МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ

ДЬЯЧЕНКО
МИХАИЛ ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Семинар 1. Мощность множеств

Мощность множеств

Задачи, рассматриваемые на семинарах, можно найти в книге «Действительный анализ в задачах»[1].

Помимо всем известных операций *пересечения* $\cap$, *объединения* $\cup$ и разности $\setminus$ будем использовать *дизъюнктное объединение*:

$$C = A \bigsqcup B \iff \begin{cases} C = A \cup B; \\ A \cap B = \varnothing. \end{cases}$$

Кроме этого, нам понадобится *симметрическая разность*:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Определение 1.1. Говорят, что мощность множества A *равна мощности множества* B, то есть[2]

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}},$$

тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение

$$\varphi: \ A \leftrightarrow B. \tag{1}$$

Очевидно, что в случае, когда множество конечно, его мощностью можно назвать число его элементов.

Определение 1.2. Множество A – *счетное*[3] $\iff$ $A \sim \mathbb{N}$.

Определение 1.3. Множество A *имеет мощность континуум*, то есть

$$\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c},$$

тогда и только тогда, когда

$$A \sim [0, 1].$$

Скажем пару слов о *континуум-гипотезе*. Грубо говоря, это гипотеза о том, что если множество лежит на отрезке $[0, 1]$ и не является счетным, оно имеет мощность континуум. Ее долгое время пытались доказать, исходя из других аксиом. Только в шестидесятые годы пришли к выводу, что эта гипотеза не выводится из прочих аксиом, и ее надо либо принимать, либо не принимать.

[1] П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченк М.И.

[2] Иногда также говорят A эквивлентно B, то есть

$$A \sim B,$$

или что A и B *равномощны*.

[3] Помимо этого, мы будем пользоваться термином *не более чем счетное* множество, означающим, что множество счетно либо конечно.

Задача 1

Задача 1.1. *Имеется набор* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, *причем*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Для $\forall\ i$ A_i *не более, чем счетно.*

Показать, что $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *тоже не более, чем счетно.*

Решение. Обозначим множество элементов i-го множества

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}, \ldots\}.$$

Для доказательства достаточно расположить элементы множеств A_i в виде таблицы и затем просто перенумеровать в последовательную цепочку (рис. 1.1).[4]

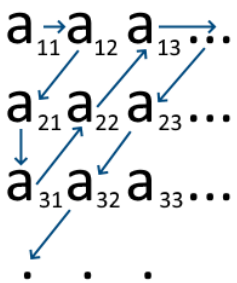

Рис. 1.1. Иллюстрация к доказательству задачи 1.1

Задача 2

Задача 1.2. *Пусть* A *– бесконечно, а* B *– не более, чем счетно, причем*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Доказать, что

$$\overline{\overline{A \bigsqcup B}} = \overline{\overline{A}}.$$

Доказательство. Возьмем подмножество $C \subseteq A$ такое, что

$$\overline{\overline{C}} = \mathbb{N}.$$

Обозначим[5]

$$C = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad B = \{B_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

[4]Следует обратить внимание на этот метод доказательства. В дальнейшем он еще понадобится.
[5]Считаем, что B счетное, так как это более общий случай.

Для доказательства достаточно записать отображение (1):

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus C, \\ c_{2i}, & x = b_i, \\ c_{2i+1}, & c_i. \end{cases}$$

□

Замечание. Доказанное выше, в частности, показывает, что

$$[0,1] \sim [0,1).$$

Задача 3

Задача 1.3. *Пусть дано отображение*

$$\varphi: \ [0,1] \leftrightarrow [0,1).$$

Может ли при этом φ или φ^{-1} быть непрерывной функцией?

Решение. Предположим, что обратное отображение непрерывно, то есть

$$\psi = \varphi^{-1} \in C\left([0,1)\right).$$

Тогда существуют точки a и b такие, что

$$\psi(a) = 0, \quad \psi(b) = 1.$$

Для определенности предположим, что $b \neq 0$.

Возьмем произвольную окрестность точки b $(b-\delta, b+\delta)$. В этой окрестности значения ψ будут меньше 1 (по определению, так как предполагаем ее непрерывность). Тогда для какого-то близкого к 1 значения α уравнение

$$\psi(x) = \alpha$$

будет иметь решение как на $[b-\delta, b]$, так и на $[b, b+\delta]$. Так как $\alpha < 1$, получим, что эта точка имеет два прообраза.

Получили противоречие.

Задача 4

Задача 1.4. *Рассмотрим множество последовательностей*

$$A = \{(a_1, a_2, \ldots)\}$$

таких, что $a_i = 0$ или $a_i = 1$ и нет 1 в периоде[6].

Доказать, что $A \sim [0,1)$.

[6]Нет места, начиная с которого последовательность состоит только из единиц

Доказательство. Поставим в соответствие полуинтервалу $[0,1)$ множество A следующим образом. Разделим $[0,1)$ на два равных полуинтервала. Если точка из $[0,1)$ попала в левый интервал, пишем 0, если в правый – 1. Далее повторяем данную процедуру.

Докажем, что получившееся отображение является биекцией. Для двух разных точек на $[0,1)$ на некотором шаге k длина текущего интервала станет меньше, чем расстояние между ними, и, следовательно, в последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ значения a_k для них будут разными.

Обсудим требование отсутствие 1 в периоде в последовательностях из A. В обратную сторону, любая точка полуинтервала $[0,1)$ представима в виде ряда

$$x = a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Предположим, что для некоторой точки существуют две разных последовательности:

$$x = a_1' \cdot \frac{1}{2} + a_2' \cdot \frac{1}{4} + \ldots + a_n' \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Тогда разность этих двух представлений равна 0, то есть

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} (a_i - a_i')\, 2^{-i} = 0.$$

Сумма в левой части по модулю меньше или равна $1/2$, причем равенство достигается, если все $a_i - a_i' = -1$, то есть для всех i $a_i = 0$ и $a_i' = 1$. Поскольку такого быть не может, получаем противоречие. Каждая точка x представима в виде ряда единственным образом. $\square$

Замечание. Иногда удобнее будет пользоваться множеством

$$B = \{\text{любые последовательности из 0 и 1}\}.$$

Мощность B тоже континуум. Действительно, от множества A B отличается только последовательностями, где с n-го места стоят только 1 ($\forall\ n$). Для каждого n таких последовательностей 2^{n-1}. Всего получается счетное объединение конечных множеств, то есть счетное множество. Прибавление к континууму A счетного множества не влияет на его мощность.

Перед тем, как перейти к следующей задаче, вспомним формулировку следующей теоремы[7].

Теорема 1.1. *(Кантора – Бернштейна) Пусть для некоторых множеств A, B справедливо:*

$$\begin{cases} A \sim B_1 \subset B, \\ B \sim A_1 \subset A. \end{cases}$$

Тогда $A \sim B$.

Решим следующую задачу без использования теоремы 1.1.

[7] Данная теорема часто используется для установления эквивалентности.

Задача 5

Задача 1.5. *Рассмотрим множество*

$$D = \{(n_1, n_2, \ldots), \quad n_k \in \mathbb{N}\}$$

Доказать, что

$$\overline{\overline{D}} = \mathfrak{c}.$$

Доказательство. Поставим в соответствие элементам множества D последовательности 0 и 1, где на местах n_1, n_1+n_2, $n_1+n_2+n_3$ стоят 0, а остальные места заполнены 1:

$$\begin{array}{ccccccc} & n_1 & & n_1+n_2 & & n_1+n_2+n_3 & \\ (1\ldots1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots) \end{array}$$

Таким образом, мы вложим множество D в множество последовательностей без 1 в периоде (см. предыдущую задачу). Обратное вложение тоже верно – вычитая последовательно номера 0 в каждой такой последовательности, будем получать соответствующего вида элемент из D. □

Домашнее задание 1.1. *Доказать, что*

$$\overline{\overline{C\left([0,1)\right)}} = \mathfrak{c}.$$

Домашнее задание 1.2. *Пусть $M\left([0,1)\right)$ – множество всех монотонно неубывающих функций на $[0,1)$. Доказать, что*

$$\overline{\overline{M\left([0,1)\right)}} = \mathfrak{c}.$$

Задача 6

Вспомним, что мощность прямой $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ континуум.

Задача 1.6. *Доказать, что мощность множества всех функций на отрезке равна $2^{\mathfrak{c}}$.*

Доказательство. Возьмем характеристические функции всех подмножеств отрезка. Мощность их объединения $2^{\mathfrak{c}}$. Таким образом, показали, что мощность множества всех функций не меньше, чем $2^{\mathfrak{c}}$.

Покажем теперь, что мощность не больше. Так как

$$\mathfrak{c} \sim 2^{\mathbb{N}},$$

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \sim \left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathfrak{c}} \sim 2^{\mathbb{N}\cdot\mathfrak{c}},$$

а

$$\mathbb{N}\cdot\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} \sim \mathfrak{c}.$$

Можно пойти другим путем. Каждая функции в соответствие можем поставить ее график на плоскости. Плоскость имеет мощность $\mathfrak{c}$, а значит, подмножеств плоскости не больше, чем $2^{\mathfrak{c}}$. □

Задача 7

Задача 1.7. *Пусть дано* $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *для любого* i

$$\overline{\overline{A_i}} = \mathfrak{C}.$$

Доказать, что

$$\overline{\overline{\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i}} = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно разбить интервал $(0, 1)$ на части с границами $1/2$, $1/3$ и так далее,

$$A_i = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

□

Задача 8

Задача 1.8. *Рассмотрим множество*

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$

где $\forall\ i$

$$a_i \in A_i, \quad \overline{\overline{A_i}} = \mathfrak{C}.$$

Доказать, что

$$\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Поставим в соответствие каждому числу a_i его двоичное представление

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots$$

Теперь можем записать элемент множества A в виде таблицы и поставить ей в соответствие единую последовательность из 0 и 1 (рис. 1.1).

Обратно, имея последовательность из 0 и 1, можем «раскрутить» ее с помощью (рис. 1.1). □

Домашнее задание 1.3. *Доказать, что если*

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \mathfrak{C},$$

то $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}$ *или* $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{C}$.

Задача 9

На плоскости назовем буквой O окружность произвольного радиуса и с произвольным центром. Довольно тривиально, что на плоскости можно расположить континуум попарно непересекающихся букв O.

Назовем буквой Г два перпендикулярных отрезка, проведенных из одной точки. Аналогично, на плоскости можно расположить континуум букв Г[8].

Задача 1.9. *Назовем буквой A треугольник, две стороны которого, выходящие из одной вершины, продлены за основание (то есть геометрическую фигуру, выглядящую, как буква A).*

Доказать, что таких попарно непересекающихся фигур на плоскости счетное множество.

Доказательство. Выберем две точки с рациональными координатами внутри треугольника буквы A (p_1, q_1) и между «ножек» (p_2, q_2). У двух разных фигур обе выбранные точки могу совпасть только тогда, когда одна буква A вложена в другую. Следовательно, у всех фигур наборы (p_1, q_1, p_2, q_2) различны. Поскольку значения координат рациональны, таких наборо не более чем счетное множество. $\square$

Домашнее задание 1.4. *Пусть*

$$f: \ (0,1) \to \mathbb{R}$$

такая, что $\forall\ x \in (0,1)\ \exists\ \delta = \delta(x) > 0$ *такое, что* $\forall\ t \in (x-\delta, x+\delta)$ *имеем* $f(x) \geq f(t)$.

Доказать, что образ интервала $f(0,1)$ не более, чем счетный.

Домашнее задание 1.5. *Построить функцию f на $(0,1)$, удовлетворяющую условиям предыдущей задачи, такую, что $f(0,1)$ – счетное множество.*

[8]Можно показать, что континуум букв T, то есть отрезков, расположенных в виде буквы T, расположить уже не получится.

Семинар 2. Метрическое пространство

Разбор домашних заданий

Разберем сначала решение некоторых задач, заданных на дом.

Домашнее задание 1.3. *Доказать, что если*

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \mathfrak{c},$$

то $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$ *или* $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Надо найти отображение

$$\varphi: \ A \bigsqcup B \leftrightarrow [0,1]^2.$$

Возможны два случая.

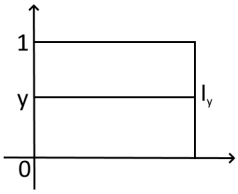

Рис. 1.1. Множество I_y

1 $\forall$ отрезка $I_y = [0,1] \times \{y\}$, $y \in [0,1]$ (рис. 1.1)

$$\varphi(A) \cap I_y \neq \emptyset.$$

Тогда понятно, что в A существует подмножество мощности континуум. Действительно,

$$\forall y \leftrightarrow x_y \in A: \ \varphi(x_y) = y,$$

тогда

$$\{x_y\}_{y \in [0,1]} = A_1 \subseteq A$$

и $\overline{\overline{A_1}} = \mathfrak{c}$.

2 Допустим теперь, что

$$\exists y_0: \ \varphi(A) \cap I_{y_0} = \emptyset.$$

Это значит, что

$$\varphi^{-1}(I_{y_0}) = B_1 \subseteq B,$$

откуда следует, что

$$\overline{\overline{B_1}} = \mathfrak{c},$$

а значит, и

$$\overline{\overline{B}} = \mathfrak{c}.$$

□

Домашнее задание 2.1. *Пусть*

$$\overline{\overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \mathfrak{C}.$$

Доказать, что $\exists\ n_0$ *такой, что*

$$\overline{\overline{A_{n_0}}} = \mathfrak{C}.$$

Домашнее задание 1.4. *Пусть*

$$f:\ (0,1) \to \mathbb{R}$$

такая, что $\forall\ x \in (0,1)\ \exists\ \delta = \delta(x) > 0$ *такое, что* $\forall\ t \in (x-\delta, x+\delta)$ *имеем* $f(x) \geq f(t)$.

Доказать, что

$$|Imf| \leq \mathbb{N}.$$

Решение. Пусть A – прообраз функции f. Выберем некоторое значение функции f и одну точку x из множества прообразов функции, соответствующую этому значению. Рассмотрим окрестность $(r_1(x), r_2(x))$ точки x такую, что границы ее будут рациональными числами. При этом

$$\forall t \in (r_1(x), r_2(x))\ f(t) \leq f(x).$$

Возьмем теперь $z \in A$. Если $z \neq x$, то

$$(r_1(x), r_2(x)) \neq (r_1(z), r_2(z))\,.$$

Действительно, предположим противное. Тогда

$$r_1(x) = r_1(z) < z, x < r_2(x) = r_2(z).$$

Тогда, с одной стороны,

$$f(z) \leq f(x),$$

а с другой стороны,

$$f(x) \leq f(z),$$

откуда $x = z$.

Пространства (M, ρ) и $(L, \|\cdot\|)$

Пара (M, ρ) – *метрическое пространство*, где

$$\rho:\ M \times M \to [0, +\infty)$$

такая, что

1 $\rho(x,y)=0 \iff x=y$;

2 $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x,y\in M$;

3 $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y,zinM$.

Заметим, что свойства одного и того же пространства на разных метриках ρ могут значительно отличаться.

Можно сказать, промежуточное положение между $\mathbb{R}^n$ и (M,ρ) занимает *линейное нормированное пространство* $(L,\|\cdot\|)$. Будем рассматривать два варианта: поле $K=\mathbb{R}$ или $K=\mathbb{C}$. Функция же

$$\|\cdot\|:\ L\to[0,+\infty),$$

именуемая *нормой*, должна обладать следующими свойствами:

1 $\|x\|=0 \iff x=0$;

2 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,\ \forall\lambda\in K,\ \ \forall x\in L$;

3 $\|xy\|\le\|x\|\|y\|,\ \forall x,y\in L$.

Замечание. Заметим, что, если мы положим

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,$$

полученная функция будет удовлетворять требованиям для метрики[9].

Замечание. Норму в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно выбрать различными способами. На свойства сходимости это не влияет.

С точки зрения геометрии, разные нормы будут обладают разными свойствами:

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$

$$\|x\|=|x_1|+|x_2|,$$

$$\|x\|=\max\left(|x_1|,|x_2|\right).$$

Эти нормы представляют собой различные геометрические фигуры на плоскости $\mathbb{R}^2$.

На метрическом пространстве M введем также понятия *открытого* $B_r(x)$ и *замкнутого* $\overline{B}_r(x)$ шара. В связи с этим возникает понятие *открытого* множества, то есть множества, содержащего в окрестности любой своей точки некий шар, и *закрытого* множества, которое можно определить как дополнение к открытому. Последнее, вспомним понятие *операции замыкания*, то есть добавления к множеству его предельных точек.

[9] Линейное нормированное пространство L представляет собой частный случай метрического пространства M. В общем же случае случае свойства метрического пространства могут существенно отличаться от свойства конечномерных пространств.

Задача 1

Задача 2.1. *Понять, в каком отношении находятся замыкание открытого шара $\overline{B_r(x)}$ и замкнутый шар $\overline{B}_r(x)$.*

Решение. Рассмотрим открытый шар $B_1(x)$. Его замыкание будет состоять всего из одной точки:

$$\overline{B_1(x)} = \{0\}$$

Замкнутый же шар

$$\overline{B}_1(x) = \{0, 1\}$$

Покажем, что есть включение

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{B}_r(x).$$

Это следует из соотношений с замыканиями:

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{\overline{B}_r(x)} = \overline{B}_r(x),$$

поскольку расширение замкнутого шара могло произойти только за счет точки, расстояние до которой от x строго больше r. Однако у такой точки найдется окрестность, не пересекающаяся с $\overline{B}_r(x)$, и значит, в замыкание она не войдет.

Домашнее задание 2.2. *Доказать, что в линейном нормированном пространстве*

$$\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x).$$

Задача 2

Задача 2.2. *Известно, что для двух шаров выполнено соотношение*

$$B_r(x) \subseteq B_R(y).$$

Следует ли из этого, что $r \leq R$?

Решение. Возьмем для примера шар $B_{3/2}(-1)$ и $B_{5/4}(0)$. Для них

$$B_{3/2}(-1) = \{-1, 0\} \subset B_{5/4}(0) = \{-1, 0, 1\},$$

в то время как

$$3/2 > 5/4.$$

Домашнее задание 2.3. *Доказать, что если в линейном нормированном пространстве*

$$B_r(x) \subseteq B_R(y),$$

то

$$r \leq R.$$

Полное метрическое пространство

Определение 2.1. Метрическое пространство (M, ρ) называется *полным* тогда и только тогда, когда любая фундаментальная[10] последовательность в (M, ρ) имеет предел.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C([0,1])$. Хорошо известна его норма, определенная как

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Данное пространство является полным.

Рассмотрим теперь другую норму на этом же пространстве:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

В таком случае пространство полным не будет[11].

Позднее в курсе будет обсуждаться пространство функций, интерируемых по Лебегу $L(0,1)$.

Теорема о вложенных шарах

Теорема 2.1. *(О вложенных шарах) Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство, в котором есть последовательность вложенных шаров*

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \supseteq \overline{B}_{r_2}(x_2) \supseteq \ldots, \quad r_i > 0, r_i \to 0, \quad i \to \infty.$$

Тода

$$\exists!\ x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{r_i}(x_i).$$

Домашнее задание 2.4. *Пусть в полном линейном нормированном пространстве*

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \supseteq \overline{B}_{r_2}(x_2) \supseteq \ldots, \quad r_i > 0, r_i \to 0, \quad i \to \infty.$$

Доказать, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{r_i}(x_i) \neq \emptyset.$$

Пример. Рассмотрим следующий контрпример.

Пусть $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$, а метрика имееет вид

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n. \end{cases}$$

[10] Здесь принципиальное значение имеет вид метрики.

[11] Для этого достаточно построить последовательность, для которой не будет примера.

Легко убедиться, что данное пространство является полным метрическим[12]. В качестве последовательности шаров возьмем шары вида

$$\overline{B}_{1+1/m}(n) = \{n, n+1, \ldots\}.$$

Требование $r_i \to 0$ здесь, очевидно, не выполняется. Пересечением шаров будет пустое множество.

Замечание. Напомним, что с бесконечномерными пространствами надо быть внимательными. Некоторые свойства, очевидные для конечномерных пространств, для бесконечномерных выполняться уже не будут. Например, требования замкнутости и ограниченности (например, замкнутый шар с радиусом $r = 1$) недостаточно, чтобы множество было компактом.

Всюду плотное множество. Нигде не плотное множество

По-прежнему работаем с (M, ρ).

Определение 2.2. Множество A называется *нигде не плотным*[13], если $\forall y \in M$, $\forall r > 0\ \exists z \in M$ и $s > 0$ такие, что

1 $B_s(z) < B_r(y)$;

2 $B_s(z) \cap A = \emptyset$.

Замечание. Множество может не являться плотным и нигде не плотным одновременно.

Множество типа G_δ. Множество типа F_σ

Пусть есть (M, ρ) – полное метрическое пространство и $A \subset M$.

Определение 2.3. A является множеством типа G_δ тогда и только тогда, когда существует представление

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где G_n – открыто[14], $\forall n$.

Определение 2.4. A является множеством типа F_σ тогда и только тогда, когда существует представление

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где F_n – замкнуто[15], $\forall n$.

[12] В качестве фундаментальных последовательностей здесь выступают последовательности, состоящие, начиная с некоторого номера, из одного и того же числа.

[13] Удобна для запоминания следующая аналогия. Твердый сыр считается хорошим, если в нем много дырок. Нигде не плотное множество – бесконечно хороший сыр.

[14] Заметим, что можно считать G_n вложенными.

[15] Аналогично, можно считать F_n расширяющимися.

Домашнее задание 2.5. *Дано $A \subset [0,1]$, A – всюду плотное, A – типа G_δ. Доказать, что*

$$\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}.$$

Пример. Как следствие из задачи выше, множество рациональных чисел не является множеством типа G_δ на отрезке, поскольку имеет счетную мощность.

Пример. Разделим отрезок $[0,1]$ пополам. На одной половине возьмем рациональные числа, а на второй – иррациональные. Полученное множество не будет являться множеством типа G_δ и типа F_σ.

Задача 3

Задача 2.3. *Дано открытое множество $G \subset [0,1]^2$. Доказать, что G является множеством F_σ.*

Доказательство. Определим замкнутое множество[16]

$$F = [0,1]^2 \setminus G.$$

Для $x \in G$ определим непрерывную функцию

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, F) \equiv \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Определим также

$$F_n = \left\{ x \in G : \ f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Очевидно, F_n будут замкнутыми, а их объединение даст G. □

[16]На самом деле, компакт, так как работаем в конечномерном пространстве.

Семинар 3. Метрическое пространство

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 2.1. *Пусть*

$$\overline{\overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \mathfrak{C}.$$

Доказать, что $\exists\ n_0$ *такое, что*

$$\overline{\overline{A_{n_0}}} = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$B = \{(b_1, \ldots, b_n, \ldots) : \ \forall n b_n \in [0, 1]\}$$

Ранее было доказано, что

$$\overline{\overline{B}} = \mathfrak{C}.$$

Следовательно, существует

$$\varphi : \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \leftrightarrow B.$$

Далее воспользуемся следующим пошаговым алгоритмом.

1 Заметим, что возможна следующая альтернатива. Либо $\forall\ b_1 \in [0, 1]$

$$\exists b_1, \ldots, b_n, \ldots (\text{зав. от } b_1)$$

такая, что

$$(b_1, b_2, b_3, \ldots) \in \varphi(A_1).$$

Тогда

$$\overline{\overline{A_1}} = \mathfrak{C},$$

доказательство завершено.

Либо $\exists\ b_1^0$ такое, что $\forall b_2, \ldots, b_n, \ldots \in [0, 1]$

$$(b_1^0, b_2, \ldots) \notin \varphi(A_1).$$

Тогда

$$(b_1^0, b_2, \ldots) \in \varphi\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i\right).$$

Переходим ко второму шагу.

2 Либо $\forall\ b_2 \in [0,1]\ \exists\ b_3, \ldots$ такие, что

$$(b_1^0, b_2, b_3, \ldots) \in \varphi(A_2).$$

Тогда

$$\overline{\overline{A_2}} = \mathfrak{C}.$$

Тогда доказательство завершено.

Либо $\exists\ b_2^0$ такое, что $\forall b_3, \ldots, b_n, \ldots$

$$(b_1^0, b_2^0, b_3, \ldots) \notin \varphi(A_2),$$

и, согласно первому шагу,

$$(b_1^0, b_2^0, b_3, \ldots) \notin \varphi(A_1).$$

Либо спустя n_0 шагов найдется A_{n_0} такое, что

$$\overline{A_{n_0}} = C,$$

либо найдется такая последовательность

$$(b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n^0, \ldots) \notin \varphi(A_k), \quad \forall a,$$

то есть получим противоречие. □

Домашнее задание 2.5. *Дано $A \subset [0,1]$, A – всюду плотное, A – типа G_δ.*
Доказать, что мощность

$$|A| = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Справедливо представление

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i,$$

где C_i – открытые, причем можно считать, что

$$C_{i+1} \subseteq C_i.$$

Заметим, что замыкания

$$\overline{C_i} = [0,1].$$

Запишем в виде

$$C_i = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_{in}, b_{in}).$$

На 1 шаге выберем два непересекающихся отрезка I_0 и $I_1 \subset C_1$. Это возможно, поскольку множество всюду плотное. По этой же причине выбранные отрезки тоже будут всюду плотными.

Перейдем ко 2 шагу. Поскольку $\overline{C_2} = [0,1]$, на I_0 можно выбрать отрезки I_{00}, $I_{01} \subset C_2$, а для I_1 – отрезки I_{10} и $I_{11} \subset C_2$.

Продолжим рассуждения. В результате получим цепочки вложенных отрезков, пересечения которых дают точку, причем для разных цепочек точки будут разными. Итого в результате алгоритма построили в множестве A подмножество мощности континуум. □

Пример. Допустим, из отрезка $[0, 1]$ выбросим кусок длины $1/2$ из середины. Для каждого из оставшихся кусков выбросим куски суммарной длины $1/4$, из оставшихся – суммарной длины $1/8$ и так далее. Получившееся множество будет нигде не плотным, но, тем не менее, будет иметь меру $1/2$.

Домашнее задание 2.3. *Доказать, что если в линейном нормированном пространстве*

$$B_r(x) \subseteq B_R(y),$$

то

$$r \leq R.$$

Доказательство. Заметим, что вложение будет верно и для замыканий:

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{B_R(y)}.$$

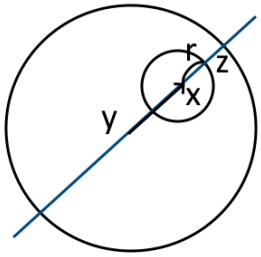

Рис. 2.1. Взаимное расположение шаров

Будем считать, что $x \neq y$. Рассмотрим прямую, пересекающую центры шаров (рис. 2.1). Тогда

$$z = x + \frac{x - y}{\|x - y\|} r \in \overline{B_r(x)},$$

откуда

$$z \in \overline{B_R(y)},$$

а значит,

$$\|z - y\| \leq R.$$

Тогда

$$\|x - y + \frac{r}{\|x - y\|}(x - y)\| \leq R.$$

По свойству нормы, можем вынести коэффицент

$$\left(1 + \frac{r}{\|x - y\|}\right) \|x - y\| \leq R,$$

$$\|x - y\| + r \leq R,$$

откуда получим, что $r \leq R$, что и требовалось доказать, причем $r = R$, если $x = y$. $\square$

Расстояние от точки до множества в (M, ρ)

Пусть задано метрическое пространство (M, ρ), некоторое множество $A \subset M$ и точка $x \notin A$.

Определение 3.1. *Расстоянием от точки x до множества A* называется

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y). \tag{2}$$

Предположим, что A – замкнуто. В $\mathbb{R}^n$ равенство (2) достигается. Действительно, возьмем $\overline{B}_{2\operatorname{dist}(x,A)}(x)$. $\exists\ y_n$ такие, что

$$\rho(x, y_n) \to \operatorname{dist}(x, A).$$

Начиная с некоторого номера, все точки y_n будут лежать внутри выбранного шара. Тогда

$$\overline{B}_{2\operatorname{dist}(x,A)}(x) \cap A$$

будет являться компактом. Внутри компакта $y_n \to y$, а значит, (2) достигается.

Два примера, когда расстояние не достигается

Рассмотрим пространство

$$l_1 = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \ \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

Пример. Рассмотрим в l_1 замкнутое множество такое, что расстояние от 0 до этого множества не достигается:

$$\left\{ (0, 0, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, 0, \ldots) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Расстояние от него до 0 равно 1, но эта нижняя грань нигде не достигается.

Пример. Вспомним пространство равномерных функций $C([0,1])$ с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Его линейное подпространство

$$L = \left\{ f \in C([0,1]) : \ \int_0^1 (2x+1) f(x) dx = 0 \right\}$$

будет замкнутым, и для $\forall\ g \notin L\ \nexists h \in L$ такое, что

$$\operatorname{dist}(g, L) = \|g = h\|.$$

Расстояние между множествами в (M, ρ)

Пусть есть множества $A, B \subset M$.

Определение 3.2. *Расстоянием между множествами A и B* называется

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{\substack{y \in B \\ x \in A,}} \rho(x, y).$$

Задача 1

Задача 3.1. *Пусть $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, F_1, F_2 – замкнуты и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Показать, верно ли*

$$\exists x \in F_1, \quad y \in F_2 : \ \rho(x, y) = dist(F_1, F_2).$$

Решение. Рассмотрим

$$F_1 = \{1, 2, \ldots\},$$

$$F_2 = \left\{1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Тогда

$$\operatorname{dist}(F_1, F_2) = 0,$$

но оно не реализуется.

Домашнее задание 3.1. *Пусть $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, F_1, F_2 – замкнуты, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ и F_1 – ограничено.*

Доказать, что $\exists x \in F_1, \quad y \in F_2$ такие, что

$$\rho(x, y) = dist(F_1, F_2).$$

Домашнее задание 3.2. *Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство. F_1, F_2 – замкнутые множества в (M, ρ) и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.*

Доказать, что $\exists$ открытые $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$ такие, что

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Задачи 2,3

Задача 3.2. *Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что $\forall$ прямой l $l \cap G$ открыто на l?*

Решение. Рассмотрим произвольную точку $\in G$. Для нее существует окрестность. Пересекая эту окрестность с прямой, получим интервал, то есть тоже открытую окрестность. Так как G является открытым, это верно для всех точек, а значит, $l \cap G$ также является открытым.

Задача 3.3. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\forall$ прямой l $A \cap l$ открыто на l.*

Следует ли отсюда, что A является открытым?

Решение. Возьмем в качестве множества A всю плоскость, кроме ветви параболы $y = x^2$ с выколотой точкой 0 (рис. **??**). Пересечением прямой с таким множеством будет либо прямая, либо прямая без одной точки, либо прямая без двух точек, то есть открытое множество. В то же время выбранное множество не открыто. Контрпример построен.

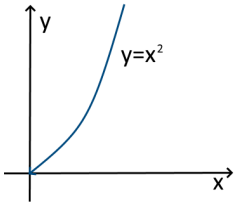

Рис. 3.2. Множество A

Функции в (M, ρ).

Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство. Рассмотрим функцию

$$f: \ M \to \mathbb{R}^1.$$

Определение 3.3. Пусть $x \in M$. f *непрерывна* в $x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall \ y \in B_\delta(x)$

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Задача 4

Введем понятие *колебания функции в точке*:

$$\omega(f, x) = \lim_{n \to \infty} \sup_{y, z \in B_{\frac{1}{n}}(x)} |f(z) - f(y)|. \tag{3}$$

Задача 3.4. *Доказать, что f непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда $\omega(f, x) = 0$.*

Доказательство. Из $\omega(f, x) = 0$ следует непрерывность, так как в качестве одной из точек в правой части (3) можно взять саму точку x.

В обратную сторону утверждение можно доказать, воспользовавшись неравенством треугольника. □

Домашнее задание 3.3. *Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство,*

$$f: \ M \to \mathbb{R}^1.$$

Доказать, что множество точек непрерывности f имеет тип G_δ.

Домашнее задание 3.4. *Пусть $A \subset [0, 1]$ и A имеет тип G_δ. Построить функцию*

$$f: \ M \to \mathbb{R}^1.$$

такую, что множество ее точек непрерывности совпадает с A.

Задача 5

Задача 3.5. *Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство,*

$$f: \ M \to \mathbb{R}^1.$$

Обозначим

$$N(f) = \{x: \ f(x) = 0\}.$$

Доказать, что если $f \in C(M, \rho)$, то $M(f)$ – замкнуто.

Доказательство. Доказательство достаточно тривиально. Если есть последовательность точек, которая сходится к точке x, то в силу непрерывности функции предел значений функции сходится к 0. □

Задача 3.6. *Пусть дано $F \subset M$. Построить $f \in C(M, \rho)$ такую, что $N(f) = F$.*

Решение. Достаточно взять

$$f(x) = \rho(x, F).$$

Непрерывность такой функции достаточно легко показать.

Теорема Бэра

Теорема 3.1. *(Бэра) Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство. Тогда не существует представления*

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i: \ \forall i \ A_i \text{ нигде не плотно в } (M, \rho).$$

Домашнее задание 3.5. *Доказать теорему 3.1.*

Семинар 4. Системы множеств R, S

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 3.1. *Пусть $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, F_1, F_2 – замкнуты, $F_1 \cap f_2 = \emptyset$ и F_1 – ограничено.*

Доказать, что $\exists x \in F_1, \quad y \in F_2$ такие, что

$$\rho(x, y) = dist(F_1, F_2).$$

Доказательство. Из того, что F_1 ограничено, следует, что F_1 – компактно.

Пусть

$$\alpha = \mathrm{dist}(F_1, F_2).$$

Рассмотрим множество

$$B = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(z, F_1) \leq 2\alpha\}.$$

Как нетрудно убедиться, B тоже является компактом. Возьмем теперь

$$F_2' = B \cap F_2$$

– тоже компакт. Тогда, если $\{x_n, y_n\}$, где $x_n \in F_1$, $y_n \in F_2$, таковы, что

$$\|x_n - y_n\| \to \alpha,$$

то при $n \geq n_0$

$$y_n \in F_2'.$$

Отсюда получаем, что

$$\exists \ x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

которые и будут искомыми точками. □

Домашнее задание 3.4. *Пусть $A \subset [0, 1]$ и A имеет тип G_δ. Построить функцию*

$$f : \ M \to \mathbb{R}^1.$$

такую, что множество ее точек непрерывности совпадает с A.

Решение. A имеет типа G_δ, то есть может быть представлена в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где $\forall \ n \ G_n$ – открытое. Можно считать, что

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$$

Обозначим через

$$F_n = [0, 1] \setminus G_n.$$

Очевидно, F_n является замкнутым и

$$F_1 \subseteq F_2 \subset \dots$$

Существуют не более, чем счетные $B_n \subseteq F_n$ такие, что

$$\overline{B_n} = F_n.$$

Для этого можем воспользоваться следующим алгоритмом. Пусть есть замкнутое множество F. Делим отрезок $[0, 1]$ пополам. Каждую половину пересекаем с множеством F. Если пересечение пусто, ничего не предпринимаем, иначе выбираем какую-то точку на пересечении F и текущего отрезка. Далее, каждый отрезок делим еще раз пополам, выбираем точку и так далее. В результате получим искомое не более чем счетное всюду плотное множество.

Возьмем

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_n, \\ 1, & x \in B_n, \\ 2, & x \in F_n \setminus B_n. \end{cases}$$

Заметим, что $f_n(x)$ определены для всех точек отрезка. Положим тпеперь

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} f_n(x).$$

Покажем, что определенная таким образом функция является искомой, то есть множество ее точек непрерывности совпадает с A.

1 Докажем, что f непрерывна на множестве A.

Если $x \in A$, то $f(x) = 0$ по определению. Пусть задана $\varepsilon > 0$. Подберем n_0 так, чтобы

$$2 \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{10^k} < \varepsilon.$$

Затем выберем $\delta > 0$ так, что

$$(x - \delta, x + \delta) < G_{n_0 - 1}.$$

Тогда $\forall\ y \in (x - \delta, x + \delta)$

$$f_1(y) = \dots = f_{n_0 - 1}(y) = 0.$$

Поэтому

$$f(y) - f(x) = f(y) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{10^k} f_k(x) \leq 2 \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \leq \varepsilon.$$

2 Пусть $x \in [0,1] \setminus A$. Тогда пусть

$$n_0 = \min\{n : \ x \in F_n\}.$$

Будем рассматривать $\delta > 0$ такие, что

$$I_\delta = (x-\delta, x+\delta) \subset G_{n_0-1}.$$

Для любого такого $\delta > 0$ возможны два случая.

Во-первых, может выполняться $I_\delta \subset F_{n_0}$. Тогда $\exists\ y, z \in I_\delta$ такие, что

$$f_{n_0}(y) = 1, \quad f_{n_0}(z) = 2.$$

Тогда, так как

$$f_1(y) = \ldots = f_{n_0-1}(y) = f_1(z) = \ldots = f_{n_0-1}(z) = 0.$$

Тогда

$$f(z) - f(y) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{10^k}\left(f_k(z) - f_k(y)\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{10^{n_0}} - \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{2}{10^k} > \frac{1}{2 \cdot 10^{n_0}}.$$

Во-вторых, возможно, что

$$I_\delta \cap G_{n_0} \neq \emptyset.$$

Пусть $y \in I_\delta \cap G_{n_0}$. Отсюда

$$f_{n_0}(y) = 0, \quad f_{n_0}(x) \geq 1.$$

Тогда

$$f(x) - f(y) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{10^k}\left(f_k(x) - f_k(y)\right) \geq \frac{1}{10^{n_0}} - 2\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{10^k} > \frac{1}{2 \cdot 10^{n_0}}.$$

Отсюда получается, что если $x \neq A$, колебания f больше 0, а значит, f разрывна в x.

Задача 1

Пусть теперь (M, ρ) – полное метрическое пространство, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – непрерывные функции на (M, ρ).

Задача 4.1. *Рассмотрим множество*

$$A = \left\{x \in M : \ \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x)| = \infty\right\}.$$

Доказать, что A имеет тип G_δ.

Доказательство. Определим

$$B_{n,m} = \{x \in M : \ |f_n(x)| > m.\}.$$

Заметим, что $B_{n,m}$ являются открытыми, а

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_{k,m} = A.$$

Утверждение доказано. □

Домашнее задание 4.1. *Пусть A – множество типа G_δ из $[0,1]$. Построить последовательность*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$$

такую, что множество неограниченой расходимости этой последовательности совпадает с A.

Домашнее задание 4.2. *Доказать, что не существует последовательности*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$$

такой, что $forall$ $x \in [0,1]$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x),$$

где $\mathcal{D}(x)$ – функция Дерихле.

Домашнее задание 4.3. *Построить последовательность*

$$\{f_{n,m}(x)\}_{n,m=1}^{\infty} \subset C([0,1])$$

такую, что

1 $\forall\ n\ \forall\ x$

$$\exists \lim_{m\to\infty} f_{n,m}(x) = g_n(x);$$

2 $\forall\ x$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \mathcal{D}(x).$$

Полукольцо множеств

Вспомним, что для полукольца S должны выполняться следующие условия:

1 $\emptyset \in S$;

2 Если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$;

3 Если $A, A_1 \in S$, $A_1 \subset A$, то

$$\exists A_2, \ldots, A_k \in S : \ A = \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n.$$

Кольцо множеств

Определение 4.1. *Кольцом* R называется непустая система множеств, для которой, если $A, B\ inR$, то $A \cap B \in R$ и $A \Delta B \in R$.

Замечание. Любое кольцо R является также и полукольцом.

Любое кольцо допускает также операцию объединения. Действительно,

$$A \cup B = (A \Delta B) \, \Delta \, (A \cap B) \, .$$

Замечание. Если заменить в определении кольца требование $A \Delta B \in R$ на $A \cup B \in R$, определение поменяет смысл. Простым примером этого являются открытые множества, которые не образуют кольца, но выдерживают операции объединения и пересечения.

Можно считать *единицей* кольца или полукольца множество, если все остальные множества кольца или полукольца являются его подмножествами. Кольцо с единицей называется *алгеброй*. Алгебра, которая выдерживает счетное объединение множеств, называется *σ-алгеброй*, а кольцо – соответственно *sigma-кольцом*. Кольцо (алгебра), которое выдерживает операцию счетного пересечения, называется *δ-кольцом* (*δ-алгеброй*).

Задача 4.2. *Пусть R – σ-кольцо, то есть*

$$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R.$$

Значит ли это, что R является также и δ-кольцом?

Решение. Представим

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_1) \, .$$

Отсюда следует, что σ-кольцо является δ-кольцом.

Замечание. В общем случае обратное неверно, то есть δ-кольцо не является σ-кольцом. В качестве контрпримера можно рассмотреть всевозможные ограниченные множества на прямой.

Домашнее задание 4.4. $\forall\ n \geq 1$ *найти построить полукольцо S, состоящее ровно из n множеств.*

Домашнее задание 4.5. *Доказать, что не существует кольца R, состоящего ровно из* 3 *множеств.*

Лемма о полукольце

Задача 4.3. *(Лемма о полукольце) Пусть S – полукольцо, $A, A_1, \ldots, A_k \in S$, и*

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \subset A.$$

Доказать, что $\exists\ A_{k+1}, \ldots, A_m \in S$ такие, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Семинар 5. Меры на системах множеств

Разбор домашнего задания

Домашнее задание 4.2. *Доказать, что не существует последовательности*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$$

такой, что $\forall\ x \in [0,1]$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x),$$

где $\mathcal{D}(x)$ *– функция Дерихле.*

Решение. Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1]).$$

Рассмотрим

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in [0,1] :\ f_k(x) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Верно следующее соотношение:

$$\left\{ x \in [0,1] :\ \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) > \frac{1}{2} \right\} \subseteq B \subseteq \left\{ x \in [0,1] :\ \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \geq \frac{1}{2} \right\} \tag{4}$$

Предположим, что

$$f_n(x) \underset{\to}{\forall x} \mathcal{D}(x).$$

Тогда оба ограничивающих множества в (4) являютс Q, а значит, и $B = Q$. С другой стороны, B является множеством типа G_δ, и значит мощности континуум. Получили противоречие.

Домашнее задание 4.1. *Пусть* A *– множество типа* G_δ *из* $[0,1]$. *Построить последовательность*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$$

такую, что множество неограниченой расходимости этой последовательности совпадает с A.

Решение. По условию, A представимо в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

где G_i являются открытыми. Можно считать, что

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$$

Рассмотрим функцию

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 0, x \notin G_n, \\ k\mathrm{dist}(x, M \setminus G_n), \quad 0 < \mathrm{dist}(x, M \setminus G_n) < 1/k, \\ 1, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $x \notin G_n$ и задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим шар

$$B_{\varepsilon/k}(x).$$

Возьмем точку

$$y \in B_{\varepsilon/k}(x),$$

тогда

$$\operatorname{dist}(y, M \setminus G_n) < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Из условий

$$\begin{cases} f_{n,k}(y) < \varepsilon, \\ f_{n,k}(x) = 0, \end{cases}$$

следует, что

$$|f_{n,k}(y) - f_{n,k}(x)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь точка x такова, что

$$\alpha = \operatorname{dist}(x, M \setminus G_n) < \frac{1}{k},$$

а y выбрана так, что

$$y \in B_{\varepsilon/k}(x),$$

Тогда

$$|\operatorname{dist}(x, M \setminus G_n) - \operatorname{dist}(y, M \setminus G_n)| < \frac{\varepsilon}{k},$$

то есть

$$|f_{n,k}(x) - f_{n,k}(y)| < \varepsilon.$$

Аналогично рассматривается и третий возможный случай. Отсюда следует, что $f_{n,k}$ являются непрерывными функциями.

Для $\forall\ x \in G_n$

$$\lim_{k\to\infty} f_{n,k}(x) = 1.$$

Для каждого фиксированного n найдется некоторое K такое, что $\forall\ k > K$

$$|f_{n,k}| > \frac{1}{2}.$$

Определим

$$f_r(x) = \sum_{i=1}^{r} f_{i,r}(x).$$

Докажем, что множество точек неограниченной расходимости $f_r(x)$ совпадает с множеством A из условия. Пусть $x \notin A$. Тогда $\exists\ q$ такое, что $x \notin G_q$. Тогда

$$f_r(x) < q - 1,$$

а значит, точка x не является точкой неограниченной расходимости.

Пусть теперь $x \in A$. Тогда $\forall\ i\ x \in G_i$. Положим

$$R = \max\{N, K\}.$$

Тогда для $r \geq R$

$$f_r(x) \geq \sum_{i=1}^{R} f_{i,n}(x) > \frac{R}{2} > \frac{N}{2}.$$

$\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ последовательности множеств

Пусть дана последовательность множеств $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 5.1. *Верхним пределом последовательности множеств* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Иными словами, верхний предел последовательности множеств – это точки, которые лежат в бесконечном числе множеств последовательности.

Определение 5.2. *Нижним пределом последовательности множеств* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Аналогично, нижний предел последовательности множеств – это все точки, которые лежат во всех множествах, начиная с некоторого номера.

Замечание. Нижний предел последовательности множеств лежит внутри верхнего.

Пример. Возьмем на отрезке $[0,1]$ точку x и рассмотрим множества $A_1 = [0,x)$ и $A_2 = [x,1]$. В качестве последовательности будем брать их поочередно:

$$(A_1, A_2, A_1, A_2, \ldots).$$

Тогда $\forall\ x \in [0,1]$ x лежит в бесконечном числе множеств последовательности, то есть в верхнем пределе. В то же время никакая точка x не лежит сразу во всех множествах последовательности, начиная с некоторого номера. Значит, нижний предел такой последовательности пуст.

Домашнее задание 5.1. *Пусть*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$$

Доказать, что в таком случае

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k = \underline{\lim}_{k\to\infty} A_k.$$

Меры на полукольце

Обозначим, как и ранее, через S полукольцо. Пусть функция

$$m:\ S \to [0,+\infty). \tag{5}$$

Определение 5.3. Функция m (5) называется *мерой* тогда и только тогда, когда $\forall\ A, A_1, \ldots, A_l \in S$ таких, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{l} A_i,$$

имеет место

$$m(A) = \sum_{i=1}^{l} m(A_i).$$

Замечание. Заметим, что в определении 5.3 для полукольца недостаточно, чтобы условие выполнялось для любой пары множеств из S. Например, для полукольца с элементами

$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{01\}, \{0,1,2,3\}, \emptyset$$

положим функцию m равной

$$\begin{cases} m(\{0\}) = m(\{1\}) = m(\{2\}) = m(\{3\}) = 1, \\ m(\{0,1,2,3\}) = 7, \\ m(\emptyset) = 0. \end{cases}$$

Для любой пары множеств из S требование определения 5.3 соблюдено (такая пара всего одна), и в то же время для дизъюнктного объединения всех одноточечных множеств

$$1 + 1 + 1 + 1 \neq 7.$$

Определение 5.4. Мера m называется *σ-аддитивной*, если для $\forall\ A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in S$ таких, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

имеет место

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Пример. Рассмотрим[17]

$$A_{\{\alpha,\beta\}} = \{\alpha, \beta\} \cap Q,$$

где $\{\alpha, \beta\} \supset [0,1]$. Мера

$$m(A_{\{\alpha,\beta\}}) = \beta - \alpha.$$

Действительно, если

$$A_{\{\alpha,\beta\}} = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_{\{\alpha_k,\beta_k\}},$$

то отсюда вытекает, что

$$\alpha = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \ldots,$$

и значит,

$$m(A_{\{\alpha,\beta\}}) = \sum_{k=1}^{n} m(A_{\{\alpha_k,\beta_k\}}).$$

[17] То есть всевозможные промежутки из $[0,1]$, пересеченные с множеством рациональных чисел.

Домашнее задание 5.2. *(Лемма) Пусть S – полукольцо, $A, A_1, \ldots, A_k \in S$, причем*

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \subset A.$$

Доказать, что тогда $\exists\ B_1, \ldots, B_l \in S$ такие, что

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} B_j\right).$$

Внешняя мера Лебега. Внешняя мера Жордана

Пусть S – полукольцо. Рассмотрим минимальное кольцо R, содержащее полукольцо S

$$R(S) = \left\{\bigsqcup_{i=1}^{l} A_i, \quad A_i \in S\right\}.$$

На $R(S)$ можно продолжить меру m при условии ее σ-аддитивности. В противном случае возникают сложности. В качестве иллюстрации часто приводят плоскость с разными областями на ней. Мера, которая умеет измерять прямоугольные области, не справится с кругом.

Определение 5.5. Для любого множества $A \in S$ *внешняя мера Лебега* определяется как

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A_i \in S \\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Нижняя мера Жордана определяется таким же образом, только вместо счетных покрытий берутся конечные.

Замечание. Внешняя мера Лебега всегда $\leq$ внешней мере Жордана.

Примером, когда внешняя мера Лебега строго меньше, являются рациональные числа на отрезке $[0, 1]$. Действительно, если покрыть рациональные числа счетным количеством промежутков, можно выбарть интервалы длины $\varepsilon/2^i$. Внешняя мера Лебега будет меньше ε. Чтобы покрыть все рациональные числа конечным числом интервалов, необходимо выбрать их так, чтобы конец интервала после перенумерации мог совпадать с началом следующего. Внешняя мера Жордана будет равна 1.

Определение 5.6. Пусть множество $A \in S$. A измеримо тогда и только тогда, когда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in R(S)$ такое, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Аналогично определяется измеримость для внешней меры Жордана.

Заметим, что внешняя мера не является мерой, поскольку для нее не выполняется условия аддитивности. Можно доказать, что множество всех измеримых множеств M будет являться σ-алгеброй. Сужение внешней меры на M будет являться σ-аддитивной мерой.

Замечание. Множество рациональных чисел отрезка $[0,1]$ является примером множества, неизмеримого по Жордану, но измеримого по Лебегу. Действительно, как было сказано выше, внешняя мера Жордана рациональных чисел равна 1. Мера Жордана $[0,1] \setminus Q$ тоже равна 1 (по той же логике). В то же время мера всего $[0,1]$ тоже равна 1.

Домашнее задание 5.3. *(Лемма) Пусть S –полукольцо, $\{A_i\}_{i=1}^n \subset S$. Тогда $\exists$ $\{B_j\}_{j=1}^m \subset S$, B_j попарно не пересекаются, такой, что $\forall i \in [1,n]$ $\exists$ $\Omega(i) \subset [1,m]$ такое, что*

$$A_i = \bigsqcup_{j \in \Omega(i)} B_j.$$

Домашнее задание 5.4. *Пусть X, Y – множества, функция*

$$f: \ X \to Y,$$

Σ – σ-алгебра подмножеств Y.

Доказать[18]*, что $f^{-1}(\Sigma)$ – σ-алгебра подмножеств X.*

Домашнее задание 5.5. *Привести пример кольца R подмножеств некоторого множества X и функции*

$$f: \ X \to Y,$$

где Y – некоторое множество, таких, что $f(R)$ – не полукольцо.

[18]Пусть $A \subset Y$. Тогда полный прообраз множества A

$$f^{-1}(A) = \{x \in X: \ f(x) \in A\}.$$

Теперь,

$$f^{-1}(\Sigma) = \left\{f^{-1}(A) \forall A \in \Sigma\right\}.$$

Семинар 6. Мера Лебега

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 5.4. *Пусть X, Y – множества, функция*

$$f: \ X \to Y,$$

Σ – σ-алгебра подмножеств Y.

Доказать, что $f^{-1}(\Sigma)$ – σ-алгебра подмножеств X.

Доказательство. Пусть $U_1, U_2 \subseteq Y$. Тогда пересечение

$$f^{-1}\left(U_1 \cap U_2\right) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2).$$

Симметрическая разность

$$f^{-1}\left(U_1 \Delta U_2\right) = f^{-1}(U_1) \Delta f^{-1}(U_2).$$

Действительно, множество слева можно записать как

$$\left\{x \in X: \ f(x) \in U_1, \notin U_2 \text{ или } \ \notin U_1, \in U_2\right\}.$$

Понятно, что множество справа состоит из этих же точек x. Аналогично можно показать, что

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(U_i).$$

□

Домашнее задание 5.5. *Привести пример кольца R подмножеств некоторого множества X и функции*

$$f: \ X \to Y,$$

где Y – некоторое множество, таких, что $f(R)$ – не полукольцо.

Решение. Возьмем

$$X = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad Y = \{y_1, y_2\},$$
$$R = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2, a_3\}, X\}.$$

Положим

$$f(a_1) = y_1, \quad f(a_2) = y_1, \quad f(a_3) = y_2.$$

Тогда

$$f(R) = \{\emptyset, \{y_1\}, Y\},$$

то есть не является полукольцом.

Не измеримое по Лебегу множество

Будем рассматривать $[0,1]$, μ – классическая мера Лебега[19].

Пусть M – лебегова σ-алгебра (алгебра множеств, измеримых относительно μ). Для $A \in M$ возможны два варианта:

$$\begin{cases} \mu(A) = 0, \\ \mu(A) > 0. \end{cases}$$

Предположим, что $B \subset A$. В случае, если $\mu(A) = 0$, можно показать[20], что $\mu(B) = 0$. Это следует из того, что мы можем использовать покрытие внешней меры для A и для множества B.

В случае $\mu(A) > 0$ всегда найдется $B \subset A$ такое, что $B \notin M$, то есть не измеримое по Лебегу.

Перейдем к построению такого множества. На отрезке $[0,1]$ введем отношение эквивалентности

$$x \sim y \iff x - y \in Q.$$

Очевидно, что

$$x - y \in [-1, 1].$$

Весь отрезок $[0,1]$ при этом распадается на классы эквивалентности

$$[0,1] = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} K_\omega.$$

Применяя аксиому выбора, образуем множество

$$E_0 = \{x_\omega\}_{\omega \in \Omega},$$

где каждое $x_\omega \in K_\omega$. Занумеруем теперь все рациональные числа отрезка $[-1,1]$:

$$\{r_n\}_{n=0}^{\infty} = [-1,1] \cap Q,$$

причем будем считать, что $r_0 = 0$.

Рассмотрим множества

$$E_n = E_0 + \{r_n\} = \{x + r_n, \quad x \in E_0\} \subseteq [-1, 2].$$

Заметим, что

$$E_n \cap E_m = \emptyset, \quad n \neq m.$$

[19] То есть мера, полученная продолжением меры

$$m(A_{\{\alpha,\beta\}}) = \beta - \alpha.$$

[20] Данное свойства называется свойством *полноты* меры. Меры Жордана и Лебега являются полными.

Действительно, предположим, что это не так. Тогда число на пересечении этих множеств имеет два представления:

$$x_\alpha + r_n = x_\beta + r_m.$$

Отсюда следует, что $x_\alpha \sim x_\beta$. Так как из каждого класса эквивалентности в E_0 было выбрано по одному представителю, $x_\alpha = x_\beta$. Значит, и $r_n = r_m$, откуда $n = m$.

Заметим, что, кроме того,

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Убедимся в справедливости этого утверждения. Если $x \in [0,1]$, то $\exists\ \omega$ такое, что $x \in K_\omega$. Тогда $x - x_\omega \in Q$.

Если E_0 измеримо, то $\forall n\ E_n$ тоже измеримо и $\forall n$

$$\mu(E_0) = \mu(E_n).$$

Применим меру к соотношению

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \subseteq [-1,2]. \tag{6}$$

Получим, что

$$1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) \leq 3.$$

Очевидно, что такое соотношение невозможно ни при каком значении $\mu(E_0)$.

Перейдем теперь к поиску неизмеримого подмножества. Пусть $A \subseteq [0,1]$. Тогда, воспользовавшись (6), можно записать

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap E_n). \tag{7}$$

Предположим, что $\forall\ n$

$$A \cap E_n \in M.$$

Тогда

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap E_n) > 0.$$

Значит, $\exists\ n_0$ такое, что

$$\mu(\underbrace{A \cap E_{n_0}}_{=\mathcal{D}_{n_0}}) > 0.$$

Для $n \neq n_0$ обозначим

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n_0} - r_{n_0} + r_n.$$

Очевидно, что $\mathcal{D}_n \in M$ и

$$\mu(\mathcal{D}_n) = \mu(\mathcal{D}_{n_0}).$$

Поскольку $\mathcal{D}_\setminus \subset E_n$,

$$\bigsqcup_{n=0}^{\infty} D_n \subset [-1, 2],$$

откуда получается, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(\mathcal{D}_n) < 3.$$

Это невозможно, поскольку меры всех $\mathcal{D}_n$ одинаковы. Получили противоречие. Значит, в записи (7) найдется неизмеримое множество.

Домашнее задание 6.1. *Построить на* $[0,1]^2$ *множество, измеримое относительно классической меры Лебега на подмножествах* $[0,1]^2$*, такое, что обе его проекции на координатные оси не измеримы относительно меры Лебега на подмножествах* $[0,1]$.

Домашнее задание 6.2. *Построить на* $[0,1]^2$ *неизмеримое множество, обе проекции которого измеримы.*

Измеримость меры

Определение 6.1. Пусть даны кольцо R и m – мера на R. Тогда m называется *непрерывной* тогда и только тогда, когда для $\forall\ A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R$ таких, что

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$$

и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, имеем

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Теорема 6.1. *Пусть R – кольцо, m – мера на R. Тогда m σ-аддитивна $\iff$ m непрерывна.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Представим A_1 из определения 6.1

$$A_1 = \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})\right) \bigsqcup A.$$

Так как m σ-аддитивна,

$$m(A_1) = m(A) + sum_{i=1}^{\infty} m\left(A_i \setminus A_{i+1}\right). \tag{8}$$

Заметим, что

$$m\left(A_i \setminus A_{i+1}\right) = m(A_i) - m(A_{i+1}),$$

так как

$$A_i = (A_i \setminus A_{i+1}) \cup A_{i+1}.$$

Тогда (8) приобретает вид

$$m(A_1) = m(A) + \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_i) - m(A_{i+1})) =$$

$$= m(A) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (m(A_i) - m(A_{i+1})) = m(A) + m(A_1) - \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Непрерывность меры доказана.

$\Leftarrow$ Пусть m непрерывна,

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A, A_1, \ldots \in R.$$

Обозначим «хвосты» представления множества A как

$$B_n = \bigsqcup_{k=n+1} \infty A_k \in R.$$

Заметим, что

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$$

и

$$\bigcap_{n=1} \infty B_n = \emptyset,$$

откуда следует, что

$$m(B_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

По определению B_n, для $m(A)$ справедливо представление

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + m(B_n).$$

При стремлении $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

а $m(B_n) \to 0$. $\square$

Домашнее задание 6.3. *Пусть R – кольцо, m – σ-аддитивная мера, $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R$, причем*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Доказать[21]*, что тогда*

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

[21] По сути, эта задача дает запись определения 6.1 через объединения множеств вместо их пересечения.

Скажем несколько слов о σ-конечных мерах, опустив технические детали. Речь идет о ситуации, когда в рассмотрении вся прямая, а не отрезок $[0,1]$. В таком случае мы разбиваем прямую на полуинтервалы $I_n = [n, n+1)$ и считаем множеством измеримым $\iff$ измеримо его пересечение с I_n $\forall$ n. В качестве значения меры множества берется сумма значений меры на этих пересечениях.

Возникает следующий вопрос. Будет ли теорема 6.1 справедлива для случая σ-конечной меры?

Для того, чтобы ответить на него, возьмем лучи $[n, \infty)$. Их мера бесконечна, а пересечение является $\emptyset$, поэтому теорема 8 в этом случае не работает. Заметим, однако, что утверждение домашнего задания 6.3 для σ-аддитивной меры остается верным.

Домашнее задание 6.4. *Доказать, что для классической меры Лебега на подмножествах $\mathbb{R}^1$ верно утверждение домашнего задания 6.3.*

Множества канторовского типа

Обсудим следующий пошаговый алгоритм.

На 0 шаге обозначим за J_0^1 отрезок $[0,1]$.

На шаге 1 удалим посередине J_0^1 интервал I_1^1 такой, что

$$\frac{\mu(I_1^1)}{\mu(J_0^1)} = \frac{1}{3}.$$

Оставшиеся отрезки обозначим как J_1^1 и J_1^2 (рис. 6.1).

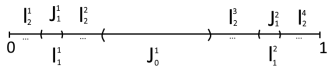

Рис. 6.1. Множества J_{n-1}^k и I_n^l

На 2 шаге посередине отрезков J_1^1 и J_1^2 удалим интервалы I_2^1 и I_2^2 соответственно такие, что

$$\frac{\mu(I_2^k)}{\mu(J_1^k)} = \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2.$$

Оставшиеся 4 отрезка нумеруем, как на 1 шаге. Повторяя последовательно процедуру, получим в результате 2 множества. Множество

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k$$

называется *канторовским множеством открытого типа*, а множество

$$P = [0,1] \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigsqcup_{k=1}^{2^n} J_n^k \right) \tag{9}$$

канторовским множеством закрытого типа.

Обсудим некоторые свойства P.

1 P замкнуто.

2 P нигде не плотно. Действительно, если на некотором интервале (α, β) есть хотя бы одна точка, то можно выбрать n и k такие, что

$$J_n^k \subset (\alpha, \beta).$$

Это значит, что внутри J_n^k согласно шагу алгоритма были выброшены некоторые интервалы.

3 $\mu(P) = 0$.

Для доказательства этого факта можно воспользоваться представлением (9) и непрерывностью меры. На первом шаге

$$\mu(\bigsqcup_{k=1}^{2} J_1^l) = \frac{2}{3}.$$

На втором шаге

$$\mu(\bigsqcup_{k=1}^{2} J_1^l) = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что

$$\mu(P) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

4 $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{C}$. Действительно, на n шаге остались точки, которые в троичном представлении имеют 0 или 2 на n месте. Мощность множества таких точек континуум.

Замечание. Длина выкидываемых интервалов, конечно, не обязательно должна составлять 1/3 от суммарной длины. При соотношении

$$\frac{\mu(I_n^k)}{\mu(J_{n-1}^k)} = \alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1)$, полученное множество будет обладать теми же свойствами, что и P. Кроме этого, можно уменьшать суммарную долю длины интервалов. Свойства 1, 2 и 4 полученного таким образом множества P' сохранятся, а мера будет отлична от нуля. В частности, при

$$\frac{\mu(I_n^k)}{\mu(J_{n-1}^k)} = \frac{1}{2^n},$$

получим

$$\mu(P) = 1/2.$$

Домашнее задание 6.5. *Построить множество канторовского типа P такое, что*

$$\forall\ \frac{\mu(I_n^k)}{\mu(J_{n-1}^k)} = \frac{1}{(n+\alpha)^k}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Домашнее задание 6.6. *Привести пример множества $A \subset [0,1]$ такого, что $\mu(A) = 0$ и A – 2-й категории*[22].

Задача 6.1. *Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ множество точек, в десятичной записи которых нет цифры 4. Какова мера такого множества?*

Решение. На первом месте не имеют цифру 4 $9/10$ точек. На первом и втором местах не имеют цифру 4 $9/10 \cdot 9/10 = (9/10)^2$ точек. На n шаге это будет $(9/10)^n$ от общего числа точек. Продолжая рассуждения таким образом, получим, что мера такого множества равна 0.

Задача 6.2. *На множестве $[0,1]$ рассматривается множество точек, у которых в десятичном разложении есть и 4, и 5, причем первое появление 4 раньше 5. Какова мера такого множества?*

Решение. Назовем точки, у которых 4 встречается раньше 5, «хорошими», а остальные – «плохими». На первом шаге «хорошими» будут точки вида $0.4\ldots$ (их $1/10$), «плохими» – числа вида $0.5\ldots$ (их тоже $1/10$). Про остальные $8/10$ точек сказать ничего нельзя. Проведя аналогичные рассуждения для второго и последующих шагов, получим, что всего «хороших» точек

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\frac{8}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{10}\frac{1}{1-4/5} = \frac{1}{2}.$$

Закон нуля или единицы

Пусть измеримое $A \subset [0,1]$. Возьмем точку x_0 и t так, чтобы

$$[x_0 - t, x_0 + t] \subset [0,1].$$

Соотношение

$$\frac{\mu(A \cap [x_0 - t, x_0 + t])}{2t} \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \text{ или } 1, \quad t \to 0,$$

причем оно почти всюду равно 1, когда точка лежит в множестве A, и 0 иначе[23][24]

Домашнее задание 6.7. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить измеримое $A \subset [0,1]$ такое, что*

$$\frac{\mu(A \cap [0,1])}{2t} \to \alpha, \quad t \to \infty.$$

[22] То есть не допускающее счетного покрытия нигде не плотными множествами.

[23] Для конкретной взятой точки, однако, данный предел может быть равен произвольному числу из $[0,1]$.

[24] Доказательство этого факта будет рассмотрено далее в курсе.

Семинар 7. Измеримые функции

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 6.1. *Построить на* $[0,1]^2$ *множество, измеримое относительно классической меры Лебега на подмножествах* $[0,1]^2$*, такое, что обе его проекции на координатные оси не измеримы относительно меры Лебега на подмножествах* $[0,1]$.

Решение. Известно, что $\exists$ неизмеримое $X \subseteq [0,1]$. Рассмотрим

$$\{(x,x):\ x \in X\} \subseteq [0,1]^2.$$

Это множество лежит на диагонали (рис.). Диагональ можно покрыть квадратами

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left[\frac{k=1}{n}, \frac{k}{n}\right]^2.$$

Мера каждого квадрата $\mu = 1/n^2$, их n штук. Значит, диагональ покрывается множествами с мерой $1/n$, то есть является множеством меры 0 (измеримым).

Домашнее задание 6.2. *Построить на* $[0,1]^2$ *неизмеримое множество, обе проекции которого измеримы.*

Решение. Пример такого множества можно видеть на (рис.). В маленьком квадрате выберем неизмеримое подмножество точек. Проекции измеримы, поскольку покрывают весь отрезок $[0,1]$. Само же множество неизмеримо.

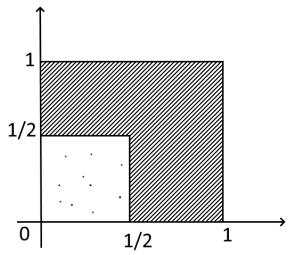

Рис. 6.1. Неизмеримое множество с измеримыми проекциям

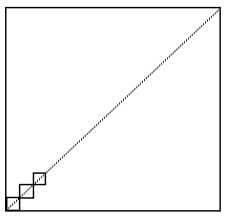

Рис. 6.2. Измеримое множество с неизмеримыми проекциями

Домашнее задание 6.5. *Построить множество канторовского типа* P *такое, что*

$$\forall\ \frac{\mu(I_n^k)}{\mu(J_{n-1}^k)} = \frac{1}{(n+\alpha)^k}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Решение. После первого шага останется суммарно множество с мерой

$$1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2}.$$

На втором шаге

$$\left(1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(2+\alpha)^2}\right)$$

На n-м шаге

$$\left(1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2+\alpha)^2}\right) =$$

$$\frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(n+\alpha-1)(n+\alpha+1)}{(1+\alpha)^2\ldots(n+\alpha)^2} =$$

$$\frac{\alpha(n+\alpha+1)}{(\alpha+1)\ldots(n+\alpha)} n \underset{\to}{\to} \infty \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Домашнее задание 6.3. *Пусть R – кольцо, m – σ-аддитивная мера, $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R$, причем*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Доказать, что тогда

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Доказательство. Возможны два случая.

1 $\mu(A) < \infty$.

В таком случае рассматриваем новую σ-алгебру

$$M_1 = M \cap A.$$

На M_1 μ является конечной мерой. Получается, что

$$A \setminus A_1 \supseteq A_1 \setminus A_2 \supseteq \ldots,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus A_i) = \emptyset.$$

Отсюда следует, что

$$\mu(A) - \mu(A_i) = \mu(A - A_i) \to 0, \quad i \to \infty.$$

2 Пусть $\mu(A) = \infty$. Тогда возможны два случая. Во-первых, $\exists$ i_0 такое, что $\mu(A_{i_0}) = \infty$. Поскольку

$$A_{i_0} \subseteq A_{i_0+1} \subseteq \ldots,$$

для $\forall$ $j \geq 0$

$$\mu(A_{i_0+j}) = \infty.$$

Во-вторых, может быть, что $\forall\ i\ \mu(A_i) < \infty$. В таком случае рассмотрим множества

$$\Big\{B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \quad i > 1, B_1 = A_1.$$

Заметим, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Поскольку μ σ-аддитивна,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(B_i) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \ldots + \ldots \mu(A_N) - \mu(A_{N-1})) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

□

Домашнее задание 6.7. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Построить измеримое* $A \subset [0,1]$ *такое, что*

$$\frac{\mu(A \cap [0,1])}{2t} \to \alpha, \quad t \to \infty.$$

Решение. Рассмотрим

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + \frac{\alpha}{n(n+1)}\right].$$

Предположим, что $0 < t < 1$. Тогда $\exists\ n$ такое, что

$$\frac{1}{n+1} \le t \le \frac{1}{n}.$$

Возьмем

$$A \cap [0,t] = \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1} + \frac{\alpha}{k(k+1)}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \min\left(\frac{1}{n+1} + \frac{\alpha}{n(n+1)}, t\right)\right].$$

Отсюда вытекает, что

$$\mu(A \cap [0,t]) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha\mu\left(\left[\frac{1}{k=1}, \frac{1}{k}\right]\right) + \varphi_n,$$

где $0 \le \varphi_n \le \frac{1}{n(n+1)}$. Сократив, получим

$$\mu(A \cap [0,t]) = \alpha\mu\left(\left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right).$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\alpha\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \le \frac{\mu(A \cap [0,1])}{t} \le \frac{\alpha\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n+1}} \tag{10}$$

При этом $t \to 0 \iff n \to \infty$. Поскольку левая и правая границы (10) при этом $\to \alpha$, к α сходится и среднее отношение.

Измеримость канторовского множества по Жордану

Пусть P – канторовское множество на $[0,1]$. Поскольку его мера Лебега 0, у него есть счетное покрытие меньшей длины, чем ε для $\forall\ \varepsilon$. Поскольку множество замкнуто и ограничено (то есть компакт), его можно накрыть конечным числом интервалов длиной меньшей, чем ε. Значит, внешняя мера Жордана 0 и множество P измеримо по Жордану.

Обсудим теперь следующий вопрос. Представим, что у множества канторовского типа P

$$\mu(P) = \alpha > 0.$$

Допустим, что P измеримо по Жордану. Тогда его мера Жордана

$$\mu_J(P) = \alpha.$$

У его дополнения $G = [0,1] \setminus P$ внешняя мера Жордана

$$\mu_J * (G) = 1,$$

поскольку G всюду плотно. Поскольку по предположению P измеримо, $[0,1] \setminus P$ тоже измеримо, а значит,

$$\mu_J * (G) = 1 = \mu_J(G).$$

Приходим к противоречию.

Альтернативное описание измеримых по Лебегу множеств

Пусть $[0,1]$, M – классическая[25] лебегова σ-алгбера.
Пусть $A \in M$. Докажем, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ открытое G такое, что

1 $A \subseteq G \subseteq [0,1]$;

2 $\mu(G) < \mu(A) = \varepsilon$.

Так как A измеримо,

$$\mu(A) = \mu^*(A).$$

Для $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ вида

$$E_i = \{\alpha_i, \beta_i\}$$

такие, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supseteq A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

[25]Здесь под этим подразумевается мера, получившаяся из промежутков $\{\alpha, \beta\}$, где мера

$$m(\{\alpha, \beta\}) = \beta - \alpha.$$

Предположим, что

$$E_i \subseteq (\alpha_i', \beta_i')$$

таких, что

$$(\beta_i' - \alpha_i') < (\beta_i - \alpha_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i-1}.$$

Обозначим

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i', \beta_i').$$

Тогда

$$\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Домашнее задание 7.1. *Пусть M – классическая лебегова σ-алгебра, $A \in M$. Показать*[26]*, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ замкнутое F и открытое G такие, что*

1. $F \subseteq A \subseteq G$;
2. $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$.

Домашнее задание 7.2. *Доказать*[27]*, что, если $A \in M$, $\mu(A) > 0$, то*

$$\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}.$$

Домашнее задание 7.3. *Пусть $A_1, \ldots, A_n \in M$, где M – классическая лебегова σ-алгебра на $[0, 1]$, а*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1.$$

Доказать, что

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0.$$

Домашнее задание 7.4. *Привести пример $A_1, \ldots, A_n \in M$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = n - 1$$

и пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset.$$

[26]Можно показать, что в таком случае A можно представить в виде

$$A = B \setminus P_1 = C \cup P_2,$$

где C имеет тип F_σ, B имеет тип G_δ, а

$$\mu(P_1) = \mu(P_2) = 0.$$

[27]Без использования континуум-гипотезы.

Измеримые функции

Рассмотрим (X, M, μ) – измеримое пространство[28] и функцию

$$f: \ X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Определение 7.1. Функция f называется *измеримой*[29] $\iff \forall C \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}\left((C, +\infty]\right) \in M.$$

Из определения 7.1 следует справедливость следующих утверждений.

1 $f^{-1}\left(\{+\infty\}\right) \in M$.

Действительно,

$$\{+\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left((k, +\infty\right).$$

2 $f^{-1}\left(\{-\infty\}\right) \in M$.

Это следует из того, что

$$\{-\infty\} = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((-n, +\infty\right).$$

3 $f^{-1}\left([C, +\infty]\right) \in M$.

Это свойство вытекает из представления

$$[C, +\infty] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left((C - 1/n, +\infty]\right).$$

4 $\forall\ \alpha, \beta$

$$f^{-1}\left((\alpha, \beta)\right) \in M.$$

Замечание. Определение 7.1 можем перформулировать следующим образом. f измерима $\iff \forall C \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}\left([C, +\infty]\right) \in M.$$

Однако из того, что $\forall C \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}\left(\{C\}\right) \in M,$$

измеримость f не следует.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть $E \in [0, 1]$, E – неизмеримое. Зададим функцию f как

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in E, \\ -1 - x, x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

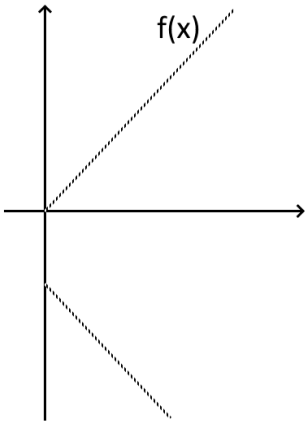

Рис. 7.3. График $f(x)$, связанной с неизмеримым множеством E

Условно график $f(x)$ показан на (рис. 7.3). Прообраз любой точки, конечно, будет измерим, в то время как множество

$$f^{-1}\left([-1/2, +\infty]\right) = E$$

будет неизмеримо.

Свойства измеримых функций

Обсудим свойства измеримых функций.

1 Пусть f и g измеримы[30]. Тогда$f + g$ измерима.

2 Пусть f измерима на (X, M, μ). Функция

$$f: \ X \to G \subset \mathbb{R},$$

где G – открытое. Пусть

$$g(y) \in C(G).$$

Тогда $g(f)(x)$ измерима.

Действительно, прообраз

$$(g(f))^{-1}\left((C, +\infty)\right) = \left\{x: \ f(x) \in g^{-1}\left((C, +\infty)\right)\right\} = f^{-1}\left(g^{-1}\left((C, +\infty)\right)\right)$$

измерим, поскольку множество $g^{-1}\left((C, +\infty)\right)$ является борелевским.

Замечание. Обратное не верно, то есть функция $f(g)(y)$ измерима не будет[31].

[28]Здесь X – единица M, M – σ-алгебра, а μ – σ-конечная и σ-аддитивная мера.

[29]Заметим, что любая непрерывная функция является измеримой.

[30]Для функций, которые могут принимать значения $\{\pm\infty\}$, нужно оговаривать некоторые детали отдельно.

[31]Это будет показано позднее.

Измеримость $\sup$, $\inf$, $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ измеримых $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

Пусть функции

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

измеримы. Рассмотрим

$$\varphi(x) = \sup_n f_n(x).$$

Из представления

$$\{\varphi(x) > C\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) > C\}$$

следует измеримость функции $\varphi(x)$. Измеримость нижнего предела последовательности функций доказывается схожим образом.

Перейдем к верхнему пределу. Поскольку

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x),$$

верхний предел последовательности функций измерим. Аналогично доказывается измеримость нижнего предела.

Предел последовательности измеримы функций измерим на множестве своего существования.

Домашнее задание 7.5. *Пусть $f(x) \in C([0,1])$. Доказать, что $f'(x)$ измерима на множестве своего существования.*

Семинар 8. Сходимость по мере

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 7.5. *Пусть $f(x) \in C([0,1])$. Доказать, что $f'(x)$ измерима на множестве своего существования.*

Доказательство. Обозначим

$$\overline{f}'(x) = \overline{\lim}_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\underline{f}'(x) = \underline{\lim}_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

Для любого $C \in \mathbb{R}$ справедливо следующее представление:

$$\left\{x \in (0,1):\ \overline{f}^{-1}(x) > C\right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{nx+h\in(0,1).\\ h:\ 0<|h|<1/n}} \left\{x \in (0,1):\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > C + \frac{1}{m}\right\}. \tag{11}$$

Так как множества в правой части (11) открыты, их континуальное объединение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\substack{nx+h\in(0,1).\\ h:\ 0<|h|<1/n}}$ тоже открыто. Следовательно, множество (11) является измеримым.

Отсюда следует, что $\overline{f}'(x)$ измеримо. Аналогично показывается, что измеримо $\underline{f}'(x)$. Теперь, множество

$$E = \{x \in (0,1):\ \exists f'(x)\} = \left\{x \in (0,1):\ \overline{f}'(x) = \underline{f}'(x)\right\}$$

измеримо, так как измеримо множество в правой части этого представления. На E

$$f'(x) = \overline{f}'(x).$$

□

Домашнее задание 7.2. *Доказать*[32]*, что, если $A \in M$, $\mu(A) > 0$, то*

$$\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}.$$

Решение. A – замкнуто, $\mu(A) > 0$. Тогда $\exists$ B и C такие, что

$$\mu(B) > 0, \quad \mu(C) > 0,$$

B, C замкнуты и

$$A \supseteq B \bigsqcup C.$$

Руководствуясь написанным выше, на первом шаге доказательства следует взять множества A_1, A_2 внутри A замкнутые, непересекающиеся и такие, что их мера положительна. Аналогично, на втором шаге в множестве A_1 выбираем A_{11} и A_{12}, а внутри A_2 – A_{21} и A_{22}, накладывая на них такие же условия. Повторяя алгоритм, в итоге получим множества, составляющие подмножества A, объединение которых имеет мощность континуум (из каждого можно выбрать занумерованную точку, объединения номеров всех точек континуально).

[32]Без использования континуум-гипотезы.

Кривая Кантора

Вернемся к вопросу, обсуждавшемся на прошлом занятии. Пусть f измерима, g непрерывна. Тогда функция $g(f)$ измерима. Обсудим, почему $g(f)$ не является измеримой.

Рассмотрим следующий алгоритм.

0 Обозначим отрезок $[0,1]$ как J_0. Возьмем функцию ξ такую, что

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(1) = 1.$$

Посередине J_0 возьмем интервал $(1/3, 2/3) = I_0^1$.

1 Положим при $x \in \overline{I_0^1}$

$$\xi(x) = \frac{\xi(0) + \xi(1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Оставшиеся полуинтервалы $[0,1] \setminus I_0^1$ обозначим как $[0, 1/3) = J_1^1$ и $(2/3, 1] = J_1^2$.

2 Если $x \in I_2^i \subset J_1^i = [\alpha_i, \beta_i]$, то полагаем

$$\xi(x) = \frac{\xi(\alpha_i) + \xi(\beta_i)}{2}. \tag{12}$$

Получаем ξ следующего вида (рис. 8.1).

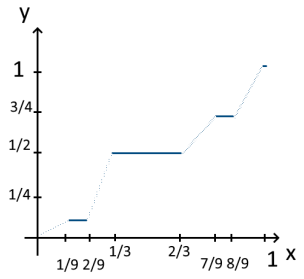

Рис. 8.1. Кривая Кантора

3 На каждом следующем шаге повторяем описанную выше процедуру.

В конечном итоге получим функцию ξ, определенную на множестве

$$A = \{0\} \cup \{1\} \cup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} \overline{I}_n^k.$$

Принципиально важно, что $\xi(x)$ обладает следующими свойствами.

1 $\xi(x)$ не убывает на A.

Убедимся, что это так. Рассмотрим

$$A_r = \{0\} \cup \{1\} \cup \bigsqcup_{n=1}^{r} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} \overline{I}_n^k.$$

Очевидно, A есть объединение A_r. Поэтому достаточно доказать неубывание $\xi(x)$ на A_r. Это можно сделать по индукции. Для $r = 1$ этот факт тривиален. Далее,

$$A_{r+1} \setminus A_r = \bigcup_{k=1}^{2^r} \overline{I}_{k+1}^k.$$

Каждое замыкание

$$\overline{I}_{k+1}^k \subset J_k^r = [\alpha, \beta].$$

По предположению индукции $\xi(\alpha) \leq \xi(\beta)$. Тогда, в силу (12) получаем, что

$$\xi(\alpha) \leq \xi(x) \leq \xi(\beta).$$

2 $\xi(A) = \{l/2^n\}_{n=1,l=0}^{\infty,2^n}$.

Данное утверждение также проверяется по индукции. Предполагается, что на шаге k на A_k принимаются все значения

$$\{l/2^n\}_{n=0}^{2^k} = \left\{2l/2^{n+1}\right\}_{n=0}^{2^k}$$

Переходим к $k+1$ шагу. У нас две граничных точки $2(l-1)/2^{n-1}$ и $2l/2^{n-1}$. На замыкании интеравала, который лежит между ними, ξ принимает значение

$$\xi(x) = \frac{2l-1}{1^{n+1}}.$$

Пусть $x \in [0,1]$. Определим *функцию Кантора*

$$\varphi(x) = \sup_{y \in A:\ y \leq x} \xi(x). \tag{13}$$

Функция φ обладает следующими свойствами.

1 $\varphi(x)$ не убывает на $[0,1]$.

2 $\forall\ x \in A$

$$\varphi(x) = \xi(x).$$

3 $\varphi(x) \in C([0,1])$.

4 $\forall\ x \in [0,1] \setminus P$

$$\varphi'(x) = 0.$$

Определим теперь

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) + x}{2}.$$

Функция $\psi(x)$ строго монотонна, $\in C([0,1])$. Кроме того,

$$\psi: \ [0,1] \leftrightarrow [0,1],$$

поскольку из условий монотонности и непрерывности вытекает, что

$$\exists\ \psi^{-1}(y) \in C([0,1]).$$

Далее, пусть

$$[0,1] \setminus P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

Тогда

$$\psi: \ (\alpha_n, \beta_n) \to \left(\frac{\varphi(\alpha_n) + \alpha_n}{2}, \frac{\varphi(\beta_n) + \beta_n}{2} \right).$$

Учтем, что $\varphi(\alpha_n) = \varphi(\beta_n)$. Поэтому

$$\mu\left(\psi(\alpha_n, \beta_n)\right) = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{1}{2}\mu\left((\alpha_n, \beta_n)\right.$$

Тогда

$$\mu\left(\psi\left([0,1] \setminus P\right)\right) = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что

$$\mu\left(\psi(P)\right) = \frac{1}{2}.$$

Ранее было доказано, что $\exists$ неизмеримое $B \subset \psi(P)$. Рассмотрим множество

$$C = \psi^{-1}(B) \subset P.$$

Тогда C измеримо и $\mu(C) = 0$.

Вернемся к вопросу о измеримости $f(g)$, где f измерима, а g непрерывна. Положим

$$g(y) = \psi^{-1}(y) \in C([0,1]),$$
$$f(x) = \mathcal{X}_C(x),$$

то есть характеристическая функция множеста C (измерима). Тода

$$f(g(y)) = \mathcal{X}_B(y),$$

а следовательно, неизмерима.

Домашнее задание 8.1. *Доказать, что существует множество, измеримое по Лебегу, но не измеримое по Борелю.*

Домашнее задание 8.2. *Построить пример $f(x) \in C([0,1])$ и измеримого $A \subset \mathbb{R}$ таких, что*

$$f^{-1}(A)$$

не является измеримым.

Сходимость по мере

(X, M, mu) – измеримое пространство.

Пусть функции

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad f(x)$$

измеримы и конечны.

Определение 8.1. *f_n сходится по мере μ к f*, то есть $f_n \xrightarrow{\mu} f, \iff \forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| > 0\}\right) = 0.$$

Замечание. Более подробный вариант записи определения 8.1 звучит следующим образом. $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, \gamma > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall n > N$

$$\mu\left(\{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) < \gamma.$$

Пусть теперь

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,$$
$$g_n \xrightarrow{\mu} g.$$

Тогда будет выполняться

$$f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g.$$

Это следует из того, что

$$\{x \in X : \ |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X : \ |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}.$$

Рассмотрим теперь

$$f_n(x) \text{на} \overset{\mu}{\to} \mathbb{R} f(x).$$

Обсудим, будет ли верно, что

$$f_n^2(x) \xrightarrow{\mu} f^2(x). \tag{14}$$

Для этого рассмотрим

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad f(x) = x.$$

Тогда

$$f_n^2(x) - f^2(x) = \frac{2x}{n} + \frac{1}{2n}.$$

Мера множества, на котором $\frac{2x}{n} > 1$, бесконечна. Значит, утверждение (14) не выполняется.

Домашнее задание 8.3. *Доказать критерий Коши для сходимости по мере:*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \forall\, \varepsilon > 0, \forall \gamma > 0\ \exists N : \ \forall m, n > N$$

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right) < \gamma.$$

Домашнее задание 8.4. *Пусть $\mu(X) < \infty$, а функции*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad f$$

измеримы и конечны, причем

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

$$f_n, f: \ X \to G \subset \mathbb{R},$$

а функция

$$g(y) \in C(G).$$

Доказать, что

$$g(f_n) \xrightarrow{\mu} g(f).$$

Сходимость почти всюду

Пусть, как и в прошлом пункте, (X, M, mu) – измеримое пространство, а функции

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad f(x)$$

измеримы и конечны.

Определение 8.2. *f_n сходится к f почти всюду*, то есть $f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x), \iff$

$$\mu\left(\{x \in X : f_n \not\to f\}\right) = 0.$$

На первый взгляд сходимость почти всюду выглядит проще сходимости по мере. Однако сходимость по мере метризуема, то есть в пространстве функций можно задать метрику такую, что сходимость по мере и сходимость по этой метрике будут эквивалентны. В то же время сходимость почти всюду даже не топологизируема. На подмножествах из $[0, 1]$ не существует топологии, которая бы задавала сходимость почти всюду.

Пример. Рассмотрим пример последовательности, которая сходится почти всюду, но не сходится по мере. В качестве последовательности возьмем характеристические функции отрезков $[-n, n]$. При $n \to \infty$ функции сходятся к 1. В то же время множества, на которых разность между $\mathcal{X}_{[-n,n]}$ и 1 больше $1/2$, имеют значение меры, равное бесконечности. Это означает, что сходимости по мере нет.

Представим множество

$$\{x \in X : \ f_n \not\to f(x)\} =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}.$$

Тогда $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f \iff \forall m$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{n_1}\right\}\right) = 0. \tag{15}$$

Пусть $\mu(X) < \infty$. Тогда множество из (15) можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x \in X:\ |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{n_1}\right\}\right).$$

Из этого представления следует, что для конечных мер из сходимости почти всюду вытекает сходимость по мере.

Пример Рисса

Будем рассматривать функции

$$\psi_{k,n}(x) = \mathcal{X}_{[}k/2^n, (k+1)/2^n](x),$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, \ldots, 2^{n-1}$.

Пусть произвольное $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда можем представить[33]

$$r = 2^n + k,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, \ldots, 2^{n-1}$. Обозначим

$$f_r(x) = \psi_{k,n}(x).$$

Заметим, что $r \to \infty \iff n \to \infty$. Тогда мера точек, на которых $f_r > 0$, стремится к 0. Отсюда следует, что для f_r есть сходимость по мере. В то же время сходимости ни в одной точки нет, потому что сколь угодно далеко есть 0 и 1.

[33] А значит, по заданному r можем единственным образом определить n и k.

Семинар 9. Сходимость по мере, интеграл Лебега

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 8.1. *Доказать, что существует множество, измеримое по Лебегу, но не измеримое по Борелю.*

Доказательство. На прошлом семинаре работали с $\varphi(x)$ – кривой Кантора. Также обсуждалась функция

$$\psi(x) = \frac{x + \varphi(x)}{2},$$
$$\psi: \ [0,1] \leftrightarrow [0,1].$$

Если P – множество Кантора, то

$$\mu(\psi(P)) = \frac{1}{2}.$$

Из того, что ψ взаимно однозначна, следует, что

$$\exists \ g(y) = \psi^{-1}(y).$$

В прошлый раз обсуждалось, что $\exists$ неизмеримое $B \subset \psi(P)$. Рассмотрим

$$\psi^{-1}(B) = g(B) = A \subset P.$$

Множество A измеримо по Лебегу, $\mu(A) = 0$. Предположим, что A измеримо по Борелю, тогда его прообраз должен будет быть измеримым по Лебегу. Но

$$g^{-1}(A) = B,$$

получаем противоречие. □

Домашнее задание 8.3. *Доказать критерий Коши для сходимости по мере:*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall \gamma > 0 \ \exists N: \ \forall m, n > N$$

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right) < \gamma.$$

Доказательство. $\Leftarrow$[34] Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная по мере последовательность конечных измеримых функций. Тогда $\exists$ возрастающая последовательность N_i натуральных чисел такая, что $\forall\ m, n \geq N_i$

$$\mu\left(\left\{x \in X : \ |f_n(x) - f_m(x)| > \frac{1}{2^i}\right\}\right) < \frac{1}{2^i}. \tag{16}$$

[34] Доказательство необходимости опустим.

Рассмотрим теперь $\{f_{N_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. Из (16), в частности, $\forall\ i$

$$\mu\left(\underbrace{\left\{x \in X:\ |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| > \frac{1}{2^i}\right\}}_{E_i}\right) < \frac{1}{2^i}.$$

Обозначим

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i.$$

Для $\forall\ k$

$$\mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k+1} \to 0.$$

Отсюда следует, что $\mu(E) = 0$. Покажем теперь, что для множества $X \setminus E$ все хорошо. Пусть $x \in X \setminus E$. Тогда $\exists k_0$ такое, что

$$x \notin \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i.$$

Отсюда следует, что $\forall\ l > r \geq k$

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_r}(x)| \leq |f_{n_l}(x) - f_{n_{l-1}}(x)| + \ldots + |f_{n_{r+1}}(x) - f_{n_r}(x)| \leq 2^{-(l-1)} + \ldots + 2^{-r}.$$

Получаем, что последовательность $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда

$$\forall\ x \in X \setminus E\ \exists \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x).$$

Предельная функция $f(x)$ измерима на $X \setminus E$. Можем ее доопределить как $f = 0$ на E.

Проверим, что

$$f_{n_i} \xrightarrow{\mu} f$$

на X. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Подберем k_0 такое, что

$$2^{-k_0+1} < \min(\varepsilon, \gamma).$$

Заметим, что если $x \notin \bigcup\limits_{i=k_0}^{\infty} E_i$ и $i \geq k_0$, то

$$|f_{n_i}(x) - f(x)| = \lim_{j\to\infty} |f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \sum_{l=i}^{j-1} |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{l=i}^{j=1} 2^{-l} < 2^{-i+1} < \varepsilon.$$

Тогда при $i \geq k_0$

$$\{x \in X:\ |f_{n_i}(x) - f(x)\} \subset \bigcup_{r=k_0}^{\infty} E_r.$$

$\square$

Домашнее задание 8.4. *Пусть $\mu(X) < \infty$, а функции*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad f$$

измеримы и конечны, причем

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

$$f_n, f: \ X \to G \subset \mathbb{R},$$

G – открытое, а функция

$$g(y) \in C(G).$$

Доказать, что

$$g(f_n) \xrightarrow{\mu} g(f).$$

Доказательство. Пусть заданы $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$. Представим

$$G = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

где $\forall\ l\ K_l$ – компакт и

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$$

Положим

$$E_l = f^{-1}(K_l).$$

Тогда

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$$

и $X = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E_l$. Зафиксируем l_0 такое, что

$$\mu(X \setminus E_{l_0}) < \frac{\gamma}{2}.$$

Здесь мы используем то, что $\mu(X) < \infty$. Введем параметр

$$\alpha = \operatorname{dist}(K_{l_0}, \mathbb{R} \setminus G).$$

Если $\mathbb{R} \setminus G = \emptyset$, положим $\alpha = 1$. Рассмотрим множество

$$K' = \left\{y \in \mathbb{R}^1 : \ \operatorname{dist}(y, K_{l_0}) < \alpha/2\right\}.$$

K' является компактом и $K' \subset G$. Функция $g(y)$ будет равномерно непрерывна на K'.

Отсюда вытекает, что $\exists\ \delta > 0$ такое, что для $y, z \in K'$ при $|y - z| < \delta$ будет выполняться

$$|g(y) - g(z)| < \varepsilon.$$

Вернемся к исходной последовательности $\{f_n\}$. Фиксируем номер N такой, что при $n \geq N$, если

$$A_n = \{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \min(\alpha/2, \delta)\},$$

то $\mu(A_n) < \gamma/2$ (из определения сходимости по мере).

Пусть $n \geq N$ и $x \notin A_n \cup (X \setminus E_{l_0})$. Тогда

$$f(x) \in K_{l_0} \subset K'$$

и

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда следует, что $f_n(x) \in K'$ и

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \delta.$$

Тогда

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\{x \in X : \ |g(f_n(x)) - g(f(x))| > \varepsilon\} \subset A_n \cup (X \setminus A_{l_0}),$$

но

$$\mu(A_n \cup (X \setminus E_{l_0}) < \gamma.$$

Доказательство завершено. □

Домашнее задание 9.1. *Построить ряд из полиномов*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)$$

такой, что $\forall\ f(x) \in C\left([0,1]\right)\ \exists$ *возрастающая последовательность*[35] *натуральных чисел* n_k *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{n_k} P_i(x) \rightrightarrows f(x)$$

на $[0,1]$.

Теорема Рисса

Теорема 9.1. *(Рисса) Пусть*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad f(x)$$

измеримые и конечные функции,

$$f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x).$$

Тогда $\exists\ n_k$ *такие, что*

$$f_{n_k} \xrightarrow{n.e.} f(x).$$

[35]Такая последовательность называется *универсальным рядом.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\mu(X) < \infty.$$

Выберем возрастающие n_k таким образом, что

$$\mu\left\{x \in X : \ |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\} < 2^{-k}.$$

Поскольку выше записано условие из определения сходимости по мере, для больших n_k оно будет выполняться.

Докажем, что

$$f_{n_k} \overset{\text{п.в.}}{\to} f.$$

Если задано $\varepsilon > 0$ и k_0 таково, что

$$\frac{1}{k_0} < \varepsilon,$$

то

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \{x : \ |f_{n_k} - f(x)| > \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \left\{x : \ |f_{n_k} - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}.$$

Следовательно,

$$\mu\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \{x : \ |f_{n_k} - f(x)| > \varepsilon\}\right) \leq$$

$$\leq \mu\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \left\{x : \ |f_{n_k} - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-k_0+1} \to 0, \quad k_0 \to \infty.$$

По критерию сходимости почти всюду на множестве конечной меры (обсуждалось на прошлом семинаре) получим, что последовательность сходится почти всюду.

Перейдем к случаю, когда

$$X = \bigsqcup_{l=1}^{\infty} B_l, \quad \mu(B_l) < \infty.$$

Если на X

$$f_n \overset{\mu}{\to} f,$$

то и на $\forall B_l$

$$f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

Далее следуем следующему алгоритму. Из последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ извлекаем подпоследовательность $\{f_{n_1}(x)\}_{n_1=1}^{\infty}$ сходящуюся почти всюду на множестве B_1. Из $\{f_{n_1}(x)\}_{n_1=1}^{\infty}$ извлекаем подпоследовательность $\{f_{n_2}(x)\}_{n_2=1}^{\infty}$, которая сходится почти всюду на B_2 и так далее.

Затем собираем новую последовательность $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из диагональных элементов полученных подпоследовательностей. $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будет сходиться почти всюду на каждом из B_l. Это значит, что на каждом B_l она будет иметь множество меры ноль, где она не сходится. Тогда и на всем X множество, где $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится, имеет меру 0. $\square$

Теорема Лузина

Теорема 9.2. *(Лузина) Пусть $f(x)$ измерима и конечна на $[a,b]$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ $g(x) = g_\varepsilon(x) \in C([a,b])$ такая, что*

$$\mu\left(\{x \in [a,b] :\ f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon$$

Замечание. Фактически условие теоремы имеет следующий смысл. Если функция измерима и конечна, ее можно «исправить» на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы она стала непрерывной.

Заметим, однако, что можно построить измеримую и конечную функцию такую, что, как бы ее не изменяли на множестве нулевой меры, она оставалась разрывной в каждой точке.

Домашнее задание 9.2. *Доказать, что последовательность $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится по мере на $[0,1]$.*

Домашнее задание 9.3. *Пусть $f(x)$ измерима, конечна и периодична на $[0,1]$, а*

$$f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ на } [0,1].$$

Интеграл Лебега

Пусть $\mu(X) < \infty$.

Построение интеграла Лебега проводится в несколько шагов.

1 Рассматриваются простые функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{E_k}(x),$$

где $E_k \in M$, $\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k = X$. Тогда интеграл Лебега от $f(x)$ определяется как

$$(L)\int f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k). \tag{17}$$

2 $f(x)$ измерима и неотрицательна. Рассматриваются множество

$$Q_f = \{\text{простая неотр.}\varphi \leq f(x)\ \forall x \in X\}.$$

Интеграл Лебега полагается

$$(L)\int_X f(x)d\mu = \sup_{\varphi \in Q_f}(L)\int_X \varphi(x)d\mu,$$

где $(L)\int_X \varphi(x)d\mu$ – интеграл (17). Отдельно оговаривается, что

$$f \in L(X) \iff (L)\int_X f(x)d\mu < \infty.$$

3 $f(x)$ измерима. Рассматривается представление

$$f = f_+ - f_-,$$

где

$$\begin{cases} f_+ = \max(f, 0), \\ f_- = -\min(f, 0). \end{cases}$$

Здесь

$$f \in L(X) \iff \begin{cases} f_+(x) \in L(X), \\ f_-(x) \in L(X). \end{cases}$$

Если это условие выполнено, определяется интеграл Лебега для $f(x)$ как

$$(L)\int f d\mu = (L)\int f_- d\mu - (L)\int f_+ d\mu.$$

Интеграл Лебега обладает следующим примечательным свойством.

$$f(x) \in L(X) \iff |f(x)| \in L(X).$$

Семинар 10. Интегрируемость по Лебегу

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 9.1. *Построить ряд из полиномов*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)$$

такой, что $\forall\ f(x) \in C([0,1])\ \exists$ *возрастающая последовательность натуральных чисел* n_k *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{n_k} P_i(x) \rightrightarrows f(x)$$

на $[0,1]$.

Решение. Пусть

$$\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

– все полиномы с рациональным коэффицентами. Для $\forall\ n$ на $[0,1]$ коэффиценты выбираем так, чтобы

$$|a_n - a_n'| < \frac{\varepsilon}{m},$$

где m – степень P. Тогда

$$|P(x) - P'(x)| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n - a_n'| x^n < \varepsilon.$$

Для каждой $f(x)$ можно выбрать полином с рациональными коэффицентами, который приближает ее с заданной точностью. Из взятой $\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ выбираем

$$\begin{cases} P_1 = Q_1, \\ P_n = Q_n - Q_{n-1}, \quad n > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(x) = Q_n(x).$$

Теорема Лузина

Обсудим план доказательства следующей теоремы.

Теорема 10.1. *(Лузина) Пусть* $f(x)$ *измерима и конечна на* $[a,b]$. *Тогда* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ $g(x) = g_\varepsilon(x) \in C([a,b])$ *такая, что*

$$\mu(\{x \in [a,b] :\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$$

Для удобства будем рассматривать $[a,b] = [0,1]$.

Доказательство. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$.

1 Предположим,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{r} c\mathcal{X}_{F_k}(x),$$

где $\forall\ k\ F_k \subset [0,1]$ замкнуто и

$$F_k \cap F_j = \emptyset, \quad k \neq j.$$

Тогда

$$g(x) \in C\left(\bigsqcup_{k=1}^{r} F_k\right).$$

2 Известен факт, что $\exists$ последовательность простых $f_n(x)$ таких, что

$$f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x), \quad n \to \infty.$$

Функции f_n будут иметь вид

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} c_{k,n}\mathcal{X}_{E_{k,n}}(x),$$

причем

$$\bigsqcup_{k=1}^{k} E_{k,n} = [0,1].$$

Для $\forall\ k, n$ построим замкнутые

$$F_{k,n} \subset E_{k,n}$$

такие, что

$$\mu(E_{k,n} \setminus F_{k,n}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+n+1}}.$$

Обозначим

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} F_{k,n}.$$

Множество A_n замкнуто и, кроме того,

$$f_n(x) \in C(A_n).$$

3 Оценим меру

$$\mu([0,1] \setminus A_n) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{k_n} E_{k,n} \setminus \bigsqcup_{k=1}^{k_n} F_{k,n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \mu\left(E_{k,n} \setminus F_{k,n}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

4 Для $f_n(x)$ верно, что
$$f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x).$$
По теореме Егорова, $\exists\ B \subset [0,1]$ такое, что
$$\mu\left([0,1] \setminus B\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$
и на B сходимость равномерная. Можно считать, что B замкнуто.

5 Рассмотрим
$$C = B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$
Верно, что
$$[0,1] \setminus C \subset ([0,1] \setminus B) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A_n)\right).$$
Отсюда получим, что
$$\mu([0,1] \setminus C) \leq \mu([0,1] \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu([0,1] \setminus A_n) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$
Кроме того, C замкнуто.

6 На замкнутом C имеем последовательность непрерывных $f_n(x)$ (см. пункт 4), равномерно сходящихся к $f(x)$. Отсюда
$$f(x) \in C(C).$$

7 Продолжим $f(x)$ на весь отрезок $[0,1]$ с множества C до $g(x) \in C([0,1])$.

□

Домашнее задание 10.1. *Доказать, что если $f(x)$ на $[0,1]$ такова, что $\forall\ \varepsilon > 0$*
$$\exists\ g(x) \in C([0,1])$$
с условием
$$\mu\left(\{x \in [0,1] :\ f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon,$$
то $f(x)$ измерима и конечна почти всюду.

Домашнее задание 10.2. *Пусть*
$$\left\{r_n = \frac{p_n}{q_n}\right\} = Q \cap (0,1],$$
причем дроби p_n/q_n несократимые. Пусть также
$$f_n(x) = \exp\left\{-(p_n - q_n x)^2\right\}, \quad x \in [0,1].$$
Доказать, что $f_n(x)$ сходится по мере на $[0,1]$.

Домашнее задание 10.3. *Доказать, что $f_n(x)$ из предыдущей задачи не сходится почти всюду.*

Критерий интегрируемости функции по Лебегу

Пусть

$$\mu(X) < \infty, \tag{18}$$

а функции

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

измеримы и неотрицательны на X. Введем формальное обозначение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Отсюда следует, что ряд неотрицательных измеримых функций можно интегрировать почленно. То есть, интеграл Лебега (конечный либо бесконечный)

$$\int_X f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)d\mu. \tag{19}$$

Это и утверждает теорема Беппо Леви.

Пусть теперь $f(x)$ – измеримая функция. Введем множества

$$F_m = \{x \in X : \ |f(x)| \geq m\}.$$

При условии (18) верно утверждение

$$f \in L(X) \iff \sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_m) < \infty.$$

Доказательство. Введем функцию

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{X}_{F_m}(x).$$

Очевидно, выполнено

$$h(x) \leq |f(x)| \leq h(x) + 1.$$

Тогда

$$\int_X h(x)d\mu \leq \int_X |f(x)|d\mu \leq$$
$$\leq \int_X h(x)d\mu + \mu(X).$$

На этом месте нам и требуется свойство (18). Теперь, используя (19), получим, что

$$\int_X h(x)d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_m).$$

□

Пример. Рассмотрим случай, когда условие $\mu(X) < \infty$ не выполнено. Возьмем на $X = \mathbb{R}^1$ функции

$$f_n(x) = \frac{1}{2}.$$

Тогда все F_m пусты, но $f(x) = 1/2$ не интегрируема на прямой.

Задача 10.1. *Пусть*

$$f \in L([0,1]).$$

Доказать, что тогда

$$\mu(F_m) = o(1/m), \quad m \to \infty.$$

Доказательство. Поскольку F_m вложены друг в друга, $\mu(F_m)$ образуют убывающую последовательность. Для

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \quad a_n \downarrow$$

выполняется

$$\frac{k}{2} a_k \leq \sum_{n=[k/2]}^{k} a_n \to 0, \quad k \to \infty.$$

В данном случае $a_m = F_m$. □

Домашнее задание 10.4. *Привести пример $f(x)$ измеримой и неотрицательной на $[0,1]$ такой, что*

$$\mu(F_m) = o(1/m), \quad m \to \infty,$$

но $f \notin L([0,1])$.

Рассмотрим

$$f(x) = x^{-\alpha}, \quad x \in [0,1], \quad \alpha > 0. \tag{20}$$

Выясним, верно ли, что $f(x) \in L([0,1])$. Для этого обратимся к F_m, которые здесь будут иметь вид[36]

$$F_m = (0, m^{-\frac{1}{\alpha}}].$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_m) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Данный ряд сходится, если $1/\alpha > 1$, то есть $\alpha < 1$.

Домашнее задание 10.5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, а*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin x^{\beta}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответить на три вопроса.

1 $f \in R([0,1]) \iff$ *?*

2 $f \in R_{+0}((0,1]) \iff$ *?*

3 $f \in L(0,1) \iff$ *?*

[36] Это следует напрямую из условия $|f(x)| \geq m$.

Теорема Беппо Леви о предельном переходе

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 10.2. *Занумеруем рациональные точки*

$$f(x) = \{r_n\}_{n=1}^{\infty} = Q \cap [0,1].$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}}. \tag{21}$$

На рациональных x, конечно, ряд (21) принимает значение ∞. Требуется доказать, что ряд (21) сходится почти всюду.

Доказательство. Поскольку все функции в (21) измеримы, $f(x)$ измерима. По теореме Беппо Леви,

$$\int_{[0,1]} f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{[0,1]} \frac{d\mu}{\sqrt{|x-r_n|}} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-1+r_n, r_n+1} \frac{d\mu}{\sqrt{|x-r_n|}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{[-1,1]} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{[0,1]} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} < \infty.$$

Получается, $f(x) \in L(0,1)$. Отсюда следует, что множество расходимости (21) имеет меру 0. □

Теорему Фату

Теорема 10.2. *(Фату) Пусть $f_n(x)$ измеримы и неотрицательны на X,*

$$f_n(x) \overset{n.e.}{\to} f(x),$$

где $f(x)$ также измерима и неотрицательна. Тогда[37]

$$\int_X f(x)d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

Пример. Рассмотрим случай, когда для теоремы 10.2 равенство не достигается. Возьмем

$$f_n(x) = n\mathcal{X}_{(0,1/n)}(x).$$

В каждой точке на $[0,1]$ $f_n(x)$ сходятся к 0. Значения же

$$\int_X f_n(x)d\mu = 1.$$

Кроме этого, если разбавить f_n 0 через один, получим, что предела последовательности интегралов вообще не существует.

[37] Заметим, что для утверждения теоремы не важно, является ли X конечным или σ-конечным.

Обсудим, зачем в теореме 10.2 требование неотрицательности. Построим такие $f_n(x)$, что

$$f_n(x) \in L(0,1),$$

для $\forall\ n$

$$\int_{[0,1]} f_n(x) d\mu = 0,$$

$$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in [0,1],$$

но $f(x) \notin L(0,1)$. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > \frac{1}{n}, \\ -n\ln(n), & 0 < x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

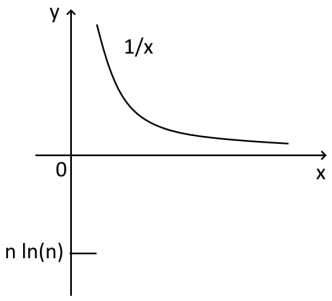

Рис. 10.1. График $f_n(x)$

График функции представлен на (рис. 10.1). Интеграл каждой $f_n(x)$ равен 0. При этом $f_n(x)$ сходится к $1/x$ в каждой точке. Значит, предельная $f(x)$ неинтегрируема.

Семинар 11. Сходимость по метрике

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 10.2. *Пусть*

$$\left\{r_n = \frac{p_n}{q_n}\right\} = Q \cap (0,1],$$

причем дроби p_n/q_n несократимые. Пусть также

$$f_n(x) = \exp\left\{-(p_n - q_n x)^2\right\}, \quad x \in [0,1].$$

Доказать, что $f_n(x)$ сходится по мере на $[0,1]$.

Доказательство. Выберем $\delta > 0$ и рассмотрим интервал

$$I_\delta = (r_n - \delta, r_n + \delta).$$

Выясним, как выглядит $f_n(x)$ при $x \notin I_\delta$. Заметим, что в таком случае $x = \alpha + r_n$, где $|\alpha| > \delta$. Тогда

$$f_n(x) = \exp\left\{-(p_n - q_n\alpha - p_n)^2\right\} = \exp\left\{-q_n^1\alpha^2\right\}.$$

При $n \to \infty$, очевидно, $f_n \to 0$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$2\delta < \gamma.$$

Тогда

$$f_n(x) \le e^{-q_n^2\delta^2}.$$

Подберем n_0 так, что $\forall\ n \ge n_0$

$$e^{-q_n^2\delta^2} < \varepsilon.$$

Заметим, что сходимости f_n к 0 почти всюду в данном случае нет. Пусть, например, q_n простое[38], $x \in (y_n/q_n, y_{n+1}/q_n)$. Справедливо представление

$$x = \frac{y_n}{q_n} + \alpha, \quad \text{где } |\alpha| < \frac{1}{q_n}.$$

Тогда

$$f_n(x) = e^{-(y_n - xq_n)^2} = e^{-(\alpha q_n)^2} \ge e^{-1}.$$

□

Домашнее задание 10.4. *Привести пример $f(x)$ измеримой и неотрицательной на $[0,1]$ такой, что*

$$\mu(F_m) = o(1/m), \quad m \to \infty,$$

но $f \notin L([0,1])$.

[38] Для иллюстрации, чтобы не было проблем с сократимостью.

Решение. Множество F_m определялось как

$$F_m = \{x \in [0,1] : \ |f(x)| \geq m\}.$$

На прошлом семинаре обсуждалось, что

$$f(x) \in L([0,1]) \iff \sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_m) < \infty.$$

Отсюда следует, что надо взять F_m такие, что $\mu(F_m) = o(1/m)$, но $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(F_m)$ расходится. К примеру, подходит

$$\mu(F_m) = \frac{1}{m \ln m} = x_m.$$

Возьмем

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \mathcal{X}_{[x_{m+1}, x_m)}(x).$$

Теорема Лебега о предельном переходе

Теорема 11.1. *(Лебега) Пусть мажорирующая функция $F(x) \in L(X)$, функции*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad f(x)$$

измеримы на X. Кроме того, известно, что

1 $\forall\, n\ \forall\, x \in X$

$$|f_n(x)| \leq F(x);$$

2 $f_n(x) \to f(x)$ *почти всюду на* X.

Тогда $f(x) \in L(X)$ *и*

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

Попробуем в теореме 11.1 немного ослабить ограничения. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, f(x) \in L(0,1)$,

$$f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x),$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{x}, \quad \forall\, n, \forall\, x \in (0,1).$$

Рассмотрим пример, обсуждавшийся в связи с теоремой 10.2. Пусть

$$f_n(x) = n \mathcal{X}_{(0,1/n)}(x).$$

Можно убедиться, что все $f_n(x) < 1/x$.

Домашнее задание 11.1. *Дана $F(x)$ неотрицательная, измеримая и такая, что*

$$F(x) \notin L(0,1).$$

Построить последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x) \in L(0,1)$ такие, что[39]

1 $\forall\, x, \forall\, n$

$$|f_n(x)| \leq F(x);$$

2 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *но*

3 $\int_{(0,1)} f(x)d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)d\mu$.

Домашнее задание 11.2. *Пусть $F(x) \in L(X)$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ измеримы,*

$$|f_n(x)| \leq F(x), \quad \forall\, x, \quad \forall\, n,$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Проверить, вытекает ли отсюда, что $f(x) \in L(0,1)$, и, если да, верно ли, что

$$\int_{(0,1)} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)d\mu.$$

Домашнее задание 11.3. *С помощью теоремы Лебега найти*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{d\mu}{x^{1/n}(1+x/n)^n}.$$

Линейность интеграла по множеству

Пусть $f(x) \in L(X)$ и справедливо представление

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in M.$$

Выяснить, будет ли верным, что $\forall\, n\ f(x) \in L(A_n)$ и

$$\int_X f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu.$$

Решение. Утверждение, что

$$f(x) \in L(A_n),$$

равносильно утверждению, что

$$f(x)\mathcal{X}_{A_n}(x) \in L(X).$$

[39] Иными словами, задача показывает, что ни одна неинтегрируемая функция не годится на роль мажоранды.

Очевидно, $f(x)\mathcal{X}_{A_n}(x)$ измерима на $\forall\ A_n$. Из этого факта и из мажорируемости интегрируемой функцией

$$|f(x)\mathcal{X}_{A_n}(x)| \leq |f(x)|$$

следует, что $f(x)\mathcal{X}_{A_n}(x) \in L(X)$.

Рассмотрим теперь

$$g_n(x) = f(x)\mathcal{X}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(x).$$

Верно, что

$$|g(x)| \leq |f(x)|,$$

тогда $g_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f$. Отсюда

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f(x)\mathcal{X}_{A_k}(x) d\mu.$$

Пусть теперь

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in M,$$

а функция $f(x) \in L(A_n)\ \forall\ n$. Кроме того, выполнено одно из условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f(x) d\mu \right| < \infty; \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu < \infty. \tag{23}$$

Следует ли из этого, что $f(x) \in L(X)$?

Решение. Справедлива следующая запись[40]

$$\int_X |f(x)| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f(x)| \mathcal{X}_{A_n}(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu.$$

Следовательно, из (23) следует интегрируемость $f(x)$.

Покажем теперь, что в случае выполнения (22) могут возникнуть сложности. Построим следующий пример. На $[0,1]$ в качестве A_n возьмем интервал $(1/(n+1), 1/n)$ и разделим его пополам. На левой половине A_n положим $f(x) = -1$, а на правой $f(x) = 1$.

[40] Первый переход следует из теоремы Беппо Леви.

Неравенство Чебышёва

Теорема 11.2. *(неравенство Чебышёва) Пусть $f(x) \in L(X)$, $\lambda > 0$. Тогда*

$$\mu\left(\{x \in X : \ |f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f(x)| d\mu.$$

Задача 11.1. *Пусть $f(x) \in L(X)$ такая, что $\forall\ B \in M$*

$$\int_B f(x) d\mu = 0.$$

Доказать, что тогда $f(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. Рассмотрим множество, где $f(x) > 0$. По теореме 11.2 получается, что такое множество имеет меру 0. Аналогично для множества, где $f(x) < 0$. □

Домашнее задание 11.4. *Пусть $f(x) \in L(0,1)$, $f(x) > 0$. Доказать, что $\forall\ \alpha > 0$*

$$\inf_{B \in M:\ \mu(B) \geq \alpha} \int_B f(x) d\mu > 0.$$

Домашнее задание 11.5. *Пусть последовательность измеримых множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $[0,1]$ такова, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Пусть k – натуральное число и

$$U_k = \{x \in (0,1) : \ x \in \ \text{по крайней мере } k \text{ разл. } A_n\}.$$

Доказать, что

$$\mu(U_k) \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Сходимость по метрике

Покажем, что сходимость по мере можно задать с помощью некоторой метрики. Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

– измеримые и конечные функции на $[0,1]$.

1 (Введение метрики) Пусть f, g – измеримые и конечные на $[0,1]$ функции. Рассмотрим[41]

$$\rho(f,g) = \int_{(0,1)} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu. \tag{24}$$

[41] Считаем, что множество $[0,1]$ имеет конечную меру, а подынтегральная функция измерима и не больше 1.

Покажем, что (24) является метрикой[42]. Проверим неравенство треугольника для (24). Известно, что

$$|f(x)-h(x)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$$

для $\forall\ f, g, h$ и $\forall\ x$. Тогда

$$\int_{(0,1)} \frac{|f(x)-h(x)|}{1+|f(x)-h(x)|} d\mu \le \int_{(0,1)} \frac{|f-g|+|g-h|}{1+|f-g|+|g-h|} d\mu \le$$

$$\le \int_{(0,1)} \frac{|f-g|}{1+|f-g|+|g-h|} d\mu \le + \int_{(0,1)} \frac{|g-h|}{1+|f-g|+|g-h|} d\mu \le$$

$$\le \int_{(0,1)} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \le + \int_{(0,1)} \frac{|g-h|}{|f-g|+|g-h|} d\mu.$$

2 Докажем, что сходимость по метрике (24) равносильна сходимости по мере.

Предположим сначала, что

$$f_n \xrightarrow{\mu} 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим

$$E_n(\varepsilon) = \{x : \ |f_n(x)| > \varepsilon\}.$$

Из сходимости f_n по мере к 0 следует, что

$$\mu(E_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Оценим

$$\rho(f_n, 0) = \int_{(0,1)} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu =$$

$$= \int_{E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu + \int_{(0,1)\setminus E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu \le \mu(E_n) + \varepsilon.$$

Доказательство второй части равносильности предоставляется в качестве домашнего упражнения.

Домашнее задание 11.6. *Доказать, что если*

$$\rho(f_n, 0) \to 0,$$

то

$$f_n \xrightarrow{\mu} 0.$$

[42]Функции, совпадающие почти всюду, конечно, будем считать одинаковыми.

Семинар 12. Пространство L_p

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 11.1. *Дана $F(x)$ неотрицательная, измеримая и такая, что*

$$F(x) \notin L(0,1).$$

Построить последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x) \in L(0,1)$ такие, что

1 $\forall\ x, \forall\ n$
$$|f_n(x)| \leq F(x);$$

2 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *но*

3 $\int_{(0,1)} f(x)d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)d\mu$.

Решение. Рассмотрим

$$F_n = \{x \in (0,1) :\ F(x) \geq n\},$$

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \mu(F_n).$$

Заметим, что

$$S_m \to \infty, \quad m \to \infty.$$

Определим

$$f_n = \frac{1}{S_m} \sum_{n=1}^{m} \mathcal{X}_{F_n}, \quad f \equiv 0.$$

1 С некоторого N $\forall\ m > N$ все функции ограничены, то есть

$$|f_m| < F.$$

2 $\forall\ x \in (0,1)$ $\exists\ N$ такое, что

$$N \leq F(x) < N + 1.$$

Для $\forall\ m > N$

$$f_m(x) = \frac{1}{S_m} N \to 0.$$

3 Рассмотрим

$$\int_{(0,1)} f_m d\mu = \frac{1}{S_m} \sum_{n=1}^{m} \mu(F_n) = 1.$$

Замечание. Альтернативный способ решения задачи заключается в следующем. Пусть

$$E_t = \{x \in [0,1] : \ F(x) \le t\}.$$

Возьмем последовательность функций вида

$$f_t(x) = F(x)\mathcal{X}_{E_t}(x).$$

Для них

$$\int_{(0,1)} f_t(x)d\mu \to \infty, \quad t \to \infty,$$

и можно выбрать подпоследовательность $t_n \uparrow$ такую, что

$$\int_{(0,1)} (f_{t_{n+1}}(x) - f_{t_n}(x))d\mu > 1.$$

Последовательность

$$g_n(x) = F(t)\mathcal{X}_{E_{t_{n+1}} \setminus E_{t_n}}(x)$$

сходится в каждой точке к 0, а интегралы больше 1.

Домашнее задание 11.2. *Пусть* $F(x) \in L(X)$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ *измеримы,*

$$|f_n(x)| \le F(x), \quad \forall\, x, \quad \forall\, n,$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Проверить, вытекает ли отсюда, что $f(x) \in L(0,1)$, *и, если да, верно ли, что*

$$\int_{(0,1)} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)d\mu.$$

Решение. 1 По теореме Рисса $\exists$

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x).$$

По теореме Лебега, $f(x) \in L(X)$.

2 Предположим, что

$$\int_{(0,1)} f_n(x)d\mu \not\to \int_{(0,1)} f(x)d\mu.$$

Тогда $\exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\forall\ k$

$$\left| \int_X f_{n_k}(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu \right| > \varepsilon_0. \tag{25}$$

Заметим, что

$$f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f(x).$$

Снова применим теорему Рисса. Получается, что $\exists$

$$f_{n_{k_m}} \xrightarrow{\text{п.в.}} f.$$

По теореме Лебега,

$$\int_X f_{n_{k_m}}(x)d\mu \to \int_X f(x)d\mu.$$

Получили противоречие с (25).

Домашнее задание 11.3. *С помощью теоремы Лебега найти*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{d\mu}{x^{1/n}(1+x/n)^n}.$$

Решение. Будем рассматривать $n \geq 2$, иначе подынтегральная функция неинтегрируема. Для $x > 0$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{n}\cdot n+\left(\frac{x}{n}\right)^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\ldots >$$

$$> 1+x+x^2\frac{n-1}{2n} \geq 1+x+\frac{x^2}{4}.$$

Тогда мажорирующая функция может быть записана в виде

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1], \\ \frac{1}{1+x+x^2/4}, & x\in(1,+\infty). \end{cases}$$

Домашнее задание 12.1. *Доказать, что сходимость почти всюду на* $(0,1)$ *не метризуема.*

Пространство L_p

Пусть $1 \leq p < \infty$, (X, M, μ) – измеримое пространство.
Введем

$$\hat{L}_p(X) = \left\{\text{все измеримые на } X \text{ ф-и: } \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty\right\},$$

$$L_0(X) = \{\text{все измеримые на } X \text{ и } = 0 \text{ п.в. ф-и}\}.$$

Пространством L_p будем называть $L\hat{L}_p(X)$, факторизованное[43] на $L_0(X)$

$$L_p(X) = \hat{L}_p(X) \setminus L_0(X)$$

с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{26}$$

Первые два свойства нормы для (26), очевидно, выполняются. Для $p = 1$ неравенство треугольника тривиально. Для $p > 1$ оно будет подробнее рассмотрено в лекционном курсе. В этом случае оно называется *неравенством Минковского.*

Замечание. При $p \in (0,1)$ возникают трудности с неравенством треуголька для (26).

[43] То есть мы будем отождествлять равные почти всюду функции.

Неравенство Гёльдера

Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

$$f \in L_p(X), \quad g \in L_q(X).$$

Тогда $fg \in L(X)$ и

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{27}$$

Замечание. Особо выделяют случай $p = q = 2$, неравенство (27) с такими параметрами называют *неравенством Коши – Буняковского*. Пространство L_2 называется *Гильбертовым* пространством.

Пример. Пусть измеримое пространство (X, M, μ) имеет следующий вид. $X = \mathbb{N}$, M – все подмножества $\mathbb{N}$, а $\mu(\{n\}) = 1$, $\forall\, n$. Числовая последовательность является функцией на таком пространстве. Неравенство Гёлдера в таком случае имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{1/q}.$$

Задача о пространстве L_p

Задача 12.1. *Пусть $\mu(X) < \infty$, $1 \leq p < r < \infty$, функция*

$$f(x) \in L_r(x).$$

Доказать, что $f(x) \in L_p(X)$.

Доказательство. Условие $f(x) \in L_r(x)$ означает, что

$$\int_X |f(x)|^r d\mu < \infty.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера. Если $f \in L_r(X)$, то $|f(x)|^p \in L_{r/p}(X)$. Положим $\tilde{p} = r/p$, из

$$\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$$

получим, что $\tilde{q} = r/(r-p)$. Тогда

$$\int_X |f(x)|^p \cdot 1 d\mu \leq \left(\int |f(x)|^r d\mu\right)^{p/r} (\mu(X))^{(r-p)/r}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r (\mu(X))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}.$$

□

Пример. Легко убедиться, что для $1 \leq p < r < \infty$ $\exists\ f \in L_p(0,1)$ такая, что

$$f \notin L_r(0,1).$$

В качестве примера такой функции можно привести

$$f(x) = \frac{1}{x^r}.$$

Домашнее задание 12.2. *Пусть $p \geq 1$. Привести пример $f(x) \in L_p([0,1])$ такой, что $\forall\ r > p$*

$$f(x) \notin L_r([0,1]).$$

Домашнее задание 12.3. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Привести пример $f(x) \in L_p([0,+\infty))$ такой, что $\forall\ r \in [1,+\infty) \setminus P$*

$$f(x) \notin L_r([0,+\infty)).$$

Домашнее задание 12.4. *Пусть $1 \leq p < r < \infty$, функция $f \in L_p([0,+\infty)) \cap L_r([0,+\infty))$. Доказать, что $\forall\ s \in [p,r]$*

$$f(x) \in L_s([0,+\infty)).$$

Пространство L_∞

Рассмотрим теперь

$$\hat{L}_\infty(x) = \{\text{изм. } f \text{ на } X:\ \exists\ c > 0:\ \mu\left(\{x \in X:\ |f(x)| > c\}\right) = 0\}.$$

Аналогично $L_p(X)$, определим

$$L_\infty(X) = \hat{L}_\infty(X) \setminus L_0(X)$$

с нормой

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X}|f(x)| = \inf\{c > 0:\ \mu\left(\{x \in X:\ |f(x)| > c\}\right) = 0\}.$$

Замечание. В L_∞ можно расширить нервенство Гёльдера (27) на случай $p = 1$, $q = \infty$. Пусть $f \in L_1$, $g \in L_\infty$. Тогда

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \int_X |f(x)|d\mu \cdot \|g\|_\infty.$$

Все пространства L_p, $1 \leq p < \infty$, L_∞ являются полными.

Пусть на $[0,1]$ задано $1 \leq p < \infty$. Пространство L_p является *сепарабельным*, то есть содержит счетное всюду плотное множество. Так, на L_1 счетным всюду плотным множеством являются многочлены с рациональными коэффицентами.

Обсудим, почем $L\infty([0,1])$ не является сепарабельным. Для того, чтобы некоторое $(L, \|\cdot\|)$ не являлось сепарабельным, следует укажем в нем несчетное A такое, что $\forall\ x \neq y$, $x, y \in A$

$$\|x - y\| > c > 0. \tag{28}$$

Обсудим записанное выше условие. Пусть M – счетное всюду плотное множество в $(L, \|\cdot\|)$. Тогда $\forall\ x \in A$, $\forall\ z_x \in M$ будет справедливо

$$\|x - z\| < \frac{c}{2}.$$

Это утверждение верно для всех $x \in A$. Теперь, для $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ точки $z_1, z_2 \in M$ тоже будут различны. Действительно, в противном случае справедлива запись

$$\|x_1 - x_3\| \leq \|x_1 - z_1\| + \|z_1 - x_2\| < c.$$

Отсюда следует противоречие с (28). Значит, для различных $x \in A$ попарно различаются и $z_x \in M$, откуда следует, что таких $z \in M$ несчетное количество.

Укажем такое несчетное A с условием (28) для $L_\infty([0,1])$. Этим требованиям будет удовлетворять множество

$$\left\{\mathcal{X}_{[0,t]}(x)\right\}_{t\in[0,1]}.$$

Домашнее задание 12.5. *Пусть* $f(x) \in L_p([0,1])$ $\forall\ p \in [1,\infty)$ *и* $\exists\ c > 0$ *такое, что*

$$\|f\|_p \leq \ \forall p \in [1,\infty).$$

Доказать, что $f \in L_\infty((0,1))$.

Семинар 13. Сходимости в L_p. Мера $\mu_1 \times \mu_2$

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 12.1. *Доказать, что сходимость почти всюду на* $(0,1)$ *не метризуема.*

Доказательство. Пусть ρ – метрика, сходимость по которой равносильна сходимости по μ. Предположим, существует $\tilde{\rho}$, сходимость по которой равносильна сходимости почти всюду. Предположим, что если есть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$f_n \xrightarrow{\rho} f,$$

то $\exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$f_{n_k} \xrightarrow{\tilde{\rho}} f.$$

Будем доказывать от противного следующее утверждение. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что

$$B_\delta(f) \subset \tilde{B}_\varepsilon(f). \tag{29}$$

Пусть это не так. Тогда $\exists \varepsilon > 0\ \exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0\ \exists$

$$g \in B_\delta(f) \setminus \tilde{B}_\varepsilon(f).$$

Положим $\delta_n = 1/n$, $\exists$

$$g_n \in B_{1/n}(f) \setminus \tilde{B}_\varepsilon(f),$$

и $g_n \overset{\rho}{f}$. Значит, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по $\tilde{\rho}$, а это противоречит определнию g_n. Значит, верно (29), и из сходимости по мере вытекает сходимость почти всюду, чего на самом деле не наблюдается. Значит, предположение о существовании $\tilde{\rho}$ ошибочно. $\square$

Замечание. Опишем решение данной задачи немного другим способом. Предположим, что так как $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, $f_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} 0$, $\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\tilde{\rho}(f_{n_k}, 0) > \varepsilon.$$

Но

$$f_{n_k} \xrightarrow{\mu} 0.$$

Тогда по теореме Рисса

$$\exists\ f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} 0,$$

откуда следует, что

$$\rho(f_{n_k}, 0) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Получаем противоречие.

Домашнее задание 12.3. *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Привести пример* $f(x) \in L_p([0,+\infty))$ *такой, что* $\forall\ r \in [1,+\infty) \setminus p$

$$f(x) \notin L_r([0,+\infty)).$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/p}}{\ln^2(n+1)} \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}(x).$$

Очевидно[44]

$$f^p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^{2p}(n+1)} \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}(x).$$

По следствию из теоремы Беппо Леви,

$$\int_{(0,1)} f^p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^{2p}(n+1)} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^{2p}(n+1)} < \infty.$$

Рассмотрим при $r > p$ интеграл

$$\int_{(0,1)} f^r(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r/p}}{n(n+1)} \frac{1}{\ln^{2r}(n+1)}. \tag{30}$$

Заметим, что

$$\frac{n^{r/p}}{n(n+1)} \sim n^{r/p-2},$$

а $r/p - 2 > -1$. Поэтому (30) расходится.

Рассмотрим теперь

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/p}}{\ln^2(n+1)} \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}\ln^2(n+1)} \mathcal{X}_{(n,n+1)}(x).$$

Как было показано выше, первое слагаемое этой суммы отвечает за расходимость при $r > p$. Второе же слагаемое дает расходимость для $r < p$. Таким образом, такая $f(x)$ принадлежит только $L_p([0, +\infty))$.

Домашнее задание 13.1. *Построить пример функции* $f \in \bigcap\limits_{1 \le p < \infty} L_p(0,1)$, *но*

$$f \notin L_\infty(0,1).$$

Сходимости в L_p

Пусть функции

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f$$

измеримы и конечны. О связи зависимостей $\xrightarrow{\mu}$ и $\xrightarrow{\text{п.в.}}$ говорили ранее.

Пусть теперь

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f \in L_1(X).$$

Можно говорить о сходимости

$$f_n \xrightarrow{L_1} f.$$

Обсудим, как сходимость в пространстве L_1 связана со сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.

[44] Поскольку для каждого x только одно слагаемое не обращается в 0.

1 Из $\xrightarrow{L_1}$ не следует $\xrightarrow{\text{п.в.}}$. В качестве контрипримера можно рассмотреть пример Рисса. Напомним, в качестве $f_n(x)$ выбираются

$$f_n(x) = \mathcal{X}_{\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]},$$

где

$$n = 2^m + k, \quad 0 \le k \le 2^m - 1.$$

Тогда

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_{(0,1)} |f_n(x) - 0| d\mu = \frac{1}{2^m} \to 0, \quad n \to \infty,$$

поскольку

$$m \to \infty, \text{ когда } n \to \infty.$$

Ранее обсуждали, что построенная таким образом функция не сходится ни в одной точке. Значит, сходимости почти всюду здесь нет.

2 Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = n\mathcal{X}_{(0,1/n)}(x).$$

В каждой точке f_n сходится к нулю, а ее интегралы все равны 1. Значит, и из $\xrightarrow{\text{п.в.}}$ не вытекает $\xrightarrow{L_1}$.

Из этого же примера следует, что из $\xrightarrow{\mu}$ не следует $\xrightarrow{L_1}$.

3 Воспользуемся неравенством Чебышёва

$$\mu\left(\{x : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu.$$

Из него вытекает, что из $\xrightarrow{L_1}$ следует $\xrightarrow{\mu}$.

Полную иллюстрацию связей различных видов сходимостей можно видеть на (рис. 13.1).

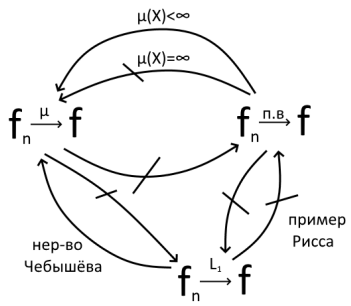

Рис. 13.1. Связь между различными сходимостями

Домашнее задание 13.2. *Пусть* $1 < r < \infty$, *а функции*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(0,1)$$

таковы, что

1 $\exists\ c > 0$ *такое, что* $\forall\ n$ *такое, что*

$$\|f_n\|_r \leq c;$$

2 Последовательность

$$f_n \overset{n.e.}{\to} f.$$

Требуется сделать следующие вещи.

1 Привести пример, что

$$f_n \overset{L_r}{\not\to} f.$$

2 Доказать, что если $p \in [1, r)$, *то*

$$f_n \overset{L_p}{\to} f.$$

Домашнее задание 13.3. *Пусть* $f(x)$ *измерима и неотрицательна на* $[0,1]$ *и для нее функция распределения*

$$F_f(y) = \mu\left(\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > y\}\right), \quad y \neq 0.$$

Доказать, что при $p \in [1, \infty)$

$$\int_{[0,1]} f^p(x) d\mu = p \int_{(0,+\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu.$$

Задача

Задача 13.1. *Пусть даны* $L_p(X)$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$. *Показать, что*

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{\|g\|_q \leq 1 \\ g \in L_q(X):}} \int_X f(x) g(x) d\mu. \tag{31}$$

Решение. Нужно показать, что для выражений из (31) выполнено $\leq$ и $\geq$. Соотношение $\geq$ доказывается с помощью неравенства Гёльдера с учетом того, что на g наложено условие $\|g\|_q \leq 1$.

Перейдем к доказательству соотношения $\leq$. Для этого построим g, удовлетворяющую условиям из правой части (31). Положим

$$\tilde{g} = |f|^{p-1} \mathrm{sgn} f.$$

Вычислим

$$\|\tilde{g}\|_q = \left(\int \left(|f|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_p^{p-1}.$$

Пусть теперь

$$g = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \mathrm{sgn} f.$$

Норма g равна 1. Вычислим

$$\int_X \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1}} d\mu = \|f\|_p.$$

Прямое произведение мер

Пусть S_1, S_2 – полукольца. Рассмотрим

$$S = S_1 \times S_2 = \{A \times B, \quad A \in S_1, B \in S_2\}.$$

Можно показать, что S является полукольцом.

Пусть теперь M_1, M_2 – σ-алгебры. Из прямое произведение

$$M_1 \times M_2$$

не сохраняет свойства σ-алгебры. Например, множество A (рис.), входящее в борелевскую σ-алгебру на $[0,1]^2$, не представимо в виде прямого произведения.

Пусть теперь (X_1, M_1, μ_1) и (X_2, M_2, μ_2) – измеримые пространства. Произведение

$$M_1 \times M_2$$

будет являться полукольцом. При этом справедлива следующая запись. Если

$$A \times B \in M_1 \times M_2,$$

то

$$m(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B). \tag{32}$$

Доказательство того, что m (32) σ-аддитивная мера, рассматривается в рамках лекционного курса.

Замечание. В рамках описанной выше ситуации такие множества, как, например, круг,оказываются неизмеримыми по m. Поэтому меру (32) продолжают по Лебегу

$$m \overset{\text{Лебег}}{\to} \mu = \mu_1 \times \mu_2.$$

Мера μ определена на некоторой σ-алгебре M, которая получается в процессе продолжения.

Теорема Фубини

В результате описанного в предыдущем пункте получаем новое измеримое пространство $(X_1 \times X_2, M, \mu)$.

Теорема 13.1. *(Фубини) Пусть $A \in M$, функция $f(x_1, x_2) \in L_\mu(A)$, то есть интегрируема по Лебегу, μ_1, μ_2 – полные меры. Тогда*

1 Для почти всех $x_1 \in X_1$

$$\varphi(x_2) = f(x_1, x_2)$$

интегрируема по μ_2 на[45]

$$A(x_1) = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\}.$$

2 Если

$$\psi(x) = \int_{A(x_1)} \varphi(x_1) d\mu_2,$$

то $\psi(x_1) \in L_{\mu_1}(X_1)$.

3 Справедливо представление

$$\int_A f(x_1, x_2) d\mu = \int_{X_1} \psi(x_1) d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\int_{A(x_1)} \varphi(x_1) d\mu_2 \right) d\mu_1,$$

то есть двойной интеграл сходится к повторному интегралу.

Обсудим теперь вытекает ли из того, что существуют повторные интегралы[46]

$$\int_{X_i} \psi_i(x_i) d\mu_i, \quad i = 1, 2,$$

существование двойного интеграла

$$\int_A f(x_1, x_2) d\mu.$$

Задача 13.2. *Построить функцию $f(x, y) \notin L(0, 1)^2$ такую, что*

1 $\forall\ x \in (0, 1)$

$$\exists \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu_2 = 0;$$

2 $\forall\ y \in (0, 1)$

$$\exists \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu_1 = 0.$$

[45] Заметим, что определенное таким образом $A(x_1) \in M_2$.
[46] Очевидно, равные.

Решение. На $(0,1)^2$ возьмем квадраты вида

$$I_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Положим[47]

$$|f(x,y)| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \chi_{I_n}(x,y).$$

Теперь, на каждый из I_n разделим на 4 равные части и зафиксируем на противоположных квадратах положительные и отрицательные значения (рис. 13.2).

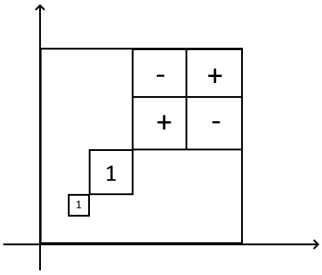

Рис. 13.2. Выбор значений на I_n

Домашнее задание 13.4. *Построить на* $(0,1)^2$ $f(x,y)$ *такую, что*

1

$$\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y) d\mu_2 \right) d\mu_1 = 0;$$

2

$$\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y) d\mu_1 \right) d\mu_2 = 1.$$

[47]Такое значение коэффицентов выбрано из соображения, что

$$\mu(I_n) = \frac{1}{2^{2n}}.$$

Семинар 14. Функции ограниченной вариации

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 13.2. *Пусть* $1 < r < \infty$, *а функции*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(0,1)$$

таковы, что

1 $\exists\ c > 0$ *такое, что*

$$\forall\ n\ \|f_n\|_r \leq c;$$

2 $f_n \overset{n.e.}{\to} f$.

1 Привести пример, что

$$f_n \overset{L_r}{\not\to} f.$$

2 Доказать, что если $p \in [1, r)$, *то*

$$f_n \overset{L_p}{\to} f.$$

Решение. 1 Положим

$$f_n = n\mathcal{X}_{[0,1/n]}, \quad f = 0, \quad c = 1.$$

Тогда

$$\|f_n\|_r = 1$$

и, очевидно, $\overset{L_r}{\not\to} 0$.

2 (От противного) Предположим, $\exists\ p \in [1, r)$ такое, что

$$f_n \overset{L_r}{\not\to} f.$$

Это означает, что $\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \{n_k\}$ такие, что

$$\|f_{n_k} - f\|_p > \varepsilon.$$

Будем доказывать, что из этого следует, что

$$\|f_{n_k} - f\|_r \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{33}$$

Без ограничения в общности в (33) положим $f = 0$, $p = 1$, $n_k = k$.

Запишем новые условия задачи. Пусть $1 < r < \infty$ и последовательность $\{f_n\} \subset L_r$. $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что

$$\int_{(0,1)} |f_n| d\mu > \varepsilon, \quad \forall n.$$

Возьмем вместо последовательности почти всюду последовательность всюду, то есть $\forall\ x \in (0,1)$

$$|f_n(x)| \to 0.$$

Хотим доказать, что

$$\int_{(0,1)} |f_n|^r d\mu \to \infty.$$

Положим

$$\delta_k = \frac{\varepsilon}{2^k},$$

$$E_{N,k} = \{x \in (0,1) : \ \forall\ n > N\ |f_k| < \delta_k\}.$$

Из того, что $|f_n| \to 0$, следует, что

$$\begin{cases} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_{N,k} = (0,1), \\ E_{N,k} \subset E_{N+1,k}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\exists\ N$ такое, что

$$\mu(E_{N,k}) > 1 - \delta_k.$$

Обозначим

$$F_{N,k} = (0,1) \setminus E_{N,k}.$$

Для $\forall\ n > N$ имеем

$$\varepsilon < \int_{(0,1)} |f_n| d\mu = \int_{E_{N,k}} |f_n| d\mu + \int_{F_{N,k}} |f_n| d\mu =$$

$$= \delta_k + \int_{F_{N,k}} |f_n| d\mu.$$

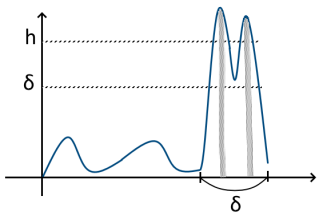

Рис. 13.1. Ограничение «плохого» участка $f(x)$

Рассматриваем область, выделенную на (рис. 13.1). Положим

$$\tilde{f}_n(x) = \max\{0, f_n - h_k\}, \quad h_k = \frac{2^k - 1}{2}.$$

Оценим
$$\int_{F_n} \tilde{f_n}(x)d\mu > \varepsilon - \delta_k - \delta_k h_k > \varepsilon\frac{2^k-1}{2^{k+1}}.$$
Существуют функции
$$\tilde{g}_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j},$$
где $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$, $\tilde{g}_n \le f_n$,
$$\sum \lambda_j \mu(I_j) > \varepsilon\frac{2^k-1}{2^{k+2}}, \quad \lambda_j \neq 0.$$
Теперь,
$$\int_{(0,1)} |f_n|^r d\mu \ge \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j + h_k)^r \mu(I_j) \ge \underbrace{h_k^{r-1}}_{\to\infty} \underbrace{\varepsilon\frac{2^k-1}{2^{k+2}}}_{\to\varepsilon/4}.$$

Замечание. Обсудим немного другой ход решения задачи выше. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим
$$E_n(\varepsilon) = \{x \in (0,1) : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$
Тогда для $1 \le p < r$
$$\int_{(0,1)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu = \int_{(0,1)\setminus E_n(\varepsilon)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu + \int_{E_n(\varepsilon)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu.$$
Применив ко второму слагаемому неравенство Гёльдера с $g(x) = 1$, получим
$$\int_{(0,1)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu \le \varepsilon^p + \left(\int_{E_n(\varepsilon)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu\right)^{p/2} (\mu(E_n(\varepsilon)))^{\frac{1-p}{2}}.$$
С помощью неравенства Минковского оценим
$$\left(\int_{E_n(\varepsilon)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu\right)^{p/2} \le \left(\int_{(0,1)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu\right)^{p/2} \le$$
$$\left(\left(\int_{(0,1)} |f_n(x)|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_{(0,1)} |f(x)|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}}\right)^p \le (2c)^p = \text{const}.$$
Тогда можно оценить
$$\int_{(0,1)} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu \le 2\varepsilon^p.$$

Домашнее задание 13.4. *Построить на* $(0,1)^2$ $f(x,y)$ *такую, что*

1
$$\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y)d\mu_2\right) d\mu_1 = 0;$$

2

$$\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y) d\mu_1 \right) d\mu_2 = 1.$$

Решение. Функция $f(x,y)$, удовлетворяющая условиям задачи, представлена на (рис.). Здесь интегралы на горизонтальных полосах будут равны 0. Интегралы же на вертикальных полосах дадут в сумме 1.

Можно рассмотреть похожие варианты. Так, например, дял функции вида (рис.) интеграл будет вычислять немного легче, поскольку все интегралы на вертикальных полосах, кроме первой, будут равны 0.

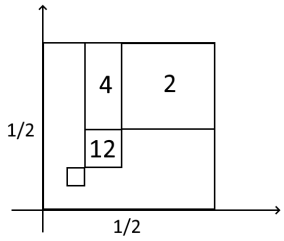

Рис. 13.2. Функция, имеющая разные повторные интегралы (первый вариант)

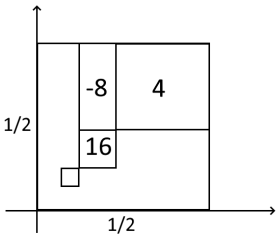

Рис. 13.3. Функция, имеющая разные повторные интегралы (второй вариант)

Теорема Тонелли

Пусть (X_1, M_1, μ_1) и (X_2, M_2, μ_2) – измеримые пространства, меры μ_1 и μ_2 полные. На прошлом семинаре обсуждали, что полученное в результате продолжения прямого произведения $(X_1 \times X_2, M, \mu)$, где M – σ-алгбера, а μ – прямое произведение мер, также является измеримым пространством.

Теорема 13.1. *(Тонелли) Пусть $A \in M$ и функция $f(x,y)$ μ-измерима и неотрицательна на A. Тогда*

1 Для почти всех $x \in X_1$ $f(x,y)$ μ_2-измерима на

$$A(x) = \{y \in X_2 : \ (x,y) \in A\}.$$

2 Функция

$$\varphi(x) = \int_{A(x)} f(x,y) d\mu_2$$

μ_1-измерима на X_1.

3 Интеграл[48]

$$\int_A f(x,y) d\mu = \int_{X_1} \varphi(x) d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\int_{A(x)} f(x,y) d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

[48]Необязательно конечный.

Домашнее задание 13.1. *Пусть $f(x)$, $g(x) \in L(\mathbb{R})$. Доказать, что для почти всех $y \in \mathbb{R}$ $\exists$*

$$h(y) = \int_R f(x)g(y-x)d\mu_2$$

и что $h(y) \in L(\mathbb{R})$.

Задача

Обсудим следующий пример.

Задача 13.1. *Требуется выяснить, конечен ли интеграл*

$$\int_{(0,\infty)^2} \frac{d\mu}{1+x^8y^8}.$$

Решение. Расходимость интеграла следует из соотношения

$$\int_{(0,\infty)^2} \frac{d\mu}{1+x^8y^8} \geq \frac{1}{2}\mu\left(\left\{(x,y) \in (0,\infty)^2\right\}\right), \quad xy \leq 1.$$

Домашнее задание 13.2. *Выяснить, интегрируема ли по Лебегу на $(0,\infty)^2$ функция*

$$f(x,y) = e^{-xy}\sin x \sin y.$$

Функции ограниченной вариации

Определение 13.1. Пусть даны функция

$$f: \ [a,b] \to \mathbb{R},$$

разбиение

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

и вариационная сумма

$$V_T(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

f является *функцией ограниченной вариации*, то есть

$$f \in \mathrm{VB}([a,b]),$$

тогда и только тогда, когда

$$V_a^b(f) = \sup_T V_T(f) < \infty.$$

Обсудим свойства $f \in \mathrm{VB}([a,b])$.

1 Если $f \in \mathrm{VB}([a,b])$, то справедливо представлени

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где f_1, f_2 монотонно возрастают.

2 На функциях ограниченной вариации сохраняются арифметические свойства.

3 Если $f \in VB$, то у нее не более чем счетное множество разрывов I рода.

4 Если $f \in VB$, то почти всюду $\exists\ f'(x)$.

Замечание. Множество функций ограниченной вариации и множество непрерывных функций не имеют между собой вложений.

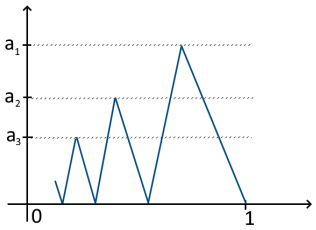

Рис. 13.4. Построение функции $\in$ VB

Пример. Пусть последовательность $a_n \downarrow 0$. Рассмотрим функцию, график которой представлен на (рис. 13.4), $f(0) = 0$. Чтобы $f(x) \in \mathrm{VB}(0,1)$, надо взять, например, $a_n = 1/n$.

Замечание. Арифметические операции и операция дифференцирования сохраняют VB. Операция же взятия суперпозиции VB не сохраняют. В качестве примера возьмем $f(x)$ (рис. 13.4) с $a_n = 1/n^2$, $g(y) = \sqrt{y}$. Тогда

$$g(f(x)) \notin VB.$$

Домашнее задание 13.3. *Пусть $f(x) \in VB([0,1])$, $x_0 \in (0,1)$. Доказать, что $f(x)$ непрерывна в x_0 $\iff$ функция*

$$g(x) = V_0^x f$$

непрерывна в точке x_0.

Домашнее задание 13.4. *Показать, что если $f \in VB([a,b])$ и $a < c < b$, то*

$$f \in VB([a,c]) \cap VB([c,b])$$

и

$$V_a^b() = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Признаки функций ограниченной вариации

Обсудим теперь, по каким признакам можно понять, что функция имеет ограниченную вариацию.

Утверждение. *Пусть* $\forall\ x \in [a,b]\ \exists\ f'(x)$ *и* $\exists\ c > 0$ *такая, что*

$$|f'(x)| \leq c, \quad \forall x \in [a,b]. \tag{34}$$

Тогда $f \in VB([a,b])$.

Пример. Рассмотрим пример, когда условие (34) не выполняется, а $f(x)$ не является функцией ограниченной вариации. Ограничим $f(x)$ функциями $y = x^2$ и $y = -x^2$ при $x > 0$. Положим

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Производная функции неограничена только в точке 0, и функция не является функцией ограниченной вариации.

Определение 13.2. $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$ тогда и только тогда, когда $\exists\ c > 0$ такое, что $\forall\ x, y \in [a,b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Очевидно, что если $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$, то $f \in \mathrm{VB}([a,b])$.

Определение 13.3. $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, где $0 < \alpha < 1$, тогда и только тогда, когда $\exists\ c > 0$ такое, что $\forall\ x, y \in [a,b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Домашнее задание 13.5. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Привести пример функции* $f(x)$ *такой, что*

$$f(x) \in Lip\ \ \alpha \setminus VB([0,1]).$$

Домашнее задание 13.6. *Привести пример* $f(x)$ *такой, что*

$$f(x) \in \cap_{0<\alpha<1} Lip\ \alpha \setminus VB([0,1]).$$

Замечание. Обратим внимание, что классы $\mathrm{Lip}\ \alpha$, $\alpha > 0$ не рассматриваются, поскольку тогда

$$|f(x) - f(0)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{x}{n}k\right) - f\left(\frac{x}{n}(k-1)\right) \right| \leq c \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha} = \frac{cx^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 0.$$

Семинар 15. Абсолютно непрерывные функции

Разбор домашних заданий

Домашнее задание 14.5. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Привести пример функции* $f(x)$ *такой, что*

$$f(x) \in Lip\ \alpha \setminus VB([0,1]).$$

Домашнее задание 14.6. *Привести пример* $f(x)$ *такой, что*

$$f(x) \in \cap_{0<\alpha<1} Lip\ \alpha \setminus VB([0,1]).$$

Решение. Рассмотрим решение второй задачи, так как решение первой будет иметь похожий вид.

Заметим, что ряд

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)} < \infty.$$

Рассмотрим точки

$$x_n = \frac{1}{c_0} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k+1)}.$$

Ясно, что $x_1 = 1$ и

$$x_n \downarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Кроме того,

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}.$$

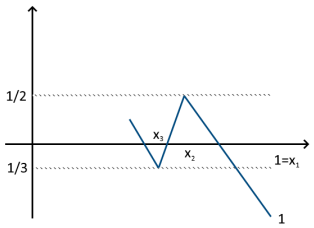

Рис. 14.1. Функция f(x)

Определим (рис. 14.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x = 0, \\ \frac{(-1)^n}{n}, \quad x = x_n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ \text{линейна на отр. } [x_{n-1}, x_n], \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ясно, что $\forall\ N$

$$V_0^1(f) \geq \sum_{k=1}^{N} |f(x_n) - f(x_{n+1})| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Отсюда следует, что $f(x) \notin \mathrm{VB}([0,1])$.

Осталось показать, что $f(x)$ лежит во всех[49] Lip α, $\alpha < 1$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Проверим, что $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$. Тогда $\exists\ c(\alpha) > 0$ такое, что $\forall\ x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y|^\alpha.$$

Для определенности будем считать, что $x < y$. Пусть $x > 0$. Возможны следующие случаи.

1 $\exists\ n$ такое, что

$$x_n \le x < y \le x_n.$$

Тогда, поскольку $f(x)$ линейна на $[x_{n+1}, x_n]$,

$$|f(y) - f(x)| = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{x_n - x_{n+1}}(y-x).$$

Далее,

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{x_n - x_{n+1}}(y-x) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) c_0 n \ln^2(n+1)(y-x) \le \frac{2}{n} c_0 n \ln^2(n+1)(y-x) =$$

$$= 2c_0 \ln^2(n+1)(y-x)^\alpha (y-x)^{1-\alpha}.$$

Отметим, что

$$y - x \le x_n - x_{n+1} \le \frac{1}{c_0 n \ln^2(n+1)}.$$

Тогда

$$2c_0 \ln^2(n+1)(y-x)^\alpha (y-x)^{1-\alpha} \le 2c_0 \ln^2(n+1) \frac{1}{c_0^{1-\alpha} n^{1-\alpha} \ln^{2(1-\alpha)}(n+1)}(y-x)^\alpha. \tag{35}$$

Далее,

$$2c_0 \ln^2(n+1) \frac{1}{c_0^{1-\alpha} n^{1-\alpha} \ln^{2(1-\alpha)}(n+1)} = 2c_0^{1+\alpha} n^{\alpha-1} \ln^{2\alpha}(n+1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда $\exists\ c(\alpha)$ такое, что

$$2c_0^{1+\alpha} \ln^{2\alpha}(n+1) \le c(\alpha), \quad \forall n.$$

Вернемся к оценке (35). С учетом написанного выше, получаем

$$2c_0 \ln^2(n+1) \frac{1}{c_0^{1-\alpha} n^{1-\alpha} \ln^{2(1-\alpha)}(n+1)}(y-x)^\alpha \le c(\alpha)(y-x)^\alpha,$$

что и требовалось показать.

[49] Заметим, что в Lip 1 $f(x)$ лежать не может, так как из этого следовала бы ее принадлежность к $\mathrm{VB}([0,1])$.

2 $\exists\ n$ такое, что
$$x_{n+1} \le x < x_n \le y \le x_{n-1}.$$
Тогда
$$|f(y) - f(x)| \le |f(y) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|.$$
Для точек y, x_n и x_n, x справедливо сказанное в пункте 1, поскольку они лежат на одном отрезке. Значит,
$$|f(y) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \le c(\alpha)\underbrace{(y - x_n)}_{\le y-x}^{\alpha} + c(\alpha)(\underbrace{x_n - x}_{\le y-x})^{\alpha} \le 2c(\alpha)(y - x)^{\alpha}.$$

3 $x \in [x_{n+1}, x_n]$, $y \in [x_{m+1}, x_m]$, где $n \ge m + 2$. Тогда
$$x_{n+1} \le x < x_n < x_{n+1} \le x_{m+1} < y \le x_m.$$
Так как $\forall\ n\ \exists\ z_n \in (x_{n+1}, x_n)$ такая, что $f(z_n) = 0$ (по построению $f(x)$), то
$$|f(y) - f(x)| \le |f(y)| + |f(x)| = |f(y) - f(z_{m+1})| + |f(x) - f(z_{n-1})|,$$
причем $z_{n-1} \le z_{m+1}$. Точки y, z_{m+1} и z_{n-1}, x удовлетворяют условиям из пункта 2. Тогда
$$|f(y)-f(z_{m+1})|+|f(x)-f(z_{n-1})| \le 2c(\alpha)(y-z_{n-1})^{\alpha}+2c(\alpha)(z_{n-1}-x)^{\alpha} \le 4c(\alpha)(y-x)^{\alpha}.$$
Тем самым показано, что если $0 < x < y \le 1$, то
$$|f(y) - f(x)| \le 4c(\alpha)(y - x)^{\alpha}.$$
В нуле $f(x)$ непрерывна (из определения), а значит, $\forall y \in [0, 1]$
$$|f(y) - f(0)| \le 4c(\alpha)y^{\alpha}.$$

Абсолютно непрерывные функции на отрезке

Вспомним, что в курсе абсолютная непрерывность встречалась в разных контекстах.

1 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

Если $f(x) \in L(X)$, то $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что если $E \in M$ и $\mu(E) < \varepsilon$, то
$$\left|\int_E f(x)d\mu\right| < \varepsilon.$$

2 Если (X, M, μ) – измеримое пространство и заряд[50]
$$\phi ::\ M \to [0, +\infty),$$
то ϕ называется *абсолютно непрерывной относительно* μ, если из того, что $E \in M$ и $\mu(E) = 0$, следует, что $\phi(E) = 0$.

Условие выше равносильно тому, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что если $E \in M$ и $\mu(E) < \delta$ то $|\varphi(E)| < \varepsilon$.

[50]Напомним, что это практически σ-аддитивная мера, только без условия неотрицательности.

3 Абсолютная непрерывность функции на отрезке будет рассмотрена ниже.

Определение 15.1. Пусть
$$f:\ [a,b]\to\mathbb{R}.$$
Тогда говорят, что $f(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[a,b]$, то есть
$$f(x)\in \mathrm{AC}([a,b]),$$
$\iff$ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall$ системы попарно не пересекающихся интервалов
$$\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$$
из $[a,b]$, удовлетворяющих условию
$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\delta,$$
имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(b_n)-f(a_n)|<\varepsilon.$$

Свойства абсолютно непрерывных функций на отрезке

Обсудим следующие свойства.

1 Если $f(x),g(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$, то $\forall\ \alpha,\ \beta$
$$\alpha f(x)+\beta g(x)\in \mathrm{AC}([a,b]),$$
$$f(x)\cdot g(x)\in \mathrm{AC}([a,b]).$$

2 Если $f(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$, то $f(x)\in C([a,b])$.

3 Если $f(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$, то $f(x)\in \mathrm{VB}([a,b])$.

4 Если $f(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$, то $f_1(x)=V_a^b(f)\in \mathrm{AC}([a,b])$. Отсюда $f(x)$ можно представить в виде
$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$
где f_1,f_2 – неубывающие, $\mathrm{AC}([a,b])$ функции.

5

Определение 15.2. Будем считать, что $f(x)\in C([a,b])$. Говорят, что $f(x)$ *обладает N-свойством Лузина* на $[a,b]$ $\iff$ $\forall$ измеримого относительно классической меры Лебега $E\subset[a,b]$ с $\mu(E)=0$ множество $f(E)$ тоже измеримо и $\mu(f(E))=0$.

Если $f(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$, то $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$.

Теорема Банаха–Зарецкого

Теорема 15.1. *(Банаха – Зарецкого) Пусть*

$$f:\ [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Тогда $f(x) \in AC([a,b]) \iff$ *выполняются следующие условия.*

1 $f(x) \in C([a,b])$;

2 $f(x) \in VB([a,b])$;

3 $f(x)$ *обладает* N*-свойством Лузина на* $[a,b]$.

Пример. 1 Для кривой Кантора выполняются условия 1,2 из теоремы 15.1, но не выполняется условие 3.

2 Для функции, обсуждаемой на прошлом семинаре (рис. 13.4) выполняются условия 1 и 3, но не 2.

3 Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2], \\ 1, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

выполняются условия 2 и 3, но не выполняется условие 1.

Домашнее задание 15.1. *Пусть*

$$f:\ [a,b] \to \mathbb{R},$$

$\exists\ \delta > 0$ *такое, что* $\forall$ *система интервалов* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *на* $[a,b]$ *с условием*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$$

имеет

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Доказать, что $f(x) \in Lip\ 1$.

Теоремы об абсолютно непрерывных функциях

Теорема 15.2. *Пусть* $f(x) \in L([a,b])$ *(с классической мерой Лебега). Тогда*

$$F(t) = \int_{[a,b]} \in\ AC([a,b]).$$

Теорема 15.3. *Пусть* $f(x) \in L([a,b])$ *и*

$$F(t) = \int_{[a,t]} f(x) d\mu_x.$$

Тогда для почти всех $t \in [a,b]\ \exists\ F'(t) = f(t)$.

Теорема 15.4. *Пусть $F(x) \in AC([a,b])$. Тогда почти всюду $\exists\, F'(x)$, причем $F'(x) \in L([a,b])$ и $\forall\, u \in [a,b]$ имеет место*

$$F(u) - F(a) = \int_{[a,u]} F'(x) d\mu_x.$$

Замечание. По сути, теоремы **??** дают альтернативное представление для класса абсолютно непрерывных функций, связанное с интегралами Лебега с переменным верхним пределом.

Задача

Определение 15.3. Пусть измеримое множество $E \subset [0,1]$. Тогда x_0 называется *точкой плотности E* $\iff$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu\left([x_0 - t, x_0 + t] \cap E\right)}{2t} = 1.$$

Задача 15.1. *Доказать, что почти все точки измеримого множества являются его точками плотности.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mu\left([x_0 - t, x_0 + t] \cap E\right) = \int_{[x_0 - t, x_0 + t]} \mathcal{X}_E(t) d\mu.$$

Тогда

$$\frac{\mu\left([x_0 - t, x_0 + t) \cap E\right)}{2t} = \frac{1}{2t} \int_{[x_0 - t, x_0)} \mathcal{X}_E(t) d\mu + \frac{1}{2t} \int_{[x_0, x_0 + t)} \mathcal{X}_E(t) d\mu.$$

По теореме 15.3,

$$\frac{1}{2t} \int_{[x_0 - t, x_0)} \mathcal{X}_E(t) d\mu + \frac{1}{2t} \int_{[x_0, x_0 + t)} \mathcal{X}_E(t) d\mu \overset{\text{п.в.}}{\to} \frac{1}{2} \mathcal{X}_E(x_0) + \frac{1}{2} \mathcal{X}_E(x_0) = 1$$

для почти всех $x_0 \in E$. $\square$

Разбор домашних заданий

Семинар 1

Домашнее задание 1.1. *Доказать, что*

$$\overline{\overline{C\left([0,1)\right)}} = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Обозначим через C множество всех постоянных функций на $[0,1]$. C имеет мощность континуум.

С другой стороны, можно определить на $C([0,1])$ отображение

$$F(f) = (f(r_1), \ldots, f(r_n), \ldots),$$

где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Так как множество рациональных чисел плотно на отрезке,

$$F(f) \neq F(g), \text{ при } f \not\equiv g.$$

Таким образом, $C[0,1]$ эквивалетно некоторому подмножеству множества всех последовательностей вещественных чисел, которое имеет мощность $\mathfrak{C}$ (см. задачу 1.1). Применение теоремы 1.1 Кантора – Бернштейна завершает доказательство. □

Домашнее задание 1.2. *Пусть $M\left([0,1)\right)$ – множество всех монотонно неубывающих функций на $[0,1)$. Доказать, что*

$$\overline{\overline{M\left([0,1)\right)}} = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Пусть $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ – занумерованное некоторым образом множество рациональных чисел на $[0,1)$. Пусть $f(x) \in M\left([0,1)\right)$. Из курса анализа известено, что если $f(x)$ монотонна (в том числе монотонно неубывающая), то множество всех точек разрыва

$$X_f = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

этой функции не более, чем счетно. Обозначим

$$Y_f = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots\}$$

и

$$Q_f = \{f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n), \ldots\}.$$

Заметим, что если для двух функций f и $g \in M$ выполнены равенства

$$X_f = X_g, \quad Y_f = Y_g, \quad Q_f = Q_g,$$

то

$$f(x) \equiv g(x) \text{ на } [0,1).$$

Из задачи 1.1 следует, что множество троек (X_f, Y_f, Q_f), где $f(x) \in M\left([0,1)\right)$, подмножество некоторого множества мощности $\mathfrak{C}$. С другой стороны, $M\left([0,1)\right)$ содержит множество всех постоянных на $[0,1)$ функций, которое имеет мощность $\mathfrak{C}$. По теореме 1.1 Кантора – Бернштейна $M\left([0,1)\right)$ имеет мощность $\mathfrak{C}$. □

Домашнее задание 1.5. *Построить функцию f*

$$f: \ (0,1) \to \mathbb{R}$$

такую, что $\forall\ x \in (0,1)\ \exists\ \delta = \delta(x) > 0$ *такое, что* $\forall\ t \in (x-\delta, x+\delta)$

$$f(x) \le f(t),$$

а образ $f(0,1)$ *– счетное множество.*

Решение. Рассмотрим на $(0,1)$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Как нетрудно убедиться, функция f удовлетворяет условиям задачи.

Семинар 2

Домашнее задание 2.2. *Доказать, что в линейном нормированном пространстве*

$$\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x).$$

Доказательство. По определению,

$$B_r(x) = \{z = x + y : \|y\| < r\},$$

$$\overline{B}_r(x) = \{z = x + y : \|y\| \le r\}.$$

Заметим, что если $\|y\| = r$, то при $0 < \varepsilon < 1$ вектор $x + \varepsilon y$ лежит в открытом шаре и

$$\|(x+y) - (x+\varepsilon y)\| = |1-\varepsilon|\|y\| \to 0, \quad \varepsilon \to 1-0.$$

Поэтому

$$\overline{B_r(x)} \supseteq \overline{B}_r(x).$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$\|x_n\| \to \|x\|$$

при $x_n \to x$, поэтому справедливо обратное вложение. □

Домашнее задание 2.4. *Пусть в полном линейном нормированном пространстве*

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \supseteq \overline{B}_{r_2}(x_2) \supseteq \ldots, \quad r_i > 0, r_i \to 0, \quad i \to \infty.$$

Доказать, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{r_i}(x_i) \ne \emptyset.$$

Доказательство. Так как $r_n \to 0$, множество

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(x_n)$$

содержит не более чем одну точку. Далее, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, поскольку

$$\rho(x_n, x_{n+k}) \leq r_n.$$

Так как пространство M полно, существует

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Поскольку множество $\overline{B}_{r_n}(x_n)$ замкнуто для любого n, то $x \in \overline{B}_{r_n}(x_n)$ при каждом n. Поэтому $x \in A$. □

Семинар 3

Домашнее задание 3.2. *Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство. F_1, F_2 – замкнутые множества в (M, ρ) и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.*

Доказать, что $\exists$ открытые $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$ такие, что

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Доказательство. Если F – замкнуте множество в метрическом пространстве (M, ρ) и $x \notin F$, то $\operatorname{dist}(x, F) > 0$. Поэтому для $\forall\ x \in F_1\ \exists\ r = r(x) > 0$ такое, что

$$B_r(x) \cap F_2 = \emptyset$$

и для $\forall\ y \in F_2$ существует $r = r(y) > 0$ такое, что

$$B_r(y) \cap F_1 = \emptyset.$$

Пусть

$$G_1 = \bigcup_{x\in F_1} B_{\frac{1}{2}r(x)}(x)$$

и

$$G_2 = \bigcup_{x\in F_2} B_{\frac{1}{2}r(y)}(y).$$

Тогда множества G_1 и G_2 по построению открытые.

Предположим теперь, что $\exists\ z \in G_1 \cap G_2$. Тогда найдутся $x \in F_1$ и $y \in F_2$ такие, что

$$z \in B_{\frac{1}{2}r(x)}(x) \cap B_{\frac{1}{2}r(y)}(y).$$

Без ограничения общности предположим, что $r(x) \geq r(y)$. Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) < \frac{1}{2}\left(r(x) + r(y)\right) \leq r(x).$$

Таким образом, $y \in B_{r(x)}(x)$, приходим к противоречию. Значит,

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

□

Домашнее задание 3.3. *Пусть (M, ρ) – полное метрическое пространство,*

$$f: \ M \to \mathbb{R}^1.$$

Доказать, что множество точек непрерывности f имеет тип G_δ.

Доказательство. Покажем сначала, что точка x_0 является точкой непрерывности $\iff \omega(x_0) = 0$, где $\omega(x)$ – колебание функции (3).

$\Rightarrow$ Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\forall\, y \in B_{1/n}(x_0)$ выполнено неравенство

$$|f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

для $\forall\, y, z \in B_{1/n}(x)$. Следовательно, $\omega(x_0) = 0$.

$\Leftarrow$ Если $\omega(x_0) = 0$, то для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует такое n, что $\forall\, y \in B_{1/n}(x_0)$ выполнено неравенство

$$|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon,$$

то есть $f(x)$ непрерывна в x_0.

Итак, показали, что x_0 является точкой непрерывности $\iff \omega(x_0) = 0$. Определим множества

$$G_k = \left\{ x \in M: \ \omega(x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что G_k открыто для каждого k. Но, согласно доказанному выше, множество точек непрерывности представимо в виде $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, поэтому имеет типа G_δ. $\square$

Домашнее задание 3.5. *Доказать теорему 3.1 (Бэра), что, если (M, ρ) – полное метрическое пространство, тогда не существует представления*

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i: \ \forall i \ A_i \text{ нигде не плотно в } (M, \rho).$$

Доказательство. Предположим, что существует представление

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i: \ \forall i \ A_i \text{ нигде не плотно в } (M, \rho).$$

Найдем такой непустой замкнутый шар $\overline{B}_{r_1}(x_1)$, что $r_1 < 1$ и

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \cap A_1 = \emptyset.$$

Выберем такой непустой замкнутый шар

$$\overline{B}_{r_2}(x_2) \subset \overline{B}_{r_1}(x_1)$$

такой, что $r_2 < 1/2$ и

$$\overline{B}_{r_2}(x_2) \cap A_2 = \emptyset.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим последовательность замкнутых шаров

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \supset \overline{B}_{r_2}(x_2) \supset \dots$$

такую, что $r_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\overline{B}_{r_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset$$

для всех n. В силу утверждения домашнего задания 2.4 существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(x_n),$$

но

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Полученное противоречие показывает, что M не представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. □

Семинар 4

Домашнее задание 4.3. *Построить последовательность*

$$\{f_{n,m}(x)\}_{n,m=1}^{\infty} \subset C([0,1])$$

такую, что

1 $\forall\ n\ \forall\ x$

$$\exists \lim_{m\to\infty} f_{n,m}(x) = g_n(x);$$

2 $\forall\ x$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \mathcal{D}(x).$$

Решение. Положим

$$f_{m,n}(x) = \cos^{2m}(n!\pi x).$$

При $n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x)$. Если $n!x$ – целое число, то $g_n(x) = 1$. Для всех остальных значений x имеем $g_n(x) = 0$. Теперь положим

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Если x – иррациональное число, то $g_n(x) = 0$ при всех n, а значит, $h(x) = 0$. Если же $x = p/q$ – рациональное число, то при $n \geq q$ произведение $m!x$ – целое число, так что $f(x) = 1$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Итак, в пределе получили функцию Дерихле $\mathcal{D}(x)$.

Домашнее задание 4.4. *$\forall\ n \geq 1$ найти построить полукольцо S, состоящее ровно из n множеств.*

Решение. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ таковы, что

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Тогда $\{\emptyset, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ – полукольцо из n элементов.

Домашнее задание 4.5. *Доказать, что не существует кольца R, состоящего ровно из 3 множеств.*

Решение. Предположим, существует кольцо из 3 множеств

$$R = \{\emptyset, A_1, A_2\},$$

где все множества различны. Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то $A_1 \cup A_2 \in R$, приходим к противоречию. Если $A_1 \cap A_2 = C \neq \emptyset$, то $C \subseteq A_1$ и $C \subseteq A_2$. Так как $A_1 \neq A_2$, то хотя бы одно вложение строгое. Пусть, например, $D = A_1 \setminus C \neq \emptyset$. Тогда $D \in R$, но $D \notin \{\emptyset, A_1, A_2\}$. Приходим к противоречию.

Семинар 5

Домашнее задание 5.1. *Пусть*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$$

Доказать, что в таком случае

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k = \underline{\lim}_{k\to\infty} A_k.$$

Доказательство. Запишем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

С другой стороны,

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

□

Домашнее задание 5.2. *(Лемма) Пусть S – полукольцо, $A, A_1, \ldots, A_k \in S$, причем*

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \subset A.$$

Доказать, что тогда $\exists\ B_1, \ldots, B_l \in S$ такие, что

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} B_j\right).$$

Доказательство. Проведем доказательство по k. Если $k = 1$, то утверждение следует из определения полукольца.

Пусть теперь $k > 1$ и лемма доказана для k. Тогда имеем $A, A_1, \ldots, A_{k+1} \in S$ такие, что

$$\bigsqcup_{i=1}^{k+1} A_i \subset A.$$

По предположению индукции $\exists\ B_1, \ldots B_l \in S$ такие, что

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} B_j\right) = A.$$

Рассмотрим

$$C_j = A_{k+1} \cap B_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

По определению полукольца $C_j \in S$. Кроме того,

$$C_j \subseteq B_j,$$

следовательно, $\forall\ j\ \exists\ \{D_{j,m}\}_{m=1}^{m_j} \subset S$ такие, что

$$B_j = C_j \bigsqcup \left(\bigsqcup_{m=1}^{m_j} D_{j,m}\right)$$

по определению полукольца. Отсюда

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} C_j\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} \bigsqcup_{m=1}^{m_j} D_{j,m}\right).$$

Проверим, что

$$\bigsqcup_{j=1}^{l} C_j = A_{k+1}.$$

Из того, что

$$A_{k+1} \bigcap \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \emptyset$$

и

$$A_{k+1} \subset A,$$

следует, что

$$A_{k+1} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{l} B_k,$$

и, следовательно,

$$A_{k+1} = A_{k+1} \bigcap \left(\bigsqcup_{j=1}^{l} B_j\right) = \bigsqcup_{j=1}^{l} (A_{k+1} \cap B_j) = \bigsqcup_{j=1}^{l} C_j.$$

□

Семинар 6

Домашнее задание 6.4. *Доказать, что для классической меры Лебега на подмножествах $\mathbb{R}^1$ верно утверждение домашнего задания 6.3.*

Иными словами, пусть R – кольцо подмножеств $\mathbb{R}^1$, m – классическая мера Лебега, $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R$, причем

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Доказать, что тогда

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Доказательство. Разобьем прямую на интервалы

$$(-\infty, +\infty) = \bigcup_n [n-1, n) \cup (-n, -n+1].$$

Можно показать, например, что множество A на $\mathbb{R}$ измеримо $\iff$ $\forall\, n$ измермо его пересечение с $[n-1, n)$ и $(-n, -n+1]$, то есть мера Лебега – σ-конечная мера.

Тогда для задачи верно утверждение домашнего задания 6.3, которе разбиралось в начале семинара 7. □

Домашнее задание 6.6. *Привести пример множества $A \subset [0,1]$ такого, что $\mu(A) = 0$ и A – 2-й категории*[51].

Решение. Пусть A_n – канторовы множества на $[0,1]$ меры $(n-1)/n$, где $n = 1, 2, \ldots$, а

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Поскольку A_n нигде не плотны, то A является множеством первой категории (то есть допускает счетное покрытие нигде не плотными множествами). С другой стороны, поскольку для $\forall\, n$

$$\mu(A_n) = \frac{n-1}{n} \le \mu(A) \le 1,$$

то $\mu(A) = 1$. Тогда его дополнение

$$A' = [0,1] \setminus A$$

является множеством второй категории. В противном случае отрезок $[0,1]$ являлся бы множеством первой категории как объединение двух множеств первой категории. Кроме того,

$$\mu(A') + \mu(A) = 1,$$

откуда $\mu(A') = 0$.

[51] То есть не допускающее счетного покрытия нигде не плотными множествами.

Семинар 7

Домашнее задание 7.3. *Пусть $A_1, \ldots, A_n \in M$, где M – классическая лебегова σ-алгебра на $[0,1]$, а*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1.$$

Доказать, что

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in M.$$

Обозначим $[0,1] = A$. Заметим, что $\mu(A) = 1$. Справедливо представление

$$A \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \setminus A_k).$$

Вычислим

$$\mu\left(A \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} (\mu(A) - \mu(A_k)) = n - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0.$$

□

Домашнее задание 7.4. *Привести пример $A_1, \ldots, A_n \in M$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = n - 1$$

и пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset.$$

Решение. Пусть

$$A_i = [0,1] \setminus \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда для всех i

$$\mu(A_i) = \frac{n-1}{n},$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = n - 1.$$

С другой стороны,

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset.$$

Семинар 8

Домашнее задание 8.2. *Построить пример $f(x) \in C([0,1])$ и измеримого $A \subset \mathbb{R}$ таких, что*

$$f^{-1}(A)$$

не является измеримым.

Решение. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + x\right), \quad x \in [0,1],$$

где $\varphi(x)$ – функция Кантора (13). Заметим, что $\psi(x)$ – строго возрастающая (как сумма неубывающей и строго возрастающей функций) и непрерывная функция. Значит, существует непрерывная $f(y) = \psi^{-1}(y)$ из $[0,1]$ в $[0,1]$. Ранее (см. семинар 6) показали, что существует B – неизмеримое подмножество в $\psi(P)$, тогда

$$A = \psi^{-1}(B) = f(B).$$

Тогда $A \subset P$, поэтому $A \in M$ в силу полноты меры Лебега, но $f^{-1}(A) = B \notin M$.

Семинар 9

Домашнее задание 9.2. *Доказать, что последовательность $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится по мере на $[0,1]$.*

Доказательство. Для $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $N \geq$ и номером $n-1$, $n+1 > N$ таких, что n не кратно 2 и 3, справедливо

$$B_n = \left\{x \in [0,1] : \ |\sin(n+1)x - \sin(n-1)x| > \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in [0,1] : \ 2|\cos nx||\sin x| > \frac{1}{2}\right\} \supset \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right],$$

откуда следует, что последовательность $\sin nx$ не сходится по мере на $[0,1]$. $\square$

Домашнее задание 9.3. *Пусть $f(x)$ измерима, конечна и периодична на $[0,1]$, а*

$$f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \ \text{на}\ [0,1].$$

Доказательство. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. По теореме 9.2 (Лузина), можно выбрать $g(x) \in C([-1,1])$ так, что для множества

$$E = \{x \in [-1,1] : \ f(x) \neq g(x)\}$$

мера $\mu(E) < \gamma/2$. Опираясь на теорему Кантора о равномерной непрерывности, выберем n так, что если x, $y \in [-1,1]$ и $|x-y| \leq 1/n$, то

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Обозначим

$$F = \left(E \cup \left(E + \frac{1}{n}\right)\right) \cap [0,1].$$

Очевидно, что $\mu(F) < \gamma$. Если $x \in [0,1] \setminus F$, то точки x и $x - 1/n \in [-1,1] \setminus E$, откуда

$$\left| f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f(x) \right| = \left| g\left(x - \frac{1}{n}\right) - g(x) \right| < \varepsilon.$$

□

Семинар 10

Домашнее задание 10.1. *Доказать, что если $f(x)$ на $[0,1]$ такова, что $\forall\ \varepsilon > 0$*

$$\exists\ g(x) \in C([0,1])$$

с условием

$$\mu\left(\{x \in [0,1] : \ f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon,$$

то $f(x)$ измерима и конечна почти всюду.

Доказательство. Найдем такие $f_n(x) \in C([0,1])$, что

$$\mu(E_n) < 2^{-n},$$

где

$$E_n = \{x \in [0,1] : \ f(x) \neq f_n(x)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что $f(x)$ измерима. Действительно,

$$f_n(x) = f(x)$$

всюду на множестве

$$A_n = [0,1] \setminus E_n.$$

Поэтому $f(x)$ измеима и конечна на каждом A_n. Поскольку для $\forall\ c \in \mathbb{R}$ справедливо

$$f^{-1}_{\cup_n A_n}((c,+\infty]) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}_{A_n}((c,+\infty]) \in M,$$

функция f измерима и конечна на $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то есть на множестве с дополнением нулевой меры. Так как классическая мера Лебега полна, $f(x)$ измерима на всем $[0,1]$. □

Домашнее задание 10.3. *Пусть*

$$\left\{r_n = \frac{p_n}{q_n}\right\} = Q \cap (0,1],$$

причем дроби p_n/q_n несократимые, а

$$f_n(x) = \exp\left\{-(p_n - q_n x)^2\right\}, \quad x \in [0,1].$$

Доказать, что $f_n(x)$ не сходится почти всюду.

Доказательство. Из решения домашнего задания 10.2 и теоремы 9.1 следует, что для $\forall\, x_0 \in [0,1]$ найдется подпоследовательность

$$f_{n_k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, для любого простого q существует рациональное $r_m = p_m/q_m$ с $q_m = q$ такое, что

$$0 < |r_m - x_0| \le \frac{1}{q}.$$

Тогда

$$f_m(x_0) = \exp\left\{-q_m^2 (r_m - x_0)^2\right\} \ge e^{-1}.$$

□

Домашнее задание 10.5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, а*

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответить на три вопроса.

1 $f \in R([0,1]) \iff$ *?*

2 $f \in R_{+0}((0,1]) \iff$ *?*

3 $f \in L(0,1) \iff$ *?*

Решение. Заметим, что

$$\frac{2}{\pi} x^{\alpha+\beta} \le f(x) \le x^{\alpha+\beta} \tag{36}$$

при $x \in (0,1)$. Поэтому

1 По критерию интегрируемости Лебега, функция интегрируема по Риману на отрезке $\iff$ она ограничена и непрерывна почти всюду на нем относительно классической меры Лебега. Следовательно, $f \in R([0,1]) \iff \alpha + \beta \ge 0$.

2 Выясним сначала, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$g(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

принадлежит классу $R_{+0}((0,1])$. При каждом $b \in (0,1)$ имеем

$$(R)\int_b^1 g(x)dx = \begin{cases} \frac{1-b^{\alpha+1}}{1+\alpha}, & a \neq -1, \\ -\ln(b), & \alpha = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $g(x) \in R_{+0}((0,1]) \iff \alpha > -1$, так как лишь в этом случае существует конечный предел вычисленных интегралов.

В силу данного результата и неравенства (36) $f \in R_{+0}((0,1]) \iff \alpha+\beta > -1$.

3 Воспользовавшись задачей (20), получим, что $f \in L(0,1) \iff \alpha + \beta > -1$.

Семинар 11

Домашнее задание 11.4. *Пусть $f(x) \in L(0,1)$, $f(x) > 0$. Доказать, что $\forall\ \alpha > 0$*

$$\inf_{B \in M:\ \mu(B) \geq \alpha} \int_B f(x)d\mu > 0.$$

Доказательство. От противного. Так как $f(x) > 0$, $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $f(x) > \varepsilon$. Тогда $\forall\ B \in M$ таких, что $\mu(B) \geq \alpha$, выполняется

$$\int_B f(x)d\mu \geq \int_B \varepsilon d\mu = \varepsilon \int_B d\mu \geq \varepsilon\alpha > 0.$$

□

Домашнее задание 11.5. *Пусть последовательность измеримых множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ из $[0,1]$ такова, что*

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty.$$

Пусть k – натуральное число и

$$U_k = \{x \in (0,1):\ x \in \text{ по крайней мере } k \text{ разл. } A_n\}.$$

Доказать, что

$$\mu(U_k) \leq \frac{1}{k}\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

Доказательство. Пусть

$$f_n(x) = \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

и

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x).$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty,$$

утверждение задачи тривиально. Пусть эта сумма конечна. По теореме Беппо Леви о предельном переходе,

$$\int_{(0,1)} f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

По неравенству Чебышёва (теорема 11.2)

$$\mu(U_k) = \mu\left(\{x \in A : \ f(x) \leq n\}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

□

Домашнее задание 11.6. *Доказать, что если*

$$\rho(f_n, 0) \to 0,$$

то

$$f_n \xrightarrow{\mu} 0.$$

Доказательство. Напомним, что речь идет о метрике

$$\rho(f, g) = \int_{(0,1)} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu.$$

Пусть $\rho(f_n, 0) \to 0$, то есть

$$\int_{(0,1)} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x) - g(x)|} d\mu.$$

По неравенству Чебышёва, для $\forall\ \varepsilon \in (0, 1)$ выполняется

$$\mu\left(\{x \in (0,1) : \ |f_n(x) - 0| > \varepsilon\}\right) =$$

$$\mu\left(\left\{x \in (0,1) : \ \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} > \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right\}\right) \leq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_{(0,1)} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x) - g(x)|} d\mu \to 0.$$

Следовательно, $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. □

Семинар 12

Домашнее задание 12.2. *Пусть $p \geq 1$. Привести пример $f(x) \in L_p([0, 1])$ такой, что $\forall\ r > p$*

$$f(x) \notin L_r([0, 1]).$$

Решение. Пусть $A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ при $n \in \mathbb{N}$ и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/p}}{\ln^2(n+1)} \mathcal{X}_{A_n}(x).$$

Тогда

$$|f(x)|^s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{s/p}}{\ln^{2s}(n+1)} \mathcal{X}_{A_n}(x), \quad \forall\ s \in [1, \infty).$$

Следовательно,

$$\int_{(0,1)} |f(x)|^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^{2p}(n+1)} \mu(A_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^{2p}(n+1)} < \infty.$$

В то же время для $\forall\ r > p$ справедливо

$$\int_{(0,1)} |f(x)|^r d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r/p-1}}{(n+1)\ln^{2r}(n+1)} = \infty.$$

Домашнее задание 12.4. *Пусть* $1 \le p < r < \infty$, *функция* $f \in L_p([0, +\infty)) \cap L_r([0, +\infty))$. *Доказать, что* $\forall\ s \in [p, r]$

$$f(x) \in L_s([0, +\infty)).$$

Доказательство. Положим $A_1 = \{x :\ |f(x)| > 1\}$ и $A_2 = \{x :\ |f(x)| \le 1\}$. Тогда $=$

$$[0, \infty) = A_1 \sqcup A_2.$$

Заметим, что если $p < s < r$, то на множестве A_1 выполнено

$$|f(x)|^s \le |f(x)|^r,$$

а на множестве A_2

$$|f(x)|^s \le |f(x)|^p,$$

Поэтому при $r < \infty$ выполнены оценки

$$\int_{[0,\infty)} |f(x)|^s d\mu = \int_{A_1} |f(x)|^s d\mu + \int_{A_2} |f(x)|^s d\mu \le$$

$$\le \int_{A_1} |f(x)|^r d\mu + \int_{A_2} |f(x)|^p d\mu \le \int_{[0,\infty)} |f(x)|^r + \int_{[0,\infty)} |f(x)|^p d\mu < \infty.$$

Если $p = \infty$, по неравенству Чебышёва $\mu(A_1) < \infty$ и выполняются оценки

$$\int_{[0,\infty)} |f(x)|^s d\mu = \int_{A_1} |f(x)|^s d\mu + \int_{A_2} |f(x)|^s d\mu \le$$

$$\le \mu(A_1)(\|f\|_\infty)^s + \int_{A_2} |f(x)|^s d\mu \le\le \mu(A_1)(\|f\|_\infty)^s + \int_{[0,\infty)} |f(x)|^s d\mu < \infty.$$

□

Домашнее задание 12.5. *Пусть* $f(x) \in L_p([0,1])$ $\forall\ p \in [1,\infty)$ *и* $\exists\ c > 0$ *такое, что*

$$\|f\|_p \leq \ \forall p \in [1,\infty).$$

Доказать, что $f \in L_\infty((0,1))$.

Доказательство. Для $\forall\ \varepsilon > 0$ и для каждого p по неравенству Чебышёва имеем

$$\mu\left(\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > c+\varepsilon\}\right) = \mu\left(\{x \in [0,1] :\ |f(x)|^p > (c+\varepsilon)^p\}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(c+\varepsilon)^p}\|f\|_p^p = \left(\frac{\|f\|_p}{(a+\varepsilon)}\right)^p \to 0, \quad p \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\|f\|_\infty \leq c+\varepsilon$, а значит, $\|f\|_\infty \leq c$, то есть $f \in L_\infty(0,1)$. □

Семинар 13

Домашнее задание 13.1. *Построить пример функции* $f \in \bigcap\limits_{1\leq p<\infty} L_p(0,1)$, *но*

$$f \notin L_\infty(0,1).$$

Решение. Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1)\mathcal{X}_{A_n}(x),$$

где

$$A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что

$$f(x) \notin L_\infty(0,1),$$

но для $\forall\ p \in [1,\infty)$ выполнены условия

$$\int_{(0,1)} (f(x))^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p(n+1)}{n(n+1)} < \infty.$$

Домашнее задание 13.3. *Пусть* $f(x)$ *измерима и неотрицательна на* $[0,1]$ *и для нее функция распределения*

$$F_f(y) = \mu\left(\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > y\}\right), \quad y \neq 0.$$

Доказать, что при $p \in [1,\infty)$

$$\int_{[0,1]} f^p(x) d\mu = p\int_{(0,+\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu.$$

Доказательство. Пусть вначале $f(x)$ – простая функция. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{A_k}(x),$$

где $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, а измеримые множества конечной меры A_k попарно не пересекаются. Заметим, что

$$(f(x))^p = \sum_{k=1}^{n} c_k^p \mathcal{X}_{A_k}(x),$$

$$F_f(y) = \begin{cases} \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n), & 0 < y < c_1, \\ \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n), & c_1 \le y < c_2, \\ \ldots \mu(A_n), & c_{n-1} \le y < c_n, \\ 0, & y \ge c_n. \end{cases}$$

Полагая $c_0 = 0$, получим, что

$$p \int_{(0,\infty)} t^{p-1} F(t) d\mu = p \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=k}^{n} \mu(A_r) \right) \int_{c_{k-1}}^{c_k} t^{p-1} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=k}^{n} \mu(A_r) \right) \times (c_k^p - c_{k-1}^p) = \sum_{k=1}^{n} c_k^p \mu(A_k) = \int_{[0,1]} (f(x))^p \, d\mu.$$

Для случая простых функций требуемое равенство доказано.

В общем случае построим последовательность $h_n(x)$ простых неотрицательных функций такую, что $h_n(x) \uparrow f(x)$ при $n \to \infty$ на $[0,1]$.[52] Применяя теорему Беппо Леви, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (h_n(x))^p \, d\mu = \int_{[0,1]} (f(x))^p \, d\mu.$$

Далее, последовательность $\{F_{h_n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ неубывающая для каждого $t \in (0,\infty)$ и

$$\lim_{n\to\infty} F_{h_n}(t) = F_f(t)$$

для любого $t \in (0,\infty)$.[53] Поэтому, снова применяя теорему Беппо Леви, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} t^{p-1} F_{h_n}(t) d\mu = \int_{(0,\infty)} t^{p-1} F_f(t) d\mu.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\int_{[0,1]} (h_n(x))^p \, d\mu = p \int_{(0,\infty)} t^{p-1} F_{h_n}(t) d\mu.$$

Из трех вышеописанных равенств следует утверждение задачи. □

[52] Существование такой последовательности показывалось, например, в лекционном курсе.

[53] Это выполняется по построению F_{h_n} и в силу того факта, что для $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$, где $B_n \in M$ и $B = \cup B_n$,

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Семинар 14

Домашнее задание 14.1. *Пусть $f(x)$, $g(x) \in L(\mathbb{R})$. Доказать, что для почти всех $y \in \mathbb{R}$ $\exists$*

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)d\mu_x$$

и что $h(y) \in L(\mathbb{R})$.

Доказательство. Покажем сначала, что функция

$$h_1(z,t) = f(t)g(z-t)$$

измерима на $\mathbb{R}^2$. Ясно, что $f(t)$ измерима на $\mathbb{R}^2$. Заметим, что любая полоса $a \le z - t \le b$ является измеримым множеством на $\mathbb{R}^2$. Отсюда следует, что любое множество

$$\left\{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ z - t \in A \in M\right\}$$

тоже измеримо. Отсюда следует, что $g(z-t)$ тоже измерима на $\mathbb{R}^2$. Значит, и $h_1(z,t)$ измерима как произведение измеримых функций. Используя теорему 13.1 Фубини, получим, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} |h_1(y,x)|d\mu_2 = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|d\mu(y) \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|d\mu(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|d\mu(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(t)|d\mu(t) < \infty.$$

□

Домашнее задание 14.2. *Выяснить, интегрируема ли по Лебегу на $(0,\infty)^2$ функция*

$$f(x,y) = e^{-xy} \sin x \sin y.$$

Решение. Покажем, что $f(x,y) \in L((0,\infty)^2)$. $f(x,y)$ измерима в силу своей непрерывности. Представим рассматриваемый интеграл в виде

$$\int_{(0,\infty)^2} |f(x,y)|d\mu = \int_{(0,1)^2} |f(x,y)|d\mu + \int_{(0,1)\times(1,\infty)} |f(x,y)|d\mu +$$

$$+ \int_{(1,\infty)\times(0,1)} |f(x,y)|d\mu + \int_{(1,\infty)^2} |f(x,y)|d\mu = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Ясно, что $J_1 < \infty$. Далее, воспользовавшись тем, что функция интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда соответствующий интеграл Римана сходится абсолютно, и теоремой 13.1 Фубини, получим, что

$$J_4 \le \int_1^\infty \left(\int_1^\infty e^{-xy}dx\right) dy = \int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy < \infty.$$

Наконец,

$$J_2 \le \int_0^1 x \left(\int_1^\infty e^{-xy}dy\right) dx = \int_0^1 x\frac{e^-x}{x}dx = \int_0^1 e^{-x}dx < \infty,$$

и, аналогично, $J_3 < \infty$. Поэтому $f(x,y) \in L((0,\infty)^2)$.

Домашнее задание 14.3. *Пусть* $f(x) \in VB([0,1])$, $x_0 \in (0,1)$. *Доказать, что* $f(x)$ *непрерывна в* $x_0 \iff$ *функция*

$$g(x) = V_0^x f$$

непрерывна в точке x_0.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность

$$g(x_0 + h) - g(x_0).$$

Пусть $x_0 < 1$, $h > 0$. Возьмем разбиение

$$T = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$$

отрезка $[x_0, 1]$ такое, что

$$V_T(f) > V_{x_0}^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < x_1 - x_0$, и если $0 < h < \delta$, то

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При таких h получаем

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = V_{x_0}^{x_0+h}(f) = V_{x_0}^1(f) - V_{x_0+h}^1(f) <$$

$$< V_T f - V_{x_0-h}^1(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq |f(x_0 + h) - f(x_0)| +$$

$$+|f(x_0 + h) - f(x_1)| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| - V_{x_0+h}^1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq |f(x_0 + h) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Домашнее задание 14.4. *Показать, что если* $f \in VB([a,b])$ *и* $a < c < b$, *то*

$$f \in VB([a,c]) \cap VB([c,b])$$

и

$$V_a^b() = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Решение. Пусть

$$T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k=1} < x_k = c\}$$

и

$$T_2\{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b\}$$

– разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно. Тогда

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < y_1 < \ldots < y_m = b\}$$

– разбиение отрезка $[a, b]$. Следовательно,

$$V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f).$$

Так как разбиения T_1 и T_2 произвольны, то $f(x) \in \mathrm{VB}([a, c])$, $f(x) \in \mathrm{VB}([c, b])$ и

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f).$$

С другой стороны, пусть

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = n\}$$

– разбиение отрезка $[a, b]$. Определим новое разбиение T':

$$\begin{cases} T' \equiv T, \quad \text{если } c \in T, \\ T' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots x_k < c < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = n\}, \end{cases}$$

если $c \in (x_k, x_{k+1})$ для некоторого k.

Заметим, что T' является объединением разбиений T_1 и T_2 соответственно. Следовательно,

$$V_T(f) \leq V_{T'}(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + Vc^b(f).$$

Так как T произвольно, утверждение задачи доказано.

Семинар 15

Домашнее задание 15.1. *Пусть*

$$f: \ [a, b] \to \mathbb{R},$$

$\exists\ \delta > 0$ *такое, что* $\forall$ *система интервалов* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *на* $[a, b]$ *с условием*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$$

имеет

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Доказать, что $f(x) \in Lip\ 1$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $f(x) \notin \mathrm{Lip}\ 1$. Тогда $\forall\ m \in \mathbb{N}$ существуют точки x_m, $y_m \in [a, b]$ такие, что

$$\frac{|f(x_m) - f(y_m)|}{|x_m - y_m|} > m.$$

Положим
$$\gamma_m = |x_m - y_m|.$$
Докажем, что для каждого m и для любого $\gamma \in (0, \gamma_m)$ существуют $x_m(\gamma)$, $y_m(\gamma)$ $\in [0,1]$ такие, что
$$\frac{\gamma}{2} \leq |x_m(\gamma) - y_m(\gamma)| < \gamma$$
и
$$\frac{|f(x_m(\gamma)) - f(y_m(\gamma))|}{|x_m(\gamma) - y_m(\gamma)|} > m.$$
Пусть $[c,d] = [x_m, y_m]$, а l – минимальное натуральное число такое, что
$$\frac{d-c}{\gamma} < l.$$
Положим
$$z_j = c + \frac{j(d-c)}{l}, \quad j = 0, 1, \dots l.$$
Предположим, что
$$|f(z_j) - f(z_{j-1})| \leq m|z_j - z_{j-1}|$$
для $\forall\ j$. Тогда
$$|f(d) - f(c)| \leq \sum_{j=1}^{|} f(z_j) - f(z_{j=1})| \leq \sum_{j=1}^{l} m|z_j - z_{j-1}| = m(d-c),$$
пришли к противречию. Поэтому существует $j_0 \in [1, l]$ такое, что
$$|f(z_{j_0}) - f(z_{j_0-1})| \geq m|z_{j_0} - z_{j_0-1}|.$$
Так как
$$\frac{\gamma}{2} \leq |z_{j_0} - z_{j_0-1}| < \gamma,$$
можно взять $x_m(\gamma) = z_{j_0-1}$ и $y_m(\gamma) = z_{j_0}$. Выберем $\delta > 0$ такое,что для любой конечной системы $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ интервалов из $[a,b]$ с условием
$$\sum_{k=1}^{n} |b_n - a_n| < \delta$$
выполнено
$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_n) - f(a_n)| < 1.$$
Зафиксируем $m > 2/\delta$ и выберем $\gamma < \gamma_m$ такое что $N = \delta/\gamma$ – целое число. Возьмем систему из N одинаковых интервалов $(x_m(\gamma), y_m(\gamma))$. Тогда
$$N|x_m(\gamma) - y_m(\gamma)| < Ny = \delta,$$
но
$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_m(\gamma) - f(y_m(\gamma))| = N|f(x_m(\gamma) - f(y_m(\gamma))| \geq N\frac{\gamma}{2}m = \frac{\delta}{2}m > 1.$$
Полученное противоречие доказывает, что $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$. $\square$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ