МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ЧАСТЬ 2

ДОМРИН
АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение. Примеры

Определение 1.1. Пусть области $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{C}$, функции f_1 и f_2 голоморфны в областях D_1 и D_2 соответственно и $f_1 = f_2$ на D_1. Тогда f_2 называется *аналитическим продолжением* f_1 с D_1 на D_2.

Пример 1.1. Пусть $D_1 = \{|z| < 1\}$, а

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Функцию $f_1(z)$ можно продолжить на $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Замечание 1.1. По теореме единственности, при данных D_1, f_1 и D_2, существует не более одной функции f_2 такой, что $f_2 = f_1$ на D_1.

В вещественном анализе это не так. Гладкая функция может иметь более, чем одно продолжение на больший отрезок.

Пример 1.2. Вспомним теорему Римана об устранимой особенности.

Пусть

$$D_1 = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}, \quad D_2 = \{|z-a| < \varepsilon\},$$

а $f_1 \in \mathcal{O}(D_1)$ ограничена. Тогда $\exists\ f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$ такая, что

$$f_1 = f_2, \quad \text{на } D_2.$$

Бывает, что вместо D_1 исходная функция f_0 задана на интервале или луче $I \subset \mathbb{R}$:

$$f_0 : \ I \to \mathbb{C} \text{ или } (\mathbb{R}).$$

Ищется область $D_2 \supset I$ и функция $f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$ такая, что

$$f_2 = f_0 \text{ на } I.$$

По теореме единственности, при заданных I, f_0, D_2 таких функций f_2 не более одной.

Пример 1.3. Пусть

$$I = (0, +\infty) \subset \mathbb{R},$$

$$f_0(x) = \ln x.$$

Например, сначала продолжим f_0 с I на

$$D_1 = \{\mathrm{Re} z > 0\}$$

по формуле

$$f_1(z) = \ln|z| + \arg z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Хотелось бы найти большую область, на которую можно продолжить f_0. Для $\forall$ $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ $\exists$ $f_2^\alpha \in \mathcal{O}(D_2^\alpha)$, где (рис. 1.1)

$$D_2^\alpha = \{z \in \mathcal{C} : \ \alpha - 2\pi < \arg z < \alpha\},$$

такая, что

$$f_2^\alpha = f_1 \text{ на } D_1 \subset D_2^\alpha.$$

А именно,

$$f_2^\alpha(z) = \ln|z| + i\arg z, \quad \alpha - 2\pi < \arg z < 2\pi.$$

Итак, не $\exists$ аналитического продолжения (D_2, f_2) пары (D_1, f_1), которое содержало бы все остальные аналитические продолжения этой пары.

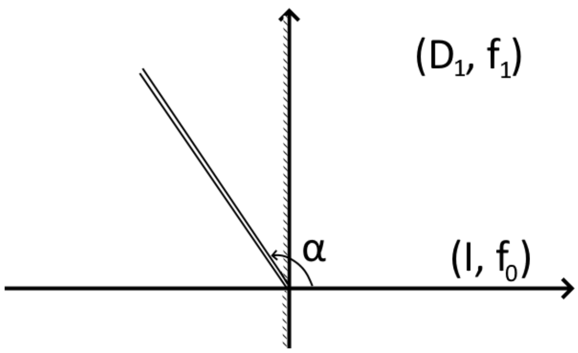

Рис. 1.1. Области АП $f_0 = \ln x$.

Два аспекта задач аналитического продолжения

- (min) Найти хотя бы одно аналитическое продолжение (D_2, f_2) данной пары (D_1, f_1) (или (I, f_0)).
- (max) Описать возникающую в результате всех возможных продолжений «многозначную функцию».

Голоморфная зависимость интеграла от параметра

Теорема 1.1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, а*

$$\varphi : \ [a, b] \times D \to \mathbb{C}$$

– непрерывная функция такая[1]*, что $\varphi(t, \cdot) \in \mathcal{O}(D)$ при $\forall$ $t \in [a, b]$. Тогда функция*

$$f(z) := \int_a^b \varphi(t, z)dt$$

[1]Напомним, что обозначение $\varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$ означает голоморфность $\varphi(z)$ на D.

тоже $\in \mathcal{O}(D)$.

Доказательство. Для любого открытого круга $U \subset D$ функция f непрерывна на U (в силу равномерной непрерывности φ на $[a,b]\times K$ для $\forall$ компакта $K \subset U$).

Для $\forall$ открытого треугольника[2] $T \subset\subset U$ имеем

$$\int\limits_{\partial T} f(z)dz = \int\limits_{\partial T}\int\limits_a^b \varphi(t,z)dtdz.$$

По теореме Фубини из курса математического анализа,

$$\int\limits_{\partial T}\int\limits_a^b \varphi(t,z)dtdz = \int\limits_a^b\int\limits_{\partial T} \varphi(t,z)dzdt = \int\limits_a^b 0dt = 0$$

по лемме Гаусса (или теореме Коши).

Следовательно, $f \in \mathcal{O}(U)$ по теореме Морера. В силу произвольности $U \subset D$, $f \in \mathcal{O}(D)$. □

Гамма-функция Эйлера

По определению,

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall\ x > 0.$$

Утверждение 1.1. *При* $z = x + iy$, $x > 0$, *интеграл*

$$f_1(z) := \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

сходится к $f_1 \in \mathcal{O}(D_1)$, *где*

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}:\ Rez > 0\}. \tag{1}$$

Доказательство. Справедливо представление

$$f_1(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

где

$$\varphi(z) := \int\limits_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \psi(z) := \int\limits_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

По определению,

$$t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t}, \quad t > 0, \quad z \in \mathcal{C}.$$

[2]Запись $T \subset\subset U$ означает компактное включение, то есть замыкание T лежит в U.

Из того, что
$$|e^A| = e^{\mathrm{Re} A}, \quad A \in \mathcal{C},$$
следует, что
$$|t^{z-1}| = e^{(x-1)\ln t} = t^{x-1},$$
где $x = \mathrm{Re} z$.

Поэтому для
$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(z),$$
где
$$\psi_n(z) := \int\limits_1^n e^{-t} t^{z-1} dt,$$
верно, что $\psi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ в силу теоремы 1.1.

Кроме того,
$$\psi_n \to \psi$$
равномерно на компакте в $\mathbb{C}$. Это следует из того, что
$$|\psi_n(z) - \psi(z)| = \left| \int\limits_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \le \int\limits_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dx,$$
откуда
$$\max_{z\in K} |\psi_n(z) - \psi(z)| \le \int\limits_n^\infty e^{-t} t^{M-1} dt \ \to\ 0, \quad n \ \to\ \infty,$$
где
$$M = \max_{z\in K} (\mathrm{Re} z)\,.$$
Тогда по теореме Вейерштрасса о рядах $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Аналогично показывается, что $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{Re} z > 0)$, поскольку
$$\underbrace{\int\limits_{1/n}^1 e^{-t} t^{-z} dt}_{\in \mathcal{O}(\mathrm{Re} z > 0)} \ \to\ \int\limits_0^1 e^{-t} t^{-z} dt$$
равномерно на компакте в $\{\mathrm{Re} z > 0\}$. □

Утверждение 1.2. $\exists$ *единственная* $F \in \mathcal{O} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *такая, что*
$$F(z) = \Gamma(z), \quad \forall\, z \in D_1,$$
или, эквивалетно,
$$F(x) = \Gamma(x), \quad \forall\, x \in I = (0, +\infty).$$

При этом[3] $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ *имеет при* $z = n$, $n \in \{0, -1, -2, \ldots\}$, *полюс* 1*-го порядка с вычетом*

$$\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Доказательство. Разложив в ряд e^{-t}, получим, что

$$\varphi(z) = \int\limits_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \int\limits_0^1 t^{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+2-1}}{n!}dt = S_1, \qquad (2)$$

поскольку при $\mathrm{Re}z > 1$ все члены ряда непрерывны на $[0,1]$ и ряд сходится равномерно на $[0,1]$ (по теореме Вейерштрасса). Более того, если $\mathrm{Re}z > 1$ (а не просто $\mathrm{Re}z > 0$), то

$$\int\limits_0^1 t^{n+z-1}dt = \frac{1}{n+z}$$

по формуле Ньютона – Лейбница. Тогда сумма (2) равна

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}, \quad \mathrm{Re}z > 1. \qquad (3)$$

Ряд (2) сходится равномерно на $\forall$ компакте $K \subset \mathbb{C}$, если отбросить те его члены (их конечное число), которые имеют полюсы на K (рис. 1.2), так как

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\right| \le \frac{1}{n!d}, \quad \forall\ z \in K,$$

где

$$d = \mathrm{dist}\left(\mathbb{Z} \setminus \{\text{полюса из } K\}, K\right).$$

Следовательно, функция

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

– мероморфная на всей плоскости функция с полюсами и вычетами, как обозначенными в утверждении. Тогда функция

$$F(z) := g(z) + \psi(z)$$

является искомой функцией. $\square$

Замечание 1.2. Утверждение 1.2 позволяет расширить продолжение $\Gamma(z)$ с D_1 (1) на D_2 (рис. 1.2).

[3]Напомним, что запись

$$f \in \mathcal{M}(D)$$

означает, что $f(z)$ является мероморфной в области D.

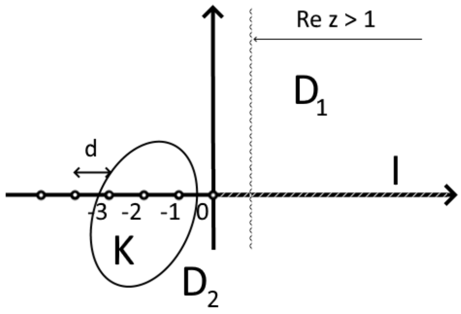

Рис. 1.2. Области в АП $\Gamma(z)$

Формула дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$

Утверждение 1.3. *Справедлива формула*[4,5]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме единственности, достаточно доказать (4) для всех $z = \alpha \in (0,1)$. В определении

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

сделаем замену

$$t = 2^s, \quad dt = 2sds.$$

Получим

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty s^{2\alpha-2} e^{-s^2} 2sds = 2\int\limits_0^\infty x^{2\alpha-1} e^{-x^2} dx.$$

Аналогично,

$$\Gamma(1-\alpha) = 2\int\limits_0^\infty y^{2(1-\alpha)-1} e^{-y^2} dy.$$

Отсюда

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = 4\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^{2\alpha-1} y^{1-2\alpha} e^{-x^2+y^2} dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ dxdy = rdrd\theta. \end{cases}$$

[4] Здесь и далее функцию F из утверждения 1.2 будем обозначать $\Gamma(z)$ в силу единственности продолжения функции.

[5] Вообще говоря, при $z \in \mathbb{Z}$ обе части (4) обращаются в бесконечность, а значит, (4) остается справедливой. Будем, однако, рассматривать только конечный случай.

При этом область интегрирования $X \times Y = (0, \infty) \times (0, \infty)$ переходит в область $P \times \Theta = (0, \infty) \times (0, \pi/2)$. Получим

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\infty} r^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\alpha-1} r^{1-2\alpha}(\sin\theta)^{1-2\alpha} e^{-r^2} r dr d\theta =$$

$$= 2 \int\limits_0^{pi/2} (\operatorname{ctg}\theta)^{2\alpha-1} d\theta = I_1, \tag{5}$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} 2r dr = 1.$$

Вычислим интеграл (5). Для этого сделаем замену

$$x = (\operatorname{ctg}\theta)^2, \quad x^{1/2} = \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\frac{1}{2} x^{-1/2} dx = -\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = -(x+1)d\theta.$$

Отсюда

$$I_1 = 2 \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{x^{-1/2} dx}{x+1} \cdot x^{\alpha-1/2} = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{x+1}.$$

Такой интеграл вычисляется с помощью вычетов.

Положим область

$$D_{\varepsilon,R} := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R, \quad 0 < \arg z < 2\pi\}$$

и функцию

$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+1},$$

где

$$z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z},$$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Формально говоря, $D_{\varepsilon,R}$ не является областью с простой границей, но ее можно разбить на области D_1 и D_2 (рис. 1.3). Можно вычислить по границе D_1 и D_2 интегралы. При их суммировании интегралы по добавленным разрезам сократятся, поэтому теорему о вычетах можно применить и ко всей $D_{\varepsilon,R}$.

Итак, по теореме Коши о вычетах для D_1 и D_2

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}\{z = -1\} \cdot f(z) = \int_{\partial D_{\varepsilon,R}} f(z) dz =$$

$$= \int\limits_r^R \left(\frac{x^{\alpha-1}}{x+1} - \frac{e^{(\alpha-1)(\ln x + 2\pi i)}}{x+1} \right) dx + \int\limits_{\gamma_R} f(z) dz - \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz. \tag{6}$$

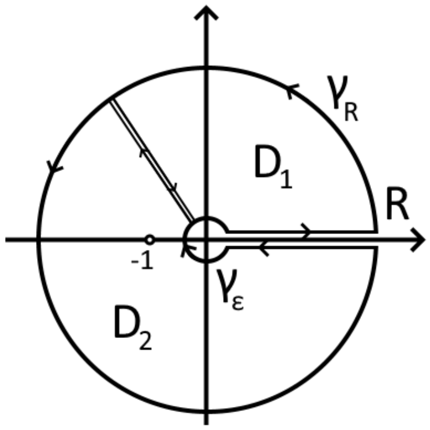

Рис. 1.3. Область $D_{\varepsilon,R}$

Так как по стандартной оценке

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\ldots\right| \le \max_{\gamma_R}|f(z)|2\pi R \le \frac{R^{\alpha-1}}{R-1}2\pi R \to 0, \quad R\to\infty,$$

так как $\alpha < 1$, и, аналогично,

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

так как $\alpha > 0$, два последних интеграла в (6) равны $o(1)$. Тогда

$$\int_{\partial D_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \left(1 - e^{(\alpha-1)2\pi i}\right)\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx + o(1), \quad \varepsilon\to 0, \quad R\to\infty,$$

откуда

$$2\pi i e^{(\alpha-1)\pi i} = \left(1 - e^{(\alpha-1)\pi i}\right)\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx.$$

С помощью несложных арифметических преобразований получим, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$$

Формула (4) доказана. □

Лекция 2. Дзета-функция Римана

Дзета-функция Римана. Аналитическое продолжение

Определение 2.1. Определим *дзета-функцию Римана*

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots, \quad x > 1. \tag{7}$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re} z}},$$

то (7) можно продолжить

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \in \mathcal{O}(\mathrm{Re} z > 1),$$

так как данный ряд сходится равномерно на компакте в $\{\mathrm{Re} z > 1\}$ по признаку Вейерштрасса.

Утверждение 2.1. *При всех $x \geq 2$ справедливо равенство*

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Доказательство. По определению,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int t^{x-1} e^{-nt} dt = \tag{8}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{x-1} e^{-nt} \right) dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} \frac{dt}{e^t - 1}.$$

Обсудим справедливость перехода[6] (8).

Разность d_N между правой частью (7) и N-й частичной суммой слева равна – это интеграл по полупрямой $(0, \infty)$ от функции

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} t^{x-1} e^{-nt} = t^{x-1} \frac{e^{-Nt}}{e^t - 1}.$$

Обозначим

$$\varphi(t) = \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}.$$

[6] Конечно, достаточно просто использовать теорему Беппо Леви или Лебега из вещественного анализа. Здесь же покажем, как доказать переход, не выходя за рамки курса математического анализа.

Оценим

$$0 \leq d_N = \int\limits_0^\delta \varphi(t)e^{-Nt}dt + \int\limits_\delta^\infty \varphi(t)e^{-Nt}dt \leq \int\limits_0^\delta (t)dt + e^{-N\delta} \underbrace{\int_\delta^\infty \varphi(t)dt}_{\leq \text{const}}.$$

Для $\forall\, \varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^\delta \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем при этом δ выберем N_0 такое, что

$$e^{-N\delta} \int\limits_\delta^\infty \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $N \geq N_0$.

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 2.2. $\exists$ *единственная* $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ *такая, что*

$$F(z) = \zeta(z), \quad Rez > 1,$$

или, эквивалентно,

$$F(x) = \zeta(x), \quad x \geq 2.$$

При этом $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ *имеет при* $z = 1$ *полюс* 1*-го порядка с вычетом* 1.

Замечание 2.1. Начиная с этого момента, обозначаем $F(z)$ через $\zeta(z)$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Доказательство. Пусть сначала $x \in [2, +\infty)$. Тогда по утверждению 2.1,

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}dt + \int\limits_1^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}dt =: \varphi(x) + \psi(x),$$

причем

$$\psi(z) := \int\limits_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}dt$$

сходится равномерно на компакте в $\mathbb{C}$ по признаку Вейерштрасса, так как

$$|t^{z-1}| = t^{\mathrm{Re} z - 1}.$$

Отсюда $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Разложим в ряд функцию $\frac{1}{e^t-1} \in \mathcal{O}(0<|t|<2\pi)$. Заметим, что

$$\operatorname{res}_{t=0}\frac{1}{e^t-1}=\frac{1}{1}=1.$$

Тогда

$$\frac{1}{e^t-1}=\frac{1}{t}+c_0+c_1t+\ldots,$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n \tag{9}$$

сходится равномерно на компактах при $|t|<2\pi$.

Будем считать, что

$$\mathrm{Re}z\geq 2 \;\Rightarrow\; |t^{z-1}|=t^{\Re(z)-1},$$

тогда

$$\varphi(z):=\int\limits_0^1 t^{z-1}\left(\frac{1}{t}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n\right)dt=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z+n},$$

так как

$$\int\limits_0^1 t^{z+n-1}dt=\frac{z+n}{,}\;\; \mathrm{Re}z+n-1>-1.$$

Так как для коэффицентов (9)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|<\infty,$$

где радиус сходимости равен $2\pi>1$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z+n}$$

сходится равноперно на $\forall$ компакте $K\subset\mathbb{C}$, если отбросить те члены ряда (конечное число), у которых на K есть полюсы.

Отсюда следует, что

$$\varphi\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{1,0,-1,-2,\ldots\})$$

с полюсами 1-го порядка в точках $1,0,-1,-2,\ldots$

Итак, функция

$$F(z):=\frac{1}{\Gamma(z)}\left(\underbrace{\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z+n}}_{\varphi(z)}+\int\limits_1^{\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt\right).$$

является искомой функцией, то есть $F(z)\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{1\})$ с указанным полюсом (так как $\Gamma(1)=1$) и совпадает с $\zeta(z)$ при $z\in[2,+\infty)$ или даже при $\mathrm{Re}z\geq 2$.

Здесь используется следствие формулы дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

то есть что функция $1/\Gamma(z)$ целая (то есть $\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) с нулями 1-го порядка там, где у $\Gamma(z)$ были полюсы, то есть при $z = 0, -1, -2, \ldots$. Поэтому особенность функции $\varphi(z)/\Gamma(z)$ в точках $0, -1, -2, \ldots$ устранима. □

Задача

Задача 2.1. *Показать, что*

$$\begin{cases} \zeta(0) = -\frac{1}{2} \\ \zeta(-1) = -\frac{1}{12} \\ \zeta(-2m) = 0, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Указание. То, что

$$\zeta(-2m) = 0, \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

вытекает из того, что $c_{-2m} = 0$ при $m \in \mathbb{N}$, то есть функция

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}.$$

Гипотеза Римана

Утверждение 2.3. *(Гипотеза Римана) Если $0 \le Rez \le 1$ и $\zeta(z) = 0$, то*

$$Rez = \frac{1}{2}.$$

Иллюстрация к гипотезе Римана представлена на рис. 2.1.

Формула Эйлера

Утверждение 2.4. *(Формула Эйлера)*

$$\zeta(z) \cdot \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = 1, \tag{10}$$

при $Rez > 1$, где произведение берется по всем простым числам $p = 2, 3, 5, \ldots$

Доказательство. Рассмотрим первый сомножитель (10):

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = 1 + \sum_{2 \nmid n} \frac{1}{n^z}.$$

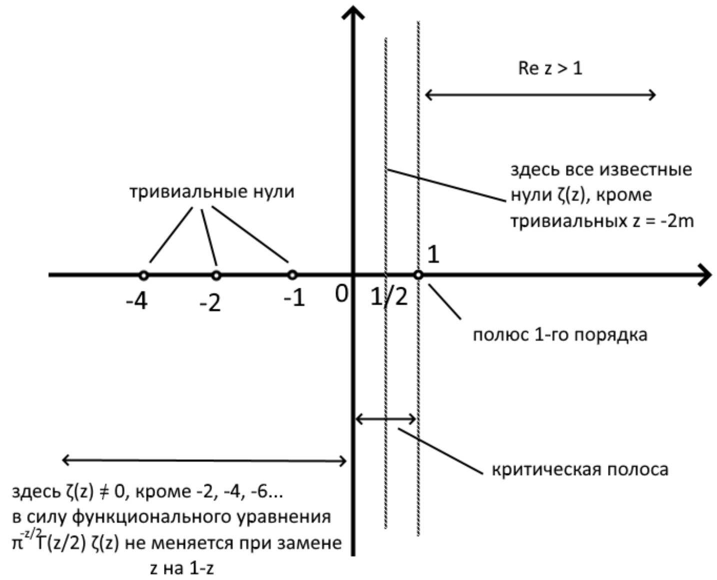

Рис. 2.1. Иллюстрация к гипотезе Римана

Теперь, для первых двух сомножителей

$$\left(1-\frac{1}{3^z}\right)(1-2^z)\,\zeta(z) = 1 + \sum_{2\not|\, n,\, 3\not|\, n} \frac{1}{n^z}.$$

Продолжая рассуждения M раз, получим

$$\zeta(z)\prod_{m=1}^{M}\left(1-\frac{1}{p_m^z}\right) = 1 + \sum_{(n)} \frac{1}{n^z},$$

где $2 = p_1 < 3 = p_2 < \ldots$ – все простые числа в порядке возрастания, а сумма берется по всем n, не делящимся ни на одного из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_M$. В частности, $n \geq p_M^2$.

Следовательно,

$$\left|\zeta(z)\prod_{m=1}^{M}\left(1-\frac{1}{p_m^z}\right) - 1\right| \leq \sum_{n=p_M^2}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}z}} \to 0, \quad M \to \infty,$$

так как простых бесконечно много. □

Следствие. $\zeta(z) \neq 0$ при $\mathrm{Re}z > 1$.

Асимптотический закон распределения простых чисел

Обсудим асимптотический закон распределения в двух словах, без строгого доказательства. Итак, из формулы Эйлера (10),

$$\zeta(z) = \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^z}\right), \quad \mathrm{Re}z > 1.$$

Отсюда

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^z}, \tag{11}$$

где

$$\Lambda(n):=\begin{cases}\ln p, \quad \text{если } n=p^m, \quad m\in\mathbb{N}, \quad p-\text{простое}\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

Будем рассматривать *функцию Чебышёва*

$$\psi(x):=\sum_{n\le x}\Lambda(n).$$

Поскольку (11) можно рассматривать как степенной ряд с логарифмическими степенями

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\left(e^{-z}\right)^{\ln n},$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz,$$

где $c>1$, $x>1$ не целое, и x не есть $\mathrm{Re}z$.

Если $\zeta(z)\neq 0$ при $b<\mathrm{Re}z\le 1$, то

$$\psi(x)=x+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz. \tag{12}$$

Здесь

$$x=\mathrm{res}_{z=1}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z}\right).$$

В (12) под знаком интеграла

$$|x^z|=x^{\mathrm{Re}z}=x^b, \quad 1/2<b<1.$$

Правдоподобно, что интеграл $=O(x^b)$ или чуть хуже. Следовательно,

$$\psi(x)=x\left(1+o(1)\right), \quad x\to\infty.$$

Это эквивалетно *асимптотическому закону распределения простых чисел*

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x))\frac{\ln x}{x}=1,$$

где

$$\pi(x):=\sum_{p\le x}1.$$

Замечание 2.2. В терминах функции

$$\lambda(n) := (-1)^{M(n)},$$

где $M(n)$ равно числу простых делителей n с учетом кратностей,

$$\text{Гипотеза Римана} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(2)+\ldots+\lambda(n)}{n^{1/2+\varepsilon}} = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

а асимптотический закон распределения простых чисел равносилен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(2)+\ldots+\lambda(n)}{n} = 0.$$

Непосредственное аналитическое продолжение элементов

Определение 2.2. *Элементом* называется пара

$$F = (U, f),$$

где $U \subset \mathbb{C}$ – круг (то есть $|z-a| < R$ или вся С), а $f \in \mathcal{O}(U)$.

Точка a называется *центром элемента*, а число $R > 0$ – *радиусом элемента*.

Определение 2.3. Элемент $F = (U, f)$ называется *каноническим*, если U равен кругу сходимости ряда Тейлора f с центром a, то есть ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Определение 2.4. Элементы $F = (U, f)$ и $G(V, g)$ называются *непосредственным аналитическим продолжением (НАП) друг друга* (запись $F \sim G$), если $U \cap V$ непусто и $f = g$ на $U \cap V$ (рис. 2.2).

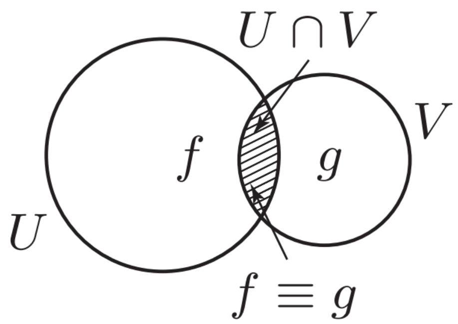

Рис. 2.2. Непосредственное аналитическое продолжение f и g

Утверждение 2.5. *(Свойства НАП)*

1. *(Свойство Вейерштрасса)* $\forall$ *элемента* $F = (U, f)$ *и* $\forall$ *точки* $b \in U$ $\exists$ *единственный канонический элемент* G *с центром в* b *такой, что* $G \sim F$.

2. *(Свойство треугольника) Если элементы*

$$F_j := (U_j, f_j), \quad j = 0, 1, 2$$

таковы, что

$$F_0 \sim F_1, \quad F_1 \sim F_2,$$

и

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, \tag{13}$$

то

$$F_0 \sim F_2.$$

Доказательство. 1. Свойство Вейерштрасса вытекает из теоремы о разложении голоморфной функции в степенной ряд.

2. Из условия $F_0 \sim F_1$, $F_1 \sim F_2$ вытекает (рис. 2.3), что

$$f_0 = f_1 = f_2$$

на

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Тогда по теореме единственности

$$f_0 = f_2 \text{ на } U_0 \cap U_2.$$

□

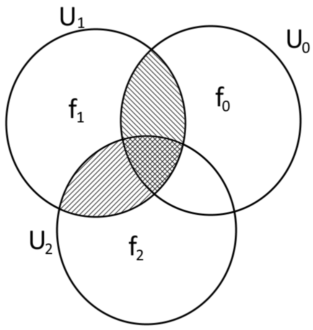

Рис. 2.3. Взаимное расположение F_0, F_1 и F_2

Замечание 2.3. Без условия (13) непустоты тройного пересечения свойство 2 неверно. Рассмотрим следующий контрпример.

Пусть

$$U_j := \{|z - \omega^j| < 1\}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где
$$\omega := e^{2\pi i/3},$$
а функции
$$f_j(z) := \sqrt{|z|}e^{i\arg z/2}, \quad \frac{2\pi}{3}j - \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{2\pi}{3}j + \frac{\pi}{2}.$$
Тогда $F_0 \sim F_1$, $F_1 \sim F_2$, но $F_2 \not\sim F_0$ (фактически, $f_2 = -f_0 \neq f_0$ на $U_0 \cap U_2$).

Лекция 3. Аналитическое продолжение элементов

Полная аналитическая функция

Определение 3.1. Элемент G является *аналитическим продолжением (АП)* элемента F, если $\exists\ n \in \mathbb{N}$ и элементы $F_1, \ldots, F_n$ такие, что (рис. 3.1)

$$F \sim F_1, \quad F_1 \sim F_2, \quad \ldots, \quad F_{n-1} \sim F_n, \quad F_n = G.$$

Обозначение:

$$F \cong G.$$

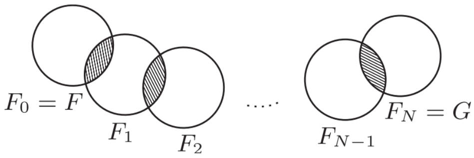

Рис. 3.1. G – аналитическое продолжение элемента F

Отношение $\cong$ («быть аналитическим продолжением») является отношением эквивалетности на множестве всех элементов (а также на множестве всех канонических элементов).

Определение 3.2. Классы эквивалетности канонических элементов по отношению $\cong$ называются *полными аналитическими функциями (ПАФ)*.

Иными словами, *ПАФ, порожденная каноническим элементом* F – это множество всех канонических элементов

$$G \cong F.$$

Такой набор элементов $\mathcal{F}$ можно рассматривать как «многозначную функцию» на открытом множестве

$$D_{\mathcal{F}} := \{a \in \mathbb{C} : \exists \text{ элемент } F \in \mathcal{F} \text{ с центом } a\},$$

сопоставляющую каждой точке $a \in D_{\mathcal{F}}$ набор значений $f(a)$ всех элементов

$$F = (U, f) \in \mathcal{F}$$

с центром в a.

Число этих значений может быть $= 1$, как для $\Gamma(z)$ или $\zeta(z)$:

$$D_\Gamma = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\},$$

$$D_\zeta = \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

либо > 1. Такой пример рассматривался в замечании 2.3), где элементы $F_0 \sim F_1$, $F_1 \sim F_2$, но $F_2 \not\sim F_0$. Напомним, что в этом примере элементы $F_0 = (U_0, f_0)$ и $F_2 = (U_2, f_2)$ с центром $z = 1$ и

$$U_0 = U_2 = \{|z-1|| < 1\}$$

принимают разные значения:

$$f_0(1) = 1, \quad f_2(1) = -1.$$

Аналитическое продолжение вдоль пути

Определение 3.3. Пусть

$$\gamma:\ [0,1]\ \to\ \mathbb{C}$$

– непрерывное отображение. Семейство канонических элементов

$$\{F_t | t \in [0,1]\}$$

называют *аналитическим продолжением элемента F_0 вдоль пути γ*, если

1. Центр F_t равен значению $\gamma(t)$ для $\forall\ t \in [0,1]$;
2. $\forall\ t \in [0,1]$ $\exists$ окрестность $u_t \subset [0,1]$ такая, что

$$F_\tau \sim F_t$$

   для всех $\tau \in u_t$.

Определение 3.3 иллюстрирует рис. 3.2.

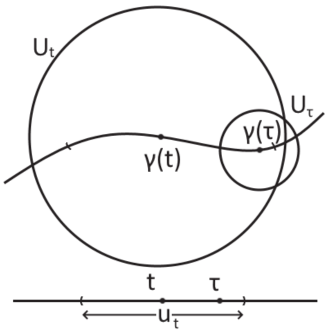

Рис. 3.2. Аналитическое продолжение элемента

Определение 3.4. Канонический элемент F_1 с центром $\gamma(1)$ называется *результатом АП элемента F_0 вдоль пути γ*.

Утверждение 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если АП данного канонического элемента F_0 вдоль непрерывного пути γ существует, то только одно.*
2. *$\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что радиус $F_t > \varepsilon$ для $\forall\ t \in [0,1]$.*
3. *$F_t \cong F_0$ для $\forall\ t \in [0,1]$. В частности, $F_1 \cong F_0$.*
4. *$\forall$ канонических элементов $G \cong F$ $\exists$ непрерывный путь*

$$\gamma:\ [0,1]\ \to\ \mathbb{C}$$

   такой, что $\gamma(0)$ равен центру F, а $\gamma(1)$ равен центру G, и АП элемента F вдоль пути γ с результатом в G (рис. 3.3).

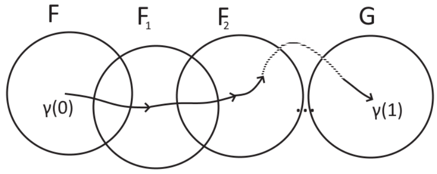

Рис. 3.3. К пункту 4 утверждения 3.1

Доказательство. 1. Положим

$$R(t) := \text{ радиус}(F_t),$$

$$v_t = \left\{ \tau \in u_t \;\middle|\; |\gamma(\tau) - \gamma(t)| < \frac{1}{4} R(t) \right\}, \tag{14}$$

Тогда $\forall\ \tau_1, \tau_2 \in v_t$ элементы

$$F_{\tau_1} \sim F_{\tau_2}$$

содержат центры друг друга. Убедимся в этом. Для каждого τ_j, удовлетворяющему условию (14), очевидно

$$R(\tau_j) \geq \frac{3}{4} R(t),$$

$$|\gamma(\tau_1) - \gamma(\tau_2)| \leq \frac{R(t)}{2},$$

откуда следует, что

$$\tau_1 \in U_{\tau_2}, \quad \tau_2 \in U_{\tau_1}.$$

Пусть $\delta > 0$ – число Лебега покрытия $\{v_t | t \in [0, 1]\}$ отрезка $[0, 1]$ (то есть $\forall$ отрезок длины δ лежит в некотором элементе покрытия) и пусть

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$$

– разбиение с $t_{k+1} - t_k < \delta$, $\forall\ k$.

Каждый элемент F_t, $t \in [t_0, t_1]$ является НАП F_0 с центром $\gamma(t) \in U_0$, то есть по свойству Вейерштрасса (утверждение 2.5) *однозначно* задается элементом F_0.

Каждый элемент F_t, $t \in [t_1, t_2]$ есть НАП F_{t_1} с центром $\gamma(t) \in U_1$ (по определению v_t и δ). Следвательно, F_t однозначно задается элементом F_{t_1} (и F_{t_0}) по свойству Вейерштрасса.

Продолжим рассуждения аналогичным образом. За конечное число шагов дойдем д F_1. Единственность получена.

2. Радиус всех элементов $\geq 3/4 \min\limits_{j=0,1,\ldots,n-1} R(t_j)$ согласно определению v_t и δ.

3. Вытекает из конструкции пункта 1.

4. Будем считать, что в цепочке один элемент, то есть

$$F = (U, f) \sim G = (V, g).$$

Пусть $a = \gamma(0)$ – центр F, а $b = \gamma(1)$ – центр G, и, соответственно,

$$\gamma(t) = tb + (t-1)a, \quad < t < 1.$$

Определим F_t как единственный элемент, $\sim F$, с центром $\gamma(t)$ при $\gamma(t) \in U$, и то же с заменой F на G и U на V.

При $\gamma(t) \in U \cap V$ эти функции не противоречат друг другу, так как $f = g$ на $U \cap V$.

Если $\forall\ t \in [0,1]$ определить u_t как такую окрестность, что $\gamma(u_t) \subset U$ или V, то выполнено определение АП вдоль пути.

$\square$

Замечание 3.1. Пункты 3 и 4 означают эквивалентность понятия АП канонических элементов и АП вдоль пути.

В частности, можно определить ПАФ как множество результатов продолжений данного элемента вдоль всех путей, по которым АП существуют.

Аналитическая функция в области

Определение 3.5. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $a \in D$ и F – канонический элемент с центром в a. *Аналитической функцией F в области D, порожденной элементом F*, называется совокупность результатов АП элемента F вдоль всех непрерывных путей

$$\gamma : \ [0,1] \ \to \ D,$$

таких, что $\gamma(0) = a$, причем предполагается, что такое АП существует вдоль всех таких путей.

Утверждение 3.2. *Мощность множества $\mathcal{F}_b$ всех элементов $F \in \mathcal{F}$ с центром $b \in D$ не зависит от выбора точки $b \in D$ и называется числом листов АФ F в области D.*

Доказательство. Пусть

$$\gamma : \ [0,1] \ \to \ D$$

– непрерывный путь с

$$\gamma(0) = b_1, \quad \gamma(1) = b_2.$$

Отображение

$$\Phi : \ \mathcal{F}_{b_1} \to \mathcal{F}_{b_2},$$

переводящее $\forall\ F \in \mathcal{F}_{b_1}$ в результат продолжения F вдоль γ ($\exists$ по определению АФ в области), является *биекцией*, так как обратным к нему будет аналогичное отображение

$$\Psi:\ \mathcal{F}_{b_2} \to \mathcal{F}_{b_1}$$

вдоль пути

$$\gamma_1(t) = \gamma(1-t).$$

□

АФ с числом листов 1

Утверждение 3.3. *Справедливы следующий утверждения.*

1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область и $f \in \mathcal{O}(D)$.*

   Тогда совокупность $\mathcal{F}_f$ канонических элементов вида

   $$F_a = (U_a, f_a),$$

   где $a \in D$,

   $$f_a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

   $$U_a := \text{круг сходимости этого ряда},$$

   является АФ в области D с числом листов 1.

2. *Обратно, $\forall$ АФ $\mathcal{F}$ в области D с числом листов 1 имеет вид $\mathcal{F}_f$ для некоторой $f \in \mathcal{O}(D)$.*

Доказательство. 1. Достаточно проверить, что результат АП элемента F_a вдоль $\forall$ непрерывного пути

$$\gamma:\ [0,1] \to D,$$

где $\gamma(0) = a$ совпадает с $F_{\gamma(1)}$.

Это свойство вытекает из того, что АП F_a вдоль γ задается в точности семейством

$$\{F_{\gamma(t)} | t \in [0,1]\}.$$

2. Пусть

$$\tilde{F}_a = (\tilde{U}_a, \tilde{f}_a) \in F$$

– единственный элемент с центром $a \in D$. Положим

$$f(z) := \tilde{f}_z(z)$$

для всех $z \in D$. Тогда по определению АП вдоль пути и свойству Вейерштрасса (утверждение 2.5)

$$f(z) = \tilde{f}_a(z) \tag{15}$$

для всех z, достаточно близких к точке a, и, следовательно, $f \in \mathcal{O}(a)$.

Тогда $f \in \mathcal{O}(D)$ в силу призвольности a и $\forall\ a \in D$

$$\tilde{f}_a = f_a$$

в окрестности точки a согласно (16) и теореме о разлжении голоморфной функции в степенной ряд. Следовательно,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_f.$$

□

Примеры АФ. $\sqrt{z}$

Утверждение 3.4. *Канонический элемент*

$$F_0 := (U_0, f_0),$$

где

$$U_0 := \{|z-1| < 1\},$$
$$f_0(z) := \sqrt{|z|}e^{i\arg z/2}, \quad -\pi/2 < \arg z < \pi/2,$$

допускает АП вдоль непрерывного пути

$$\gamma: \ [0,1] \to \mathbb{C}$$

с $\gamma(0) = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma([0,1]) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Совокупность результатов всех таких продолжений является АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *с числом листов* 2*, обозначаемой по определению* $\sqrt{z}$.

Доказательство. 1. Пусть

$$\gamma: \ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

– непрерывный путь. Запишем

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}$$

для некоторой непрерывной функции

$$\theta: \ [0,1] \to \mathbb{R}$$

с $\theta(0) = 0$, и положим

$$F(t) := (U_t, f_t),$$

где

$$U_t := \{|z - \gamma(t)| < |\gamma(t)|\},$$
$$f_t(z) := \sqrt{|z|}e^{i\arg z/2}, \quad \theta(t) - \pi/2 < \arg z < \theta(t) + \pi/2. \tag{16}$$

То, как осуществляется такое АП, проиллюстрировано на рис. 3.4.

В силу непрерывности $\theta(t)$ семейство

$$\{\mathcal{F}_t | t \in [0,1]\}$$

является АП F_0 вдоль γ.

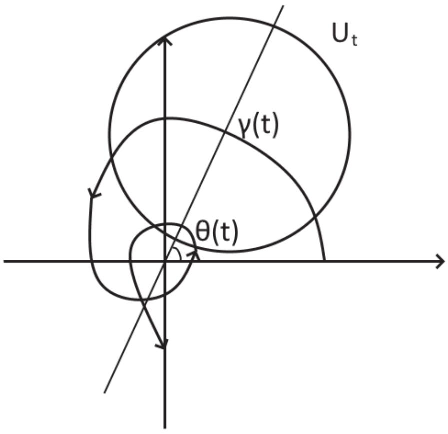

Рис. 3.4. Связь U_t, $\gamma(t)$ и $\theta(t)$

2. Если $\exists\ t_0 \in [0,1]$ такое, что $\gamma(t_0) = 0$, то $\exists$ канонический элемент

$$G \cong F_0$$

с центром 0.

Рассмотрим цепочку

$$\underbrace{G}_{=(V,g)} = F_n \sim F_{n-1} \sim \ldots \sim F_1 \sim F_0,$$

где на U_0 имеем

$$f_0^2(z) = z,$$

а значит, по теореме единственности, на U_1

$$f_1^2(z) = z,$$

и так далее. Наконец, на U_n

$$g^2(z) = z.$$

Но тогда

$$2g(z)g'(z) = 1$$

на V, что при $z = 0$ дает противоречие:

$$2 \cdot 0 \cdot g'(0) = 1.$$

3. Утверждение количестве листов 2 вытекает из описания АП (16). В случае, когда

$$\theta(1) = \text{ четному кратному } 2\pi,$$

в конечной точке получим тот же элемент, с которого начинали. В случае же, когда

$$\theta(1) = \text{ нечетному кратному } 2\pi,$$

у функции $f_t(z)$ возникает множитель $e^{i\pi} = -1$.

$\square$

Лекция 4. Аналитические функции

Примеры АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Рассмотрим функции

$$\mathcal{F}_n(z) = \sqrt[n]{z}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\mathcal{F}_\infty(z) = \ln z.$$

Количество листов этих функций совпадает со значением индекса.

Зададим исходный элемент

$$F_0^{(n)} = (U_0, f_0^{(n)}),$$

где

$$U_0 = \{|z-1| < 1\},$$

$$\begin{cases} f_0^{(n)}(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \arg z / n}, & -\pi/2 < \arg z < \pi/2, \\ f_0^{(\infty)}(z) = \ln|z| + i \arg z, & -\pi/2 < \arg z < \pi/2. \end{cases} \tag{17}$$

Элемент $F_0^{(n)}$ является каноническим. Действительно, для $n = \infty$ это верно, поскольку,

$$\lim_{z \to 0+} f_0^{(n)} = \infty,$$

а для $n \in \mathbb{N}$ это верно, поскольку

$$\varphi(z) := f_0^{(n)}(z)$$

удовлетворяет

$$\varphi^n(z) = z, \quad z \in U_0,$$

откуда

$$n\varphi^{n-1}(z)\varphi'(z) = 1,$$

и

$$\lim_{z \to 0+} \varphi'(z) = \infty.$$

АП $F_0^{(n)}$ вдоль непрерывного пути возможно тогда и только тогда, когда путь не проходит через 0:

$$\gamma : \ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

В таком случае справедливо представление

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)},$$

где

$$\theta : \ [0,1] \to \mathbb{R}$$

– непрерывная функция с $\theta(0) = 0$. Рассмотрим

$$F_t = (U_t, f_t), \tag{18}$$

где
$$U_t = \{|z-\gamma(t)| < |\gamma(t)|\},$$
а $f_t(z)$ равно (17), но с условием
$$\theta(t) - \pi/2 < \arg z < \theta(t) + \pi/2.$$
(18) является АП $F_0^{(n)}$ вдоль γ в силу непрерывности $\theta(t)$. Здесь $u_t \subset [0,1]$ выбирается так, что
$$\gamma(u_t) \subset U_t.$$

Утверждение 4.1. *Аналитическое продолжение $F_0^{(n)}$ вдоль пути*
$$\gamma : \ [0,1] \to \mathbb{C}$$
с $0 \in \gamma([0,1])$ *невозможно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\exists\ t_0 \in [0,1]$ такое, что
$$\gamma(t_0) = 0.$$
Тогда
$$(V, g) = G := F_{t_0}$$
удовлетворяет
$$G \cong F_0,$$
то есть $\exists$ канонические элементы
$$G = F_n \sim F_{n-1} \sim \ldots \sim F_1 \sim F_0.$$
Но $f_0^n(z) = z$ (при $n = \infty$ $e^{f_0(z)} = z$) на U_0. Следовательно, по теореме единственности $f_1^n(z) = z$ ($e^{f_1(z)} = z$) на U_1. Продолжая рассуждения, получим, что $g^n(z) = z$ ($e^{g(z)} = z$) на V. Но $0 \in V$. Пришли к противоречию с существованием такой $g \in \mathcal{O}(V)$. $\square$

Все элементы $F \in \mathcal{F}_n(z)$, где
$$\mathcal{F}_n(z) := \sqrt[n]{2}$$
с данным центром $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеют вид
$$F = \left(U_a, \quad e^{2\pi i/k} f_a(z)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
где
$$U_a = \{|z-a| < |a|\},$$
а $f_a(z)$ задается формулой (17) с любым фиксированным интервалом для $\arg z$.

При $n = \infty$ соответственно
$$F = (U_a, \tilde{f}_a(z) + 2\pi i k), \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\tilde{f}_a(z) - \ln|z| + i \arg z, \quad \theta_A - \pi/2 < \arg z < \theta_a + \pi/2,$$
где θ_a – любое фиксированное значение $\arg a$.

Можно сделать следующий вывод.

Утверждение 4.2. *$\mathcal{F}_n(z)$ есть АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ при всех $n = 2, 3, \ldots, \infty$ (а также ПАФ, порожденная любым своим элементом) с числом n.*

Действия над аналитическими функциями

Операции[7]

$$(\mathcal{F} \pm \mathcal{G}, \quad \mathcal{F}\mathcal{G}, \quad \mathcal{F}/\mathcal{G}, \quad \mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}|_{D_1})$$

определяются поэлементно (с канонизацией) и результатом каждой является одной или несколькими АФ на D.

Сложение

Рассмотрим операцию *сложения*

$$\mathcal{F} + \mathcal{G},$$

где $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – АФ в области $D \subset \mathbb{C}$. Берем $\forall$ точку $a \in D$ и $\forall$ элементы

$$F = (U, f) \in \mathcal{F},$$

$$G = (V, g) \in \mathcal{G}$$

с центром a.

Рассмотрим элемент

$$(U \cap V, f + g)$$

и расширим его до канонического. По свойству Вейерштрасса (утверждение 2.5), $\exists$ единственный канонический элемент Φ, $\sim$ данному элементу, с центром a.

Совокупность полученных таким образом канонических элементов (по всем $a \in D$, $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$ с центром a) обозначается

$$\mathcal{F} + \mathcal{G}.$$

Пример 4.1. Рассмотрим

$$\sqrt{z} + \sqrt{z}.$$

Возможны три варианта:

$$\begin{cases} 2\sqrt{z} = \begin{cases} f + f = 2f \\ (-f) + (-f) = -2f \end{cases} \\ -f + f = 0 \end{cases}$$

Итого получаем, что

$$\sqrt{z} + \sqrt{z} = \begin{cases} 2\sqrt{z} \\ 0 \end{cases}$$

Итак, сумма 2 АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ с числом листов 2 каждая есть совокупность одной АФ с числом листов 2 и одной АФ с числом листов 1 на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[7] Сложение, вычитание, умножение, разность, композиция и сужение на подобласть D_1 соответственно.

Задача 4.1. *1. Сумма*

$$\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$$

есть одна АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *с числом листов* 6*;*

2. Сумма

$$\ln z + \ln z = \begin{cases} 2\ln z \\ 2\ln z + 2\pi i \end{cases}$$

есть 2 *АФ на* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *с числом листов* ∞ *каждая;*

3. Разность

$$\ln z - \ln z$$

представляет собой счетное множество АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *с числом листов* 1.

4. Для $\forall\ a \in \mathbb{C}$ *описать, сколько АФ на* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *задается формулой*

$$\ln z + a \ln z$$

(возможны все варианты: $1, 2, 3, \ldots, \infty$*).*

Композиция

Рассмотрим операцию *композиции*. Пусть $\mathcal{F}$ – АФ на $D \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{G}$ – АФ на $G \subset \mathbb{C}$ и значения всех элементов $\mathcal{F}$ в точках из D лежит в G. Тогда совокупность элементов вида

$$\zeta = g \circ f(z),$$

подвергшихся канонизированию, есть одна или несколько АФ в D, обозначаемых через

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$$

и называемых *композицией* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{G}$.

Пример 4.2.

- Рассмотрим

$$\sqrt{z^2} = \begin{cases} z \\ -z \end{cases}$$

Такая композиция дает две АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Однако композиция

$$(\sqrt{z})^2 = z$$

дает одну АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Композиции

$$\cos(\sqrt{z})$$

и

$$\sin\sqrt{z}\sqrt{z}$$

(получаемая как композиция $\sin w/w$ и $w = \sqrt{z}$) дают по одной АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, как и любая четная целая функция $G(w)$.

Сужение

Перейдем к операции *сужения*. Пусть $\mathcal{F}$ – АФ на области $D \subset \mathbb{C}$ и $D_1 \subset D$ – подобласть. Тогда

$$\mathcal{F}|_{D_1} := \{F \in \mathcal{F} | \text{центр } (F) \in D_1\}$$

есть одна или несколько АФ на D_1.

Если функция $f \in \mathcal{O}(D_1)$ такова, что $\mathcal{F}_{f_1}$, определяемая как совокупность тейлоровских разложений f с центрами $a \in D_1$, содержится в $\mathcal{F}|_{D_1}$, то f называется *(однозначной) ветвью* АФ $\mathcal{F}$ в области D_1.

Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей

Теорема 4.1. *Пусть*

$$\Gamma: \ [0,1] \times [0,1] \ \to \ \mathbb{C}$$

– непрерывное отображение, осуществляющее гомотопию путей

$$\gamma_0(t) := \Gamma(0,t), \quad \gamma_1(t) := \Gamma(1,t)$$

в $\mathbb{C}$ *(рис. 4.1), причем*

$$\Gamma(s,0) = a, \quad \Gamma(s,1) = b, \quad \forall\ s \in [0,1].$$

Пусть канонический элемент $F_0 = (U_0, f_0)$ *с центром* a *допускает аналитическое продолжение* $\{F_{st} \mid t \in [0,1]\}$ *вдоль*

$$\gamma_s(t) := \Gamma(s,t), \quad 0 \le t \le 1$$

при любом $s \in [0,1]$.

Тогда результаты продолжений вдоль γ_0 *и* γ_1 *совпадают:*

$$F_{01} = F_{11}$$

(и, вообще говоря, $= F_{s1}$ *для всех* $s \in [0,1]$*).*

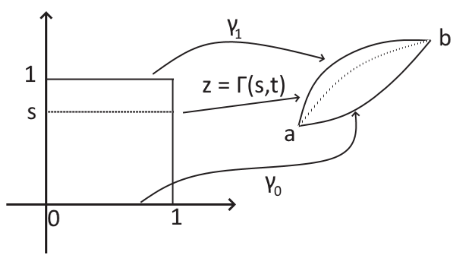

Рис. 4.1. Непрерывное отображение $\Gamma(s,t)$

Доказательство. Фиксируем $s_0 \in [0,1]$ и покажем, что $\exists$ окрестность $v \subset [0,1]$ точки s_0 такая, что

$$F_{s1} = F_{s_0 1}, \quad \forall\, s \in v. \tag{19}$$

По свойству 2 АП вдоль пути (утверждение 3.1) $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что радиусы всех элементов $F_{s_0 t}$, $t \in [0,1]$, будут $\geq \varepsilon$.

Выберем v так, $s \in v$. Отсюда следует, что

$$|\Gamma(s,t) - \Gamma(s_0,t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

в силу равномерной непрерывности Γ на $[0,1] \times [0,1]$.

Для $\forall\, s \in v$, $t \in [0,1]$ определим $\tilde{F}_{st}$ как единственный канонический элемент с центром $\Gamma(s,t)$, который $\sim F_{s_0 t}$ (по свойству Вейерштрасса, утверждение 5).

Тогда

$$\{\tilde{F}_{st} | t \in [0,1]\}$$

есть АП элемента

$$\tilde{F}_{s0} = F_0$$

вдоль γ_s. Действительно, пусть

$$\tilde{u}_t := \{\tau \in u_t \mid |\gamma_s(\tau) - \gamma_s(t)| < \varepsilon/4\},$$

где u_t – окрестности из определения АП F_0 вдоль γ_{s_0}, причем можно считать, уменьшая u_t, что

$$|\gamma_{s_0}(\tau) - \gamma_{s_0}(t)| < \varepsilon/4$$

(см. рис. 4.2).

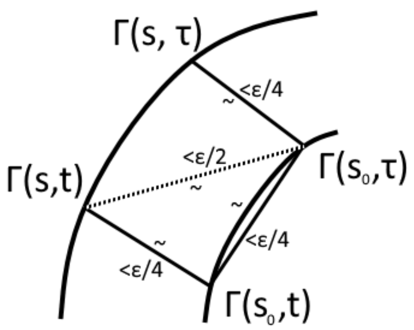

Рис. 4.2. Свойство треугольника для $\Gamma(s,t)$

Воспользуемся свойством треугольника (утверждение 2.5). Здесь

$$\tilde{F}_{st} \sim F_{s_0 t}$$

по определению,

$$F_{s_0 t} \sim F_{s_0 \tau}$$

по АП, а следовательно,

$$\tilde{F}_{st} \sim F_{s_0 \tau}.$$

Так как по определению
$$\tilde{F}_{s\tau} \sim F_{s_0\tau},$$
получим, что
$$\tilde{F}_{s\tau} \sim \tilde{F}_{st}, \quad \forall\ \tau \in \tilde{u}_t.$$
При этом $\tilde{F}_{s1}$, который определяется как единственный канонический элемент с центром в $\gamma_s(1)$, который $\sim F_{s_01}$, совпадает с F_{s_01}, так как у них общий центр.

В силу единственности АП вдоль пути это означает, что результат продолжения F_0 вдоль γ_s равен результату продолжения F_0 вдоль γ_{s_0} (оба равны F_{s_01}). Утверждение (19) доказано.

Из (19) вытекает, что результат F_{s1} продолжения F_0 вдоль γ_s является локально постоянной функцией от $s \in [0,1]$. Другими словами, в окрестности $\forall$ точки s_0 она постоянна.

По условию, эта функция определена на всем $[0,1]$. Следовательно, обозначая через δ число Лебега покрытия окрестностями, в которых эта функция постоянна, мы за конечное число шагов длины $< \delta$ получим, что эта функция глобально постоянна на $[0,1]$, то есть
$$F_{01} = Fs1 = F_{11}, \quad \forall\ s \in [0,1].$$
□

Следствие. Любая АФ $\mathcal{F}$ на *односвязной* области $D \subset \mathbb{C}$ имеет число листов 1, то есть $\in \mathcal{O}(D)$.

Доказательство. Фиксируем $a \in D$. Тогда $\mathcal{F}$ есть множество результатов продолжений любого своего элемента F с центром a вдоль всех непрерывных путей
$$\gamma: \ [0,1] \to D,$$
с $\gamma(0) = a$, причем АП вдоль любого такого пути $\exists$ по определению АФ в D.

Но любые 2 таких пути с общим концом в D гомотопны в D по определению односвязного пути. Следовательно, результаты продолжений F вдоль γ_0 и γ_1 совпадают по теореме 4.1, а значит, число элементов $G \in \mathcal{F}$ с центром b равно 1, и, наконец, число листов $\mathcal{F}$ в D равно 1 □

Следствие. Если $\mathcal{F}$ – АФ в области D и $D_1 \subset D$ – *односвязная подобласть*, то сужение $\mathcal{F}|_{D_1}$ распадается на столько голоморфных в D_1 функций, каково число листов $\mathcal{F}$ в D.

Доказательство. Доказательство вытекает из определений и следствия . □

Теорема Пуанкаре – Вольтерра

Теорема 4.2. *Если $\mathcal{F}$ – ПАФ, то $\forall\ a \in \mathbb{C}$ мощность множества всех $F \in \mathcal{F}$ с центром a конечна или счетна.*

В частности, число листов любой АФ в любой области $D \subset \mathbb{C}$ либо конечно, либо равно счетной ∞.

Доказательство. Зафиксируем $\forall$ элемент $F_0 \in \mathcal{F}$ с центром a. Любой другой элемент $F \in F$ с центром a получается из F_0 продолжением вдоль замкнутой γ (утверждение 3.1, пункт 4).

Небольшой гомотопией можно сделать все вершины γ лежащими в $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$, причем результат продолжение не изменится в силу доказательства утверждения (19).

Но множество ломаных с вершинами в счетном множестве $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ не более чем счетно. Это можно показать индукцией по числу вершин.

Следовательно, число элементов $F \in \mathcal{F}$ с центром a не более чем счетно. $\square$

Лекция 5. Теорема о монодромии

Теорема о монодромии

Теорема 5.1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область,*

$$F = (U, f)$$

– канонический элемент с центром $a \in D$, допускающий АП вдоль $\forall$ непрерывного пути

$$\gamma : \ [0,1] \to D$$

с $\gamma(0) = a$.

Тогда $\exists\ \Phi \in \mathcal{O}$ такая, что

$$\Phi = f$$

в окрестности точки a.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из следствия теоремы 4.1 о продолжении вдоль гомотопных путей, так как результаты всех АП элемента F являются АФ в D, и, следовательно, $\mathcal{F}_\Phi$ для некоторой $\Phi \in \mathcal{O}(D)$. □

Замечание 5.1. Следствия и теоремы 4.1 о продолжении вдоль гомотопных путей дают альтернативную формулировку утверждения теоремы 5.1.

Замечание 5.2. Нельзя утверждать, что $\Phi = f$ на $D \cap U$. Можно утверждать только то, что $\Phi = f$ в связной компоненте $D \cap U$, содержащей точку a.

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

$$\Phi(z) = \ln|z| + \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

а F – канонический элемент Φ с центром $a \in D$, где $\mathrm{Im} a < 0$. Тогда в компоненте области $D \cap U$ (рис. 5.1), не содержащей точку a, $\Phi \neq f$.

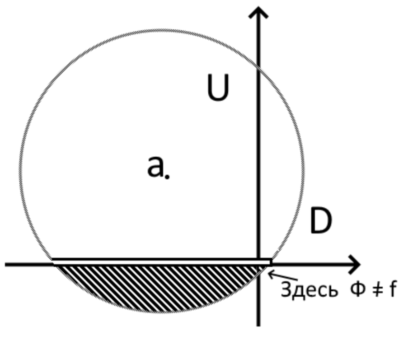

Рис. 5.1. Контрпример $\Phi \neq f$

Лемма о корнях и логарифмах

Лемма 5.1. *(О корнях и логарифмах) Если $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область и $f \in O$ не имеет нулей в D, то $\exists\ g \in \mathcal{O}$ такая, что*

$$f = g^2 \text{ в } D,$$

и $\exists\ h \in \mathcal{O}(D)$ такая, что

$$f = e^h \text{ в } D.$$

Доказательство. Вытекает из любой из трех формулировок теоремы о монодромии (теорема 5.1, следствия и теоремы 4.1), примененной к

$$\mathcal{G} := \sqrt{f}$$

и

$$\mathcal{H} := \ln f,$$

здесь, напомним, $\sqrt{\cdot}$ и $\ln(\cdot)$ являются АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Любую (из двух) ветвь $\mathcal{G}$ в D можно взять за y, а любую (из ∞) ветвей $\mathcal{H}$ – за h. □

Классификация изолированных особых точек АФ

Определение 5.1. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* для АФ $\mathcal{F}$, если $\exists$ проколотая окрестность U точки a, то есть

$$U = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}, \quad a \in \mathbb{C},$$

или

$$\{|z| > R\}, \quad a = \infty,$$

такая, что $\mathcal{F}$ является АФ в U.

Обозначим через $\#\mathcal{F}$ число элементов АФ $\mathcal{F}$ в области U.

Перейдем к **классификации изолированных особых точек АФ F**.

Если $\#\mathcal{F} = 1$, то это изолированная особая точка однозначного характера ($\mathcal{F} \in \mathcal{O}(U)$). Такие особые точки делятся на следующие категории.

- Устранимая особая точка. Пример в точке $a = 0$:
$$\frac{\sin z}{z}.$$
- Полюс. Пример в точке $a = 0$:
$$\frac{1}{z^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
- Существенная особая точка. Пример в точке $a = 0$:
$$e^{1/z}.$$

Если $\#\mathcal{F} > 0$, то эта особая точка является точкой ветвления.

- Если $\#\mathcal{F} = n \in \{2, 3, \ldots\}$, то особая точка – точка ветвления конечного порядка n. Пример в точке $a = 0$:
$$\sqrt[n]{z}.$$
- Если $\#\mathcal{F} = \infty$, то особая точка – логарифмическая точка ветвления. Пример в точке $a = 0$:
$$\ln z.$$

Замечание 5.3. Если $\mathcal{F}$ – АФ на $D \setminus \{a\}$ для некоторой области D такой, что $a \in D$, то сужение $\mathcal{F}|_U$ на проколутую окрестность $U \subset D \setminus \{a\}$ точки a может состоять из *нескольких* АФ, каждая из которых может иметь свою особенность.

Лемма 5.2. *Пусть $f \in \mathcal{O}(a)$. Если $f(a) \neq 0$ или если порядок нуля f в точке a четен, то $\sqrt{f(z)}$ имеет при $z = a$ две устранимых особых точки, то есть*
$$\exists\ g \in \mathcal{O}(|z - a| < \varepsilon)$$
такая, что $f = g^2$, и, следовательно,
$$\sqrt{f} = \pm g.$$
Если же порядок нуля f в точке a нечетен, то $\sqrt{f(z)}$ имеет при $z = a$ точку ветвления 2 порядка (то есть является АФ на $\{0 < |z - a| < \varepsilon\}$ с такой особой точкой.

Доказательство.

1. Если $f(a) \neq 0$, то $f = g^2$ в окрестности точки a для некоторой $g \in \mathcal{O}(a)$ по лемме 5.1 о корнях и логарифмах (или непосредственно композицией с элементом $\sqrt{w}$).

   Следовательно, $\sqrt{f} = \pm g$ имеет 2 устранимых особых точки.

2. Пусть порядок нуля f в точке a четен, то есть
$$f(z) = (z - a)^{2n} f_1(z), \quad n \in \mathbb{N}$$
   где $f_1 \in \mathcal{O}(a)$ такая, что $f_1(a) \neq 0$.

   Следовательно, $\exists\ g_1 \in \mathcal{O}(a)$ такая, что $f_1 = g_1^2$ (по пункту 1).

   Тогда
$$\sqrt{f(z)} = \pm(z - a)^n g_1(z)$$
   имеет при $z = a$ две устранимых особых точки.

3. Если порядок нуля $f(z)$ при $z = a$ нечетен, то
$$f(z) = (z - a)^{2k+1} f_1(z), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$
   где $f_1 \in \mathcal{O}(a)$ такая, что $f_1(a) \neq 0$. Следовательно,
$$f_1 = g_1^2$$

для некоторой $g \in \mathcal{O}(a)$, и, следовательно,

$$\sqrt{f(z)} = \sqrt{z-a}(z-a)^k g_1(z)$$

имеет при $z = a$ ту же особенность, что и $\sqrt{z-a}$, то есть точку ветвления 2-го порядка.

$\square$

Задача 5.1. *Доказать, что обратная функция Жуковского*[8]

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

имеет при $z = \infty$ один полюс 1-го порядка и одну устранимую особую точку.

Описание особых точек функции $w = \mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$

Утверждение 5.1. *Формула*

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$$

задает одну или несколько АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. При этом

- *(*) Сужение $\mathcal{F}|_{V_0}$ является двумя АФ с точкой ветвления 2-го порядка каждая (при $z = 0$);*
- *(**) Сужение $\mathcal{F}|_{V_1}$ является тремя АФ, две из которых имеют при $z = 1$ устранимую особую точку, а третья – точку ветвления 2-го порядка.*

Здесь

$$V_0 := \{0 < |z| < 1\},$$
$$V_1 := \{0 < |z - 1| < 1\}.$$

Прежде, чем перейти к доказательству, проиллюстрируем утверждение 5.1. Заметим, что

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{z}} \iff w^2 = 1 + sqrtz \iff (w^2 - 1)^2 = z.$$

Построим область

$$\left\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 | z = (w^2 - 1)^2\right\}$$

(рис. 5.2).

Доказательство. Если $z \in$ окрестности O, то

$$\zeta = 1 + \sqrt{z}$$

[8]Напомним, что это функция, обратная к функции Жуковского

$$z = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}).$$

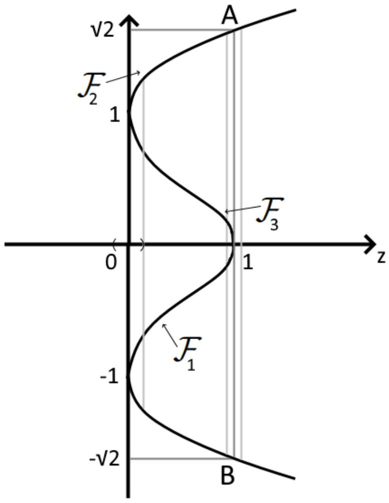

Рис. 5.2. График $z = (w^2 - 1)^2$

принадлежит окрестности точки $\zeta = 1$, то есть

$$\sqrt{\zeta} = \pm f_0(\zeta),$$

где (U_0, f_0) – канонический элемент $\sqrt{\zeta}$ с центром $\zeta = 1$. Заметим, что

$$1 + \sqrt{z}$$

является АФ с точкой ветвления второго порядка при $z = 0$. Следовательно,

$$\mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}} = \pm f_0(1 + \sqrt{z})$$

имеет при $z = 0$ две (из-за знака $\pm$) точки ветвления 2 порядка (как у $1 + \sqrt{z}$), так как f_0 является конформным отображением на свой образ $f_0(U_0)$. Иллюстрация к доказательству представлена на рис. 5.2.

Утверждение (*) доказано.

Перейдем к доказательству (**). Если $z \in$ окрестности 1, то

$$1 + \sqrt{z} = 1 + \pm f_0(z),$$

где (U_0, f_0) – это канонический элемент $\sqrt{z}$ с центром 1, то есть

$$U_0 = \{|z - 1| < 1\},$$

$$f_0(z) = \sqrt{|z|} e^{i \arg z/2}, \quad -\pi/2 < \arg z < \pi/2.$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}|_{\{0<|z-1|<1\}} = \begin{cases} \sqrt{1 + f_0(z)} \\ \sqrt{1 - f_0(z)} \end{cases}$$

Так как $f_0(1) = 1$, то

$$1 + f_0(1) = 2 \neq 0,$$

а следовательно (лемма 5.2),

$$\sqrt{1+f_0(z)}$$

имеет при $z=1$ две устранимые особые точки со значениями $\pm\sqrt{2}$ (рис. 5.2).

Теперь,

$$1-f_0(1)=0,$$

но, дифференцируя $f_0^2(z)=z$, получим

$$f_0'(1)=1/2\neq 0.$$

Следовательно, по лемме 5.1 $\sqrt{1-f_0(z)}$ имеет при $z=1$ точку ветвления 2-го порядка. □

Замечание 5.4. АФ

$$w=\sqrt{1+\sqrt{1}}$$

допускает выделение (однозначной = голоморфной) ветви на области

$$V_1=\{0<|z-1|<1\},$$

но не распадает на (однозначные) ветви на V_1.

А именно,

$$\mathcal{F}|_{V_1}=\{\pm\Phi(z),\mathcal{F}_3(2)\},$$

где

$$\Phi(z):=f_0(1+f_0(z))\in\mathcal{O}(V_1),$$
$$\mathcal{F}_3(2):=\sqrt{1-f_0(z)}$$

– АФ на V_1, содержит как однозначные, так и не однозначные функции.

Замечание 5.5. ПАФ, порожденная любым элементом нашей АФ $\mathcal{F}$, отличается от $\mathcal{F}$ только добавлением 2-х канонических элементов с центром $z=1$ (графиков функций Φ и $-\Phi$).

В частности, ПАФ может иметь различное число элементов с центрами в разных точках своей области определения (4 для всех $a\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, 2 для $a=1$). Нет понятия числа листов ПАФ (в отличие от АФ в области).

Замечание 5.6. Покажем, что

$$\mathcal{F}(z)=\sqrt{1+\sqrt{z}}$$

– это одна АФ на $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ и что она имеет при $z=\infty$ точку ветвления четвертого порядка. Здесь F_1 – результат АФ F_0 вдоль окружности γ_R, F_2 – результат АП F_1 вдоль γ_R и так далее:

$$F_0\overset{\gamma_R}{\to}F_1\overset{\gamma_R}{\to}F_2\overset{\gamma_R}{\to}F_3\overset{\gamma_R}{\to}F_0\ldots$$

Любой из 4-х элементов F_0, F_1, F_2 и F_3 нашей АФ $\mathcal{F}$ с центром $z=R$ может быть получен из $\forall$ другого посредством АП вдоль нужное число раз пройденной окружности γ_R. Следовательно, $\mathcal{F}$ – одна АФ на $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ с числом листов 4, а так же на $\{|z|>R-\varepsilon\}$. Тогда

$$\#\mathcal{F}|_{\{|z|>R-\varepsilon\}}=4,$$

откуда следует, что $z=\infty$ является точкой ветвления порядка 4 для $\mathcal{F}$.

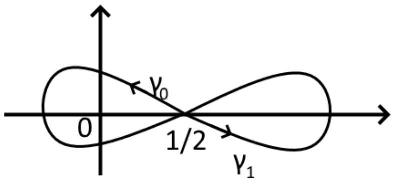

Рис. 5.3. Пути γ_0 и γ_1

Задача 5.2. *Пусть F_1, F_2, F_3 и F_4 – все элементы $\mathcal{F}$ с центром $1/2$, занумерованные сверху вниз, а γ_0 и γ_1 – пути (рис. 5.3).*

Доказать, что результаты АП вдоль γ_0 и γ_1 таковы:

$$F_2 \xleftarrow{\gamma_0} F_1 \xrightarrow{\gamma_1} F_1,$$

$$F_1 \xleftarrow{\gamma_0} F_2 \xrightarrow{\gamma_1} F_3,$$

$$F_4 \xleftarrow{\gamma_0} F_3 \xrightarrow{\gamma_1} F_2,$$

$$F_3 \xleftarrow{\gamma_0} F_4 \xrightarrow{\gamma_1} F_4,$$

Вывести отсюда, что пути $\gamma_0 \circ \gamma_1$ и $\gamma_1 \circ \gamma_0$ не гомотопны в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Лекция 6. Точки ветвления

Лемма о фундаментальной группе проколотого круга

Лемма 6.1. *Пусть*

$$V := \{0 < |z-a| < \varepsilon\},$$

а

$$\gamma_0^n : [0,1] \to V$$

задается формулй

$$\gamma_0^n(t) = a + (z_0 - a)e^{2\pi i n t}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Тогда любой непрерывный путь

$$\gamma : [0,1] \to V$$

с $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ *гомотопен в области* V *пути* γ_0^n *Для некоторого* $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем $c_0 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$z_0 - a = |z_0 - a|e^{ic_0}.$$

По лемме о непрерывной ветви аргумента вдоль пути $\exists$ непрерывная функция

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}$$

такая, что $c(0) = c_0$ и

$$\gamma(t) - a = |\gamma(t) - a|e^{ic(t)}$$

для всех $t \in [0,1]$.

Поскольку $\gamma(0) = \gamma(1)$, то

$$c(1) = c(0) + 2\pi n$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда искомая гомотопия задается формулой

$$\Gamma(s,t) = a + M(s,t)e^{iA(s,t)} \in V,$$

где

$$M(s,t) := |\gamma(t) - a|^s |z_0 - a|^{1-s},$$

$$A(s,t) := s \cdot c(t) + (1-s)(c_0 + 2\pi i n t),$$

где $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$. □

Задача 6.1. *Доказать, что пути* γ_0^n *не гомотопны друг другу в* V *при различных* $n \in \mathbb{Z}$.

Эквивалетное описание классификации изолированной точки АФ

Утверждение 6.1. *Пусть*

$$V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\},$$

$z_0 \in V$, $\mathcal{F}$ *– АФ на* V, $F_0 \in \mathcal{F}$ *– элемент с центром* z_0, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ F_n *определяется как результат АП* F_0 *вдоль* γ_0^n *(до есть вдоль* n *раз пройденной окружности).*

Тогда

$$(\text{число листов } \mathcal{F} \text{ в } V) = \min\{n \in \mathbb{N} | F_n = F_0\}.$$

Иными словами, $\mathcal{F}$ *имеет при* $z = a$

- *Изолированную точку однозначного характера* $\iff F_1 = F_0$;
- *Точку ветвления порядка* $n \in \{2, 3, \ldots\} \iff F_n = F_0$, *но* $F_j \neq F_0$ *при* $1 \leq j \leq n-1$;
- *Логарифмическую точку ветвления* $\iff F_n \neq F_0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из леммы 6.1 и теоремы 4.1 о продолжении вдоль гомотопных путей вытекает, что $\forall$ *элемент* $G \in \mathcal{F}$ *с центром* z_0 *равен* F_n *для некоторого* $n \in \mathbb{Z}$ (*).

1. Следовательно, если $F_1 = F_0$, то $F_n = F_0\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$ и число листов $\mathcal{F}$ в V равно число элементов $F \in \mathbb{Z}$ с центром z_0, то есть 1.

   Таким образом, $\mathcal{F}$ имеет изолированную особую точку однозначного характера.

2. Пусть $F_n = F_0$ при некотором $n \geq 2$, но

   $$F_j \neq F_0, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

   Все эти F_j различны, так как если

   $$F_k = F_l \tag{20}$$

   при некоторых $0 \leq k < l \leq n-1$, то АП равенства 20 вдоль γ_0^{k-l} дает

   $$F_0 = F_{l-k}$$

   вопреки определению n.

   Следовательно, множество элементов $\mathcal{F}$ с центром z_0 равно

   $$\{F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}\},$$

   то есть число листов в $\mathcal{F}$ в V равно n.

3. Если $F_n \neq F_0$ ни при каком $n \in \mathbb{N}$, то
$$F_k \neq F_l$$
ни при каких $1 \leq k < l$, иначе АП вдоль пути γ_0^{k-l} дало бы
$$F_0 = F_{k-l}.$$
Следовательно, число листов $\mathcal{F}$ в V равно ∞.

□

Ряды Пюизо

Утверждение 6.2. *Пусть АФ $\mathcal{F}$ на*
$$V = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-a| < \varepsilon\}$$
имеет при $z = a$ точку ветвления порядка $n \in \{2, 3, \dots\}$.

Тогда $\exists\ \Phi \in \mathcal{O}(0 < |\zeta| < \sqrt[n]{z})$ такое, что[9]
$$\mathcal{F}(z) = \Phi(\sqrt[n]{z-a}).$$

Доказательство. Пусть
$$F_0 = (U_0, f_0)$$
– любой элемент $\mathcal{F}$ с центром $z_0 \in V$ и
$$\Phi(\zeta) := f_0(a + \zeta^n)$$
для всех $\zeta \in U_0'$, где $U_0' \subset W$ – любой из n прообразов U_0 при отображении
$$z = a + \zeta^n. \tag{21}$$
Образ пути
$$\gamma_0'(t) = \zeta_0 e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$
при отображении (21) – это n раз пройденный путь γ_0^n с началом и концом z_0.

Поэтому результат продолжения канонического элемента функции Φ с центром ζ_0, где
$$z_0 = a + \zeta_0^n,$$
равен $f_n(a + \zeta^n)$, где
$$F_n(U_0, f_n),$$
есть результат АП элемента F_0 вдоль γ_0^n, то есть $F_n = F_0$ по критерию точки ветвления порядка n (утверждение 6.1).

Следовательно, получим исходный элемент, то есть число листов Φ в W равно 1, а значит, $\Phi \in \mathcal{O}(W)$ (продолжение вдоль $\forall$ пути в W с началом ζ_0 существует по определению композиции АФ).

Иллюстрацию к доказательству можно видеть на рис. 6.1. □

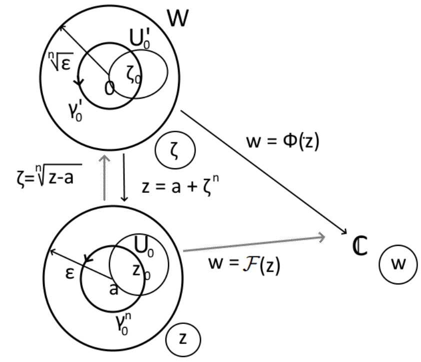

Рис. 6.1. Иллюстрация к доказательству утверждения 6.2

Замечание 6.1. Функция $\Phi \in \mathcal{O}(W)$ с указанными свойством, то есть такая, что

$$\mathcal{F}(n) = \Phi(\sqrt[n]{z-a})$$

не единственна. Таких функций ровно n штук:

$$\Phi_k(\zeta) := \Phi\left(e^{\frac{2\pi i k}{n}}\zeta\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

и сама Φ для $k = 0$.

Замечание 6.2. Обратим внимание на следующее забавное свойство:

$$w^k \sqrt[n]{z-a} = \sqrt[n]{z-a}$$

для

$$w = e^{2\pi i/n},$$

$k, n \in \mathbb{N}$. В частности,

$$\sqrt{z} = -\sqrt{z}.$$

Задача 6.2. *Выяснить, верно ли, что* $\exists$ *т АФ* $\mathcal{F} \neq 0$ *на* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *таких, что*

$$\mathcal{F} = 5\mathcal{F}.$$

Вернемся к замечанию 6.1. Композиция $\circ\pi$, где

$$\pi(\zeta) := a + \zeta^n,$$

состоит из n однозначных функций:

$$\mathcal{F} \circ \pi = \{\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}\}$$

на W.

[9]Иными словами, любая АФ с точкой ветвления порядка n при $z = a$ является в окрестности этой точки однозначной гломорфной функцией от $\sqrt[n]{z-a}$.

Замечание 6.3. Раскладывая $\Phi(\zeta)$ в ряд Лорана

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \zeta^k, \quad 0 < |\zeta| < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

и подставляя

$$\zeta = (z-a)^{1/n},$$

получим разложение АФ $\mathcal{F}$ в *ряд Пюизо* на кольце $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (z-a)^{k/n},$$

где правая часть понимается не как сумма бесконечного числа АФ, а как композиция $\Phi\left((z-a)^{1/n}\right)$.

Пример 6.1. Рассмотрим снова

$$w = \mathcal{F}(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}$$

(рис. **??**). Пусть

$$F_0 = (|z-1| < 1, \quad f_0(z))$$

– канонический элемент АФ $w = \sqrt{z}$ с центром $z_0 = 1$ и

$$f_0(z) = (1 + (z-1))^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^m (z-1)^m$$

таким, что $f_0(1) = 1$. Тогда

$$\mathcal{F}_1(z) = -f_0(1 + z^{1/2}) = -\sum_{m=0}^{\infty} C_{1/2}^m z^{m/2} =$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2} z^{1/2} - \frac{1}{8} z + \ldots\right), \quad 0 < |z| < 1,$$

так как, например,

$$C_{1/2}^2 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}.$$

Далее,

$$\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1,$$

$$\mathcal{F}_3(z) = \sqrt{1 - f_0(z)} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{8}(z-1)^2 9 \ldots\right)} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}(z-1)^{1/2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}(z-1) + \ldots} = \frac{i}{\sqrt{2}}(z-1)^{1/2}\left(\underbrace{1 - \frac{1}{8}(z-1) + \ldots}_{\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m (z-1)^m}\right), \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Аналогично,

$$\Phi(z) = \sqrt{1 + f_0(z)} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{8}(z-1)^2 + \ldots} =$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}(z-1) - \frac{1}{16}(z-1)^2 + \ldots\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8}(z-1) - \frac{5}{128}(z-1)^2\right), \quad |z-1| < 1,$$

где

$$-\frac{5}{128} = -\frac{1}{32} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

При $|z| > 1$

$$\mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}.$$

Пусть $1/z = t^4$. Тогда

$$\mathcal{F} = \sqrt[4]{z}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{z}}} = \frac{1}{t}\left(1 + t^2\right)^{1/2} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 + \ldots\right), \quad 0 < |t| < 1.$$

Перейдя обратно к записи через z, получим, что

$$\mathcal{F}(z) = \sqrt[4]{z}\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\right)^2\right) = z^{1/4}\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1/2} - \frac{1}{8}z^{-1} + \ldots\right), \quad |z| > 1.$$

Алгебраическая точка ветвления

Определение 6.1. Точка ветвления конечного порядка $n \in \{2, 3, \ldots\}$ называется *алгебраической*, если $\exists\ l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\lim_{z\to a}(z-a)^l\mathcal{F}(z) = 0$$

для любого из n значений $\mathcal{F}(z)$.

Замечание 6.4. Определению выше эквивалентна следующая запись:

$$F(z) = \Phi\left(\sqrt[n]{z-a}\right),$$

где

$$\Phi \in \mathcal{O}\left(0 < |\zeta| < \sqrt[n]{z}\right)$$

имеет при $\zeta = 0$ устранимую особую точку или полюс.

Замечание 6.5. При $n = 1$ определение тоже справедливо:

$$f \in \mathcal{O}\left(0 < |z-a| < \varepsilon\right)$$

имеет при $z = a$ алгебраическую точку, то есть $\exists\ l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\lim_{z\to a}(z-a)^l f(z) = 0,$$

тогда и только тогда, когда f имеет устойчивую особую точку или полюс при $z = a$.

Пример 6.2.

- У $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ все 6 особых точек алгебраические (рис. 5.2).
- У $e^{-1/\sqrt{z}}$ $z=0$ не алгебраическая особая точка, так как Φ имеет существенную особую точку.
- У $\ln z$ $z=0$ не алгебраическая особая точка, так как имеет бесконечное число листов.

Определение 6.2. *Алгебраичской функцией* называется АФ $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$ такая, что

1. число листов $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$ конечно;
2. все особенности $\mathcal{F}$ над точками $a_1,\dots,a_k,\infty$ алгебраические.

Пример 6.3. $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ является алгебраической функцией.

Теорема 6.1. *Если $\mathcal{F}$ – алгебраическая функция, то $\exists$ неприводимый полином $P(z,w)$ такой, что*

$$P(z,\mathcal{F}(z))\equiv 0$$

на $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$, или, эквивалентно,

$$w=\mathcal{F}(z) \iff P(z,w)=0. \tag{22}$$

Теорема 6.2. *Обратно, $\forall$ неприводимого полинома $P(z,w)$ $\exists$ единственная алгебраическая функция $w=\mathcal{F}(z)$ на $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$, где $a_1,\dots,a_k$ зависят от P, такая, что выполняется (22).*

Лекция 7. Теоремы об алгебраических функциях

Изолированная алгебраическая точка

Определение 7.1. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ АФ $\mathcal{F}$ называется алгебраической, если

1. Число листов $\mathcal{F}$ в проколотой окрестности точки a конечно;

2. $\exists\ N \in \mathbb{N}$ такое, что
$$\lim_{z \to a}(z-a)^N \mathcal{F}(z) = 0,$$
то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что из того, что $0 < |z-a| < \delta$ следует, что
$$|z-a|^N |\mathcal{F}| < \varepsilon$$
для всех значений $\mathcal{F}$ в точке z.

   Если $a = \infty$, то требуется $\exists\ N \in \mathbb{N}$ такого, что
$$\lim_{z \to \infty} z^{-N} \mathcal{F}(z) = 0.$$

Замечание 7.1. Написанное выше эквивалентно следующему:
$$\mathcal{F}(z) = \Phi(\sqrt[n]{z-a})$$
или
$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt[n]{z}}\right), \quad a = \infty,$$
где $\Phi \in \mathcal{O}(0 < |\zeta| < \varepsilon_0)$ имеет при $\zeta = 0$ устранимую особенность или полюс, то есть главная часть ряда Пюизо $\mathcal{F}(z)$ с центром $z = a$ содержит лишь конечное число ненулевых членов.

Определение 7.2. АФ $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ называется *алгебраической*, если

1. Число листов $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ конечно;

2. Все особые точки АФ $\mathcal{F}$ над $a_1, \ldots, a_k, \infty$ – алгебраические.

Теоремы об алгебраических функциях

Теорема 7.1. *$\forall$ алгебраической функции $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ $\exists$ неприводимый полином $P(z, w)$ с комплексными коэффицентами такой, что $P \not\equiv 0$ и*
$$P(z, \mathcal{F}(z)) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

При этом[10]

$$\deg_w P(z,w) = \text{ числу листов } \mathcal{F} \text{ на } \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Доказательство. Пусть

$$F_l = (U_l, f_l), \quad l = 1, \ldots, n$$

– все элементы АФ $\mathcal{F}$ с центром $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, где n равно числу листов $\mathcal{F}$.

Тогда выражения

$$\sigma_1(z) := f_1(z) + \ldots + f_n(z),$$

$$\sigma_2 := \sum_{1 \le i < j \le n} f_i(z) f_j(z),$$

и так далее до

$$\sigma_n(z) := f_1(z) \cdot \ldots \cdot f_n(z),$$

$z \in U$, где U такая, что $z_0 \in U$ и $U \subset U_l$ для всех $l = 1, \ldots, n$, переходят в себя при АП вдоль $\forall$ непрерывного пути

$$\gamma : \ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$$

с $\gamma(0) = (1) = z_0$, так как $f_1, \ldots, f_n$ при этом только переставляются.

Следовательно, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ задают АФ на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ с числом листов 1, то есть

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Особенность голоморфной функции $\sigma_1(z)$ при $z = a_j$, $j = 1, \ldots, k$ или $z = \infty$ – алгебраическая, так как σ_1 – это одна из АФ, на которые распадается выражение

$$\underbrace{\mathcal{F} + \ldots + \mathcal{F}}_{n \text{ раз}},$$

то есть сумма n функций, каждая из которых имеет алгебраическую особенность при $z = a_j$.

Следовательно, особенность голоморфной функции $\sigma_1(z)$ является полюсом или устранимой особенностью (так как это изолированная особая точка однозначного характера).

Следовательно, $\sigma_1(z)$ – мероморфная функция на $\overline{\mathbb{C}}$, то есть рациональная функция.

С помощью аналогичных рассуждений получим, что $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ тоже являются рациональными функциями.

[10]Если полином имеет вид

$$P(z,w) = \sum_{j=0}^{k} c_j(z) w^j,$$

где $c_k(z) \neq 0$, то

$$\deg_w P(z,w) = k.$$

Равенство

$$(w-f_1)(w-f_2)\dots(w-f_n)=w^n-\sigma_1 w^{n-1}+\sigma_2 w^{n-2}+\dots+(-1)^n\sigma^n$$

можно умножить на произведение $a_0(z)$ всех знаменателей рациональных функций $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ и получить, что полином

$$P(z,w)=a_0(z)w^n-a_1(z)w^{n-1}+a_2(z)w^{n-2}+\dots+(-1)^n a_n(z), \tag{23}$$

где

$$a_j(z):=\sigma_j(z)a_0(z),$$

и можно считать, что полиномы

$$a_0(z),a_1(z),\dots,a_n(z)$$

не имеют общих множителей, является искомым полиномом, так как

$$P(z,\mathcal{F}(z))=0$$

для всех элементов $\mathcal{F}$ в окрестности точки z_0 по построению, а значит, по теореме единственности и всюду на $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$.

Покажем, что полином (23) неприводим, то есть если

$$P=P_1P_2,$$

где P_1 и P_2 – полиномы от z и w, то либо $P_1\equiv\mathrm{const}$, либо $P_2\equiv\mathrm{const}$.

Действительно, из

$$P_1(z,f(z))P_2(z,f(z))\equiv 0$$

на U для элемента $F=(U,f)\in\mathcal{F}$ вытекает, что либо

$$P_1(z,f(z))\equiv 0 \text{ на } U, \tag{24}$$

либо

$$P_2(z,f(z))\equiv 0 \text{ на } U.$$

Пусть выполняется (24). Тогда по теореме единственности вдоль $\forall$ пути

$$P_1(z,f(z))\equiv 0$$

для $\forall$ элемента $(U,f)\in\mathcal{F}$.

Но из принципа изолированности нулей вытекает, что всегда $\exists$ точка $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$ такая, что значения всех элементов $\mathcal{F}$ в точке z_0 различны.

Следовательно,

$$\deg_w P_1(z_0,w)\geq n,\quad z:\ |z-z_0|<\varepsilon.$$

Так как этот полином имеет n различных корней, и для всех $z\in$ окрестности z_0 это тоже так.

Следовательно,

$$\deg_w P_2(z,w)=0$$

для всех z, то есть P_2 зависит только от z. Тогда в силу того, что полиномы

$$a_0(z),a_1(z),\dots,a_n(z)$$

не имеют общих множителей, $P_2\equiv\mathrm{const}$. □

Теорема 7.2. *Пусть $P(z,w)$ – неприводимый полином с комплексными коэффицентами. Тогда $\exists$ конечное мнжество*

$$A := \{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{C}$$

и алгебраическая функция $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus A$ такие, что

$$P(z, \mathcal{F}(z)) \equiv 0$$

на $\mathbb{C} \setminus A$.

Более того, для $z \in \mathbb{C} \setminus A$ имеем

$$P(z,w) - 0 \iff w = \mathcal{F}(z),$$

то есть w есть одно из значений $\mathcal{F}$ в точке z. При этом число листов $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus A$ равно $\deg_w P(z,w)$.

Доказательство. Пусть

$$Q(z,w) := \frac{\partial P}{\partial w}(z,w).$$

Тогда

$$\deg_w Q(z,w) = n-1,$$

где $n := \deg_w P(z,w)$.

Будем делить с остатком полиномы от w с коэффицентами, которые являются рациональными функциями от z. Получим

$$P = A_1 Q + B_1, \quad \deg_w B_1 < \deg_w Q,$$

$$Q = A_2 B_1 + B_2, \quad \deg_w B_2 < \deg_w B_1,$$

$$B_1 = A_3 B_2 + B_3, \quad \deg_w B_3 < \deg_w B_2,$$

и так далее до

$$B_{n-2} = A_{n+1} B_{n-1} + B_n, \quad \deg_w B_n < \deg_w B_{n-1},$$

$$B_{n-1} = A_{n+2} B_n + R, \deg_w R = 0,$$

то есть R – рациональная функция от z.

Заметим, что $R(z)$ обладает следующими свойствами:

1. Если $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ такая, что

$$P(z_0, w_0) = Q(z_0, w_0) = 0,$$

то $R(z_0) = 0$. Это следует непосредственно из определения.

2. Если $R(z) \equiv 0$, то $P(z,w)$ приводим.

   Действительно, если $R \equiv 0$, то

$$B_{n-1} \vdots B_n \;\Rightarrow\; B_{n-2} \vdots B_n \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; Q \vdots B_n \;\Rightarrow\; P \vdots B_n.$$

   При этом
$$\deg_w B_n \geq 1$$
   по определению R и
$$\deg_w B_n \leq \deg Q = n-1,$$

   так как $Q \vdots B_n$. Из неравенств

$$1 \leq \deg_w B_n \leq \deg_w P - 1$$

   вытекает, что для следующих полиномов от w с коэффицентами, которые являются рациональными функциями от z,

$$B_n \not\equiv \text{const}, \quad P/B_n \not\equiv \text{const}$$

   Тогда
$$a(z)P = \underbrace{P_1}_{a(z)B_n} \underbrace{P_2}_{P/B_n},$$

   для некоторого полинома $a(z)$ и полиномов P_1, P_2 от z, w.

   Тогда все коэффиценты одного из P_1, P_2 должны делиться на $a(z)$, так как для $\forall$ нуля z_0 полинома $a(z)$ имеем

$$P_1(w,z_0)P_2(w,z_0) \equiv 0, \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

   Предположим, что
$$P_1(w,z_0) \equiv 0$$

   (по теореме единственности), тогда все коэффиценты P_1 равны 0 в точке z_0. Можем сократить полином на $z - z_0$, и так для всех нулей $a(z)$.

   Свойство 2 доказано.

Определим теперь

$$A := \{z \in \mathbb{C} | a_0(z) = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} | R(z) = 0\}, \tag{25}$$

где $a_0(z)$ – старший коэффицент полинома

$$P(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) w^{n-k}.$$

Тогда $\forall\ z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$ и $\forall\ w_0 \in \mathbb{C}$ таких, что

$$P(z_0, w_0) = 0$$

имеем

$$\begin{cases} P(z_0, w_0) = 0 \\ Q(z_0, w_0) := P'_w(z_0, w_0) \neq 0 \end{cases}$$

по свойству 1 функции $R(z)$. Таким образом, функция от w $P(z_0, w)$ имеет в $w = w_0$ *нуль* 1*-го порядка* (*).

Множество A (25) конечно по свойству 2 функции $R(z)$ в силу неприводимости $P(z, w)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что

$$P(z_0, w) \neq 0$$

при $|w_0 - w| = \varepsilon$. Такое $\varepsilon > 0$ существует по признаку изолируемости нулей. Положим

$$\rho := \min_{|w-w_0|=\varepsilon} |P(z_0, w)| > 0.$$

Тогда

$$N(P(z,w), |w - w_0| < \varepsilon) = N\left(\underbrace{P(z,w) - P(z_0,w)}_{|\cdot|<\rho} + \underbrace{P(z_0,w)}_{|\cdot|>\rho}, |w - w_0| < \varepsilon\right) =$$

$$= N(P(z_0, w), |w - w_0| < \varepsilon) = 1$$

по теореме Руше и согласно (*), если $|z - z_0| < \delta$, где $\delta > 0$ таково, что

$$|P(z, w) - P(z_0, w)| < \rho$$

при $|z-z_0| < \delta$, $|w-w_0| = \varepsilon$[11] (такое δ существует в силу равномерной непрерывности P).

Для всех z в круге

$$|z - z_0| < \delta$$

обозначим через $f(z)$ единственный нуль функции от w $P(z, w)$ в круге $|w-w_0| < \varepsilon$.

Тогда по теореме Коши о вычетах

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\eta - w_0| = \varepsilon} \frac{Q(z,\eta)}{P(z,\eta)} \eta d\eta, \tag{26}$$

где $Q := \partial P / \partial w$.

Действительно, единственная особая точка в круге $|\eta - w_0| < \varepsilon$ – это $\eta = f(z)$. Вычет в ней равен

$$\frac{\overbrace{Q(z, f(z))}^{=\varphi(f(z))}}{\underbrace{P'(z, f(z))}_{=\psi'(f(z))}} = \frac{Q(z, f(z))}{Q(z, f(z))} f(z) = f(z).$$

[11]Или $|w - w_0| \leq \varepsilon$.

Из (26) по теореме о голоморфной зависимости интеграла от параметра вытекает, что
$$f \in \mathcal{O}\left(|z - z_0| < \delta\right).$$
Итак, показано, что $\forall\ z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$ и $\forall w_0 \in \mathbb{C}$ таких, что
$$P(z_0, w_0) = 0$$
$\exists$ окрестность W точки (z_0, w_0) в $\mathbb{C}^2$ такая, что множество
$$\big\{(z, w) \in W \mid P(z, w) = 0\big\}$$
совпадает с графиком
$$\big\{(z, f(z)) \mid |z - z_0| < \delta\big\}$$
некоторой голоморфной функции $f \in \mathcal{O}(|z - z_0| < \delta)$.

Продолжение доказательства см. в начале следующей лекции. $\square$

Лекция 8. Аналитическое продолжение элементов

Окончание доказательства теоремы 7.2

Теорема 7.2. *Пусть $P(z,w)$ – неприводимый полином с комплексными коэффицентами. Тогда $\exists$ конечное мнжество*

$$A := \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$$

и алгебраическая функция $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus A$ такие, что

$$P(z, \mathcal{F}(z)) \equiv 0$$

на $\mathbb{C} \setminus A$.

Более того, для $z \in \mathbb{C} \setminus A$ имеем

$$P(z,w) - 0 \iff w = \mathcal{F}(z),$$

то есть w есть одно из значений $\mathcal{F}$ в точке z. При этом число листов $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C}\setminus A$ равно $\deg_w P(z,w)$.

Доказательство. (Продолжение доказательства) Напомним, что на прошлой лекции построили

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid a_0(z) \neq 0, \quad R(z) \neq 0\},$$

где a_0 – коэффицент

$$P(z,w) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z) w^{n-k}, \quad n = \deg_w P,$$

а $R(z)$ – рациональная функция такая, что $R \not\equiv 0$ в силу неприводимости P и

$$R(z_0) = 0 \iff \exists\, w_0 \in \mathbb{C}$$

такая, что

$$P(z_0, w_0) = 0, \quad \partial P/\partial w(z_0, w_0) = 0$$

$\iff$ полином $P(z_0, w)$ имеет кратный корень. Кроме того, доказали, что $\forall\, z_0 \in \mathbb{C}\setminus A$ и $\forall\, w_0 \in \mathbb{C}$ таких, что

$$P(z_0, w_0) = 0$$

$\exists$ окрестность $\Omega \in \mathbb{C}^2$ точки (z_0, w_0) такая, что

$$\{(z,w) \in \Omega \mid P(z,w) = 0\} = \{(z, f(z)) \mid z \in U\}$$

для некоторой функции $f \in \mathcal{O}(U)$.

Проиллюстрируем это с помощью функции

$$P(z,w) = z - (w^2 - 1)^2.$$

Тогда

$$\mathcal{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$$

(рис. 5.2).

Вернемся к доказательству теоремы 7.2.

1. Заметим, что $\forall\ z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$ все нули полинома $P(z_0, w)$ простые (кратности 1), так как $R(z_0) \neq 0$ и степень этого полинома равна n, так как $a_0(z_0) \neq 0$.

   Следовательно, этот полином имеет n различных нулей и графики соответствующих им функций $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ над окрестностью U точки z_0 не пересекаются (в случае необходимости можно уменьшить U).

2. Покажем, что $\forall$ непрерывного пути

$$\gamma: \ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus A$$

с $\gamma(0) = z_0$, где z_0 – произвольная фиксированная точка из $\mathbb{C}\setminus A$, $\exists$ АП каждого из элементов

$$F_j = (U, f_j)$$

(точнее, F_j определяется как канонический элемент с центром z_0 такой, что $F_j \sim (U, f_j)$) вдоль пути γ.

Действитељо, $\forall\ t \in [0,1]$ точки $\gamma(t)$ имеет окрестность $U_{\gamma(t)} \subset \mathbb{C}$ такую же, как U для z_0, и n канонических элементов в центром $\gamma(t)$, как $f_1, \ldots, f_n$ для z_0.

Пусть δ – число Лебега покрытия

$$\left\{U_{\gamma(t)} \mid t \in [0,1]\right\}$$

и пусть

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$$

таковы, что

$$t_j - t_{j-1} < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда

$$\gamma([t_0, t_1]) \subset U_{\gamma(t_1)}$$

для некоторого τ_1. Следовательно, для всех $t \in [t_0, t_1]$ имеем n элементов

$$\Phi_1^0, \ldots, \Phi_n^0$$

с центрами $\gamma(t)$,

$$\Phi_j^0 \sim F_j^{\gamma(\tau_1)},$$

состовляющих АП исходных элементов

$$F_1, \ldots, F_n$$

вдоль пути $\gamma([t_0, t_1])$.

Перейдем ко второму шагу. $\gamma([t_1, t_2]) \subset U_{\gamma(\tau_2)}$ для некоторого τ, и есть n элементов с центрами $\gamma(tau_2)$ $F_j^{\gamma(\tau_2)}$ таких, что

$$F_j^{\gamma(\tau_2)} \sim F_j^{\gamma(\tau_1)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Получим АП всех элементов $F_1, \ldots, F_n$ вдоль $\gamma([t_1, t_2])$, и, следовательно, вдоль $\gamma([t_0, t_2])$.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, за m шагов получим АП элементов $F_1, \ldots, F_n$ вдоль всего пути $\gamma([0,1])$.

Итак, получили, что все элементы

$$(U, f_j), \quad j = 1, \ldots, n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus A$$

образуют одну АФ на $\mathbb{C} \setminus A$ с числом листов n.

Обозначим эту АФ через $\mathcal{F}$.

3. Покажем, что все особые точки $a \in A$ (а также $a = \infty$) аналитической функции $\mathcal{F}$ – алгебраические, и, следовательно, сама $\mathcal{F}$ алгебраическая.

   Если $a = z_0 \in A$ – конечная особая тчка, то величина

$$\eta = (z - z_0)^N \mathcal{F}(z) \tag{27}$$

   для любого $N \in \mathbb{N}$ удовлетворяет уравнению

$$P\left(z, \frac{\eta}{(z - z_0)^N}\right) = 0,$$

   то есть

$$a_0(z)\frac{\eta^n}{(z - z_0)^{Nn}} + a_1(z)\frac{\eta^{n-1}}{(z - z_0)^{N(n-1)}} + \ldots + a_n(z) = 0,$$

   или, по-другому,

$$a_0(z)\eta^n + a_1(z)\eta^{n-1}(z - z_0)^N + \ldots + a_n(z)(z - z_0)^{Nn} = 0. \tag{28}$$

   Если $a_0(z_0) \neq 0$, то утверждение о том, что $\eta \to 0$ при $z \to z_0$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.1. *Пусть*

$$|c_1| + \ldots + |c_n| \to 0.$$

Тогда все нули полинома

$$w^n + c_1 w^{n-1} + \ldots c_n = 0$$

тоже $\to 0$. *Точнее,* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ *такое, что*

$$|c_1| + \ldots + |c_n| < \delta,$$

а значит, все нули w *этого полинома лежат в круге* $|w| < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем δ так, что если

$$|c_1| + \ldots + |c_n| < \delta,$$

то

$$\varepsilon^n > |c_1|\varepsilon^{n-1} + |c_2|\varepsilon^{n-2} + \ldots \ |c_n|. \tag{29}$$

Тогда

$$N(P(w), |w| < \varepsilon) = N(\underbrace{w^n}_{f(w)} + c_1 w^{n-1} + \ldots + c_{n g(w)}, \quad |w| < \varepsilon) =$$

$$= N(w^n, \quad |w| < \varepsilon) = n$$

по теореме Руше, так как, с учетом (29),

$$|f(w)| = \varepsilon^n > |g(w)|, \quad |w| = \varepsilon.$$

Таким образом, все нули $P(w)$ лежат в круге $|w| < \varepsilon$. □

Подытожим сказанное выше. Если $a_0(z_0) \neq 0$, то

$$(z - z_0)^N \mathcal{F}(z) \to 0, \quad z \to z_0$$

для надлежащего $N \in \mathbb{N}$, то есть z_0 – флгебраическая особая точка.

Если $a_0(z_0) = 0$, то найдем наименьшее $j \in \mathbb{N}$ такое, что $a_j(z_0) \neq 0$ и применим те же рассуждения к полиному (28) степени $n - j$ по w. Получим, что z_0 – алгебраическая особая точка.

Все

$$a_j(z_0), \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

не могут быть одновременно равны 0, так как тогда $P(z, w)$ делится на $z - z_0$, и, стало быть, приводим.

Случай $a = \infty$ рассматривается аналогично с заменой (27) на

$$\eta = \frac{\mathcal{F}(z)}{z^N},$$

а $z \to z_0$ на $z \to \infty$.

□

Задача

Задача 8.1. *Пусть $w = \mathcal{F}(z)$ – АФ, задаваемая уравнением*

$$z = w^n - w^{n+1},$$

где $n \geq 2$ – целое число.

1. *Описать все особые точки $\mathcal{F}$: это точки 0, $n^n/(n+1)^{n+1}$ и ∞.*

2. *Для любого заданного типа изолированной особой точки однозначного характера (устранимая, полюс, существенная особенность) привести пример АФ с числом листов $n+1$ на $\mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}$, имеющей при $z = 0$ одну точку ветвления порядка n и устранимую особенность, полюс или существенную особенность.*

3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $f \in \mathcal{O}(D)$ не принимает значений 0 и $n^n/(n+1)^{n+1}$.*

   Доказать, что $\exists\ g \in \mathcal{O}(D)$ такая, что
   $$f = g^n - g^{n+1}$$
   в области D.

Лемма о стирании отрезка

Лемма 8.2. *(О стирании отрезка) Пусть $D \in \mathbb{C}$ – открытое множество, $l \subset \mathbb{C}$ – прямая, и*
$$f \in \mathcal{O}(D \setminus l) \cap C(D).$$
Тогда $f \in \mathcal{D}$.

Доказательство. Достаточно считать, что
$$D = \{|z| < R\}, \quad l = \mathbb{R}.$$
По теореме Морера, достаточно проверить, что
$$\int\limits_{\partial T} f(z)dz = 0 \tag{30}$$
$\forall$ открытого треугольника такого, что $\overline{T} \subset D$ (рис. 8.1).

Рис. 8.1. Возможные виды треугольников $\subset D$

0. Для треугольника T_0 такого, что $T_0 \cap R = \emptyset$, равенство (30) вытекает из интегральной теоремы Коши.

1. Для треугольника T_1 такого, что $\overline{T_1} \cap \mathbb{R} = \{a\}$, разобьем T_1 на гомотетичный ему εT_1, $\varepsilon > 0$ и несколько треугольников типа T_0 (рис. 8.1) (интеграл от f по их границам равен 0 в силу доказанного). Тогда
$$\left|\int\limits_{\partial T_1} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\partial(\varepsilon T_1)} f(z)dz\right| \le \max_{z\in\partial(\varepsilon T_1)} |f(z)|(\text{периметр } \varepsilon T_1) \le \text{const}\varepsilon \to 0$$
при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,
$$\left|\int\limits_{\partial T_1} f(z)dz\right| = 0.$$

2. Для треугольника T_2 такого, что
$$\overline{T_2} \cap \mathbb{R} = \text{ сторона } [a,b],$$
можно записать
$$\int\limits_{\partial T_2} f(z)dz = \int\limits_{\partial \Pi_h} f(z)dz,$$
где
$$\Pi_h = [a,b] \times [0,h]$$
– прямоугольник с основанием $[a,b]$ произвольной высоты h.

Но
$$\int\limits_{\partial \Pi_h} f(z)dz = \int\limits_a^b \left(f(x) - f(x+ih)\right) dz + \underbrace{\int\limits_b^{b+ih} f(z)dz}_{\substack{\text{по стандартной оценке} \\ |\cdot|\le \text{const}\cdot h}} - \underbrace{\int\limits_a^{a+ih} f(z)dz}_{\substack{\text{по стандартной оценке} \\ |\cdot|\le \text{const}\cdot h}}.$$

Заметим, что
$$\int\limits_{\partial \Pi_h} f(z)dz = \int\limits_a^b \left(f(x) - f(x+ih)\right) dz \le (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f(x+ih)| \to 0$$
при $h \to 0$ в силу равномерной непрерывности $f(z)$.

Следовательно,
$$\int\limits_{\partial \Pi_h} f(z)dz \to 0, \quad h \to 0+,$$
и, значит,
$$\int\limits_{\partial T_2} f(z)dz = 0.$$

3. Общий треугольник T_3 разбивается на треуглbники вида T_0, T_1, T_2, а значит

$$\int\limits_{\partial T_3} f(z)dz = 0.$$

□

Принцип симметрии

Утверждение 8.1. *(Принцип симметрии) Пусть D_1, $D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ – открытые множества такие, что граница ∂D_j содержит дугу γ_j (непустой открытый интервал) окружности Γ_j, $j = 1, 2$, причем*[12]

$$D_j \cap D_j^* = \emptyset,$$

и множество

$$G_j := D_j \cup \gamma_j \cup D_j^*$$

открыто (рис. 8.2).

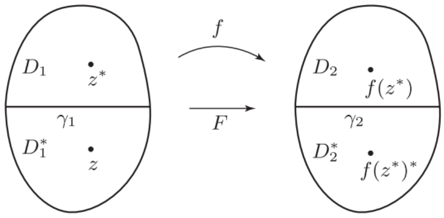

Рис. 8.2. Принцип симметрии

Пусть $w = f(z)$ – конформное отображение D_1 на D_2, причем f непрерывн на $D_1 \cup \gamma_1$ и биективно отображает γ_1 на γ_2.

Тогда функция

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \cup \gamma_1 \\ \overbrace{f(\underbrace{z^*}_{\textit{отн. } \Gamma_1})^*}^{\textit{отн. } \Gamma_2}, & z \in D_1^* \end{cases}$$

конформно отображает G_1 на G_2.[13]

Доказательство. 1. Пусть

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathbb{R}.$$

Тогда функция

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})} = f(z^*)^*$$

[12]Здесь $*$ означает симметрию относительно Γ_j.
[13]Точки, симметричные относительно Γ_1, переходят при F в точки, симметричные относительно Γ_2.

голоморфна на D_1^*, так как $\forall\ a \in D_1^*$ имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \overline{a})^n, \quad |z - \overline{a}| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} (z - a)^n, \quad |z - a| < \varepsilon$$

– голомофрная в точке a функция как сумма сходящегося степенного ряда.

Далее, функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \mathrm{Re} z \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})}, & \mathrm{Re} z < 0 \end{cases}$$

непрерывна на G_1 (то есть в точках вещественной оси) в силу условия

$$f(\gamma_1) \subset \Gamma_2,$$

то есть[14]

$$f(z) \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $f \in \mathcal{O}(G_1)$ по лемме 8.2 о стирании отрезка. По построению и условию, что f биективно отображает γ_1 на γ_2, F биективно отображает G_1 на G_2. Следовательно, по окончательной формулировке теремы об обратной функции, F есть конформное отображение.

2. Общий случай сводится к случаю 1 дробно-линейной заменой

$$\zeta = \Phi(z), \quad \eta = \Psi(w),$$

приводящей Γ_1 и Γ_2 в вещественную ось. При этом используется свойство сохранения симметрии при дробно-линейных отображениях.

□

Пример 8.1. Рассмотрим контрпример. Пусть D_1 – верхняя полуплоскость, кроме отрезка $[0, i]$, а $\gamma_1 = \Gamma_1 = \mathbb{R}$. Тогда

$$0 \in D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$$

не является открытым множеством.

[14]Пределы при $z \to x_0 \pm i0$ совпадают.

Лекция 9. Теорема Каратеодори

Принцип соответствия границ

Определение 9.1. Область $D \in \mathbb{C}$ называется *локально связной в точке* $a \in \partial D$, если $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\ r \in (0, \varepsilon)$ множество $D \cap \partial B(a, r)$ непусто и связно, то есть является одно открытой дугой окружности $\partial B(a, r)$.

Здесь

$$B(a, r) = \{|z - a| < r\},$$
$$\partial B(a, r) = \{|z - a| = r\}.$$

Теорема 9.1. *(Каратеодори) Если $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ – ограниченные области, локально связные в каждой своей граничной точке и*

$$f:\ D_1 \to D_2$$

– конформное отображение, то $\exists$ гомеоморфизм

$$F:\ \overline{D_1} \to \overline{D_2}$$

такой, что $F = f$ на D_1.[15]

Прежде, чем перейти к доказательству, сформулируем замечения к теореме 9.1.

Замечание 9.1. Если D локально связна в точке $a \in \partial D$, то $\forall\ r \in (0, \varepsilon)$ открытое множество $D \cap B(a, r)$ непусто и линейно связно.

Доказательство. Действительно, $\forall\ z_0, z_1 \in M := D \cap B(a, r)$ (можно считать $|z_0| \geq |z_1|$) $\exists$ ломаная

$$\gamma:\ [0,] \to D,$$

такая, что $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$. Пусть

$$t_0 = \max\{t \in [0, 1]\ ||\gamma(t) - a| = |z_0|\}$$

(множество таких t конечно, как пересечение ломаной и окружности).

Тогда

$$|\gamma(t) - a| < |z_0|, \quad t_0 < t \leq 1,$$

то есть путь $\gamma([t_0, 1])$ лежит в M.

Заменим $\gamma([0, t_0])$ на дугу окружности

$$|z - a| = |z_0 - a|,$$

соединяющую z_0 и $\gamma(t_0)$ в $D \cap \partial B(a, |z_0 - a|)$. Получим путь, соединяющий z_0 и z_1 в M. □

[15] Иными словами, любое конформное отображение таких областей продолжается по непрерывности до гомеоморфизма замыканий.

Замечание 9.2. Примеры показывают, что если D_1 не является локальной связной областью в точке $a \in \partial D_1$, то конформное отображение

$$f: \ D_1 \to D_2$$

не продолжается непрерывно в точку a.

Например, это не выполняется для $w = f(z)$,

$$f: \ D_1 \to D_2,$$

где

$$D_1 = \{|z| < 1, \quad z \notin [0,1]\},$$
$$D_2 = \{|z| < 1, \quad \Im z > 0\},$$
$$z = w^2.$$

Окрестность точки $z = a \in [0,1]$ в пределе будет переходить $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$ одновременно.

Замечание 9.3. В классической формулировке теоремы Каратеодори D_1, D_2 – области, ограниченные замкнутыми жордановыми кривыми, то есть образами $S = \{|z| = 1\}$ при гомеоморфном вложении в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. (теоремы 9.1 Каратеодори)

1 шаг Покажем, что $\forall \ a \in \partial D_1$

$$\exists \lim_{\substack{z \in D_1 \\ z \to a}} f(z) \in \overline{D_2}.$$

Если это не так, то $\exists$ последовательности $\in D_1$

$$z_n^{(1)} \to a, z_n^{(2)} \to a$$

такие, что

$$f(z_n^{(1)}) \to w_1,$$
$$f(z_n^{(2)}) \to w_2$$

для некоторых $w_1, w_2 \in \partial D_2$, $w_1 \neq w_2$. Априори $w_1, w_2 \in \overline{D_2}$, но в D_2 быть не могут в силу непрерывности отображения $z = g(w)$, обратного к $w = f(z)$, в этих точках.

Пусть U_1, U_2 – открытые круговые окрестности w_1 и w_2 такие, что

$$\operatorname{dist}(\overline{U_1}, \overline{U_2}) \geq \alpha > 0.$$

В силу замечания 9.1, $D \cap U_1$ и $D \cap U_2$ линейно связаны, то есть $\exists$ непрерывные отображения

$$\gamma_1: \ [0,1) \to D \cap U_1,$$
$$\gamma_2: \ [0,1) \to D \cap U_2$$

такие, что

$$\gamma_j\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f(z_n^{(j)}), \quad j = 1,2, \quad n \geq n_0.$$

Тогда

$$\eta_j := f^{-1} \circ \gamma_j$$

– непрерывные пути в D_1, причем $|\eta_j(t) - a|$ принимает на $[0, 1)$ *все* значения из $(0, r_0)$ по теореме о промежуточном значении.

Следовательно, $\forall\ r \in (0, r_0)$ $\exists$ точки $a_r \in \eta_1 \cap \partial B(a, r)$ и $b_r \in \eta_2 \cap \partial B(a, r)$ такие, что дуга окружности $\partial B(a, r)$ между ними лежит целиком в D_1 (по определению локальной связности).

Для всех $r \in (0, r_0)$ имеем

$$\alpha \underbrace{\leq}_{\text{опр. dist}(\overline{U_1},\overline{U_2})} |\underbrace{f(a_r)}_{\in U_1} - f(b_r)_{\in U_2}| =$$

$$= \left| \int\limits_{a_r}^{b_r} f'(z)dz \right|,$$

где интеграл берется по дуге $\partial B(a, r)$ между a_r и b_r. Далее, сделав замену

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad \theta_1(r) \leq\leq \theta_2(r),$$

получим

$$\left| \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f'(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta.$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$$|\int\limits_I h(\theta) \cdot 1 d\theta|^2 \leq \int\limits_I |h(\theta)|^2 d\theta \cdot \int\limits_I 1^2 d\theta.$$

Тогда

$$\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta \leq \sqrt{\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})|^2 r^2 d\theta} \underbrace{\sqrt{\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} 1 d\theta}}_{\leq 2\pi}.$$

Это неравенство возведем в квадрат, поделим на r и проинтегрируем по r от ε до r_0:

$$\alpha^2 \ln \frac{r_0}{\varepsilon} \leq 2\pi \int\limits_{\varepsilon}^{r_0} \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})|^2 \underbrace{r dr d\theta}_{dxdy} <$$

$$< 2\pi \int\int_{D_1} |f'(x + iy)|^2 dxdy = 2\pi \int\int_{D_1} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dxdy = \tag{31}$$

$$= 2\pi \int\int_{D_2} dudv = 2\pi (\text{площадь } D_2) = \text{const}.$$

При $\varepsilon \to 0$ неравнество

$$\alpha^2 \ln \frac{r_0}{\varepsilon} \leq C$$

дает противоречие.

Заметим, что равенство (31) вытекает из условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det(d_z f) = \det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = A^2 + B^2 = |f'(z)|^2,$$

где $A = u_x$, $B = v_x$ и $A + iB = u_x + iv_x = f'(z)$.

Шаг 1 закончен.

2 шаг Полученное на 1 шаге отображение

$$F(z) := \lim_{\substack{\zeta \in D_1 \\ \zeta \to z}} f(\zeta), \quad z \in \overline{D_1}$$

является непрерывным отображением

$$F: \ \overline{D_1} \to \overline{D_2}.$$

Действительно, непрерывность F в точках $z \in D_1$ ясна из того, что $F = f$ на D_1.

Если же $z_0 \in D_1$ и $z_k \in \overline{D_1}$, любая последовательность с $z_n \to z_0$, то выберем $\forall\ n$ точку $z_n' \in D_2$ такую, что

$$|z_n - z_n'| < \frac{1}{n}.$$

По определению $F(z_n)$,

$$|F(z_n) - f(z_n')| < \frac{1}{n} \tag{32}$$

Тогда $z_n' \to z_0$ при $n \to \infty$, $z_n' \in D_1$ и $f(z_n') \to F(z_0)$ по определению $F(z_0)$.

Тогда $F(z_n) \to F(z_0)$ по неравенству (32), то есть F непрерывна в точке z_0.

3 шаг Пусть $z = g(w)$ – обратное к f отображение

$$g: \ D_2 \to D_1.$$

Согласно шагам 1 и 2 $\exists$ непрерывное

$$G: \ \overline{D_2} \to \overline{D_1}$$

такое, что $G = g$ на D_2.

Тогда

$$G \circ F: \ \overline{D_1} \to \overline{D_1}$$

– непрерывное отображение, равное[16]

$$g \circ g = \mathrm{Id}$$

на D_1, то есть

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{\overline{D_1}}$$

по непрерывности. Аналогично,

$$F \circ G = \mathrm{Id}_{\overline{D_2}}.$$

Следовательно, F – гомеоморфизм $\overline{D_1}$ на $\overline{D_2}$. $\square$

[16]Здесь Id означает непрерывное отображение.

Задача 9.1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная ограниченная область, локальная связная в каждой граничной точке.*

1. *Доказать, что $\overline{D}$ гомеоморфна замкнутому кругу $\{|w| \le 1\}$, а ∂D гомеоморфна окружности $\{|w| = 1\}$.*

2. *Доказать, что $\forall\ a, b, c \in \partial D$ с положительным направлением обхода ∂D от a к c через b и $\forall\ a', b', c' \in \partial U$ с тем же направлением обхода $\exists$ единственное конформное отображение D на U, приводящее a, b, c в a', b', c' соответственно.*

АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ с значениями $\{|w| < 1\}$

Утверждение 9.1. $\exists$ *АФ $w = \mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ такая, что $\mathcal{F} \not\equiv const$ и $\forall$ элемента $F = (U, f) \in \mathcal{F}$ выполнено включение*

$$f(U) \subset U_0 := \{|w| < 1\}.$$

Доказательство. Пусть $a, b, c \in \partial U_0$ – произвольные точки и $\Delta \in U_0$ – треугольник с вершинами a, b, c и сторонами, $\perp \partial U_0$ (т.н. *гиперболический треугольник*). Такой треугольник $\exists$ и единственнен, поскольку существует отображение (рис. 9.1).

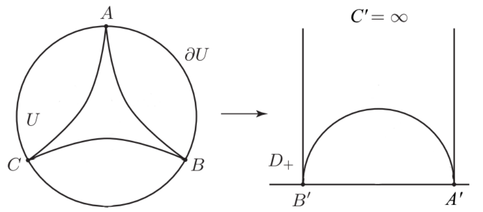

Рис. 9.1. ДЛО гиперболического треугольника

Область Δ односвязна, так как гомеоформна кругу вдоль радиусов. Следовательно, по теореме Римана $\exists$ конформное отображение[17] $\Delta \to \Pi_0$ на верхнюю полуплоскость, причем после дробно-линейного преобразования можно считать, что

$$a \to 0, \quad b \to 1, \quad c \to \infty.$$

Обозначим полученное конформное отображение $\to \Pi_0$ через f_0. По теореме 9.1 Каратеодори $\exists$ гомеоморфизм

$$F_0 : \ \overline{\Delta} \to \Pi$$

равный f_0 на Δ.

Тогда по принципу симметрии $\exists$ конформное отображение

$$F_j : \ \Delta \cup \Delta_j \cup \gamma_j \to \mathbb{C} \setminus I_k \cup I_l$$

(рис. 9.2).

[17]Заметим, что это не то же самое отображение, которое изображено на рис. 9.1.

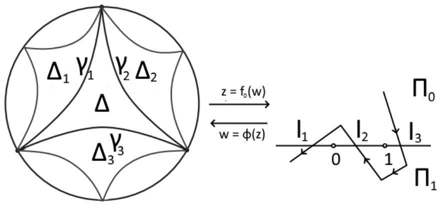

Рис. 9.2. Отображение гиперболического треугольника на $\mathbb{C}$

Покажем, что $\forall\ z_0 \in \Pi_0$ элемент $w = \varphi(z)$ с центром z_0 функции, обратной к f_0, допускает АП вдоль $\forall$ ломаной

$$\gamma :\ [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

не содержащей отрезков (этого достаточно по теореме 4.1 о продолжении вдоль гомотопных путей).

Это делается применением принципа симметрии столько раз, сколько γ пересекает вещественную ось. $\square$

Малая теорема Пикара

Теорема 9.2. *(Малая теорема Пикара) Целая функция, не принимающая значений* 0 *и* 1, *постоянна.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $z = f(\zeta)$.

Композиция $\mathcal{F} \circ f$ определена как одна или несколько АФ на $\mathbb{C}$ и все эти функции по теореме 5.1 о монодромии однозначны, то есть $\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (так как $\mathbb{C}$ односвязна). Тогда по теореме Луивилля они все $\equiv$ const.

Тогда f как композиция f_0 или одной из f_j, $j = 1, 2, 3$ с одной из функций, $\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ или $\equiv$ const, тоже $\equiv$ const. $\square$

Лекция 10. Формула Кристоффеля – Шварца

Дополнение к построению АФ в единичном круге

Добавим к доказательству утверждения в соответствующем пункте следующее соображение.

Образ $\mathcal{F}$ лежит в U_0, так как U_0 переходит в себя при симметрии относительно любой окружности $\perp \partial U_0$.

Задача 10.1. *Доказать, что не $\exists$ конечнозначных (в том числе голоморфных) АФ $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ с образом в U_0, кроме*

$$\mathcal{F} \equiv const.$$

Замечание 10.1. Следует доказать, что особые точки 0, 1 и ∞ такой функции $\mathcal{F}$ – алгебраические. Следовательно, $\exists$ неприводимый полином $P(z, w)$ такой, что

$$P(z, \mathcal{F}(z)) \equiv 0.$$

Проверьте, что $\forall\ w_0 \in \mathbb{C}\ \exists$ сколь угодно близкая к w_0 точка $w_1 \in \mathbb{C}$ такая, что уравнение

$$P(z, w_1) = 0$$

имеет решение $z \in \mathbb{C}$, отичное от 0 и 1. Тогда $w_1 \in$ образу $\mathcal{F}$ в точке z, то есть образ $\mathcal{F}$ не лежит в U_0.

Задача 10.2. *Доказать, что на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ не $\exists$ АФ $\mathcal{F} \not\equiv const$ с образом в U_0.*

Замечания к малой теореме Пикара

Замечание 10.2. Теорема 9.2 эквивалентна тому, что если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ не принимает двух значений $a \neq b \in \mathbb{C}$, то

$$f \equiv \text{const}.$$

Для доказательства этого факта следует применить малую теорему Пикара к функции

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a},$$

не принимающей значений 0 и 1.

Заметим также, что данное утверждение будет окончательным усилением теоремы Луивилля (если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $f(\mathbb{C}) \subset U$ для некоторого круга, то $f \equiv \text{const}$).

Замечание 10.3. Покажем, что если $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и

$$f^3(z) + g^3(z) \equiv 1,$$

то $f, g \equiv \text{const}$.

Доказательство. Запишем равенство

$$f^3(z) + g^3(z) = 1$$

как

$$(f - ag)(f - bg)(f - cg) = 1, \tag{33}$$

где

$$\{a, \quad b, \quad c\} = \left\{-1, e^{\pi i/3}, e^{-pii/3}\right\}$$

– все кубические корни из -1.

Будем считать, что $g \not\equiv 0$. Тогда функция $h := f/g$ мероморфна на $\mathbb{C}$, так как голоморфна всюду вне нулей $g(z)$, а в нулях $g(z)$ имеет полюсы. Кроме того, $h(z)$ не принимает значений a, b, c, так как в таких точках правая часть (33) равна 0.

Пусть

$$\Phi : \ \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

– дробно-линейное отображение, переводящее a, b, c в $0, 1, \infty$ (оно существует по свойству 3-х точек). Тогда

$$\Phi \circ h \in M(\mathbb{C})$$

не принимает значения $0, 1, \infty$. Из этого следует, что

$$\Phi \circ h \equiv \text{const}$$

по теореме 9.2 (малой теореме Пикара).

Тогда

$$h = \Phi^{-1} \circ \Phi \circ h \equiv C = \text{const}.$$

Подставляя $f = Cg$ в уравнение

$$f^3 + g^3 = 1,$$

видим, что $g \equiv \text{const}$ и $g \equiv \text{const}$. □

Задача 10.3. *Доказать, что при $n \geq 4$ из того, что $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и*

$$f^n + g^n = 1$$

вытекает, что $f, g \equiv const$.

Задача 10.4. *Доказать, что если $f, g \in \mathcal{O}$ и*

$$f^2 + g^2 \equiv 1,$$

то $\exists\ h \in \mathcal{O}$ такая, что

$$\begin{cases} f(z) = \cos h(z) \\ g(z) = \sin h(z) \end{cases}$$

Замечание 10.4. Следует применить теорему о монодромии.

Формула Кристоффеля – Шварца

Утверждение 10.1. *Пусть $f \in \mathcal{O}(\Pi_+) \cap C(\overline{\Pi_+} \cap \{\infty\})$ конформно отображает верхнюю полуплоскость Π_+ на ограниченный многоугольник $D \subset \mathbb{C}$ с внутренними углами $\pi\alpha_j$, $0 < \alpha_j \leq 2$ при вершинах A_j, где $A_1A_2\ldots A_n$ – положительное положение обхода ∂D (рис. 10.1), и биективно отображает $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на ∂D, причем $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – прообразы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, в частности, $f(\infty) \in A_nA_1$ – не вершина.*

Тогда $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ такие, что

$$f(z) = C_1 \int\limits_{x_0}^{z} \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (\zeta - a_j)^{\alpha_j - 1} d\zeta}_{\varphi(\zeta)} + C_2$$

для $z \in \overline{\Pi}_+$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{O}(G)$ – любая ветвь[18] АФ

$$(\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

в односвязной области

$$G = \mathbb{C} \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_n),$$

где L_i, $i = 1, \ldots, n$ – лучи вида $(a_i, a_i - i\infty)$.

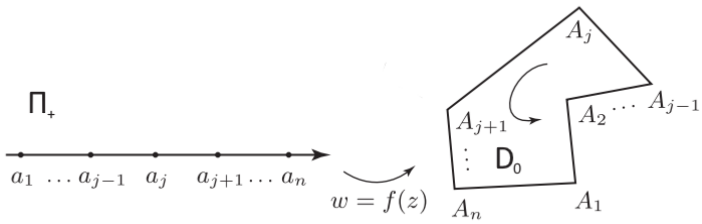

Рис. 10.1. Отображение Π_+ на ограниченный многоугольник D

Доказательство. 1 шаг. Покажем, что функция[19]

$$g(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{O}(\Pi_+)$$

допускает АП до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Действительно, f допускает АП в нижнюю полуплоскость через любой $[a_j, a_{j+1}]$, включая «отрезок»

$$[a_n, a_1] = (-\infty, a_1] \cup [a_n, \infty) \cup \{\infty\}$$

по принципу симметрии[20], то есть до голоморфной функции на

$$\Pi_+ \cup (a_j, a_{j+1}) \cup \Pi_-.$$

[18]От другого выбора x_0 и другой ветви изменятся только константы C_1, C_2.
[19]$f'(0) \neq 0$ в Π_+ по критерию локальной однолистности.
[20]То есть по формуле $f(\overline{z})^*$, где $\overline{z}$ симметрично относительно $\mathbb{R}$, а $*$ – относительно $[A_j, A_{j+1}]$

Полученная в Π_- функция допускает АП в Π_+ через любой другой отрезок $[a_k, a_{k+1}]$ и так далее.

Следовательно, исходный элемент (Π_+, f) допускает АП вдоль $\forall$ ломаной

$$\gamma: \ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$

с $\gamma(0) \in \Pi_+$ и без ребер, лежащих в $\mathbb{R}$ (применяя принцип симметрии столько раз, сколько γ пересекает $\mathbb{R}$).

Итак, $f \in \mathcal{O}(\Pi_+)$ допускает АП до некоторой $\mathcal{F}$ на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ (по замечанию в теореме о продолжении вдоль гомотонных путей).

При этом для любых 2 ветвей $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\Pi_+)$ нашей АФ $\mathcal{F}$ в односвязной области Π_+ значение $f_2(z)$ получается из $f_1(z)$ конечным (и даже счетным) числом отражений относительно прямых в плоскости w (сторон многоугольника D).

Следовательно, композиция четного числа отражений = композиции сдвигов и поворотов = сдвиг и поворот.

Значит, $\forall\ z \in \Pi_+$

$$f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z) + w_0$$

для каких-то чисел $\theta \in \mathbb{R}$, $w_0 \in \mathbb{C}$, зависящих только от расположения строн многоугольника D.

Следовательно,

$$f_2'(z) = e^{i\theta} f_1'(z),$$
$$f_2''(z) = e^{i\theta} f_1''(z),$$

откуда следует, что

$$\frac{f_2''}{f_2'} = \frac{f_1''}{f_1'}$$

в Π_+. То есть, полагая

$$g := \begin{cases} f''/f' \text{ в } \overline{\Pi_+} \\ h''/h' \text{ в } \Pi_- \end{cases}$$

для $\forall$ ветвей f, h нашей АФ $\mathcal{F}$ в Π_+, Π_- соответственно, получим функцию

$$g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}),$$

что и требовалось доказать на шаге 1.

2 шаг. В каждой точке $z = a_j$ функция $g(z)$ имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\alpha_j - 1$.

Для окрестности точки a_j положим $\zeta = h(z)$ как композицию $w = f(z)$ и $\zeta = (w - A_j)^{1/\alpha_j}$, где A_j – угол многоугольника D, в который $f(z)$ переводит кусок прямой с a_j, а $\pi\alpha_j$ – величина соответствующего угла.

По принципу симметрии отображение $\zeta = h(z)$ продолжается до конформного отображения $h \in \mathcal{O}(|z - a_0| < \varepsilon)$ некоторой окрестности точки a_j на некоторую окрестость точки $\zeta = 0$, приводящую $\mathbb{R}$ в прямую L.

Следовательно, $h'(a_j) \neq 0$ по критерию локальной однолистности. То есть,

$$h(z) = (z - a_j)H(z), \quad H \in O(a_j), \quad H(a_j) \neq 0,$$

откуда

$$h(z) = (z - a_j)e^{\Phi(z)}$$

в окрестности точки a_j, где $\Phi \in O(a_j)$.

Итак,

$$(f(z) - A_j)^{1/\alpha_j} = (z - a_j)e^{\Phi(z)}$$

для $z \in \overline{\Pi_+ \cap \{|z - a_j| < \varepsilon\}}$.

Следовательно,

$$f(z) = A_j + (z - a_j)^{\alpha_j} e^{\alpha_j \Phi(z)},$$

откуда

$$f'(z) = \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} e^{\alpha_j \Phi(z)} + (z - a_j)^{\alpha_j} e^{\alpha_j \Phi(z)} \alpha_j \Phi'(z) =$$
$$= (z - a)^{\alpha_j - 1} \left[1 + (z - a_j)\Phi'(z)\right] \alpha_e^{\alpha'_\Phi(z)}, \quad 0 < \alpha_j \leq 2\pi,$$

где

$$\left[1 + (z - a_j)\Phi'(z)\right] \alpha_e^{\alpha'_\Phi(z)}$$

является голомофрной для $n \neq 0$ в точке $z = a_j$ функция, то есть e^{Ψ} для некоторой $\Psi \in \mathcal{O}(a_j)$.

Итак,

$$f'(z) = (z - a_j)^{\alpha_j - 1} e^{\Psi(z)}, \quad \Psi \in \mathcal{O}(a_j),$$

откуда

$$\ln f'(z) = (\alpha_j - 1)\ln(z - a_j) + \Psi(z),$$
$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = (\ln f'(z))' = \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} + \underbrace{\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}}_{\mathcal{O}(a_j)}$$

для $z \in \Pi_+ \cap \{|z - a_j| < \varepsilon\}$, и, следовательно, по теореме единственности для всех z таких, что $0 < |z - a_j| < \varepsilon$.

Значит, f''/f' имеет при $z = a_j$ полюс 1-го порядка с вычетом $\alpha_j - 1$.

3 шаг. Покажем, что особенность $g(z)$ при $z = \infty$ устранима, причем $g(\infty) = 0$. Действительно,

$$f(z) - f(\infty) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots,$$

причем $c_1 \neq 0$ по критерию локальной однолистности. Отсюда

$$f'(z) = -\frac{c_1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) = \frac{c_1}{z^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$f''(z) = \frac{2c_1}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) = \frac{2c_1}{z^3}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Следовательно,

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

что и требовалось доказать.

4 шаг. В итоге по теореме о формулах, мероморфных на $\overline{\mathbb{C}}$, имеем

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$$

(сумма главных частей рядов Лорана во всех особых точках, включая ∞). Следовательно,

$$[\ln f'(z)]' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j},$$

где по крайней мере для $z \in \Pi_+$, где $f' \neq 0$, и $\ln f' \in \mathcal{O}(\Pi_+)$ такой логарифм определен. Отсюда

$$\ln f'(z) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1)\ln(z - a_j) + C_0,$$

и, наконец,

$$f'(z) = C_1 \prod (z - a_j)^{\alpha_j - 1},$$

где

$$C_1 = e^{C_0}.$$

Константа C_2 получается путем повтороного интегрирования.

□

Задача 10.5. *Выражая* $\int\limits_{\substack{R>>0\\|z|=R,}} g(z)dz$ *двумя способами: из разложения*

$$g(z) = -\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| \geq R_0$$

(шаг 3 доказательства) и по теореме о сумме вычетов из формулы (??) шага 4 доказательства, получить, что[21]

$$\sum_{j=1}^{n} \pi\alpha_j = \pi(n-2).$$

Задача 10.6. *Пусть $D ==$ полоса или полуплоскость, из которой удалено несколько лучей, $\|$ ее границе, а*

$$f \in \mathcal{O}(\Pi_+) \cap C(\Pi_+ \cup \{\infty\}$$

– конформное отображение Π_+ на D.

Доказать, что $f'(z)$ – рациональная функция (подсказка: следует повторить доказательство формулы Кристоффеля – Шварца до определенного момента).

[21] Формула для суммы углов n-угольника.

Лекция 11. Эллиптические функции

Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник

По теореме Римана и Каратеодори $\exists$ конформное отображение

$$\varphi:\ \Pi_+ \to P_0,$$

где P_0 – прямоугольник, такое, что

$$0,\quad 1,\quad \infty \to 0,\quad K,\quad iK'$$

(возможно, после дробно-линейного отображения $\Pi_+ \to \Pi_+$ в плоскости ζ).

Тогда продолжение $f \in O(\Pi_+)$ отображения

$$f(z) = \varphi(z^2)$$

на Π_+ по принципу симметрии конформно отображает Π_+ на прямоугольник P с вершинами $\pm K = f(\pm 1)$, $\pm K + iK'$, причем $f(\infty) = iK'$.

Обозначим

$$f^{-1}(K + iK') = 1/k,\quad 0 < k < 1.$$

Тогда $f(-1/k) = -K + iK'$ по принципу симметрии. По формуле Кристоффеля – Шварца $\exists\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ такие, что

$$f(z) = C_1 \int_0^z (\zeta - 1)^{-1/2}(\zeta + 1)^{-1/2}(\zeta - 1/k)^{-1/2}(\zeta + 1/k)^{-1/2} d\zeta + C_2 =$$

$$= C \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

где $\sqrt{p(\zeta)}$ при

$$p(\zeta) = (1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)$$

означает ветвь на односвязной области такой, что $\sqrt{p(0)} = 1$, а не -1. Заметим, что $C_2 = 0$, так как $f(0) = 0$.

Фактически, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 11.1. *При любом $k \in (0,1)$ функция*

$$F(z,k) := \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

конформно отображает Π_+ на прямоугольник

$$P = \{w \in \mathbb{C} \mid -K < Re w < K,\quad 0 < Im w < K'\},$$

где

$$K := F(1,k) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > 0$$

и

$$K' := F(,k) = \int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} > 0,$$

где для K' формула получена интегрированием по мнимой оси $\zeta = iy$, $0 \le y < \infty$.

Доказательство. Положим $F(z,k) = f(z)/C$. Доказательство утверждения следует из соображений, записанных выше. $\square$

Замечание 11.1. Когда k возрастает от 0 до 1, число

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

монотонно возрастает от

$$K(+0) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{const} = \pi/2$$

до

$$K(1-0) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = +\infty$$

(по теореме Беппо Леви о монотонной сходимости), а число

$$K' = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}$$

монотонно убывает от

$$K'(0+) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = +\infty$$

до

$$K'(1-0) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \text{arctg}\infty = \pi/2.$$

Следовательно, отношение сторон $\frac{K'}{2K}$ (непрерывная функция от $k \in (0,1)$) прямоугольника P монотонно убывает от $+\infty$ при $k = 0$ до 0 при $k = 1$.

Следовательно, конструкция дает прямоугольник с любым заданным отношеием сторон при надлежащем $k \in (0,1)$.

Эллиптический синус

Утверждение 11.2. *При $\forall\ k \in (0,1)$ $\exists$ мероморфная функция $G \in M(\mathbb{C}^1)$ такая, что $\forall\ w \in P$ функция $z = G(w)$ совпадает с конформным отображением P на Π_+, обратном к $w = F(z,k)$.*

Функция $G(w)$ называется эллиптическим синусом, обозначается

$$G(w) = sn(w,k)$$

и обладает следующими свойствами:

1. $$G(w+4K) = G(W), \quad G(w+2K'i) = G(w), \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

   Тем самым $G(w)$ имеет 2 линейно независимых над $\mathbb{R}$ периода: $4K$ и $2iK'$.

   Множество всех периодов функции $G(w)$ есть

   $$L := \{n \cdot 4K + m \cdot 2iK' \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

2. *Множество полюсов $G(w)$ имеет вид*

   $$\Lambda := \{2n \cdot K + (2m+1)iK' \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

   и все этим полюсы – 1-го порядка.

3. $$(G'(w))^2 = (1-(G(w))^2)(1-k^2(G(w))^2)$$

   для $\forall\ w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Доказательство. По принципу симметрии, обратное отображение

$$G:\ P \to \Pi_+$$

допускает АП через каждую сторону прямоугольника P до конформного отображения вдвое большего прямоугольника на всю плоскость без 2 лучей или отрезка (рис. 11.1).

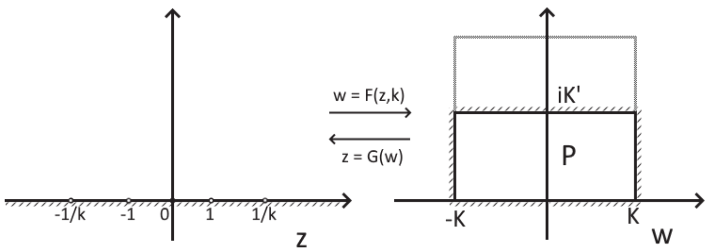

Рис. 11.1. Отображение G

Полученные продолжения тоже допускают такое АП, причем $\forall$ точки $w_0 \in P$ значения продолжения путей в точке w_1 в разных направлениях совпадают.

Тем самым получаем продолжение

$$G:\ P \to \Pi_+$$

на всю плоскость $\mathcal{C}$, кроме вершин прямоугольников. Но в них особенности устранимы, так как $\exists$ предел $\in \{\pm 1, \pm 1/k\}$.

Прямоугольник с вершинами $\pm K \pm 2iK'$ отображается функцией G конформно на $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1/k, 1/k]$, причем

$$G(iK') = \infty,$$

то есть iK' – полюс $G(w)$ по определению, и, кроме того, iK' – полюс 1-го порядка по критерию лкальной однолистности.

Образы точки iK' при всех отражених образуют решетку Λ. Других полюсов нет по построениию, следовательно, доказано свойство $2/$.

Перейдем к доказательству свойства 1. Композиция симметрий относительно двух соседних вертикальных сторон есть $w_0 \to w_0 + 4K$. Следовательно,

$$G(w_0) = G(w_0 + 4K)$$

по принципу симметрии для всех $w_0 \in P$. Тогда это верно по теореме единственности и для всех $w_0 \in \mathbb{C}$.

Доказательство свойства 3. Свойство 3 вытекает по теореме о производной обратной функции для всех $w \in P$. Следовательно, по теореме единственности свойство 3 выполняется и всюду на $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. $\square$

Упражнения

Задача 11.1. *Показать, что* $\forall\ w \in \mathbb{C}$

$$\lim_{k \to 0+} sn(n, k) = \sin w.$$

Указание. Сначала для $w \in P = P(k) \supset \{|\mathrm{Re} w| < \pi/2\}$, затем рассмотреть обратную функцию $F(z, k)$ и ее предел при $k \to 0+$, затем рассмотреть для всех w.

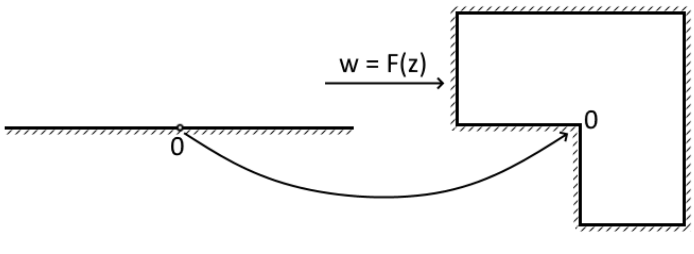

Рис. 11.2. Отображение $w = F(z)$

Задача 11.2. *Рассмотрим конформное отображение (рис. 11.2).*

Доказать, что

$$F(z) = \int\limits_0^z \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{P_6(z)}}$$

для некоторого полинома $P_6(\zeta)$ степени 6 и что множество точек ветвление аналитических продолжений обратной функции $z = G(w)$ на всю плоскость $\mathbb{C}$ будет всюду плотно в $\mathbb{C}$, если числа h_1/h_2 и k_1/k_2 иррациональны.

Следовательно, $\exists$ ПАФ[22], сужение которой ни на какое открытое подмножество $D \subset \mathbb{C}$ не является одной или несколькими АФ в D.

Определение и свойства эллиптических функций

Определение 11.1. Функция $f \in M(\mathbb{C})$, не равная тождественно const, называется *эллиптической*, если $\exists\ \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, линейно независимые над $\mathbb{R}$ и такие, что $\forall$ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$f(z + k_1\tau_1 + k_2\tau_2) = f(z), \quad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

В этом случае f также называется *L-периодической*, где

$$L := \{k_1\tau_1 + k_2\tau_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

– решетка, то есть некоторая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{C}$, имеющая 2 линейно независимые над $\mathbb{R}$ образующие.

Пример 11.1.

$$\mathrm{sn}(z, k), \quad 0 < k < 1.$$

Утверждение 11.3. *Множество всех L-периодических функций $f \in M(\mathbb{C}^1)$ вместе с функциями $\equiv$ const является полем, замкнутым относительно дифференцирования.*

Утверждение 11.4. *Множество полюсов любой эллиптической функции непусто.*

Доказательство. Для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и любых линейно независимых над $\mathbb{R}$ периодов τ_1, τ_2 функции f множество

$$\Pi := \{z_0 + c_1\tau_1 + c_2\tau_2 \mid 0 \le c_1 < 1, \quad 0 \le c_2 < 1\}$$

называется *фундаментальным параллелограммом.*

Если f – L-периодическая функция без полюсов, то f непрерывна на $\overline{\Pi}$ (замыкании фундаментального параллелограмма, компакт). Следовательно, $|f|$ ограничена на $\overline{\Pi}$. Тогда $|f|$ ограничена всюду на $\mathbb{C}$ той же константной в силу периодичности. Значит, $f \equiv$ const по теореме Лиувилля. Получаем противоречие с определением. □

[22]Нельзя сказать, на чем именно.

Определение 11.2. Количество полюсов эллиптической функции f в ее фундаментальном параллелограмме (с учетом кратностей) называется *порядком* f.

Утверждение 11.5. *Сумма вычетов любой эллиптической функции по всем полюсам в* Π *равна* 0*. В частности, порядок любой эллиптической функции* ≥ 2.

Доказательство.

1. Считая, что на $\partial\Pi$ нет полюсов (это всегда допустимо сдвигом значений z_0),
$$2\pi i \sum \operatorname{res} = \int_{\partial\Pi} f(z)dz = 0,$$
так как в силу периодичности сумма интегралов от f по противоположным сторонам равна 0.

2. Если полюс только 1, причем 1-го порядка, то получается, что вычет в этом полюсе равна 0, а значит, главна часть ряда Лорана функции равна 0. Получили противоречие.

□

Лекция 12. Свойства эллиптических функций

Свойства эллиптических функций

Напомним следующие соображения, обсуждавшиеся на предыдущей лекции.

Зафиксируем решетку $L = \mathbb{Z}\tau_1 + \mathbb{Z}\tau_2$, где $\mathrm{Im}(\tau_2/\tau_1) > 0$.

Эллиптические функции определяются как L-периодические функции $f \in M(\mathbb{C})$, то есть

$$f(z+\tau) = f(z), \quad \forall\ z \in \mathbb{C}, \quad \tau \in L,$$

и, кроме того, $f \not\equiv \mathrm{const}$.

Фундаметальным параллелограммом называется множество

$$\Pi := \{z_0 + s_1\tau_1 + s_2\tau_2 \mid 0 \le s_1 < 1, \quad 0 \le s_2 < 1\},$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$.

На прошлой лекции успели обсудить следующие свойства эллиптических функций (утверждения 11.3 – 11.5).

1. (L-периодические функции) = поле, замкнутое относительно дифференцирования.

2. Если $f \in M(\mathbb{C})$ – L-периодическая без полюсов в Π, то $f \equiv \mathrm{const}$.

3. Сумма вычетов $\forall$ эллиптической функции по всем особым точкам в Π равна 0.

   В частности, порядок $\forall$ эллиптической функции (число ее полюсов в Π с учетом кратностей) всегда ≥ 2.

Утверждение 12.1. *(Свойство 4) $\forall\ a \in \mathbb{C}$ число a-точек эллиптической функции f в фундаментальном параллелограме (с учетом кратностей) равно порядку f.*

Доказательство. Функция

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z) - a}$$

является L-периодической по свойству 1 и $\not\equiv \mathrm{const}$, так как из предположения, что

$$\frac{f'}{f-a} \equiv C = \mathrm{const}$$

вытекает, что

$$f(z) = a + e^{z/C + b}$$

при $C \ne 0$ или $f \equiv \mathrm{const}$ при $C = 0$, что невозможно по свойству 2.

Значит, g – эллиптическая функция и по теореме о логарифмическом вычете разности числа a-точек f в Π и числа полюсов f в Π равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi} \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz,$$

что равно сумме вычетов $g(z)$ по всем особым точкам в z и $= 0$ (по свойству 3). $\square$

Утверждение 12.2. *(Свойство 5) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – список всех нулей эллиптической функции f в Π (с учетом кратностей), $b_1, \ldots, b_n$ – список полюсов в Π (тоже с учетом кратностей), где n равно порядку f. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j \pmod L,$$

то есть число

$$S := (a_1 + \ldots + a_n) - (b_1 + \ldots + b_n)$$

принадлежит решетке L.

Доказательство. Пусть на $\partial\Pi$ нет ни нулей, ни полюсов f (иначе можно немного изменить z_0). Тогда

$$2\pi i S = \int\limits_{\partial\Pi} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{34}$$

по теореме Коши о вычетах, так как $\operatorname{res}_{z=a}(zf'(z)/f(z))$ равно ak, где $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет равенству

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \quad |z-a| < \varepsilon, \quad g \in \mathcal{O}(a), \quad g(a) \neq 0,$$

то есть k – это кратность a как нуля f или порядок a как полюса f.

Запишем

$$\int\limits_{\partial\Pi} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \underbrace{\left(\int\limits_{z_0}^{z_0+\tau_1} - \int\limits_{z_0+\tau_1}^{\tau_0+\tau_1+\tau_2}\right) z\frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{=A} + \underbrace{\left(\int\limits_{z_0+\tau_1}^{z_0+\tau_1+\tau_2} - \int\limits_{z_0}^{z_0+\tau_2}\right) z\frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{B}.$$

Вычислим

$$A = \int\limits_{z_0}^{z_0+\tau_1} \left[z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\tau_2)\frac{f'(z+\tau_2)}{f(z+\tau_2)} \right] dz = -\tau_2 \int\limits_{z_0}^{z_0+\tau_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

в силу периодичности f. Так как

$$\ln|f(z_0 + t\tau_1)| + i\theta(t)$$

является первообразной функции вдоль пути, где $0 \le t \le 1$, $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна и

$$f(z_0 + t\tau_1) = |f(z_0 + t\tau_1)| e^{i\theta(t)}, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$A = -\tau_2 \cdot i \underbrace{\Delta \arg_{[z_0, z_0+\tau_1]} f(z)}_{\in 2\pi\mathbb{Z}},$$

так как $f(z_0) = f(z_0 + \tau_1)$, аргументы этих чисел отличаются на целое кратное 2π. Следовательно,

$$A/2\pi i \in (-\tau_2) \cdot \mathbb{Z} \subset L.$$

Аналогично $B \in 2\pi i L$, а значит, $S \in L$ (34). $\square$

Пример

Пример 12.1. Рассмотрим

$$f(z) = \operatorname{sn}(z, k), \quad 0 < k < 1.$$

Тогда

$$L = 4K \cdot \mathbb{Z} + 2iK' \cdot \mathbb{Z}.$$

В качестве Π выберем прямоугольник, изображенный на рис. 12.1. Нули в Π – это 0 и $2K$ (оба первого порядка). Полосы в Π – это iK', $2K + iK'$ (оба первого порядка).

Выполнены свойства 4 ($2 = 2$) и 5 ($0 + 2K - iK' - (2K + iK') = -2iK' \in L$).

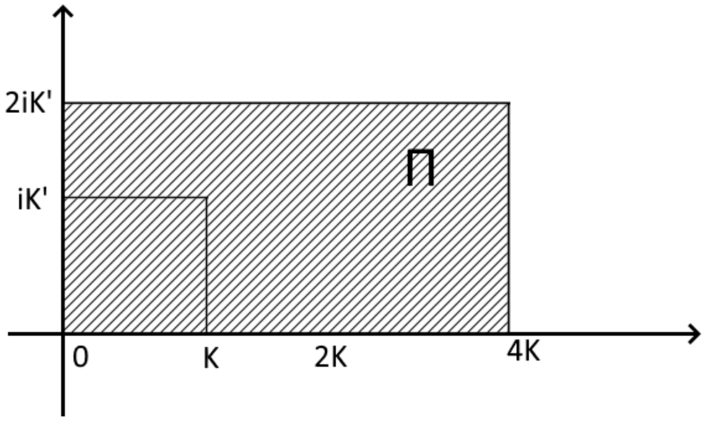

Рис. 12.1. Прямоугольник Π

$\wp$-функция Вейерштрасса

Определение 12.1. По определению, $\wp$-функция[23] Вейерштрасса

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left(\frac{1}{(z-\tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right), \tag{35}$$

где $L' := L \setminus \{0\}$.

Утверждение 12.3. *Ряд (35) сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ (если отбросить конечное число членов ряда с полюсами на данном компакте). При этом $\wp \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)$ имеет во всех точках $\tau \in L$ полюсы 2-го порядка, так что $\wp \in M(\mathbb{C}^1)$.*

Доказательство. Запишем

$$a_\tau := \frac{1}{(z-\tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} = \frac{z^2 + 2\tau z}{(z-\tau)^2 \tau^2} = \frac{1}{\tau^3} \frac{2z - z^2/\tau}{(1 - z/\tau)^2}.$$

[23] Читается, как «пэ».

Следовательно,

$$|a_\tau| \le \frac{\text{const}}{|\tau|^3}$$

для всех $z \in K$, где K – фиксированный компакт, и всех $\tau \in L$, кроме конечного их числа.

Пусть

$$S_m := \{k_1\tau_1 + k_2\tau_2 \mid k+1, k_2 \in \mathbb{Z}, \quad \max(|k_1|, |k_2|) = m\}.$$

Ряд

$$\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{|\tau|^3} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\tau \in S_m} \frac{1}{|\tau|^3} \le \sum_{m=1}^{\infty} 8m \frac{1}{(mh)^3} = \frac{8}{h^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty,$$

где $8m$ – число точек в S_m,

$$h := \text{dist}(0, S_1),$$

и, значит, $|\tau| \ge mh$ для $\forall\ \tau \in S_m$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{\tau \in L} a_\tau(z)$ сходится абсолютно и равномерно на K. □

Утверждение 12.4. *$\wp(z)$ – эллиптическая функция, то есть*

$$\wp(z+\tau) = \wp(z), \quad \forall\ z \in \mathbb{C}, \quad \tau \in L.$$

При этом она четная, ее множество полюсов совпадает с решеткой L и порядок равен 2.

Утверждение 12.5. *Для*

$$\wp'(z) = \sum_{\tau \in L} \frac{-2}{(z-\tau)^3}$$

ясно, что $\wp'(z+\tau) = \wp'(z)$ для $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $\tau \in L$.

Следовательно,

$$\wp'(z+\tau) - \wp'(z) = 0$$

на $\mathbb{C}$, а значит,

$$\wp(z+\tau) - \wp(z) \equiv C_\tau = const. \tag{36}$$

Ясно, что $\wp(-z) = \wp(z)$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$. В этом можно убедиться, заменив τ на $-\tau$ в ряде (35).

Поэтому (36) при $z = -\tau/2$ в силу четности дает

$$0 = \wp(-\tau/2) - \wp(\tau/2) = C_\tau,$$

то есть $C_\tau = 0$ и функция $\wp$ является L-периодической.

Выражение эллиптических функций через $\wp$-функцию

Утверждение 12.6. *Если $f \in M(\mathbb{C}^1)$ – четная эллиптическая функция, то $\exists$ рациональная функция $R(w)$ такая, что*

$$f(z) = R(\wp(z)), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Если a – нуль (или полюс) порядка k функции f, то $-a$ – тоже. Для нулей это вытекает из формулы

$$f(z) = f(-z),$$

откуда

$$f'(z) = -f'(-z),$$

а значит,

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n f^{(n)}(-z). \tag{37}$$

Для полюсов следует рассмотреть функцию $1/f$.

При этом, если[24] $a \equiv -a \pmod L$, то порядок нуля (или полюса) f в точке a *четен.* Действительно, для всех n в силу периодичности

$$f^{(n)}(a) = f^{(n)}(-a) = (-1)^n f^{(n)}(a)$$

в силу (37). Следовательно,

$$f^{(n)}(a) = 0$$

при всех нечетных n, то есть порядок нуля f в точке a четен. Аналогично, для полюсов следует рассмотреть $1/f$.

Следовательно, порядок четной эллиптической функции f четен (обозначим его через $2n$) и список всех нулей f в Π (с учетом кратностей) имеет вид

$$\{a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n\},$$

причем среди a_j и $-a_j$ могут быть совпадающие, а список всех полюсов f в Π имеет вид

$$\{b_1, \ldots, b_n, -b_1, \ldots, -b_n\}.$$

Пусть среди a_j, b_k нет точки $z \equiv 0 \pmod L$. Тогда

$$R(w) := \prod_{j=1}^{n} \frac{w - \wp(a_j)}{w - \wp(b_j)}$$

– искомая рациональная функция с точностью до умножения на $\mathrm{const} \neq 0$.

Действительно,

$$R(\wp(z)) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\wp(z) - \wp(a_j)}{\wp(z) - \wp(b_j)}$$

[24] Точек с

$$a \equiv -a \pmod L$$

ровно 4 в Π: 0, $\tau_1/2$, $\tau_2/2$, $(\tau_1 + \tau_2)/2$.

есть L-периодическая функция по свойству 1, имеющая в П нули $\pm a_j$, $j = 1, \ldots, n$ 1-го порядка каждый (так как $\wp(z)$ имеет порядок 2) и полюсы $\pm b_j$, $j = 1, \ldots, n$ тоже 1-го порядка.

Следовательно, $f(z)/R(\wp(z))$ – это L-периодическая функция без нулей и полюсов в П, а значит, равна $\mathrm{const} \neq 0$ по свойству 2. Итак,

$$f(z) = CR(\wp(z)),$$

что и требовалось доказать.

Если же среди a_j есть точки $\equiv 0 \pmod L$, то соответствующие им сомножители в числители $R(w)$ надо опустить. Тогда

$$R(\wp(z)) \sim \frac{1}{\wp^l(z)}, \quad z \to 0,$$

где l – число этих a_j. Тогда $f(z)/R(\wp(z))$ будет иметь при $z \to 0$ ненулевой предел, то есть особая точка устранима, и рассуждения выше справедливы.

Аналогично, если среди b_j есть точки $\equiv 0 \pmod L$, надо опустить соответствующие множители в знаменателе $R(w)$. $\square$

Следствие. Любая эллиптическая функция $f \in M(\mathbb{C}^1)$ имеет вид

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z))$$

для некоторых рациональных функций R_1 и R_2.

Доказательство. Представим

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

(как сумму четной и нечетной L-периодической функций). Любая нечетная L-периодическая функция есть $\wp'(z) \cdot$ (четная L-периодическая функция). $\square$

Задачи

Задача 12.1. *Доказать, что $f \in M(\mathbb{C}^1)$ является эллиптической функцией с полюсами только на $L \iff$*

$$f = R_1 \circ \wp + wp' R_2 \circ \wp,$$

где $R_1 \not\equiv const$ и R_2 – полиномы.

Задача 12.2. *Доказать, что $\forall$ эллиптической функции f $\exists$ неприводимый полином $P(u, v)$ степени ≤ 2 по v такой, что*

$$P\left(\wp(z), f(z)\right) \equiv 0.$$

то есть любая эллептическая функция – это алгебраическая функция от $\wp(z)$.

Задача 12.3. *Доказать, что $sn^2(z, k)$ – четная эллиптическая функция с решеткой $2K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z}$, где $\wp(z)$ отвечает такой решетке, и что*

$$sn^2(z, k) = \frac{1}{\wp(z) - \wp(iK')}.$$

Лекция 13. Выражение эллиптических функций

Дифференциальное уравнение для $\wp(z)$

Выведем дифференциальное уравнение для $\wp(z)$.

$[\wp'(z)]$ – четная эллиптическая функция с единственным полюсом $z = 0$ (порядок равен 6). С учетом нечетности и периодичности,

$$\wp'(\omega_j) = -\wp'(-\omega_j) = -\wp'(\omega_j),$$

откуда получаем, что

$$\wp'(\omega_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

(рис. 13.1). Других нулей у $\wp'$ в фундаментальном параллелограмме нет, а эти три имеют кратность 1, так как порядок $\wp'$ равен 3.

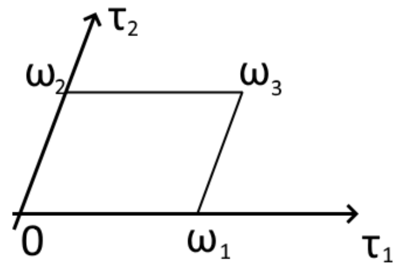

Рис. 13.1. Расположение ω_j

Следовательно, эллиптическая функция

$$(\wp(z) - e_1)^2 (\wp(z) - e_2)^2 (\wp(z) - e_3)^2,$$

где

$$e_j := \wp(\omega_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

имеет те же нули и полюсы в фундаментальном параллелограмме (с учетом кратностей), что и $(\wp'(z))^2$.

Следовательно,

$$\wp'^2(z) = C (\wp(z) - e_1)^2 (\wp(z) - e_2)^2 (\wp(z) - e_3)^2 \tag{38}$$

для некоторого $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Чтобы найти C, запишем

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots, \quad 0 < |z| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \ldots$$

Следовательно, коэффицент при z^{-6} в левой части (38) равен 4, а в правой части – C. Отсюда получаем, что $C = 4$.

Подведем итог. $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(z) = 4 (\wp(z) - e_1)^2 (\wp(z) - e_2)^2 (\wp(z) - e_3)^2.$$

Задача 13.1. *Показать, что если $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – алгебраические функции, то $\mathcal{F}^{-1}$ и $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ (все компоненты) – тоже алгебраические функции.*

Пользуясь этим фактом, доказать, что любая эллиптическая функция есть алгебраическая функция от любой другой (с той же решеткой переменных), то есть $\forall$ эллиптических функций f, g $\exists$ неприводимый полином $P \not\equiv 0$ такой, что

$$P(f(z), g(z)) \equiv 0.$$

В частности, $\forall$ эллиптической функции f $\exists$ неприводимый полином $Q \not\equiv 0$ такой, что

$$Q(f(z), f'(z)) \equiv 0,$$

то есть f удовлетворяет полиномиальному дифференциальному уравнению.

Лорановское разложение $\wp(z)$ при $0 < |z| < \varepsilon$

Запишем

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-\tau)^2} - \frac{1}{\tau^2},$$

где

$$\frac{1}{(z-\tau)^2} = \frac{1}{\tau^2}\frac{1}{(1-z/\tau)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{\tau^{2+n}} = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2z}{\tau^3} + \frac{3}{z^2}\tau^4 + \dots$$

при $|z| < \min\limits_{\tau\in\Lambda\setminus\{0\}} |\tau|$. Тогда

$$(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)G_{n+2}z^m, \quad 0 < |z| < \varepsilon,$$

где

$$G_k := \sum_{\tau\in\setminus\{0\}} \frac{1}{\tau^k}.$$

Замена $\tau \to -\tau$ показывает, что

$$G_{2l+1} = 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots \tag{39}$$

Задача 13.2. *Показать, что все G_{2m}, $m \geq 4$, являются полиномами с рациональными коэффицентами от G_4 и G_6. Например,*

$$11G_{10} = 5G_4G_6.$$

Указание: после переписывания дифференциального уравнения подставить (39) в

$$\wp'' = 6\wp^2 + const\cdot G_4.$$

Другая форма дифферинцального уравнения для $\wp(z)$

Подберем $b, c, d \in \mathbb{C}$ такие, что уравнение имеет вид

$$\wp'^2 = 4\wp^3 + b\wp^2 + c\wp + d. \tag{40}$$

Для этого из (39) получим

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots \tag{41}$$

$$\wp'^2(z) = \frac{4}{z^6} + \frac{0}{z^4} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots \tag{42}$$

Сравнение коэффицентов в (40) дает при z^{-6}:

$$4 = 4,$$

при z^{-4}:

$$0 = b,$$

при z^{-2}:

$$-24G_4 = 9G_4 + c,$$

при z^0:

$$-80G_6 = 60G_6 + d$$

Отсюда получаем, что

$$c = -60G_4, \quad b = -140G_6.$$

Итак,

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

где

$$g_2 := 60G_4, \quad g_3 := 180G_6.$$

Следствие.

$$2\wp'\wp'' = 12\wp^2\wp' - g_2\wp',$$

то есть

$$\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2.$$

Задача 13.3. *Доказать, что $g_2 = 0 \iff$ решетка квадратная, то есть $\tau_2 = i\tau_1$, а $g_3 = 0 \iff$ решетка гексагональная, то есть $\tau_2 = e^{\pi i/3\tau_1}$.*

Задача 13.4. *Пусть ретка прямоугольная (как $2K\mathbb{Z}+2iK'\mathbb{Z}$ для $sn^2(z) = 1/(\wp(z)-e_2)$, $e_2 = \pi(iK')$).*

Доказать, что тогда $e_1 > e_2 > e_3$ (и при этом из $e_1+e_2+e_3 = 0$ вытекает, что $e_1 > 0 > e_3$) и что $\wp^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ есть решетка вдвое меньшего размера, причем $w = \wp(z)$ конформно отображает прямоугольник на $\{Imw < 0\}$.

Алгебраическая теорема сложения

Теорема 13.1. *Справедливо*

$$\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right)^2 \tag{43}$$

для всех $z_1, z_1 \in \mathbb{C}$ *таких, что* z_1, z_2, $z_1 + z_2 \notin \wp^{-1}() = \Lambda$, *а* $z_1 \neq z_2$. *При* $z_1 z_2 = z$ *верна предельная форма этого соотношения:*

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2,$$

причем правая часть является рациональной функцией от $\wp(z)$ *в силу уравнений*

$$\wp'^2 = 4p^3 - g_2\wp - g_3,$$

$$\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2.$$

Задача 13.5. *Вообще,* $\wp(nz)$ *есть рациональная функция от* $\wp(z)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Приступим к доказательству теоремы 13.1, а, точнее, (43).

Для данных z_1, z_2 выбираем $a, b \in \mathbb{C}$ такие, что уравнение

$$\wp'(z) = a\wp(z) + b \tag{44}$$

имеет решения z_1 и z_2 (рис. 13.2).

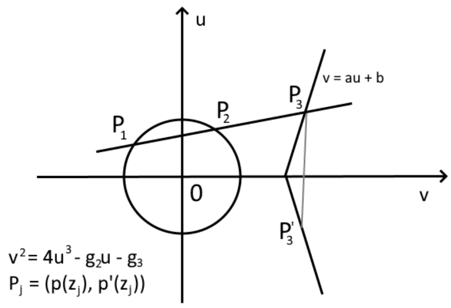

Рис. 13.2. Точки P_j

Поскольку функция

$$f := \wp' - a\wp - b$$

есть эллиптическая функция порядка 3 (имеет единственный полюс 3-го порядка $z = 0$), то ее число нулей равно 3, и третий 0 (кроме z_1 и z_2) $\equiv -z_1 - z_2 \pmod{\Lambda}$ по свойству 5.

Следовательно,

$$P_3 = (\wp(-z_1 - z_2), \wp'(-z_1 - z_2)) = (\wp(z_1 + z_2) - \wp'(z_1 + z_2)),$$

$$P_3' = (\wp(z_1 + z_1), \wp'(z_1 + z_2))$$

получается из P_3 изменением знака v.

Получаем, что числа

$$u_1 := \wp(z_1)$$

$$u_2 := \wp(z_2)$$

$$u_3 := \wp(z_1 + z_2)$$

удовлетворяют уравнению третьей степени[25]

$$(au + b)^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3,$$

то есть

$$4u^3 - g_2 u - g_3 - (au + b)^2 = 4\prod_{j=1}^{3}(u - u_j).$$

Коэффицент при u^2:

$$-a^2 = -4(u_1 + u_2 + u_3). \tag{45}$$

Но из системы

$$\begin{cases} \wp'(z_1) = a\wp(z_1) + b \\ \wp'(z_2) = a\wp(z_2) + b \end{cases}$$

находится

$$a = \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_2) - \wp(z_2)}.$$

Следовательно, (45) совпадает с (43). □

Задача 13.6. *Доказать, что*

$$sn(z_1 + z_2) = \frac{sn(z_1)sn'(z_2) + sn(z_2)sn'(z_1)}{1 - k^2 sn(z_1)sn(z_2)}.$$

Указание: подобрать a, b такие, что точки

$$\wp_j := (sn(z_j), sn'(z_j))$$

лежат на параболе

$$v = 1 + au + bu^2.$$

Тогда 4-я точка пересечения (кроме P_1, P_2 и $(0,1)$) этой параболы с кривой

$$v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2u^2)$$

отвечает $sn(z_1 + z_2)$. Далее опять следует сравнить коэффиценты, как для $\wp$-функции.

[25] Здесь учли (44).

Теорема Вейерштрасса о функциях с алгебраической теремой сложения

Теорема 13.2. *Пусть $f \in M(\mathbb{C})$ и $\exists$ полином $P(\xi, \eta, \zeta)$ степени ≥ 1 по ζ с комплексными коэффицентами такой, что*

$$P(f(z_1 + z_2), f(z_1), f(z_2)) = 0$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ таких, что z_1, z_2, $z_1 + z_2 \notin f^{-1}(\infty)$.

Тогда

- *либо f – эллиптическая функция для некоторой решетки Λ;*
- *либо $f(z) = R(e^{Cz})$, где $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, R – рациональная функция;*
- *либо f – рациональная функция.*

Замечание 13.1. Все указанные в заключении теоремы 13.2 функции действительно обладают алгебраической теоремой сложения. Доказывать это мы не будем.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 13.2, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 13.1. *Если $f \in M(\mathbb{C})$ не рациональна, то $\forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ w_0 \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение*

$$f(z) = w_0$$

имеет $\geq N$ различных решений.

Доказательство. Если $\exists\ w_1$ такое, что $f^{-1}(w_1)$ бесконечно, то все доказано.

Иначе заменим $f(z)$ на $1/\left(f(z) - w_1\right)$. Эта функция имеет при $z = \infty$ изолированную особую точку, а значит, существенную особую точу, так как $f(z)$ не рациональна. Будем считать, что $f(z)$ имеет при $z = \infty$ существенную особую точку.

Проведем теперь доказательство индукцией по N. При $N = 1$ достаточно взять любую точку $w_0 \in f(|z| > R)$.

Обоснуем переход от N к $N + 1$. Пусть точка w_0 такая, что $f^{-1}(w_0)$ содержит различные $a_1, \ldots, a_N$. Выберем

$$R > \max_{j=1,\ldots,N} |a_j|$$

такое, что $f \in \mathcal{O}(|z| > R)$. Тогда по теореме Сохоцкого $\exists$ последовательность $z_n \to \infty$, $|z_n| > R$ такая, что $f(z_n) \to w_0$.

По принципу сохранения области все точки w_1 из некоторой окрестности точки w_0 тоже имеют $\geq N$ различных прообразв (близких к $a_1, \ldots, a_N$ соответственно).

Следовательно, $f(z_n)$ при достаточно большом n, при котором она попадает в обговоренную ранее окрестность точки w_0, имеет N прообразов вблизи $a_1, \ldots, a_N$ и еще прообраз z_n в области $|z| > R$.

Следовательно, всего имеем $\geq N + 1$ прообразов. □

Доказательство. (теоремы 13.2)

1. Пусть f не рациональна. Выберем $N > \deg_\zeta P(\xi,\eta,\zeta)$. По лемме 13.1, $\exists\ w_0$ такое, что $f^{-1}(w_0)$ содержит N различных точек $a_1,\dots,a_N$. Тогда $\forall\ z \in \mathbb{C}$ таких, что $z+a_1,\dots,z+a_N \in f^{-1}(\infty)$, уравнение

$$P(\xi, f(z), w_0) = 0$$

имеет все числа

$$\xi = f(z+a_j), \quad j = 1,\dots,N$$

в качестве решений, так как

$$P(f(z+a_j), f(z), f(a_j)) \equiv 0.$$

Следовательно, какие-то из этих решений должны совпадать: $\forall\ z\ \exists\ k(z), l(z) \in \{1,\dots,N\}$ такие, что

$$f(z+a_{k(z)}) = f(z+a_{l(z)}).$$

Поскольку пар (k,l) конечное число, то найдется пара (k,l) такая, что

$$f(z+a_k) = f(z+a_l)$$

для бесконечно многих z (ограниченных по модулю единицей).

Тогда по теореме единственности

$$f(z+a_k) = f(z+a_l), \quad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, $a_k - a_l \neq 0$ – период функции f.

2. Можно считать, сделав замену переменных вида $z \to Az + B$, что $f(z)$ имеет период 2π и меньших по модулю вещественных периодов нет. Иначе $f \equiv \mathrm{const}$ по теореме единственности.

Функция

$$g := f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [0,\infty))$$

непрерывна на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ в силу 2π-периодичности f и, следовательно, $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ по лемме 8.2 о стирании отрезка.

Если хотя бы одна из особых точек $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ существенно особая, то по доказательству леммы 13.1 $\forall\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ w_n \in \mathbb{C}$ такое, что

$$g^{-1}(w_0)$$

содержит N различных точек $\tilde{a_1},\dots,\tilde{a_N}$.

Выберем $N > \deg_\xi P(\xi,\eta,\zeta)$ и обозначим через $a_1,\dots,a_N$ прообразы точек $\tilde{a_1},\dots,\tilde{a_N}$ в полосе $0 \le \mathrm{Re} z < 2\pi$ $(ai \neq a_j,\ i \neq j)$.

Тогда можно использовать 1-ю часть доказательства. Получим, что $a_k - a_l$ является периодом функции f при некоторых k и l.

Этот период $\notin \mathbb{R}$ в силу минимальности 2π как вещественного периода. Следовательно, f – эллиптическая функция.

Если же $= 0$ и $\xi = \infty$ – не существенные особые точки, то есть полюсы или устранимые, то функция $g(\zeta)$ рациональная по описанию мероморфных функций на $\mathbb{C}$.

Следовательно,

$$f = g(e^{iz})$$

– рациональная функция от экспоненты.

$\square$

Лекция 14. Асимптотический закон распределения простых чисел

Асимптотический закон распределения простых чисел

Ранее в курсе уже упоминался *асимптотический закон распределения простых чисел* (АЗРПЧ):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1,$$

где

$$\pi(x):=\sum_{p\le x}1$$

– число простых чисел $\le x$.

Эта лекция будет посвящена его доказательству.

Функция Чебышёва $\theta(x)$ и переформулировка АЗРПЧ

Определение 14.1. *Функцией Чебышёва* называется

$$\theta(x):=\sum_{p\le x}\ln p.$$

Лемма 14.1. *Если*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1.$$

Доказательство. $\forall\ \varepsilon>0\ \forall\ x>0$ имеем

$$\underbrace{\frac{\theta(x)}{x}}_{1+o(1),\quad x\to\infty}\le\frac{\pi(x)\ln x}{x}\le\frac{1}{1-\varepsilon}\underbrace{\frac{\theta(x)}{x}}_{1+o(1),\quad x\to\infty}+\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}.\tag{46}$$

Устремляя $x\to\infty$, получим

$$1\le\varliminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}\le\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln(x)}{x}\le\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

При $\varepsilon\to0$ утверждение доказано.

Убедимся теперь, что левое неравенство (46) справедливо:

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\ln p\le\sum_{p\le x}\ln x=\pi(x)\ln x.$$

И, наконец, докажем правую часть (46):

$$\theta(x)\ge\sum_{x^{1-\varepsilon}<p\le x}\ln p\ge\ln(x^{1-\varepsilon})(\pi(x)-\pi(x^{-1-\varepsilon})\ge(1-\varepsilon)\ln x(\pi(x)-x^{1-}).$$

Здесь последнее неравенство следует из того, что $\pi(y)\le y$. Деля на x, получим правое неравенство (46). $\square$

Лемма 14.2. *Если* $\exists$

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_1^x \frac{\theta(y)-y}{y^2}dy,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1.$$

Доказательство. (От противного) Если

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\theta(x)}{x}>1,$$

то $\exists\ R>1$ такое, что $\theta(x)>R$ для $x=x_n\to\infty$.

Тогда, так как θ монотонно убывает,

$$\int\limits_x^{Rx}\frac{\theta(y)-y}{y^2}dy\le\int\limits_x^{Rx}\frac{\theta(x)-y}{y^2}dy=I_1.$$

Так как $\theta(x)>Rx$,

$$I_1>\int\limits_x^{Rx}\frac{Rx-y}{y^2}dy=I_2.$$

Сделаем замену $y=sx$, $1\le s\le R$, $dy=xds$. Тогда

$$I_2=\int\limits_1^R\frac{(R-s)x}{y^2}xds=\int\limits_1^R\frac{R-s}{s^2}ds>0$$

и не зависит от x.

Отсюда получаем, что интеграл от $\frac{\theta(y)-y}{y^2}$ по $[1,\infty)$ расходится по критерию Коши.

Аналогично, если

$$\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}<1,$$

то $\exists\ r\in(0,1)$ такое, что $\theta(x)<rx$ Для $x=x_n\to\infty$. Тогда

$$\int\limits_{rx}^{x}\frac{\theta(y)-y}{y^2}dy<\int\limits_r^1\frac{r-s}{s^2}ds<0$$

не зависит от x. Аналогично первому случаю, получим, что по критерию Коши интеграл расходится. □

Лемма 14.3. *Если существует*

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left(\frac{\theta(e^t)}{e^t}-1\right)dt,$$

то существует

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_1^x\frac{\theta(y)-y}{y^2}dy. \tag{47}$$

Доказательство. Достаточно сделать замену $y = e^t$ в интеграле (47). □

Лемма 14.4. *(Чебышёва[26])* $\exists\, C > 0$ *такое, что* $\theta(x)/x \le C$ *для всех* $x > 0$.

Доказательство. Рассмотрим

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n},$$

так как

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n}.$$

Любое простое p такое, что $n < p < 2n$, делит C_{2n}^n. Следовательно,

$$\sum_{n<p<2n} \ln p \le \ln C_{2n}^n < n \ln 4.$$

Следовательно,

$$\theta(2n) - \theta(n) \le C_0 n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, где $C_0 = \ln 4$.

Положим $n = 2^{k-1}$, затем $n = 2^{k-2}$ и так далее до $n = 1$ и сложим все такие неравенства. Получим, что

$$\theta(2^k) - \underbrace{\theta(1)}_{=0} \le C_0(2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1) < C_0 2^k.$$

Этим доказано требуемое неравенство

$$\theta(x) < C_0 x, \quad x = 2^k \tag{48}$$

Для любого $x > 0$ найдется $k \in \mathbb{C}$ такое, что

$$2^{k-1} < x`2^k.$$

Тогда

$$\theta(x) \le \theta(2^k) \le C_0 2^k < 2C_0 x$$

с учетом (48) и того, что $x > 2^{k-1}$. Значит,

$$\theta(x) < 2C_0 x$$

для всех $x > 0$. □

[26]Отметим, что Чебышёвым было доказано, что

$$0.92 < \frac{\theta(x)}{x} < 1.11$$

при $x > x_0$.

Преобразование Лапласа и тауберова теорема

Пусть

$$f:\ [0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

– кусочно-непрерывная функция, причем $\exists\ \alpha\in\mathbb{C}$ и $C>0$ такие[27], что

$$|f(t)|\le Ce^{\alpha t},\quad\forall\ t.$$

Тогда функция

$$\mathcal{L}f(x):=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-tz}dt$$

определена и голоморфна в полуплоскости $\{\mathrm{Re}z>\alpha\}$, так как по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно на компактах в этой полуплоскости.

Итак, $\mathcal{L}f\in\mathcal{O}(\mathrm{Re}z>\alpha)$ (в нашем случае $\mathcal{L}f\in\mathcal{O}(\mathrm{Re}z>0)$).

Лемма 14.5. *Пусть*

$$f:\ [0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

– кусочно-непрерывная ограниченная по модулю функция, причем $\exists\ g\in\mathcal{O}(Rez\ge 0)$ такая, что[28]

$$g(z)=\mathcal{L}f(z),\quad Rez>0.$$

Доказательство. Пусть

$$g_T(z):=\int\limits_0^T f(t)e^{-zt}dt,\quad T>0,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Тогда $g_T\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ для всех $T>0$ по теореме о голоморфной зависимсти интеграла от параметра.

Требуется доказать, что

$$g(0)-g_T(0)\to 0,\quad T\to+\infty. \tag{49}$$

Для этого запишем интегральную теорему Коши

$$\underbrace{g(0)-g_T(0)}_{h(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{R\delta}}\underbrace{(g(z)-g_T(z))\,e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)}_{h(z)}\frac{dz}{z}, \tag{50}$$

где $\partial D_{R\delta}$ – граница соответствующей области

$$D_{R\delta}=\{z\in\mathbb{C}\ ||z|<R,\mathrm{Re}z>-\delta\}.$$

[27] У нас будет

$$f(t)=\frac{\theta(e^t)}{e^t}-1$$

(см. лемму 14.3) и $\alpha=0$ годится по лемме 14.4 Чебышёва.

[28] В нашем случае это означает, что если для $f(t)=\theta(e^t)/e^t-1$ найдется $g\in\mathcal{O}(\mathrm{Re}z\ge 0)$ с этим свойством, то выполнено условие леммы 14.3 и доказан АЗРПЧ.

Кроме того, обозначим

$$A := \partial D_{R\delta} \cap \{\mathrm{Re} z > 0\},$$
$$B := \partial D_{R\delta} \cap \{-\delta < \mathrm{Re} z \leq 0\},$$
$$C := \partial D_{R\delta} \setminus (A \cup B).$$

Для $\forall$ данного $\varepsilon > 0$ подберем столько большое R и столь малое δ, что модуль интеграла будет $< \varepsilon$ для всех $T > T_0(\varepsilon)$. Тогда получим (49) при достаточно большом R.

1. Пусть

$$B := \sup_{t \geq 0} |f(t)|.$$

По стандартной оценке модуль интеграла по $A \leq B/R < \varepsilon/4$.

Действительно,

$$|g(z) - g_T(z)| \underbrace{=}_{\mathrm{Re} z > 0, \quad z = A} |\mathcal{L}f(z) - g_T(z)| = \left| \int\limits_T^\infty f(t) e^{-tz} dt \right| \leq$$

$$\leq B \int\limits_T^\infty e^{-t(\mathrm{Re} z)} dt = B \frac{e^{-T \mathrm{Re} z}}{\mathrm{Re} z},$$

$$|e^{Tz}| \leq e^{T(\mathrm{Re} z)},$$

$$\left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| \underbrace{=}_{z \in A \Rightarrow |z|^2 = R} \left| z\overline{z} + z^2 \right| = \frac{|z||z + \overline{z}|}{R^2} = \frac{2\mathrm{Re} z}{R}.$$

Таким образом,

$$\text{модуль подинтегрального выражения } \leq B \frac{e^{-T\mathrm{Re} z}}{\mathrm{Re} z} \leq$$

$$\leq e^{T\mathrm{Re} z} \frac{2\mathrm{Re} z}{R} \leq \frac{1}{R}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A \dots \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2B}{R^2} \pi R = \frac{B}{R}.$$

2. Для интеграла по $B \cup C$ от слагаемого с $g_T(z)$ можно по теореме Коши написать

$$\int_{B \cup C} \dots = \int_{\gamma_-} \dots,$$

где

$$\gamma_- = \partial D_{R\delta} \cap \{\mathrm{Re} z \leq 0\}.$$

Теперь

$$\left| \int_{\gamma_- \dots} \right| \leq \frac{B}{R} < \frac{\varepsilon}{4}$$

аналогично оценке пункта 1.

3. Для слагаемого, содержащего $g(z)$,

$$(\text{модуль интеграла по } B) \leq$$

$$\leq (\text{длина } B) \max |g(z)||e^{Tz}||\dots| \leq M(\text{длина } B),$$

где M не зависит от T, а (длина B) $\to 0$, $\delta \to 0$.

Следовательно, этот модуль интеграла $< \varepsilon/4$ при всех $T > 0$, если δ достаточно мало.

4. Для слагаемого с $g(z)$

$$(\text{модуль интеграла по } C) \leq$$

$$\leq (\text{длина } C)e^{-\delta T}(\text{вел. не зав. от } T) < \frac{\varepsilon}{4}$$

при $T \geq T_0(\varepsilon)$.

□

Проверка условий леммы 14.5

Лемма 14.6. *Преобразование Лапласа от функции $\theta(e^t)$ равно $\Phi(z)/z$ при $Rez > 1$, где*

$$\Phi(z) := \sum_p \frac{\ln p}{p^z} \in \mathcal{O}(Rez > 1).$$

Доказательство. Функция $\theta(e^t)$ постоянна на интервале

$$\ln p_{n-1} < t < \ln p_n,$$

где

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$

– все простые числа, а $p_0 := 1$.

Следовательно, преобразование Лапласа функции $\theta(e^t)$ равно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\ln p_{n-1}}^{\ln p_n} \theta(p_n)e^{-zt}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(p_n)\frac{1}{z}\left(\frac{1}{p_n^z} - \frac{1}{p_{n-1}^z}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\sum \frac{\theta(p_n)}{p_n^z} - \frac{1}{z}\sum \frac{\theta(p_n)}{p_{n-1}^z} = \frac{1}{z}\sum \frac{\theta(p_n) - \theta(p_{n-1})}{p_n^z} = \frac{\Phi(z)}{z}.$$

□

Лемма 14.7. *Преобразование Лапласа от функции*

$$f(t) = \frac{\theta(e^t)}{e^t} - 1$$

равно[29]

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}, \quad Rez > 0.$$

[29] Здесь $\alpha = 0$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 14.6 с помощью замены переменной в интеграле и того, что

$$\mathcal{L}1(z) = \frac{1}{z}.$$

□

Лемма 14.8. *Функция*

$$\Phi(z) + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$$

допускает аналитическое продолжение из полуплоскости $\{Rez > 1\}$ *в полуплоскость* $\{Rez > 1/2\}$.

Доказательство. По формуле Эйлера

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right), \quad \mathrm{Re}z > 1.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{p^z}\right)' = \left(e^{-z\ln p}\right)' = -\ln p\frac{1}{p^z}.$$

С учетм этого возьмем логарифмическую производную

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p \frac{\ln p 1/p^z}{1-1/p^z} = \sum_p \frac{\ln p}{p^z - 1} = \Phi(z) + \sum_p \frac{\ln p}{p^z(p^z-1)}, \tag{51}$$

так как

$$\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Учитывая

$$|p^z(p^z-1)| \geq \frac{1}{2}|p^z p^z| = \frac{1}{2}p^{2\mathrm{Re}z},$$

можно сделать вывод, что правый ряд в (51) сходится равномерно на компактах в полуплоскости $\{\mathrm{Re}z > 1/2\}$. □

Следствие. Функция $\Phi(z)$ мероморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}z > 1/2$ и имеет там полюс 1-го порядка в точке $z = 1$ с вычетом 1 (за счет $\zeta'(z)/\zeta(z)$) и полюс 1-го порядка с вычетом -1 во всех нулях $\zeta(z)$, попавших в эту полуплоскость.

Мы хотим указать $g(z)$ из леммы 14.5 по формуле (см. лемму **??**)

$$g(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Тогда у $g(z)$ не будет полюса при $z = 0$, так как вычтена главна часть $1/z$ ряда Лорана $\Phi(z+1)/(z+1)$ в этой точке, а других полюсов при $\mathrm{Re}z = 0$ тоже не будет (и, следовательно, $g \in \mathcal{O}(\mathrm{Re}z \geq 0)$, как требуется в лемме 14.5) в силу следующей леммы.

Лемма 14.9. *Функция $\zeta(z)$ не имеет нулей и, соответственно,*

$$\Phi(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \mathcal{O}(Rez > 1/2)$$

не имеет полюсов на прямой $Rez = 1$.

Доказательство. Пусть $t > 0$. Тогда $\forall$ простого p имеем

$$p^{-it/2} + p^{it/2} \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$0 \leq (p^{-it/2} + p^{it/2})^4 =$$
$$= p^{-2it} + 4p^{-it} + 6 + 4p^{it} + p^{2it}.$$

Для $\forall\, \varepsilon > 0$ умножим этим неравенства на $\varepsilon \ln p / p^{1+\varepsilon} > 0$ и сложим по всем простым p. Получим, что по определению $\Phi(z)$

$$0 \leq \varepsilon\left(\Phi(1+\varepsilon+2it) + 4\Phi(1+\varepsilon+it) + 6\Phi(1+\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + 4\Phi(1+\varepsilon-it) + \Phi(1+\varepsilon-2it)\right).$$

Допустим, что $\zeta(z)$ имеет в точке $z = 1+it$ нуль порядка $k \geq 1$, а в точке $z = 1+2it$ нуль порядка $l \geq 0$ (считаем $l = 0$, если $\zeta(l+2it) \neq 0$). Тогда

$$\Phi(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \mathcal{O}(\mathrm{Re} z > 1/2)$$

имеет при $z = 1+it$ полюс 4 порядка с вычетом $-k$, а при $z = 1+2it$ имеет полюс 1-го порядка или устранимую особую точку с вычетом $-l$. При $z = 1$ функция $\Phi(z)$ имеет полюс 1-го порядка с вычетом $+2$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\varepsilon\Phi(1+\varepsilon) \to 1,$$

$$\varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2it) \to -l,$$
$$\varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm it) \to -k.$$

Здесь у аргумента Φ стоит $\pm$, поскольку $\zeta(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, так как $\zeta(\overline{z}) = \overline{\zeta(z)}$, и, следовательно, ри $z = 1-it$ у $\zeta(z)$ $(z = 1-2it)$ будет нуль того же прядка, что и у $z = 1+it$ $(z = 1+2it)$.

Тогда (**??**) в пределе $\varepsilon \to 0$ дает

$$0 \leq 6 - 2l - 8k.$$

Поскольку $k, l \leq 0$ это возможно только при $k = 0$. Следовательно,

$$\zeta(1+it) \neq 0.$$

□

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ