha}\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{2.12}$$

где γ – некоторая произвольная фаза.

Легко видеть, что при произвольной фазе γ выполнено условие ортогональности:

$$\langle B_1|B_2\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -e^{i\alpha}\end{pmatrix} =$$

$$\frac{e^{i\gamma}}{2}\left(1 - e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\right) = 0$$

Обратим внимание на один тонкий момент: как выбирать фазу γ?

Здесь фаза γ – **относительная** фаза между векторами $|B_1\rangle$ и $|B_2\rangle$, и положить ее равной нулю, как это было, например, в случае с **абсолютной** фазой ε в (1.10) не кажется столь очевидным решением. Тем не менее, это можно сделать если речь идет об ортогональных векторах, поскольку интерференционных слагаемых либо не будет, либо они будут выходить из всех физических величин.

Поскольку в рассматриваемом случае $|B_1\rangle$ ортогонален $|B_2\rangle$, то мы можем записать

$$|B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|B\rangle - e^{i\alpha}\, |\overline{B}\rangle\right) \tag{2.13}$$

Действия оператора CP на состояния определенного импульса.

До этого мы рассматривали действия оператора $\hat{C}\hat{P}$ на B-мезон в пространстве ароматов. Предположим теперь, что мезон вдобавок к этому двигается. Как нам известно, соперация P-сопряжения меняет вектора импульса и координаты на противоположные (Рис. 1.1), а операция зарядового C-сопряжения никак не влияет на импульс или координату. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{C}\hat{P}\, |B(\vec{p})\rangle &= e^{i\alpha}\, |\overline{B}(-\vec{p})\rangle \\ \hat{C}\hat{P}\, |\overline{B}(\vec{p})\rangle &= e^{-i\alpha}\, |B(-\vec{p})\rangle \end{aligned} \tag{2.14}$$

Операция обращения времени.

Операция обращения времени T действует следующим образом:

$$t \xrightarrow{T} -t$$

При этом оно никак не затрагивает пространство:

$$\vec{x} \xrightarrow{T} \vec{x} \tag{2.15}$$

Однако, интересно взглянуть на импульс, поскольку входящая в него скорость является производной координаты по времени и операция обращения времени действует на нее следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{x}}{\mathrm{d}\,t} \xrightarrow{T} -\vec{v}$$

Следовательно

$$\vec{p} = m\vec{v} \xrightarrow{T} -\vec{p} \tag{2.16}$$

Свойства оператора обращения времени.

Пусть $\hat{T}$ – оператор обращения времени. Поскольку время однородно и изотропно, то должен существовать обратный оператор $\hat{T}^{-1}$, такой что

$$\hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{1} \tag{2.17}$$

Результат действия оператора $\hat{T}$ на некоторый волновой вектор согласно (2.15) должен быть следующим:

$$\hat{T}\,|\psi(t)\rangle = |\psi(-t)\rangle \tag{2.18}$$

Заметим, что в результате этого преобразования не возникает никаких фаз. Фазы появятся если $|\psi(-t)\rangle$ будет иметь определенные трансформационные свойства при зарядовом сопряжении, то есть если она будет как-то выражаться через $|\psi(t)\rangle$.

Глядя на выражение (2.18) возникает желание заявить назвать его эрмитовым аналогично оператору зарядового сопряжения $\hat{C}$. Однако, воздержимся пока от таких выводов, поскольку в отличие от линейных операторов $\hat{P}$ и $\hat{C}$, оператор $\hat{T}$ не является таковым.

Рассмотрим следующий матричный элемент некоторого оператора $\hat{O}(t)$:

$$\begin{gathered}\left\langle\varphi(t)\middle|\hat{O}(t)\middle|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\varphi(t)\middle|\underline{\hat{1}}\ \hat{O}(t)\ \underline{\hat{1}}\middle|\psi(t)\right\rangle = \\ = \left\langle\varphi(t)\middle|\underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}\ \hat{O}(t)\ \underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}\middle|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\varphi(-t)\middle|\hat{T}\ \hat{O}(t)\ \hat{T}^{-1}\middle|\psi(-t)\right\rangle\end{gathered} \tag{2.19}$$

Откуда

$$\hat{O}(-t) = \hat{T}\ \hat{O}(t)\ \hat{T}^{-1} \tag{2.20}$$

Или, если записывать это преобразование в наиболее общем виде:

$$\hat{O}' = \hat{T}\hat{O}\hat{T}^{-1} \tag{2.21}$$

Поскольку, операторы физических наблюдаемых при действии оператора $\hat{T}$ преобразуются также как соответствующие им физические наблюдаемые при обращении времени, то

$$
\begin{gathered}
x \xrightarrow{T} x \implies \hat{T}\hat{x}\hat{T}^{-1} = \hat{x} \\
p \xrightarrow{T} -p \implies \hat{T}\hat{p}\hat{T}^{-1} = -\hat{p}
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

Теперь рассмотрим следующий известный коммутатор $[\hat{x},\ \hat{p}]$ и подействуем на него этим преобразованием:

$$
\begin{aligned}
& i\hbar\hat{1} = [\hat{x},\ \hat{p}] \implies \hat{T}\left(i\hbar\hat{1}\right)\hat{T}^{-1} = \hat{T}\,[\hat{x},\ \hat{p}]\,\hat{T}^{-1} = \\
& = \hat{T}\hat{x}\hat{p}\hat{T}^{-1} - \hat{T}\hat{p}\hat{x}\hat{T}^{-1} = \hat{T}\hat{x}\underline{\hat{1}}\hat{p}\hat{T}^{-1} - \hat{T}\hat{p}\underline{\hat{1}}\hat{x}\hat{T}^{-1} = \\
& = \hat{T}\hat{x}\underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}\hat{p}\hat{T}^{-1} - \hat{T}\hat{p}\underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}\hat{x}\hat{T} = \hat{x}(-\hat{p}) - (-\hat{p})\hat{x} = -[\hat{x},\ \hat{p}] = -i\hbar\hat{1}
\end{aligned}
$$

Где на предпоследнем шаге мы использовали (2.22). Таким образом, мы получили интересное и нетривиальное свойство оператора $\hat{T}$:

$$
\hat{T}\ \left(i\hbar\hat{1}\right)\ \hat{T}^{-1} = -i\hbar\hat{1} \tag{2.23}
$$

Поскольку постоянная Планка $\hbar$ – действительное число и на него можно сократить, а $\hat{1}$ действует на любую матрицу тождественным образом, то можно сделать следующий вывод:

$$
\hat{T}\ i\,\hat{T}^{-1} = -i\ \hat{1} \tag{2.24}
$$

То есть в отличие от обычного линейного оператора, оператор $\hat{T}$ при действии на мнимую единицу сопрягает ее, а следовательно сопрягает и любое произвольное комплексное число Z:

$$
\hat{T}\ Z\ \hat{T}^{-1} = Z^*\hat{1} \iff \hat{T}Z = Z^*\hat{T} \tag{2.25}
$$

Таким образом, мы разобрали действие оператора обращения времени $\hat{T}$ на произвольное комплексное число, а к комплексным числам относятся, например, коэффициенты разложения в суперпозиции.

Сперва, разберем действие оператора обращения времени $\hat{T}$ на произвольный вектор не зависящий от времени и разложенный в суперпозицию:

$$
|\psi\rangle = \sum_i c_i\ |a_i\rangle
$$

Для такого разложения справедливо

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$c_i = \langle a_i | \psi \rangle$$

Теперь подействуем оператором $\hat{T}$ на данное разложение:

$$\hat{T}\,|\psi\rangle = \hat{T}\,\left(\sum_i c_i\,|a_i\rangle\right) = \sum_i c_i^*\left(\hat{T}\,|a_i\rangle\right)$$

Но каждый из векторов $\hat{T}\,|a_i\rangle = |b_i\rangle$ продолжает быть базисным вектором. Тогда каждый из коэффициентов

$$c_i^* = \langle b_i|\,\left(\hat{T}\,|\psi\rangle\right) = \left(\langle a_i|\,\hat{T}^\dagger\right)\left(\hat{T}\,|\psi\rangle\right) = (\langle a_i|)^*(|\psi\rangle)^*$$

Откуда заключаем, что

$$\hat{T}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle^* \tag{2.26}$$

Теперь рассмотрим случай, в котором вектор состояния зависит от времени, которая эволюционирует во времени. Пусть состояние $|\psi(t)\rangle$ задается неким гамильтонианом $\hat{H}$, которому соответствует дискретный и невырожденный набор собственных векторов $|E_i\rangle$ и собственных значений E_i:

$$\hat{H}\,|E_i\rangle = E_i\,|E_i\rangle$$

Тогда можем записать

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}|E_i\rangle$$

Поскольку свойства вектора не зависят от того по какому базису он разложен, то изучим свойства вектора $|\psi(t)\rangle$ в этом простейшем базисе. Подействуем на это разложение оператором $\hat{T}$:

$$\hat{T}\,|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i^*\,e^{+\frac{i}{\hbar}E_i t}(|E_i\rangle)^* = (|\psi(t)\rangle)^*$$

Теперь можем окончательно записать следующую важную формулу:

$$\hat{T}\,|\psi(t)\rangle = (|\psi(t)\rangle)^* \tag{2.27}$$

Оператор комплексного сопряжения и его свойства.

Теперь, принимая во внимание выражение (2.27) можем записать оператор обращения времени в максимально обобщенном виде:

$$\hat{T} = \hat{U}\hat{K} \tag{2.28}$$

для конечномерных гильбертовых пространств. $\hat{U}$ – унитарный оператор, введенный из соображений сохранения нормировки в скалярных произведениях векторов состояний; $\hat{K}$ – некоторый оператор комплексного сопряжения.

Тогда из (2.27) и (2.28) получаем, что

$$\hat{T}\,|\psi(t)\rangle = \hat{U}\,(|\psi(t)\rangle)^* \tag{2.29}$$

Изучим подробнее свойства оператора комплексного сопряжения $\hat{K}$. Применим его дважды к некоторому произвольному комплексному числу Z:

$$\hat{K}^2 Z = \hat{K}\,\left(\hat{K}Z\right) = \hat{K}Z^* = Z$$

Следовательно

$$\hat{K}^2 = 1 \tag{2.30}$$

Также очевидно, что

$$\hat{K}\hat{K}^{-1} = 1 \tag{2.31}$$

Заметим, что этот **оператор скалярный**, и не является матрицей.

Теперь, покажем что оператор $\hat{T}$ в отличие от оператора $\hat{C}$ не является унитарным. Запишем оператор обратный $\hat{T}$:

$$\hat{T}^{-1} = \hat{K}^{-1}\hat{U}^{-1} = \hat{K}\hat{U}^\dagger$$

Чтобы понять почему $\hat{T} \neq \hat{T}^\dagger$ рассмотрим следующий матричный элемент:

$$\left\langle\varphi|\hat{T}^{-1}\hat{T}|\psi\right\rangle = \langle\varphi|\hat{1}|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$$

Теперь запишем то же самое, только заменим $\hat{T}^{-1}$ на $\hat{T}^\dagger$ (помним, что эрмитово сопряженный оператор действует на вектор слева). Тогда, используя (2.27) получаем:

$$\left\langle \varphi \middle| \hat{T}^\dagger \hat{T} \middle| \psi \right\rangle = (\langle\varphi|)^*(|\psi\rangle)^* = (\langle\varphi|\psi\rangle)^* = \langle\psi|\varphi\rangle$$

Сравнивая с полученным до этого выражения, приходим к выводу о том, что $\hat{T}^{-1} \neq \hat{T}^\dagger$, поскольку $\langle\varphi|\psi\rangle \neq \langle\psi|\varphi\rangle$.

Используя предыдущие выкладки запишем очень важную формулу:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \left\langle \varphi \middle| \hat{T}^\dagger \hat{T} \middle| \psi \right\rangle \tag{2.32}$$

Теперь посчитаем чему равно $\hat{T}^\dagger\hat{T}$:

$$\hat{T}^\dagger\hat{T} = \hat{K}^\dagger \underline{\hat{U}^\dagger \hat{U}} \hat{K} = \hat{K}^\dagger \underline{\hat{1}} \hat{K} = \hat{K}^\dagger \hat{K} \hat{1} \tag{2.33}$$

в отличие от унитарного оператора, для которого $\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1\hat{1}$. Также обратим внимание на то, что $\hat{K}^\dagger \neq \hat{K}^{-1}$ и $\hat{K}^\dagger \neq \hat{K}$, поскольку для него важно то, куда он действует. Оператор $\hat{K}$ или $\hat{K}^{-1}$ действуют на вектор состояния кет (справа), а оператор $\hat{K}^\dagger$ – на вектор состояния бра (слева).

Поговорим еще о двух важных свойствах операторов комплексного сопряжения и обращения времени. Рассмотрим действие некоторого оператора $\hat{O}$ на вектор состояния так, что:

$$\hat{O}\,|\psi\rangle = |\varphi\rangle$$

Домножим это выражения на $\hat{K}$ справа и применим тождественное преобразование:

$$\hat{K}\hat{O}\;\psi\rangle = \hat{K}\hat{O}\underline{\hat{1}}\,|\psi\rangle = \hat{K}\hat{O}\underline{\hat{K}\hat{K}}\,|\psi\rangle = \hat{K}|\varphi\rangle \implies$$

$$\implies \hat{K}\hat{O}\hat{K}(|\psi\rangle)^* = (|\varphi\rangle)^* = \left(\hat{O}|\psi\rangle\right)^* = \hat{O}^*(|\psi\rangle)^*$$

Отсюда приходим к следующему важному свойству оператора $\hat{K}$:

$$\hat{K}\hat{O}\hat{K} = \hat{O}^* \tag{2.34}$$

Предложим читателю следующую очень важную **задачу**: найти значение следующего выражения
$\hat{T}\hat{O}\hat{T}^{-1} =?$

Лекция 3. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 3).

Полезные свойства линейного оператора.

Как было показано, оператор обращения времени $\hat{T}$ (2.28) не является линейным и эрмитовым $\hat{T}^{-1} \neq \hat{T}^{\dagger}$ за счет входящего в его состав оператора комплексного сопряжения $\hat{K}$. Разберем подробнее, отличия линейного оператора от нелинейного. Пусть, $\hat{O}$ – некоторый линейный оператор. Тогда матричный элемент этого оператора может быть записан как

$$\langle \varphi | \hat{O} | \psi \rangle = \begin{cases} \langle \varphi | \hat{O} \psi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle \\ \langle \hat{O}^{\dagger} \varphi | \psi \rangle = \langle \varkappa | \psi \rangle \end{cases}$$

То есть, им можно подействовать на правый вектор и получить $|\chi\rangle$, или подействовать на левый эрмитово сопряженным $\hat{O} \to \hat{O}^{\dagger}$ и получить $\langle \varkappa |$. Действие линейного оператора позволяет использовать его в обе стороны.

Для нелинейного оператора ситуация иная, поскольку здесь допустимо действие только на правый вектор. Таким образом, для оператора $\hat{T}$ допустимо только

$$\langle \varphi | \hat{T} | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{T} \psi \rangle \neq \langle \hat{T}^{\dagger} \varphi | \psi \rangle \tag{3.1}$$

то же самое и с другой стороны

$$\langle \varphi | \hat{T}^{\dagger} | \psi \rangle = \langle \hat{T} \varphi | \psi \rangle \tag{3.2}$$

Эти же правила (3.1-3.2) действуют и в отношении оператора комплексного сопряжения $\hat{K}$.

Еще раз запишем важные свойства этих операторов:

$$\begin{gathered} \hat{T}^{\dagger} \neq \hat{T}^{-1} \\ \hat{T}^{-1} \hat{T} \overset{def}{=} \hat{1} \\ \hat{T}^{\dagger} \hat{T} = \hat{K}^{\dagger} \hat{K} \hat{1} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Доказательство формулы из прошлой лекции.

В конце прошлой лекции читателю было предложено найти чему равно $\hat{T}\hat{O}\hat{T}^{-1} = ?$ Докажем что

$$\hat{O}^{\dagger} = \hat{T}\hat{O}\hat{T}^{-1} \tag{3.4}$$

Используя (2.32), запишем

$$\langle\psi|\hat{O}|\varphi\rangle = \langle\hat{O}^{\dagger}\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}|\hat{O}^{\dagger}\psi\rangle =$$

$$= \langle\varphi\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\hat{O}^{\dagger}\underline{\hat{1}}|\psi\rangle = \langle\varphi\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\hat{O}^{\dagger}\underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}|\psi\rangle =$$

$$= \langle\varphi|\hat{T}^{\dagger}\left(\hat{T}\hat{O}^{\dagger}\hat{T}^{-1}\right)\hat{T}|\psi\rangle = \langle\hat{T}\varphi|\left(\hat{T}\hat{O}^{\dagger}\hat{T}^{-1}\right)|\hat{T}\psi\rangle$$

Тогда, если векторы $\langle\varphi|$ и $|\psi\rangle$ – инвариантны относительно операции обращения времени, то

$$\hat{O} = \hat{T}\hat{O}^{\dagger}\hat{T}^{-1} \iff \hat{O}^{\dagger} = \hat{T}\hat{O}\hat{T}^{-1} \tag{3.5}$$

Явный вид матрицы обращения времени для B-мезонов.

Рассмотрим состояние B-мезона обладающего некоторым импульсом $\vec{p}$ и подействуем на него оператором обращения времени $\hat{T}$:

$$\hat{T}\,|B(\vec{p})\rangle = \varkappa\,(|B(-\vec{p})\rangle)^{*} \tag{3.6}$$

Здесь $\varkappa$ – константа, являющаяся одномерной реализацией унитарной матрицы $\hat{U}$ (2.28). В таком случае, можем записать (3.6) в виде

$$\hat{T}\,|B(\vec{p})\rangle = e^{i\zeta_T}\,(|B(-\vec{p})\rangle)^{*} \tag{3.7}$$

где ζ_T – некоторая фаза.

Найдем коммутатор операторов обращения времени $\hat{T}$ и зарядового сопряжения $\hat{C}$ (делая следующее вычисление, подразумеваем, что вычисление коммутатора происходит в обкладках векторов состояния):

$$\left[\hat{T},\,\hat{C}\right] = \hat{T}\hat{C} - \hat{C}\hat{T}$$

здесь используя эрмитовость оператора $\hat{C}$ (1.29) и свойство (3.5) запишем

$$\hat{T}\hat{C}\hat{T}^{-1} = \hat{C}^{\dagger} = \hat{C} \implies \hat{T}\hat{C} = \hat{C}\hat{T}$$

домножив справа на $\hat{T}$, получаем

$$\hat{T}\hat{C} = \hat{C}\hat{T}$$

Следовательно искомый коммутатор:

$$\left[\hat{T},\, \hat{C}\right] = 0 \tag{3.8}$$

Теперь, рассмотрим действие оператора $\hat{T}$ на состояние анти-B-мезона. Используя выражение (1.27), запишем

$$\hat{T}\ \left|\overline{B}(\vec{p})\right\rangle = \hat{T}\ \left(e^{-i\varphi_C}\hat{C}\ |B(\vec{p})\rangle\right) = e^{i\varphi_C}\hat{T}\ \hat{C}\ |B(\vec{p})\rangle$$

где использовано свойство того, что для любого комплексного числа Z справедливо

$$\left.\begin{aligned} \hat{K}Z &= Z^*\hat{K} \\ \hat{U}Z &= Z\hat{U} \end{aligned}\right\} \implies \hat{T}Z = Z^*\hat{T}$$

Далее, используя коммутационное свойство (3.8) и (3.7), продолжим запись

$$\begin{aligned}
&e^{i\varphi_C}\hat{T}\ \hat{C}\ |B(\vec{p})\rangle = e^{i\varphi_C}\hat{C}\ \hat{T}\ |B(\vec{p})\rangle = e^{i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\hat{C}\ (|B(-\vec{p})\rangle)^* = \\
&= e^{i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\ \left(\hat{C}^*\, |B(-\vec{p})\rangle\right)^* = e^{i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\ \left(\begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_C} \\ e^{-i\varphi_C} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(-\vec{p})\right)^* = \\
&= e^{i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\ \left(e^{-i\varphi_C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(-\vec{p})\right)^* = e^{i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\ \left(e^{-i\varphi_C}|\overline{B}(-\vec{p})\rangle\right)^* = \\
&= e^{2i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\ \left(|\overline{B}(-\vec{p})\rangle\right)^*
\end{aligned}$$

где мы воспользовались явным видом матрицы $\hat{C}$ (1.28) и векторов состояния (1.10).

Таким образом, действие оператора обращения времени $\hat{T}$ на вектора состояния B-мезона записывается в виде:

$$\begin{aligned} \hat{T}\,|B(\vec{p})\rangle &= e^{i\zeta_T}\left(|B(-\vec{p})\rangle\right)^* \\ \hat{T}\,|\overline{B}(\vec{p})\rangle &= e^{2i\varphi_C}e^{i\zeta_T}\left(|\overline{B}(-\vec{p})\rangle\right)^* \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для большего удобства записи, обычно вводят другую фазу зарядового сопряжения φ_T, выражающуюся следующим образом:

$$\zeta_T \stackrel{def}{=} \varphi_T - \varphi_C \tag{3.10}$$

Тогда, перепишем выражения (3.9) в более симметричном виде

$$\begin{aligned} \hat{T}\,|B(\vec{p})\rangle &= e^{-i\varphi_C}e^{i\varphi_T}\left(|B(-\vec{p})\rangle\right)^* \\ \hat{T}\,|\overline{B}(\vec{p})\rangle &= e^{i\varphi_C}e^{i\varphi_T}\left(|\overline{B}(-\vec{p})\rangle\right)^* \end{aligned} \tag{3.11}$$

Глядя на (3.11), запишем явный вид матрицы оператора $\hat{T}$ в пространстве ароматов B-мезонов:

$$\hat{T} = e^{i\varphi_T}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi_C} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_C} \end{pmatrix}\hat{K} \tag{3.12}$$

где оператор $\hat{K}$ отвечает за комплексное сопряжение.

Заметим также, что матрица в составе оператора $\hat{T}$ (3.12) – унитарная, а значит может быть выражена через матрицы Паули и единичную матрицу размерности 2×2:

$$\hat{T} = \hat{T}(\varphi_T,\,\varphi_C) = e^{i\varphi_T}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi_C} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_C} \end{pmatrix}\hat{K} = e^{i\varphi}\,\left(\hat{1}\,cos\,\varphi_C - i\sigma_3\,sin\,\varphi_C\right)\,\hat{K} \tag{3.13}$$

Поясним подробнее использованное свойство.

Выражение унитарного оператора с помощью матриц Паули.

Как известно, аксиомы скалярного произведения могут быть введены не только для векторов, но и для величин "любого сорта". В случае квадратных матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ одинаковой размерности скалярное произведение записывается в виде следа:

$$(\hat{A}\cdot\hat{B}) = Tr\,(\hat{A}^\dagger\hat{B}) \tag{3.14}$$

Читатель может самостоятельно убедиться в удовлетворении этого выражения условиям аксиомы скалярного произведения.

Любую матрицу размерности 2×2 можно разложить в следующем тривиальном виде:

$$\begin{gathered}\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{3.15}$$

Заметим, что эти матрицы разложения ортогональны друг другу, то есть, скалярное произведение любой пары неодинаковых матриц равно нулю, а также, что эти матрицы ортонормированы – квадрат любой такой матрицы равен единице, например

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = Tr \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = Tr \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = Tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Как известно (читателю предлагается проверить это самостоятельно), матрицы 2×2, используемые в разложении (3.15) могут быть сами выражены с помощью матриц Паули и единичной, что есть просто преобразование одного базиса в другой (поскольку матрицы Паули и единичная матрица ортогональны друг другу).

Поскольку матрицы Паули возникают во многих физических задачах, базис на их основе будет удобнее. Тогда, любая матрица $\hat{A}$ размерности 2×2 может быть разложена

$$\hat{A} = \alpha_0 \hat{1} + \sum_i \alpha_i \sigma_i \tag{3.16}$$

Найдем коэффициенты разложения, домножив правую и левую части выражения (3.16) на единичную матрицу $\hat{1}$ и взяв след:

$$Tr\,\hat{A} = \alpha_0\, Tr\,\hat{1} = 2\alpha_0 \tag{3.17}$$

Откуда, зная вид матрицы $\hat{A}$ можно легко найти значение коэффициента α_0.

В силу свойства

$$Tr\,(\sigma_i\,\sigma_j) = 0 \text{ для } i \neq j$$

и эрмитовости матриц Паули $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$, имеем

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\, Tr\, \left(\sigma_i \hat{A}\right) \tag{3.18}$$

Комбинированное CPT-преобразование системы.

Еще раз выпишем полученные ранее коммутационные соотношения 1.31, 3.8 в пространстве ароматов (1.10):

$$\begin{aligned} [\hat{C},\, \hat{P}] &= 0 \\ [\hat{T},\, \hat{C}] &= 0 \\ [\hat{T},\, \hat{C}] &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Последний коммутатор верен в силу того, что оператор $\hat{P}$ выражается через единичный оператор (1.14), который коммутирует с любым оператором.

Также, поскольку операторы $\hat{C}$ и $\hat{P}$ – эрмитовы, то оператор $\hat{C}\hat{P}$-сопряжения тоже эрмитов:

$$\left.\begin{aligned} \hat{C} = \hat{C}^\dagger \\ \hat{P} = \hat{P}^\dagger \end{aligned}\right\} \implies \left(\hat{C}\hat{P}\right)^\dagger = \hat{C}\hat{P} \tag{3.20}$$

Нетрудно показать, что

$$[\hat{C}\hat{P},\, \hat{T}] = 0 \tag{3.21}$$

Такие коммутационные свойства говорят нам о совместной измеримости, а значит, мы можем ввести операцию CPT-сопряжения.

$$(\hat{C}\hat{P}\hat{T}) = (\hat{C}\hat{P})\, \hat{T}$$

Поскольку $(\hat{C}\hat{P})$ – унитарная матрица, и оператор $\hat{T}$ тоже имеет в своем составе унитарную матрицу (2.28), можем записать

$$(\hat{C}\hat{P}\hat{T}) = \hat{U}_{CPT}\hat{K} \tag{3.22}$$

А это значит, что многие свойства оператора CPT-преобразования аналогичны свойствам оператора $\hat{T}$ (3.3) (2.32). Например

$$\begin{aligned}
&(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger} \neq (\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1} \\
&(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1}(\hat{C}\hat{P}\hat{T}) = \hat{1} \\
&\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})|\psi\rangle
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Докажем последнее свойство:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}|\psi\rangle = \langle\varphi|\hat{T}^{\dagger}\underline{\hat{1}}\hat{T}|\psi\rangle = \langle\varphi|\hat{T}^{\dagger}\underline{(\hat{C}\hat{P})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P})}\hat{T}|\psi\rangle$$

Далле воспользовавшись свойством $\hat{A}^{\dagger}\hat{B}^{\dagger} = (\hat{B}\hat{A})^{\dagger}$, получаем искомое

$$\langle\varphi|\hat{T}^{\dagger}(\hat{C}\hat{P})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P})\hat{T}|\psi\rangle = \langle\varphi|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})|\psi\rangle$$

Лекция 4. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 4).

Действие матрицы CPT-преобразования на состояния с определенным импульсом.

Выразим матрицу CPT-преобразования через последовательное действие матриц CP-перобразования (2.1) и T-преобразования (3.12):

$$\hat{C}\hat{P}\,\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} e^{i\varphi_T} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_C} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_C} \end{pmatrix} \hat{K} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\,(\varphi_T+\varphi_C-\alpha)} \\ e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C+\alpha)} & 0 \end{pmatrix} \hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\,(\varphi_T-\pi)} \\ e^{i\,(\varphi_T+\pi)} & 0 \end{pmatrix} \hat{K}$$

где мы воспользовались выражением для фазы (2.2).
Введем новую фазу CPT-преобразования

$$\varphi_{CPT} \overset{def}{=} \varphi_T + \pi \tag{4.1}$$

Тогда, можем записать

$$\hat{C}\hat{P}\,\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\,(\varphi_T-\pi)} \\ e^{i\,(\varphi_T+\pi)} & 0 \end{pmatrix} \hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_{CPT}-2\pi i} \\ e^{i\varphi_{CPT}} & 0 \end{pmatrix} \hat{K}$$

Здесь воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{-2\pi i} = cos\,(2\pi) + i\,sin\,(-2\pi) = 1$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{C}\hat{P}\,\hat{T} &= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_{CPT}-2\pi i} \\ e^{i\varphi_{CPT}} & 0 \end{pmatrix} \hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_{CPT}} \\ e^{i\varphi_{CPT}} & 0 \end{pmatrix} \hat{K} = \\ &= e^{i\varphi_{CPT}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{K} = e^{i\varphi_{CPT}}\sigma_1\hat{K} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Теперь разберем как CPT-преобразование действует на векторы состояния (1.10):

$$\hat{C}\hat{P}\hat{T}\,|B(\vec{p})\rangle = e^{i\varphi_{CPT}}\,\left(|\overline{B}(\vec{p})\rangle\right)^* \tag{4.3}$$

где последовательное преобразование импульсов *C*-, *P*- и *T*-преобразований дает

$$\left.\begin{aligned} &\vec{p} \xrightarrow{C} \vec{p} \\ &\vec{p} \xrightarrow{P} -\vec{p} \\ &\vec{p} \xrightarrow{T} -\vec{p} \end{aligned}\right\} = \vec{p} \xrightarrow{CPT} \vec{p} \tag{4.4}$$

Аналогично (читателю предлагается показать это самостоятельно) запишем

$$\hat{C}\hat{P}\hat{T}\,|\overline{B}(\vec{p})\rangle = e^{i\varphi_{CPT}}\,\left(|B(\vec{p})\rangle\right)^* \tag{4.5}$$

Эти выражения (4.3) (4.5) можно получить и другим способом – по определению преобразований *CP*- и *T*-преобразований.

Действие CPT преобразования на состояния с определенным импульсом исходя из определений.

Теперь рассмотрим действие *CPT*-преобразования как последовательное применение входящих в него операторов, используя (3.11), (2.1) и (1.10):

$$\begin{aligned} &\hat{C}\hat{P}\hat{T}\,|B(\vec{p})\rangle = \hat{C}\hat{P}\,e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C)}(|B(-\vec{p})\rangle)^* = \\ &= e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C)}\left((\hat{C}\hat{P})^*\,|B(-\vec{p})\rangle\right)^* = e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C)}\left[\begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(-\vec{p})\right]^* = \\ &= e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C)}\left[e^{-i\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(-\vec{p})\right]^* = e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C)}\left[e^{-i\alpha}\,|\overline{B}(\vec{p})\rangle\right]^* = \\ &= e^{i\,(\varphi_T-\varphi_C+\alpha)}\left(|\overline{B}(\vec{p})\rangle\right)^* = e^{i\,\varphi_{CPT}}\left(|\overline{B}(\vec{p})\rangle\right)^* \end{aligned} \tag{4.6}$$

Полученное выражение полностью соответствует (4.3).

При преобразованиях в выражении (4.6) мы воспользовались унитарностью оператора $\hat{C}\hat{P}$ при его перестановке, а также его свойством менять знак импульса на противоположный; выражениями (2.2) и (4.1) при преобразовании фаз.

Получить выражение для действия CPT-преобразования как последовательного применения входящих в него операторов на состояние $|\overline{B}(\vec{p})\rangle$ читателю предлагается самостоятельно.

Гамильтониан нестабильной системы в базисе ароматов.

Теперь, когда мы знаем как действуют преобразования пространственного и зарядового сопряжения, обращения времени, а также их различные комбинации на состояния B и $\overline{B}$ мезона, интересно было бы рассмотреть то, какие условия они накладывают на систему если гамильтониан B и $\overline{B}$ мезонов инвариантен относительно некоторых из них.

Рассмотрим случай покоящихся псевдоскалярные $B(\vec{p}=\vec{0})$ и $\overline{B}(\vec{p}=\vec{0})$ мезоны.

Примечание: далее, в этой лекции мы также будем рассматривать системы покоя либо B, либо $\overline{B}$ мезона.

Нам известно, что в системе покоя B мезон обладает определенной массой покоя, и, поскольку является нестабильной частицей имеет некоторое время жизни (ширину распада). Нестабильная частица представляет собой пример открытой квантовой системы, соответствующий гамильтониан которой не является эрмитовым. Таким образом, гамильтониан соответствующих покоящихся B мезонов:

$$\hat{H} \neq \hat{H}^\dagger$$

Нам известно, что любой произвольный линейный оператор (каким является гамильтониан покоящихся B мезонов) можно представить в виде суммы эрмитового и антиэрмитового операторов:

$$\hat{H} = \hat{M} - \frac{i}{2}\,\hat{\Gamma} \tag{4.7}$$

где $\hat{M}$ – эрмитов оператор:

$$\hat{M} = \hat{M}^\dagger$$

$\hat{\Gamma}$ – тоже эрмитов оператор:

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}^\dagger$$

а значит

$$\left(i\,\hat{\Gamma}\right)^{\dagger} = -i\,\hat{\Gamma}$$

– антиэрмитов.

В параграфе посвященном неравновесным квантовым системам основной части курса по матрице плотности в рамках простейшей модели нестабильной распадающейся частицы на месте оператора $\hat{M}$ стояла величина, отвечающая за массу частицы, а на месте $\hat{\Gamma}$ – за ее ширину распада. Соответственно в системе покоя (4.7) $\hat{M}$ – оператор массы покоя системы B и $\overline{B}$ мезонов в базисе ароматов (1.10), а $\hat{\Gamma}$ – оператор ширины распадов.

Однако, нет никаких предпосылок считать, что состояния имеющие определенную массу или определенное время жизни являются состояниями аромата. Более того, экспериментально показано, что это совершенно не так: состояния аромата (1.10) не диагонализуют ни сам гамильтониан $\hat{H}$ (4.7), ни каждую из матриц в его составе. Далее рассмотрим свойства этого гамильтониана и наполним его физическим смыслом.

Собственные состояния инвариантного относительно CP-преобразований гамильтониана.

Рассмотрим случай, в котором гамильтониан $\hat{H}$ (4.7) инвариантен относительно CP-преобразования:

$$[\hat{H}, \hat{C}\hat{P}] = 0 \implies \begin{cases} [\hat{M}, \hat{C}\hat{P}] = 0 \\ [\hat{\Gamma}, \hat{C}\hat{P}] = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Начнем с рассмотрения массового оператора $\hat{M}$. Запишем его матрицу по определению:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Поскольку массовый оператор обязан быть эрмитовым, для его диагональных компонент справедливо

$$m_{11} = m_{11}^{*}$$
$$m_{22} = m_{22}^{*}$$

то есть, диагональные элементы – действительные числа.

Также, для недиагональных справедливо

$$m_{21} = m_{12}^*$$

Выразим матричный элемент оператора $\hat{M}$ в базисе ароматов (1.10):

$$m_{11} = \langle B(\vec{0})|\hat{M}|B(\vec{0})\rangle$$

В справедливости этого выражения можно убедиться простой подстановкой матрицы (4.9) и базисных векторов (1.10).

Далее, проделаем тождественное преобразование и воспользуемся свойством унитарности оператора $\hat{C}\hat{P}$: $(\hat{C}\hat{P})\,(\hat{C}\hat{P})^\dagger = \hat{1}$, а также коммутационным соотношением (4.8):

$$\langle B(\vec{0})|\hat{M}|B(\vec{0})\rangle = \left\langle B(\vec{0})\middle|\hat{1}\hat{M}\hat{1}\middle|B(\vec{0})\right\rangle =$$

$$= \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P})^\dagger\,\underline{(\hat{C}\hat{P})\,\hat{M}}\,(\hat{C}\hat{P})^\dagger(\hat{C}\hat{P})\middle|B(\vec{0})\right\rangle =$$

$$= \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P})^\dagger\,\underline{\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P})}\,(\hat{C}\hat{P})^\dagger(\hat{C}\hat{P})\middle|B(\vec{0})\right\rangle =$$

$$= \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P})^\dagger\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P})\middle|B(\vec{0})\right\rangle$$

Теперь, используя (2.14) запишем:

$$\left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P})^\dagger\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P})\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \left\langle \overline{B}(-\vec{0})\middle|e^{-i\alpha}\,\hat{M}\,e^{i\alpha}\middle|\overline{B}(-\vec{0})\right\rangle =$$

$$= \left\langle \overline{B}(\vec{0})\middle|e^{-i\alpha}\,e^{i\alpha}\,\hat{M}\middle|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle = \langle \overline{B}(\vec{0})|\hat{M}|\overline{B}(\vec{0})\rangle$$

Таким образом

$$m_{11} = \langle B(\vec{0})|\hat{M}|B(\vec{0})\rangle = \langle \overline{B}(\vec{0})|\hat{M}|\overline{B}(\vec{0})\rangle = m_{22} \tag{4.10}$$

То есть, если гамильтониан инвариантен относительно CP-преобразования, то масса B мезона равна массе $\overline{B}$ мезона.

Теперь, аналогично рассмотрим недиагональный матричный элемент, например:

$$
\begin{aligned}
m_{21} &= \langle \overline{B}(\vec{0}) | \hat{M} | B(\vec{0}) \rangle = \left\langle \overline{B}(\vec{0}) \middle| \hat{1}\hat{M}\hat{1} \middle| B(\vec{0}) \right\rangle = \\
&= \left\langle \overline{B}(\vec{0}) \middle| (\hat{C}\hat{P})^\dagger (\hat{C}\hat{P})\, \hat{M}\, (\hat{C}\hat{P})^\dagger (\hat{C}\hat{P}) \middle| B(\vec{0}) \right\rangle = \ldots = \\
&= \left\langle B(\vec{0}) \middle| e^{i\alpha} \hat{M} e^{i\alpha} \middle| \overline{B}(\vec{0}) \right\rangle = e^{2i\alpha} \, \langle B(\vec{0}) | \hat{M} | \overline{B}(\vec{0}) \rangle = e^{2i\alpha}\, m_{12}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Таким образом, условие на недиагональные элементы массовой матрицы $\hat{M}$:

$$
m_{12}^* = m_{21} = e^{2i\alpha}\, m_{12} \tag{4.12}
$$

Поскольку диагональный элемент m_{12} матрицы $\hat{M}$ – комплексное число, его можно представить в виде

$$
m_{12} = \mu\, e^{i\varphi_\mu} \tag{4.13}
$$

Тогда, согласно (4.12)

$$
m_{12}^* = \mu\, e^{-i\varphi_\mu} = e^{2i\alpha}\, \mu\, e^{i\varphi_\mu} \implies e^{-2i\varphi_\mu} = e^{2i\alpha}
$$

Откуда следует, что

$$
\varphi_\mu = -\alpha \tag{4.14}
$$

Фаза $2\pi n$ здесь опущена в силу ее физической незначимости.

Подставляя (4.14) в (4.13), запишем

$$
\begin{aligned}
m_{12} &= \mu\, e^{-i\alpha} \\
m_{21} &= \mu\, e^{i\alpha}
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Таким образом, условие эрмитовости матрицы $\hat{M}$ и выполнение коммутативного соотношения (4.8) позволяют нам записать матрицу $\hat{M}$ в следующем виде:

$$
\hat{M} = \begin{pmatrix} m & \mu\, e^{-i\alpha} \\ \mu\, e^{i\alpha} & m \end{pmatrix} \tag{4.16}
$$

где m и μ – действительные числа; α – фаза CP-преобразования (2.14).

Поскольку условия, использовавшиеся для вывода вида массовой матрицы $\hat{M}$ справедливы и для матрицы $\hat{\Gamma}$, аналогично можем записать

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma & \gamma\, e^{-i\alpha} \\ \gamma\, e^{i\alpha} & \Gamma \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Введем две комплексных величины

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= m - \frac{i}{2}\,\Gamma \\ \mathcal{H}_{12} &= \mu - \frac{i}{2}\,\gamma \end{aligned} \tag{4.18}$$

Выразим гамильтониан $\hat{H}$ (4.7) через данные величины (4.18) согласно (4.16) и (4.17):

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{H}_{12}\, e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{12}\, e^{i\alpha} & \mathcal{H} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Обратим внимание на то, что полученный гамильтониан (4.19) неэрмитов, поскольку диагональные величины – комплексные, а $H_{12}^* \neq H_{21}$

$$(H_{12})^* = \mathcal{H}_{12}^*\, e^{i\alpha} \neq H_{21} = \mathcal{H}_{12}\, e^{i\alpha}$$

поскольку $\mathcal{H}_{12}$ – комплексное, а значит $\mathcal{H}_{12} \neq \mathcal{H}_{12}^*$.

Здесь сделаем важное замечание о дальнейшей методике записи состояний. При введении некоторого вектора состояния $|\Psi\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве ароматов его всегда можно разложить по базисным состояниям (1.10). Обычно, мы привыкли раскладывать следующим образом:

$$|\Psi\rangle = C_1\, |B\rangle + C_2\, |\overline{B}\rangle$$

где коэффициенты C_1 и C_2 – комплексные числа определяемые начальными или граничными условиями и т.п.

Здесь нам в дальнейшем будет удобнее использовать разложение векторов, включающее фазу $e^{i\alpha}$:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= C_1\, |B\rangle + C_2 e^{i\alpha}\, |\overline{B}\rangle \\ |\Phi\rangle &= D_1\, |B\rangle + D_2 e^{i\alpha}\, |\overline{B}\rangle \end{aligned} \tag{4.20}$$

Поскольку, в таком случае, при матричные элементы

$$\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle$$

$$\langle\Psi|\hat{H}|\Phi\rangle$$

не будут зависеть от фазы CP-преобразования.

То есть, если учесть эту фазу при разложении по базису, то она естественным образом исчезает при вычислении матричных элементов. Мы уже получали похожий результат при записи состояний с определенной CP-четностью а базисе ароматов (2.11) и (2.13).

Найдем состояния, диагонализирующие гамильтониан $\hat{H}$ (4.19), который не является диагональным в базисе ароматов, так как оператор аромата не коммутирует с оператором CP-преобразования (2.3). Здесь можно пойти двумя путями.

Первый: воспользоваться тем, свойством того, что если два оператора коммутируют между собой (4.8), то они имеют общую систему собственных векторов. Тогда, собственные векторы оператора $\hat{C}\hat{P}$ (2.11), (2.13) одновременно диагонализируют гамильтониан (4.19).

Второй: найти въявь состояния, диагонализирующие такой, специального вида гамильтониан (4.19) и покажем, что они совпадают с собственными векторами оператора $\hat{C}\hat{P}$ (2.11), (2.13).

Проделаем это. Зададим состояния, диагонализирующие гамильтониан (4.19) в базисе ароматов (1.10):

$$\begin{gathered}
|B_L\rangle = p\,|B\rangle + e^{i\alpha}q\,|\overline{B}\rangle = p\begin{pmatrix}1\\ e^{i\alpha}\frac{q}{p}\end{pmatrix}\\
|B_H\rangle = p\,|B\rangle - e^{i\alpha}q\,|\overline{B}\rangle = p\begin{pmatrix}1\\ -e^{i\alpha}\frac{q}{p}\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{4.21}$$

где индексы "L"и "H" – исторически сложившиеся обозначения для B-мезонов соответствующие "heavy"и "less heavy".

Величины q и p связаны условием нормировки

$$1 = \langle B_L|B_L\rangle = |p|^2 + |q|^2 \tag{4.22}$$

При этом мы не знаем/предполагаем заранее, что состояния $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ – ортогональны:

$$\langle B_L|B_H\rangle = |p|^2 - |q|^2 \stackrel{?}{=} 0 \tag{4.23}$$

Поскольку $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ – собственные векторы гамильтониана $\hat{H}$ (4.19), то должно выполняться

$$\begin{aligned} \hat{H}\,|B_L\rangle &= E_L\,|B_L\rangle \\ \hat{H}\,|B_H\rangle &= E_H\,|B_H\rangle \end{aligned} \tag{4.24}$$

где E_L и E_H – какие-то комплексные числа.

Далее необходимо найти диагональные матричные элементы, они же собственные значения, гамильтониана.

Вычисление собственных значений.

По определению

$$0 = det\,\left(\hat{H} - \lambda\,\hat{1}\right) = \begin{vmatrix} \mathcal{H} - \lambda & \mathcal{H}_{12}e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{12}e^{i\alpha} & \mathcal{H} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\mathcal{H} - \lambda)^2 - \mathcal{H}_{12}^2 = (\mathcal{H} - \mathcal{H}_{12} - \lambda)\,(\mathcal{H} + \mathcal{H}_{12} - \lambda)$$

Откуда находим собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathcal{H} - \mathcal{H}_{12} \\ \lambda_2 &= \mathcal{H} + \mathcal{H}_{12} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Теперь необходимо установить как соотносятся собственные значения $\{\lambda_1,\, \lambda_2\}$ с собственными значениями E_L и E_H, записанными по определению (4.24). Может быть два случая:

$$1)\;\; E_L = \lambda_1, \quad E_H = \lambda_2$$

$$2)\;\; E_L = \lambda_2, \quad E_H = \lambda_1$$

С физической точки зрения наши дальнейшие предсказания не должны зависеть от выбора, иначе теория не представляла бы никакой ценности. То есть, случаи 1) и 2) – равносильны. Однако, дальнейшие промежуточные выкладки будут существенно отличаться. Например, будут давать различные значения отношения $\frac{q}{p}$, но конечные выражения для наблюдаемых будут идентичны. Тем не менее, поскольку существует современный стандарт обозначений PDG, далее имеет смысл выбрать случай 1) для соответствия дальнейших вычислений стандарту PDG. Читателю же в качестве упражнения предлагается проделать подобные вычисления выбрав вариант 2).

Здесь стоит сделать еще одно замечания касательно выбора фаз, собственных значений и т.п. Хотя выбор PDG на сегодня является стандартом, он стал доминирующим не сразу и не для всех до сих пор. Поэтому, прежде чем пользоваться формулами из той или иной литературы, сначала необходимо обратить внимание на определения, чтобы согласовать дальнейшие результаты.

Отношение q/p.

Основываясь на выборе 1), запишем явный вид первого выражения из (4.24), используя (4.19) и (4.21):

$$\hat{H}\,|B_L\rangle = E_L\,|B_L\rangle \implies \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{H}_{12}e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{12}e^{i\alpha} & \mathcal{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha}\frac{q}{p} \end{pmatrix} = (\mathcal{H}-\mathcal{H}_{12}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha\frac{q}{p}} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{H}+\mathcal{H}_{12}\frac{q}{p} = \mathcal{H}-\mathcal{H}_{12} \\ e^{i\alpha}\left(\mathcal{H}_{12}+\mathcal{H}\,\frac{q}{p}\right) = e^{i\alpha}\frac{q}{p}\,\left(\mathcal{H}-\mathcal{H}_{12}\right) \end{cases} \tag{4.27}$$

Из первого уравнения лего видеть, что

$$\frac{q}{p} = -1 \tag{4.28}$$

При подстановке этого решения во второе уравнение системы (4.27) получается тождество, а значит, решение верное.

Взяв модуль от соотношения (4.28) легко понять, что

$$|q| = |p| \tag{4.29}$$

Подставив это соотношение в (4.22), находим

$$|q| = |p| = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.30}$$

Поскольку, p и q – комплексные числа, можем их записать в показательной форме с некоторой фазой ζ_p:

$$p = e^{i\zeta_p}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \implies q = -e^{i\zeta_p}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.31}$$

Из чего можно сделать вывод, что при подстановке p и q в вектор $|B_L\rangle$ он будет определен с точностью до общей нефизической фазы ζ_p. Но, как известно из квантовой механики, такая фаза для вектора состояний не влияет ни на какие наблюдаемые, поэтому она может быть выбрана произвольной. Выберем $\zeta_p = 0$, тогда

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Тогда, при подстановке (4.32) в (4.21), для вектора $|B_L\rangle$ получим

$$|B_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(|B\rangle - e^{i\alpha}\,|\overline{B}\rangle\right) \equiv |B_2\rangle \tag{4.33}$$

Легко видеть, что он совпадает с собственным вектором $|B_2\rangle$ опретора $\hat{C}\hat{P}$ (2.13). Аналогично

$$|B_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(|B\rangle + e^{i\alpha}\,|\overline{B}\rangle\right) \equiv |B_1\rangle \tag{4.34}$$

Таким образом, мы показали, что если два оператора коммутируют между собой, то они имеют общую систему собственных векторов.

Лекция 5. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 5).

Собственные состояния инвариантного относительно CP-преобразований гамильтониана (продолжение).

В конце прошлой лекции был выбран следующий вариант собственных значений гамильтониана $\hat{H}$ (2.19), инвариантного относительно CP-преобразования:

$$E_L = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{12}$$
$$E_H = \mathcal{H} + \mathcal{H}_{12} \tag{5.1}$$

Обычно, энергии $\{E_L,\, E_H\}$ записывают в виде комплексных чисел, как состояния обладающие определенной массой $\{m_L,\, m_H\}$ и временем жизни:

$$E_L = m_L - \frac{i}{2}\,\Gamma_L$$
$$E_H = m_H - \frac{i}{2}\,\Gamma_H \tag{5.2}$$

Где ширина распада известным образом связана с временем жизни:

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{5.3}$$

С другой стороны, подставив (4.18) в (5.1) получим:

$$E_L = (m - \mu) - \frac{i}{2}\,(\Gamma - \gamma)$$
$$E_H = (m + \mu) - \frac{i}{2}\,(\Gamma + \gamma) \tag{5.4}$$

Таким образом, массы и времена жизни соответствующих состояний следующим образом выражаются через компоненты матричных элементов гамильтониана $\hat{H}$:

$$\begin{aligned} m_L &= m - \mu \\ m_H &= m + \mu \\ \Gamma_L &= \Gamma - \gamma \\ \Gamma_H &= \Gamma + \gamma \end{aligned} \tag{5.5}$$

При рассмотрении осцилляций нейтральных псевдоскалярных мезонов нам понадобится параметры разности масс и времен жизни. В рамках всего этого курса определим их так:

$$\begin{aligned} \Delta m &\overset{def}{=} m_H - m_L \\ \Delta\Gamma &\overset{def}{=} \Gamma_H - \Gamma_L \end{aligned} \tag{5.6}$$

Легко видеть, что для случая состояния, описываемого инвариантным относительно CP-преобразования гамильтонианом

$$\begin{aligned} \Delta m &= 2\,\mu \\ \Delta\Gamma &= 2\,\gamma \end{aligned}$$

Также, в дальнейшем мы будем использовать параметр Γ, равную среднему арифметическому ширин распада:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\,(\Gamma_H + \Gamma_L) \tag{5.7}$$

Случай гамильтониана инвариантного относительно CPT-преобразований.

Если гамильтониан $\hat{H}$ (4.7) инвариантен относительно CPT-преобразований, то справедливо

$$\left[\hat{H},\, \hat{C}\hat{P}\hat{T}\right] = 0 \implies \begin{cases} \left[\hat{M},\, \hat{C}\hat{P}\hat{T}\right] = 0 \\ \left[\hat{\Gamma},\, \hat{C}\hat{P}\hat{T}\right] = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Случай такого гамильтониана интересен еще и в свете существования теоремы о том, что гамильтониан (или лагранжиан) любой квантовой теоретико-полевой модели, которая отражает окружающую действительность, должен быть инвариантен.

Начнем с рассмотрения матричных элементов оператора $\hat{M}$ (4.9) в базисе ароматов (1.10).

$$m_{11} = \langle B(\vec{0})|\hat{M}|B(\vec{0})\rangle \tag{5.9}$$

Далее, введем обозначения

$$\hat{M}\,|B(\vec{0})\rangle := |\psi\rangle$$

$$|B(\vec{0})\rangle := |\varphi\rangle$$

Теперь, используя (3.23) и свойство эрмитовости оператора $\hat{M}$, запишем

$$\begin{aligned}
&\langle B(\vec{0})|\hat{M}|B(\vec{0})\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle = \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \\
&= \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}\;\hat{1}\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \\
&\left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\middle|B(\vec{0})\right\rangle
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Получим важное для дальнейших преобразований выражение. Рассмотрим коммутатор

$$0 = \left[\hat{M},\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\right] = \hat{M}\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T}) - (\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}$$

Домножив это выражение справа на $(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1}$, получим:

$$0 = \hat{M} - (\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1}$$

Откуда

$$\hat{M} = (\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1} \tag{5.11}$$

Подставляя (5.11) в (5.9-5.10), и используя (4.3), запишем

$$m_{11} = \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\,\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1}(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\middle|B(\vec{0})\right\rangle =$$

$$= \left\langle B(\vec{0})\middle|(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{\dagger}\,\hat{M}\,(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\right)^{*} e^{-i\varphi_{CPT}}\,\hat{M}\,e^{i\varphi_{CPT}}\left(\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} =$$

$$= \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\right)^{*}\hat{M}\left(\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} = \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\right)^{*}\left(\hat{M}^{*}\right)^{*}\left(\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} =$$

$$= \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{M}^{*}\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*}$$

Поскольку матричный элемент $\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{M}^{*}\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle$ является числом, то его комплексное сопряжение равносильно эрмитовому, поскольку транспонирование числа дает само число. Тогда

$$m_{11} = \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{M}^{*}\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} = \left(\underline{\underline{\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|}}\,\hat{M}^{*}\,\underline{\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle}\right)^{\dagger} =$$

$$= \underline{\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|}\left(\hat{M}^{*}\right)^{\dagger}\underline{\underline{\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle}} = \left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{M}^{\dagger}\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle$$

Получили диагональный матричный элемент транспонированной матрицы. Но, при транспонировании диагональные элементы остаются на своих местах, следовательно

$$\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{M}^{\dagger}\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle = \left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{M}\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle = m_{22}$$

А значит

$$m_{11} = m_{22} \tag{5.12}$$

То есть, масса B-мезона и масса $\overline{B}$-мезона равны.

Аналогичный результат можно получить и для матрицы $\hat{\Gamma}$: ширины распада (времена жизни) частицы и античастицы равны.

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} \tag{5.13}$$

Замечание: инвариантность гамильтониана относительно CPT-преобразования совершенно не означает его инвариантность относительно CP-преобразования или относительно T-преобразования. Если верна CPT-теорема и нет инвариантности относительно обращения времени, то имеет место наличие стрелы времени в квантовой механике. Действительно, в квантовой теории поля показывается, что CP-симметрия нарушается в слабых взаимодействиях.

Это означает, что частица и античастица распадаются по-разному. И хотя, как мы показали, полные ширины распада (времена жизни) чистицы и античастицы равны друг другу (5.13), их парциальные составляющие не равны. Например, каналы распада условного B-мезона:

$$
B \to \begin{cases} K^* \mu^+ \mu^- & N_1 \\ J/\psi\, K_S^0 K^* & N_2 \\ D\, e\, \nu & N_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}
$$

где N_i – число распадов в соответствующем канале. Тогда полное число распадов N равно

$$
N = \sum_i N_i
$$

Парциальная ширина распада выражается через полную ширину распада Γ следующим образом

$$
\Gamma_i = \Gamma \frac{N_i}{N}
$$

А полная ширина распада, очевидно

$$
\Gamma = \sum_i \Gamma_i
$$

И несмотря на то, что полные ширины распада частицы и античастицы равны (5.13), входящие в их состав парциальные ширины различаются.

Недиагональные матричные элементы массового оператора в случае гамильтониана инвариантного относительно CPT-преобразований.

Рассмотрим недиагональный матричный элемент оператора $\hat{M}$ (4.9) в базисе ароматов (1.10):

$$
\begin{aligned}
m_{12} &= \langle B(\vec{0})|\hat{M}|\overline{B}(\vec{0})\rangle = \left\langle \overline{B}(\vec{0})\middle|\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)^{\dagger}\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)\ \hat{M}^{\dagger}\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \\
&= \left\langle \overline{B}(\vec{0})\middle|\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)^{\dagger}\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)\ \hat{M}\ \hat{1}\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \\
&= \left\langle \overline{B}(\vec{0})\middle|\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)^{\dagger}\underline{\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)\ \hat{M}\ \left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)^{-1}}\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \\
&= \left\langle \overline{B}(\vec{0})\middle|\left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)^{\dagger}\hat{M}\ \left(\hat{C}\hat{P}\hat{T}\right)\middle|B(\vec{0})\right\rangle = \left(\left\langle B(\vec{0})\right|\right)^{*}e^{-i\varphi_{CPT}}\ \hat{M}\ e^{i\varphi_{CPT}}\left(\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} = \\
&= \left(\left\langle B(\vec{0})\middle|\ \hat{M}^{*}\ \middle|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} = \left(\left\langle B(\vec{0})\middle|\ \hat{M}^{*}\ \middle|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle\right)^{\dagger} = \left\langle \overline{B}(\vec{0})\middle|\ \hat{M}^{T}\ \middle|B(\vec{0})\right\rangle = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m_{12}
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

где мы воспользовались выражениями (3.23), (4.3), (4.5) и (5.11).

Таким образом, мы получили тождество. Это означает, что в случае CPT-инвариантности мы не можем ничего сказать о связи недиагональных элементов матрицы $\hat{M}$. То же самое относится и к оператору $\hat{\Gamma}$.

Явный вид гамильтониана инвариантного относительно CPT-преобразований.

Используя полученные соотношения (5.12), (5.14), получим явный вид гамильтониана:

$$
\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & H_{12} \\ H_{21} & \mathcal{H} \end{pmatrix} \tag{5.15}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H} = m - \frac{i}{2}\,\Gamma \\
&m = m_{11} = m_{22} \\
&\Gamma = \Gamma_{11} = \Gamma22
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

С недиагональными матричными элементами гамильтониана $\hat{H}$ (5.15) работать не очень удобно. Поступим аналогично тому, как это было в случае гамильтониана, инвариантного относительно CP-преобразования. Тогда мы ввели фазу CP-преобразования α (4.20), что дало отличие недиагональных элементов гамильтониана на фазу 2α (4.19).

Здесь мы поступим аналогичный образом, переопределив гамильтониан (5.15) следующим образом:

$$\hat{H} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{H}_{12}e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{21}e^{i\alpha} & \mathcal{H} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Заметим, что здесь, в отличие от случая гамильтониана, инвариантного относительно CP-преобразования, $\mathcal{H}_{12} \neq \mathcal{H}_{21}$.

Задача: показать, что операторы CP- и CPT-преобразования коммутируют

$$[\hat{C}\hat{P},\, \hat{C}\hat{P}\hat{T}] = 0$$

При этом заметим, что оператор $\hat{C}\hat{P}$ не обязан коммутировать с $\hat{H}$.

Чтобы исключить возможного недопонимания, приведем простой пример, показывающий, что

$$\begin{matrix} [\hat{A},\, \hat{B}] = 0 \\ [\hat{A},\, \hat{C}] = 0 \end{matrix} \not\Longrightarrow [\hat{B},\, \hat{C}] = 0$$

Пусть $\hat{B} = \hat{p}$ – оператор импульса, $\hat{C} = \hat{x}$ – оператор координаты, а $\hat{A} = \hat{1}$. Единичный оператор коммутирует с обоими, но, как известно, операторы импульса и координаты не куммутируют.

Аналогично (4.21) запишем собственные векторы CPT-преобразования, диагонализирующие гамильтониан $\hat{H}$ (5.17):

$$\begin{aligned} &|B_L\rangle = p\, \left(|B\rangle + e^{i\alpha}\frac{q}{p}\,|\overline{B}\rangle\right) \\ &|B_H\rangle = p\, \left(|B\rangle - e^{i\alpha}\frac{q}{p}\,|\overline{B}\rangle\right) \\ &|p|^2 + |q|^2 = 1 \\ &\langle B_L|B_H\rangle = 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Найдем соответствующие им собственные значения:

$$0 = det\,\left(\hat{H} - \lambda\hat{1}\right) = \begin{vmatrix} \mathcal{H} - \lambda & \mathcal{H}_{12}e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{21}e^{i\alpha} & \mathcal{H} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\mathcal{H} - \lambda)^2 - \mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}} \\ \lambda_2 &= \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}} \end{aligned} \tag{5.19}$$

С другой стороны мы имеем собственный значения по определению:

$$\begin{aligned} \hat{H}\,|B_L\rangle &= E_L\,|B_L\rangle \\ \hat{H}\,|B_H\rangle &= E_H\,|B_H\rangle \end{aligned} \tag{5.20}$$

И здесь, как и в случае когда мы рассматривали CP-преобразование, нужно выбрать соответствие между этими двумя комбинациями собственных значений (5.19-5.20). Снова последуем выбору PDG:

$$\begin{aligned} E_L &= \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}} \stackrel{def}{=} m_L - \frac{i}{2}\,\Gamma_L \\ E_H &= \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}} \stackrel{def}{=} m_H - \frac{i}{2}\,\Gamma_H \end{aligned} \tag{5.21}$$

Теперь необходимо найти отношение q/p для такого выбора.

Отношение q/p.

Отношение q/p можно найти двумя способами: из условия на собственный вектор $|B_L\rangle$ или на собственный вектор $|B_H\rangle$ (5.20). Найдем q/p из условия на $|B_L\rangle$. В качестве упражнения читателю предлагается найти q/p из условия на $|B_H\rangle$. Подставляем (5.17), (5.18) и (5.21) в (5.20):

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{H}_{12}e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{21}e^{i\alpha} & \mathcal{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{[}i\alpha]\frac{q}{p} \end{pmatrix} = \left(\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha}\frac{q}{p} \end{pmatrix}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{H} + \mathcal{H}_{12}\frac{q}{p} = \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}} \\ e^{i\alpha}\left(\mathcal{H}_{12} + \mathcal{H}\,\frac{q}{p}\right) = e^{i\alpha}\,\left(\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}}\right)\,\frac{q}{p} \end{cases}$$

Откуда находим

$$\frac{q}{p} = -\sqrt{\frac{\mathcal{H}_{21}}{\mathcal{H}_{12}}} \tag{5.22}$$

Заметим, что с отличие от случая гамильтониана инвариантного относительно CP-преобразования (4.28) (4.33-4.34), $\mathcal{H}_{12} \neq \mathcal{H}_{21}$, а значит $\frac{q}{p} \neq -1$ и $\{B_L,\, B_H\} \neq \{B_1,\, B_2\}$.

Запишем E_L через q/p. Для этого домножим второе слагаемое (5.21) на единицу

$$1 = \left(\frac{q}{p}\,(-1)\,\sqrt{\frac{\mathcal{H}_{12}}{\mathcal{H}_{21}}}\right)$$

Получим

$$E_L = \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}_{12}\mathcal{H}_{21}}\,\left(\frac{q}{p}\,(-1)\,\sqrt{\frac{\mathcal{H}_{12}}{\mathcal{H}_{21}}}\right) = \mathcal{H} + \mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p} \tag{5.23}$$

Аналогично запишем E_H:

$$E_H = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p} \tag{5.24}$$

Сопоставляя (5.21) и (5.24) выразим массы и ширины распада через соответствующие матричные элементы и отношение q/p. Начнем с рассмотрения E_L. E_L – комплексное число, а масса – его действительная часть:

$$m_L = Re\,(E_L) = Re\,\left(m - \frac{i}{2}\,\Gamma + \mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) = m + Re\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \tag{5.25}$$

Аналогично

$$m_H = Re\,(E_H) = m - Re\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \tag{5.26}$$

Тогда можем выразить Δm:

$$\Delta m \overset{def}{=} m_H - m_L = -2\,Re\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \tag{5.27}$$

Теперь выразим ширины распада. Начнем с Γ_L:

$$\begin{aligned} &-\frac{\Gamma_L}{2} = Im\,E_L = Im\,\left(m - \frac{i}{2}\,\Gamma + \mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) = -\frac{\Gamma}{2} + Im\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \Gamma_L = \Gamma - 2\,Im\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

Аналогично

$$\Gamma_H = \Gamma + 2\,Im\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \tag{5.29}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L = +4\,Im\,\left(\mathcal{H}_{12}\,\frac{q}{p}\right) \\ &\frac{1}{2}\,(\Gamma_H + \Gamma_L) = \Gamma \end{aligned} \tag{5.30}$$

Пояснение: до этого делался акцент на соответствие выкладок с PDG, однако, в целях унификации было сделано отступление от PDG. Поясним это.

Экспериментально установлено, что для B_S^0 и $B^0 \equiv B_d^0 = B_d$ мезонов $\Gamma_H - \Gamma_L = \Delta\Gamma < 0$, а для K^0 и D^0 мезонов $\Gamma_H - \Gamma_L = \Delta\Gamma > 0$. Поэтому в PDG введено определение, которое немного отличается от приведенного здесь, а именно,

$$\Delta\Gamma_{PDG}^{(B)} = \Gamma_L - \Gamma_H > 0$$

$$\Delta m_{PDG}^{(B)} = m_H - m_L > 0$$

в то время как для K^0 и D^0 определения полностью совпадают с приведенными здесь.

Лекция 6. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 6).

Случай инвариантного относительно Т-преобразований гамильтониана.

В случае гамильтониана, инвариантного относительно обращения времени, справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{H},\,\hat{T}\right]=0 \Longrightarrow \begin{cases}\left[\hat{M},\,\hat{T}\right]=0\\ \left[\hat{\Gamma},\,\hat{T}\right]=0\end{cases} \tag{6.1}$$

Посмотрим, какие условия накладывают эти коммутационные соотношения на вид матриц операторов $\hat{M}$ и $\hat{\Gamma}$ в базисе ароматов (1.10). Начнем с рассмотрения матрицы $\hat{M}$ (4.9) для покоящихся B-мезонов ($\vec{p}=0$). Начнем с диагонального матричного элемента m_{11}:

$$m_{11}=\underline{\langle B(\vec{0})|\hat{M}}\;\underline{\underline{|B(\vec{0})\rangle}}=\left\langle \underline{\underline{B(\vec{0})}}\middle|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\;\underline{\hat{M}^{\dagger}\middle|B(\vec{0})}\right\rangle=$$

$$=\left\langle B(\vec{0})\middle|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\;\hat{M}\;\underline{\hat{1}}\middle|B(\vec{0})\right\rangle=\left\langle B(\vec{0})\middle|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\;\hat{M}\;\underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}\middle|B(\vec{0})\right\rangle=$$

$$=\left\langle B(\vec{0})\middle|\hat{T}^{\dagger}\;\hat{M}\;\hat{T}\middle|B(\vec{0})\right\rangle=\left(\left\langle B(\vec{0})\right|\right)^{*}e^{i\varphi_C}e^{-i\varphi_T}\;\hat{M}e^{i\varphi_T}e^{-i\varphi_C}\;\left(\left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*}=$$

$$=\left(\left\langle B(\vec{0})\right|\right)^{*}\hat{M}\;\left(\left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*}=\left(\left\langle B(\vec{0})\right|\right)^{*}\;\left(\hat{M}^{*}\right)^{*}\;\left(\left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*}=$$

$$=\left(\left\langle B(\vec{0})\middle|\;\hat{M}^{*}\;\middle|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*}=\left(\underline{\left\langle B(\vec{0})\right|}\;\hat{M}^{*}\;\underline{\underline{\left|B(\vec{0})\right\rangle}}\right)^{\dagger}=$$

$$=\underline{\underline{\left\langle B(\vec{0})\right|}}\;\hat{M}^{T}\;\underline{\left|B(\vec{0})\right\rangle}=\left\langle B(\vec{0})\middle|\;\hat{M}\;\middle|B(\vec{0})\right\rangle=m_{11}$$

Здесь мы проделали операции, аналогичные тем, что были в случае рассмотрения нами CPT-преобразования и основанные на свойствах эрмитовости матрицы $\hat{M}$, (2.17), (2.32), (3.5) и (3.11).

Таким образом, мы ничего не можем сказать о связи диагональных матричных элементов. То же самое можно показать и для матрицы $\hat{\Gamma}$.

Перейдем к рассмотрению недиагональных матричных элементов. Используя свойства эрмитовости матрицы $\hat{M}$, (2.2), (2.17), (2.32), (3.5) и (3.11), запишем:

$$m_{12} = \underline{\langle B(\vec{0})|\hat{M}}\ \underline{\underline{|\overline{B}(\vec{0})\rangle}} = \underline{\underline{\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|}}\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\ \underline{\hat{M}^{\dagger}\left|B(\vec{0})\right\rangle} =$$

$$= \left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\ \hat{M}\ \underline{\hat{1}}\left|B(\vec{0})\right\rangle = \left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}\ \hat{M}\ \underline{\hat{T}^{-1}\hat{T}}\left|B(\vec{0})\right\rangle =$$

$$= \left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\hat{T}^{\dagger}\ \hat{M}\ \hat{T}\left|B(\vec{0})\right\rangle = \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\right)^{*} e^{-i\varphi_C}e^{-i\varphi_T}\ \hat{M}e^{i\varphi_T}e^{-i\varphi_C}\ \left(\left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} =$$

$$= e^{-2i\varphi_C}\ \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\right)^{*}\hat{M}\ \left(\left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} = e^{-2i\alpha}\ \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\right)^{*}\ (\hat{M}^{*})^{*}\ \left(\left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} =$$

$$= e^{-2i\alpha}\ \left(\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|\ \hat{M}^{*}\ \left|B(\vec{0})\right\rangle\right)^{*} = e^{-2i\alpha}\ \left(\underline{\left\langle \overline{B}(\vec{0})\right|}\ \hat{M}^{*}\ \underline{\underline{\left|B(\vec{0})\right\rangle}}\right)^{\dagger} =$$

$$= e^{-2i\alpha}\ \underline{\underline{\left\langle B(\vec{0})\right|}}\ \hat{M}^{T}\ \underline{\left|\overline{B}(\vec{0})\right\rangle} = e^{-2i\alpha}\ \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11} & m_{21}\\ m_{12} & m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} =$$

$$e^{-2i\alpha}\ \begin{pmatrix}m_{11} & m_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = m_{21}\,e^{-2i\alpha}$$

Таким образом, мы получили связь недиагональных матричных элементов матрицы $\hat{M}$ инвариантной относительно T-преобразования:

$$m_{12} = e^{-2i\alpha}\, m_{21} \tag{6.2}$$

Аналогичное соотношение можно получить и для матрицы $\hat{\Gamma}$:

$$\Gamma_{12} = e^{-2i\alpha}\, \Gamma_{21} \tag{6.3}$$

Из полученных соотношений (6.2-6.3) следует связь недиагональных матричных элементов гамильтониана $\hat{H}$ (4.7):

$$H_{12} = e^{-2i\alpha}\, H_{21} \tag{6.4}$$

Используя это соотношение, переопределим недиагональные элементы гамильтониана следующим образом:

$$\begin{aligned} &H_{12} \overset{def}{=} \mathcal{H}_{12}\, e^{-i\alpha} \\ &H_{21} \overset{def}{=} \mathcal{H}_{21}\, e^{i\alpha} \\ &\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21} \end{aligned} \tag{6.5}$$

и выпишем явно гамильтониан, учитывая (6.5):

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H12 \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & \mathcal{H}_{12}\, e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{12}\, e^{i\alpha} & H_{22} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Состояния, диагонализирующие гамильтониан инвариантный относительно T-преобразования.

Перейдем к рассмотрению состояний, диагонализирующих гамильтониан инвариантный относительно T-преобразования. Запишем в общем виде такие состояния:

$$\begin{aligned} |B_a\rangle &= p_a \left(|B\rangle + \frac{q_a}{p_a}\, e^{+i\alpha}\, |\overline{B}\rangle \right) \\ |B_b\rangle &= p_b \left(|B\rangle - \frac{q_b}{p_b}\, e^{+i\alpha}\, |\overline{B}\rangle \right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Заметим, что по структуре записи эти состояния несколько отличаются от состояний (4.21) и (5.18), диагонализирующих гамильтонианы инвариантные относительно CP- и CPT-преобразований, поскольку имеют различные для каждого состояния p и q. На самом деле, выражение (6.7), конечно же, является более общим, и при рассмотрении CP- и CPT-преобразований мы использовали упрощение, допустимое в рамках тех случаев. Здесь же, как будет показано далее, подобное упрощение не может быть использовано.

Эти состояния (6.7) мы, само собой, предполагаем нормированными на единицу:

$$\langle B_a|B_a\rangle = \langle B_b|B_b\rangle = 1 \implies |p_a|^2 + |q_a|^2 = |p_b|^2 + |q_b|^2 = 1 \tag{6.8}$$

Начнем поиск собственных значений гамильтониана. С одной стороны, если $|B_a\rangle$ и $|B_b\rangle$ – состояния, диагонализирующие гамильтониан, то они являются собственными векторами этого самого гамильтониана, а значит, по определению

$$\begin{aligned} \hat{H}\, |B_a\rangle &= E_a\, |B_a\rangle \\ \hat{H}\, |B_b\rangle &= E_b\, |B_b\rangle \end{aligned} \tag{6.9}$$

С другой стороны, можно найти собственные значения непосредственно матрицы гамильтониана $\hat{H}$ (6.6):

$$0 = det\ \left(\hat{H} - \lambda\,\hat{1}\right) = \lambda^{-}\left(H_{11} + H_{22}\right)\ \lambda + H_{11}H_{22} - \mathcal{H}_{12}^{2}$$

Согласно теореме Виета, корни этого квадратного уравнения составляют следующую системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = H_{11} + H_{22} \\ \lambda_1\ \lambda_2 = H_{11}H_{22} - \mathcal{H}^2 \end{cases}$$

Из симметрии этой системы уравнений понятно, что ее решения должны иметь вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\ \left(H_{11} + H_{22}\right) - F$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\ \left(H_{11} + H_{22}\right) + F$$

где $\boldsymbol{F}$ – некоторая константа. Подставив записанные решения в систему, находим $\boldsymbol{F}$:

$$F^2 = \frac{1}{4}\left(H_{11} - H_{22}\right)^2 + \mathcal{H}_{12}^2$$

Тогда собственные значения выражаются как

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\ \left(H_{11} + H_{22} - \sqrt{\left(H_{11} - H_{22}\right)^2 + 4\ \mathcal{H}_{12}^2}\right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\ \left(H_{11} + H_{22} + \sqrt{\left(H_{11} - H_{22}\right)^2 + 4\ \mathcal{H}_{12}^2}\right) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Нам снова нужно выбрать соответствие между двумя комбинациями собственных значений (6.9) и (6.10). Как и в предыдущих случаях, мы последуем выбору PDG:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\overset{def}{=} E_a \\ \lambda_2 &\overset{def}{=} E_b \end{aligned} \tag{6.11}$$

Подставляя собственные значения (6.10-6.11) в уравнения (6.9) можно получить отношения $\frac{q_a}{p_a}$ и $\frac{q_b}{p_b}$. Читателю предлагается проделать это самостоятельно с качестве упражнения. Здесь же приведем конечный результат:

$$\frac{q_a}{p_a} = \frac{1}{2}\,\frac{-H_{11}+H_{22}-\sqrt{(H_{11}-H_{22})^2+4\,\mathcal{H}_{12}^2}}{\mathcal{H}_{12}} =$$

$$= \frac{2\,\mathcal{H}_{12}}{H_{11}-H_{22}-\sqrt{(H_{11}-H_{22})^2+4\,\mathcal{H}_{12}^2}}; \tag{6.12}$$

$$\frac{q_b}{p_b} = \frac{1}{2}\,\frac{H_{11}-H_{22}-\sqrt{(H_{11}-H_{22})^2+4\,\mathcal{H}_{12}^2}}{\mathcal{H}_{12}}$$

Теперь, зная отношения $\frac{q_a}{p_a}$ и $\frac{q_b}{p_b}$ (6.12), было бы интересно вычислить их произведение:

$$\frac{q_a}{p_a}\,\frac{q_b}{p_b} = \frac{\left(H_{11}-H_{22}-\sqrt{(H_{11}-H_{22})^2+4\,\mathcal{H}_{12}^2}\right)\left(-H_{11}+H_{22}-\sqrt{(H_{11}-H_{22})^2+4\,\mathcal{H}_{12}^2}\right)}{4\,\mathcal{H}_{12}^2} =$$

$$= \frac{(H_{11}-H_{22})^2+4\,\mathcal{H}_{12}^2-(H_{11}-H_{22})^2}{4\,\mathcal{H}_{12}^2} = +1 \tag{6.13}$$

При рассмотрении отношений $\frac{q}{p}$ в случае гамильтонианов, инвариантных относительно CP- и CPT-преобразований, мы не интересовались чему равны квадраты этих соотношений:

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{CP} = ?$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{CPT} = ?$$

Читателю предлагается вычислить обе эти величины, и посмотреть как они согласуются с только что рассмотренным нами (6.13).

Также читателю предлагается, используя полученные соотношения (6.12), самостоятельно показать, что

$$\begin{aligned} E_a &= H_{11} + \frac{q_a}{p_a}\,\mathcal{H}_{12} = m_a - \frac{i}{2}\,\Gamma_a \\ E_b &= H_{11} - \frac{q_b}{p_b}\,\mathcal{H}_{12} = m_b - \frac{i}{2}\,\Gamma_b \end{aligned} \tag{6.14}$$

а также вычислить m_a, m_b, Γ_a, Γ_b, Δm, $\Delta\Gamma$ и Γ, определяемых как

$$\begin{aligned}
&\Delta m \overset{def}{=} m_b - m_a \\
&\Delta\Gamma = \Gamma_b - \Gamma_a \\
&\Gamma = \frac{1}{2}\left(\Gamma_a + \Gamma_b\right)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Общий случай гамильтониана.

Рассмотрим случай, когда нам ничего неизвестно о гамильтониане $\hat{H}$. Запишем его в общем виде:

$$\begin{aligned}
&\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & \mathcal{H}\, e^{-i\alpha} \\ \mathcal{H}_{21}\, e^{+i\alpha} & H_{22} \end{pmatrix} \\
&\hat{H} = \hat{M} - \frac{i}{2}\,\hat{\Gamma}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Пусть, между матричными элементами этого гамильтониана нет никакой связи, поскольку мы ничего не знаем относительно его инвариантности.

Предположим, что существуют состояния, диагонализирующие гамильтониан $|B_a\rangle$ и $|B_b\rangle$ (6.7), а также соответствующие им величины E_a и E_b (6.9). Читателю в качестве упражнения предлагается самостоятельно найти явный вид собственных векторов, отношения $\frac{q_a}{p_a}$ и $\frac{q_b}{p_b}$, m_a, m_b, Γ_a, Γ_b, Δm, $\Delta\Gamma$ и Γ для такого гамильтониана.

Осцилляции нейтральных псевдоскалярных мезонов.

Явления осцилляции нейтральных псевдоскалярных мезонов интересно тем, что на них можно изучать множество различных интересных физических эффектов, таких как, CP-нарушения, парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена и т.д.

Прежде всего поясним что такое осцилляция. Как уже было сказано, любая квантовая теория должна быть CPT-инвариантна, следовательно массы B и $\overline{B}$ равны:

$$m_B = m_{\overline{B}} \tag{6.17}$$

С другой стороны, было показано, что недиагональные матричные элементы гамильтониана, инвариантного относительно CPT-преобразования (5.17) не равны нулю, а значит, существует ненулевая вероятность перехода из состояния $|B\rangle$ в состояние $|\overline{B}\rangle$. Такая вероятность пропорциональна квадрату следующего матричного элемента:

$$\langle\overline{B}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|B\rangle \neq 0$$

То есть, со временем B-мезоны могут переходить в $\overline{B}$-мезоны, и наоборот. При этом закон сохранения энергии будет выполняться. Тогда можно поставить задачу, например, найти вероятность обнаружить B-мезон в момент времени t, если в момент времени $t_0 < t$ был $\overline{B}$-мезон:

$$\omega\Big(B(t)\Big|\overline{B}(t_0 < t)\Big) = ?$$

или найти вероятность обнаружить B-мезон в момент времени t, если в момент времени $t_0 < t$ был тоже B-мезон:

$$\omega\Big(B(t)\Big|B(t_0 < t)\Big) = ?$$

При этом, за промежуток времени $t - t_0$ B- и $\overline{B}$-мезоны могут многократно переходить друг в друга, и, в конце концов давать такую вероятность.

В рамках Стандартной Модели, используя методы квантовой теории поля, можно посчитать вероятность, например, перехода B_S^0 мезона в $\overline{B}_S^0$ (Рис. 6.1), имеющих следующий кварковый состав состав:

$$|B_S^0\rangle = |\overline{b}\, s\rangle$$

$$|\overline{B}_S^0\rangle = |b\, \overline{s}\rangle$$

Здесь мы не будем считать данные вероятности. Однако, этот пример показывает, что осцилляции возможны. В 1955 году М. Гелл-Манн и А. Пайс поняли, что K^0 и $\overline{K}^0$ мезоны, конечным распадам которых соответствуют определенные значения CP-четности, должны описываться состояниями $|K_1^0\rangle$ с CP-четностью $= 1$, и $|K_2^0\rangle$ с CP-четностью $= 2$.

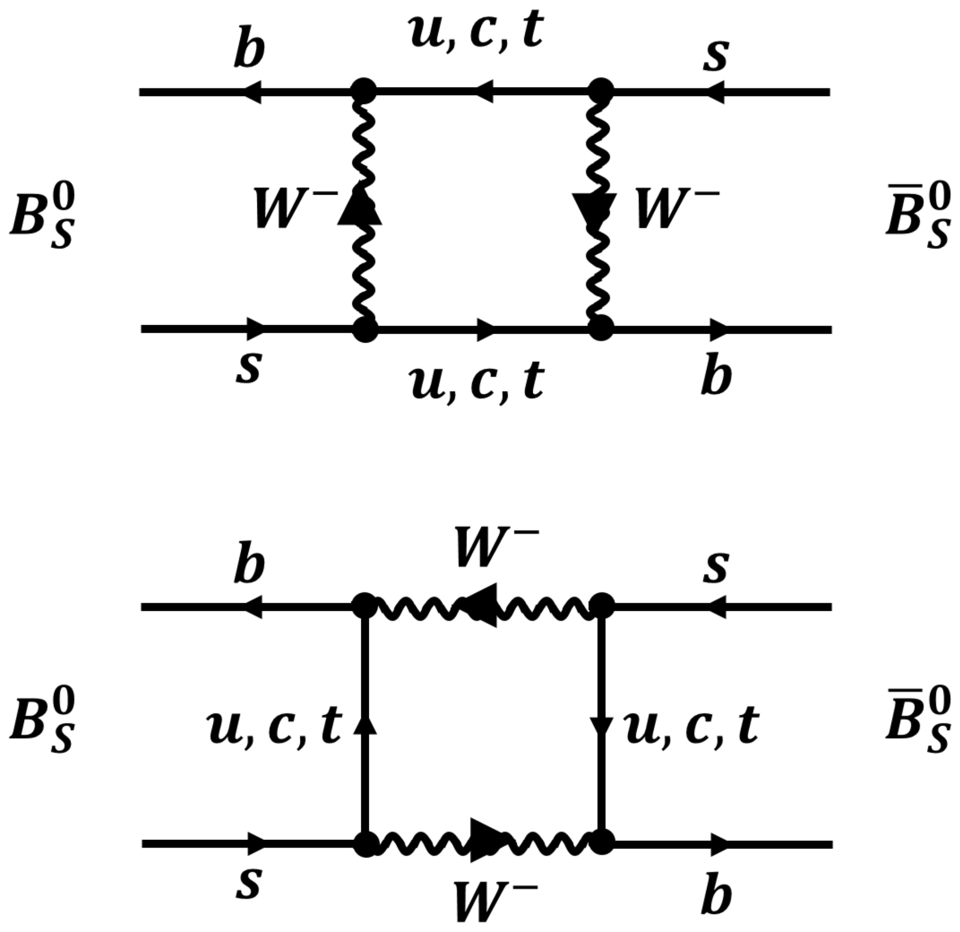


Рис. 6.1. Диаграммы перехода B_S^0 мезона в $\overline{B}_S^0$.

Следующим шагом стала статья *A. Pais, O. Piccioni, Phys. Rev. 100, p 1487 (1955)*, в которой было предсказаны осцилляции $K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$. Это явление было очень быстро найдено экспериментально, и использовалось для изучения $\boldsymbol{CP}$-инвариантности слабого взаимодействия. В 1964 году Кронин, Фитч, Кристенсон и Тёрлей впервые нашли эффекты нарушения $\boldsymbol{CP}$-четности в слабых взаимодействиях. Неинвариантность слабого взаимодействия относительно $\boldsymbol{CP}$-преобразование означает также неинвариантность относительно $\boldsymbol{T}$-преобразования, что являлось первым экспериментальным доказательством наличия стрелы времени. В 1980 году Кронин и Фитч получили Нобелевскую премию за *"За открытие нарушений фундаментальных принципов симметрии в распаде нейтральных K-мезонов"*.

Осцилляции в системах B_d^0 мезонов $B_d^0 \leftrightarrow \overline{B}_d^0$ были обнаружены в 1987 году коллаборацией ARGUS, работавшей в немецком ускорительном центре DESY, на e^+e^- коллайдере DORIS-II (*Phys. Lett. B 192, pp 245-252 (1987)*). Эти осцилляции были найдены группой советских физиков-экспериментаторов из ИТЭФ.

Это открытие имело весьма драматические последствия для японского ускорителя TRISTAN, который должен был только запускаться. В 1987 году считалось, что единственный не найденный к тому моменту t-кварк должен иметь массу не больше 40 ГэВ. Его и собирались искать на ускорителе TRISTAN в прямых e^+e^- столкновениях. Однако, после обнаружения осцилляций B_d^0 мезонов стало понятно, что масса t-кварка должна быть больше 100 ГэВ. Это следовало из значений статистики, при которой наблюдались осцилляции в системах B_d^0 мезонов. Таким образом, японский ускоритель TRISTAN потерял свою актуальность еще до запуска.

Следующим было обнаружение осцилляций в системах B_s^0 мезонов $B_s^0 \leftrightarrow \overline{B}_s^0$ в 2006 на установке CDF, работавшей на $p\overline{p}$ ускорителе Tevatron (FNAL, США) (*Phys. Rev. Lett. 97, 242003 (2006)*).

Далее последовало обнаружение осцилляций в системах D^0 мезонов $D^0 \leftrightarrow \overline{D}^0$ в 2007 двумя соперничавшими установками:

BaBar, ускоритель PEP-II (SLAC, Стенфорд, США) (*Phys. Rev. Lett. 98, 211802 (2007)*)

Belle, ускоритель KEKB (KEK, Япония) (*Phys. Rev. Lett. 98, 211803 (2007)*)

Обе коллаборации заявили о наблюдении осцилляций D^0 мезонов, но численные данные предоставленные ими сильно не сходились. Этот спор решился в 2018 году, после результатов, представленных коллаборацией LHCb (*Phys. Rev. D 97, 031101 (R) (2018)*).

Расскажем как быстро считать осцилляции. Рассмотрим систему нейтральных псевдоскалярных мезонов в базисе ароматов (1.10). Для упрощения, положим фазу CP-преобразования $\alpha = 0$, тогда, в отличие от общего случая (2.14), действие оператора $\hat{C}\hat{P}$ на базисные векторы будет следующим:

$$\begin{aligned} \hat{C}\hat{P}\,|B\rangle &= |B\rangle \\ \hat{C}\hat{P}\,|\overline{B}\rangle &= |\overline{B}\rangle \end{aligned} \tag{6.18}$$

Тогда, перепишем состояния (4.21) соответствующим образом:

$$\begin{aligned} |B_L\rangle &= p\,|B\rangle + q\,|\overline{B}\rangle = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ |B_H\rangle &= p\,|B\rangle - q\,|\overline{B}\rangle = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Поскольку состояния $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ диагонализируют гамильтониан, то каждое из них независимо преобразуется во времени:

$$\begin{aligned} |B_L(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}E_L t}\,|B_L\rangle\Big|_{t_0=0} \\ |B_H(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}E_H t}\,|B_H\rangle\Big|_{t_0=0} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Исходя из этого покажем как записать эволюцию, например, состояния $|B\rangle$ во времени. Поскольку состояния $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ не являются ортогональными друг другу в базисе ароматов (1.10), сначала найдем такое преобразование, которое осуществляет переход к базису, в котором эти состояния ортогональны.

Пусть, $\hat{D}$ – матрица 2×2, преобразующая состояния $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ в ортогональные друг другу:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \hat{D}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \hat{D}\,|B_L\rangle \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \hat{D}\begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} = \hat{D}\,|B_H\rangle \end{aligned} \tag{6.21}$$

Запишем эту матрицу в виде

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

Подставляя (6.22) в (6.21) получим две системы уравнений на элементы матрицы $\hat{D}$:

$$\begin{cases} ap + bq = 1 \\ cp + dq = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} ap - bq = 0 \\ cp - dq = 1 \end{cases} \tag{6.23}$$

Решением данной системы является

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\,p} \qquad c = \frac{1}{2\,p} \\ b &= \frac{1}{2\,q} \qquad d = -\frac{1}{2\,q} \end{aligned} \tag{6.24}$$

С учетом полученных значений (6.24) перепишем матрицу $\hat{D}$ (6.22), преобразующая состояния $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ в ортогональные друг другу.

$$\hat{D} = \frac{1}{2\,p\,q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & -p \end{pmatrix} \tag{6.25}$$

Теперь, с помощью этой матрицы можно осуществлять переход от базиса ароматов (1.10) в базис, в котором состояния $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ ортогональны друг другу

$$\begin{aligned} |B_L\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |B_H\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.26}$$

и рассматривать эволюцию во времени этих состояний.

Однако, потом необходимо осуществить обратный переход к базису ароматов. Для этого необходимо найти матрицу $\hat{D}^{-1}$: $\hat{D}^{-1}\hat{D} = \hat{1}$. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в существовании такой матрицы и найти ее, здесь же выпишем конечный ответ:

$$\hat{D}^{-1} = \begin{pmatrix} p & p \\ q & -q \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

Также нам понадобится оператор эволюции $\hat{U}(t)$, действующий в базисе (6.26). Ориентируясь на (6.20) зададим его как

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\,E_L t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}\,E_H t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_L(t) & 0 \\ 0 & U_H(t) \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

Теперь, имея необходимые соотношения, запишем эволюцию, например, состояния аромата $|B\rangle$ (1.10). Прежде всего, необходимо разложить состояние $|B\rangle$ по новому базису (6.26), подействовав на него матрицей $\hat{D}$ (6.25), затем подействовать оператором эволюции $\hat{U}(t)$ (6.28), и вернуть все в начальный базис подействовав оператором $\hat{D}^{-1}$ (6.27):

$$|B(t)\rangle = \hat{D}^{-1}\hat{U}(t)\,\hat{D}\,|B\rangle \tag{6.29}$$

Введем функции g_+ и g_-, которые понадобятся в дальнейшем

$$g_\pm = \frac{1}{2}\,(U_H \pm U_L) = \frac{1}{2}\,\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_H t} \pm e^{-\frac{i}{\hbar}E_L t}\right) \tag{6.30}$$

Вернемся к состоянию $|B(t)\rangle$ (6.29) и покажем как с ним работать. Перепишем его и применим соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned}
&|B(t)\rangle = \hat{D}^{-1}\hat{U}(t)\,\hat{D}\,|B\rangle = \\
&= \begin{pmatrix} p & p \\ q & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_L(t) & 0 \\ 0 & U_H(t) \end{pmatrix} \frac{1}{2\,p\,q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2\,p} \begin{pmatrix} pU_L & pU_H \\ qU_L & -qU_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,p} \begin{pmatrix} p\,(U_H + U_L) \\ -q\,(U_H - U_L) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} g_+(t) \\ -\frac{q}{p}\,g_-(t) \end{pmatrix} = g_+(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{q}{p}\,g_-(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_+(t)\,|B\rangle - \frac{q}{p}\,g_-(t)\,|\overline{B}\rangle
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Выражение для эволюции вектора $|\overline{B}\rangle$ читателю предлагается получить самостоятельно в качестве упражнения. Здесь же, подводя итог запишем выражения для эволюции векторов $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$:

$$\begin{aligned}
|B(t)\rangle &= g_+(t)\,|B\rangle - \frac{q}{p}\,g_-(t)\,|\overline{B}\rangle \\
|\overline{B}(t)\rangle &= g_+(t)\,|\overline{B}\rangle - \frac{p}{q}\,g_-(t)\,|B\rangle
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Заметим еще одно свойство. Понятно, что

$$\begin{gathered}\underset{lim}{t \to} 0\, g_+(t) = 1 \\ \underset{lim}{t \to} 0\, g_-(t) = 0\end{gathered} \tag{6.33}$$

Лекция 7. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 7).

Оператор эволюции и его свойства.

На прошлой лекции мы рассматривали систему нейтральных псевдоскалярных мезонов в базисе ароматов (1.10) с фазой CP-преобразования $\alpha = 0$. Мы записали закон преобразования базисных векторов для такого случая (6.18). Но такие состояния не являются собственными для оператора $\hat{C}\hat{P}$. Собственными состояниями этого оператора являются $|B_1\rangle$ и $|B_2\rangle$ (4.33-4.34). Перепишем эти состояния с учетом $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(|B\rangle + |\overline{B}\rangle\right) \\ |B_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(|B\rangle - |\overline{B}\rangle\right) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Также для нас очень важен еще один базис – базис состояний с определенной массой и временем жизни (6.19), отвечающий соответствующим энергиям:

$$\begin{aligned} \hat{H}\,|B_L\rangle &= E_L\,|B_L\rangle \\ \hat{H}\,|B_H\rangle &= E_H\,|B_H\rangle \end{aligned} \tag{7.2}$$

Этот базис хорош тем, что у состояний $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$, как мы выяснили на прошлой лекции, простая временная эволюция (6.20), которую будет удобно также записать через операторы эволюции:

$$\begin{aligned} |B_L(t)\rangle &= e^{-i\,E_L t}\,|B_L\rangle\Big|_{t_0=0} = U_L(t,\,t_0)\,|B_L\rangle \\ |B_H(t)\rangle &= e^{-i\,E_H t}\,|B_H\rangle\Big|_{t_0=0} = U_H(t,\,t_0)\,|B_H\rangle \end{aligned} \tag{7.3}$$

Читатель может заметить, что выражения (6.20) и (7.3) отличаются наличием/отсутствием постоянной Планка $\hbar$ в экспоненте. Выражение (7.3) мы переписали в системе измерения где $\hbar = c = 1$, стандартной в квантовой теории поля. В дальнейших записях мы будем придерживаться ее. Для перехода к классической квантовомеханической нотации необходимо будет произвести замену $E_{L,H} \to \frac{E_{L,H}}{\hbar}$. Также, далее нам понадобятся уже использовавшиеся соотношения (4.7), (5.2) и (5.8).

Запишем оператор эволюции состояний $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$ аналогично (6.29):

$$\hat{\mathrm{U}}(t,\, t_0) = \hat{D}^{-1}\, \hat{U}(t,\, t_0)\, \hat{D} \tag{7.4}$$

где матрицы $\hat{D}$ (6.25) и $\hat{D}^{-1}$ (6.27) осуществляют переход от базиса ароматов (1.10) к базису (6.26). Поскольку в данном случае матрица $\hat{D}$ осуществляют переход от ортогонального базиса к неортогональному, она не является унитарной:

$$\hat{D}^{\dagger} \neq \hat{D}^{-1} \tag{7.5}$$

Матрица $\hat{U}(t,\, t_0)$ – матрица эволюции состояний $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ аналогична (6.28):

$$\hat{U}(t,\, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\,(t-t_0)}\, E_L & 0 \\ 0 & e^{-i\,(t-t_0)}\, E_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_L(t,\, t_0) & 0 \\ 0 & U_H(t, t_0) \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Как известно из квантовой механики, если гамильтониан системы эрмитов, то ее эволюция описывается унитарной матрицей. В нашем же случае гамильтониан неэрмитов, а значит оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ не является унитарной:

$$\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)\, \hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0) = \begin{pmatrix} e^{+i\,(t-t_0)}\, E_L^* & 0 \\ 0 & e^{+i\,(t-t_0)}\, E_H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\,(t-t_0)}\, E_L & 0 \\ 0 & e^{-i\,(t-t_0)}\, E_H \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\,(t-t_0)}\, (E_L - E_L^*) & 0 \\ 0 & e^{-i\,(t-t_0)}\, (E_H - E_H^*) \end{pmatrix} = \tag{7.7}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\,(t-t_0)}\, 2i\, Im\, E_L & 0 \\ 0 & e^{-i\,(t-t_0)}\, 2i\, Im\, E_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma_L\,(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\Gamma_H\,(t-t_0} \end{pmatrix}$$

где согласно (5.2)

$$Im\, E_L = -\frac{\Gamma_L}{2}$$

$$Im\, E_H = -\frac{\Gamma_H}{2}$$

Матрица (7.7) совпадает с единичной только тогда, когда $t = t_0$.

Таким образом, только в начальный момент времени выполняются условия нормировки

$$1 = \langle B_L | B_L \rangle = \langle B_H | B_H \rangle = |p|^2 + |q|^2 \tag{7.8}$$

В произвольный же момент времени $t > t_0$:

$$\langle B_L(t)|B_L(t)\rangle = e^{\Gamma_L t} \neq 1, \qquad t > t_0 \tag{7.9}$$

Однако, заметим, что величины p и q не зависят от времени, поэтому

$$|p|^2 + |q|^2 = 1 \tag{7.10}$$

в любой момент времени t.

Глядя на выражение (7.9) может возникнуть вопрос: за счет чего вероятности уменьшаются со временем?

Ответ на этот вопрос кроется в том факте, что мы рассматриваем нестабильные частицы, которые являются открытыми квантовыми системами, и часть вероятности уходит на то, что B-мезон распадется в некоторую совокупность конечных частиц.

Запишем важное свойство матрицы $\hat{U}(t,\, t_0)$:

$$\begin{aligned} &\hat{U}(t_2,\, t_0) = \hat{U}(t_2,\, t_1)\, \hat{U}(t_1,\, t_0) \\ &t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Данное свойство читателю предлагается доказать самостоятельно.

Однако, матрицы $\hat{D}$ и $\hat{U}(t,\, t_0)$ не так интересны как матрица эволюции $\hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0)$ состояний $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$ (7.4). Рассмотрим ее подробнее. Для начала, заметим, что она не унитарна (докажите самостоятельно):

$$\hat{\mathsf{U}}^\dagger(t,\, t_0) \neq \hat{\mathsf{U}}^{-1}(t,\, t_0) \tag{7.12}$$

Это свойство имеет простое физическое объяснение: если эволюция физического процесса описывается унитарной матрицей (например ускорение частицы в электрическом поле – при обращении поля, частица будет замедляться), то такая эволюция обратима, в свою очередь процессы, описываемые неунитарной матрицей – необратимы (например распад B мезона на D мезон, электрон и электронное антинейтрино – необратим). Поэтому процессы распадов нестабильных частиц необратимы и соответствующие им матрицы эволюции неунитарны.

Докажем для матрицы $\hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0)$ (7.4 свойство, аналогичное (7.11):

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathsf{U}}(t_2,\,t_0) = \hat{\mathsf{U}}(t_2,\,t_1)\,\hat{\mathsf{U}}(t_1,\,t_0) = \hat{D}^{-1}\hat{U}(t_2,\,t_1)\,\underline{\hat{D}\hat{D}^{-1}}\,\hat{U}(t_1,\,t_0)\,\hat{D} = \\
&= \hat{D}^{-1}\hat{U}(t_2,\,t_1)\,\underline{\hat{1}}\,\hat{U}(t_1,\,t_0)\,\hat{D} = \hat{D}^{-1}\underline{\hat{U}(t_2,\,t_1)\,\hat{U}(t_1,\,t_0)}\,\hat{D} = \\
&= \hat{D}^{-1}\hat{U}(t_2,\,t_0)\,\hat{D} = \hat{\mathsf{U}}(t_2,\,t_0)
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Квадраты функций $g_{\pm}(t,\,t_0)$.

Для вычисления вероятностей нам понадобятся функций $g_+(t,\,t_0)$ и $g_-(t,\,t_0)$ (6.30) (6.32). Вычислим квадрат функции $g_+(t,\,t_0)$ для удобства положив $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
&\left|g_+(t,\,t_0)\right|^2\Big|_{t_0=0} = \left|g_+(t)\right|^2 = g_+(t)\;g_+^*(t) = \\
&= \frac{1}{4}\;((U_H+U_L)(U_H^*+U_L^*)) = \frac{1}{4}\;\left(|U_H|^2+|U_L|^2+\underline{U_HU_L^*+U_LU_H^*}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\;\left(|U_H|^2+|U_L|^2+\underline{2\,Re\,(U_HU_L^*)}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\;\left[e^{-\,(E_H-E_H^*)\,t}+e^{-\,(E_L-E_L^*)\,t}+2\,Re\;\left(e^{-\,(E_H-E_L^*)\,t}\right)\right]
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Выше мы воспользовались известным выражением для комплексных величин:

$$a+a^* = 2\,Re\,(a)$$

Посчитаем выражения под экспонентами с учетом (5.21):

$$\begin{aligned}
&E_H - E_H^* = m_H - \frac{i}{2}\,\Gamma_H - m_H - \frac{i}{2}\,\Gamma_H = -i\,\Gamma_H \\
&E_L - E_L^* = -i\,\Gamma_L \\
&e^{-i\,(E_H-E_L^*)\,t} = e^{-it\,(m_H-\frac{i}{2}\,\Gamma_H-m_L-\frac{i}{2}\,\Gamma_L)} = \\
&= e^{-it\,\Delta m}e^{-\frac{\Gamma_H+\Gamma_L}{2}\,t} = e^{-it\,\Delta m}e^{-\Gamma\,t}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Где мы воспользовались обозначениями Δm и Γ согласно (5.27) и (5.30). Подставляя (7.15) в (7.14), вычисляем:

$$\begin{aligned}
\left|g_+(t)\right|^2 &= \frac{1}{4}\left[e^{-(E_H-E_H^*)\,t}+e^{-(E_L-E_L^*)\,t}+2\,Re\left(e^{-(E_H-E_L^*)\,t}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\left[e^{-\Gamma_H\,t}+e^{-\Gamma_L\,t}+2\,Re\left(e^{-it\,\Delta m}e^{-\Gamma\,t}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\left[e^{-\Gamma_H\,t}+e^{-\Gamma_L\,t}+2\,e^{-\Gamma\,t}\,Re\left(e^{-it\,\Delta m}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\left[e^{-\Gamma_H\,t}+e^{-\Gamma_L\,t}+2\,e^{-\Gamma\,t}\,cos\,(\Delta m\,t)\right]
\end{aligned} \tag{7.16}$$

В принципе, на этом можно остановиться, но попробуем преобразовать это выражение дальше. Проведем над первыми двумя экспонентами тождественное преобразование:

$$\begin{aligned}
e^{-\Gamma_H\,t} &= e^{-\frac{\Gamma_L+\Gamma_H}{2}\,t}e^{-\frac{\Gamma_H-\Gamma_L}{2}\,t}=e^{-\Gamma\,t}e^{-\frac{\Gamma_H-\Gamma_L}{2}\,t}\\
e^{-\Gamma_L\,t} &= e^{-\frac{\Gamma_L+\Gamma_H}{2}\,t}e^{\frac{\Gamma_H-\Gamma_L}{2}\,t}=e^{-\Gamma\,t}e^{\frac{\Gamma_H-\Gamma_L}{2}\,t}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Подставим (7.17) в (7.16):

$$\begin{aligned}
\left|g_+(t)\right|^2 &= \frac{1}{4}\left[e^{-\Gamma_H\,t}+e^{-\Gamma_L\,t}+2\,e^{-\Gamma\,t}\,cos\,(\Delta m\,t)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\left[e^{-\Gamma\,t}e^{-\frac{\Gamma_H-\Gamma_L}{2}\,t}+e^{-\Gamma\,t}e^{\frac{\Gamma_H-\Gamma_L}{2}\,t}+2\,e^{-\Gamma\,t}\,cos\,(\Delta m\,t)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\,e^{-\Gamma\,t}\left[e^{-\frac{\Delta\Gamma}{2}\,t}+e^{\frac{\Delta\Gamma}{2}\,t}+2\,cos\,(\Delta m\,t)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\,e^{-\Gamma\,t}\left[2\,\frac{e^{-\frac{\Delta\Gamma}{2}\,t}+e^{\frac{\Delta\Gamma}{2}\,t}}{2}+2\,cos\,(\Delta m\,t)\right]=\\
&=\frac{1}{2}\,e^{-\Gamma\,t}\left[ch\left(\frac{\Delta\Gamma\,t}{2}\right)+cos\,(\Delta m\,t)\right]
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Вычислить $g_+^*(t,\,t_0)\,g_-(t,\,t_0)$ и $|g_-(t,\,t_0)|^2$ читателю предлагается получить самостоятельно, здесь же приведем окончательные выражения, используя обозначение $\Delta t = t - t_0$:

$$\begin{aligned} \left|g_{\pm}(t,\,t_0)\right|^2 &= \frac{1}{2}\,e^{-\Gamma\,\Delta t}\,\left[ch\,\left(\frac{\Delta\Gamma\,\Delta t}{2}\right)\pm cos\,(\Delta m\,\Delta t)\right] \\ g_{+}^{*}(t,\,t_0)\,g_{-}(t,\,t_0) &= -\frac{1}{2}\,e^{-\Gamma\,\Delta t}\,\left[sh\,\left(\frac{\Delta\Gamma\,\Delta t}{2}\right)+i\,sin\,(\Delta m\,\Delta t)\right] \end{aligned} \tag{7.19}$$

Вычисление вероятностей переходов B-мезонов.

Получив все необходимые выражения, можем приступить непосредственно к вычислению вероятностей:

1) Пусть в момент времени $t_0 = 0$ нейтральный псевдоскалярный мезон находился в состоянии $|B\rangle$. Какова вероятность того, что в момент времени $t > 0$ мезон останется в состоянии $|B\rangle$?

   Используя оператор эволюции $\hat{\mathrm{U}}(t,\,t_0)$ (7.4) и (6.32), запишем состояние мезона в момент времени t:

$$|B(t)\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t,\,0)\,|B\rangle = g_{+}(t)\,|B\rangle - \frac{q}{p}\,g_{-}(t)\,|\overline{B}\rangle \tag{7.20}$$

   Тогда соответствующая вероятность вычисляется как

$$\omega\Big(B,\,t\Big|B,\,t_0\Big) = \Big|\langle B|B(t)\rangle\Big|^2 = \Big|g_{+}(t)\Big|^2 = \frac{1}{2}\,e^{-\Gamma\,t}\,\left[ch\,\left(\frac{\Delta\Gamma\,t}{2}\right)\pm cos\,(\Delta m\,t)\right] \tag{7.21}$$

2) Пусть в момент времени $t_0 = 0$ нейтральный псевдоскалярный мезон находился в состоянии $|B\rangle$. Какова вероятность того, что в момент времени $t > 0$ мезон окажется в состоянии $|B_1\rangle$ (то есть в состоянии со значением CP-четности равным $+1$)?

   Согласно (6.32) и (7.1) запишем

$$\begin{aligned} \omega\Big(B_1,\,t\Big|B,\,t_0\Big) &= \Big|\langle B_1|B(t)\rangle\Big|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(\langle B| + \langle\overline{B}|\right)B(t)\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\left|\langle B|B(t)\rangle + \langle\overline{B}|B(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\,\left|g_{+}(t) - \frac{q}{p}\,g_{-}(t)\right|^2 \end{aligned} \tag{7.22}$$

   Обратим внимание на это выражение, оно понадобится нам в дальнейшем. Читателю предлагается продолжить вычисление этой вероятности.

3) Пусть в момент времени $t_0 = 0$ нейтральный псевдоскалярный мезон находился в состоянии $|B_1\rangle$. Какова вероятность того, что в момент времени $t > 0$ мезон окажется в состоянии $|B\rangle$?

Если бы оператор эволюции $\hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0)$ был унитарным, то вероятность такого перехода была бы равна вероятности из прошлой задачи. Однако, поскольку $\hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0)$ неунитарен, то это не так. Покажем это прямым вычислением. Для начала запишем состояние $|B_1(t)\rangle$:

$$|B_1(t)\rangle = \hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0)\, |B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\mathsf{U}}(t,\, 0)\, |B\rangle + \hat{\mathsf{U}}(t,\, 0)\, |\overline{B}\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|B(t)\rangle + |\overline{B}\rangle \right)$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности оператора $\hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0)$ (убедитесь в этом самостоятельно). Используя (6.32), запишем вероятность

$$\begin{aligned} \omega(B,\, t \mid B_1,\, t_0) &= \left| \langle B|B_1(t)\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \langle B|B(t)\rangle + \langle B|\overline{B}(t)\rangle \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left| g_+(t) - \frac{p}{q}\, g_-(t) \right|^2 \neq \omega\Big(B_1,\, t \Big| B,\, t_0\Big) \end{aligned} \qquad (7.23)$$

Лекция 8. Системы нейтральных псевдоскалярных мезонов (Часть 8).

Экспериментальное получение B-мезонов.

Покажем как происходит экспериментальное изучение B-мезонов на примере уже упоминавшихся установках PEP-II и KEKb. Эти коллайдеры являются так называемыми B-фабриками, поскольку на них рождаются преимущественно B-мезоны (пары B^0 и $\overline{B}^0$ или B^+ и B^-) (Рис. 8.1). Оба этих коллайдера электрон-позитронные, и энергия пучков подобрана таким образом, что ее значение в системе центра масс в точности равно массе $\Upsilon(4S)$ резонанса:

$$e^+ \longrightarrow \quad \longleftarrow e^-$$

$$E^{\text{СЦМ}}_{e^+e^-} = M_{\Upsilon(4S)}$$

Замечание: здесь и далее будем использовать стандартную в квантовой теории поля "естественную"систему измерения, в которой $\hbar = c = 1$.

$\Upsilon(4S)$ резонанс имеет кварковый состав $b\overline{b}$ и массу:

$$M_{\Upsilon(4S)} \geqslant \begin{cases} M_{B^+} + M_{B^-} \\ M_{B^0} + M_{\overline{B}^0} \end{cases}$$

Поэтому он распадается преимущественно по этим двум каналам с равными вероятностями $\approx \frac{1}{2}$ каждый.

$$\Upsilon(4S) \begin{array}{l} \nearrow \; B^+B^- \qquad \omega \approx \frac{1}{2} \\ \searrow \; B^0\overline{B}^0 \qquad \omega \approx \frac{1}{2} \end{array}$$

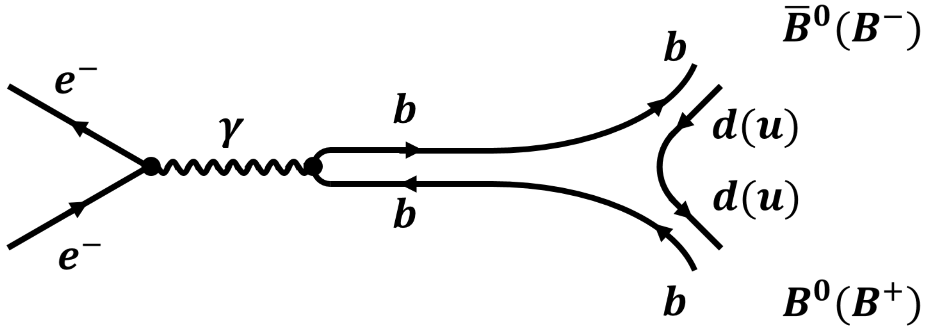


Рис. 8.1. Диаграмма Фейнмама электрон-позитронного столкновения с рождением и последующим распадом $\Upsilon(4S)$ резонанса (кварковый состав $b\overline{b}$).

Пара B^+B^- коррелирована по заряду, и следовательно по аромату, а пара $B^0\overline{B}^0$ рождается в запутанном по аромату состоянии. Она и будет нас интересовать.

Запутанность $B^0\overline{B}^0$ пары, рождающейся в электрон-позитронных столкновениях.

Докажем запутанность состояния $B^0\overline{B}^0$ рождающегося в e^+e^- столкновениях. Как известно, в сильном взаимодействии сохраняются и C- и P-симметрии, соответственно комбинированная CP-симметрия тоже сохраняется. Следовательно значение CP-четности начального состояния равно CP-четности конечного состоянии. Найдем значение CP-четности начального состояния, то есть $\Upsilon(4S)$ резонанса. Значение его C-четности равно -1, и P-четности тоже равно -1. Тогда

$$CP_{\Upsilon(4S)} = (-1)(-1) = +1 \tag{8.1}$$

В качестве конечных состояний с определенной CP-четностью могут быть состояния $|B_1\rangle$ и $|B_2\rangle$ (7.1), CP-четности которых равны $+1$ и -1 соответственно. Теперь вычислим значения CP-четности различных комбинаций этих состояний. Начнем с комбинации B_1B_2. Принимая во внимание тот факт, что $|B_1\rangle$ и $|B_2\rangle$ являются бесспиновыми состояниями, а полный момент $\Upsilon(4S)$ резонанса $J = 1$, а значит между этими состояниями есть относительный момент равный единице, и при вычислении конечного значения CP-четности нужно учесть множитель $(-1)^J$:

$$CP_{B_1B_2} = (+1)(-1)(-1)^1 = +1 \tag{8.2}$$

Сравнивая с (8.1) видим, что $\Upsilon(4S)$ резонанс может распадаться на такую комбинацию состояний.

Аналогично вычисляем оставшиеся комбинации:

$$\begin{gathered} CP_{B_1B_1} = (+1)(+1)(-1)^1 = -1 \\ CP_{B_2B_2} = (-1)(-1)(-1)^1 = -1 \end{gathered} \tag{8.3}$$

Сравнивая с (8.1) видим, что $\Upsilon(4S)$ резонанс не может распадаться на такие состояния.

Таким образом, мы показали, что $\Upsilon(4S)$ резонанс может распадаться на следующую комбинацию состояний:

$$\Upsilon(4S) \to B_1 B_2 \tag{8.4}$$

Теперь перейдем от состояний $|B_1\rangle$ и $|B_2\rangle$ в базис ароматов (1.10). Запишем конечное состояние распада $\Upsilon(4S)$ и разложим его в базисе ароматов согласно (7.1):

$$\begin{gathered} |f\rangle = \left|B_1^{(2)}\right\rangle \otimes \left|B_2^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{2}\,\Big(|B^{(2)}\rangle \otimes |B^{(1)}\rangle - |B^{(2)}\rangle \otimes |\overline{B}^{(1)}\rangle + \\ + |\overline{B}^{(2)}\rangle \otimes |B^{(1)}\rangle - |\overline{B}^{(2)}\rangle \otimes |\overline{B}^{(1)}\rangle\Big) \end{gathered} \tag{8.5}$$

Здесь верхние индексы (1) и (2) характеризуют две подсистемы.

Пусть, переход (8.4) происходит за счет некоторого эффективного гамильтониана сильного взаимодействия $\hat{H}$, сохраняющий аромат и инвариантный относительно C-, P- и комбинированного CP-преобразований. Выпишем значения ароматов F (flavour) для начального и возможных конечных состояний:

$$\begin{gathered} F_{\Upsilon(4S)} = F_b + F_{\overline{b}} = -1 + 1 = 0 \\ F_{BB} = F_b + F_b = -1 - 1 = -2 \\ F_{\overline{B}\overline{B}} = F_{\overline{b}} + F_{\overline{b}} = 1 + 1 = 2 \\ F_{B\overline{B}} = F_b + F_{\overline{b}} = -1 + 1 = 0 = F_{\overline{B}B} \end{gathered} \tag{8.6}$$

Рассмотрим следующий матричный элемент:

$$\langle f|\hat{H}|\Upsilon(4S)\rangle \sim \left\langle B^{(2)}\right| \otimes \left\langle \overline{B}^{(1)}\right| \hat{H} \left|\Upsilon(4S)\right\rangle - \left\langle \overline{B}^{(2)}\right| \otimes \left\langle B^{(1)}\right| \hat{H} \left|\Upsilon(4S)\right\rangle \tag{8.7}$$

При записи этого матричного элемента мы оставили только те слагаемые, начальные и конечные состояния которых принимают одно и то же значение аромата (8.6).

Таким образом, эффективное финальное состояние в базисе ароматов $|f_F\rangle$ имеет вид:

$$|f_F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|B^{(2)}\right\rangle \otimes \left|\overline{B}^{(1)}\right\rangle - \left|\overline{B}^{(2)}\right\rangle \otimes \left|B^{(1)}\right\rangle\right) = |\Psi^-\rangle \tag{8.8}$$

Это состояние эквивалентно запутанному состояние Белла $|\Psi^-\rangle$ двух спинов $s = \frac{1}{2}$:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+^{(2)}\rangle \otimes |-^{(1)}\rangle - |-^{(2)}\rangle \otimes |+^{(1)}\rangle\right)$$

в базисе проекций спина

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

который, в нашем случае, эквивалентен базису ароматов (1.10).

Таким образом, синглетное состояние (8.8) является запутанным белловским состоянием а базисе ароматов. Оставшиеся 3 белловских состояния также можно записать в базисе ароматов. Читателю предлагается проделать это самостоятельно в качестве упражнения.

Эволюция синглетного запутанного в базисе ароматов состояния Белла $|\Psi^-\rangle$.

Каждую из подсистем будем рассматривать в базисе ароматов (1.10). На одной из лекций основного курса по "Матрице плотности"нами уже рассматривалось состояние $|\Psi^-(0)\rangle$ в момент времени $t = 0$ в аналогичном базисе, поэтому ниже просто выпишем явный вид этого состояния в пространстве 4×4:

$$\left|\Psi^-(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(2)} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(1)} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(2)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

Поскольку каждое из состояний первой и второй подсистемы эволюционирует по отдельности, то чтобы найти как эволюционирует состояние $|\Psi^-(0)\rangle$ необходимо подействовать на него прямым произведением операторов эволюции для каждой подсистемы:

$$\left|\Psi^-(t)\right\rangle = \hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0=0)\left|\Psi^-(0)\right\rangle = \hat{\mathsf{U}}^{(2)}(t,\, t_0=0)\otimes\hat{\mathsf{U}}^{(1)}(t,\, t_0=0)\left|\Psi^-(0)\right\rangle \tag{8.10}$$

где каждый оператор эволюции действует на состояния из соответствующей подсистемы. Используя (6.32) и правила прямого произведения, запишем:

$$\hat{\mathsf{U}}^{(2)}(t,\, t_0=0)\otimes\hat{\mathsf{U}}^{(1)}(t,\, t_0=0)\left|\Psi^-(0)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} g_+(t) \\ -\frac{q}{p}\, g_-(t)\end{pmatrix}^{(2)} \otimes \begin{pmatrix} -\frac{p}{q}\, g_-(t) \\ g_+(t)\end{pmatrix}^{(1)} - \begin{pmatrix} -\frac{p}{q}\, g_-(t) \\ g_+(t)\end{pmatrix}^{(2)} \otimes \begin{pmatrix} g_+(t) \\ -\frac{q}{p}\, g_-(t)\end{pmatrix}^{(1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} -\frac{p}{q}\, g_+(t)g_-(t) \\ g_+^2(t) \\ g_-^2(t) \\ -\frac{q}{p}\, g_-(t)g_+(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{p}{q}\, g_-(t)g_+(t) \\ g_-^2(t) \\ g_+^2(t) \\ -\frac{q}{p}\, g_+(t)g_-(t)\end{pmatrix}\right] = \frac{g_+^2 - g_-^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \left(g_+^2(t) - g_-^2(t)\right)\left|\Psi^-(0)\right\rangle$$

Подставляя полученное выражение в (8.10), запишем эволюцию во времени состояния $|\Psi^-(t)\rangle$:

$$\left|\Psi^-(t)\right\rangle = \left(g_+^2(t) - g_-^2(t)\right)\left|\Psi^-(0)\right\rangle \tag{8.11}$$

Действительно, синглетное по аромату состояние $|\Psi^-(0)\rangle$ не может в процессе эволюции, обусловленной сильным взаимодействием, не может превратиться в какое-то триплетное по аромату состояние, оно должно эволюционировать само через себя. Воспользовавшись (6.30), преобразуем (8.11):

$$\begin{aligned}\left|\Psi^-(t)\right\rangle &= \left(g_+^2(t) - g_-^2(t)\right)\left|\Psi^-(0)\right\rangle = \\ &= (g_+ - g_-)(g_+ + g_-)\left|\Psi^-(0)\right\rangle = U_L(t)\, U_H(t)\left|\Psi^-(0)\right\rangle = \\ &= e^{-i\,(E_H+E_L)\,t}\left|\Psi^-(0)\right\rangle\end{aligned} \tag{8.12}$$

Также можем записать эволюцию матрицы плотности состояния $\left|\Psi^-\right\rangle$:

$$\hat{\rho}^{(\Psi^-)}(t) = \left|\Psi^-(t)\right\rangle\left\langle\Psi^-(t)\right| = e^{-it\,(E_H - E_H^* + E_L - E_L^*)}\,\hat{\rho}^{(\Psi^-)}(0) = \\ = e^{2\,Im\,(E_L+E_H)\,t}\,\hat{\rho}^{(\Psi^-)}(0) = e^{-(\Gamma_L+\Gamma_H)\,t}\,\hat{\rho}^{(\Psi^-)}(0) = \\ = e^{-2\Gamma t}\,\hat{\rho}^{(\Psi^-)}(0) \tag{8.13}$$

где мы воспользовались соотношениями (5.21) и (6.15).

Выведенное напрямую выражение для эволюции (8.12) может показаться читателю подозрительно простым, однако его можно получить и другим способом, попутно убедившись в правильности записанного выше.

Рассмотрим следующие состояния:

$$\left|B_L^{(2)}\right\rangle \otimes \left|B_H^{(1)}\right\rangle =: |LH\rangle$$

$$\left|B_H^{(2)}\right\rangle \otimes \left|B_L^{(1)}\right\rangle =: |HL\rangle$$

Для них справедливы следующие законы преобразования во времени:

$$|LH\,(t)\rangle = e^{-i\,(E_L+E_H)\,t}\,|LH\rangle$$

$$|HL\,(t)\rangle = e^{-i\,(E_H+E_L)\,t}\,|HL\rangle$$

То есть, закон преобразования у них одинаковый. Тогда, если выразить $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$ через $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ (6.19), то синглет $|\Psi^-(t)\rangle$ с точностью до коэффициента будет иметь следующий вид:

$$\left|\Psi^-(0)\right\rangle \sim \left|B_H^{(2)}\right\rangle \otimes \left|B_L^{(1)}\right\rangle \overset{?}{\mp} \left|B_L^{(2)}\right\rangle \otimes \left|B_H^{(1)}\right\rangle$$

Читателю предлагается самостоятельно показать прав ильность этого выражения, найти знак и коэффициент, подставив в (8.8) $|B\rangle$ и $|\overline{B}\rangle$, выраженные через $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ (6.19). А также, после этого доказать, что состояние $|\Psi^-(t)\rangle$ преобразуется записанным выше образом (8.12).

Заметим, что для остальных состояний Белла $|\Psi^+\rangle$, $|\Phi^+\rangle$ и $|\Phi^-\rangle$ такой способ не сработает.

Примеры вычисления вероятностей.

1) Пусть, в момент времени $t_0 = 0$ система двух нейтральных псевдоскалярных мезонов находилась в состоянии $|\Psi^-\rangle$ по аромату. Найти вероятность того, что в момент $t > 0$ подсистема "2" будет находится в состоянии $|B_1\rangle$: $|B_1^{(2)}\rangle$, а подсистема "1" будет находится в состоянии $|B\rangle$: $|B^{(1)}\rangle$.

   Воспользовавшись соотношениями (8.8) и (8.12), найдем соответствующую вероятность:

$$\begin{aligned}
&\omega\left(B_1^{(2)},\, B^{(1)},\, t\middle|\Psi^-,\, t_0=0\right) = \left|\langle B_1^{(2)}|\otimes\langle B^{(1)}|\,\Psi^-(t)\rangle\right|^2 = \\
&= e^{it\,(E_H - E_H^* + E_L - E_L^*)}\left|\langle B_1^{(2)}|\otimes\langle B^{(1)}|\,\Psi^-(0)\rangle\right|^2 = \\
&= e^{-2\Gamma t}\,\frac{1}{2}\left|\langle B^{(2)}|\otimes\langle B^{(1)}|\Psi^-(0)\rangle + \langle\overline{B}^{(2)}|\otimes\langle B^{(1)}|\Psi^-(0)\rangle\right|^2 = \\
&= e^{-2\Gamma t}\,\frac{1}{2}\left|0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\,e^{-2\Gamma t}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

   Это был достаточно простой случай. Читателю также предлагается аналогичным образом самостоятельно вычислить эволюцию оставшихся белловских состояний $|\Psi^+(t)\rangle$ и $|\Phi^{\pm}(t)\rangle$.

2) Пусть, в момент времени $t_0 = 0$ система двух нейтральных псевдоскалярных мезонов находилась в состоянии $|\Psi^-(0)\rangle$ по аромату. Найти вероятность того, что в момент $t_1 > 0$ подсистема "1" будет находится в состоянии $|B\rangle$: $|B^{(1)}\rangle$, и, в момент времени $t_2 > t_1$ подсистема "2" будет находится в состоянии $|B_1\rangle$: $|B_1^{(2)}\rangle$.

   Запишем состояние системы в момент времени t_2:

$$|\tilde{\Psi}(t_2)\rangle = \hat{\mathsf{U}}(t_2,\, t_1)\,\hat{P}_{t_2}\,\hat{\mathsf{U}}(t_1,\, t_0)\,|\Psi^-(t_0 = 0)\rangle \tag{8.15}$$

   Поясним записанное **справа налево**: сначала система находится в состоянии $|\Psi^-(t_0 = 0)\rangle$, далее, посредством оператора $\hat{\mathsf{U}}(t_1,\, t_0)$ эволюционировала от момента t_0 до t_1, далее, в момент времени $t = t_1$ при помощи оператора $\hat{P}_{t_2}$ произошло измерение, которое дало информацию о подсистеме "1 после чего система эволюционировала при помощи $\hat{\mathsf{U}}(t_2,\, t_1)$ от момента t_1 до t_2.

Рассмотрим эти операторы подробнее. Нам уже известен оператор $\hat{\mathsf{U}}(t_1,\, t_0)$ (8.10):

$$\hat{\mathsf{U}}(t,\, t_0) = \hat{\mathsf{U}}^{(2)}(t,\, t_0) \otimes \hat{\mathsf{U}}^{(1)}(t,\, t_0) \tag{8.16}$$

и его действие на состояние $|\Psi^-(t_0 = 0)\rangle$.

Оператор $\hat{P}_{t_2}$ проводит измерение подсистемы подсистемы "1 при этом не взаимодействуя с подсистемой "2". Тогда

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{1}^{(2)} \otimes \hat{P}_B^{(1)} \\ \hat{P}^{(1)} &= |B^{(1)}\rangle\langle B^{(1)}| \end{aligned} \tag{8.17}$$

Далее, заметим, что после измерения мы не интересуемся подсистемой "1 а все что нам интересно – эволюция подсистемы "2". Поэтому

$$\hat{\mathsf{U}}(t_2,\, t_1 \neq 0) = \hat{\mathsf{U}}^{(2)}(t_2,\, t_1 \neq 0) \otimes \hat{1}^{(1)} \tag{8.18}$$

Подставив выражения (8.16), (8.17) и (8.18) в произведение операторов из (8.15), можем записать, воспользовавшись свойствами прямого произведения (см. основной курс лекций по матрице плотности):

$$\begin{aligned} &\hat{\mathsf{U}}(t_2,\, t_1)\, \hat{P}_{t_2}\, \hat{\mathsf{U}}(t_1,\, t_0) = \\ &= \Big(\mathsf{U}^{(2)}(t_2,\, t_1)\, \hat{1}^{(2)}\, \mathsf{U}^{(2)}(t_1,\, t_0)\Big) \otimes \Big(\hat{1}^{(1)}\, \hat{P}_B^{(1)}\, \mathsf{U}^{(1)}(t_1,\, t_0)\Big) = \\ &= \mathsf{U}^{(2)}(t_2,\, t_0) \otimes \Big(\hat{P}_B^{(1)}\, \mathsf{U}^{(1)}(t_1,\, t_0)\Big) \end{aligned} \tag{8.19}$$

По условию задачи конечное состояние должно иметь следующий вид:

$$|f\rangle = |B_1^{(2)}\rangle \otimes |B^{(1)}\rangle \tag{8.20}$$

Тогда, используя (8.15), (8.19) и (8.20) запишем выражение для искомой вероятности:

$$\begin{aligned}
&\omega\left(t_2,\, B_1^{(2)},\, t_1,\, B^{(1)}\middle|\Psi^-,\, t_0=0\right) = \left|\left\langle f \mid \tilde{\Psi}^-(t_2)\right\rangle\right|^2 = \\
&= \left|\left(\left\langle B_1^{(2)} \mid \hat{\mathrm{U}}^{(2)}(t_2,\, t_0)\right) \otimes \left(\left\langle B^{(1)}\right| \hat{\mathrm{U}}^{(1)}(t_1,\, t_0)\right)\ \left|\Psi^-(t_0)\right\rangle\right|^2
\end{aligned} \tag{8.21}$$

где мы воспользовались свойством

$$\left\langle B^{(1)}\right| \hat{P}_B^{(1)} = \left\langle B^{(1)}\middle|B^{(1)}\right\rangle \left\langle B^{(1)}\right| = \left\langle B^{(1)}\right|$$

Дальнейшее преобразование этой формулы (8.21) сводится к громоздким, но не сложным вычислениям, которые читатель может провести самостоятельно.

Итак, данные примеры демонстрируют метод, с помощью которого можно производить вычисления вероятностей для любых запутанных состояний.

Лекция 9. Решение нестационарного уравнения Шредингера (Часть 1).

Решение нестационарного уравнения Шредингера (простой случай).

Обычно, в университетских курсах этот материал излагают следующим образом:

Рассмотрим вектор состояния $|\psi^{(S)}(t)\rangle$ ((S) – представление Шредингера). Этот вектор состояния удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$
\begin{aligned}
& i\hbar \frac{\partial\,|\psi^{(S)}(t)\rangle}{\partial\, t} = \hat{H}^{(S)}\,|\psi^{(S)}(t)\rangle \\
& |\psi^{(S)}(t=t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \quad \text{– начальное условие} \\
& \langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1 \quad \text{– условие нормировки}
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Примечание: отсутствие индекса (S) в векторе из начального условия $|\psi_0\rangle$ не является опечаткой, поскольку начальное условие одинаково и для представления Шредингера, и для представления Гейзенберга, и для представления взаимодействия.

Предполагая гамильтониан $\hat{H}^{(S)}$ **независящим от времени**, решение уравнения (9.1) можно представить в следующем виде:

$$
|\psi^{(S)}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}^{(S)}\,(t-t_0)}|\psi_0\rangle \stackrel{def}{=} \hat{U}(t,\,t_0)\,|\psi_0\rangle \tag{9.2}
$$

Обычно предполагают, что $t \geqslant t_0$, а оператор

$$
\hat{U}(t,\,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}^{(S)}\,(t-t_0)} \tag{9.3}
$$

называют оператором эволюции.

Очевидно, что

$$
\hat{U}(t_0,\,t_0) = \hat{1} \tag{9.4}
$$

Обычно в представлении Шредингера предполагают, что гамильтониан эрмитов:

$$
\hat{H}^{(S)} = \hat{H}^{(S)\dagger} \tag{9.5}
$$

В таком случае, оператор эволюции $\hat{U}(t,\,t_0)$ является унитарным:

$$\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0) = \hat{U}^{-1}(t,\, t_0) = \hat{U}(t_0,\, t) \tag{9.6}$$

Последнее равенство справедливо еще и в силу того, что уравнение Шредингера (9.1) записывается для замкнутых систем, а эволюция таких систем обратима.

Поскольку оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ – унитарный, то норма состояния сохраняется:

$$\begin{aligned} &\langle \psi^{(S)}(t) | \psi^{(S)}(t) \rangle = 1 \\ &\forall t \geqslant t_0 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Независимость от времени гамильтониана $\hat{H}^{(S)}$ также означает, что в любой момент времени он коммутирует сам с собой. Это позволяет записать так называемое групповое свойство операторов эволюции:

$$\hat{U}(t,\, t_0) = \hat{U}(t,\, t_1)\, \hat{U}(t_1,\, t_0) \tag{9.8}$$

Читателю предлагается доказать это свойство самостоятельно, используя формулу Глаубера-Хаусдорфа.

Как правило, на этом заканчивается рассмотрение формального решения нестационарного уравнения Шредингера в рамках стандартных университетских курсов.

Мы же пойдем дальше и постараемся ответить на следующие вопросы: что будет если гамильтониан системы не будет эрмитовым? что будет если гамильтониан системы будет зависеть от времени?

Случай неэрмитового гамильтониана (радиоактивный распад).

В качестве примера рассмотрим радиоактивный распад свободной частицы. Это типичный прмер открытой квантовой системы, и в таком случае гамильтониан – неэрмитов:

$$\hat{H}^{(S)\dagger} \neq \hat{H}^{(S)} \tag{9.9}$$

Как известно, вероятность радиоактивного распада выражается экспоненциально:

$$\omega(t) = e^{-\frac{\Gamma_0 t}{\hbar}} \tag{9.10}$$

где Γ_0 – ширина распада, которая выражается через время жизни τ:

$$\Gamma_0 = \frac{\hbar}{\tau} \tag{9.11}$$

Запишем простейшее уравнение Шредингера для свободной частицы, испытывающей радиоактивный распад:

$$i\hbar \frac{\partial \left|\psi^{(S)}(t)\right\rangle}{\partial t} = \left(\hat{H}_0^{(S)} - \frac{i\,\Gamma^{(S)}}{2}\right) \left|\psi^{(S)}(t)\right\rangle \tag{9.12}$$

со следующими начальным условием и нормировкой:

$$\begin{aligned} &\left|\psi^{(S)}(t = t_0 = 0)\right\rangle = \left|\psi_0\right\rangle \\ &\left\langle\psi_0|\psi_0\right\rangle = 1 \end{aligned} \tag{9.13}$$

$\hat{H}_0^{(S)}$ – собственный гамильтониан системы, являющейся эрмитовым оператором, а $\Gamma^{(S)}$ – оператор ширины распада, тоже эрмитов:

$$\begin{aligned} &\hat{H}_0^{(S)} = \hat{H}_0^{(S)\dagger} \\ &\hat{\Gamma}^{(S)\dagger} = \hat{\Gamma}^{(S)} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Тогда оператор $\hat{H}_0^{(S)} - \frac{i\,\Gamma^{(S)}}{2}$ в уравнении (9.12) является некоторым оператором, так как любой произвольный оператор можно представить в виде суммы эрмитового и антиэрмитового операторов. В данном случае эрмитовым является оператор $\hat{H}_0^{(S)}$, а антиэрмитовым $\frac{i\,\Gamma^{(S)}}{2}$.

Также потребуем чтобы $\left|\psi_0\right\rangle$ был собственным вектором операторов $\hat{H}_0^{(S)}$ и $\Gamma^{(S)}$:

$$\begin{aligned} &\hat{H}_0^{(S)} \left|\psi_0\right\rangle = E_0 \left|\psi_0\right\rangle \\ &\hat{\Gamma}^{(S)} \left|\psi_0\right\rangle = \Gamma_0 \left|\psi_0\right\rangle \end{aligned} \tag{9.15}$$

Тогда формальное решение уравнения Шредингера (9.12) с неэрмитовым гамильтонианом $\hat{H}^{(S)}$ (9.9) будет следующим:

$$|\psi^{(S)}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}_0^{(S)} - \frac{i\,\hat{\Gamma}^{(S)}}{2}\right)t}\,|\psi_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_0 - \frac{i\,\Gamma_0}{2}\right)t}\,|\psi_0\rangle \tag{9.16}$$

где мы воспользовались соотношениями (9.15).

Далее вычислим соответствующую вероятность радиоактивного распада:

$$\omega\,(t) = \langle\psi^{(S)}(t)|\psi^{(S)}(t)\rangle = e^{-\frac{\Gamma_0 t}{\hbar}} \tag{9.17}$$

Если переписать выражение (9.16) используя оператор эволюции $\hat{U}(t,\,t_0)$:

$$|\psi^{(S)}(t)\rangle = \hat{U}(t,\,t_0)\,|\psi_0\rangle \tag{9.18}$$

то легко понять, что оператор эволюции $\hat{U}(t,\,t_0)$ не является унитарным:

$$\hat{U}^{-1}(t,\,t_0) \neq \hat{U}^{\dagger}(t,\,t_0) \tag{9.19}$$

А раз он не является унитарным, то, как и было показано, норма векторов состояния не сохраняется (9.17).

Случай гамильтониана, зависящего от времени.

На университетских курсах по квантовой механике представление Шредингера определяют как *представление, в котором операторы от времени не зависит, а вся временная зависимость переносится на вектора состояния, удовлетворяющие уравнению Шредингера.* Однако, ниже мы рассмотрим случаи, для которых это не совсем так.

Пусть, частица со спином $s = \frac{1}{2}$ движется в магнитном поле, с заданной напряженностью:

$$\vec{\mathcal{H}}(t) = \left(\mathcal{H}_\perp\, sin\,\omega t,\ \mathcal{H}_\perp\, cos\,\omega t,\ \mathcal{H}_\parallel\right) \tag{9.20}$$

где $\mathcal{H}_\perp$ и $\mathcal{H}_\parallel$ – некоторые константы.

Взаимодействие частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ с таким переменным полем будет описываться некоторым оператором взаимодействия, зависящим от времени. Следовательно и полный гамильтониан системы тоже должен зависеть от времени.

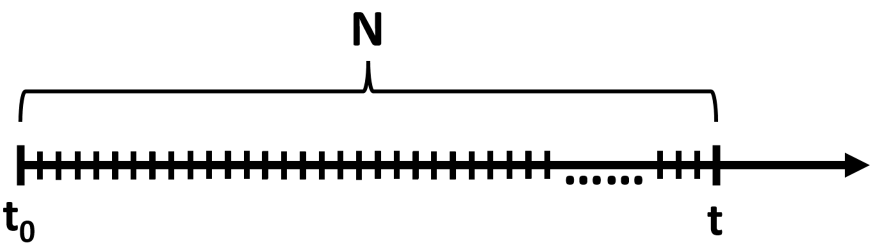
Уравнение Шредингера в таком случае записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& i\hbar\,\frac{\partial\,|\psi^{(S)}(t)\rangle}{\partial\,t} = \hat{H}^{(S)}(t)\,|\psi^{(S)}(t)\rangle \\
& |\psi^{(S)}(t=t_0)\rangle = |\psi_0\rangle
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

Для простоты также потребуем эрмитовости гамильтониана:

$$
\hat{H}^{(S)\dagger}(t) = \hat{H}^{(S)} \tag{9.22}
$$

Первое, что может прийти в голову, это разбить отрезок времени $[t_0,\, t]$ на N составляющих:



Тогда шаг по времени запишется так:

$$
\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{t - t_0}{N} \tag{9.23}
$$

В каждом их этих промежутков времени гамильтониан можно считать примерно постоянным и, тогда, для каждого их них можно записать оператор эволюции следующего вида:

$$
\hat{U}(t_{i+1},\, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}_i^{(S)}\,\Delta t} \tag{9.24}
$$

Далее, воспользовавшись групповым свойством оператора эволюции (9.8) и переходя к пределу $\Delta t \to 0$ получаем:

$$
\begin{aligned}
& \hat{U}(t,\, t_0) = \hat{U}(t,\, t_{N-1})\;.....\;\hat{U}(t_1,\, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}_N^{(S)}\,\Delta t}\;.....\;e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}_1^{(S)}\,\Delta t} = \\
& = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\,\hat{H}^{(S)}(\tau)}
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

Казалось бы вот оно решение, однако такая запись справедлива тогда и только тогда, когда гамильтониан коммутирует сам с собой в любые два момента времени:

$$\left[\hat{H}^{(S)}(t_i),\, \hat{H}^{(S)}(t_j)\right] = 0, \qquad \forall\, t_i,\, t_j \in [t_0,\, t]$$

Однако, как известно из курсов по квантовой электродинамике, поля различных фермионов и бозонов не коммутируют между собой в различные моменты времени, и соответственно гамильтонианы, составленные из этих полей, тоже не коммутируют в различные моменты времени. В таком случае правило перемножения операторных экспонент выражается при помощи бесконечного ряда:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}\,[\hat{A},\,\hat{B}]+\frac{1}{12}\left[\hat{A},\,[\hat{A},\,\hat{B}]\right]+\frac{1}{12}\left[[\hat{A},\,\hat{B}],\,\hat{B}\right]+\ldots} \tag{9.26}$$

То есть, в случае если операторы не коммутируют друг с другом, то записать оператор эволюции в виде (9.25) не получится.

Случай неэрмитового гамильтониана зависящего от времени.

Сформулируем задачу следующим образом:

$$\begin{aligned}
& i\hbar\,\frac{\partial\,|\psi^{(S)}(t)\rangle}{\partial\, t} = \hat{H}^{(S)}(t)\;|\psi^{(S)}(t)\rangle \\
& |\psi^{(S)}(t=t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \\
& \langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1 \\
& \hat{H}^{(S)\dagger}(t) \neq \hat{H}^{(S)}(t) \\
& \left[\hat{H}^{(S)}(t_i),\, \hat{H}^{(S)}(t_j)\right] \neq 0, \qquad \forall\, t_i,\, t_j \in [t_0,\, t]
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Также потребуем, что **гамильтониан $\hat{H}^{(S)}(t)$ – линейный оператор**.

Формально, решение данного уравнения (9.27) можем записать с помощью оператора эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$:

$$|\psi^{(S)}(t)\rangle = \hat{U}(t,\, t_0)\,|\psi_0\rangle \tag{9.28}$$

В момент времени $t = t_0$ решение переходит в следующее уравнение:

$$|\psi_0\rangle = \hat{U}(t,\, t_0)\,|\psi_0\rangle$$

Откуда, пользуясь тем, что вектор $|\psi_0\rangle$, вообще говоря, произвольный, получаем граничное условие:

$$\hat{U}(t_0,\, t_0) = \hat{1} \tag{9.29}$$

Подставляя решение (9.28) в уравнение Шредингера (9.27), и, пользуясь независимостью от времени начального вектора состояния $|\psi_0\rangle$, запишем:

$$i\hbar\, \frac{\partial\, \hat{U}(t,\, t_0)}{\partial\, t}\, |\psi_0\rangle = \hat{H}^{(S)}(t)\, \hat{U}(t,\, t_0)\, |\psi_0\rangle \tag{9.30}$$

Поскольку начальный вектор состояния $|\psi_0\rangle$ – произвольный, то данное уравнение (9.30) можно переписать в виде операторного уравнения вида:

$$i\hbar\, \frac{\partial\, \hat{U}(t,\, t_0)}{\partial\, t} = \hat{H}^{(S)}(t)\, \hat{U}(t,\, t_0) \tag{9.31}$$

с начальным условием (9.29).

Искать решение такого уравнения (9.31) можно двумя способами:

1) Найти точное решение уравнения Шредингера. Однако, как известно из курсов квантовой механики, не так много нестационарных уравнений Шредингера решается точно.

2) Решать данное уравнение (9.31) методами теории возмущений, раскладывая по некоторому малому параметру.

Будем решать это уравнение (9.31) формально, раскладывая оператор эволюции в бесконечный ряд по степеням гамильтониана $\hat{H}^{(S)}(t)$:

$$\hat{U}(t,\, t_0) = \hat{U}^{(0)}(t,\, t_0) + \hat{U}^{(1)}(t,\, t_0) + \ldots + \hat{U}^{(i)}(t,\, t_0) + \ldots \tag{9.32}$$

где слагаемое $\hat{U}^{(0)}(t,\, t_0)$ – не содержит гамильтониан, $\hat{U}^{(1)}(t,\, t_0)$ – содержит гамильтониан в первой степени, ..., $\hat{U}^{(1)}(t,\, t_0)$ – содержит гамильтониан в i-ой степени и т.д.

Если рассматривать такое решение с математической точки зрения, то вполне естественно задаться вопросом: сходится ли этот ряд (хотя бы условно или до какой-то степени гамильтониана)?

Ответа на такой вопрос нет, и, наверное, не может быть в принципе для такого рода задач. Поэтому будем подходить к решению не как математики, а как физики.

Предположим, что такое разложение (9.32) имеет смысл и можно искать оператор эволюции в рамках такой, достаточно общей, парадигмы.

Такая парадигма, в силу ее общности, будет верна не только для нестационарного уравнение Шредингера в представлении Шредингера, но и, например, для уравнения эволюции вектора состояния в представлении взаимодействия, куда входит только гамильтониан взаимодействия. Этот гамильтониан может нести (и, как правило, несет) в себе некий параметр малости – параметр взаимодействия, по которому и можно производить разложение. В таком случае, подобная задача точно имеет смысл, хотя, как известно из квантовой электродинамики, подобные ряды не сходятся абсолютно, а лишь асимптотически.

Тем не менее, асимптотические схождения таких рядов происходят в таких больших порядках теории возмущений, что соответствующие вклады пренебрежимо малы по сравнению с точностью современных (и, тех, что могут быть в обозримом будущем) экспериментов.

Вернемся к решению уравнения (9.27) и разложению (9.32). Распределим начальное условие (9.29), которое должно выполняться даже при отсутствии гамильтониана (свободная частица), между членами ряда (9.32) следующим образом:

$$\hat{U}^{(0)}(t_0,\, t_0) = \hat{1} \tag{9.33}$$

тогда для остальных членов справедливо

$$\hat{U}^{(i)}(t_0,\, t_0) = 0, \qquad \forall\, i \neq 0 \tag{9.34}$$

Теперь подставим решение в виде ряда (9.32) в уравнение (9.27). Очевидно, что равенство (9.27) в таком случае достигается в случае если равны коэффициенты справа и слева, содержащие одинаковую степень гамильтониана. Тогда, для произвольной степени гамильтониана справедливо:

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}^{(i)}(t,\, t_0)}{\partial\, t} = \hat{H}^{(S)}(t)\,\hat{U}^{(i-1)}(t,t_0) \tag{9.35}$$

где мы учли тот факт, что правая часть уравнения уже содержит гамильтониан $\hat{H}^{(S)}(t)$.

Таким образом, получили рекурентное уравнение, связывающее i-е и $(i-1)$-е слагаемые в ряду (9.32). Решим его пошагово:

1) $i = 0$, тогда:

$$i\hbar \, \frac{\partial \, \hat{U}^{(0)}(t,\, t_0)}{\partial \, t} = 0$$

поскольку нет члена, содержащего гамильтониан в отрицательной степени. Следовательно $\hat{U}^{(0)}(t,\, t_0)$ – постоянный оператор, который естественно равен:

$$\hat{U}^{(0)}(t,\, t_0) = \hat{U}^{(0)}(t_0,\, t_0) = \hat{1}$$

2) $i = 1$:

$$i\hbar \, \frac{\partial \, \hat{U}^{(1)}(t,\, t_0)}{\partial \, t} = \hat{H}^{(S)}(t)\, \hat{U}^{(0)}(t, t_0) = \hat{H}^{(S)}(t)$$

Проинтегрировав это выражение, получаем:

$$\hat{U}^{(1)}(t,\, t_0) = \hat{U}^{(1)}(t_0,\, t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \, \hat{H}^{(S)}(t_1) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \, \hat{H}^{(S)}(t_1)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\hat{U}^{(1)}(t_0,\, t_0) = 0$ (9.34). В дальнейшем, мы будем сразу опускать такие члены (9.34).

3) $i = 2$:

$$i\hbar \, \frac{\partial \, \hat{U}^{(2)}(t,\, t_0)}{\partial \, t} = \hat{H}^{(S)}(t)\, \hat{U}^{(1)}(t, t_0)$$

Производя формальное интегрирование и подставляя решение, полученное на предыдущем шаге, получаем:

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(2)}(t,\, t_0) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \, \hat{H}^{(S)}(t_2)\, \hat{U}^{(1)}(t_2,\, t_0) = \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1 \, \hat{H}^{(S)}(t_2)\, \hat{H}^{(S)}(t_1) \end{aligned} \tag{9.36}$$

Обратим внимание на две вещи. Во-первых, поскольку **гамильтонианы** в разные моменты времени **не коммутируют** между собой (9.27), **порядок их записи очень важен**, и определяется последовательностью промежутков времени ($t_2 \geqslant t_1$, следовательно сначала действует $\hat{H}^{(S)}(t_2)$, а затем $\hat{H}^{(S)}(t_1)$).

Во-вторых, верхний предел интегрирования по параметру t_1 – переменный, что не очень удобно.

4) $i = n$ – произвольное. Из структуры слагаемого, полученного на предыдущем шаге, уже понятно как будет выглядеть выражение в таком случае:

$$\hat{U}^{(n)}(t,\, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \int_{t_0}^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \,...\, \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_n)\, \hat{H}^{(S)}(t_{n-1}) \,...\, \hat{H}^{(S)}(t_1) \quad (9.37)$$

Теперь можем формально записать как выглядит оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$:

$$\hat{U}(t,\, t_0) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \,...\, \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_n) \,...\, \hat{H}^{(S)}(t_1) \quad (9.38)$$

Данное выражение не совсем удобно, поскольку требует четкого порядка следования гамильтонианов, относящихся к разным промежуткам времени. Также в нем отсутствуют какие-либо симметрии, которые могли бы упростить использование этого выражения в дальнейшем. Поэтому перепишем эту конструкцию, воспользовавшись хронологическим упорядочиванием.

Поясним, что такое "хронологическое упорядочивание"(или T-упорядочивание). Пусть $\hat{A}(t_1)$ и $\hat{B}(t_2)$ – зависящие от времени операторы, записанные в одном и том же представлении. Зададим упорядочивающий оператор $\hat{T}$ следующим образом:

$$\hat{T}\Big(\hat{A}(t_1)\,\hat{B}(t_2)\Big) = \begin{cases} t_1 \geqslant t_2: & \hat{A}(t_1)\,\hat{B}(t_2) \\ t_1 < t_2: & \begin{cases} +\hat{B}(t_2)\,\hat{A}(t_1) & \text{в случае бозевских операторов} \\ -\hat{B}(t_2)\,\hat{A}(t_1) & \text{в случае фермиевских операторов} \end{cases} \end{cases} \quad (9.39)$$

Теперь, прежде чем применить хронологическое упорядочивание к нашим гамильтонианам, необходимо установить какого они вида: бозевского или фермиевского.

Обычно, бозевские поля входят в гамильтониан в виде своих функций поля, а фермиевские в виде токов вида $\overline{\psi}(x)\,\Gamma\,\overline{\psi}(x)$ (здесь, $\overline{\psi}(x)$ – фермиевский оператор, а Γ – какой-то набор матриц Дирака, не путать с шириной распада). Но такого рода **бинарный оператор (ток)** хотя и состоит из двух фермиевских операторов, **является бозевским**. Поэтому гамильтониан в который входят фермионные токи и функции поля для бозевских частиц **всегда является бозевским оператором**.

То есть, для гамильтониана **хронологическое упорядочивание** всегда действует **со знаком плюс**.

Используя T-упорядочивание, перепишем формулу (9.38) в более симметричном виде:

$$\hat{U}(t,\,t_0) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_{n-1} \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{T}\left(\hat{H}^{(S)}(t_n)\,\hat{H}^{(S)}(t_{n-1})\ldots \hat{H}^{(S)}(t_1)\right) \tag{9.40}$$

Заметим, что в этой записи интегрирование по каждой из переменных t_1, ..., t_n ведется по всему диапазону $[t_0,\,t]$ в отличие от (9.38). Благодаря этому и T-упорядочиванию нам не важен порядок интегрирования и расстановки гамильтонианов. И для того чтобы такая запись была верной, мы ввели дополнительный множитель $\frac{1}{n!}$.

Покажем правильность формулы (9.40) на простом примере. Рассмотрим слагаемое $\hat{U}^{(2)}(t,\,t_0)$:

$$\hat{U}^{(2)}(t,\,t_0) = \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{T}\left(\hat{H}^{(S)}(t_2)\,\hat{H}^{(S)}(t_1)\right) \tag{9.41}$$

Теперь рассмотрим плоскость с осями t_1 и t_2 и нарисуем область интегрирования ($[t_0,\,t]$ по каждой переменной) (Рис. 9.1). Далее нарисуем диагональ, соответствующую соотношению $t_1 = t_2$. Заметим, что в области под диагональю всегда выполнено $t_1 > t_2$, а в области над ней – $t_1 < t_2$. Тогда область интегрирования разбивается на две области (под и над диагональю), в которых T-упорядочивание работает по-разному.

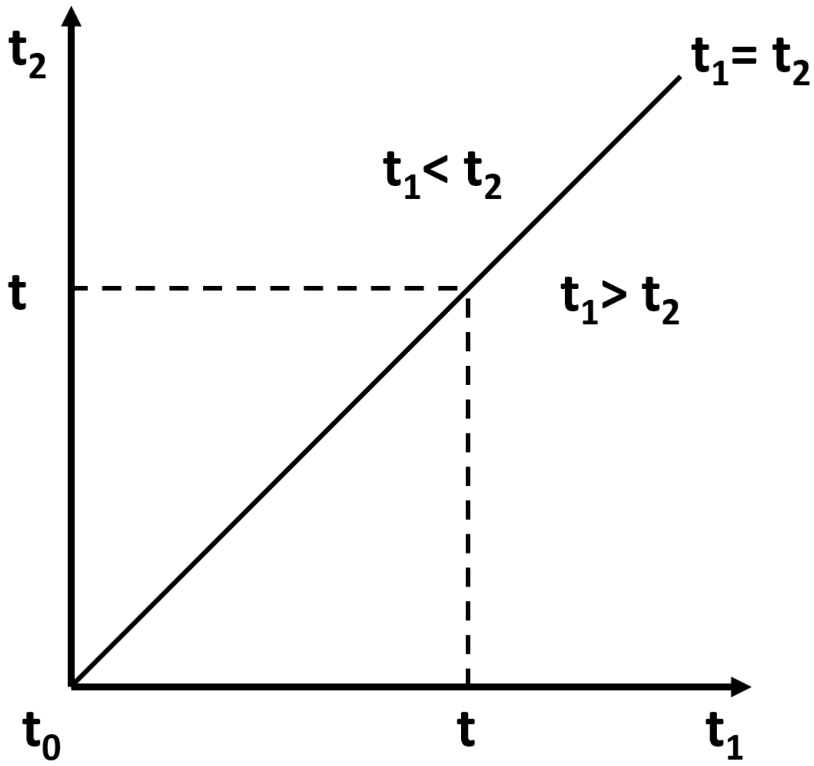


Рис. 9.1. Область интегрирования в выражении (9.41).

Разделим интегрирование в выражении (9.41) на две области, согласно (Рис. 9.1):

$$\hat{U}^{(2)}(t,\, t_0) = \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{T}\Big(\hat{H}^{(S)}(t_2)\, \hat{H}^{(S)}(t_1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left(\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_2)\, \hat{H}^{(S)}(t_1)\right]_{t_1<t_2} + \right. \tag{9.42}$$

$$\left. + \left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \hat{H}^{(S)}(t_1)\, \hat{H}^{(S)}(t_2)\right]_{t_1>t_2}\right)$$

Поскольку t_1 и t_2 с математической точки зрения лишь переменные интегрирования, то их можно переобозначать каким угодно образом. Переобозначим их следующим образом: $t_1 \leftrightarrow t_2$. Тогда

$$\hat{U}^{(2)}(t,\, t_0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left(\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \hat{H}^{(S)}(t_1)\, \hat{H}^{(S)}(t_2)\right]_{t_2<t_1} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_2)\, \hat{H}^{(S)}(t_1)\right]_{t_2>t_1}\right)$$

Сравнивая слагаемые в этом выражении после переобозначения легко видеть что они равны. Отсюда получаем:

$$\hat{U}^{(2)}(t,\, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_2)\, \hat{H}^{(S)}(t_1) \tag{9.43}$$

что в точности равно полученному ранее выражению (9.36).

Для слагаемых более высокого порядка доказательство проводится аналогично.

Продолжим преобразование формулы (9.40). Поскольку интегрирование линейная операция, а хронологическое упорядочивание сохраняет линейные операции, можно переписать выражение (9.40) в еще более красивом виде:

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t,\, t_0) &= \hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{T}\left(\hat{H}^{(S)}(t_n) \ldots \hat{H}^{(S)}(t_1)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_n) \ldots \hat{H}^{(S)}(t_1)\right) = \\
&= \hat{T}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, \hat{H}^{(S)}(\tau)}\right)
\end{aligned} \tag{9.44}$$

при условии $t \geqslant t_0$.

Лекция 10. Решение нестационарного уравнения Шредингера (Часть 2).

Свойства оператора $\hat{U}(t,\, t_0)$.

Изучим свойства полученного ранее оператора $\hat{U}(t,\, t_0)$ (9.44):

1) Начальное условие

$$\hat{U}(t_0,\, t_0) = \hat{1} \tag{10.1}$$

2) Групповое свойство:

$$\hat{U}(t,\, t_1)\, \hat{U}(t_1,\, t_0) = \hat{U}(t,\, t_0) \tag{10.2}$$

При этом, здесь, даже не важно как между собой соотносятся t, t_1 и t_0, поскольку хронологическое упорядочивание в выражении (9.44) нужным образом все расставит.

Докажем групповое свойство. Нам известно, что оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению (9.31) с начальным условием (10.1).

Введем некоторый оператор $\hat{A}(t,\, t_1,\, t_0)$ следующим образом:

$$\hat{A}(t,\, t_1,\, t_0) = \hat{U}(t,\, t_1)\, \hat{U}(t_1,\, t_0) \tag{10.3}$$

и продифференцируем его по аргументу t. Поскольку аргументы t, t_1 и t_0 независимы, получим:

$$\begin{gathered} i\hbar\, \frac{\partial\, \hat{A}(t,\, t_1,\, t_0)}{\partial\, t} = \left(i\hbar\, \frac{\partial\, \hat{U}(t,\, t_1)}{\partial\, t} \right) \hat{U}(t_1,\, t_0) = \\ = \hat{H}^{(S)}(t)\, \hat{U}(t,\, t_1)\, \hat{U}(t_1,\, t_0) = \hat{H}^{(S)}(t)\, \hat{A}(t,\, t_1,\, t_0) \end{gathered} \tag{10.4}$$

где мы воспользовались выражениями (9.31) и (10.3).

Начальным условием для нашего дифференциального уравнения является

$$t = t_0 \implies t_1 = t_0$$

поскольку $t_1 \in [t_0,\, t]$.

Тогда

$$\hat{A}(t_0,\, t_0,\, t_0) = \hat{U}(t_0,\, t_0)\, \hat{U}(t_0,\, t_0) = \hat{1}\; \hat{1} = \hat{1} \tag{10.5}$$

Таким образом, оператор $\hat{A}(t,\, t_1,\, t_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.4) с начальным условием (10.5). Но абсолютно такому же уравнению удовлетворяет оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ (9.31) с тем же самым начальным условием (10.1). В силу единственности решения дифференциального уравнения с одним и тем же начальным условием следует, что

$$\hat{A}(t,\, t_1,\, t_0) \equiv \hat{U}(t,\, t_0)$$

что доказывает групповое свойство (10.2).

3)

$$\hat{U}^{-1}(t,\, t_0) = \hat{U}(t_0,\, t) \tag{10.6}$$

Докажем это по определению. Используя групповое свойство, запишем

$$\hat{U}(t_0,\, t)\, \hat{U}(t,\, t_0) = \hat{U}(t_0,\, t_0) = \hat{1} \tag{10.7}$$

С другой стороны, по определению обратного оператора справедливо

$$\hat{U}^{-1}(t,\, t_0)\, \hat{U}(t,\, t_0) = \hat{1} \tag{10.8}$$

Сравнивая (10.7) и (10.8) убеждаемся в правильности (10.6). Также можно сделать следующий вывод:

$$\hat{U}^{-1}(t_0,\, t_0) = \hat{U}(t_0,\, t_0) = \hat{1} \tag{10.9}$$

Уравнение для $\hat{U}(t_0,\, t)$, его решение и антихронологическое произведение.

Узнаем какому уравнению подчиняется оператор $\hat{U}(t_0,\, t)$ (или $\hat{U}^{-1}(t,\, t_0)$) и решим его.

Домножим левую и правую части выражения (10.7) на $i\hbar$ и продифференцируем:

$$\left(i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}(t_0,\, t)}{\partial\, t}\right)\,\hat{U}(t,\, t_0)+\hat{U}(t_0,\, t)\,\left(i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}(t,\, t_0)}{\partial\, t}\right)=0 \tag{10.10}$$

Используя уравнение для $\hat{U}(t,\, t_0)$ (9.31) преобразуем второе слагаемое в (10.10), получим:

$$\left(i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}(t_0,\, t)}{\partial\, t}+\hat{U}(t_0,\, t)\,\hat{H}^{(S)}(t)\right)\,\hat{U}(t,\, t_0)=0 \tag{10.11}$$

Домножив это уравнение (10.11) на $\hat{U}^{-1}(t,\, t_0)$ (поскольку выражение (10.11), в которое входит оператор $\hat{U}(t_0,\, t)$ имеет смысл, то и оператор $\hat{U}^{-1}(t,\, t_0)=\hat{U}(t_0,\, t)$ тоже существует), запишем:

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}(t_0,\, t)}{\partial\, t}=-\hat{U}(t_0,\, t)\,\hat{H}^{(S)}(t) \tag{10.12}$$

Таким образом, мы получили уравнение для $\hat{U}(t_0,\, t)$.

Сравнивая его (10.12) с уравнением для $\hat{U}(t,\, t_0)$ (9.31), видим, что гамильтониан и оператор эволюции переставлены местами, а также появился знак минус.

Уравнение (10.12) будет иметь уже знакомое начальное условие:

$$\hat{U}(t_0,\, t=t_0)=\hat{U}(t_0,\, t_0)=\hat{1} \tag{10.13}$$

Решение этого уравнения, как и в прошлый раз, представим в виде ряда по степеням гамильтониана:

$$\hat{U}(t_0,\, t)=\hat{U}^{(0)}(t_0,\, t)+\hat{U}^{(1)}(t_0,\, t)+.....+\hat{U}^{(i)}(t_0,\, t)+..... \tag{10.14}$$

с начальными условиями вида:

$$\begin{aligned}&\hat{U}(t_0,\, t=t_0)=\hat{1}\\ &\hat{U}^{(i)}(t_0,\, t=t_0)=0, \qquad \forall\, i\neq 0\end{aligned} \tag{10.15}$$

После подстановки ряда (10.14) в уравнение (10.12) получится итерационное уравнение, связывающее i и $i-1$ члены ряда:

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}^{(i)}(t_0,\,t)}{\partial\,t}=-\hat{U}^{(i-1)}(t_0,\,t)\,\hat{H}^{(S)}(t) \tag{10.16}$$

Как и в случае с уравнением (9.35) решаем его итерационно:

1) $i=0$:

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}^{(0)}(t_0,\,t)}{\partial\,t}=0\implies\hat{U}^{(0)}(t_0,\,t)=\hat{U}^{(0)}(t_0,\,t_0)=\hat{1}$$

2) $i=1$:

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}^{(1)}(t_0,\,t)}{\partial\,t}=-\hat{U}^{(0)}(t_0,\,t)\,\hat{H}^{(S)}(t)=\hat{H}^{(S)}(t)$$

После интегрирования с учетом начальных условий (10.15) получим:

$$\hat{U}^{(1)}(t_0,\,t)=+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,\hat{H}^{(S)}(t_1)$$

3) $i=2$:

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\hat{U}^{(2)}(t_0,\,t)}{\partial\,t}=-\hat{U}^{(1)}(t_0,\,t)\,\hat{H}^{(S)}(t)\implies$$

$$\implies\hat{U}^{(2)}(t_0,\,t)=\left(+\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_1\,\hat{H}^{(S)}(t_1)\,\hat{H}^{(S)}(t_2)$$

Сравнивая с (9.36) видим, что из-за того, что в уравнении оператор эволюции стоит раньше чем гамильтониан, в результате итерационной процедуры гамильтониан с большим моментом времени стоит правее чем гамильтониан с меньшим. То есть, теперь, гамильтониан, у которого момент времени больше, раньше будет действовать на вектор состояния. Таким образом, вместо хронологического упорядочивания здесь действует **антихронологическое**.

4) $i = n$ – произвольное

$$\hat{U}^{(n)}(t_0,\, t) = +\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \int_{t_0}^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \ldots \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_1) \ldots \hat{H}^{(S)}(t_{n-1})\, \hat{H}^{(S)}(t_n) \quad (10.17)$$

Введем оператор **антихронологического произведения** $\hat{T}_a$ противоположным по отношению к хронологическому (9.39) образом:

$$\hat{T}_a\Big(\hat{A}(t_1)\, \hat{B}(t_2)\Big) = \begin{cases} t_1 \geqslant t_2 : & \begin{cases} +\hat{B}(t_2)\, \hat{A}(t_1) & \text{в случае бозевских операторов} \\ -\hat{B}(t_2)\, \hat{A}(t_1) & \text{в случае фермиевских операторов} \end{cases} \\ t_1 < t_2 : & \hat{A}(t_1)\, \hat{B}(t_2) \end{cases} \quad (10.18)$$

Выражение (10.17) также не удобно тем, что требует четкого порядка следования гамильтонианов и отсутствием симметрий. Перепишем эту конструкцию, воспользовавшись антихронологическим произведением:

$$\hat{U}^{(n)}(t_0,\, t) = +\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_{n-1} \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{T}_a\left(\hat{H}^{(S)}(t_1) \ldots \hat{H}^{(S)}(t_{n-1})\, \hat{H}^{(S)}(t_n)\right) \quad (10.19)$$

Это выражение доказывается аналогично тому, как это было сделано в случае хронологического произведения.

Аналогично (9.40) запишем $\hat{U}(t_0,\, t)$:

$$\hat{U}(t_0,\, t) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{T}_a\Big(\hat{H}^{(S)}(t_1)\, \hat{H}^{(S)}(t_n)\Big) \quad (10.20)$$

В силу линейности антихронологического произведения можем провести следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_0,\, t) &= \hat{T}_a\left(\hat{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}^{(S)}(t_1)\, \hat{H}^{(S)}(t_n)\right) = \\ &= \hat{T}_a\left(e^{+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, \hat{H}^{(S)}(\tau)}\right) \end{aligned} \quad (10.21)$$

при $t \geqslant t_0$.

Это же выражение справедливо и для оператора $\hat{U}^{-1}(t,\, t_0)$, поскольку $\hat{U}(t_0,\, t) = \hat{U}^{-1}(t,\, t_0)$.

Поскольку переменные t и t_0 лишь переменные интегрирования (с математической точки зрения), то можем произвести следующую перестановку $t_0 \leftrightarrow t$ и записать:

$$\hat{U}(t,\, t_0) = \hat{T}_a\left(e^{+\frac{i}{\hbar}\int_t^{t_0} \mathrm{d}\tau\, \hat{H}^{(S)}(\tau)}\right) = \hat{T}_a\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, \hat{H}^{(S)}(\tau)}\right) \tag{10.22}$$

при $t \leqslant t_0$.

Таким образом, мы определили оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ и в случае $t \geqslant t_0$ (9.44), и в случае $t \leqslant t_0$ (10.22).

Задача: запишите выражение для $\hat{U}(t_0,\, t)$ при $t \leqslant t_0$.

Изучение оператора $\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)$.

Если гамильтонан $\hat{H}^{(S)}(t)$ был бы эрмитовым, то оператор эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ был бы унитарным, и $\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0) = \hat{U}^{-1}(t,\, t_0)$. Однако в нашем случае это не так. Как в таком случае выглядит оператор $\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)$?

Для начала составим уравнение для оператора $\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)$. Это уравнение представляет собой эрмитово сопряженное (9.31):

$$i\hbar\, \frac{\partial\, \hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)}{\partial\, t} = -\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)\, \hat{H}^{(S)\dagger}(t) \tag{10.23}$$

где мы перенесли знак минус вправо и воспользовались свойством $\left(\hat{A}\,\hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$.

Эрмитово сопрягая начальное условие (10.1) получаем начальное условия для уравнения (10.23):

$$\hat{U}^{\dagger}(t_0,\, t_0) = \hat{1} \tag{10.24}$$

Это уравнение аналогично по структуре уравнению (10.12) с аналогичным начальным условием (10.13). Пользуясь этим сходством напишем решение для уравнения (10.24) произведя соответствующие замены $\hat{U}(t_0,\, t) \to \hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)$ и $\hat{H}^{(S)}(t) \to \hat{H}^{(S)\dagger}(t)$ в уже полученном решении (10.21):

$$\hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0) = \hat{T}_a\left(e^{+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\, \hat{H}^{(S)\dagger}(\tau)}\right) \tag{10.25}$$

при $t \geqslant t_0$.

Сравнивая выражения (9.44) и (10.25) можно сделать вывод о том, как преобразуется оператор хронологического произведения при эрмитовом сопряжении:

$$\left[\hat{T}(\hat{O}(t))\right]^\dagger = \hat{T}_a(\hat{O}^\dagger(t)) \tag{10.26}$$

где $\hat{O}(t)$ – некоторый оператор.

Задача 1: как преобразуется выражение $\left[\hat{T}_a(\hat{O}(t))\right]^\dagger$?

Задача 2: записать оператор $\hat{U}^\dagger(t,\, t_0)$ при $t \leqslant t_0$.

Сравнивая выражения (9.44), (10.21) и (10.25), обратим внимание на то, что если **гамильтониан неэрмитов** $\hat{H}^{(S)\dagger}(t) \neq \hat{H}^{(S)}(t)$, то

$$\hat{U}^\dagger(t,\, t_0) \neq \hat{U}^{-1}(t,\, t_0)$$

$$\hat{U}^\dagger(t,\, t_0) \neq \hat{U}(t_0,\, t)$$

что говорит о неэрмитовости оператора эволюции и необратимости процесса эволюции.

Равенства достигаются только в случае эрмитовости гамильтониана.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ