



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД. ЧАСТЬ 2

ГОРБАЧЕВ  
ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**КОСТОМАРОВА КИРИЛЛА АЛЕКСЕЕВИЧА**



## Содержание

<b>Лекция 1</b>	<b>6</b>
Кинематика и динамика простейших систем . . . . .	6
Линейная теория упругости . . . . .	6
Симметрия компонент тензора модулей упругости . . . . .	8
Изотропные тела . . . . .	8
<b>Лекция 2</b>	<b>10</b>
Обобщенный закон Гука . . . . .	10
Физический смысл модуля Юнга и коэффициента Пуассона . . . . .	11
Границы изменения коэффициента Пуассона . . . . .	11
Постановка задачи . . . . .	12
Способы решения второй краевой задачи . . . . .	13
<b>Лекция 3</b>	<b>15</b>
Решение второй краевой задачи с граничными условиями . . . . .	15
Оператор Бельтрами-Митчелла . . . . .	16
Единственность решения статической задачи . . . . .	16
Принцип виртуальных перемещений . . . . .	17
<b>Лекция 4</b>	<b>19</b>
Теорема единственности для динамической задачи . . . . .	19
Функционал Лагранжа . . . . .	19
Функционал Кастильяно . . . . .	21
Функционал Рейсснера . . . . .	22
<b>Лекция 5</b>	<b>23</b>
Теорема взаимности Бетти . . . . .	23
Решение задач с помощью теоремы Бетти . . . . .	24
Тензор Грина . . . . .	25
Формулы Сомильяны . . . . .	26
<b>Лекция 6</b>	<b>27</b>
Представление решений . . . . .	27
Представление Нейбера . . . . .	28
Представление Папковича . . . . .	29
Представление Галеркина . . . . .	29
<b>Лекция 7</b>	<b>30</b>
Представление решений уравнения Ламе . . . . .	30
Примеры задач с представлением решения . . . . .	30
Решения Кельвина . . . . .	32
<b>Лекция 8</b>	<b>34</b>
Случай полупространства . . . . .	34
Метод преобразования Фурье . . . . .	34

Решение первой краевой задачи . . . . .	35
<b>Лекция 9</b>	<b>36</b>
Решение краевых задач с помощью преобразования Фурье . . . . .	36
Решение второй краевой задачи . . . . .	36
Задача Буссинеска . . . . .	38
<b>Лекция 10</b>	<b>39</b>
Плоские задачи теории упругости . . . . .	39
Случай плоского напряженного состояния . . . . .	40
<b>Лекция 11</b>	<b>42</b>
Задача о плоской деформации . . . . .	42
Случай плоского напряженного состояния . . . . .	43
Общее решение плоских задач . . . . .	44
<b>Лекция 12</b>	<b>45</b>
Решение плоских задач . . . . .	45
Физический смысл функции напряжений . . . . .	46
Задача про трубу . . . . .	46
<b>Лекция 13</b>	<b>49</b>
Методы ТФКП для плоских задач . . . . .	49
Задача Ламе . . . . .	49
<b>Лекция 14</b>	<b>52</b>
Применение ТФКП . . . . .	52
Случай второй краевой задачи . . . . .	52
Постановка задачи . . . . .	53
Задача Кирша . . . . .	54
<b>Лекция 15</b>	<b>56</b>
Динамические задачи . . . . .	56
Классы динамических задач . . . . .	56
Волны в изотропных телах . . . . .	57
Плоские волны . . . . .	58
<b>Лекция 16</b>	<b>60</b>
Распространение волн . . . . .	60
Распространение волны в определенном направлении . . . . .	60
Гармонические волны . . . . .	61
Волны в анизотропном материале . . . . .	62
Поверхностные волны Рэлея . . . . .	62
<b>Лекция 17</b>	<b>64</b>
Случай волн Рэлея . . . . .	64
Волны Лява . . . . .	65

Неупругое поведение материалов . . . . .	65
<b>Лекция 18</b>	<b>67</b>
Теория пластичности . . . . .	67
Основные гипотезы теории пластичности . . . . .	68
Постановка задачи теории пластичности . . . . .	69
<b>Лекция 19</b>	<b>70</b>
Теория пластичности деформационного типа . . . . .	70
Методы решений задач теории пластичности . . . . .	70
Критерий начала текучести . . . . .	71
Определяющие соотношения теории текучести . . . . .	72
<b>Лекция 20</b>	<b>74</b>
Ползучесть материалов . . . . .	74
Теория деформирования вязкоупругих материалов . . . . .	75
Модель Максвелла . . . . .	75
Модель Кельвина . . . . .	76
Постановка задачи теории вязкой упругости . . . . .	78
<b>Лекция 21</b>	<b>79</b>
Определяющие соотношения теории вязкой упругости . . . . .	79
Преобразование Лапласа-Карсона . . . . .	79
Метод аппроксимации Ильюшина . . . . .	80
Механика композитов . . . . .	81
<b>Лекция 22</b>	<b>82</b>
Первая специальная краевая задача . . . . .	82
Вторая специальная краевая задача . . . . .	82
Случай неоднородного анизотропного упругого тела . . . . .	83
Случай с неоднородным по толщине слоем . . . . .	84
<b>Лекция 23</b>	<b>85</b>
Метод малого геометрического параметра . . . . .	85
<b>Лекция 24</b>	<b>88</b>
Постановка трехмерной задачи . . . . .	88
Случай неоднородного материала со специальными процессами . . . . .	89

# Лекция 1

## Кинематика и динамика простейших систем

Механику деформируемого твердого тела можно описать 3 теориями. Определим основные положения каждой из них.

### Теория упругости:

- 1) Напряжения и деформации связаны взаимно однозначным соответствием в каждой точке в каждый момент времени, причем эти соотношения взаимно обратны.
- 2) Если скорость изменения внешних нагрузок мала, то можно пренебречь влиянием инерционных эффектов.
- 3) При разгрузке связь между напряжениями и деформациями остается такой же, как и при нагрузке.

### Теория вязкой упругости:

- 1) Напряжения в точке тела в момент времени  $t$  связаны с деформациями во все предыдущие моменты времени, и наоборот.
- 2) При фиксированном напряжении в точке тела деформации изменяются во времени, увеличиваясь до некоторого конечного значения, либо до бесконечности.
- 3) При фиксированной деформации в точке тела абсолютное значение напряжений убывают либо до конечного значения, либо до 0. Такой процесс называется релаксацией напряжения.
- 4) При уменьшении внешних нагрузок закон связи напряжения и деформации не меняется. При полном снятии нагрузок деформации изменяются либо до конечного значения, либо до 0.

### Теория пластичности:

- 1) В каждой точке тела напряжение зависит от процесса деформации и наоборот, деформации зависят от процесса напряжений.
- 2) При разгрузке закон связи деформаций и напряжений отличается от закона связи при нагрузке.
- 3) При полной разгрузке в теле остаются деформации, называемые пластическими деформациями.

## Линейная теория упругости

Рассмотрим тензор деформаций у твердого тела. В общем случае он имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} + u_{k,j}) \quad (1.1)$$

где  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Большинство нелинейных задач механики деформируемого твердого тела сводится к линейным задачам, или к случаю малых перемещений. В случае малых перемещений получаем условие на векторы  $u_{ij}$ :  $|u_{ij}| = \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1$ . В итоге, в формуле (1.1) можно пренебречь последними двумя слагаемыми, а тензор деформаций примет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

Из закона движения получим выражение для тензора напряжений и симметрию по паре индексов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае малых перемещений, тензоры деформаций и напряжений связаны по формуле:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.4)$$

где  $C_{ijkl}$ -компоненты тензора 4-го ранга, называемого тензором модулей упругости. Так как в линейном случае соответствия между напряжениями и деформациями взаимно однозначны, можно обратить равенство (1.4):

$$\varepsilon_{ij} = I_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1.5)$$

Компоненты  $I_{ijkl}$  называются компонентами тензора податливости. Эти тензоры взаимно обратны, т.е.  $C_{ijmn} I_{mnkl} = \Delta_{ijkl}$ . Объединяя выражения (1.2), (1.3) и (1.4) получаем систему уравнений для деформируемого твердого тела:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \\ \sigma_{ij,j} + X_i &= \rho * \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

Количество уравнений в этой системе можно уменьшить до трех. Подставим выражения для тензоров напряжений и деформаций во второе уравнение:

$$(C_{ijkl} U_{k,l})_j + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

## Симметрия компонент тензора модулей упругости

Компоненты тензора модулей упругости симметричны по 1 и 2 паре индексов, а также по перестановке этой пары, т.е.  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ . Первые два равенства очевидны, докажем, что  $C_{ijkl} = C_{klij}$ . Для этого введем понятие упругого потенциала  $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ . Это положительно определенная квадратичная форма. Возьмем вторую частную производную по  $\varepsilon_{ij}$ . Получим:  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$ , т.е.  $C_{ijkl} = C_{klij}$ .

Из-за симметрий, в общем случае тензор будет иметь 21 независимую компоненту. Если у тела имеется плоскость симметрии, то количество независимых компонент снижается до 13. Если же у тела 2 плоскости симметрии, то независимых компонент останется 9. Такие тела называются ортотропными.

## Изотропные тела

**Определение.** Ось изотропии - ось, при вращении вокруг которой, свойства тела остаются неизменными. Тела, у которых имеется ось изотропии, называются трансверсально-изотропными. В этом случае, у тензора модулей упругости будет всего 5 независимых компонент.

**Определение.** Изотропное тело - тело, свойства которого не зависят от направления. У изотропного тела любая ось является осью изотропии. У таких тел тензор модулей упругости содержит 2 независимых компоненты, которые можно представить в виде:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl} \quad (1.7)$$

$\lambda$  и  $\mu$ -параметры Ламе.

Перепишем уравнение (1.7) в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$\varepsilon = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ . Выведем из него выражение для компонент тензора податливости. Домножим уравнение на  $\delta_{ij}$  и получим:

$$\sigma = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon$$

Выразим отсюда  $\varepsilon$  и подставим в первое уравнение:

$$\sigma_{ij} = \frac{3\lambda \delta_{ij} \sigma}{3\lambda + 2\mu} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$



Посчитаем  $\varepsilon_{ij}$  и домножим на  $\sigma_{kl}$ , тогда уравнение (1.7) примет вид :

$$I_{ijkl} = \frac{\Delta_{ijkl}}{2\mu} - \frac{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Пусть  $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ ,  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ , тогда уравнение примет вид:

$$I_{ijkl} = \frac{1 + \nu}{E} \Delta_{ijkl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (1.8)$$

здесь  $E$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

## Лекция 2

### Обобщенный закон Гука

Рассмотрим изотропное тело. Допустим, что у тела при деформации изменяется угол между 1-ой и 2-ой координатной осью, т.е.  $\varepsilon_{12} \neq 0$ ,  $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ . Тогда из уравнения (1.7) получим, что  $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$ . По определению тензора деформаций,  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ .



Рисунок 2.1

Введем упругий потенциал  $W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ . Рассмотрим выражение для дивергента деформаций:

$$e_{ii} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (2.1)$$

Выражая отсюда  $\varepsilon$ , уравнение упругого потенциала примет вид:

$$W = (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\Delta_{ijkl})(e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij})(e_{kl} + \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{kl}) \quad (2.2)$$

Эту формулу можно представить в виде:

$$W = \frac{1}{2}(K\varepsilon^2 + \mu\Gamma^2) \quad (2.3)$$

где  $\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$  - интенсивность деформаций,  $K$  - модуль объемного сжатия. Так как упругий потенциал - положительно определенная квадратичная форма, коэффициенты  $\mu$  и  $K$  - положительны.

### Физический смысл модуля Юнга и коэффициента Пуассона

Представим случай растяжения твердого тела вдоль одной оси, т.е.  $\sigma_{11} \neq 0$ ,  $\sigma_{ij} \equiv 0$ . Тогда из обратного закона Гука, выражение для тензора деформаций примет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\delta_{1i}\delta_{1j}}{2\mu} - \frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \right) \sigma_{11} \quad (2.4)$$

Соответственно, относительное удлинение тела вдоль оси равно:

$$\varepsilon_{11} = \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right) \sigma_{11}$$

Учитывая, что  $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$  - модуль Юнга, получим закон Гука, связывающий линейным образом напряжения и деформации:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \quad (2.5)$$

Таким образом, модуль Юнга - коэффициент пропорциональности между нагрузкой, приложенной к телу, и продольной деформацией тела. Заметим, что даже если напряжение действует лишь вдоль одной оси, относительно других осей тело также будет деформироваться. Найдем из уравнения (2.4) остальные компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_{11}$$

Заметим, что член, связывающий между собой компоненты тензора деформаций, есть в точности  $\nu$  - коэффициент Пуассона. В упрощенном виде уравнение запишется:

$$\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \quad (2.7)$$

Получается, что коэффициент Пуассона линейно связывает продольные и поперечные деформации в теле. Исходя из его знака, тело может как расширяться, так и сужаться.

## Границы изменения коэффициента Пуассона

Определим границы изменения коэффициента Пуассона. Для этого выразим параметры Ламе через  $E$  и  $\nu$ .

$$\mu = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (2.8)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.3) мы вывели, что  $\mu, K > 0$ . Учитывая, что модуль объемного сжатия  $K$  также выражается через параметры Ламе:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.10)$$

получим, что  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ .

## Постановка задачи

Мы уже выводили систему уравнений при малых деформациях:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases}$$

которая подстановкой уменьшалась до 3 уравнений:

$$(C_{ijkl} U_{k,l})_j + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Возьмем изотропное тело. Тогда мы можем подставить уравнение (1.7) вместо  $C_{ijkl}$ :

$$[(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) + 2\mu \Delta_{ijkl}] u_{kl} = [\lambda \delta_{ij} u_{kk} + 2\mu(u_{ij} + u_{ji})]_j = (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu \Delta u_i = L(u_i)$$

$\Delta$  - оператор Лапласа.

Тогда система преобразуется к виду:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

То же самое можно записать в векторном виде:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \vec{X} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

Если представить вектор перемещения как:

$$\vec{u} = \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{u})$$

то уравнение (2.12) примет вид:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \mu \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) + \vec{X} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11)-(2.13) называются уравнениями Ламе.  $L$  - тензор второго ранга, называемый оператором Ламе. Посмотрим, как этот оператор действует на произвольный вектор перемещения:  $L_{ik}(u_i) = \mu \delta_{ik} \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{i,ik}$ .

### Свойства оператора Ламе:

- 1) Симметричный
- 2) Положительно определенный
- 3) Самосопряженный

Рассмотрим случай, когда тело неподвижно:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + X_i = 0 \quad (2.14)$$

Для решения задачи необходимы начальные условия, которые бывают трех типов:

$$U_i|_{\Sigma} = U_i^0 \quad (2.15)$$

Совокупность уравнения (2.14) и начального условия (2.15) называется первой краевой задачей.

$$\sigma_{ij} n_j|_{\Sigma} = P_i^0 \quad (2.16)$$

Совокупность уравнения (2.14) и начального условия (2.16) называется второй краевой задачей.

$$U_i|_{\Sigma_u} = U_i^0; \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_p} = P_i^0; \Sigma_u \cup \Sigma_p = \Sigma \quad (2.17)$$

Совокупность уравнения (2.14) и начального условия (2.17) называется смешанной краевой задачей.

## Способы решения второй краевой задачи

Рассмотрим случай неподвижного тела (статический случай). Данное условие гарантируется двумя соотношениями:

$$\begin{cases} \int_V \vec{X} dV + \int_{\Sigma} \vec{p}^0 d\Sigma = 0 \\ \int_V \vec{r} \times \vec{X} dV + \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{p}^0 d\Sigma = 0 \end{cases}$$

Пусть у нас заданы напряжения на поверхности тела, т.е. мы решаем вторую краевую задачу. Запишем систему уравнений, определяющих деформации тела:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \\ \varepsilon_{ij} = I_{ijkl} \sigma_{kl} \\ \epsilon_{\alpha ik} \epsilon_{\beta jl} \varepsilon_{ij,kl} = 0 \end{cases}$$

последнее уравнение в системе - уравнение совместности. Рассмотрим способы решения этой системы:

Первый способ заключается в введении функции напряжения. Пусть:

$$X_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \implies \vec{X} = \text{grad} \phi \quad (2.18)$$

Учитывая, что

$$\epsilon_{\alpha ik} \epsilon_{\beta jl} [I_{ijkl} \sigma_{kl}]_{,kl} = 0$$

Введем функцию напряжения  $F_{kl,mn}$ , подставим соотношение (2.18) в уравнение равновесия и домножим на  $\delta_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = -\phi \delta_{ij} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} F_{kl,mn} - \phi \delta_{ij} \quad (2.19)$$

Слагаемое с функцией напряжения равно нулю (следует из уравнения совместности), поэтому равенство не нарушено, и мы получили систему из 6 уравнений с 6 неизвестными.

Второй способ подходит для изотропных тел. Уравнение совместности можно переписать в виде:

$$\Delta \epsilon_{ij} + \epsilon_{,ij} - \epsilon_{ik,kj} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.20)$$

Тензор деформации в изотропном теле:  $\epsilon_{i,j} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{,ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$ . Объединяя два уравнения получим:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \sigma_{,ij} = \frac{3\nu}{1+\nu} \Delta \delta_{ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{il,jl} = 0$$

Учитывая уравнение неразрывности:  $\sigma_{jk,ki} = -X_{j,i}$ . Пусть  $i=j$  (свертка), тогда:

$$\Delta \sigma = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} X_{k,k} \quad (2.21)$$

получим конечное уравнение:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \sigma_{,ij} = \frac{-\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij} - 2\Delta_{ijkl} X_{k,l} \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) называется уравнением Бельтрами-Митчелла.

## Лекция 3

### Решение второй краевой задачи с граничными условиями

На прошлой лекции мы вывели уравнение Бельтрами-Митчелла:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,ij} = \frac{-\nu}{1-\nu}X_{k,k}\delta_{ij} - 2\Delta_{ijkl}X_{k,l}$$

с граничными условиями:  $\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma} = P_i^0$ . Можно заметить, что в уравнении Бельтрами-Митчелла 6 уравнений с 6 неизвестными, в то время как граничных условий всего 3. Из-за этого нарушается единственность решения, и встает задача отыскать еще 3 условия. Для этого продифференцируем уравнение Бельтрами-Митчелла по  $x_j$ :

$$\Delta\sigma_{ij,j} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,ijj} = \frac{-\nu}{1-\nu}X_{k,ki} - \Delta x_i - x_{j,ij} \quad (3.1)$$

Заметим, что некоторые слагаемые можно объединить с помощью оператора Лапласа.

$$\Delta(\sigma_{ij,j} + x_i) + \frac{3}{1+\nu}[\Delta\sigma + \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}X_{k,k}]_{,i} = 0 \quad (3.2)$$

Второе слагаемое в уравнении (3.2) - в точности уравнение равновесия, поэтому оно обращается в 0. Таким образом, мы получили дополнительные граничные условия, необходимые для единственности решения:

$$(\sigma_{ij,j} + x_i)_{\Sigma} = 0 \quad (3.3)$$

Объединяя уравнение (3.3), начальные, граничные условия и уравнение Бельтрами-Митчелла, получим полную постановку второй краевой задачи, которая имеет единственное решение:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,ij} = \frac{-\nu}{1-\nu}X_{k,k}\delta_{ij} - 2\Delta_{ijkl}X_{k,l} \\ (\sigma_{ij,j} + x_i)_{\Sigma} = 0 \\ \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma} = P_i^0 \end{cases}$$

### Оператор Бельтрами-Митчелла

Уравнение Бельтрами-Митчелла можно переписать в векторном виде:

$$L_{ijkl}(\sigma_{kl}) + Y_{ii} = 0 \quad (3.4)$$

где  $Y_{ii} = \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij} + 2\Delta_{ijkl} X_{k,l}$ .

$L$  - тензор 4 ранга, называемый оператором Бельтрами-Митчелла. В общем виде:

$$L_{ijkl}(\cdot) = \Delta_{ijkl} \Delta(\cdot) + \frac{1}{1-\nu} \delta_{kl}(\cdot)_{,ij} \quad (3.5)$$

Оператор Бельтрами-Митчелла симметричен по первой и второй паре индексов, но не по перестановке этих пар, положительно определенный и не самосопряженный. Сделаем его самосопряженным:

$$L_{ijkl}(\sigma_{kl}) + \xi_{ij}(\sigma_{kl,l} + X_k)_{,k} + Y_{ii} = 0 \quad (3.6)$$

Второе слагаемое в соотношении (3.6) - уравнение равновесия, поэтому равенство не нарушается. Пусть  $\xi = \frac{1}{1+\nu} \delta_{ij}$ , тогда уравнение примет вид:

$$L_{ijkl}(\sigma_{kl}) + \frac{1}{1+\nu} \delta_{ij}(\sigma_{kl,l} + X_k)_{,k} + Y_{ii} = 0 \quad (3.7)$$

Тогда  $L_{ijkl}^* = L_{ijkl}(\sigma_{kl}) + \frac{1}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kl,k}$  - самосопряженный оператор. В общем виде:

$$L_{ijkl}^*(\cdot) = \Delta_{ijkl} \Delta(\cdot) + \frac{1}{1+\nu} [\delta_{kl}(\cdot)_{,ii} + \delta_{ij}(\cdot)_{,kl}] \quad (3.8)$$

## Единственность решения статической задачи

**Теорема о единственности решения статической задачи (Кирхгофф).**

Если выполняются следующие условия:

- 1) Тело односвязное
  - 2) Начальные деформации и напряжения отсутствуют
- тогда решение статической задачи единственно.

**Доказательство:**

Запишем уравнения Ламе и начальные условия:

$$\begin{cases} \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + X_i = 0 \\ \sigma_{ij} n_j |_{\Sigma_p} = P_i^0 \\ u_i |_{\Sigma_i} = u_i^0 \end{cases}$$

Допустим, имеется два различных решения:  $u_i^1, u_i^2$ . Тогда  $u_i^* = u_i^1 - u_i^2$  - тоже решение, т.к. задача линейна. Составим выражение для упругой энергии:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* dV = \frac{1}{2} \int_V [(\sigma_{ij}^* u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij}^* u_{i,j}^*] dV \quad (3.9)$$



По теореме Гаусса-Остроградского можно перейти к поверхностному интегралу:

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^* n_j u_i^* d\Sigma + \int_V x_i^* u_i^* dV \right] = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_n} \sigma_{ij}^* n_j u_i^{*0} d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} P_i^{*0} u_i^* d\Sigma + \int_V x_i^* u_i^* dV = 0$$

С другой стороны:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV = \frac{1}{2} \int_V [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl}] (e_{kl} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{kl}) (e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}) dV$$

В последнем равенстве мы разложили тензор деформаций на сумму шаровой и девиаторной частей. Окончательно получаем:

$$U = \frac{1}{2} \int_V K \varepsilon_*^2 + \mu \Gamma_*^2 dV = 0 \quad (3.10)$$

Из последнего равенства видно, что  $\varepsilon_* = 0$  и  $\Gamma_* = 0 \implies \varepsilon_{ij}^* = 0 \implies u_i^* = 0$ .

Поэтому, любые решения связаны формулой:

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} + a + w_{ij} X_j \quad (3.11)$$

где  $a = \text{const}$ ,  $w_{ij}$  - антисимметричный тензор, называемый тензором вращения.

## Принцип виртуальных перемещений

Теперь мы рассматриваем динамическую задачу, поэтому уравнения в системе немного изменятся:

$$\begin{cases} \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + X_i(x, t) = \rho * \ddot{u}_i \\ \sigma_{ij} n_j |_{\Sigma_p} = P_i^0 \\ u_i |_{\Sigma_i} = u_i^0 \\ u_i(x, 0) = f(x) \\ \dot{u}_i(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Пусть у нас имеются произвольные перемещения тела  $u_i$ , а  $\delta u_i$  - малые перемещения (вариации), которые равны нулю на поверхности  $\Sigma_n$ . Введем понятие работы на вариациях  $\delta A$ :

$$\delta A = \int_V X_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma} P_i^0 \delta u_i d\Sigma = \int_V X_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Sigma \quad (3.12)$$

Перейдем к интегралу по объему и воспользуемся равенством:  $\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$

$$\delta A = \int_V X_i \delta u_i dV + \int_V (\sigma_{ij} \delta u_{i,j})_{,j} dV = \int_V (X_i + \sigma_{ij,j}) \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

Заматим в последнем равенстве уравнение равновесия и получим:

$$\delta A = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.13)$$

Вычтем из уравнения (3.12) уравнение (3.13) и выразим работу напряжений на вариациях деформаций:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma P_i^0 \delta u_i d\Sigma \quad (3.14)$$

Из этого следует, что работа напряжений на вариациях деформации равняется сумме работ внутренних объемных сил на виртуальных перемещениях, сил инерции на виртуальных перемещениях и сил поверхностных сил на виртуальных перемещениях. Мы нигде не использовали определяющие соотношения, поэтому формула (3.14) верна для любых теорий. Применим ее для линейно-упругой задачи:

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})$$

Тогда выражение для упругой энергии на виртуальных перемещениях примет вид:

$$\delta U_\varepsilon = \delta \int_V W_\varepsilon dV = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma P_i \delta u_i d\Sigma \quad (3.15)$$

Вариацию можно рассматривать как совокупность причин, приводящих к малейшему перемещению. Пусть:  $\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt = v_i dt$ . Тогда уравнение (3.15) примет вид:

$$\delta U_\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial t} dt = \dot{U} dt = \int_V X_i v_i dt - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_\Sigma P_i v_i dt \quad (3.16)$$

Примем второе слагаемое за кинетическую энергию и обозначим  $K = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV$ , тогда:

$$\frac{d}{dt} (K + U) = \int_V X_i v_i dt + \int_\Sigma P_i v_i dt \quad (3.17)$$

## Лекция 4

### Теорема единственности для динамической задачи

На прошлой лекции мы получили соотношение:

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \int_V X_i v_i dt + \int_{\Sigma} P_i v_i dt \quad (4.1)$$

Учитывая систему начальных и граничных условий:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^* - \rho \ddot{u}_i = 0 \\ \sigma_{ij}^* n_j^* |_{\Sigma_i} = 0 \\ u_i^* |_{\Sigma_n} = 0 \\ u_i^*(x, 0) = 0 \\ \dot{u}_i^*(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Получим закон сохранения энергии:

$$\frac{dK^*}{dt} + \frac{dU^*}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

Поэтому, любые два решения связаны соотношением:

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} + const \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) является следствием теоремы единственности Кирхгоффа для динамической задачи.

### Функционал Лагранжа

Рассмотрим выражение для упругой энергии на вариациях:

$$\delta U = \delta \int_V W_{\varepsilon} dV = \int_V X_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma} P_i^0 \delta u_i d\Sigma \quad (4.4)$$

Вычтем одно из другого:

$$\delta \left[ \int_V W_{\varepsilon} dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma} P_i^0 u_i d\Sigma \right] = 0 \quad (4.5)$$

Введем функцию, называемую функционалом Лагранжа (Лагранжианом):

$$L(u) = \int_V W_\varepsilon \text{Def}(u) dV - \int_V X_i u_i dV - \int_\Sigma P_i^0 u_i d\Sigma \quad (4.6)$$

здесь  $\text{Def}(\cdot) = \frac{1}{2}(\nabla(\cdot) + (\cdot)\nabla)$  - деформатор.

Тогда вариационный принцип Лагранжа прозвучит так: Среди всех кинематически допустимых перемещений, только истинные перемещения приносят минимум Лагранжиану. Истинные перемещения - перемещения, удовлетворяющие всем уравнениям и начальным условиям.

#### Доказательство:

Возьмем вариацию функционала Лагранжа:

$$\delta L(v) = \int_V \delta W_\varepsilon dV - \int_V X_i \delta v_i dV - \int_\Sigma P_i^0 \delta v_i d\Sigma \quad (4.7)$$

здесь  $\delta W_\varepsilon = \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \tau_{ij} \delta v_{i,j}$ . Причем  $\tau_{ij}$  - симметричный тензор напряжений. Тогда:

$$\int_V \tau_{ij} \delta v_{i,j} dV = \int_V [(\tau_{ij} \delta v_i)_{,i} - \tau_{ij,j} \delta v_i] dV \quad (4.8)$$

По формуле Гаусса-Остроградского можно перейти к поверхностному интегралу:

$$\delta L(v) = \int_\Sigma \tau_{ij} n_j \delta v_i d\Sigma - \int_V \tau_{ij,j} \delta v_i dV - \int_V X_i \delta v_i dV - \int_\Sigma P_i^0 \delta v_i d\Sigma = 0 \quad (4.9)$$

Функционал Лагранжа обращается в 0 при следующих соотношениях:

$$\begin{cases} \tau_{ij,j} + X_i = 0 \\ \tau_{ij} n_j |_{\Sigma_p} = P_i^0 \\ \tau_{ij} = \frac{\partial W_\varepsilon(\text{Def}v)}{\partial \varepsilon_{ij}} \end{cases}$$

Учитывая соотношение Коши:  $\varepsilon_{ij} = \Delta_{ijkl} v_{k,l}$  и граничное условие:  $v_i \sigma |_{\Sigma_u} = u_i^0$  получим полную систему уравнений для деформируемого твердого тела, т.е.  $v_i$  - действительное решение.

Докажем это утверждение в обратную сторону. Так как  $v_i$  - действительное решение, то  $\delta L(v) = 0$ , т.е. это точка экстремума. Необходимым и достаточным условием минимума является положительное значение второй производной в той же точке. Рассмотрим выражение для второй производной Лагранжиана:

$$\delta^2 L(v) = \int_V \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} dV > 0 \quad (4.10)$$

По определению упругого потенциала, такая свертка всегда положительна.

Таким образом, приближенные решения дают точную верхнюю оценку функционала Лагранжа.

## Функционал Кастильяно

Рассмотрим функционал Кастильяно:

$$K(\tau) = - \int_V W_\sigma(\tau) dV + \int_{\Sigma_u} \tau_{ij} n_j u_i^0 d\Sigma \quad (4.11)$$

Как и везде, предполагаются малые деформации, а тензор напряжений симметричен. Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \tau_{ij,j} + X_i = 0 \\ \tau_{ij} n_j |_{\Sigma_p} = P_i^0 \\ e_{ij} = \frac{\partial W_\sigma}{\partial \tau_{ij}} \\ W_\sigma = \frac{1}{2} I_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \end{cases}$$

Вариационный принцип Кастильяно: Среди всех статически допустимых напряжений, только истинные напряжения приносят максимум функционалу Кастильяно.

### Доказательство:

Рассмотрим вариацию функционала Кастильяно:

$$\delta K(\tau) = - \int_V \frac{\partial W_\sigma}{\partial \tau_{ij}} \delta \tau_{ij} dV + \int_{\Sigma_u} \delta \tau_{ij} n_j u_i^0 d\Sigma = - \int_V e_{ij} \delta \tau_{ij} dV + \int_\Sigma \delta \tau_{ij} n_j v_i d\Sigma + \int_{\Sigma_u} \delta \tau_{ij} n_j (u_i^0 - v_i) d\Sigma$$

В последнем равенстве мы прибавили выражение, тождественно равное нулю. Далее, можно перейти к объемному интегралу:

$$\delta K(\tau) = - \int_V e_{ij} \delta \tau_{ij} dV + \int_\Sigma \delta \tau_{ij} n_j v_i d\Sigma + \int_V \delta \tau_{ij,j} v_i dV + \int_V \delta \tau_{ij} v_{i,j} dV + \int_\Sigma \delta \tau_{ij} n_j (u_i^0 - v_i) d\Sigma \quad (4.12)$$

Вариация от статически допустимых напряжений равна нулю, поэтому можно провести свертку:

$$\tau_{ij} v_{i,j} = \tau_{ij} \left[ \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \right] = \tau_{ij} e_{i,j} \quad (4.13)$$

Учитывая соотношение (4.13) и тот факт, что второе слагаемое в уравнении (4.12) равно нулю, окончательно получаем:

$$\delta K(\tau) = - \int_V \left[ e_{ij} - \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \right] \delta \tau_{ij} dV + \int_{\Sigma_u} \delta \tau_{ij} n_j (u_i^0 - v_i) d\Sigma = 0 \quad (4.14)$$

Равенство нулю гарантируется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} v_i |_{\Sigma_0} = u_i^0 \\ e_{ij} = \Delta_{ijkl} v_{k,l} \end{cases}$$

что в совокупности с граничными условиями дает полную систему уравнений, то есть  $v_i$  - истинное решение.

Докажем в обратную сторону. Необходимо показать, что вторая производная функционала Кастильяно на истинном решении - меньше нуля.

$$\delta^2[K(\tau)] = - \int_V \frac{\partial^2 W_\sigma}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{kl}} \delta \tau_{ij} \delta \tau_{kl} dV < 0 \quad (4.15)$$

Так как  $\frac{\partial^2 W_\sigma}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{kl}}$  - положительно определенная квадратичная форма.

Таким образом, приближенные решения дают точную нижнюю оценку функционала Кастильяно. Имея приближенное решение задачи, можно построить по нему функционалы Лагранжа и Кастильяно, тогда истинное решение будет находиться между их значениями.

## Функционал Рейсснера

Пусть вариации  $\delta v_i$ ,  $\delta e_{ij}$ ,  $\delta \tau_{ij}$  - произвольные. Для того, чтобы найти уравнения, которым будут удовлетворять истинные значения перемещений, тензора деформаций и тензора напряжений, используют функционал Рейсснера:

$$R = \int_V [W_\varepsilon - X_i u_i] dV - \int_V \sigma_{ij} [W \varepsilon_{ij} - \Delta_{ijkl} u_{k,l}] dV - \int_{\Sigma_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - u_i^0) d\Sigma - \int_{\Sigma_p} P_i^0 u_i d\Sigma \quad (4.16)$$

Тогда вариационный принцип Рейсснера прозвучит так: Истинные значения  $u$ ,  $\varepsilon$  и  $\sigma$  обращают вариацию функционала Рейсснера в ноль. Т.е. уравнение:

$$\delta R = 0 \quad (4.17)$$

Эквивалентно системе уравнений для деформируемого твердого тела с заданными граничными и начальными условиями.

## Лекция 5

### Теорема взаимности Бетти

Любые заданные условия можно рассматривать как совокупность причин, приводящих к деформации тела. Назовем причинами совокупность параметров:  $X_i$  - объемные силы,  $P_i^0$  - поверхностные силы,  $u_i^0$  - заданный вектор перемещения в начальный момент времени. Тогда следствием этих причин будут:  $u_i(x)$  - вектор перемещения в любой момент времени,  $\varepsilon_{ij}(x)$  - тензор деформаций,  $\sigma_{ij}(x)$  - тензор напряжений.

Пусть у нас имеются две системы причин, из которых вытекают две системы следствий:

$$\begin{cases} X_i^1, P_i^0, u_i^0 \implies u_i^1, \varepsilon_{ij}^1, \sigma_{ij}^1 \\ X_i^2, P_i^0, u_i^0 \implies u_i^2, \varepsilon_{ij}^2, \sigma_{ij}^2 \end{cases}$$

Сформулируем локальное тождество Бетти:

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 \quad (5.1)$$

#### Доказательство:

Выпишем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^2 \varepsilon_{ij}^1 = C_{klij} \varepsilon_{ij}^2 \varepsilon_{kl}^1 = \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1$$

из которого сразу следует искомое соотношение.

#### Интегральное тождество Бетти.

Представим соотношение (5.1) в интегральной форме:

$$\int_V \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 dV = \int_V \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 dV \quad (5.2)$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\int_V \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 dV = \int_V \sigma_{ij}^2 u_{i,j}^1 dV = \int_V [(\sigma_{ij}^2 u_i^1)_{,j} - \sigma_{ij,j}^2 u_i^1] dV$$

Перейдем к интегралу по поверхности:

$$\int_V \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 dV = \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^2 n_j u_i^1 d\Sigma + \int_V X_i^2 u_i^1 dV \quad (5.3)$$

Выражение (5.3) называется второй формой теоремы взаимности Бетти. Пусть  $\int_{\Sigma} \sigma_{ij}^2 n_j^1 u_i^1 d\Sigma = \int_{\Sigma_u} R_i^2 n_j^1 u_i^1 d\Sigma + \int_{\Sigma_p} P_i^2 n_j^1 u_i^1 d\Sigma$ , здесь  $R_i = \sigma_{ij} n_j$  - реакции на поверхности. Тогда интегральное тождество Бетти примет вид:

$$\int_V X_i^1 u_i^2 dV + \int_{\Sigma} P_i^1 u_i^2 d\Sigma = \int_V X_i^2 u_i^1 dV + \int_{\Sigma} P_i^2 u_i^1 d\Sigma \quad (5.4)$$

Исходя из выражения, можно сформулировать теорему взаимности Бетти: Работа первых причин на следствиях вторых причин равна работе вторых причин на следствиях первых.

### Решение задач с помощью теоремы Бетти

1) Рассмотрим реальную задачу:

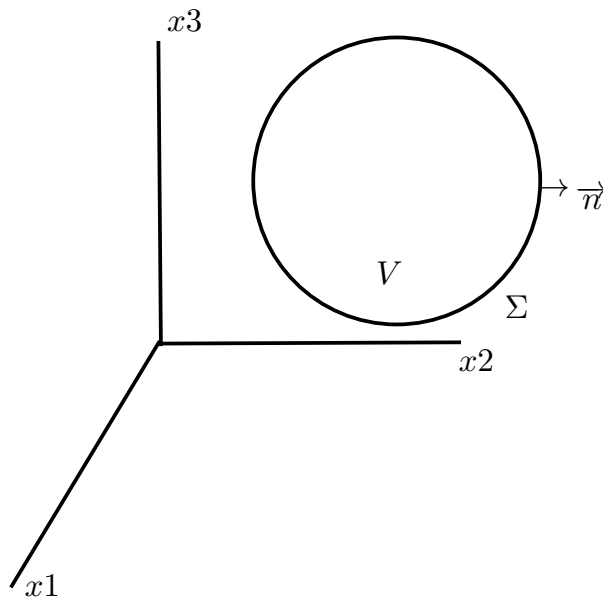


Рисунок 5.1

Пусть вторая система причин и следствий имеет вид:

$$X_i^2 \equiv X_i; u_i^2 \equiv u_i^0; P_i^2 \equiv P_i^0$$

Пусть также вектор перемещения в первой системе равен:  $u_i^1 = a_i + \epsilon_{ijk} \omega_k x_j \implies \epsilon_{ij}^1 = 0; \sigma_{ij}^1 = 0$ . Такое движение называется жестким перемещением. Воспользуемся формулой (5.3):

$$0 = \int_V X_i (a_i + \epsilon_{ijk} \omega_k x_j) dV + \int_{\Sigma} P_i (a_i + \epsilon_{ijk} \omega_k x_j) d\Sigma \quad (5.5)$$

Так как  $a_i, \omega_k$  - произвольные величины, можно выделить два равенства:

$$\begin{cases} \int_V \vec{X} dV + \int_{\Sigma} \vec{P} d\Sigma = 0 \\ \int_V \vec{r} \times \vec{X} dV + \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{P} d\Sigma = 0 \end{cases}$$



здесь  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор. Данная система задает условие равновесия тела. Если первое уравнение системы не выполняется, то тело будет вращаться, если второе не выполняется - тело будет двигаться поступательно.

2) Пусть  $u_i^1 = \gamma_{ij}x_j$ ;  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \neq 0$ , а все остальные причины равны нулю. Тогда  $\varepsilon_{ij}^1 = \gamma_{ij}$ . Воспользуемся равенством (5.3):

$$\int_V \sigma_{ij} \gamma_{ij} dV = \int_V X_i x_j \gamma_{ij} dV + \int_\Sigma P_i x_j \gamma_{ij} d\Sigma \quad (5.6)$$

Так как  $\gamma_{ij}$  - произвольная величина, можно сократить на нее:

$$\int_V \sigma_{ij} dV = \Delta_{ijkl} \left[ \int_V X_k x_l dV + \int_\Sigma P_k x_l d\Sigma \right] \quad (5.7)$$

Введем понятие среднего напряжения по всему объему:  $\langle \sigma_{ij} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV$  Тогда равенство (5.7) примет вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \left[ \int_V X_k x_l dV + \int_\Sigma P_k x_l d\Sigma \right] \quad (5.8)$$

Проведем свертку при  $i=j$  и окончательно получим:

$$3 \langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \left[ \int_V X_k x_k dV + \int_\Sigma P_k x_k d\Sigma \right] \quad (5.9)$$

## Тензор Грина

Пусть к точке  $\xi$  твердого тела приложены нагрузки, направленные вдоль оси  $x_k$  (Рисунок 5.2). Тогда вектор перемещения в произвольной точке  $x$  можно записать как тензор Грина:  $u_i^{(k)}(x, \xi)$ .

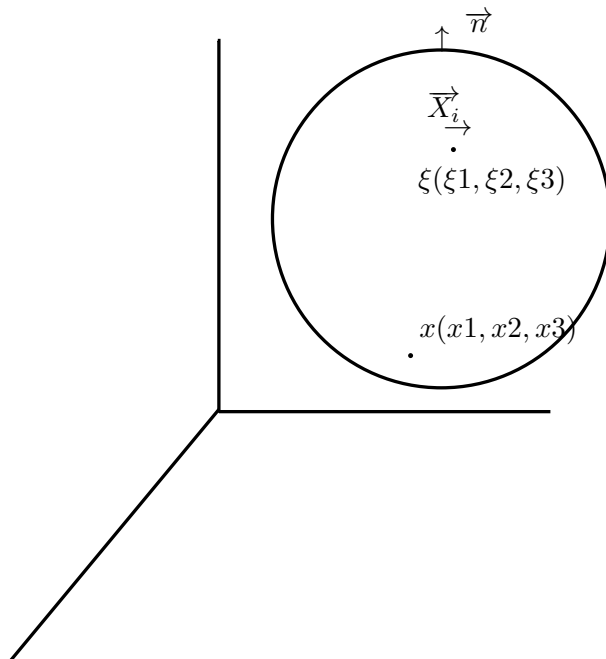


Рисунок 5.1

Тогда остальные параметры можно представить в виде:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \Delta_{ijmn} U_{m,n}^{(k)}(x, \xi); \sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijmn} U_{m,n}^{(k)}(x, \xi); \quad (5.10)$$

Введем  $\delta$  - функцию Дирака. По определению:

$$\int_V f(x) \delta(x - \xi) dV = f(\xi) \quad (5.11)$$

Поэтому уравнение равновесия можно переписать в виде:

$$\sigma_{ij,j}^{(k)}(x, \xi) + \delta_{ik} \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.12)$$

В данном случае тело находится в равновесии, поэтому граничные условия запишутся как:

$$\begin{cases} u_i^{(k)}(y, \xi) = 0, y \in \Sigma_u \\ \sigma_{ij}^{(k)}(y, \xi) = 0, y \in \Sigma_p \end{cases}$$

Запишем окончательно формулы Грина:

$$\int_V \delta_{im} \delta(x - \xi) u_i(x) dV = u_m(\xi) \quad (5.13)$$

Воспользуемся интегральным тождеством Бетти:

$$u_m(\xi) = \int_V X_i(x) u_i^{(m)}(x, \xi) dV_x + \int_{\Sigma_p} P_k^0(y) u_k^{(m)}(y, \xi) d\Sigma_p + \int_{\Sigma_u} u_k^0(y) \sigma_{kl}^{(m)}(y, \xi) n_l d\Sigma_u \quad (5.14)$$

Последнее равенство связывает перемещения тела через функцию Грина. В большинстве случаев, функцию Грина отыскать достаточно сложно, но если она дана, общее решение можно сразу выписать.

## Формулы Сомильяны

Пусть на границе тела задано перемещение  $u_i^{(k)}(x, \xi)$ , которое можно распространить на всю границу. Возьмем в качестве первой системы причин такие выражения:

$$\begin{cases} X_i = \delta_{im} \delta(x - \xi) \\ \sigma_{ij} n_j = \Sigma_{ij}^{(k)}(y, \xi) n_j, y \in \Sigma_p \\ u_i^{(k)}(y, \xi) = U_i^{(k)}(y, \xi) \end{cases}$$

Воспользуемся интегральным тождеством Бетти:

$$u_m(x) = \int_V X_k(\xi) U_m^{(k)}(x, \xi) dV_x + \int_{\Sigma} [P_k(y) U_m^{(k)}(y, x) - u_i(y) \Sigma_{ij}^{(m)}(y, x) n_j] d\Sigma \quad (5.15)$$

Получили интегральные уравнения для нахождения перемещений внутри объема и на границе. Соотношение (5.15) называется формулой Сомильяны.

## Лекция 6

### Представление решений

На прошлой лекции мы сформулировали математическую постановку задачи для тензора Грина. Это система из 3 уравнений с граничными и начальными условиями:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i(x) = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0 \\ \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_p} = P_i^0 \end{cases}$$

Тогда решение задачи с известным тензором Грина будет иметь вид:

$$u_m(\xi) = \int_V X_i(x)u_i^{(m)}(x, \xi)dV_x + \int_{\Sigma_p} P_k^0(y)u_k^{(m)}(y, \xi)d\Sigma_p + \int_{\Sigma_u} u_k^0(y)\sigma_{kl}^{(m)}(y, \xi)n_l d\Sigma_u \quad (6.1)$$

Рассмотрим теперь задачу для неоднородного упругого тела. Зачастую, найти решение в этом случае достаточно проблематично. Для решения этой проблемы рассматривают соответствующую ей задачу с однородным телом и аналогичными начальными и граничными условиями. Пусть  $v, e_{ij}, \tau_{ij}$  - перемещения, деформации и напряжения в однородном теле, а  $u, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  - соответствующие характеристики в неоднородном теле. Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \tau_{ij,j} + X_i(x) = 0 \\ \tau_{ij} = C_{ijkl}^0 e_{kl} \\ e = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \\ v_i|_{\Sigma_u} = u_i^0 \\ \tau_{ij}n_j|_{\Sigma_p} = P_i^0 \end{cases}$$

Тогда между решениями этих двух задач можно установить интегральное соответствие:

$$u_m(x) = v_m(x) + \int_V u_{k|l}^{(m)}(x, \xi)[C_{klpq}^0 - C_{klpq}(\xi)]v_{p|q}(\xi)dV_\xi \quad (6.2)$$

здесь  $v_{p|q}(\xi) = \frac{\partial v_p}{\partial \xi_q}$ .

Будем предполагать, что решение соответствующей однородной задачи гладкое, т.е. его можно представить в виде ряда Тейлора:

$$v_i(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \Pi_{i_1 \dots i_q}(x, \xi)v_{i_1 \dots i_q}(x) \quad (6.3)$$

Можно подставить разложение (6.3) в соотношение (6.2). Получится, грубо говоря, бесконечномерное уравнение:

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{iki_1\dots i_q}(x)v_{k,i_1\dots i_q}(x) \quad (6.4)$$

В однородном теле функции  $N_{iki_1\dots i_q}(x)$  стремятся к нулю. Для решения уравнения в случае неоднородного тела, необходимо сравнить его с соотношением:  $C_{ijkl}^0 v_{k,l} + X_i = 0$ . Получим рекуррентную систему уравнений, из которой выражаются функции  $N_{iki_1\dots i_q}(x)$ .

## Представление Нейбера

Рассмотрим однородный изотропный материал и запишем для него уравнения Ламе:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{X} = 0 \quad (6.5)$$

Наша задача: свести сложные уравнения к комбинации других функций, которые удовлетворяют более простым уравнениям. Введем параметр  $\varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}$ . Тогда уравнение Ламе примет вид:

$$\Delta \vec{u} + \varkappa \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\vec{X}}{\mu} = 0. \quad (6.6)$$

Представление Нейбера:

Будем искать решение уравнения в форме:

$$\vec{u} = A \operatorname{grad} \phi + B \vec{\psi} \quad (6.7)$$

Подставим в предыдущее уравнение:

$$\operatorname{grad}[A(1 + \varkappa)\Delta\phi + B\varkappa \operatorname{div} \vec{\psi}] + B\Delta \vec{\psi} \frac{\vec{X}}{\mu} = 0 \quad (6.8)$$

Которое сводится к системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} B\Delta \vec{\psi} \frac{\vec{X}}{\mu} = 0 \implies \Delta \vec{\psi} = \frac{-\vec{X}}{B\mu} \\ \Delta\phi = -\frac{B\varkappa \operatorname{div} \vec{\psi}}{A(1+\varkappa)} = \frac{B}{2A(1-\nu)} \operatorname{div} \vec{\psi} \end{cases}$$

## Представление Папковича

Представим решение как:

$$\vec{u} = A \operatorname{grad}(\phi + \vec{r} \vec{\psi}) + B \vec{\psi} \quad (6.9)$$

Уравнение Ламе будет иметь вид:

$$(1 + \kappa) \operatorname{grad} \operatorname{div}(\Delta \phi + \vec{r} \Delta \vec{\psi}) + [2A + \kappa(2A + B)] \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\psi} + B \Delta \vec{\psi} + \frac{\vec{X}}{\mu} = 0 \quad (6.10)$$

Которое сводится к системе:

$$\begin{cases} B \Delta \vec{\psi} + \frac{\vec{X}}{\mu} = 0 \\ \Delta \phi + \vec{r} \Delta \vec{\psi} = 0 \\ 2A + \kappa(2A + B) = 0 \end{cases}$$

Так как  $A, B$  - константы, можно выбрать их произвольно. Пусть  $A = 1, B = -4(1 - \nu)$ , тогда решение будет иметь вид:

$$\Delta \psi = \frac{\vec{r} \vec{X}}{4\mu(1 - \nu)} \quad (6.11)$$

## Представление Галеркина

Решение будем искать в виде:

$$\vec{u} = A \Delta \vec{F} + B \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} \quad (6.12)$$

Подставим в уравнение Ламе:

$$[B + \kappa(A + B)] \operatorname{grad} \operatorname{div} \Delta \vec{F} + A \Delta^2 \vec{F} + \frac{\vec{X}}{\mu} = 0 \quad (6.13)$$

Система из двух уравнение примет вид:

$$\begin{cases} A \Delta^2 \vec{F} + \frac{\vec{X}}{\mu} = 0 \\ B + \kappa(A + B) = 0 \end{cases}$$

Если взять  $B = -\kappa, A = 1 + \kappa$ , то можно записать общее решение:

$$\vec{u} = (1 + \kappa) \Delta \vec{F} - \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} \quad (6.14)$$

## Лекция 7

### Представление решений уравнения Ламе

На прошлой лекции мы вывели 3 различных представления решения для уравнения Ламе.

Представление Нейбера:

$$\vec{u} = A \operatorname{grad} \phi + B \vec{\psi} \quad (7.1)$$

которое сводилось к системе:

$$\begin{cases} B \Delta \vec{\psi} + \frac{\kappa}{\mu} \vec{X} = 0 \\ \Delta \phi = -\frac{B \kappa \operatorname{div} \vec{\psi}}{A(1+\kappa)} \end{cases}$$

Представление Папковича:

$$\vec{u} = A \operatorname{grad}(\phi + \vec{r} \vec{\psi}) + B \vec{\psi} \quad (7.2)$$

которое преобразовывалось к системе:

$$\begin{cases} B \Delta \vec{\psi} + \frac{\kappa}{\mu} \vec{X} = 0 \\ \Delta \phi + \vec{r} \Delta \vec{\psi} = 0 \\ 2A + \kappa(2A + B) = 0 \end{cases}$$

Представление Галеркина:

$$\vec{u} = A \Delta \vec{F} + B \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} \quad (7.3)$$

и соответствующая ему система:

$$\begin{cases} A \Delta^2 \vec{F} + \frac{\kappa}{\mu} \vec{X} = 0 \\ B + \kappa(A + B) = 0 \end{cases}$$

### Примеры задач с представлением решения

Рассмотрим теперь тело в бесконечном пространстве, в каждой точке которого сосредоточена единичная сила, направленная относительно оси  $x_k$ . Из-за этих

сил, в каждой точке возникают векторы перемещения  $\vec{v}^{(k)}$ , называемые векторами Кельвина. Допустим, в начале системы координат приложена нагрузка  $\vec{X}$ . Ее выражение будет иметь вид:

$$\vec{X}^{(k)} = \vec{\delta}^{(k)} \delta(x) \tag{7.4}$$

где  $\delta(x)$  - функция р,  $\vec{\delta}^{(k)} = (\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \delta_3^{(k)})$  - свернутый символ Кронекера.

Воспользуемся представлением Папковича и запишем решение уравнения Ла-ме:

$$\begin{cases} \vec{u} = grad(\vec{r} \vec{\psi}) + -4(1 - \nu) \vec{\psi} \\ \Delta \vec{\psi} = \frac{\vec{\delta}^{(k)} \delta(x)}{4\mu(1-\nu)} \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_m x_m}}$  и продифференцируем ее два раза по компонентам  $i, j$ .

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{,ij} = \frac{-\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x_i x_j}{r^5} \tag{7.5}$$

Сделаем то же самое, только с повторяющимся индексом:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{,ii} = \Delta \frac{1}{r} = \frac{-3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0 \tag{7.6}$$

Мы получили, что с одной стороны, оператор Лапласа от функции  $\frac{1}{r}$  равняется нулю, где  $r$  - расстояние между точками.

Введем теперь шар(рис. 7.1) с радиусом  $a$ . Проинтегрируем по объему шара оператор Лапласа от данной функции.

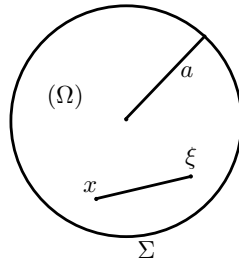


Рисунок 7.1

$$\int_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{r}\right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{r}\right)_{,ii} d\Omega \tag{7.7}$$

Можно перейти к поверхностному интегралу по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{r}\right) d\Omega = - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{r}\right)_{,i} n_i d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{y_i n_i}{r^3} d\Sigma = - \frac{1}{a^3} \int_{\Omega} x_{i,i} d\Omega = - \frac{3}{a^3} * \frac{4}{3} \pi a^3 = -4\pi \tag{7.8}$$

Учитывая свойства  $\delta$  - функции Дирака:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta(x) d\Omega = 1 \\ \int_{\Omega} f(x) \delta(x) d\Omega = f(0) \end{cases}$$

Окончательно получим:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(x) \quad (7.9)$$

Подставляя данное выражение в решение для представления Папковича, имеем:

$$\vec{\psi}^{(k)} = -\frac{\vec{\delta}^{(k)}}{16\pi\mu r(x)} \quad (7.10)$$

Из соотношения (7.10) можно найти функцию Кельвина, которая упрощает поиск общего решения:

$$\vec{U}^{(k)}(x, 0) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{\vec{r} x_k}{r^3} + (3-4\nu) \frac{\vec{\delta}^{(k)}}{r} \right] \quad (7.11)$$

Выражение (7.11) верно только в случае, когда сосредоточенные силы действуют на начало координат. Если эти силы приложены в произвольную точку пространства, решение примет вид:

$$\vec{U}^{(k)}(x, \xi) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{\vec{r}(x, \xi)(x_k - \xi_k)}{r^3(x, \xi)} + (3-4\nu) \frac{\vec{\delta}^{(k)}}{r(x, \xi)} \right] \quad (7.12)$$

причем  $r(x, \xi) = \sqrt{(x_m - \xi_m)(x_m - \xi_m)}$ ,  $\vec{r}(x, \xi) = (x_i - \xi_i) \vec{e}_i$ .

Допустим, что имеется многообразие в пространстве, в каждой точке которого действуют силы с некоторой плотностью. Введем силу  $q_1$ , действующую вдоль оси  $x_1$ . Тогда, для нахождения перемещений, понадобится решить дифференциальное уравнение:

$$du_i = q_k(\xi) U_i^{(k)} d\Omega_\xi \quad (7.13)$$

При интегрировании получим решение:

$$u_i(x) = \int_{\Omega} q_k(\xi) U_i^{(k)} d\Omega_\xi \quad (7.14)$$

Вектора Кельвина также называют тензором Кельвина. С его помощью можно решать большинство теории упругости. Основная проблема состоит в поиске функции Кельвина, который зачастую сложнее, чем решение задачи в общем виде.

## Решения Кельвина

Запишем уравнение Ламе в измененном виде:

$$L_{ij} U_j^{(k)}(x, \xi) + \frac{1}{\mu} X_i^{(k)}(x, \xi) = 0; X_i^{(k)} = \delta_{ik} \delta(x - \xi) \quad (7.15)$$



где  $L_{ij}(\cdot) = \delta_{ij}\Delta(\cdot) + \varkappa(\cdot)_{,ij}$  - оператор Ламе. Все эти соотношения верны при условии  $x \neq \xi$ . Продифференцируем уравнение (7.15):

$$L_{ij}U_{j|l}^{(k)}(x, \xi) + \frac{1}{\mu}X_{j|l}^{(k)}(x, \xi) = 0 \quad (7.16)$$

Выражение  $U_{i|l}^{(k)}(x, \xi) = \frac{1}{16\pi\mu r^3(x, \xi)}[(x_i - \xi_i)\delta_{kl} + (x_k - \xi_k)\delta_{il} - (3 - 4\nu)(x_l - \xi_l)\delta_{ik} - 3\frac{(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)(x_l - \xi_l)}{r^2}]$  является решением однородных уравнений Ламе при  $x \neq \xi$ . В общем случае, решение Кельвина можно записать в виде матрицы:

$$U = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} & U_1^{(2)} & U_1^{(3)} \\ U_2^{(1)} & U_2^{(2)} & U_2^{(3)} \\ U_3^{(1)} & U_3^{(2)} & U_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

Каждый вектор в этой матрице является решением уравнения Ламе. Индекс сверху указывает ось, вдоль которой направлена сила.

Аналогично можно представить матрицу сил:

$$X(x, \xi) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{X_1^{(1)}} & \overrightarrow{X_1^{(2)}} & \overrightarrow{X_1^{(3)}} \\ \overrightarrow{X_2^{(1)}} & \overrightarrow{X_2^{(2)}} & \overrightarrow{X_2^{(3)}} \\ \overrightarrow{X_3^{(1)}} & \overrightarrow{X_3^{(2)}} & \overrightarrow{X_3^{(3)}} \end{bmatrix}$$

Силы, находящиеся на главной диагонали, называются двойными силами без момента, остальные называются двойными силами с моментом. Из-за того, что каждый вектор вызывает перемещение в какой-либо точке, все силы также принято называть источниками.

## Лекция 8

### Случай полупространства

Рассмотрим теперь задачу Кельвина для случая полупространства, т.е. в пространстве имеется граница. В полупространстве возникают перемещения, удовлетворяющие уравнениями Ламе:

$$\Delta u_i + \kappa \varepsilon_{,i} = 0 \quad (8.1)$$

Как и раньше, в зависимости от заданных граничных условий, возникают разные краевые задачи:

1-ая краевая задача:

$$u_i(x_1, x_2, 0) = u_i^0(x_1, x_2) \quad (8.2)$$

2-ая краевая задача:

$$\sigma_{iz}(x_1, x_2, 0) = P_i^0(x_1, x_2) \quad (8.3)$$

Дополнительно нужно задать условие, что на бесконечности перемещения, деформации и напряжения будут стремиться к нулю.

### Метод преобразования Фурье

Такие задачи проще всего решать с помощью метода преобразования Фурье. В чем он состоит:

Пусть у нас имеется функция  $\phi(x)$ , тогда преобразованная функция имеет вид:

$$\tilde{\phi}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{i\alpha x} dx \quad (8.4)$$

Очевидно, что для такого преобразования функция  $\phi$  должна быть интегрируемой. Обратное преобразование имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (8.5)$$

**Теорема.** Если  $\phi(x)$  - абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, то образ  $\tilde{\phi}(\alpha)$  является непрерывной функцией на этой числовой прямой, и  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{\phi}(\alpha) = 0$ .

Можно воспользоваться формулой Эйлера для комплексной экспоненты:

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x \quad (8.6)$$

Тогда соотношение (8.4) примет вид:

$$\tilde{\phi}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cos \alpha x dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \sin \alpha x dx \quad (8.7)$$

В зависимости от задачи, можно пользоваться различными формами преобразования Фурье.

## Решение первой краевой задачи

Рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u_i + \varkappa \varepsilon_{,i} = 0 \\ u_i(x_1, x_2, 0) = u_i^0(x_1, x_2) \end{cases}$$

Преобразовывать будем переменные  $x_1, x_2$ . Тогда прямое преобразование примет вид:

$$\tilde{\phi}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (8.8)$$

Обратное преобразование:

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (8.9)$$

Искать решение будем в виде:

$$u_i = \phi_i + x_3 \psi_{,j} \quad (8.10)$$

здесь  $\phi_i, \psi$  - гармонические функции. Подставим их в уравнение Ламе:

$$\begin{cases} u_{i,j} = \phi_{i,j} + \delta_{3j} \psi_{,i} + x_3 \psi_{,ij} \\ \varepsilon = u_{i,i} = \phi_{i,i} + \delta_{3i} \psi_{,i} + x_3 \psi_{,ii} = \phi_{i,i} + \psi_{,3} \end{cases}$$

Вычислим  $\Delta u_i$ :

$$\Delta u_i = \Delta(x_3 \psi_{,ij}) = (x_3 \phi_{,i})_{,jj} = (\delta_{3j} \psi_{,i} + x_3 \psi_{,ij})_{,j} = 2\psi_{,3i} \quad (8.11)$$

Окончательно получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\psi_{,3i} + \varkappa \phi_{k,ki} = 0 \\ (2\psi_{,3} + \varkappa \phi_{k,k})_{,i} = 0 \end{cases}$$

Из которой можно извлечь выражение для функции  $\psi_{,3}$ , полностью удовлетворяющее уравнениям Ламе.

$$\psi_{,3} = \frac{-\varkappa}{2} \phi_{k,k} = -\frac{1}{3-4\nu} \phi_{k,k} \quad (8.12)$$

## Лекция 9

### Решение краевых задач с помощью преобразования Фурье

Рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u_i + \kappa u_{k,ki} = 0 \\ u_k = \phi_k + x + 3\psi_{,k} \\ \Delta \phi_k = 0 \\ \Delta \psi = 0 \end{cases}$$

Допустим, что образ исходных функций при преобразовании Фурье имеет вид:

$$\tilde{\phi}_k = \tilde{u}_k^0(\alpha_1, \alpha_2)e^{-\gamma x_3}; \tilde{\psi}_k = B(\alpha_1, \alpha_2)e^{-\gamma x_3} \quad (9.1)$$

здесь  $\gamma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ . Теперь встает задача поиска функции  $B$ , которая ищется с помощью формулы (8.12):

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-1}{\gamma(3 - 4\nu)} [i\alpha_1 \tilde{u}_1^0 + i\alpha_2 \tilde{u}_2^0 + \gamma \tilde{u}_3^0] \quad (9.2)$$

Далее, делаем обратное преобразование Фурье для функций  $\tilde{\phi}_k, \tilde{\psi}$  и находим решение.

Рассмотрим случай, когда граничное условие имеет вид:

$$u_1^0(x_1, x_2) = U \delta_{ik} \delta(x_1) \delta(x_2) \quad (9.3)$$

Учитывая свойства дельта-функции, получим решение:

$$\tilde{u}_i^0 = \frac{2U \delta_{ik}}{\pi} \quad (9.4)$$

### Решение второй краевой задачи

Запишем систему уравнений для второй краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_i + \kappa u_{k,ki} = 0 \\ u_k = \phi_k + x + 3\psi_{,k} \\ \Delta \phi_k = 0 \\ \Delta \psi = 0 \end{cases}$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\phi_{k,k} + \psi_{,3}) + \mu (\phi_{i,j} + \phi_{j,i} + \delta_{i3} \phi_{i,j} + \delta_{3j} \psi_{,i} + 2x_3 \psi_{,ij}) \quad (9.5)$$

Найдем компоненту  $\sigma_{i3}$ :

$$\sigma_{i3} = \lambda \delta_{i3} (\phi_{k,k} + \psi_{,3}) + \mu (\phi_{i,3} + \phi_{3,i} + \delta_{i3} \phi_{i,3} + \psi_{,i} + 2x_3 \psi_{,i3}); \sigma_{i3}(x_1, x_2, 0) = -P_i^0(x_1, x_2) \quad (9.6)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_I = \phi_{I,3} + \phi_{3,I} + \psi_{,I} = -\frac{P_I^0}{\mu} \\ \Phi_3 = 2\phi_{3,3} + 2(1 - 2\nu)\psi_{,3} = -\frac{P_3^0}{\mu} \end{cases}$$

$I$  пробегает коэффициенты (1,2). Мы вернулись к классической задаче, которая решается с помощью метода преобразования Фурье. Будем действовать так же, как и в случае первой краевой задачи. Из предыдущей системы имеем:

$$\tilde{\Phi}_i = -\frac{\tilde{P}_i^0}{\mu} e^{-\gamma x_3} \quad (9.7)$$

Продифференцируем первое уравнение системы по  $x_I$ , а второе по  $x_3$ :

$$\begin{cases} \Phi_{I,I} = \phi_{I,I3} + \phi_{3,II} + \psi_{,II} \\ \Phi_{3,3} = 2\phi_{3,33} + 2(1 - 2\nu)\psi_{,33} \end{cases}$$

Учитывая, тот факт, что функции  $\phi_k, \psi$  - гармонические (т.е.  $\psi_{,II} = -\psi_{,33}$ ;  $\phi_{3,II} = -\phi_{3,33}$ ), сложим два уравнения из последней системы:

$$(1 - 4\nu)\psi_{,33} + \phi_{i,i3} = \Phi_{i,i} \quad (9.8)$$

Воспользовавшись формулой (8.12), окончательно получим:

$$\begin{cases} \psi_{3,3} = -\frac{1}{2}\Phi_{i,i} \\ \phi_{i,i3} = -(3 - 4\nu)\psi_{,33} \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = C_i(\alpha_1, \alpha_2) e^{-\gamma x_3} \\ \tilde{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = B(\alpha_1, \alpha_2) e^{-\gamma x_3} \end{cases}$$

Продифференцируем последнее уравнение два раза по  $x_3$ . Тогда мы получим два равенства:

$$\tilde{\psi}_{,33} = \gamma^2 B e^{-\gamma x_3} = \frac{-1}{2} [i\alpha_1 \tilde{P}^1 + i\alpha_2 \tilde{P}^2 + \gamma \tilde{P}^3] e^{-\gamma x_3} \quad (9.9)$$

Используя выражение для  $\psi_{3,3} = -\frac{1}{2}\Phi_{i,i}$ , окончательно имеем:

$$B = \frac{-1}{2\mu\gamma^2} [i\alpha_1 \tilde{P}^1 - +i\alpha_2 \tilde{P}^2 + \gamma \tilde{P}^3] \quad (9.10)$$

Запишем систему в трансформантах для поиска коэффициентов  $C_i$ :

$$\begin{cases} \gamma C_I + i\alpha_I C_3 + i\alpha_I B = \frac{\tilde{P}_I}{\mu} \\ 2\gamma C_3 + 2(1 - 2\nu)\gamma B = \frac{\tilde{P}_3}{\mu} \end{cases}$$

Решая данную систему, находим оставшиеся коэффициенты  $C_i$ , делаем обратное преобразование Фурье и получаем решение.

## Задача Буссинеска

В этом случае на тело в полупространстве действует точечная сила, действующая вниз и приложенная к началу координат. Тогда  $P_1 = P_2 = 0$ ;  $P_3 = P\delta(x_1)\delta(x_2)$ . Граничное условие имеет вид:

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = -P\delta(x_1)\delta(x_2) \quad (9.11)$$

Так как вектор силы симметричен относительно двух плоскостей, в преобразовании Фурье можно рассмотреть только четную функцию косинуса, тогда мнимая единица пропадет. Преобразование будет выглядеть:

$$\tilde{P}_3 = \frac{2P}{\pi} \int_0^\infty \delta(x_1) \cos \alpha_1 x_1 dx_1 \int_0^\infty \delta(x_2) \cos \alpha_2 x_2 dx_2 = \frac{2P}{\pi} \quad (9.12)$$

Прообраз функции  $\Phi$  при преобразовании Фурье имеет вид:  $\tilde{\Phi}_3 = \frac{p}{2\pi\mu} e^{-\gamma x_3}$ . Тогда можно найти его образ функции:

$$\Phi = \frac{-P}{2\mu\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_0^\infty K_0(\alpha, r) \cos \alpha_1 x_1 dx_1 = \frac{\pi}{2R} \quad (9.13)$$

здесь  $R = \sqrt{r^2 + x_3^2}$ ;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Тогда исходные функции примут вид:

$$\begin{cases} \psi_{,33} = -\frac{1}{2}\Phi_{3,3} = \frac{-P}{2\pi\mu} \frac{x_3}{R^3} \implies \psi = -\frac{P}{4\pi\mu R} \\ \phi_3 = \frac{(1-\nu)P}{2\mu\pi R} \\ \phi_I = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi\mu R} \end{cases}$$

Окончательно, общее решение примет вид:

$$\begin{cases} u_3 = \frac{P}{4\pi\mu} \left[ \frac{x_3^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right] \\ u_I = \frac{Px_I}{4\pi\mu} \left[ \frac{x_3}{R^3} - (1-2\nu) \frac{1}{R(R+x_3)} \right] \end{cases}$$

Если вместо  $x$  подставить выражение  $x - \xi$ , получим решения для случая, когда сила приложена в произвольную точку.

## Лекция 10

### Плоские задачи теории упругости

Рассмотрим случай плоской деформации (перемещения происходят в параллельных плоскостях). Тогда перемещения примут вид:

$$\vec{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0) \quad (10.1)$$

Компоненты тензора деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \Delta_{ijkl} u_{k,l} \quad (10.2)$$

Тогда:

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = 0 \\ \varepsilon_{3,3} = \frac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3}) = 0 \end{cases}$$

Компоненты тензора напряжений выводятся из закона Гука:

$$\sigma_{IJ} = \lambda \varepsilon \delta_{IJ} + 2\mu \varepsilon_{IJ} \quad (10.3)$$

Тогда:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13} = 0 \\ \sigma_{33} = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon = 2(\lambda + \mu)\varepsilon \end{cases}$$

Из закона Гука найдем связь тензора деформаций и тензора напряжений:

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{IJ} - \lambda \varepsilon \delta_{IJ} \quad (10.4)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2(\lambda + \mu)} \quad (10.5)$$

Следовательно:

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{IJ} - \frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \delta_{ij} \quad (10.6)$$

Окончательно, подставляя (10.6) во второе уравнение последней системы, получим:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (10.7)$$

Уравнение равновесия, учитывая условие  $X_3 \equiv 0$ , примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + X_1 = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + X_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнения Ламе:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\varepsilon_i + \mu\Delta u_i + X_i = 0 \\ (\lambda + \mu)\varepsilon_I + \mu\Delta u_I + X_I = 0 \end{cases}$$

В итоге, учитывая все предыдущие рассуждения, можно сформулировать общую постановку задачи. Она определяется 3 уравнениями с граничными условиями:

$$\begin{cases} \sigma_{I,J,J} + X_I = 0 \\ \sigma_{IJ} = \lambda\varepsilon_{IJ} + 2\mu\varepsilon_{IJ} \\ \varepsilon_{IJ} = \Delta_{ijkl}u_{k,l} \end{cases}$$

Граничные условия:  $u_I^0 = u_I|_{\Gamma_I}$  - первая краевая задача,  $\sigma_{ij}n_j = P_I^0$  - вторая краевая задача. Если разбить контур на две части с разными граничными условиями, получим смешанную краевую задачу.

## Случай плоского напряженного состояния

Плоское напряженное состояние - напряжение действует перпендикулярно одной плоскости, а на поверхностях, параллельных этой плоскости, напряжение отсутствует (рис. 10.1).

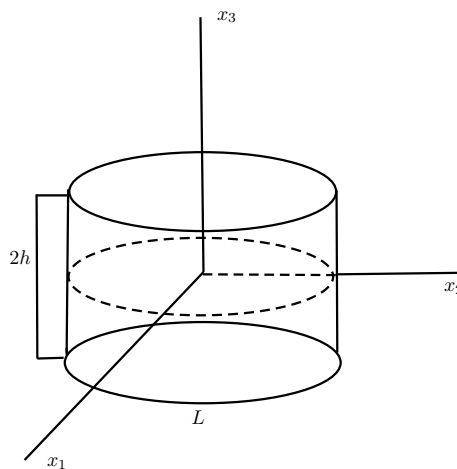


Рисунок 10.1

Тогда:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (10.8)$$

Каждая компонента тензора деформаций зависит от координат  $x_1, x_2, x_3$ , следовательно:

$$\sigma_{33} = \lambda u_{i,i} + 2\mu u_{3,3} \quad (10.9)$$

Из (10.9) получаем:

$$u_{3,3} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{I,I} \implies \sigma_{I3} = 0 \implies u_{I,3} + u_{3,I} = 0 \quad (10.10)$$



Используя предыдущее соотношение, получим выражение остальных компонент тензора деформаций:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda^*(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} \\ \sigma_{22} = \lambda^*(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2} \\ \sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases}$$

здесь  $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ . Уравнение Ламе с новыми обозначениями примет вид:

$$(\lambda^* + \mu)\varepsilon_{,I} + \mu\Delta u_I + X_I = 0 \quad (10.11)$$

Рассмотрим случай, когда  $\frac{2h}{L} \ll 1$  и зададим граничные условия для второй краевой задачи:

$$\sigma_{I3}|_{x_3=\pm h} = 0 \quad (10.12)$$

Тогда из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sigma_{3J,J} + \sigma_{33,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \end{cases}$$

получим, что  $\sigma_{33,3}|_{x_3=\pm h} = 0 \implies \sigma_{33}|_{x=\pm h} = 0 \implies \sigma_{33} \approx 0$ . Отсюда следует, что уравнения Ламе идентичны уравнениям в задаче плоского деформированного состояния. Так же, из последнего соотношения получаем антисимметрию по 3 координате:  $u_3(x_1, x_2, -x_3) = -u_3(x_1, x_2, x_3)$ .

Введем средние значения по толщине:

$$\begin{cases} u_I^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_I(x_1, x_2, x_3) dx_3 \\ u_3^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0 \end{cases}$$

Последнее равенство обращается в ноль из-за антисимметрии. Осредним остальные уравнения и получим новую формулировку задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ,J}^* + X_I^* = 0 \\ \sigma_{IJ}^* = \lambda^* \varepsilon^* \delta_{IJ} + 2\mu \varepsilon_{IJ}^* \\ \varepsilon_{IJ}^* = \Delta_{ijkl} u_{k,l}^* \end{cases}$$

## Лекция 11

### Задача о плоской деформации

Мы уже вывели формулы компонент тензора деформаций и напряжений при плоской деформации:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ} = \lambda \delta_{IJ} u_{K,K} + 2\mu \varepsilon_{IJ} \\ \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \\ \varepsilon_{IJ} = \Delta_{IJKL} u_{K,L} \\ \varepsilon_{I3} = \varepsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения совместности:

$$\epsilon_{\alpha IK} \epsilon_{\beta JL} \varepsilon_{IJ, KL} = 0 \quad (11.1)$$

Так как мы рассматриваем плоскую задачу, то индексы  $\alpha, \beta$  равны 3, поэтому:

$$\epsilon_{3IK} \epsilon_{3JL} \varepsilon_{IJ, KL} = \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \varepsilon_{IJ, KL} = 0 \quad (11.2)$$

Из предыдущего уравнения следует, что условие совместности состоит из одного уравнения, которое имеет вид:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (11.3)$$

Рассмотрим произведение двух символов Леви-Чивиты. Его можно представить как определитель  $3 \times 3$ , элементы которого - символы Кронекера:

$$\epsilon_{\alpha ik} \epsilon_{\beta jl} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \delta_{\alpha j} & \delta_{\alpha l} \\ \delta_{i\beta} & \delta_{ij} & \delta_{il} \\ \delta_{k\beta} & \delta_{kj} & \delta_{kl} \end{vmatrix}$$

В нашей задаче, индексы  $\alpha, \beta$  равны 3, то есть определитель примет вид:

$$\epsilon_{3IK} \epsilon_{3JL} = \begin{vmatrix} \delta_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{IJ} & \delta_{IL} \\ 0 & \delta_{KJ} & \delta_{KL} \end{vmatrix} = \delta_{33} \begin{vmatrix} \delta_{IJ} & \delta_{IL} \\ \delta_{KJ} & \delta_{KL} \end{vmatrix} = \delta_{IJ} \delta_{KL} - \delta_{JK} \delta_{IL}$$

Из предыдущего выражения получим:

$$\delta_{IJ} \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} = \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} = 2\delta_{KL} - \delta_{KL} = \delta_{KL} \quad (11.4)$$

По полученному соотношению можно преобразовать выражение для компонент тензора деформаций:

$$\epsilon_{IK} \epsilon_{IJ} \sigma_{IJ, KL} = \sigma_{II, KK} - \sigma_{IJ, JI} = \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + X_{I,I} \quad (11.5)$$

Последнее равенство следует из уравнения равновесия. Учитывая все предыдущие соображения, условие равновесия можно переписать в виде:

$$\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\epsilon_{IJKL} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\delta_{IJ}[-\frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \frac{1}{2\mu}\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\sigma_{IJKL} = 0 \quad (11.6)$$

Тогда такая система уравнений с граничным условиями дает полную постановку второй краевой задачи для случая плоской деформации:

$$\begin{cases} \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}X_{I,I} = -\frac{1}{1-2\nu}X_{I,I} \\ \sigma_{IJ,J} + X_I = 0 \\ \sigma_{IJ}n_J|_{\Gamma} = S_I^0 \end{cases}$$

### Случай плоского напряженного состояния

Пусть у нас имеется пластинка ширины  $2h$ , длины  $l$ , с началом системы координат в центре пластины (рис. 11.1). В данной задаче вектора перемещения имеют вид:

$$\begin{cases} u_{3,3} = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(u_{1,1} + u_{2,2}) \\ u_{I,3} + u_{3,I} = 0 \end{cases}$$

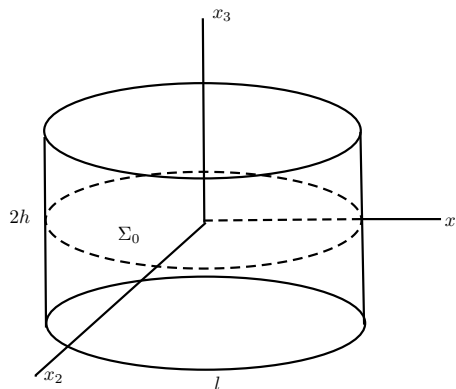


Рисунок 11.1

Введем ограничения на входные данные:

- 1) Пластина тонкая. т.е.  $\frac{2h}{l} \ll 1$ .
- 2) Лицевые поверхности свободны от нагрузок, т.е.  $\sigma_{i3}|_{x_3=\pm h} = 0$ .
- 3) Боковые и объемные нагрузки параллельны срединной плоскости и симметричны относительно ее, т.е.  $P_3|_{\Sigma_u} \equiv 0$ ;  $P_I(x_1, x_2, x_3) = P_I(x_1, x_2, -x_3)$ .

Из этих условий следует:

$$\sigma_{33}|_{x_3=\pm h} = 0 \implies \sigma_{33,3}|_{x_3=\pm h} = 0 \implies \sigma_{33} \approx 0 \implies u_3 \approx 0 \quad (11.7)$$

Поэтому, можно обобщить все величины и уравнения таким образом, что исходная задача в математическом плане будет идентична задаче о плоском деформированном состоянии.

## Общее решение плоских задач

Предположим, что объемные нагрузки имеют потенциал, т.е.  $X_I = -\phi_{,I}$ . Тогда компоненты тензора напряжений примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\Phi_{,KL} + \phi\delta_{IJ} \\ \sigma_{11} = \Phi_{,22} \\ \sigma_{22} = \Phi_{,11} \\ \sigma_{12} = \Phi_{,12} = \sigma_{21} \end{cases}$$

Подставим первое уравнение системы в условие равновесия, тогда:

$$\sigma_{IJ,J} + X_I = \epsilon_{IK}\epsilon_{JK}\Phi_{,KLJ} + \phi_{,I} - \phi_{,I} = 0 \quad (11.8)$$

То есть начальное уравнение полностью удовлетворяет условию равновесия. Найдем сумму главных компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Phi_{,22} + \Phi_{,11} + 2\phi \quad (11.9)$$

Подставим соотношение (11.6) в (11.9) и получим:

$$\Delta^2\Phi = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta\phi \quad (11.10)$$

Это дифференциальное уравнение 4-го порядка, где  $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$ .

Вернемся к граничным условиям:  $\sigma_{IJ}n_J|_{\Gamma} = S_I^0$ . Представим вектор нормали как:

$$n_I = \epsilon_{IJ}\tau_J; \tau_J = \frac{dx_I}{dS}; \tau_L = \epsilon_{JL}n_L \quad (11.11)$$

Если представить тензор напряжений в виде:  $\sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\Phi_{,KL}$ , то граничное условие примет вид:

$$\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\Phi_{,KL}n_J = \epsilon_{IJ}\tau_L\Phi_{,KL}|_{\Gamma} = S_I^0 \quad (11.12)$$

Тогда найдется функция  $T_I = \epsilon_{IK}\Phi_{,K}$ , что  $\Phi_{,k} = T_I\epsilon_{IK}$ , и окончательно получим:

$$\tau_L T_{I,L} = T_{I,L} \frac{dx_L}{dS} = \frac{dT}{dS} \quad (11.13)$$

Из этих соотношений можно найти выражение для функции  $\Phi$  на границе, которое при дифференцировании по  $n$  и по другим известным величинам на границе даст полную постановку задачи для функции напряжения.

## Лекция 12

### Решение плоских задач

Рассмотрим тривиальный случай, то есть объемные нагрузки отсутствуют. Запишем полную систему уравнений, определяющих постановку задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ,J} = 0 \\ \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \\ \sigma_{ij}n_j|_{\Gamma} = S_I^0 \end{cases}$$

Как легко заметить, во всех равенствах не учитываются свойства материала. Отсюда вытекает одна теорема.

**Теорема Мориса-Леви.** В задаче о плоской деформации напряжения одинаковы для всех материалов при отсутствии объемных нагрузок.

В таком случае, формула для тензора деформаций примет вид:

$$\sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\Phi_{,kl} \quad (12.1)$$

На прошлой лекции мы получили уравнение 4-ой степени для функции  $\Phi$ , которое имеет вид:

$$\Delta^2\Phi = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta\phi \quad (12.2)$$

Граничное условие преобразуется к виду:

$$\epsilon_{IK}\tau_L\Phi_{,KL}|_{\Gamma} = \epsilon_{IK}\frac{d\Phi_{,k}}{dS}|_{\Gamma} = S_I^0; \quad \frac{d\Phi_{,k}}{dS} = \epsilon_{IK}S_I^0 \quad (12.3)$$

здесь параметр  $s$  - длина дуги в заданном направлении, а  $\frac{d\phi}{dS} = \tau_L\Phi_{,L}$ . Можно проинтегрировать равенство (12.3) по  $s$ , получим:

$$\Phi_{,k}|_{\Gamma} = \int \epsilon_{IK}S_I^0 dS \quad (12.4)$$

Тогда, интегрируя еще раз по координате  $x_K$ , получим выражение для функции  $\Phi$ :

$$\Phi|_{\Gamma} = \int dx_k \left[ \int \epsilon_{IK}S_I^0 dS \right] = \Phi_0 \quad (12.5)$$

$dx_K$  - криволинейный интеграл по контуру. Продифференцировав функцию  $\Phi$  по нормали, получим второе граничное условие:

$$\frac{d\Phi}{dn}|_{\Gamma} = n_k\epsilon_{IK} \int S_I^0 dS \equiv \Psi_0 \quad (12.6)$$

Получаем систему из двух граничных условий, которых достаточно, чтобы найти единственное решение бигармонического уравнения (12.2):

$$\begin{cases} \Phi|_{\Gamma} = \Phi_0 \\ \frac{d\Phi}{dn}|_{\Gamma} = \Psi_0 \end{cases}$$

## Физический смысл функции напряжений

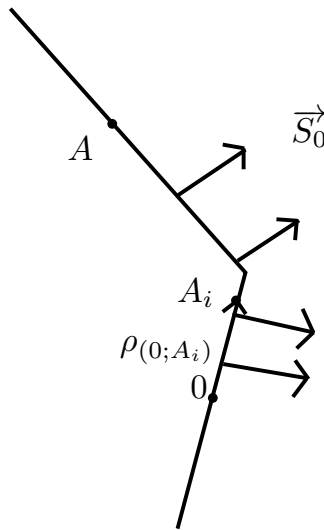


Рисунок 12.1

Проинтегрируем по контуру выражение (12.5):

$$\Phi(A) = \int_0^{S_A} dx_k [\epsilon_{IK} \int_0^S S_I^0 dS] = x_K \epsilon_{IK} \int_0^{S_A} S_I^0 ds \Big|_0^{S_A} - \int_0^{S_A} x_K \epsilon_{IK} S_I^0 dS \quad (12.7)$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям и объединяя два интеграла, получим:

$$\Phi(A) = \int_0^{S_A} \epsilon_{IK} S_I^0 (x_K^A - x_K) dS = \int_0^{S_A} \overrightarrow{\rho}_{(0;A)} \times \vec{S}_0 dS \quad (12.8)$$

здесь  $\overrightarrow{\rho}_{(0;A)}$  - текущий вектор,  $\vec{S}_0$  - вектор силы, то есть функция напряжений определяет суммарный момент всех сил.

## Задача про трубу

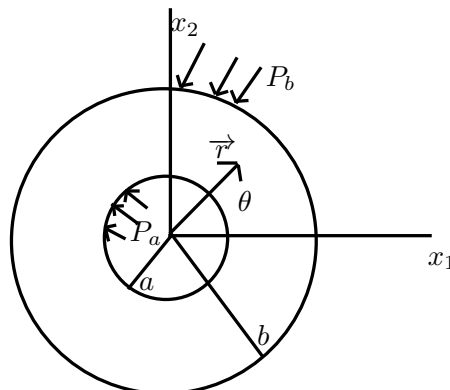


Рисунок 12.2

Для простоты введем полярную систему координат:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \implies r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2 = r \sin \theta \implies \theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

Так как перемещения по дугам отсутствуют, то  $u_\theta = 0$ . Выразим компоненты тензора деформаций:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \end{cases}$$

Напряжения найдем из закона Гука:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda(u_{r,r} + u_{\theta,\theta}) + 2\mu\varepsilon_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda(u_{r,r} + u_{\theta,\theta}) + 2\mu\varepsilon_{\theta,\theta} \\ \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Функция напряжения в полярных координатах будет зависеть только от  $r$  и примет вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Phi(r, \theta) = 0 \quad (12.9)$$

здесь  $\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$  - оператор Лапласа в полярных координатах. Данное дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] \right) = 0 \quad (12.10)$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$\Phi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \quad (12.11)$$

здесь  $A, B, C, D \equiv \text{const}$ . Найдем компоненты тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \end{cases}$$

Выпишем граничные условия для поиска констант:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}|_{r=a} = -P_a \\ \sigma_{rr}|_{r=b} = -P_b \end{cases}$$

Здесь мы сталкиваемся с проблемой: всего два граничных условия на 3 константы. Рассмотрим выражения для напряжений. В случае ненулевой константы  $B$ , напряжения станут бесконечными при приближении полярного радиуса к бесконечности. Отсюда следует, что  $B \equiv 0$ , а константы  $A$  и  $C$  находятся из системы граничных условий.

Константы при заданных граничных условиях будут равны:

$$\begin{cases} A = -\frac{a^2 b^2 (P_a - P_b)}{b^2 - a^2} \\ C = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} \end{cases}$$

Окончательно, имеем:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \left( 2(1 + 2\nu)C - \frac{A}{r^2} \right) \implies u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \left( 2(1 + 2\nu)Cr - \frac{A}{r} \right) \quad (12.12)$$



## Лекция 13

### Методы ТФКП для плоских задач

Рассмотрим комплексное число  $z = x_1 + ix_2$ . Сопряженное число к  $z$  имеет вид  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ . Выразим действительную и мнимую часть через комплексные числа:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{2}; x_2 = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -i \frac{z - \bar{z}}{2} \quad (13.1)$$

Рассмотрим производную комплексной функции  $\phi(z, \bar{z})$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \phi_{,1} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \phi_{,2} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} = i \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right) \end{cases}$$

Оператор Лапласа для комплексной функции имеет вид:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (13.2)$$

### Задача Ламе

Рассмотрим уравнения Ламе:

$$\begin{cases} \mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,1} = 0 \\ \mu \Delta u_2 + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,2} = 0 \\ \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = u_{1,1} + u_{2,2} \end{cases}$$

Введем комплексные перемещения  $\omega = u_1 + iu_2$ . Тогда уравнения Ламе примут вид:

$$\mu \Delta \omega + (\lambda + \mu) (\varepsilon_{,1} + i \varepsilon_{,2}) = 0 \quad (13.3)$$

Учитывая, что  $\mu \Delta u_{I,I} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,II} = 0 \implies (\lambda + 2\mu) \Delta \varepsilon = 0 \implies \varepsilon$  - гармоническая функция. Тогда  $\varepsilon$  - действительная часть некоторой аналитической функции. Пусть  $\varepsilon + i\psi = f(z)$ . Запишем условие Коши-Римана для этой функции:

$$\varepsilon_{,1} = \psi_{,2}; \varepsilon_{,2} = -\psi_{,1} \quad (13.4)$$

С учетом (13.4) получим:

$$\varepsilon_{,1} + i \varepsilon_{,2} = \varepsilon_{,1} - i \psi_{,1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{f}'(\bar{z}) \quad (13.5)$$

Преобразуем выражение (13.3):

$$\mu\Delta\omega + (\lambda + \mu)(\varepsilon_{,1} + i\varepsilon_{,2}) = 4\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}} + (\lambda + \mu)\bar{f}'(\bar{z}) = 0 \quad (13.6)$$

Проинтегрируем предыдущее выражение дважды. Сначала по  $\bar{z}$ :

$$4\mu\frac{\partial\omega}{\partial z} + (\lambda + \mu)\bar{f}(\bar{z}) = g'(z) \quad (13.7)$$

Потом по  $z$ :

$$4\mu\omega + (\lambda + \mu)z\bar{f}(\bar{z}) = g(z) + \bar{h}(\bar{z}) \quad (13.8)$$

$g, h$  - произвольные комплексные функции.

Продифференцируем вектор перемещения:

$$\omega_{,1} = u_{1,1} + iu_{2,1} = \frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}; \omega_{,2} = u_{1,2} + iu_{2,2} = i\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\right) \quad (13.9)$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, домноженное на  $i$ :

$$u_{1,1} + iu_{2,1} - i(u_{1,2} + iu_{2,2}) = u_{1,1} + u_{2,2} + i(u_{2,1} - u_{1,2}) = 2\frac{\partial\omega}{\partial z} \quad (13.10)$$

Учитывая, что  $\varepsilon = 2Re\frac{\partial\omega}{\partial z} = Re f(z)$ , подставим это в (13.7):

$$4\mu Re\frac{\partial\omega}{\partial z} = 2\mu\varepsilon = Re[-(\lambda + \mu)\bar{f}(\bar{z}) + g'(z)] = 2\mu Re f(z) \quad (13.11)$$

Из (13.11) получаем:  $-(\lambda + \mu)f(z) + g'(z) = 2\mu f(z) \implies f(z) = \frac{g'(z)}{\lambda + 3\mu}$ . Подставим полученный результат в (13.8):

$$4\mu\omega = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}z\bar{g}'(\bar{z}) + g(z) + \bar{h}(z) \quad (13.12)$$

Введем новые функции:  $\phi(z) = \frac{g}{2z}$ ,  $\psi = \frac{\bar{h}}{2z}$ ;  $\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu}$ . Тогда выражение (13.12) после замены примет вид:

$$2\mu\omega = \varkappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) \quad (13.13)$$

Рассмотрим закон Гука:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda\varepsilon + 2\mu u_{1,1} \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon + 2\mu u_{2,2} \\ \sigma_{12} = 2\mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases}$$

Составим линейные комбинации из компонент тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)\varepsilon = Re[2(\lambda + \mu)f(z)] = Re\left[\frac{2}{z}g'\right] = 4Re\phi' \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = 2\mu[u_{2,2} - u_{1,1} - iu_{1,2} - iu_{2,1}] = \mu\left(\frac{-\partial\omega}{\partial x_1} - i\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right) = -4\mu\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 4\mu\frac{\partial\omega}{\partial z} \end{cases}$$

Как можно заметить, сумма главных компонент выражается через функцию  $\phi'$ , поэтому это выражение не может быть константой. Исходя из начальных условий, можно найти все эти функции. Перепишем последние два уравнения системы через искомые функции:

$$\begin{cases} \sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\phi''(\bar{z}) + \psi'(z)] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[z\phi''(z) + \overline{\psi'(\bar{z})}] \end{cases}$$

## Лекция 14

### Применение ТФКП

Мы уже выводили формулы для перемещения и напряжений через комплексные функции:

$$\begin{cases} 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\phi(z) + \frac{\partial\bar{\phi}(\bar{z})}{\partial\bar{z}} - \bar{\psi}(\bar{z}) \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\phi' + \bar{\phi}') \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\bar{\phi}''(\bar{z}) + \psi'(z)] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[z\phi''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \end{cases}$$

Сложим последние два уравнения системы:

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} = 2[\bar{z}\bar{\phi}''(\bar{z}) + z\phi''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \psi'(z)] \quad (14.1)$$

Из предыдущих соотношений найдем выражения для напряжений по отдельности:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \phi' + \bar{\phi}' + z\phi'' + \bar{z}\bar{\phi}'' - (\psi' + \bar{\psi}') \\ \sigma_{22} = \phi' + \bar{\phi}' + z\phi'' + \bar{z}\bar{\phi}'' + (\psi' + \bar{\psi}') \end{cases}$$

### Случай второй краевой задачи

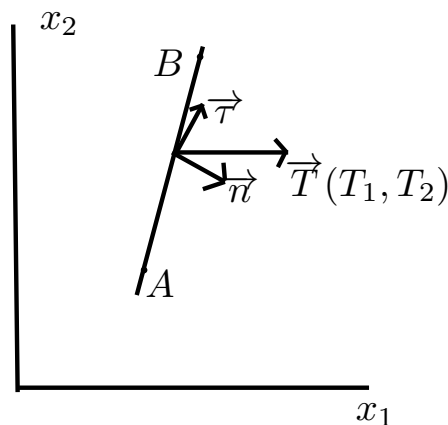


Рисунок 14.1

Пусть граничное условие задано в виде:  $\sigma_{IJ}n_J|_{\Gamma} = P_I^0$ , и существует дифференцируемая функция  $T$  такая, что  $T_I = \sigma_{IJ}n_J = \sigma_{IJ}\epsilon_{JK} \frac{dx_K}{dS}$ . Тогда:

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11} \frac{dx_2}{dS} - \sigma_{12} \frac{dx_1}{dS} \\ T_2 = \sigma_{12} \frac{dx_1}{dS} - \sigma_{22} \frac{dx_2}{dS} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} T_1 dS = \sigma_{12} dx_1 - \sigma_{22} dx_2 \\ T_2 dS = \sigma_{11} dx_2 - \sigma_{12} dx_1 \end{cases}$$

Составим линейные комбинации для  $T_1$  и  $T_2$ :

$$2i(T_1 + iT_2) = (\sigma_{11} + \sigma_{22})dz + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})d\bar{z} \quad (14.2)$$

Пусть функция  $\Gamma$  - потенциальна, тогда существует потенциал:

$$2i(T_1 + iT_2) = (\phi' + \bar{\phi}')dz + (z\bar{\phi}'' + \bar{\psi}') = d(\phi + z\bar{\phi}' + \bar{\psi}') \implies 2i \int_{AB} (T_1 + iT_2) = \phi + z\bar{\phi}' + \bar{\psi}' \quad (14.3)$$

Из этих условий можно посчитать результирующий вектор нагрузок и результирующий вектор моментов. Напомним, что для однородного тела в состоянии равновесия эти вектора тождественно равны нулю. Запишем выражения для сил и моментов:

$$\begin{cases} R_1 + iR_2 = \oint (T_1 + iT_2)dS \\ M = \oint (x_1 T_1 - x_2 T_2)dS = -R \oint i(T_1 + iT_2)\bar{z}dS = R[\int_{\Gamma} \psi dz - z\psi - z\bar{z}\phi'(z)] \end{cases}$$

## Постановка задачи

У нас уже имеются выражения для перемещений и напряжений через комплексные функции. Преобразуем граничные условия для первой краевой задачи. Пусть:

$$\begin{cases} u_1|_{\Gamma_K} = g_{1K} \\ u_2|_{\Gamma_K} = g_{2K} \end{cases}$$

Подставим вместо перемещений их выражения через комплексные функции, и получим:

$$\begin{cases} z\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})|_{\Gamma_K} = g_{1K} + ig_{2K} \\ \phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})|_{\Gamma_K} = i \int_0^S (T_{1K} + iT_{2K})dS \end{cases}$$

Введем теперь полярные координаты. Выразим векторы перемещения в декартовых координатах через полярные координаты:

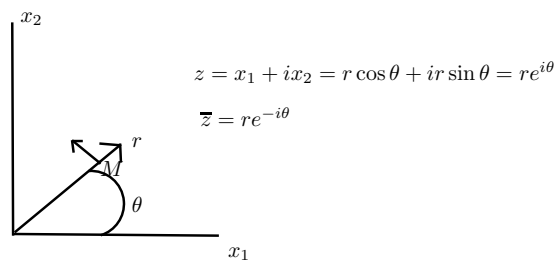


Рисунок 14.2

$$\begin{cases} u_1 = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \\ u_2 = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \\ u_1 + iu_2 = (u_r + iu_\theta)e^{i\theta} \implies u_r + u_\theta = (u_1 + iu_2)e^{-i\theta} \end{cases}$$

Введем замену:  $\phi' = \Phi, \psi' = \Psi$ . Для напряжений выражения в полярных координатах примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)] \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} \end{cases}$$

Теперь у нас имеется полная постановка задачи для полярных координат. Применим ее на практике.

### Задача Кирша

Задача Кирша – задача о растяжении бесконечной пластины с круглым отверстием(рис. 14.3).

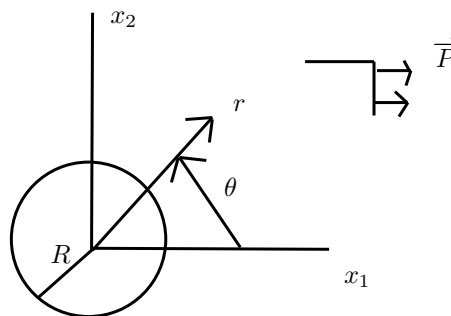


Рисунок 14.3

Граничное условие имеет вид:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{\theta\theta} = \Phi(z) + \bar{\Phi}\bar{z} - 2e^{i\theta}[\bar{z}\Phi' + \Psi]|_{\Gamma} = 0 \tag{14.4}$$

Разложим комплексные функции в ряд Лорана:

$$\begin{cases} \Phi(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \\ \Psi(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots \end{cases}$$

Коэффициенты в этом разложении будут равны:  $a_0 = \frac{P}{4}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{P}{2}R^2, a_k = 0$  при  $k \geq 3$ ;  $b_0 = \frac{-P}{2}, b_1 = 0, b_2 = \frac{P}{2}R^2, b_3 = 0, b_4 = \frac{-3PR^4}{2}, b_i = 0$  при  $i \leq 5$ . Нечетные коэффициенты обращаются в ноль из-за симметрии относительно координаты  $\theta$ . Тогда функции после подстановки коэффициентов будут равны:

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2R^2}{z^2}\right) \\ \Psi(z) = \frac{-P}{2}\left(1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{3R^4}{z^4}\right) \end{cases}$$

А напряжения примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{P}{2} \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{P}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{P}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{cases}$$

Граничное условие преобразуется к виду:

$$\sigma_{\theta\theta}|_{r=R} = P(1 - 2 \cos 2\theta) = \begin{cases} -P, \theta = 0; \pi \\ 3P, \theta = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

То есть в точках с координатами  $0, \pi$  тело сжимается, а в точках вида  $\pm \frac{\pi}{2}$  тело растягивается в 3 раза сильнее. В этой задаче очень большую роль играют свойства материала, потому что при слишком большой нагрузке, тело просто разорвется в граничных точках.

## Лекция 15

### Динамические задачи

До этого момента мы работали со статическими задачами, которые являются частным случаем динамических задач. Запишем систему уравнений для динамических задач:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn} u_{m,n} \end{cases}$$

Из которой получим 3 уравнения относительно 3 компонент вектора перемещения:

$$[C_{ijkl} u_{k,l}]_{,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (15.1)$$

Данное уравнение является гиперболическим при выполнении условий:  $\rho > 0$ ,  $C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} > 0 \forall \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \neq 0$ . Запишем систему граничных и начальных условий:

$$\begin{cases} u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0(y) \\ \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_p} = C_{ijkl} u_{k,l} n_j|_{\Sigma_p} = P_i^0 \\ u_i(x, 0) = f(x) \\ \dot{u}_i(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Уравнение (15.1) с предыдущей системой дают самую общую постановку динамической задачи теории упругости.

### Классы динамических задач

1) **Задача Коши.** Рассмотрим безграничное тело в бесконечном пространстве. Тогда вся задача определяется только начальными условиями из-за отсутствия границы.

Объемная нагрузка задается уравнением:

$$\overrightarrow{x^{(k)}}(x, \xi, t, \tau) = P(t) h(t - \tau) \delta(x - \xi) \delta_{kj} \vec{e}_j \quad (15.2)$$

$h$  - функция Хевисайда. То есть в какой-то момент времени возникает сила, зависящая от времени и направленная по оси  $x_k$ .

2) **Задача о собственных колебаниях.** Пусть у нас имеется тело, к которому приложено маленькое возмущение, причем объемная нагрузка отсутствует. Точки



тела начинают колебаться (свободные колебания). Эти колебания характеризуют динамическую индивидуальность тела. Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} (C_{ijkl}(x)u_{k,l}^*)_{,j} = -\rho\omega^2 u_i^* \\ u_i|_{\Sigma_n} = 0 \\ C_{ijkl}u_{k,l}^* n_j|_{\Sigma_p} = 0 \end{cases}$$

3) **Задача об установившихся колебаниях.** К телу приложены периодически меняющиеся нагрузки. Через некоторый продолжительный промежуток времени установится неизменное состояние, называемое режимом работы. Начальных условий не задается.

Запишем уравнение для объемных нагрузок:

$$X_k(x, t) = X_k \cos \omega t + Y_k \sin \omega t = \operatorname{Re} z_k(x) e^{i\omega t} \quad (15.3)$$

Если представить уравнение перемещения в виде:  $u_i = u_i(x) e^{i\omega t}$ , то получим систему уравнений Гельмгольца для решения задачи об установившихся колебаниях:

$$[C_{ijkl}(x)u_{k,l}^*]_{,j} + X_i^* = -\rho\omega^2 u_i^* \quad (15.4)$$

4) **Задача о резонансе.** Допустим, что тело свободно колеблется под действием внешнего воздействия. Если частота этого воздействия будет совпадать с частотой свободных колебаний, возникнет явления резонанса, то есть увеличение амплитуды колебаний.

5) **Задача о дифракции.** У нас имеется источник, распространяющий возмущения в направлении тела. Необходимо выяснить, проходят ли возмущения за тело и что происходит в той области.

6) **Задача о распространении волн.** Под волной понимается распространение некоторого возмущения. Волны бывают одиночными и периодическими, которые в свою очередь делятся на продольные и поперечные. При продольных возмущениях частицы тела распространяются в направлении волны, а при поперечных - в перпендикулярном направлении.

## Волны в изотропных телах

У нас имеется бесконечное изотропное пространство. Выпишем уравнения движения:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + X(x, t) = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (15.5)$$

Разложим вектор перемещения на сумму потенциальной и вихревой функции:  $\vec{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\psi}$ ,  $\operatorname{div} \vec{\psi} = 0$ . Тогда вектор объемных сил будет равен:  $\vec{X} = \rho(\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi})$ ,  $\operatorname{div} \vec{\Psi} = 0$ . Подставим полученный результат в уравнение движения:

$$\operatorname{grad}[(\lambda + 2\mu)\Delta\Phi - \rho\ddot{\Phi} + \rho\Phi] + \operatorname{rot}[\mu\Delta\vec{\psi} - \rho\ddot{\vec{\psi}} + \rho\vec{\psi}] = 0 \quad (15.6)$$

Из уравнения (15.6) получаем систему:

$$\begin{cases} \Delta\phi - \frac{1}{C_1^2}\ddot{\phi} = -\frac{1}{C_1^2}\Phi; C_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \\ \Delta\vec{\psi} - \frac{1}{C_2^2}\ddot{\vec{\psi}} = -\frac{1}{C_2^2}\vec{\Psi}; C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases}$$

$C_1$  - скорость распространения продольной волны,  $C_2$  - скорость распространения волны сдвига. Покажем, что  $C_1$  также является скоростью дилатации, а  $C_2$  - скоростью вращения. Выразим деформации и вектор вращения через функции  $\phi, \psi$ :

$$\begin{cases} \varepsilon = \operatorname{div} \vec{u} = u_{k,k} = \operatorname{divgrad}\phi + \operatorname{divrot} \vec{\psi} = \Delta\phi \\ \vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \vec{u} - \frac{1}{2}\operatorname{rotgrad}\phi + \frac{1}{2}\operatorname{rotrot} \vec{\psi} = \frac{1}{2}\operatorname{rotrot} \vec{\psi} \end{cases}$$

Возьмем оператор Лапласа от предпоследней системы:

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon - \frac{1}{C_1^2}\ddot{\varepsilon} = -\frac{1}{C_1^2}\Delta\Phi \\ \Delta\vec{\omega} - \frac{1}{C_2^2}\ddot{\vec{\omega}} = -\frac{1}{C_2^2}\operatorname{rotrot} \vec{\Psi} \end{cases}$$

Получили волновые уравнения относительно  $\varepsilon, \vec{\omega}$ , то есть наше предположение верно.

## Плоские волны

Рассмотрим случай плоской волны, то есть все частицы после возмущения двигаются вдоль одной оси. Уравнение Ламе примет вид:

$$(\lambda + \mu)\delta_{i1}u_1'' + \mu u_i'' = \rho \ddot{u}_i \quad (15.7)$$

Тогда при  $i=1,2,3$  получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_1 = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{C_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(u_2, u_3) = 0 \end{cases}$$

Тогда решения можно рассматривать в виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = 0 \quad (15.8)$$

Мы получили дифференциальное уравнение. Решим его с помощью замены переменных:  $\xi = x_1 + ct, \eta = x_1 - ct$ . Найдем частные производные относительно новых переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = C\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \end{cases}$$

Подставляем все в уравнение (15.8):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (15.9)$$

Это решение можно проинтегрировать в явном виде и получить решение:  $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \implies u(x_1, t) = f(x_1 + ct) + g(x_1 - ct)$  - решение Даламбера. С учетом начальных условий:  $u(x, 0) = \alpha(x_1)$ ;  $\dot{u}(x_1, 0) = \beta(x_1)$ , преобразуем решение. Получаем:

$$\begin{cases} u(x_1, 0) = f(x_1) + g(x_1) = \alpha(x_1) \\ C[f'(x_1) - g'(x_1)] = \beta(x_1) \end{cases}$$

Проинтегрируем второе уравнение:

$$\begin{cases} f(z) + g(z) = \alpha(z) \implies f(z) = \frac{1}{2}\alpha(z) + \frac{1}{2C} \int_0^z \beta(y) dy \\ f(z) - g(z) = \frac{1}{C} \int_0^z \beta(y) dy \implies g(z) = \frac{1}{2}\alpha(z) - \frac{1}{2C} \int_0^z \beta(y) dy \end{cases}$$

Сделаем обратную замену переменных и окончательно получим:

$$u(x_1, t) = \frac{\alpha(x_1 + ct) + \alpha(x_1 - ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x_1 - ct}^{x_1 + ct} \beta(y) dy \quad (15.10)$$

## Лекция 16

### Распространение волн

Мы уже выяснили, что для случая плоской волны с заданными начальными условиями:  $u(x, 0) = \alpha(x_1)$ ;  $\dot{u}(x_1, 0) = \beta(x_1)$ , решение будет иметь вид:

$$u(x_1, t) = \frac{\alpha(x_1 + ct) + \alpha(x_1 - ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x_1 - ct}^{x_1 + ct} \beta(y) dy \quad (16.1)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\beta = 0$ . Тогда получим:

$$u(x_1, t) = \frac{\alpha(x_1 + ct) + \alpha(x_1 - ct)}{2} \quad (16.2)$$

Проверим наглядно, как будут распространяться волны в зависимости от времени:

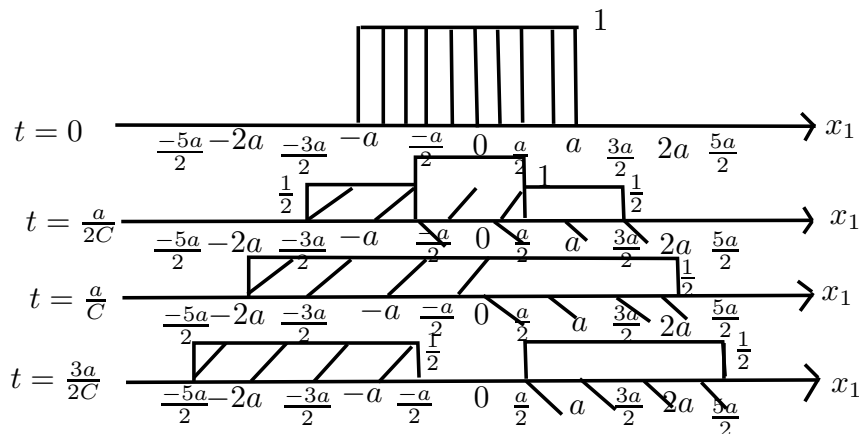


Рисунок 16.1

- 1)  $t = 0, \alpha(x_1) = 1$  при  $-a \leq x_1 \leq a$
- 2)  $t = \frac{a}{2C}, \alpha(x_1 - ct) = 1$  при  $-\frac{a}{2} \leq x_1 \leq \frac{3a}{2}, \alpha(x_1 + ct) = 1$  при  $-\frac{3a}{2} \leq x_1 \leq \frac{a}{2}$
- 3)  $t = \frac{a}{C}, \alpha(x_1 - ct) = 1$  при  $0 \leq x_1 \leq 2a, \alpha(x_1 + ct) = 1$  при  $-2a \leq x_1 \leq 0$
- 4)  $t = \frac{3a}{2C}, \alpha(x_1 - ct) = 1$  при  $\frac{a}{2} \leq x_1 \leq \frac{5a}{2}, \alpha(x_1 + ct) = 1$  при  $-\frac{5a}{2} \leq x_1 \leq -\frac{a}{2}$

### Распространение волны в определенном направлении

Пусть волна распространяется в определенном направлении  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3), |\vec{n}| = 1$ . Тогда перемещения примут вид:  $u_i = u_i(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) = u_i(n_k x_k - ct)$ . Найдем производные по координате:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = u'_k n_j; \frac{\partial}{\partial x_j} (n_k x_k - ct) = n_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = n_k \delta_{kj} = n_j \quad (16.3)$$

Тогда коэффициенты в уравнении Ламе примут вид:

$$\begin{cases} u_{k,ki} = u_k'' n_k n_i \\ u_{i,kk} = -u_i'' n_k n_k = -u_i'' \\ \ddot{u}_i = C^2 u_i'' \end{cases}$$

Подставим это в уравнение Ламе:

$$(\lambda + \mu)u_k'' n_k n_i + \mu u_i'' = \rho C^2 u_i'' \implies [(\lambda + \mu)n_k n_i + \mu \delta_{ki} - \rho C^2 \delta_{ki}]u_k'' = 0 \quad (16.4)$$

Это однородное дифференциальное уравнение. Для существования ненулевого решения необходимо равенство нулю такого определителя:

$$\begin{vmatrix} (\lambda + \mu)n_1^2 + \mu - \rho C^2 & (\lambda + \mu)n_1 n_2 & (\lambda + \mu)n_1 n_3 \\ (\lambda + \mu)n_2 n_1 & (\lambda + \mu)n_2^2 + \mu - \rho C^2 & (\lambda + \mu)n_2 n_3 \\ (\lambda + \mu)n_3 n_1 & (\lambda + \mu)n_3 n_2 & (\lambda + \mu)n_3^2 + \mu - \rho C^2 \end{vmatrix} = 0$$

Получим систему уравнений:

$$(\mu - \rho C^2)^2 (\lambda + 2\mu - \rho C^2) = 0 \quad (16.5)$$

Решением будут скорости распространения волны в направлении нормали  $C_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ , и скорость распространения волны в направлении, перпендикулярном нормали  $C_2 = \frac{\mu}{\rho}$ .

## Гармонические волны

Решение для случая гармонической волны имеет вид:

$$u(x_1, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (16.6)$$

здесь  $k$  - волновое число,  $\omega$  - частота волны,  $u_0$  - амплитуда колебаний. Можно также ввести другие параметры:  $l = \frac{2\pi}{T}$  - длина волны,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  - период. Уравнения Ламе сводятся к виду:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0 \implies -k^2 + \frac{\omega^2}{C^2} = 0 \quad (16.7)$$

Отсюда можно вывести еще один параметр  $C = \frac{\omega}{k}$  - скорость волны.

## Волны в анизотропном материале

Уравнение движения для анизотропного материала имеет вид:

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = \rho\ddot{u}_i \quad (16.8)$$

Пусть волна распространяется в направлении  $\vec{n}$ , причем  $|\vec{n}| = 1$ . Волна будет вызывать перемещения  $u_i(n_k x_k - xt)$ , которые можно подставить в уравнение движения (16.8):

$$C_{ijkl}u_k'' n_j n_l = \rho C^2 u_i'' \quad (16.9)$$

Условие единственности решение задается равенством нулю определителя:

$$\det[C_{ijkl}n_j n_l - \rho C^2 \delta_{ik}] = 0 = \frac{1}{6} \epsilon_{ipq} \epsilon_{krs} [a_{ik} - \rho C^2 \delta_{ik}] [a_{pr} - \rho C^2 \delta_{ik}] [a_{qs} - \rho C^2 \delta_{qs}] = 0 \quad (16.10)$$

здесь  $a_{ik} = C_{ijkl}n_j n_l$ . Рассмотрим такое выражение:

$$a_{ik} \varkappa_k \varkappa_i = C_{ijkl}n_j n_l \varkappa_k \varkappa_i > 0 \quad (16.11)$$

Это квадратичная форма относительно  $n_i$ , здесь  $\varkappa$  - произвольная константа. Отсюда следует, что соотношение (16.10) является кубическим уравнением со знакопеременными коэффициентами, поэтому уравнение имеет 3 действительных корня  $C_1, C_2, C_3$ . В отличие от изотропного случая, любое возмущение вдоль одной оси будет вызывать движение частиц по 3 перпендикулярным направлениям. Причем, каждый корень зависит от свойств материала и изначального распространения волны, поэтому в каждом направлении скорость будет различная.

## Поверхностные волны Рэлея

Такие волны возникают в полупространстве. Их особенность - амплитуда увеличивается при приближении к поверхности.

Пусть волна распространяется в направлении  $x_2$ , а амплитуда будет меняться в зависимости от координаты  $x_1$ . По теореме Гельмгольца, перемещения примут вид:

$$\vec{u} = \text{grad div } \phi + \text{rot } \vec{\psi} \implies u_I = \phi_{,I} + \epsilon_{IJ} \psi_{,J}; \text{div } \vec{\psi} = 0 \quad (16.12)$$

Применим оператор Лапласа к соотношению (16.12) и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \phi - \frac{1}{C_1^2} \ddot{\phi} = 0 \\ \Delta \psi - \frac{1}{C_2^2} \ddot{\psi} = 0 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$\begin{cases} \phi = \Phi(x_1) e^{i(kx_2 - \omega t)} \\ \Psi = \Psi(x_1) e^{i(kx_2 - \omega t)} \end{cases}$$

Учитывая, что  $\phi, \psi \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ , подставим эти решения в систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi}{dx_1^2} - \nu_1^2\Phi = 0; \nu_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}} = k\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_1^2}} \\ \frac{d^2\Psi}{dx_1^2} - \nu_2^2\Psi = 0; \nu_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_2^2}} = k\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_2^2}} \end{cases}$$

Учитывая, что корень всегда неотрицателен, получим ограничения на скорость:  $C_R < C_1 < C_2$ , здесь  $C_R = C$  - скорость волны Рэлея.

## Лекция 17

### Случай волн Рэлея

Мы получили систему уравнений для данной задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi}{dx_1^2} - \nu_1^2\Phi = 0 \\ \frac{d^2\Psi}{dx_1^2} - \nu_2^2\Psi = 0 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$\begin{cases} \Phi(x_1) = Ae^{-\nu_1 x_1} \implies \phi(x_1, x_2, t) = Ae^{-\nu_1 x_1 + i(kx_2 - \omega t)} \\ \Psi(x_1) = Be^{-\nu_2 x_1} \implies \psi(x_1, x_2, t) = Be^{-\nu_2 x_1 + i(kx_2 - \omega t)} \end{cases}$$

здесь  $\nu_I = \sqrt{k^2 - \frac{\omega}{C_I^2}}$ ,  $k$  - волновое число.

Теперь необходимо найти  $C_R$  - скорость волны Рэлея. Для этого представим векторы перемещений через теорему Гельмгольца:

$$\begin{cases} u_1 = \phi_{,1} - \psi_{,2} = (-A\nu_1 e^{-\nu_1 x_1} + ikBe^{-\nu_2 x_1})e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ u_2 = \phi_{,2} - \psi_{,1} = (ikAe^{-\nu_1 x_1} + B\nu_2 e^{-\nu_2 x_1})e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases}$$

Из закона Гука найдем ненулевые напряжения:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)\phi_{,11} + 2\mu\phi_{,22} + 2\mu\psi_{,12} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu(-\psi_{,11} + 2\phi_{,12} + \psi_{,22}) \end{cases}$$

Эти уравнения обращаются в ноль при нулевой координате  $x_1$ , поэтому соотношения примут вид:

$$\begin{cases} A[\lambda(\nu_1^2 - k^2) + 2\nu_1^2] + 2\mu Bk\nu_2 = 0 \\ 2i\mu A\nu_1^2 + B\mu(\nu_2^2 + k^2) = 0 \end{cases}$$

Для существования ненулевого решения определитель должен быть равен нулю:

$$\left[ \frac{\lambda}{\mu}(\nu_1^2 - k^2) + 2\nu_1^2 \right] (\nu_2^2 + k^2) - 2\nu_1\nu_2 k^2 = 0 \quad (17.1)$$

Введем новые переменные:  $\theta = \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$ ,  $\eta = \frac{C_R^2}{C_2^2} < 1$ . Тогда:  $\nu_1 = \frac{\omega}{C_1\theta\eta} \sqrt{1 - \eta\theta}$ ,  $\nu_2 = \frac{\omega}{C_2\eta} \sqrt{1 - \eta}$ . Уравнение (17.1) примет вид:

$$\eta[\eta^3 - 8\eta^2 + (24 - 16\theta)\eta - 16(1 - \theta)] = 0 \quad (17.2)$$

Это кубическое уравнение, которое решается вычислительными методами. Нас интересует действительный корень  $\eta < 1$ .



## Волны Лява

Пусть к телу добавили дополнительный слой из другого материала, поэтому задача преобразуется в неоднородную. В таком случае, помимо продольных волн Рэлея, будут возникать поперечные возмущения, называемые волнами Лява. Рассмотрим задачу, когда дополнительный материал мягче основного, то есть его модуль Юнга меньше. Вектор перемещений примет вид:

$$\vec{u} = (0, 0, u_3(x_1, x_2, t)); u_3 = \Phi(x_1)e^{i(kx_2 - \omega t)} \quad (17.3)$$

Как и в случае волн Рэлея, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_1'' - k^2(1 - \frac{C_1^2}{b_1^2})\Phi_1 = 0; -h \leq 0 \leq x_1; h = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}} \\ \Phi_2'' - k^2(1 - \frac{C_2^2}{b_2^2})\Phi_2 = 0; 0 < x_1 < \infty \end{cases}$$

$\lambda_1, \mu_1, \rho_1$  - параметры основного материала.

## Неупругое поведение материалов

Неупругие свойства материала изучаются с помощью эксперимента. Для примера, возьмем брусок длины  $L_0$  с площадью поперечного сечения  $F_0$  и начнем растягивать его с силой  $P$ . Измерим относительную деформацию:  $\varepsilon = \frac{L-L_0}{L_0}$ . Относительное напряжение будет равно  $\sigma = \frac{P}{F_0}$ , но оно не является истинным, ведь в процессе растяжения изменяется площадь поперечного сечения. Для того, чтобы узнать зависимость деформаций от напряжений, нарисуем диаграмму растяжения:

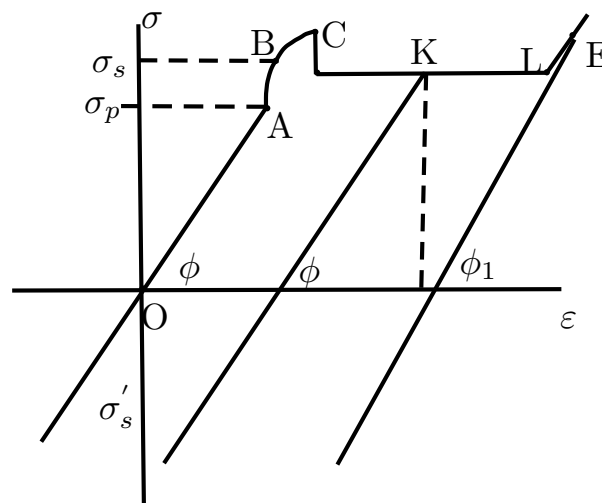


Рисунок 17.1

Участок  $OA$  - участок линейной упругости,  $AB$  - участок нелинейной упругости,  $BC$  - зуб текучести,  $CD$  - площадка текучести.

Снимем нагрузку в точке  $K$ . Угол  $\phi_1 = \phi$ , из чего следует, что свойства деформированного материала остаются такими же, как у недеформированного. Но если мы, после деформации, вернем материал в исходное состояние, свойства поменяются. Введем понятие предела текучести, который характеризует значение напряжения, при котором деформации продолжают расти без увеличения нагрузки. После сжатия материала, его предел текучести станет меньше, что видно из диаграммы. Такой эффект называется эффектом Баушингера.

## Лекция 18

### Теория пластичности

Пусть у нас имеется тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ . Запишем его инварианты:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} \\ I_3 = \sigma_{ik}\sigma_{kj}\sigma_{ji} \end{cases}$$

Все остальные инварианты являются линейной комбинацией этих трех. Эти инварианты используются для записи определяющих соотношений теории пластичности.

Выражение для девиатора напряжений имеет вид:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (18.1)$$

$S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$  - модуль девиатора напряжений,  $\bar{S}_{ij} = \frac{S_{ij}}{S}$  - направляющий вектор тензора напряжений. Тогда сам тензор напряжений в новых обозначениях примет вид:

$$\sigma_{ij} = S \bar{S}_{ij} + \sigma \delta_{ij} \quad (18.2)$$

При этом, если напряжения меняются пропорционально скалярному параметру, то есть  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \lambda$ , где  $\lambda$  - скаляр, то процесс нагружения называется простым процессом.

Введем понятие интенсивности напряжения  $\sigma_u$ :

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (18.3)$$

Распишем это выражение подробнее:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (18.4)$$

Тогда интенсивность касательных напряжений будет равна:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (18.5)$$

Найдем связь между этими двумя характеристиками:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_u \implies \sigma_u = \sqrt{3} T \quad (18.6)$$

Теперь рассмотрим тензор деформаций. Как и раньше, работаем со случаем, когда деформации малые, то есть  $|\varepsilon_{ij}| \ll 1, |u_{i,j}| \ll 1$ . Введем понятие девиатора деформаций:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (18.7)$$

здесь  $\varepsilon = \varepsilon_{ii} = \frac{dV-dV_0}{dV_0}$  - дилатация. Тогда  $c = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$  - модуль девиатора деформаций,  $\bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{c}$  - направляющий вектор тензора деформаций. В новых обозначениях деформации примут вид:

$$\varepsilon_{ij} = c\bar{e}_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (18.8)$$

Введем понятие интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_u = C\sqrt{e_{ij}e_{ij}} = \frac{C}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)} \quad (18.9)$$

Пусть  $\varepsilon_{11} = \frac{l-l_0}{l_0}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$ , тогда:

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_{ii}C(1 + \nu) \quad (18.10)$$

Подберем константу  $C$  так, чтобы интенсивность деформаций при одноосном растяжении совпадала с продольной деформацией:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{1 + \nu}\sqrt{\frac{3}{2}}e_{ij}e_{ij}; \nu = \frac{1}{2} \implies \varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}}e_{ij}e_{ij} \quad (18.11)$$

## Основные гипотезы теории пластичности

1) Гипотеза единой кривой: утверждается, что существует зависимость между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряжений, причем эта зависимость описывается определенной функцией, то есть:

$$\sigma_u(\varepsilon_u) = F(\varepsilon_u) \quad (18.12)$$

Эта функция не зависит от вида деформаций и устанавливает связь между интенсивностью деформаций и напряжений. Большинство пластичных материалов подчиняются этой гипотезе.

2) Гипотеза совпадения направляющих векторов. Пусть  $\bar{S}_{ij} = \bar{e}_{ij} \implies S_{ij} = \frac{S}{c}e_{ij}$ . Выразим  $S$  и  $c$  через интенсивности напряжений:

$$\begin{cases} S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_u \\ c = \sqrt{e_{ij}e_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_u \end{cases}$$

Подставим полученные соотношения в выражения для  $S_{ij}$ :

$$\begin{cases} S_{ij} = \frac{2F(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u} e_{ij} \\ \sigma = K\varepsilon \end{cases}$$

здесь  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  - модуль объемного сжатия. Пусть  $\frac{F(\varepsilon_u)}{3\mu\varepsilon_u} = 1 - \omega(\varepsilon_u)$ ,  $0 \leq \omega \leq 1$ . Тогда получим:

$$S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} \quad (18.13)$$

$\omega(\varepsilon_u)$  - функция пластичности Ильюшина.

## Постановка задачи теории пластичности

Выпишем уравнения равновесия и определяющие соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \\ S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} \\ \sigma = K\varepsilon \end{cases}$$

Учитывая выражения для девиаторов и интенсивностей напряжений и деформаций с граничными условиями, получим полную постановку задачи теории малых упруго-пластических деформаций при активной нагрузке или разгрузке:

$$\begin{cases} S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \\ \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} \\ \varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} \\ u_i|_{\Sigma} = u_i^0 \\ \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma} = P_i^0 \end{cases}$$

## Лекция 19

### Теория пластичности деформационного типа

Запишем определяющие соотношения теории пластичности:

$$\begin{cases} S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} \\ \sigma = K\varepsilon \end{cases}$$

Их можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} \\ \sigma_{ij} = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu(1 - \omega)(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}) = \lambda\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2\mu\omega(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}) \end{cases}$$

Вынося за скобки деформации получим:

$$\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\Delta_{ijkl})\varepsilon_{kl} - 2\mu\omega(\Delta_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - 2\mu\omega D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (19.1)$$

Отсюда видно, что выражение для напряжений в теории пластичности отличается от напряжений в теории упругости добавлением второго слагаемого. Если  $\omega = 0$ , то получаем задачу для теории упругости.

### Методы решений задач теории пластичности

1) Метод упругих решений.

Задачу теории пластичности можно разбить на несколько задач теории упругости, последовательно решая которые, получим нужный нам результат. Запишем уравнения:

$$\begin{cases} C_{ijkl}u_{k,l}^{(0)} + X_i^{(0)} = 0 \\ C_{ijkl}u_{k,l}^{(0)}n_j|_{\Sigma_p} = P_i^{(n)}; u_i^{(0)}|_{\Sigma_u} = f_i \end{cases}$$

Мы уже умеем находить решения такой задачи. Пусть решение имеет вид:  $u_i^{(0)}$ . Тогда мы можем найти тензор деформаций, интенсивность деформаций и, соответственно, функцию Ильюшина.

Перепишем уравнения в общем виде:

$$\begin{cases} C_{ijkl}u_{k,l}^{(n)} + X_i^{(n)} = 0 \\ C_{ijkl}u_{k,l}^{(n)}n_j|_{\Sigma_p} = P_i^{(n)}; u_i^{(n)}|_{\Sigma_u} = f_i^{(n)} \end{cases}$$

При  $n = 1$  имеем:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{kl}^{(n)} - 2\mu\omega(\varepsilon_u^{(n-1)})D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n-1)} \quad (19.2)$$

Тогда внешние нагрузки и граничное условие примут вид:

$$X_i^{(n)} = \begin{cases} X_i, & n = 0 \\ X_i - 2\mu D_{ijkl}[\omega(\varepsilon_u^{(n-1)})\varepsilon_{kl}^{(n-1)}]_{,j}, & n > 0 \end{cases}$$

$$P_i^{(n)} = \begin{cases} P_i, & n = 0 \\ P_i + 2\mu D_{ijkl}\omega(\varepsilon_u^{(n-1)})\varepsilon_{kl}^{(n-1)}n_j, & n > 0 \end{cases}$$

Если решена задача для  $n = 0$ , то можно решить и для  $n = 1$ , и так далее. Поэтому, меняя входные данные, будем получать некоторую последовательность решений, которая сходится к общему решению, если наложены ограничения на функцию Ильюшина:

$$0 \leq \omega \leq \omega + \varepsilon_u \frac{d\omega}{d\varepsilon_u} < 1 \quad (19.3)$$

## 2) Метод переменных параметров упругости

Данный метод подразумевает использование рекуррентных соотношений для поиска общего решения. Запишем уравнение (19.2):

$$\sigma_{ij}^{(1)} = [C_{ijkl} - 2\mu\omega(\varepsilon_u^{(n-1)})D_{ijkl}]\varepsilon_{kl}^1 = C_{ijkl}^{(1)}\varepsilon_{kl}^{(1)} \quad (19.4)$$

Получим рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{cases} [C_{ijkl}^{(n)}u_{k,l}^{(n)}]_{,j} + X_i = 0 \\ C_{ijkl}^{(n)}u_{k,l}^{(n)}n_j|_{\Sigma_p} = P_i; \quad i_i^{(n)}|_{\Sigma_u} = f_i \end{cases}$$

## Критерий начала текучести

Для правильного решения задач, необходимо понимать, в какой момент времени деформация перестает быть упругой и становится пластической (текучесть). Для этого введем понятие предела текучести. Это характеристика, зависящая от материала, и определяющаяся экспериментальным путем. Тогда критерий текучести можно записать в виде:

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (19.5)$$

где  $\sigma_1, \sigma_3$  - главные компоненты тензора напряжений. Тогда для определения начала текучести рассмотрим напряжения в произвольной точке. Начиная с момента времени, когда уравнение (19.5) начнет выполняться, наступает пластическая деформация.

Вторым критерием можно рассмотреть критерий Мизеса. Пусть:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s \quad (19.6)$$

Введем функцию, зависящую от интенсивности напряжений:

$$f(\sigma_u) = \sigma_u^2 - \sigma_s^2 = 0 \quad (19.7)$$

Можно переписать эту функцию через компоненты тензора напряжений:

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} - 2\sigma_s^2 = 0 \quad (19.8)$$

Соотношение (19.8) называется критерием Мизеса.

## Определяющие соотношения теории текучести

Рассмотрим тензор напряжений. Как уже известно, он состоит из 6 независимых компонент, следовательно, можно рассмотреть 6-мерное пространство напряжений. В этом пространстве существует поверхность текучести, которая определяет конец упругих деформаций и начало пластических деформаций. Данное пространство удовлетворяет условию градиентальности, которое утверждает, что вектор пластической деформации перпендикулярен поверхности текучести. Это условие можно переписать в виде:

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (19.9)$$

$\varepsilon_{ij}^{(p)}$  - тензор пластических деформаций. Необходимо найти связь между напряжениями и деформациями, учитывая условие градиентальности и критерий Мизеса. Перепишем критерий Мизеса в виде:

$$f(\sigma) = S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_s^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) - \frac{1}{3}\sigma_s^2 = 0 \quad (19.10)$$

Продифференцируем это по  $\sigma_{ij}$ :

$$\frac{df}{d\sigma_{ij}} = S_{ij} \quad (19.11)$$

Подставим это в условие градиентальности:

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda S_{ij} \quad (19.12)$$

Запишем теперь интенсивность пластических деформаций:

$$d\varepsilon_u^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}^{(p)}e_{ij}^{(p)}} = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_{ij}^{(p)} - d\varepsilon^{(p)}\delta_{ij})(d\varepsilon_{ij}^{(p)} - d\varepsilon^{(p)}\delta_{ij})} \quad (19.13)$$

Так как изменение объема при пластической деформации равно нулю, то и дилатация равна нулю, следовательно:

$$d\varepsilon_u^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}^{(p)}d\varepsilon_{ij}^{(p)}} = \sqrt{\frac{2}{3}d\lambda^2 S_{ij}S_{ij}} = \frac{2}{3}d\lambda\sigma_u \quad (19.14)$$



Из (19.14) получаем:

$$d\lambda = \frac{3 d\varepsilon_u^{(p)}}{2 \sigma_u} \quad (19.15)$$

Подставим (19.15) в (19.12):

$$S_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}^{(p)}}{d\lambda} = \frac{2 \sigma_u}{3 d\varepsilon_u^{(p)}} d\varepsilon_{ij}^{(p)} \quad (19.16)$$

Домножим правую часть на  $\frac{dt}{dt}$  и окончательно получим:

$$S_{ij} = \frac{2 \sigma_u}{3 v_u} v_{ij} \quad (19.17)$$

здесь  $v_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}^{(p)}}{dt}$  - скорость деформаций,  $v_u = \frac{d\varepsilon_u^{(p)}}{dt}$  - интенсивность скоростей деформаций.

## Лекция 20

### Ползучесть материалов

Ползучестью материалов называют медленную, происходящую с течением времени, деформацию твёрдого тела под воздействием постоянной нагрузки. Рассмотрим график зависимости деформаций от времени при постоянном напряжении:

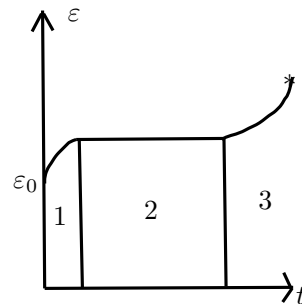


Рисунок 20.1

1 - неустойчивая ползучесть (тело деформируется под действием изменяющихся нагрузок), 2 - установившаяся ползучесть (тело деформируется под действием постоянных нагрузок), 3 - участок ускоренной ползучести, предшествующий разрыву.

Для некоторых материалов, например пластик, существует определенное значение напряжения  $\sigma^*$  - предел длительного сопротивления. Допустим, мы будем нагружать тело с каким-то напряжением  $\sigma$ , тогда возможны 3 ситуации:

- 1)  $\sigma < \sigma^*$ . Тело будет деформироваться до какого-то определенного значения, и разрушения не произойдет.
- 2)  $\sigma = \sigma^*$ . Деформации также будут продолжаться до определенного значения, при этом возможно разрушение материала.
- 3)  $\sigma > \sigma^*$ . Тогда график зависимости станет в точности как рисунок 20.1.

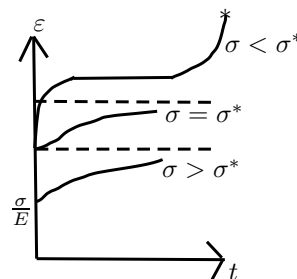


Рисунок 20.2

Рассмотрим теперь ситуацию, когда мы снимаем нагрузку в точке В, тогда, начиная с точки С, пойдет участок релаксации, который доходит до нуля у пластиков, но не доходит до нуля у жестких материалов (металлы).

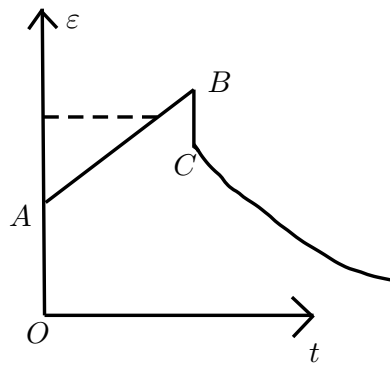


Рисунок 20.3

## Теория деформирования вязкоупругих материалов

Рассмотрим две различных задачи и процессы, происходящие там:

1) Пусть у нас есть пружина, которую растягивают с двух сторон с нагрузкой  $P$ , тогда  $\delta_u = K_1 P$  - продольное перемещение, и  $\epsilon_u = \frac{P}{E}$

2) Возьмем поршень и начнем растягивать его с нагрузкой  $P$ . Тогда  $\frac{d\delta_v}{dt} = K_2 P \implies \dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma_v}{\eta}$ ,  $\delta_v$  - перемещения с некоторой скоростью,  $\eta$  - вязкость.

Комбинируя эти задачи, можно получить много разных моделей для задач деформации вязкоупругих материалов. Рассмотрим некоторые из этих моделей.

### Модель Максвелла

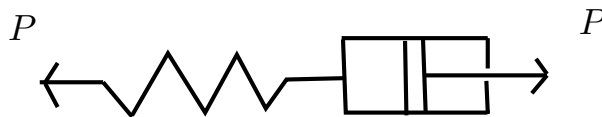


Рисунок 20.4

Соединим пружину с поршнем последовательно и начнем растягивать с напряжением  $P$  (рис. 20.4). Получим следующие соотношения:

$$\sigma_u = \sigma_v = \sigma; \delta = \delta_u + \delta_v \implies \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_u + \dot{\epsilon}_v \quad (20.1)$$

Выражение для деформаций можно переписать в виде:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \left( \frac{1}{E} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta} \right) \sigma \quad (20.2)$$

Решая дифференциальное уравнение получим:

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) - \frac{E^2}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \epsilon(\tau) d\tau \quad (20.3)$$

Напряжения также можно представить в виде:

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau; \Gamma(t - \tau) = E\delta(t - \tau) - \frac{E^2}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} h(t - \tau) \quad (20.4)$$

здесь  $\Gamma(t - \tau)$  - ядро релаксации. Отсюда можно выразить деформации:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \frac{1}{\eta} \sigma(\tau) d\tau = \int_0^t k(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (20.5)$$

здесь  $k(t - \tau) = \frac{1}{E} \delta(t - \tau) + \frac{1}{\eta} h(t - \tau)$  - ядро ползучести.

1) Рассмотрим случай ползучести, то есть  $\sigma = \sigma^* = const$ , тогда получим:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{E} + \frac{\sigma^*}{\eta} t \quad (20.6)$$

При  $t = 0$  это в точности закон Гука.

2) Рассмотрим релаксацию,  $\varepsilon(t) = \varepsilon^* = const$ . Тогда:

$$\sigma(t) = E\varepsilon^* e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (20.7)$$

С помощью таких представлений можно подробно исследовать поведение материала при процессе ползучести и релаксации.

Пусть теперь пружина и поршень соединены параллельно, тогда:

$$\varepsilon_u = \varepsilon(v) = \varepsilon; \sigma = \sigma_u + \sigma_v = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (20.8)$$

Деформации и напряжения примут вид:

$$\begin{cases} \sigma(t) = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \\ \varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \end{cases}$$

Эта модель, называемая моделью Фойхта, не особо нам интересна, так как во время деформаций не улавливает ни процесс ползучести, ни процесс релаксации.

## Модель Кельвина

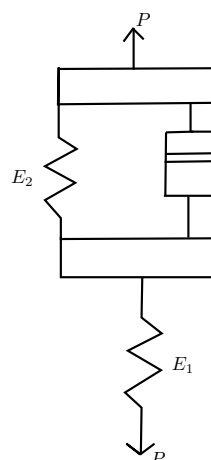


Рисунок 20.5

Немного преобразуем модель Фойхта, добавив снизу еще одну пружину (рисунок 20.5), тогда выражения для деформаций и напряжений примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_u + \varepsilon_\phi = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \\ \sigma(t) = E_1 \varepsilon - \frac{E_1^2}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases}$$

Можно переписать предыдущие выражения с помощью ядер релаксации и ползучести:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \int_0^t k(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \\ \sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases}$$

Ядро ползучести представляется в виде:

$$k(t, \tau) = \frac{\delta(t-\tau)}{E} + \tilde{k}(t, \tau) \quad (20.9)$$

где  $\tilde{k}(t, \tau) = -\frac{d\Pi(t, \tau)}{d\tau}$ ,  $\Pi(t, \tau) = \frac{1}{E}$ ,  $\Pi(t, 0) = 0$ . Подставим это в соотношение для деформаций и получим:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} - \int_0^t \frac{d\Pi(t, \tau)}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau \quad (20.10)$$

Можно проинтегрировать по частям, тогда:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} - \Pi(t, \tau) \sigma(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t \Pi(t, \tau) d\sigma(\tau) = \int_0^t \Pi(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (20.11)$$

Проводя аналогичные рассуждения для напряжений получим:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (20.12)$$

$R$  - функция релаксации,  $\Pi$  - функция ползучести.

В реальных задачах используются соотношения, когда ядра ползучести и релаксации разностного типа, то есть:

$$\begin{cases} \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \\ \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) \end{cases}$$

Учитывая, что  $\sigma = h(\tau) \sigma^* h(t-\tau)$ , получим:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) \delta(t) \sigma^* d\tau = \Pi(t) \sigma^* \quad (20.13)$$

То есть можно провести эксперимент и вычислить функцию ползучести, после чего находятся все остальные параметры.

## Постановка задачи теории вязкой упругости

Запишем соотношения для напряжений и деформаций:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \int_0^t R_{ijkl}(x, t, \tau) d\varepsilon_{kl}(x, \tau) \\ \varepsilon_{ij} = \int_0^t \Pi_{ijkl}(x, t, \tau) d\sigma_{kl}(x, \tau) \end{cases}$$

Эти соотношения в совокупности с уравнением равновесия, начальными и граничными условиями, дают полную постановку динамической задачи теории вязкой упругости:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \\ \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn} u_{m,n} \\ u_i(x, 0) = f_i(x); \dot{u}_i(x, 0) = g_i(x) \\ u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0(y, t); \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_p} = P_i^0(y, t) \end{cases}$$

## Лекция 21

### Определяющие соотношения теории вязкой упругости

Мы уже получили соотношения для напряжений и деформаций через функции ползучести и релаксации:

$$\begin{cases} \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \\ \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) \end{cases}$$

Перепишем покомпонатно выражение для деформаций:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (21.1)$$

С другой стороны:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \end{cases}$$

Тогда можно найти связь между девиаторами и функциями ползучести и релаксации:

$$\begin{cases} S_{ij} = \int_0^t R(t - \tau) de_{ij}(\tau) \\ \sigma = \int_0^t R_1(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \end{cases}$$

С другой стороны:

$$\begin{cases} e_{ij} = \int_0^t \Pi(t - \tau) dS_{ij}(\tau) \\ \varepsilon = \int_0^t \Pi_1(t - \tau) d\sigma(\tau) \end{cases}$$

### Преобразование Лапласа-Карсона

Пусть у нас имеется функция  $\phi$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) Непрерывность, то есть  $\forall t \in [0; \infty) \exists \phi(t)$
- 2) Ограниченность,  $\forall t \in [0; \infty) \exists M = \text{const}: |\phi(t)| < M e^{S_0 t}$

Тогда преобразованная функция примет вид:

$$\phi^*(P) = L(\phi(t)) = P \int_0^\infty e^{-Pt} \phi(t) dt \quad (21.2)$$

Соотношение (21.2) можно представить как:

$$L\left(\int_0^t \phi(t - \tau) d\psi(\tau)\right) = \phi^*(P) \psi^*(P); \quad \psi(0) = 0 \quad (21.3)$$

Найдем выражение для преобразования первой и второй производной функции  $\phi$ :

$$\begin{cases} L(\dot{\phi}) = P(\phi^* - \phi(0)) \\ L(\ddot{\phi}) = P[P(\phi^* - \phi(0)) - \dot{\phi}(0)] \end{cases}$$

После преобразования получим статическую задачу, а преобразованная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^* + X_i^* = \rho P[P(u_i^* - f_i) - g_i] \\ \sigma_{ij}^* = R_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^* \\ \varepsilon_{ij}^* = \Delta_{ijkl} u_{k,l}^* \\ u_i^*|_{\Sigma_u} = u_i^{*0}(y); \sigma_{ij}^* n_j|_{\Sigma_p} = P_i^{*0} \end{cases}$$

## Метод аппроксимации Ильюшина

Для решения задач вязкоупругой теории используется метод аппроксимации Ильюшина. Для начала рассматривается статическая задача с определяющими соотношениями:

$$\begin{cases} S_{ij} = \int_0^t R(t - \tau) de_{ij}(\tau) \\ \sigma = K\varepsilon \end{cases}$$

Представим выражение для девиатора напряжений как:  $S_{ij} = 2\mu e_{ij}$ . Получим задачу теории упругости, для которой можно найти аналитическое решение. Для получения решения вязкоупругой задачи установим соотношения:

$$2\mu \rightarrow R^*; \quad \frac{1}{2\mu} \rightarrow \Pi^*; \quad S_{ij} \rightarrow S_{ij}^* \quad (21.4)$$

где  $R^*$ ,  $\Pi^*$ ,  $S_{ij}^*$  - преобразованные функции. Введем параметр  $\omega^*$  и выпишем соотношения между ним и основными параметрами, определяющими задачу:

$$\begin{cases} \frac{R^*}{3K} = \omega^*; \quad \frac{1}{\omega^*} = 3K\Pi^* \\ \omega = \frac{2\mu}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \implies \nu = \frac{1-\omega}{2+\omega} \\ 2\mu = 3K\omega; \quad E = 9K\frac{\omega}{2+\omega}; \quad \lambda = K(1 - \omega) \end{cases}$$

В зависимости от задачи, можно написать различные соотношения, или составлять линейные комбинации с ними.

Остается найти изображение функции  $F(r, \omega)$ , где  $r$  - различные геометрические параметры, определенные в данной задаче. Зачастую, найти изображение такой функции невозможно, поэтому ее можно аппроксимировать в таком виде:

$$F(r, \omega) \approx F^{(0)}(r) + \omega F^{(1)}(r) + \frac{1}{\omega} F^{(2)}(r) \quad (21.5)$$

С помощью метода конечных элементов легко найти изображения каждой из функций, после чего получить решение исходной задачи.



## Механика композитов

Композитами называются тела, составленные из различных по свойствам материалов. Композиты бывают трех видов:

- 1) Дисперсно-армированные композиты (бетон)
- 2) Линейно-армированные композиты (шина)
- 3) Слоистые композиты (дерево)

Одной из самых распространенных задач механики композитов является определение эффективных свойств материала. Эффективными свойствами называются усредненные по объему или части поверхности характеристики тела. Будем решать задачу без внешних нагрузок. Для этого запишем систему уравнений учитывая, что определяющие соотношения теперь зависят от координат, а уравнения равновесия остаются неизменными. Поэтому система примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \\ \sigma_{ij} = \tilde{F}_{ij}(x, \tilde{\varepsilon}) \\ u_i|_{\Sigma_u} = \gamma_{ij}y_j; \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \end{cases}$$

Найдем зависимость между средними деформациями и напряжениями. Для этого покажем, что осредненная деформация композита не зависит от определяющих соотношений:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \int_V u_{k,l} dV \quad (21.6)$$

По теореме Гаусса-Остроградского можно перейти к поверхностному интегралу:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \int_{\Sigma} u_k n_l d\Sigma = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \gamma_{km} \int_{\Sigma} y_m n_l d\Sigma \quad (21.7)$$

Вернемся обратно к интегралу по объему:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \gamma_{km} \int_V x_{m,l} dV = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \gamma_{km} \delta_{ml} V = \Delta_{ijkl} \gamma_{kl} = \gamma_{ij} \quad (21.8)$$

То есть  $\langle \varepsilon \rangle = \gamma_{ij}$ . Подставим полученный результат в определяющее соотношение и найдем средние деформации:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \tilde{F}_{ij}(x, \tilde{\gamma}) \rangle = \langle \tilde{F}_{ij}(x, \langle \varepsilon_{ij} \rangle) \rangle \quad (21.9)$$

Получили зависимость между  $\langle \sigma \rangle$  и  $\langle \varepsilon \rangle$ , которая называется эффективным определяющим соотношением.

## Лекция 22

### Первая специальная краевая задача

Пусть у нас заданы граничные условия в виде:

$$u_i|_{\Sigma} = \gamma_{ij}y_j; \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad (22.1)$$

Внешние нагрузки отсутствуют, поэтому система уравнений будет выглядеть как:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \\ \sigma_{ij} = \tilde{F}_{ij}(x, \tilde{\varepsilon}) \end{cases}$$

Мы уже выводили, что при такой постановке задачи  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \gamma_{ij}$ . Тогда  $\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \tilde{F}_{ij}(x, \tilde{\gamma}) \rangle = \langle \tilde{F}_{ij}(x, \langle \varepsilon_{ij} \rangle) \rangle \equiv \tilde{h}_{ij}(\tilde{\gamma}) = \tilde{h}_{ij}(\langle \varepsilon \rangle)$ .

### Вторая специальная краевая задача

Рассмотрим случай, когда граничные условия записаны как:

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma} = \lambda_{ij}n_j; \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad (22.2)$$

Найдем зависимость между  $\langle \tilde{\sigma} \rangle$  и  $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle$ . Для этого покажем, что  $\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ij}$ . Домножим уравнение равновесия на  $x_k$ :

$$0 = \int_V x_k \sigma_{ij,j} dV = \int_V [(x_k \sigma_{ij})_{,j} - x_{k,j} \sigma_{ij}] dV = \int_V (x_k \sigma_{ij})_{,j} dV - \int_V x_{k,j} \sigma_{ij} dV \quad (22.3)$$

В первом интеграле перейдем к поверхностному по теореме Гаусса-Остроградского:

$$0 = \int_{\Sigma} y_k \sigma_{ij} n_j d\Sigma - \int_V \sigma_{ik} dV = \lambda_{ij} \int_{\Sigma} y_k n_j d\Sigma - V \langle \sigma_{ik} \rangle \quad (22.4)$$

Вернемся к интегралу по объему:

$$0 = \lambda_{ij} \delta_{kj} V - V \langle \sigma_{ik} \rangle = V(\lambda_{ik} - \langle \sigma_{ik} \rangle) \implies \langle \sigma_{ik} \rangle = \lambda_{ik} \quad (22.5)$$

Тогда осредняя по объему получим, что:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \tilde{\Phi}_{ij}(x, \tilde{\sigma}(x, \tilde{\lambda})) \rangle = \tilde{H}_{ij}(\tilde{\lambda}) = \tilde{H}_{ij}(\langle \tilde{\sigma} \rangle) \quad (22.6)$$

## Случай неоднородного анизотропного упругого тела

Рассмотрим первую краевую задачу, тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \Delta_{ijkl}u_{k,l} \\ u_i|_{\Sigma} = \gamma_{ij}y_j \end{cases}$$

Которая сводится к одному уравнения с граничным условием:

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} = 0 \quad (22.7)$$

Если тело было бы однородным, то решение представлялось как:  $u_i = \gamma_{ij}x_j$ . Но мы работаем с неоднородным случаем, поэтому в решение добавится дополнительное слагаемое, и перемещения приняты бы вид:

$$u_i = \gamma_{ij}x_j + u_i(x, \tilde{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl} \quad (22.8)$$

Рассмотрим свойства функций  $N_{ikl}$ :

- 1) Если тело однородное, тогда  $N_{ikl} \equiv 0$
- 2)  $N_{ikl} = N_{ilk}$  (из-за симметричности  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ )
- 3)  $N_{ikl}$  - непрерывные функции (из-за непрерывности перемещения)
- 4)  $N_{ikl}|_{\Sigma} = 0$  (следует из граничных условий)

Тензор деформаций в новых обозначениях примет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \Delta_{ijmn}u_{m,n} = \Delta_{ijmn}(\gamma_{mn} + N_{mkl,n}\gamma_{kl}) = \gamma_{kl}(\Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n}) = B_{ijkl}(x)\gamma_{kl} \quad (22.9)$$

$B_{ijkl} = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n}$  - тензор концентрации деформаций.

Найдем напряжения:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} = (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl} \quad (22.10)$$

Учитывая новые граничные условия и подставляя выражение для напряжений в уравнение равновесия, получим новую систему уравнений, которая определяет решение исходной задачи:

$$\begin{cases} (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0 \\ N_{mkl}|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

## Случай с неоднородным по толщине слоем

Пусть у композита имеется дополнительный слой, свойства которого зависят только от толщины (координаты  $x_3$ ), то есть:  $0 \leq x_3 \leq L$ ,  $0 \leq x_1, x_2 < +\infty$ . Тогда предыдущая система переписывается в виде:

$$\begin{cases} (C_{i3kl} + C_{i3m3} + N'_{mkl})' = 0 \\ N_{mkl}(0) = N_{mkl}(L) = 0 \end{cases}$$

Решая уравнения получим:

$$N'_{mkl} = C_{m3n3}^{-1}(K_{nkl} - C_{n3kl}) \quad (22.11)$$

$K$  - константа интегрирования, которую можно найти с помощью граничных условий. Получим:

$$\langle C_{m3n3}^{-1} \rangle K_{nkl} - \langle C_{m3n3}^{-1} C_{n3kl} \rangle = 0 \implies K_{nkl} = \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle \quad (22.12)$$

Тогда уравнение (22.11) можно представить как:

$$N'_{mkl}(x_3) = C_{m3n3}^{-1}(x_3) \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle - C_{m3n3}^{-1}(x_3) C_{n3kl}(x_3) \quad (22.13)$$

Интегрируя по толщине слоя от 0 до  $L$ , найдем функции  $N_{mkl}$ , причем вторая константа интегрирования равна нулю.

Из этих соотношений можно найти эффективный коэффициент, который примет вид:  $h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} + C_{ijm3} N'_{mkl} \rangle = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \rangle \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle - \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} C_{n3kl} \rangle$ . Можно найти обратную функцию:  $h_{ijkl}^{-1} = \langle I_{ijkl} \rangle + \langle I_{ijMN} I_{MNPQ}^{-1} \rangle \langle I_{PQRD}^{-1} \rangle^{-1} \langle I_{RDAB}^{-1} I_{ABKL} \rangle - \langle I_{ijKL} I_{KLMN}^{-1} I_{MNkl} \rangle$ , где  $I_{ijkl}$  - тензор податливости.

## Лекция 23

### Метод малого геометрического параметра

Метод малого геометрического параметра используется для решения задач композиционными материалами и применим только в случае выполнения условия:  $\alpha = \frac{l}{L} \ll 1$ , где  $l$  - размер ячейки периодичности,  $L$  - размер всего тела. Рассмотрим одномерную задачу о растяжении стержня, тогда система уравнений запишется как:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[E(x)\frac{du}{dx}] + X(x) = 0 \\ u(0) = U; E(L)\frac{du}{dx}|_{x=L} = P \end{cases}$$

Можно сразу записать формулу точного решения:  $u(x) = \int_0^x [P + \int_L^y X(z)dz] \frac{dy}{E(y)} + U$ .

Пусть стержень периодически неоднородный, то есть  $E(x + ml) = E(x)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ . Распишем подробнее это выражение:

$$x + ml = l\left(\frac{x}{l} + m\right) = l\left(\left[\frac{x}{l}\right] + \left\{\frac{x}{l}\right\} + m\right) = l(\xi + k + m) \quad (23.1)$$

здесь  $\left[\frac{x}{l}\right] \equiv k$  - целая часть числа,  $\left\{\frac{x}{l}\right\} \equiv \xi$  - дробная часть числа. Тогда:

$$x + ml = l\xi + l(k + m) \implies E(x + ml) = E(l\xi + l(k + m)) = E(l\xi) = E \quad (23.2)$$

Подставим малый параметр  $\alpha$ :

$$x = l\xi + lk \implies \frac{x}{L} = \frac{l}{L}\xi + \frac{l}{L}k = \alpha(\xi + k) \quad (23.3)$$

Введем новые обозначения:

$$\xi = \frac{1}{\alpha}\bar{x} - k \quad (23.4)$$

где  $\bar{x} = \frac{x}{L}$  - безразмерная координата. Подставляя ее в исходные уравнения получим безразмерную задачу:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[E(\xi)\frac{du}{dx}] + X(x) = 0; 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = U; E(1)\frac{du}{dx}|_{x=L} = P \end{cases}$$

Введем функцию  $f(\xi) = \frac{1}{\alpha}\bar{x} - k$  и продифференцируем ее:

$$\frac{df}{d\bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} = f' \frac{1}{\alpha} \quad (23.5)$$

Теперь можно продифференцировать безразмерное уравнение равновесия:

$$E(\xi)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dE(\xi)}{dx} \frac{du}{dx} + X(x) = E(\xi)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\dot{E}(\xi)}{\alpha} \frac{du}{dx} + X(x) = 0 \quad (23.6)$$

Попробуем разложить решение в ряд по степеням малого параметра:

$$u(x) = v(x) + \alpha N_1(\xi)v' + \alpha^2 N_2(\xi)v'' + \dots + \alpha^q N_q(\xi)v^{(q)} + \dots = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q N_q(\xi)v^{(q)}(x) \quad (23.7)$$

Свойства функций  $N_q$ :

- 1)  $N_q(\xi)$  - непрерывные периодические функции
- 2)  $N_0 \equiv 1$
- 3)  $N_q \equiv 0$  при  $q < 0$

Подставим полученный ряд в уравнение и найдем деформации:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^{q-1} \dot{N}_q v^{(q)} + \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q N_q v^{(q+1)} = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} (\dot{N}_q + N_{q-1}) v^{(q)} \quad (23.8)$$

С помощью закона Гука найдем напряжения:

$$\sigma(x) = E(\xi)\varepsilon(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} E(\xi) (\dot{N}_q(\xi) + N_{q-1}(\xi)) v^{(q)} \quad (23.9)$$

Подставляя все в уравнение равновесия получим:

$$\frac{1}{\alpha} [E(\dot{N}_1 + 1)]' + \sum_{q=2}^{\infty} \alpha^{q-2} \{ [E(\dot{N}_q + N_{q-1})]' + E(\dot{N}_{q-1} + N_{q-2}) \} v^{(q)} + X = 0 \quad (23.10)$$

Откуда получаем:  $[E(\dot{N}_q + N_{q-1})]' + E(\dot{N}_{q-1} + N_{q-2}) = h_{q-2} = const$ . Пусть:

$$h_{q-2} = \langle E(\dot{N}_{q-1} + N_{q-2}) \rangle = \int_0^1 E(\xi) (\dot{N}_{q-1}(\xi) + N_{q-2}(\xi)) d\xi \quad (23.11)$$

Это уравнение решается с точностью до двух констант. Первая константа ищется из того условия, что  $N_q(\xi)$  - непрерывная и периодическая функция  $\implies \langle \dot{N}_q(\xi) \rangle = 0$ . Вторая находится из соотношения:  $\langle N_q \rangle = 0$ . Тогда:

$$N_1(\xi) = \int_0^\xi \left( \frac{1}{E(\eta) \langle \frac{1}{E} \rangle} - 1 \right) d\eta - \langle \int_0^\xi \left( \frac{1}{E(\eta) \langle \frac{1}{E} \rangle} - 1 \right) d\xi \rangle \quad (23.12)$$

Из уравнения (23.11) можно найти  $h_0 = \langle E(\dot{N}_1 + 1) \rangle = \frac{1}{\langle \frac{1}{E} \rangle}$ . Подставляя это в соотношение (23.12) легко находится  $N_1$ . Зная  $h_0$  и  $N_1$  можно вычислить функцию  $N_2$  и так далее. Получим рекуррентную последовательность, из которой легко отыскивается любая интересующая нас функция.

С другой стороны, так как входит малый параметр, можно решать уравнение в виде:

$$v(x) = \sum_{n=0}^{-\infty} \alpha^n \omega_n(x) \quad (23.13)$$

Подставим это в уравнение равновесия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [h_0 \omega_n'' + \sum_{q=1}^n h_q \omega_{n-q}^{(q+2)}] + X = 0 \quad (23.14)$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих компонентах получим систему:

$$\begin{cases} h_0 \omega_0'' + X = 0 \\ h_0 \omega_n'' + X_n = 0 \end{cases}$$

А граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [\omega_n + \sum_{q=1}^n N_q(\xi) \omega_{n-q}^{(q)}] \\ \varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [(\dot{N}_1 + 1) \omega_n' + \sum_{q=1}^{\infty} (\dot{N}_q + N_{q-1}) \omega_{n-q}^{(q+1)}] \end{cases}$$

## Лекция 24

### Постановка трехмерной задачи

Будем рассматривать смешанную краевую задачу. Выпишем для нее уравнения:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\xi)\varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn}u_{m,n} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \\ u_i|_{\Sigma_u} = U_i; \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_p} = P_i \end{cases}$$

На прошлой лекции мы получили соотношение:  $\xi_i = \frac{1}{\alpha}\bar{x}_i - k_i$ , из которого следует решение:

$$u_i = v_i + \sum_{q=1}^{\infty} N_{(q)iki_1\dots i_q}(\xi)v_{k,i_1\dots i_q}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q N_{(q)iki_1\dots i_q}(\xi)v_{k,i_1\dots i_q}(x) \quad (24.1)$$

Тогда деформации примут вид:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{q=1}^{\infty} B_{(q)ijk_i_1\dots i_q}(\xi)v_{k,i_1\dots i_q} \quad (24.2)$$

где  $B_{(q)ijk_i_1\dots i_q} = \Delta_{ijmn}N_{mki_1\dots i_q|n} + \Delta_{ijmi_q}N_{(q-1)mki_1\dots i_{q-1}}(\xi)$  при  $q > 0$ . Ищем теперь напряжения и подставим их в уравнение равновесия:

$$\frac{1}{\alpha}C_{(1)ijk_i_1|j}v_{k,i_1} + \sum_{q=2}^{\infty} \alpha^{q-2}[\tilde{C}_{(q)ijk_i_1\dots i_q|j} + \tilde{C}_{(q-1)ii_qki_1\dots i_{q-1}}]v_{k,i_1\dots i_q} + X_i = 0 \quad (24.3)$$

здесь  $\tilde{C}_{(q)ijk_i_1\dots i_q}(\xi) = C_{ijst}(\xi)B_{stki_1\dots i_q}$ . Для решение данного дифференциального уравнения бесконечного порядка заменим второе слагаемое на константы:  $[\tilde{C}_{(q)ijk_i_1\dots i_q|j} + \tilde{C}_{(q-1)ii_qki_1\dots i_{q-1}}] = h_{(q-2)ii_qki_1\dots i_{q-1}} = \text{const}$ , а первое приравняем нулю. Получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$C_{(1)ijk_i_1|j} = 0 \implies (C_{ijmn}N_{(1)mki_1|n} + C_{ijk_i_1})_{,j} = 0 \quad (24.4)$$

Два граничных условия вида:

$$\begin{cases} \langle N_{mki_1|n} \rangle_{\Omega} = 0 \\ \langle N_{mki_1} \rangle = 0 \end{cases}$$

позволяют однозначно решить дифференциальное уравнение.



## Случай неоднородного материала со специальными процессами

Пусть в материале происходят процессы, описываемые дифференциальными уравнениями. Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$L(u) + X = 0 \quad (24.5)$$

где  $L(\cdot) = [C_{ij}(x)(\cdot)_{,j}]_{,i}$  - некоторый оператор. Поэтому можно переписать уравнение в векторном виде:

$$[\tilde{C}_{ij} \vec{u}_{,j}]_{,i} + \vec{X} = 0 \quad (24.6)$$

Функцию  $\tilde{C}_{ij}$  можно представить в виде матрицы:

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} C_{i11j} & C_{i12j} & C_{i13j} \\ C_{i21j} & C_{i22j} & C_{i23j} \\ C_{i31j} & C_{i32j} & C_{i33j} \end{pmatrix}$$

Для решения такой задачи рассмотрим аналогичную ситуацию в однородном теле, то есть система примет вид:

$$\begin{cases} L^0(v) + X^0 = 0 \\ v|_{\Sigma_u} = U \\ C_{ij}^0 v_{,j} n_i|_{\Sigma_p} = P \end{cases}$$

Можно преобразовать уравнения с помощью функции Грина:

$$\begin{cases} [C_{ij}(x)G_{,j}(x, \xi)]_{,i} + \delta(x - \xi) = 0 \\ G|_{x \in \Sigma_u} = 0 \\ C_{ij}G_{,j}n_i|_{x=y \in \Sigma_p} = \delta(y - \xi) \end{cases}$$

Решение такой задачи будет иметь вид:

$$u(x) = v(x) + \int_V \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_j} \tilde{C}_{ij}(\xi) v_{|i}(\xi) dV_\xi \quad (24.7)$$

$v$  - решение сопутствующей задачи. Применим оператор  $L$  к данному выражению учитывая, что  $L(G(x, \xi)) = \delta(x - \xi)$ :

$$L(u) = L(v) + \int_V \frac{\partial}{\partial \xi_j} [L(G(x, \xi))] \tilde{C}_{ij}(\xi) v_{|i}(\xi) d\xi = L(v) + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \delta(x - \xi) \tilde{C}_{ij}(\xi) v_{|j} dV_\xi \quad (24.8)$$

Окончательно получим:

$$L(u) = L(v) + [\tilde{C}_{ij}(x)v_{,j}]_{,i} = L(v) + L^0(v) - L(v) = L^0(v) \implies L^0(v) + X = 0 \quad (24.9)$$

Следовательно выражение (24.7) является истинным решением задачи.

Предположим, что  $v$  - гладкая функция, поэтому ее можно разложить в ряд Тейлора. Это разложение будет иметь вид:

$$v(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{(n)i_1 \dots i_n}(\xi, x) v_{i_1 \dots i_n}(x); \quad \Pi_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 1 \\ \frac{1}{n!} (x_{i_1} - \xi_{i_1}) \dots (x_{i_n} - \xi_{i_n}), & n > 1 \end{cases}$$

Пусть  $N_{(n)i_1 \dots i_n}(x) = \delta_{n0} + \int_V G_{,i}(x, \xi) \tilde{C}_{ii_1}(\xi) \Pi_{i_1 \dots i_q}(\xi, x)$ . Тогда решение исходной задачи можно представить в виде:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{(n)i_1 \dots i_q}(x) v_{i_1 \dots i_q}(x) \quad (24.10)$$

Подставляем это в уравнение равновесия:  $\sum_{n=0}^{\infty} \{ [C_{ij} N_{(n)i_1 \dots i_q, j} + C_{ii_q} N_{(n-1)i_1 \dots i_{q-1}], i + C_{i_n j} N_{(n-1)i_1 \dots i_{n-1}} + C_{i_n i_{n-1}} N_{(n-2)i_1 \dots i_{n-2}} \} v_{i_1 \dots i_q} + X = 0$ . Это дифференциальное уравнение бесконечного порядка, которое решается путем приравнивания соответствующих коэффициентов с уравнением для однородного случая, которое имеет вид:  $C_{i_2 i_1}^0 v_{i_1 i_2}^0 + X = 0$ . Коэффициенты у всех членов, кроме второй производной, равны нулю, поэтому мы получаем рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} (C_{ij} N_{(1)i_1, j} + C_{ii_1}), i = 0 \\ [C_{ij} N_{(2)i_1 i_2, j} + C_{ii_2} N_{(1)i_1}], i + C_{i_2 j} N_{(1)i_1, j} + C_{i_2 i_1} = C_{i_1 i_2}^0 \end{cases}$$



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ