МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ЧАСТЬ 1

ДОМРИН
АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА

ВЫПУСКНИКА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

ФИЛИППОВА ВЛАДИСЛАВА ИГОРЕВИЧА

Содержание

Лекция 1 **6**
Формы записи комплексных чисел . . . 6
Геометрический смысл линейной функции . . . 6
Дифференцируемость функций комплексного переменного . . . 7
Определение и свойства голоморфных функций . . . 8

Лекция 2 **11**
Конформность в точке. Связь с $\mathbb{C}$-дифференцируемостью . . . 11
Конформное отображение одного открытого множества на другое . . . 12
Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость . . . 14
Дробно-линейные отображения (ДЛО) . . . 16
Определение ДЛО . . . 16

Лекция 3 **17**
Дробно-линейные отображения (ДЛО) (продолжение) . . . 17
ДЛО как конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя . . . 17
Групповое свойство ДЛО . . . 17
Круговое свойство ДЛО . . . 18
Свойство сохранения симметрии при ДЛО . . . 19

Лекция 4 **21**
Дробно-линейные отображения (ДЛО) (продолжение) . . . 21
Описание всех ДЛО единичного круга $U \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на себя . 21
Свойство трёх точек . . . 22
Описание всех ДЛО верхней полуплоскости $\Pi \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ на себя . . . 23
Интеграл вдоль пути . . . 23
Определение интеграла вдоль пути и примеры . . . 23
Свойства интеграла вдоль пути . . . 25

Лекция 5 **27**
Существование первообразной в круге . . . 27
Лемма Гурса . . . 27
Определение ограниченной области с кусочно-гладкой границей . . . 29
Интегральная теорема Коши . . . 31

Лекция 6 **35**
Интегральная формула Коши . . . 35
Напоминание о равномерной сходимости . . . 36
Теорема о разложении голоморфной функции в степенной ряд . . . 37
Неравенства Коши . . . 39
Теорема Лиувилля . . . 39

Лекция 7 **41**
Формула Коши-Адамара . . . 41

Голоморфность суммы степенного ряда . . . 42
Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций . . . 43
Формула для коэффициентов ряда Тейлора . . . 44
Интегральная формула Коши для производных . . . 44
Теорема Морера . . . 45
Эквивалентность трёх определений голоморфной функции . . . 45

Лекция 8 **47**
Нули голоморфных функций . . . 47
Принцип изолированности нулей . . . 47
Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве . . . 48
Теорема единственности . . . 48
Примеры разложений в степенной ряд . . . 49

Лекция 9 **52**
Разложение голоморфных функций в ряд Лорана . . . 52
Сходимость рядов по целым степеням $z - a$ . . . 54
Неравенства Коши . . . 55
Классификация изолированных особых точек однозначного характера . . . 55
Описание устранимой особой точки . . . 56
Описание полюса . . . 57

Лекция 10 **59**
Теорема Сохоцкого . . . 59
$a = \infty$ как изолированная особая точка . . . 59
Целые функции с полюсом на ∞ . . . 60
Описание всех конформных отображений $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя . . . 61
Мероморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$ . . . 61
Вычеты . . . 62
Определение вычета . . . 62
Теорема Коши о вычетах . . . 62
Вычет в терминах ряда Лорана . . . 63
Формулы для вычисления вычета в полюсе 1-го порядка . . . 63

Лекция 11 **65**
Вычеты (продолжение) . . . 65
Формула для вычисления вычета в полюсе любого порядка . . . 65
Лемма о логарифмическом вычете . . . 67
Теорема о логарифмическом вычете . . . 68
Непрерывная ветвь аргумента вдоль пути . . . 68

Лекция 12 **70**
Определения и свойства чисел $\Delta \arg\limits_{\gamma} f$ и $\Delta \arg\limits_{\partial D} f$ . . . 70
Принцип аргумента . . . 71
Теорема Руше . . . 71
Принцип сохранения области . . . 72

Критерий локальной однолистности 73
Окончательная форма теоремы об обратной функции 74

Лекция 13 **75**
Принцип максимума модуля 75
Лемма Шварца 75
Описание всех конформных отображений единичного круга $U \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на себя 76
Единственность конформного отображения области на круг 77
Задача на экстремум, решением которой является конформное отображение области на круг 78
Теорема Вейерштрасса «о рядах» 79

Лекция 14 **81**
Теорема Гурвица 81
Принцип компактности 81
Определение первообразной вдоль пути 83

Лекция 15 **85**
Формула Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути 85
Определение гомотопных путей 85
Теорема Коши о гомотопии 86
Определение односвязной области 87
Существование первообразной в односвязной области 88
Лемма о корнях и логарифмах 88
Теорема Римана о конформном отображении 88

Лекция 1

Формы записи комплексных чисел

Комплексное число – это точка на плоскости, обозначаемая $z = x + iy$, где x, y – её декартовы координаты, называемые вещественной и мнимой частями числа z: $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$, $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

Комплексные числа можно складывать покомпонентно.

Умножаются комплексные числа по следующему правилу: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Удобнее перемножать в тригонометрической форме, используя полярные координаты (модуль r и аргумент φ). Тогда $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|$, φ – угол от оси Ox до отрезка $[O, z]$, $\varphi =: \arg z$ (определено с точностью до $+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). При умножении $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ и $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

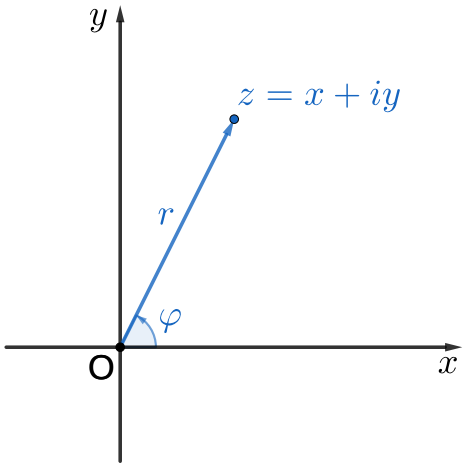

Рис. 1.1: Комплексное число

Можно ввести сокращённое обозначение для комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =: re^{i\varphi}$ (по сути, это определение экспоненты с чисто мнимым показателем степени). Тогда комплексные числа будут перемножаться следующим образом: $z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Приведём пример. $(1 + i)^{2020} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2020} = 2^{1010}e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 2020} = 2^{1010}e^{i2\pi\cdot\frac{2020}{8}} = 2^{1010}e^{i2\pi\cdot\frac{4}{8}} = 2^{1010}e^{i\pi} = -2^{1010}$.

Геометрический смысл линейной функции

Рассмотрим отображение $w = f(z) = az + b$, где $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

$f =$ (сдвиг на вектор b) $\circ$ (растяжение в $|a|$ раз относительно начала координат) $\circ$ (поворот на угол $\arg a$ относительно начала координат).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференцируемость функций комплексного переменного

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество (то есть $\forall a \in D\ \exists \varepsilon > 0\colon\ B(a,\varepsilon) \coloneqq \{r \in \mathbb{C} \mid |r-a| < \varepsilon\} \subset D$).

Определение 1. *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $a \in D$, если $\exists \lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} =: f'(a)$ (то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ 0 < |z-a| < \delta \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$).*

Эквивалентно (полагая $h \coloneqq z-a \in \mathbb{C}$): $\exists K, L \in \mathbb{R}\colon\ f(a+h) = f(a) + (K+iL)h + o(|h|)$ при $h \to 0$. Тогда $f'(a) = K + iL$.

Определение 2. *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $a \in D$, если $\exists A, B, C, E \in \mathbb{R}\colon\ f(a+h) = f(a) + \begin{pmatrix} A & C \\ B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|h|)$ при $h \to 0$, где $h = h_1 + ih_2$.*

Здесь мы отождествляем $\mathbb{C} \ni z = x + iy \ \leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Замечание 1. *Функции $u(x,y) \coloneqq \operatorname{Re} f(x+iy)$ и $v(x,y) \coloneqq \operatorname{Im} f(x+iy)$ в случае $\mathbb{R}$-дифференцируемости функции f в точке a имеют частные производные $u_x(a)$, $u_y(a)$, $v_x(a)$, $v_y(a)$, причём $\begin{pmatrix} A & C \\ B & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix}$ – это есть линейное отображение $d_a f : \mathbb{R}^2 = T_a D \to T_{f(a)}\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (дифференциал отображения f, или матрица Якоби).*

Теорема 1. (Условия Коши-Римана) *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $a \in D$ тогда и только тогда, когда f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке a и выполнены условия Коши-Римана:*

$$\begin{cases} u_x(a) = v_y(a) \\ u_y(a) = -v_x(a) \end{cases}. \tag{1.1}$$

Эквивалентно: матрица $d_a f$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ для некоторых $A, B \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

Докажем $\Rightarrow$. Введём обозначения: $A \coloneqq \operatorname{Re} f'(a)$, $B \coloneqq \operatorname{Im} f'(a)$, $h \coloneqq h_1 + h_2$. Тогда $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(|h|) = (A+iB)(h_1+ih_2) + o(|h|) = (Ah_1 - Bh_2) + i(Bh_1 + Ah_2) = \begin{pmatrix} Ah_1 - Bh_2 \\ Bh_1 + Ah_2 \end{pmatrix} + o(|h|) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|h|)$ при $h \to 0$, то есть f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке a и выполнены условия Коши-Римана.

Докажем $\Leftarrow$. По условию $f(a+h) - f(a) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|h|)$. Запишем правую часть как $(A+iB)(h_1+ih_2) + o(|h|)$. Получаем $\mathbb{C}$-дифференцируемость с $f'(a) \coloneqq A + iB$. $\square$

Приведём примеры.

1) $f(z) = z^2$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в любой точке $a \in \mathbb{C}$, и $f'(a) = 2a$. При этом $u + iv = f = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$, значит, $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$, тогда $d_z f = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. Таким образом, f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой и выполнены условия Коши-Римана.

2) $f(z) = \overline{z} := x - iy$ для $z = x + iy$. Здесь $\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$, тогда $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, есть $\mathbb{R}$-дифференцируемость в любой точке $a \in \mathbb{C}$, но не выполнены условия Коши-Римана $\Rightarrow$ f не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой ни в одной точке $a \in \mathbb{C}$.

Упражнение 1. *Проверьте непосредственно, что $f(z) = \overline{z}$ не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой, то есть $\nexists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overline{h}}{h}$.*

Упражнение 2. *Проверьте, что $f(z) := \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4},\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ 0,\ z = 0 \end{cases}$ имеет частные производные u_x, u_y, v_x, v_y в точке $z = 0$ и выполнены условия Коши-Римана в точке $z = 0$, но нет $\mathbb{R}$-дифференцируемости при $z = 0$, и следовательно, $\mathbb{C}$-дифференцируемости тоже нет.*

Определение и свойства голоморфных функций

Определение 3. *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется голоморфной в точке a, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности $|r - a| < \varepsilon$ точки a, и голоморфной на открытом множестве D (запись: $f \in \mathcal{O}(D)$), если f голоморфна (или, эквивалентно, $\mathbb{C}$-дифференцируема) в каждой точке $a \in D$.*

Приведём пример. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, значит, $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 0 \end{cases}$, тогда $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $f(z)$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой при $z = 0$ и только там $\Rightarrow$ не является голоморфной нигде на $\mathbb{C}$.

Свойства голоморфных функций:

1) $f, g \in \mathcal{O}(D) \ \Rightarrow\ f + g,\ f - g,\ \lambda f,\ fg \in \mathcal{O}(D)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, и выполнены обычные правила дифференцирования: $(f+g)' = f' + g'$, $(f-g)' = f' - g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(fg)' = f'g + fg'$. А также $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{O}(D\backslash\{z \in D \mid g(z) = 0\})$ и $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Доказательства такое же, как и в курсе математического анализа (потому что определение производной аналогично).

2) Это свойство сформулируем в виде теоремы (доказательство аналогично тому, что было в курсе математического анализа).

Теорема 2. (Теорема о сложной функции) *Если D, G – открытые множества, $f \in \mathcal{O}(D)$, $g \in \mathcal{O}(G)$ и $f(D) \subset G$, то $g \circ f \in \mathcal{O}(D)$ и $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ $\forall z \in D$.*

3) Это свойство тоже сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. (Теорема об обратной функции) *Пусть D_1, D_2 – открытые множества и $f \in \mathcal{O}(D_1)$ является гомеоморфизмом D_1 на D_2 (то есть f биективно и непрерывно и обратное отображение $g = f^{-1}$ тоже непрерывно), причём $f'(z) \neq 0$ ни при каком $z \in D_1$. Тогда $g \in \mathcal{O}(D_2)$ и $g'(w) = \dfrac{1}{f'(g(w))}$ $\forall w \in D_2$.*

Доказательство:

Пусть $w_0 \in D_2$ и $w \to w_0$. Пусть $z_0 \coloneqq g(w_0)$, $z \coloneqq g(w)$. Тогда $\dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \dfrac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \to \dfrac{1}{f'(z_0)}$ при $w \to w_0$ и (в силу непрерывности), следовательно, $z \to z_0$. $\dfrac{1}{f'(z_0)} \in \mathbb{C}$, так как $f'(z_0) \neq 0$. □

Замечание 2. *На самом деле условия непрерывности f^{-1} и $f'(z) \neq 0$ излишни (они автоматически вытекают из биективности f). Докажем это позже.*

Приведём примеры голоморфных функций.

1) Полиномы от z: $f(z) = z$ и, вообще, $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Тогда $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

2) Рациональные функции: $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash (\text{нули } Q))$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы, причём $Q(z) \not\equiv 0$.

3) Экспоненциальная функция: $w = e^z \coloneqq e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Утверждение 1. *Функция $f(z) = e^z$ принадлежит $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $f'(z) = e^z$ $\forall z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство:

По определению $\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$. Тогда u, v – дифференцируемые функции от $x, y \in \mathbb{R}$, то есть f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой всюду на $\mathbb{C}$ и $d_z f = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$. Таким образом, выполнены условия Коши-Римана $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Учтём, что если $d_a f = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, то $f'(a) = A + iB$ (см. док-во условий Коши-Римана (1)). Тогда для экспоненциальной функции получаем: $f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. □

Свойства экспоненты:

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Либо непосредственно проверяется через $\cos(y_1 + y_2)$ и $\sin(y_1 + y_2)$, либо дифференцируем по z_1 при фиксированном z_2.

2) $e^z \neq 0$ ни при каких $z \in \mathbb{C}$, так как $|e^z| = e^x > 0\ \forall z \in \mathbb{C}$.
3) $\forall w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\quad e^z = w \ \Leftrightarrow\ z = \ln|w| + i\arg w + 2\pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} |w| = e^x \\ \arg w = y \mod 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|w| \\ y = \arg w \mod 2\pi \end{cases}.$$

□

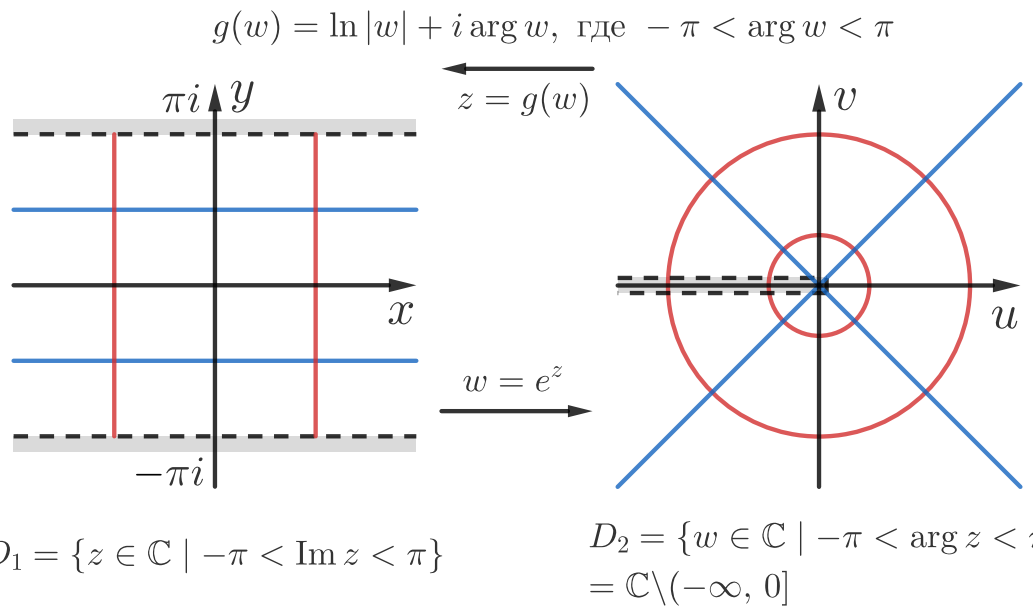

Рис. 1.2: Экспоненциальное отображение и обратное к нему

Утверждение 2. *Функция* $g(w) := \ln|w| + i\arg w$ *принадлежит* $\mathcal{O}(D_2)$ *и* $g'(w) = \dfrac{1}{w}\quad \forall w \in D_2$.

Доказательство:
Вытекает из теоремы (3) об обратной функции. □

Для запоминания: $e^{g(w)} = w \ \Rightarrow\ g'(w)e^{g(w)} = 1 \ \Rightarrow\ g'(w) = \dfrac{1}{e^{g(w)}} = \dfrac{1}{w}$.

Лекция 2

Конформность в точке. Связь с $\mathbb{C}$-дифференцируемостью

Определение 4. *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ (где $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество) называется конформной (или конформным отображением) в точке $a \in D$, если:*

1) f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке a и дифференциал (матрица Якоби) $d_a f = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix}$ невырожден как линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (det матрицы $\neq 0$);

2) $\forall$ гладких (C^1) отображений $\gamma_j : [-\varepsilon, \varepsilon] \to D$ ($j = 1, 2$) с $\gamma_j(0) = a$ и $\gamma_j' \neq 0$ при $j = 1, 2$ имеем: (угол от γ_1 до γ_2 в точке a) = (углу от $f \circ \gamma_1$ до $f \circ \gamma_2$ в точке $f(a)$).

Пояснение: угол от γ_1 до γ_2 в точке a – это по определению угол от $\gamma_1'(0)$ до $\gamma_2'(0)$, то есть угол, на который надо повернуть вектор $\gamma_1'(0)$ до совпадения с вектором $\gamma_2'(0)$.

Утверждение 3. *Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ является конформным в точке $a \in D$ тогда и только тогда, когда f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке a и $f'(a) \neq$ $\neq 0$.*

Доказательство:

$\forall C^1$-отображения $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to D$ с $\gamma(0) = a$ по теореме о сложной функции (2) (или по определению $d_a f$) имеем: $(f \circ \gamma)'(0) = d_a f \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \end{pmatrix}$. Здесь $\gamma_1'(0) := \operatorname{Re} \gamma'(0)$, $\gamma_2'(0) := \operatorname{Im} \gamma'(0)$, то есть $\gamma(t) =$ $= \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ (отождествляем $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$).

Поэтому достаточно доказать, что невырожденное линейное отображение $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет тому, что (угол от v_1 до v_2) = (углу от Xv_1 до Xv_2) $\forall v_1, v_2 \in$ $\in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, тогда и только тогда, когда $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ для некоторых $A, B \in \mathbb{R}$ таких, что $A^2 + B^2 \neq 0$. Затем останется только применить это к $X = d_a f$. Условие $A^2 + B^2 \neq 0$ эквивалентно тому, что $|f'(a)|^2 = A^2 + B^2 \neq 0$, то есть $f'(a) \neq 0$.

Докажем $\Rightarrow$. $\forall$ ортонормированного базиса e_1, e_2 векторы Xe_1, Xe_2 (ненулевые в силу невырожденности X) образуют ортогональный базис. Из того, что (угол от e_1 до $e_1 + e_2$) $= \dfrac{\pi}{4} =$ (углу от Xe_1 до $Xe_1 + Xe_2$), вытекает, что прямоугольник со сторонами Xe_1, Xe_2 является квадратом, то есть $|Xe_1| = |Xe_2|$. Введём обозначение: $Xe_1 := \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Тогда Xe_2 получается из Xe_1 поворотом на $+\dfrac{\pi}{2}$, то есть $Xe_2 = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица оператора X есть $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, $A^2 + B^2 = \det X \neq 0$ в силу невырожденности.

Докажем $\Leftarrow$. Матрица $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ есть матрица оператора умножения на комплексное число $A + iB \neq 0$ (по условию $A^2 + B^2 \neq 0$), то есть X – композиция

поворота на угол $\arg(A+iB)$ и растяжения в $|A+iB| = \sqrt{A^2+B^2}$ раз. Каждое из преобразований сохраняет углы между векторами $\Rightarrow$ их композиция тоже. $\square$

Замечание 3. *Мы получили геометрический смысл модуля и аргумента комплексного производной $f'(a) \neq 0$.*

$|f'(a)| = \dfrac{|d_a f(\xi)|}{|\xi|}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *– коэффициент растяжения длин касательных векторов.*

$\arg f'(a) = \arg d_a f(\xi) - \arg \xi$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *– угол поворота касательных векторов.*

Конформное отображение одного открытого множества на другое

Определение 5. *Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ – открытые множества. Отображение $f : D_1 \to D_2$ называется конформным отображением D_1 на D_2, если f – гомеоморфизм D_1 на D_2 и f конформно в каждой точке $a \in D$ (в силу (3) эквивалентно: $f \in \mathcal{O}(D_1)$ гомеоморфно отображает D_1 на D_2 и $f' \neq 0$ в каждой точке $a \in D_1$).*

По теореме (3) об обратной функции f^{-1} есть конформное отображение D_2 на D_1.

Приведём примеры.

1) $w = f(z) = e^z$ отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ сюръективно (но не инъективно: $e^{2\pi i} = e^0$), причём конформно в каждой точке $a \in \mathbb{C}$ (так как $f'(a) = e^a \neq 0$), но не является конформным отображением $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (так как нет биективности). Но $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, функция $w = e^z$ конформно отображает $S_{\alpha\beta} := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$ на $V_{\alpha\beta} := \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha < \arg w < \beta\}$ (биективность вытекает из условия $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$).

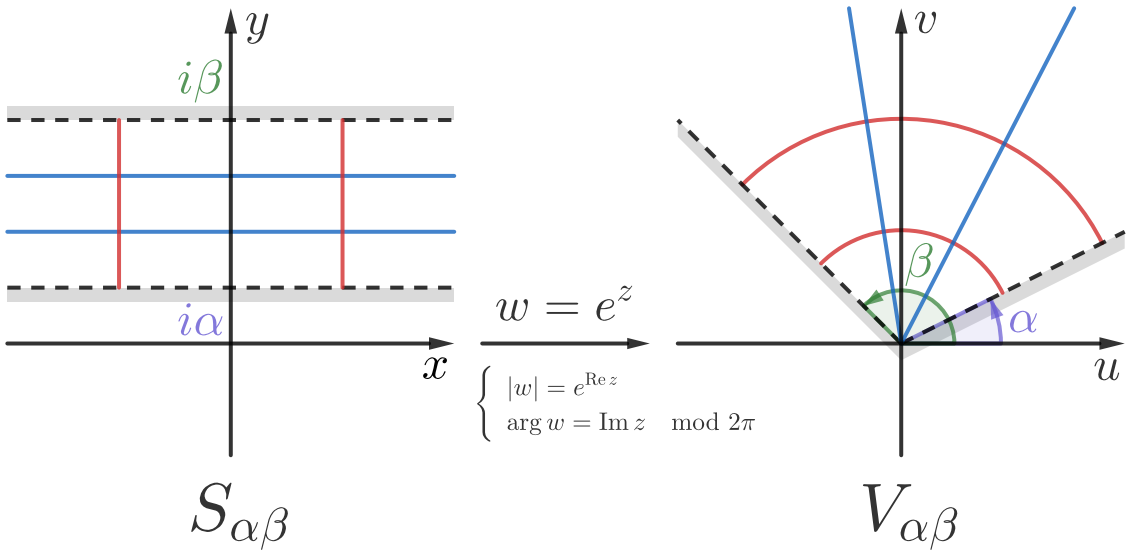

Рис. 2.1: Пример конформного отображения $w = e^z$ $S_{\alpha\beta}$ на $V_{\alpha\beta}$

2) Если $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{C}$ – открытые множества и $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to D_3$ – конформные отображения, то $g \circ f : D_1 \to D_3$ – тоже конформное отображение (это ясно из определений). В частности, пусть $t > 0$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таковы, что

$\begin{cases} 0 < \beta - \alpha \le 2\pi \\ 0 < (\beta - \alpha)t \le 2\pi \end{cases}$. Тогда функция $w = z^t := e^{t(\ln|z| + i\arg z)}$, где $\alpha < \arg z < \beta$ конформно отображает $V_{\alpha\beta}$ на $V_{t\alpha, t\beta}$.

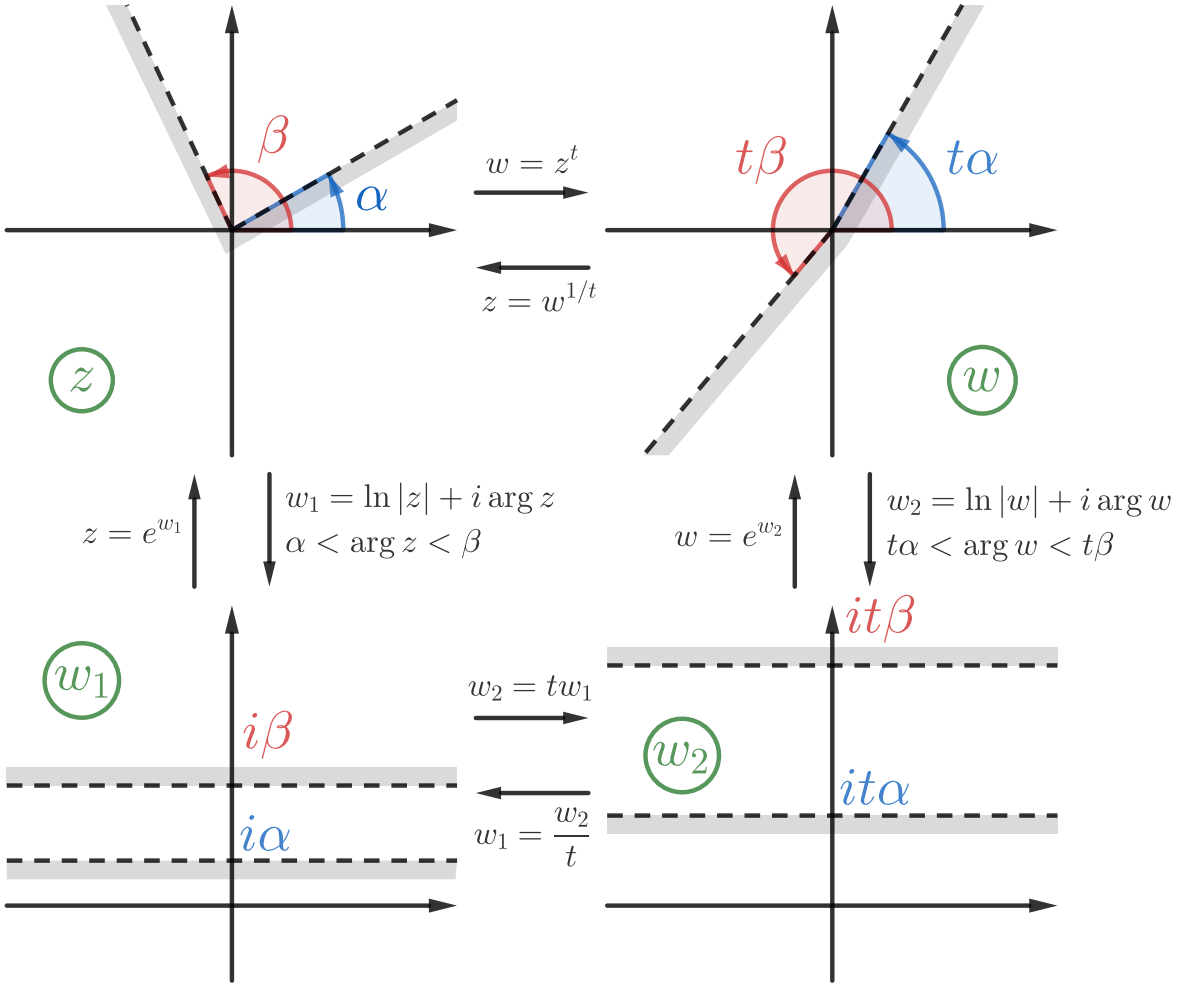

Рис. 2.2: Пример конформного отображения $w = z^t$ $V_{\alpha\beta}$ на $V_{t\alpha, t\beta}$

Более конкретный случай: $t = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$. Получаем конформное отображение верхней полуплоскости на плоскость без луча.

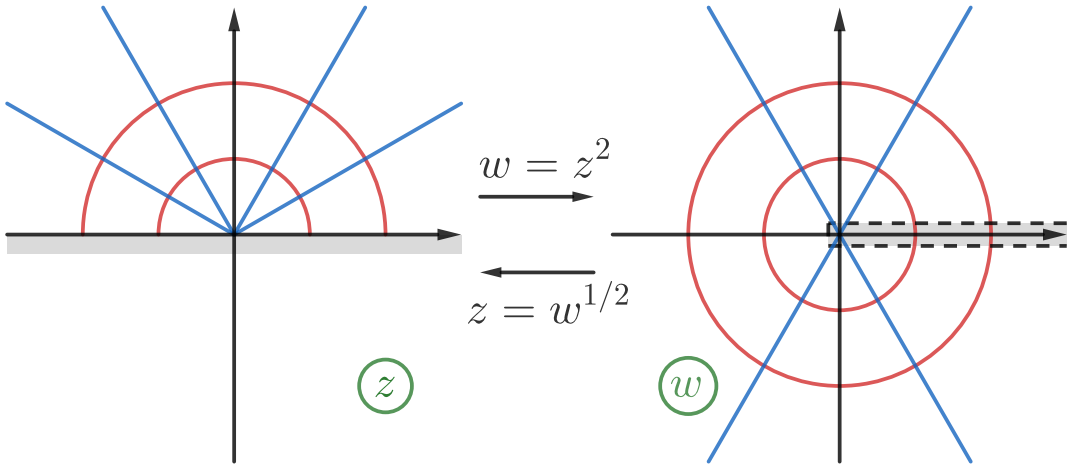

Рис. 2.3: Пример конформного отображения $w = z^2$ $V_{0,\pi}$ на $V_{0,2\pi}$

3) Функция $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ конформно отображает полуплоскость $\Pi := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $U := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.

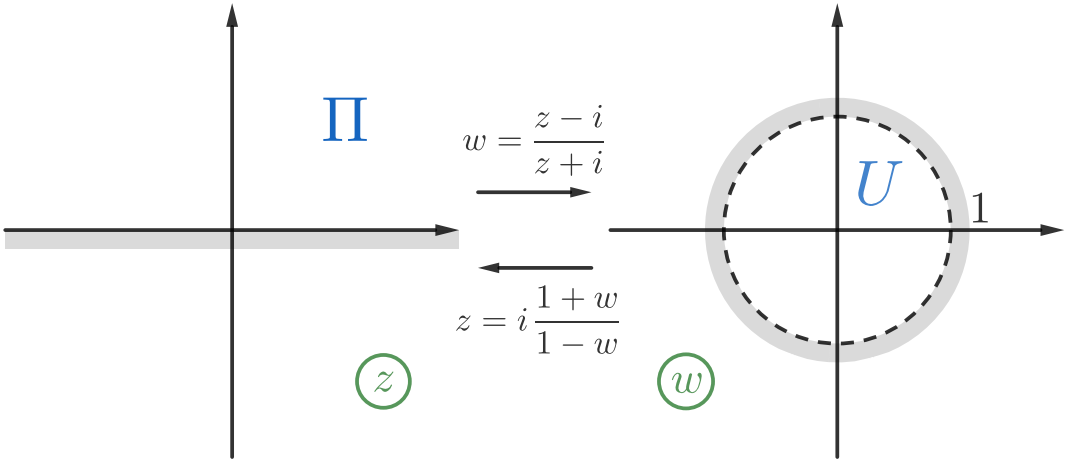

Рис. 2.4: Пример конформного отображения $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ Π на U

Биективность: $z \in \Pi \;\Leftrightarrow\; z$ ближе к i, чем к $-i \;\Leftrightarrow\; |z-i| < |z+i| \;\Leftrightarrow\; |w| < 1 \;\Leftrightarrow\; w \in U$.

Конформность в любой точке $z \in \Pi$: если $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, то $f'(z) = \dfrac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = \dfrac{2i}{(z+i)^2} \neq 0 \;\; \forall z \in \Pi$.

Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость

Определение 6. $\overline{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ *– расширенная комплексная плоскость. Открытая окрестность* ∞ *в* $\overline{\mathbb{C}}$ *– это по определению любое подмножество вида* $D \sqcup \{\infty\}$, *где* $D \subset \mathbb{C}$ *– открытое множество и* $D \supset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ *для некоторого* $R > 0$.

Структура топологического пространства $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ визуально изображается сферой в трёхмерном пространстве, называемой сферой Римана.

Стереографическая проекция $F : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$ является гомеоморфизмом $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ и сферы без точки. По непрерывности F продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ на S^2.

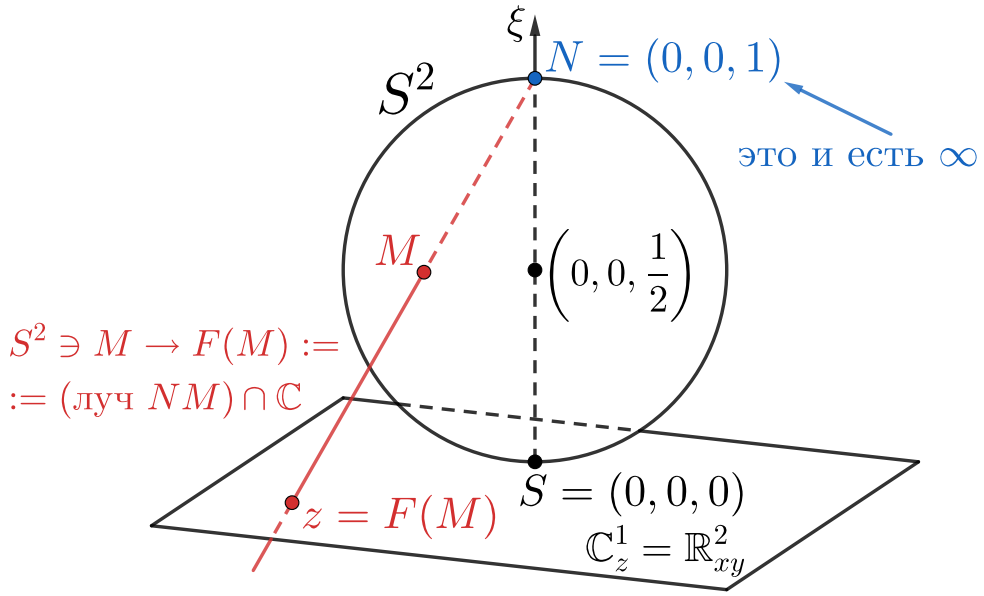

Рис. 2.5: Сфера Римана

Введём на $\overline{\mathbb{C}}$ определения функции, являющейся непрерывной, $\mathbb{R}$-дифференцируемой, $\mathbb{C}$-дифференцируемой, голоморфной, конформной в точке. Для этого надо будет дать определения для четырёх случаев отображения, иллюстрируемых на схеме ниже.

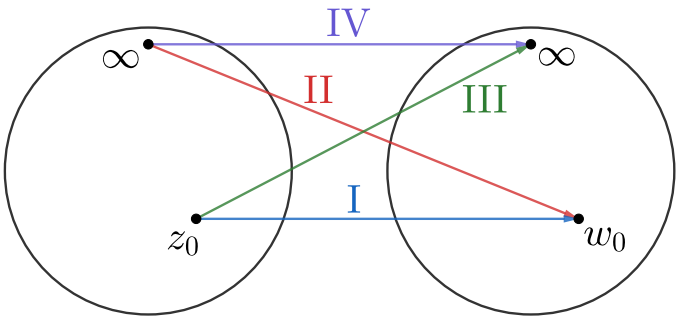

Рис. 2.6: Четыре случая отображения

Случай (I) не требует дополнительных определений, кроме уже данных нами ранее. Поэтому надо ввести определения только для случаев (II), (III), (IV).

Определение 7. II) Функция $f : D \sqcup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ называется непрерывной, $\mathbb{R}$-дифференцируемой, $\mathbb{C}$-дифференцируемой, голоморфной, конформной в точке ∞, если функция $g(\zeta) := f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ является таковой в точке $\zeta = 0$.

III) Функция $f : (\text{окрестность } z_0) \to \overline{\mathbb{C}}$ с $f(z_0) = \infty$ называется непрерывной, $\mathbb{R}$-дифференцируемой, $\mathbb{C}$-дифференцируемой, голоморфной, конформной в точке z_0, если функция $h(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ является таковой в точке $z = z_0$.

IV) Функция $f : D \sqcup \{\infty\} \to \overline{\mathbb{C}}$ с $f(\infty) = \infty$ называется непрерывной, $\mathbb{R}$-дифференцируемой, $\mathbb{C}$-дифференцируемой, голоморфной, конформной в точке $z =$

$= \infty$, если функция $\varphi(\zeta) := \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}$ является таковой в точке $\zeta = 0$.

Дробно-линейные отображения (ДЛО)

Определение ДЛО

Определение 8. *ДЛО – это по определению функции вида*

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{2.1}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *и* $ad - bc \neq 0$. *При этом по определению полагаем: если* $c = 0$, *то* $f(\infty) := \infty$; *если* $c \neq 0$, *то* $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) := \infty$, $f(\infty) := \dfrac{a}{c}$.

Лекция 3

Дробно-линейные отображения (ДЛО) (продолжение)

ДЛО как конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя

Введём обозначения, которые будем далее использовать: $\mathcal{O}(a) \coloneqq \{$все функции f, голоморфные в точке $a\}$, $a \in \mathbb{C}$; $\forall$ подмножества $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ $\mathcal{O}(M) \coloneqq \{f(z)\colon\ \exists$ открытое $U \subset M$ с $f \in \mathcal{O}(U)\}$.

Утверждение 4. *Каждое ДЛО есть конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.*

Доказательство:

1) Проверим гомеоморфность. непрерывность следует из определения ДЛО (8), биективность следует из выражения z через w.

2) Проверим конформность.

2.1) Если $c = 0$, то $ad \neq 0$ и $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ – линейное отображение. Тогда $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $f'(z) = \dfrac{a}{d} \neq 0$ всюду на $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f конформна во всех точках $z \in \mathbb{C}$.

При $z = \infty$ надо рассмотреть $\tilde{f}(z) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{a}{d}\dfrac{1}{z} + \dfrac{b}{d}} = \dfrac{dz}{a + bz}$. Тогда $\tilde{f} \in \mathcal{O}(0)$ и $f'(z) = \dfrac{d(a+bz) - dzb}{(a+bz)^2} = \dfrac{da}{(a+bz)^2} \neq 0$ при $z = 0$. Таким образом, $\tilde{f}$ конформна при $z = 0$, а f – при $z = \infty$ (по определению).

2.2) Если $c \neq 0$, то $f \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\right)$ и $f'(z) = \dfrac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, то есть f конформна $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

При $z = \infty$ надо рассмотреть $\tilde{f}(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{a + bz}{c + dz}$. Тогда $\tilde{f}'(z) = \dfrac{bc - ad}{(c+dz)^2} \neq 0$ при $z = 0$ $\Rightarrow$ f конформно в точке $z = \infty$.

При $z = -\dfrac{d}{c}$ надо рассмотреть $\tilde{f}(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{cz + d}{az + b}$. Тогда $\tilde{f}'(z) = \dfrac{bc - ad}{(az+b)^2} \neq 0$ при $z = -\dfrac{d}{c}$ $\Rightarrow$ f конформно в точке $z = -\dfrac{d}{c}$. □

Групповое свойство ДЛО

Утверждение 5. (Групповое свойство ДЛО) *Множество всех ДЛО – группа относительно композиции, причём композиция ДЛО отвечает умножению матриц, то есть отображение* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ *является гомоморфизмом групп.*

Доказательство:

Непосредственная проверка (в том числе $f^{-1}(z) = \dfrac{b - dz}{cz - a}$) □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 4. *Группа всех ДЛО изоморфна* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) := \dfrac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}{\{\pm \mathrm{I}\}}$.

Круговое свойство ДЛО

Определение 9. *Множество $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется обобщённой окружностью, если либо $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ – настоящая окружность ($a \in \mathbb{C}$, $R > 0$), либо $M = L \cup \{\infty\}$, где $L \subset \mathbb{C}$ – прямая.*

Каждая обобщённая окружность соответствует обычной окружности на сфере Римана.

Утверждение 6. $\forall$ *обобщённой окружности M $\exists A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$: $M \cap \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$.*

Обратно: любое уравнение $Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$, где $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, задаёт либо $\mathbb{C}$, либо $\varnothing$, либо одну точку, либо обобщённую окружность.

Доказательство:

Уравнение прямой: $B_1x + B_2y + C = 0$, где $B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$, одновременно не равные 0.

Уравнение окружности: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, то есть $A(x^2+y^2) + B_1x + B_2y + C = 0$, где $A = 1$, а $B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$.

Таким образом, уравнение $A(x^2+y^2) + B_1x + B_2y + C = 0$ при $A = 0$ задаёт прямую, а при $A = 1$ – окружность.

Так как $B_1x + B_2y = \mathrm{Re}((B_1 - iB_2)(x+iy))$, то $B_1x + B_2y = Bz + \overline{B}\overline{z}$ при $B := \dfrac{1}{2}(B_1 - iB_2)$.

Таким образом, $M \cap \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$.

Доказательство в обратную сторону теми же рассуждениями в обратном порядке. $\square$

Утверждение 7. (Круговое свойство ДЛО) *Если $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ – обобщённая окружность, а $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – ДЛО, то $f(M)$ – тоже обобщённая окружность.*

Доказательство:

Любое ДЛО $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ можно записать (при $c \neq 0$) в виде $f(z) = k + \dfrac{l}{z+m}$ для некоторых $k, l, m \in \mathbb{C}$, то есть $f = A_1 \circ B \circ A_2$, где $A_1(\xi) = k + l\xi$ и $A_2(z) = z + m$ – линейные отображения, а $B(\eta) = \dfrac{1}{\eta}$. Значит, достаточно доказать круговое свойство для линейных отображений и для $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Для линейных f (то есть композиции сдвига, поворота и растяжения) выполнение кругового свойства очевидно.

Для $f(z) = \dfrac{1}{z}$ выполнение кругового свойства вытекает из утверждения (6). Действительно, если $M \cap \mathbb{C} = \{Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$, то $f(M) \cap \mathbb{C} = \left\{A\dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\overline{w}} + B\dfrac{1}{w} + \overline{B}\dfrac{1}{\overline{w}} + C = 0\right\} = \{Cw\overline{w} + \overline{B}w + B\overline{w} + A = 0\}$. Тогда по утверждению (6) $f(M)$ – это обобщённая окружность, либо $\mathbb{C}$, либо $\varnothing$, либо точка. Случаи,

когда $f(M)$ – это $\mathbb{C}$, либо $\varnothing$, либо точка невозможны в силу биективности $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, $f(M)$ – обобщённая окружность. $\square$

Приведём пример.

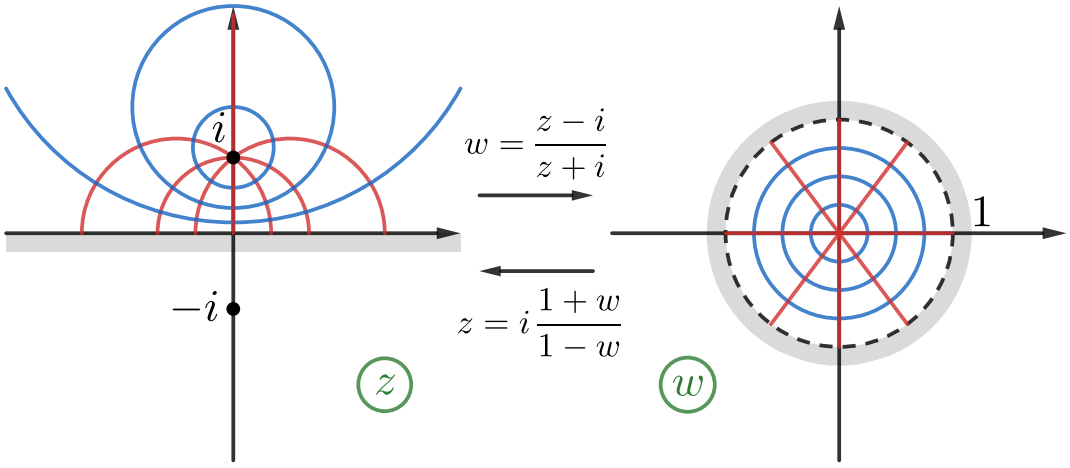

Рис. 3.1: Пример кругового свойства ДЛО

Свойство сохранения симметрии при ДЛО

Определение 10. *Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ называются симметричными относительно обобщённой окружности $M = L \cup \{\infty\}$, где $L \in \mathbb{C}$ – прямая, если L – серединный перпендикуляр к $[z_1, z_2]$ (все точки $z \in M$, включая ∞, по определению симметричны сами себе).*

Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$ называются симметричными относительно окружности $M = \{|z-a| = R\}$, если:

1) z_1, z_2 лежат на одном луче с вершиной a;

2) $|z_1 - a| \cdot |z_2 - a| = R^2$.

При этом по определению точки a и ∞ симметричны друг другу.

Утверждение 8. *Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ симметричны относительно обобщённой окружности $\{Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$ тогда и только тогда, когда $Az_1\overline{z}_2 + Bz_1 + \overline{B}\overline{z}_2 + C = 0$ (то есть в исходном уравнении заменили z на z_1 и $\overline{z}$ на $\overline{z}_2$).*

Доказательство:

1) Если $M = \{|z-a| = R\}$, то есть уравнение M имеет вид $(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = R^2 \Leftrightarrow z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a} - R^2 = 0$ – уравнение окружности при $A = 1$, $B = -\overline{a}$, $C = a\overline{a} - R^2$.

Из определения симметричности точек (10) следует:

1) $\arg(z_1 - a) = \arg(z_2 - a)$;

2) $|z_1 - a| = \dfrac{R^2}{|z_2 - a|}$.

Тогда числа $z_1 - a$ и $\dfrac{R^2}{z_2 - a}$ имеют одинаковые модули, а их аргументы отличаются знаком. Значит, $z_1 - a = \dfrac{R^2}{\overline{z_2 - a}} \Leftrightarrow (z_1 - a)(\overline{z}_2 - \overline{a}) = R^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 - \overline{a}z_1 - a\overline{z}_2 + a\overline{a} - R^2 = 0$. Таким образом, z_1 и z_2 связаны так, как написано в утверждении.

2) Случай, когда $M = L \cup \{\infty\}$, где $L = \{Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$ – прямая, оставим как упражнение (указание: заменой $w = Bz + \dfrac{C}{2}$ свести к случаю мнимой оси $\{z + \overline{z} = 0\}$, а для неё утверждение проверяется непосредственно). $\square$

Утверждение 9. *Если $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – ДЛО и точки $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ симметричны относительно обобщённой окружности $M \subset \overline{\mathbb{C}}$, то точки $f(z_1)$, $f(z_2)$ симметричны относительно обобщённой окружности $f(M)$.*

Доказательство:

В силу разложения $f = A_1 \circ B \circ A_2$, полученного при доказательстве утверждения (7), достаточно доказать для случаев, когда $f(z) = az + b$ линейно и когда $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Для случая, когда $f(z) = az + b$ линейно, доказываемое утверждение ясно из геометрического смысла.

Случай, когда $f(z) = \dfrac{1}{z}$, докажем с помощью утверждения (8). z_1, z_2 симметричны относительно $M = \{Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$ $\Leftrightarrow$ по утверждению (8) $Az_1\overline{z}_2 + Bz_1 + \overline{B}\overline{z}_2 + C = 0$ $\Rightarrow$ с помощью подстановки $z_1 = \dfrac{1}{w_1}$, $z_2 = \dfrac{1}{w_2}$ получаем: $A + B\overline{w}_2 + \overline{B}w_1 + Cw_1\overline{w}_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ по утверждению (8) w_1, w_2 симметричны относительно $f(M) = \{A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0\}$. $\square$

Лекция 4

Дробно-линейные отображения (ДЛО) (продолжение)

Описание всех ДЛО единичного круга $U \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на себя

Утверждение 10. *ДЛО $w = f(z)$ удовлетворяет $f(U) = U$ (эквивалентно: f конформно отображает U на себя) $\Leftrightarrow$ $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ для некоторых $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in U$.*

Доказательство:

Докажем $\Rightarrow$. Пусть $a \coloneqq f^{-1}(0) \neq 0$. Тогда точка $a^* \coloneqq \dfrac{1}{\overline{a}}$ (симметрична a относительно окружности ∂U) по свойству сохранения симметрии должная перейти в точку, симметричную точке $w = 0$ относительно $f(\partial U) = \partial U$ (равенство верно в силу гомеоморфности $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ и равенства $f(U) = U$). Таким образом, $f(a^*) = \infty$. Тогда $\exists k \in \mathbb{C}\colon\ f(z) = k\dfrac{z-a}{z-a^*} = k\dfrac{z-a}{z-\dfrac{1}{\overline{a}}} = k\overline{a}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$. При этом для $z = 1$ имеем: $f(1) = k\overline{a}\dfrac{1-a}{\overline{a}-1} \ \Rightarrow\ |f(1)| = |k\overline{a}|\dfrac{|1-a|}{|\overline{a}-1|}$. Учитывая, что $|f(1)| = 1$, так как $f(\partial U) \subset \partial U$, и $\dfrac{|1-a|}{|\overline{a}-1|} = 1$ как отношение модулей комплексно сопряжённых чисел, получаем: $|k\overline{a}| = 1 \ \Rightarrow\ \exists\theta \in \mathbb{R}\colon\ k\overline{a} = -e^{i\theta}$. Таким образом, $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ для некоторых $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in U$, причём $a \neq 0$.

Если же $a = 0$, то f – линейное отображение, то есть композиция сдвига, поворота и растяжения. Тогда условие $f(U) = U$ означает, что коэффициент растяжения равен 1, вектор сдвига равен 0, а угол поворота любой $\Rightarrow$ $f(z) = e^{i\theta}z = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$ при $a = 0$.

Докажем $\Leftarrow$. $1-|f(z)|^2 = \dfrac{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}$. Воспользуемся формулой $|A-B|^2 = |A|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{A}B) + |B|^2 = |A|^2 - 2\operatorname{Re}(A\overline{B}) + |B|^2$, получим: $1 - |f(z)|^2 = \dfrac{1 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2 - |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) - |a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$. Так как $a \in U$, то $\dfrac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} > 0$, значит, вещественные числа $1-|f(z)|^2$ и $1-|z|^2$ имеют один и тот же знак (или оба равны 0) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{1}{\overline{a}}\right\}$. Таким образом, $f(z) \in U \ \Leftrightarrow\ z \in U$, то есть $f(U) = U$. $\square$

Упражнение 3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, допускающее конформное отображение на U (например, D – любой круг, полуплоскость, полоса, …). Доказать, что $\forall a, b \in D\ \exists$ бесконечно много конформных отображений $f : D \to D\colon\ f(a) = b$.*

Упражнение 4. *Пусть $a, b \in \mathbb{C}$ симметричны относительно обобщённой окружности $\Gamma \in \overline{\mathbb{C}}$. Докажите, что $\exists k > 0\colon\ \Gamma \cap \mathbb{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \dfrac{|z-a|}{|z-b|} = k \right\}$.*

Свойство трёх точек

Утверждение 11. (Свойство трёх точек) *Для любых двух троек a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 попарно различных точек из $\overline{\mathbb{C}}$ (то есть $a_i \neq a_j$ и $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$, но может быть, что $a_i = b_j$ для некоторых i, j) $\exists$ единственное ДЛО $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$: $f(a_k) = b_k$ при $k = 1, 2, 3$.*

Доказательство:

1) Пусть $(b_1, b_2, b_3) = (0, 1, \infty)$. Тогда $f(z) = \dfrac{z - a_1}{z - a_3} \cdot \dfrac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}$ – единственное ДЛО с $f(a_k) = b_k$ при $k = 1, 2, 3$, если среди точек a_1, a_2, a_3 нет ∞. Если же одно из a_k равно ∞, то формула для f сохраняется, если перейти в ней к пределу $a_k \to \infty$, то есть вычеркнуть оба множителя, содержащие a_k.

2) На рисунке ниже представлена схема отображений для доказательства, в ней α и β – ДЛО из предыдущего пункта.

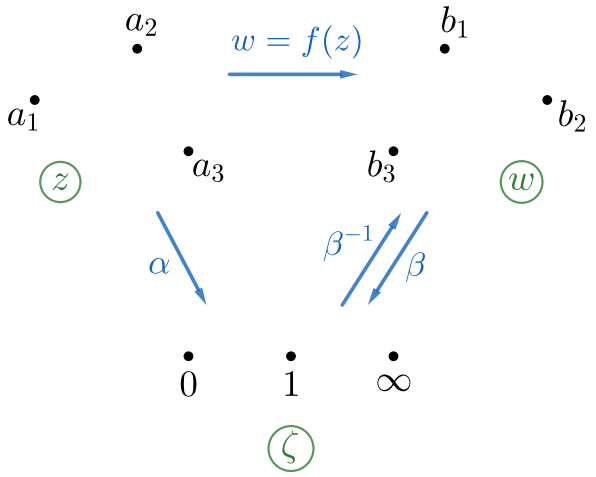

Рис. 4.1: Схема доказательства для пункта (2)

Полагая $f := \beta^{-1} \circ \alpha$, получаем требуемое ДЛО. Оно единственно, так как $\beta \circ f$ есть ДЛО с $a_1, a_2, a_3 \to 0, 1, \infty$, то есть равно α в силу единственности из пункта (1). $\square$

Упражнение 5. *Для любых попарно различных четырёх точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ определим их двойное отношение $(a_1, a_2, a_3, a_4) = \dfrac{a_4 - a_1}{a_4 - a_3} \cdot \dfrac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ (это $f(a_4)$ для $f(z)$, использовавшейся в пункте (1) доказательства утверждения (11)). Доказать, что $\forall$ ДЛО f имеем $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.*

Упражнение 6. *Доказать, что $\exists$ ДЛО $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$: $f(a_k) = b_k$, где $k = 1, 2, 3, 4$, тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.*

Упражнение 7. *Доказать, что попарно различные точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ лежат на одной обобщённой окружности тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}$.*

Из упражнений (5) и (7) вытекает другое доказательство кругового свойства ДЛО.

Описание всех ДЛО верхней полуплоскости $\Pi := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ на себя

Утверждение 12. *ДЛО $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет $f(\Pi) = \Pi$ (эквивалентно: f конформно отображает Π на себя) тогда и только тогда, когда $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $ad - bc > 0$.*

Доказательство:

Докажем $\Leftarrow$. $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{\operatorname{Im}((az+b)(c\overline{z}+d))}{|cz+d|^2}$. Учитывая, что $z = x+iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, получаем: $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{(ax+b)(-cy)+ay(cx+d)}{|cz+d|^2} = \dfrac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im} z$. Так как $\dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2} > 0$, то знаки вещественных чисел $\operatorname{Im} f(z)$ и $\operatorname{Im} z$ совпадают, то есть $f(\Pi) = \Pi$ (а если бы было $ad - bc < 0$, то $f(\Pi) = -\Pi$ – нижняя полуплоскость).

Докажем $\Rightarrow$. Пусть $f(\Pi) = \Pi$. Тогда в силу гомеоморфности $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ имеем $f(\partial\Pi) = \partial\Pi$, то есть $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Значит, точки $a_1 := f^{-1}(0)$, $a_2 := f^{-1}(1)$, $a_3 := f^{-1}(\infty)$ принадлежат $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. По свойству трёх точек (11) $f(z) = \dfrac{z-a_1}{z-a_3} \cdot \dfrac{a_2-a_3}{a_2-a_1}$. Тогда если среди a_k нет ∞, то $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а если среди a_k есть бесконечность, то равенство тоже верно в силу предельного перехода, то есть вычёркивания двух множителей, содержащих a_k. При этом $ad - bc > 0$, так как иначе $f(\Pi) = -\Pi$, как было показано выше. $\square$

Упражнение 8. *Установить изоморфизм групп $\dfrac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}{\{\pm \mathrm{I}\}}$ и $\dfrac{\mathrm{SU}(1,1)}{\{\pm \mathrm{I}\}}$.*

Интеграл вдоль пути

Определение интеграла вдоль пути и примеры

Определение 11. *Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ – кусочно-непрерывно-дифференцируемое отображение, то есть γ непрерывно на $[a,b]$ и $\exists$ разбиение отрезка $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$: сужение γ на $[t_{i-1}, t_i]$ непрерывно дифференцируемо (включая односторонние производные в концах) $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Заметим, что условий типа $\gamma'(t) \neq 0$ пока не требуется.

Приведём примеры.

1) $\gamma(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$ – одна точка.

2) $\gamma(t) = a + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ – окружность $\{|z-a| = R\}$.

3) $\gamma(t) = t^2 + it^2 \operatorname{sign}(t)$, $-1 \le t \le 1$ – непрерывно-дифференцируемое на $[-1,1]$ отображение.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 12. *Пусть $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ – такая функция, что $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ непрерывно. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz := \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{4.1}$$

Обычно $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна, где $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество и $D \supset \gamma([a,b])$. Приведём примеры.

1) **Формула Ньютона-Лейбница**. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f' \in C(D)$ (непрерывность f' в D – техническое условие, на самом деле излишнее), $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ – кусочно-непрерывно-дифференцируемый путь и $\gamma[a,b] \subset D$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{4.2}$$

Доказательство:

$$\int\limits_{\gamma} f'(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\,dt = f(\gamma(t))\Big|_{t=a}^{t=b}. \qquad \square$$

2) **Единственное явное вычисление интеграла в курсе ТФКП**. Пусть $R > 0$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Доказательство:

$$\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} R^n e^{int} iRe^{it}\,dt = iR^{n+1}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt.$$

Если $n = -1$, то $\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz = i\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i$.

Если $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, то $\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz = iR^{n+1}\dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\Big|_{t=0}^{2\pi} = \dfrac{R^{n+1}}{n+1}\left(e^{2\pi i(n+1)} - e^0\right) = \dfrac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0.$ $\square$

Замечание 5. *При $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ это также частный случай примера (1), так как $z^n = \left(\dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right)'$.*

Утверждение 13. $\nexists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$: $f'(z) = \dfrac{1}{z}$ *на* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Доказательство:

Если такая f существует, то $\forall R > 0 \quad 2\pi i = \int\limits_{\gamma_R} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma_R} f'(z)\,dz = f(\gamma_R(2\pi)) - f(\gamma_R(0)) = f(1) - f(1) = 0$ – противоречие $\Rightarrow$ такая f не существует. $\square$

Замечание 6. *Тем не менее* $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \exists f_\theta \in \mathcal{O}(V_{\theta,\theta+2\pi}) : \quad f'(z) = \frac{1}{z}$ *на* $V_{\theta,\theta+2\pi} = \mathbb{C}\backslash\{re^{i\theta} \mid r \geq 0\}$. *А именно,* $f_\theta(z) = \ln|z| + i\arg z$, *где* $\theta < \arg z < \theta + 2\pi$. *Свойство* $f'_\theta(z) = \frac{1}{z}$ *вытекает из теоремы об обратной функции.*

Свойства интеграла вдоль пути

1) Линейность: $\int\limits_\gamma (af + bg)\,dz = a\int\limits_\gamma f\,dz + b\int\limits_\gamma g\,dz$, где $a, b \in \mathbb{C}$.

2) Аддитивность: $\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz$, где конец пути γ_1 совпадает с началом пути γ_2 или γ_1 и γ_2 – замкнутые пути.

3) Независимость от параметризации: $\int\limits_{\gamma\circ\tau} f\,dz = \int\limits_\gamma f\,dz$ для любого монотонно возрастающего диффеоморфизма $\tau : [a_1, b_1] \to [a, b]$ (вытекает из теоремы о замене переменных в интеграле Римана).

4) Зависимость от ориентации: $\int\limits_{\gamma\circ\tau} f\,dz = -\int\limits_\gamma f\,dz$ для любого монотонно убывающего диффеоморфизма $\tau : [a_1, b_1] \to [a, b]$.

Вывод из свойств (3) и (4): $\int\limits_\gamma f\,dz$ зависит только от ориентированной кривой $\gamma([a, b])$. Например, $\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$ (по умолчанию ориентация задаётся так, чтобы при обходе ограниченная область оставалась слева).

5) Оценка интеграла: $\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max\limits_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot (\text{длина } \gamma)$.

Доказательство:

Введём обозначение: $J := \int\limits_\gamma f(z)\,dz$. Если $J = 0$, то неравенство верно. Если $J \neq 0$, то запишем $J = |J|e^{i\theta}$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда $|J| = Je^{-i\theta} = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)e^{-i\theta}\,dt$. Введём обозначение: $\varphi(t) := f(\gamma(t))\gamma'(t)e^{-i\theta}$. Так как

$\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt = |J| \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b \operatorname{Im}\varphi(t)\,dt = 0$, тогда $|J| = \int\limits_a^b \operatorname{Re}\varphi(t)\,dt \le \int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt =$

$= \int\limits_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\,dt \le \max\limits_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \max\limits_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot (\text{длина } \gamma).$ $\square$

Замечание 7. *Неверно (и даже бессмысленно), что* $\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int\limits_\gamma |f(z)|\,dz$.

Напрмиер, если $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *и* $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, *то* $\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| = |2\pi i| = 2\pi$, *а*

$\int\limits_\gamma |f(z)|dz = \int\limits_\gamma 1\,dz = z\Big|_{z=\gamma(0)}^{z=\gamma(2\pi)} = z\Big|_1^1 = 0.$

Верно будет написать, что $\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int\limits_\gamma |f(z)|\,|dz|$.

Лекция 5

Существование первообразной в круге

Теорема 4. *Пусть* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ *непрерывна и*

$$\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz = 0 \tag{5.1}$$

для любого открытого треугольника $T \Subset D$ *(эта запись означает, что замыкание* $\overline{T}$ *треугольника* T *лежит в* D*). Положим* $F(z) := \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$. *Тогда* $F \in \mathcal{O}(D)$ *и* $F' = f$ *в* D.

Доказательство:

Рассмотрим произвольную точку $z \in D$. Пусть $h \in \mathbb{C}$ – такое число, что $z + h \in D$. Точки a, z и $z + h$ образуют треугольник внутри круга D $\Rightarrow$ по формуле (5.1) получаем: $F(z+h) - F(z) - \int\limits_{[z,\,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta = 0$, тогда $\left|\dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| =$ $= \left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[z,\,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\right| = \left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[z,\,z+h]} (f(\zeta) - f(z))\,d\zeta\right| \le \dfrac{1}{|h|}\max\limits_{\zeta\in[z,\,z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \cdot$ $\cdot |h| = \max\limits_{\zeta\in[z,\,z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \to 0$ при $h \to 0$ по определению непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке $\zeta = z$. $\square$

Замечание 8. *Условие (5.1) необходимо для справедливости теоремы, так как* $\int\limits_{\partial T} F'(z)\,dz = 0$ *по формуле Ньютона-Лейбница (4.2).*

Лемма Гурса

Лемма 1. (Лемма Гурса) *Пусть* $D \in \mathbb{C}$ *– открытое множество и* $T \Subset D$ *(то есть* $\overline{T} \subset D$*) – открытый треугольник. Тогда* $\forall f \in \mathcal{O}(D)$ *имеем:* $\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

Доказательство:

Пусть $M := \left|\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz\right|$. Разобьём треугольник T средними линиями на четыре треугольника Δ_j: $\overline{T} = \bigcup\limits_{j=1}^{4} \overline{\Delta}_j$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

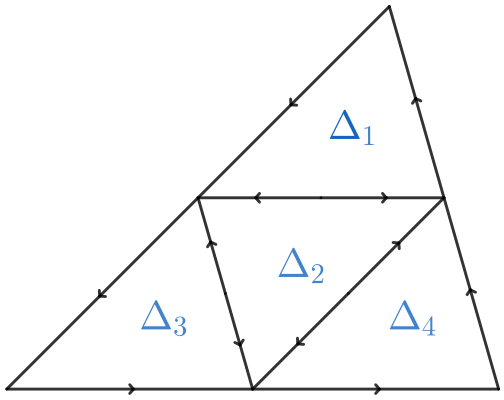

Рис. 5.1: Разбиение треугольника T

Так как при обходе по умолчанию (то есть таком, чтобы треугольник оставался слева) общие стороны треугольников Δ_j проходятся в разных направлениях, то

$$M := \left|\int\limits_{\partial T} f\,dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{4}\int\limits_{\partial\Delta_j} f\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4}\left|\int\limits_{\partial\Delta_j} f\,dz\right| \;\Rightarrow\; \exists j\in\{1,2,3,4\}\colon \left|\int\limits_{\partial\Delta_j} f\,dz\right| \ge \frac{M}{4}.$$

Введём обозначение: $T_1 := \Delta_j$. Тогда $\overline{T}_1 \subset \overline{T}$ и $\left|\int\limits_{\partial T_1} f\,dz\right| \ge \dfrac{M}{4}$.

Повторяя аналогичную процедуру деления для T_1, получим открытый треугольник T_2: $\overline{T}_2 \subset \overline{T}_1$ и $\left|\int\limits_{\partial T_2} f\,dz\right| \ge \dfrac{1}{4}\left|\int\limits_{\partial T_1} f\,dz\right| \ge \dfrac{M}{4^2}$.

И так далее. $\forall n\in\mathbb{N}$ получаем открытый треугольник T_n: $\overline{T} \supset \overline{T}_1 \supset \overline{T}_2 \supset \ldots \supset$ $\supset \overline{T}_n \supset \ldots$ и $\left|\int\limits_{\partial T_n} f\,dz\right| \ge M\cdot 4^{-n}$.

Множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n$ непусто (иначе $\{D\backslash\overline{T}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть открытое покрытие компакта $\overline{T}$ монотонно возрастающими открытыми множествами, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие). Пусть $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n$. Тогда по определению $\mathbb{C}$-дифференцируемости

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \alpha(z)(z-z_0), \tag{5.2}$$

где $\alpha(z)\to 0$ при $z\to z_0$.

Начиная с $n = n_0$, все $\overline{T}_n$ лежат в той окрестности точки z_0, где определена $\alpha(z)$. Интегрируя уравнение (5.2) по ∂T_n при $n\ge n_0$, имеем: $M\cdot 4^{-n} \le \left|\int\limits_{\partial T_n} f\,dz\right| =$ $= \left|f(z_0)\int\limits_{\partial T_n} dz + f'(z_0)\int\limits_{\partial T_n}(z-z_0)\,dz + \int\limits_{\partial T_n}\alpha(z)(z-z_0)\,dz\right|$. Так как мы интегрируем по замкнутому контуру и функции 1 и $(z-z_0)$ имеют первообразные, то по формуле

Ньютона-Лейбница (4.2) получаем: $\int\limits_{\partial T_n} dz = \int\limits_{\partial T_n} (z - z_0)\, dz = 0$. Тогда $M \cdot 4^{-n} \leq$ $\leq \left| \int\limits_{\partial T_n} \alpha(z)(z - z_0)\, dz \right| \leq \max\limits_{z \in \partial T_n} (|\alpha(z)| \cdot |z - z_0|) \cdot (\text{периметр } T_n)$. Так как $|z - z_0| \leq$ $\leq (\text{периметр } T_n) \quad \forall z \in \partial T_n$, то $M \cdot 4^{-n} \leq \max\limits_{z \in \partial T_n} |\alpha(z)| \cdot (\text{периметр } T_n)^2$. Линейные размеры T_n убывают в 2 раза при каждом увеличении значения n на 1, поэтому $M \cdot$ $\cdot\, 4^{-n} \leq \max\limits_{z \in \partial T_n} |\alpha(z)| \cdot \left(\dfrac{\text{периметр } T}{2^n} \right)^2 = o(1) \cdot \text{const} \cdot 4^{-n}$ при $n \to \infty$. Таким образом, $M \leq o(1) \cdot \text{const}$ при $n \to \infty \;\Rightarrow\; M \to 0$ при $n \to \infty$, но M не зависит от n и является константой, значит, $M = 0$. □

Сформулируем следствия из леммы Гурса (1).

Утверждение 14. *Если $D \subset \mathbb{C}$ – открытый круг, то $\forall f \in \mathcal{O}(D) \;\; \exists F \in \mathcal{O}(D)$: $F' = f$ в D.*

Доказательство:
Вытекает из теоремы (4) о существовании первообразной в круге и леммы Гурса (1). □

Утверждение 15. *Если $D \subset \mathbb{C}$ – открытый круг, $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to D$ – кусочно-непрерывно-дифференцируемые пути с $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = z_0$ и $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = z_1$, то $\forall f \in \mathcal{O}(D)$ имеем: $\int\limits_{\gamma_1} f\, dz = \int\limits_{\gamma_2} f\, dz$.*

Доказательство:
По формуле Ньютона-Лейбница (4.2) оба интеграла равны $F(z_1) - F(z_0)$. □

Определение ограниченной области с кусочно-гладкой границей

Определение 13. *Открытое множество $D \subset \mathbb{C}$ называется ограниченной областью с кусочно-гладкой границей, если:*

1) D ограничено;

2) $\partial D = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} \gamma_j([a_j, b_j])$ – объединение конечного числа непересекающихся замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых, то есть $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ – кусочно-непрерывно-дифференцируемое отображение такое, что $\gamma_j(a_j) = \gamma_j(b_j)$ (замкнутость), $\gamma_j(t_1) \neq \gamma_j(t_2)$ при $a_j \leq t_1 \leq t_2 < b_j$ (жордановость, то есть отсутствие самопересечений), $\gamma_j'(t) \neq 0 \;\forall t \in [a_j, b_j]$, включая односторонние производные в точках излома (кусочная гладкость), причём $\gamma_j([a_j, b_j]) \cap \gamma_k([a_k, b_k]) = \varnothing$ при $j \neq k$ (непересекающиеся кривые).

Соглашение об ориентации: ∂D ориентируется так, что D остаётся слева при обходе ∂D.

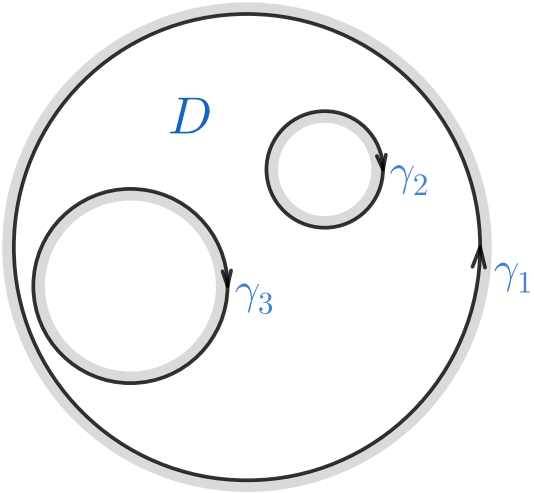

Рис. 5.2: Пример ориентации.

В данном случае $\int\limits_{\partial D} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f\,dz - \int\limits_{\gamma_3} f\,dz$

Приведём примеры.

1) Являются ограниченной областью с кусочно-гладкой границей: круг, два непересекающихся круга, два пересекающихся круга с удалённой границей во внутренних областях кругов, кольцо.

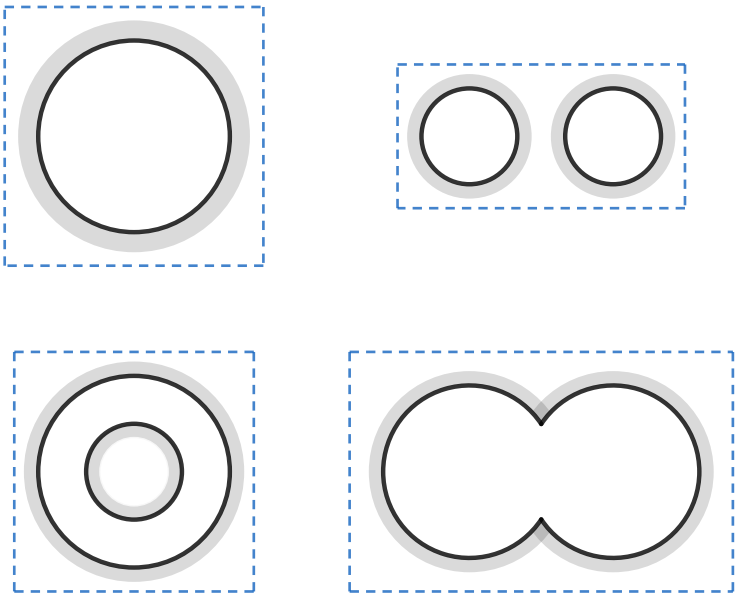

Рис. 5.3: Примеры областей, являющихся ограниченными с кусочно-гладкой границей

2) Не являются ограниченной областью с кусочно-гладкой границей: полуплоскость, круг с удалённым касающимся его меньшим кругом, круг с разрезом.

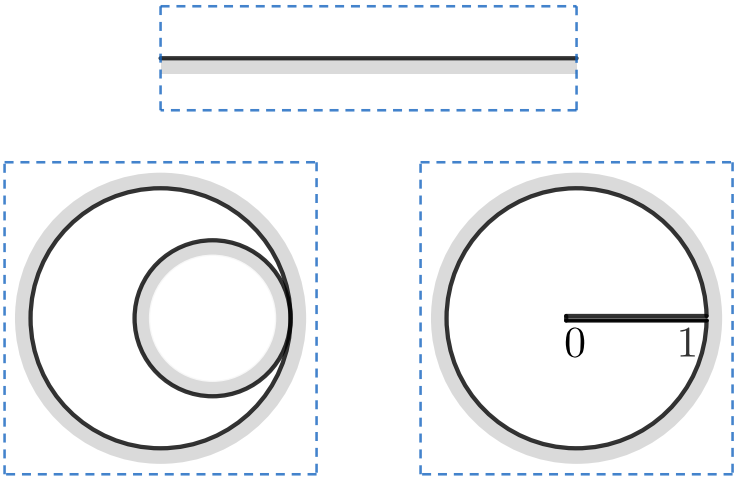

Рис. 5.4: Примеры областей, не являющихся ограниченными с кусочно-гладкой границей

Интегральная теорема Коши

Теорема 5. (Интегральная теорема Коши) *Пусть $D \in \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{O}(G)$ для некоторого открытого множества $G \supset \overline{D}$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0. \tag{5.3}$$

Замечание 9. *Условия Коши-Римана эквивалентны замкнутости 1-формы $\omega = f(z)\,dz$ на G. А именно, если $f = u + iv$, то $\omega = (u+iv)(dx + i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i(u\,dy + v\,dx)$, откуда $d\omega = (-u_y - v_x)\,dx \wedge dy + i(u_x - v_y)\,dx \wedge dy$. Таким образом, равенство $d\omega = 0$ эквивалентно системе $\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{cases}$. Поэтому заключение интегральной теоремы Коши вытекает из формулы Грина (или Стокса) $\int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{D} d\omega = \int\limits_{D} 0 = 0$ при дополнительном техническом условии $f' \in C(D)$.*

Теперь докажем интегральную теорему Коши (5) без использования формулы Грина.

Доказательство:

1) Рассмотрим случай многоугольника, то есть когда ∂D состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых жордановых ломаных. Проведём все прямые, на которых лежат стороны и диагонали ∂D. Дополнение к любому конечному набору прямых на $\mathbb{R}^2$ состоит из конечного числа выпуклых открытых множеств, причём те их этих множеств, которые ограничены, можно в силу выпуклости диагоналями из одной вершины разбить на треугольники. Получаем представление $\overline{D} = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \overline{T}_j$, где $T_1, \ldots, T_n$ – открытые треугольники, причём $\overline{T}_i \cap \overline{T}_j$ есть либо $\varnothing$, ли-

бо общая вершина, либо общая сторона $\forall i \neq j$. Таким образом, $\int\limits_{\partial D} f\,dz = \sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_{\partial T_j} f\,dz$,

но по лемме Гурса (1) $\int\limits_{\partial T_j} f\,dz = 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, N \;\; \Rightarrow \int\limits_{\partial D} f\,dz = \sum\limits_{j=1}^{N} 0 = 0.$

2) Рассмотрим случай гладкой границы, то есть когда ∂D не имеет точек излома. Построим многоугольник $D_0 \Subset G$: $\int\limits_{\partial D} f\,dz = \int\limits_{\partial D_0} f\,dz$ и применим пункт (1).

Отступление. Реально в курсе необходимы только следующие классы областей: в теории: круг с вырезанным меньшим кругом, круг с вырезанными двумя меньшими кругами; в примерах: полукруг, прямоугольник с вырезанным окружностью углом (или несколькими углами), треугольник из дуг окружностей. Во всех этих случаях D_0 получается заменой дуг окружностей на вписанные в них правильные многоугольники с большим числом сторон.

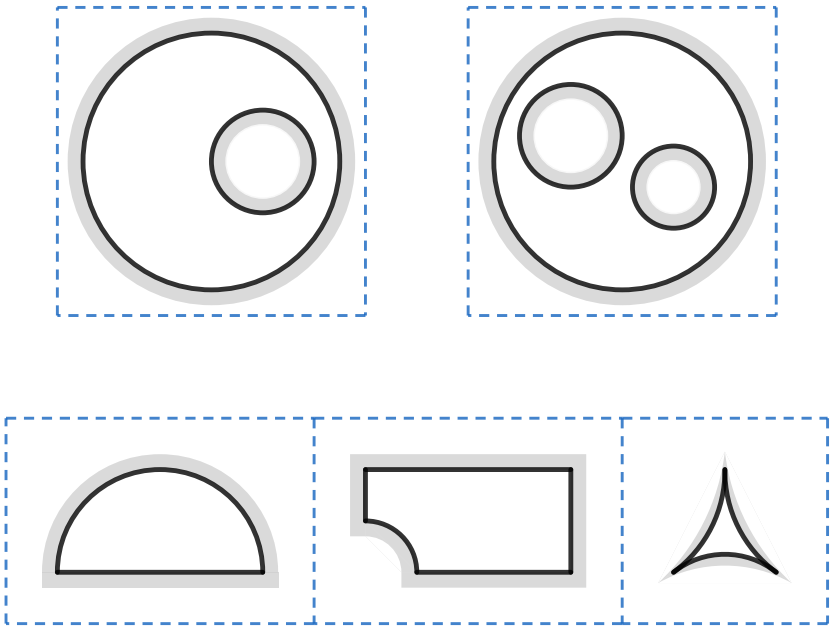

Рис. 5.5: Примеры областей из отступления

Продолжаем общее доказательство.

а) $\forall \varepsilon > 0$: $\varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{D}, \partial G)$, если $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ – компонента ∂D и $a \leq s < t < b$: $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, то $\int\limits_{[\gamma(s), \gamma(t)]} f\,dz = \int\limits_{\gamma([s,t])} f\,dz$ по утверждению о независимости от промежуточного пути интегрирования (15), так как оба пути интегрирования лежат в круге $|z - \gamma(s)| < \varepsilon$, в котором f голоморфна.

б) В силу равномерной непрерывности γ на $[a, b]$ $\exists \delta > 0 : \; |s - t| < \delta \;\; \Rightarrow$ $\Rightarrow \;\; |\gamma(s) - \gamma(t)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Поэтому $\forall$ разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ мелкости $< \delta$ интеграл от $f\,dz$ по ∂D равен интегралу от $f\,dz$ по $\tilde{\Gamma}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\Gamma}_m$, где $\tilde{\Gamma}_j$ – ломаная с вершинами $\gamma_j(t_i)$, где $\Gamma_j = \gamma_j([a_j, b_j])$ – j-ая компонента ∂D.

в) Покажем, что $\exists$ многоугольник $D_0 \Subset G$ с границей $\tilde{\Gamma}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\Gamma}_m$, состоящий из замкнутых непересекающихся жордановых ломаных. В силу гладкости ∂D (в частности, $\gamma_j'(t) \neq 0 \ \ \forall t$) у любой точки $z_0 \in \partial D \ \ \exists$ окрестность в виде прямоугольника $P(z_0)$, где D записывается как надграфик $D \cap P(z_0) = \{\xi + i\eta \in P(z_0) \mid \eta > \varphi(\xi)\}$. Тогда D_0 совпадает с D вне всех $P(\gamma_j(t_i))$ и является надграфиком соответствующей кусочно-гладкой функции в $P(\gamma_j(t_i))$. Будем выбирать δ таким малым, чтобы в каждый прямоугольник $P(\gamma_j(t_i))$, кроме точки $\gamma_j(t_i)$, попадали ещё по 2 соседних вершины ломаных слева и справа от $\gamma_j(t_i)$ (то есть всего в прямоугольнике окажется 5 вершин). Тогда, так как расстояние между вершинами любого звена $< \dfrac{\varepsilon}{4}$, то отсюда следует, что самопересечений ломаных и пересечений с другими компонентами нет. Отсюда вытекают все требуемые свойства D_0.

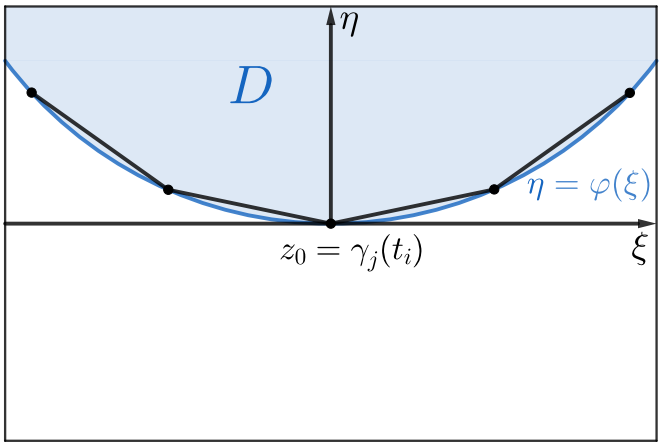

Рис. 5.6: Надграфик в прямоугольной окрестности точки z_0

3) Рассмотрим сглаживание изломов с углами, отличными от 0 и 2π. Пусть угол между касательными лучами L_1 и L_2 в точке излома равен α, причём $0 < \alpha < 2\pi$. Пусть меньший из углов поворота лучей L_1 и L_2 от оси x равен φ_0. Рассмотрим конформное отображение $\zeta = ((z - z_0)e^{-i\varphi_0})^{\frac{\pi}{\alpha}}$, где $\varphi_0 < \arg(z - z_0) < \varphi_0 + \alpha$. Тогда сектор между L_1 и L_2 отобразится в верхнюю полуплоскость. В новых координатах касательные лучи L_1 и L_2 будут лежать на одной прямой и граница ∂D станет гладкой кривой. Обозначим новые координаты ξ и η. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$ – уравнение ∂D в новых координатах. $\exists \psi(\xi) \in C^1(\text{окрестность } 0): \ \ \psi(\xi) = \varphi(\xi)$ при $|\xi| > \varepsilon$ и $\psi(\xi) > 0$ при $|\xi| \leq \varepsilon$ (в том числе при $\xi = 0$). Прообраз графика $\psi(\xi)$ при отображении $\zeta = ((z - z_0)e^{-i\varphi_0})^{\frac{\pi}{\alpha}}$ даст искомое сглаживание.

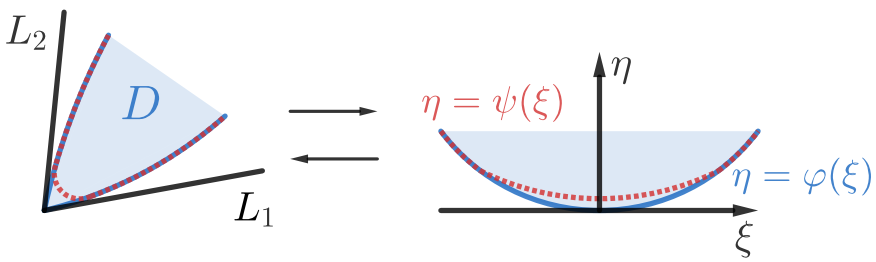

Рис. 5.7: Сглаживание изломов с углами, отличными от 0 и 2π

4) Рассмотрим случай излома с углом 0 или 2π. При угле 0 надо обрезать область

так, как показано на рисунке, а при угле 2π надо добавить область так, как показано на рисунке. Дальнейшие действия сводятся к случаю (3).

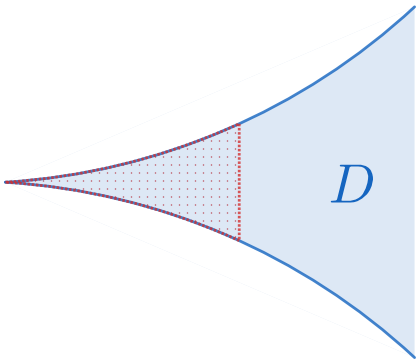

Рис. 5.8: Сглаживание излома с углом, равным 0
(надо обрезать область с красными точками)

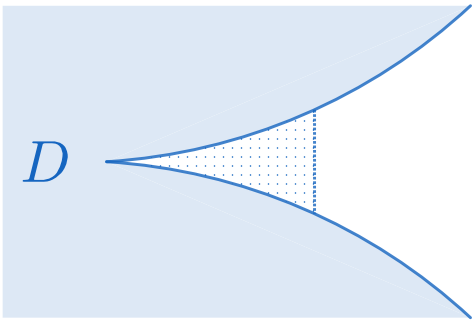

Рис. 5.9: Сглаживание излома с углом, равным 2π
(надо добавить область с синими точками)

□

Лекция 6

Интегральная формула Коши

Утверждение 16. (Интегральная формула Коши) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{O}(G)$ для некоторого открытого множества $G \supset \overline{D}$. Тогда $\forall a \in D$ имеем:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{6.1}$$

Доказательство:

Будем использовать обозначение для открытого круга: $B(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$.

Пусть $\varepsilon > 0 : \ \overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$. Тогда множество $D_\varepsilon := D \backslash \overline{B(a,\varepsilon)}$ тоже является ограниченной областью с кусочно-гладкой границей и функция $g(z) := \dfrac{f(z)}{z-a} \in$ $\in \mathcal{O}(D_\varepsilon)$.

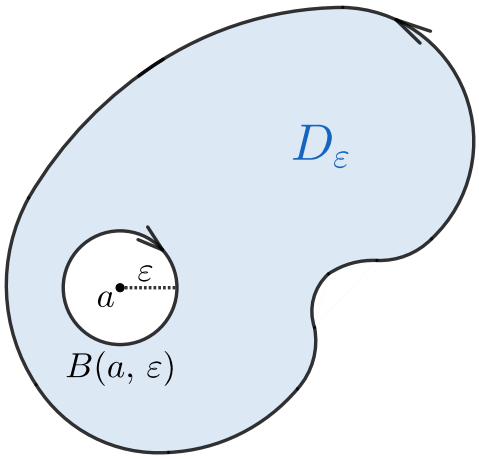

Рис. 6.1: Область $D_\varepsilon := D \backslash \overline{B(a,\varepsilon)}$

Значит, можно применить к $g(z)$ интегральную теорему Коши (5): $0 =$ $= \int\limits_{\partial D_\varepsilon} g(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} g(z)\,dz - \int\limits_{\partial B(a,\varepsilon)} g(z)\,dz$, то есть $\int\limits_{\partial D} \dfrac{f(z)\,dz}{z-a} = \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \dfrac{f(z)\,dz}{z-a}$ не зависит от ε, так как левая часть не зависит от ε. Покажем, что этот интеграл равен $2\pi i f(a)$.

Вспомним формулу (4.3) из примера (2) из лекции 4, запишем её в следующем виде: $\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad \forall R > 0.$

Рассмотрим следующий модуль разности и применим формулы, выписанные выше: $\left| 2\pi i f(a) - \int\limits_{\partial D} \dfrac{f(z)\,dz}{z-a} \right| = \left| \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \dfrac{f(a)\,dz}{z-a} - \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \dfrac{f(z)\,dz}{z-a} \right| =$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$= \left| \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)-f(z)}{z-a}\,dz \right| \le \max\limits_{|r-a|=\varepsilon} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| \cdot 2\pi\varepsilon$. Так как под модулем стоит разностное отношение, предел которого равен $f'(a)$ при $z \to a$, то $\exists \varepsilon_0$: $\max\limits_{|r-a|=\varepsilon} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| \le |f'(a)| + 1$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда $\max\limits_{|r-a|=\varepsilon} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| \cdot 2\pi\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, $\left| 2\pi i f(a) - \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a} \right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, но эта величина не зависит от ε, поэтому $\left| 2\pi i f(a) - \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a} \right| = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$. □

Замечание 10. *Из формулы* $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$ *вытекает, что значения функции* $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ *в области* D *однозначно определяются её значениями на* ∂D.

Замечание 11. *Если* $a \in \mathbb{C} \backslash \overline{D}$, *то по интегральной теореме Коши (5) получаем:* $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0$.

Напоминание о равномерной сходимости

Определение 14. *Пусть* $K \subset \mathbb{C}$ *– произвольное множество и функции* $f_n, f : K \to \mathbb{C}$ *ограничены. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится к* $f(z)$ *равномерно на* K, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| f - \sum\limits_{m=1}^{n} f_m \right\|_K = 0$, *где* $\|g\|_K := \sup |g(z)|$ *при* $z \in K$.

Свойства равномерной сходимости:

1) (Признак Вейерштрасса) Если $f_n : K \to \mathbb{C}$ – ограниченная функция и $\exists c_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $\|f_n\|_K \le c_n$ $\forall n = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на K.

Доказательство:

По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \; \sum\limits_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon \;\; \forall m > n > N(\varepsilon)$. Тогда $\left| \sum\limits_{k=n}^{m} f_k(z) \right| \le \sum\limits_{k=n}^{m} |f_k(z)| \le \sum\limits_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon \;\; \forall m > n > N(\varepsilon) \;\; \forall z \in K$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится $\forall z \in K$. Его сумма $f(z)$ ограничена на K (числом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$) и

предельный переход $m \to \infty$ в полученном выше неравенстве $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} f_k(z)\right| < \varepsilon \ \ \forall m > n > N(\varepsilon) \ \ \forall z \in K$ даёт, что $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n-1} f_k\right\|_K \le \varepsilon \ \ \forall n > N(\varepsilon)$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно на K. $\square$

2) (Почленное интегрирование) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $\gamma : [a, b] \to D$ – кусочно-непрерывно-дифференцируемое отображение и $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ – такие непрерывные функции, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно на $\gamma([a, b])$. Тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\, dz$.

Доказательство:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f\, dz - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma} f_k\, dz\right| = \left|\int\limits_{\gamma} \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right) dz\right| \le \left\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_{\gamma([a,b])} \cdot (\text{длина } \gamma) \to 0$$

при $n \to \infty$, так как по условию $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right\|_{\gamma([a,b])} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Теорема о разложении голоморфной функции в степенной ряд

Теорема 6. *Пусть $f \in \mathcal{O}(B(a, R))$. Тогда $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ числа*

$$c_n = c_n(f, a) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \tag{6.2}$$

не зависят от выбора $r \in (0, R)$, и $\forall z \in B(a, R)$ имеем:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \tag{6.3}$$

Доказательство:

Независимость c_n от r вытекает из интегральной теоремы Коши (5) для функции $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}$ и области $D = \{r_1 < |z - a| < r_2\}$, где $r_1 < r_2 < R$: $0 = \int\limits_{\partial D} g(z)\, dz = \int\limits_{|z-a|=r_2} g(z)\, dz - \int\limits_{|z-a|=r_1} g(z)\, dz$, значит, $\int\limits_{|z-a|=r_1} g(z)\, dz = \int\limits_{|z-a|=r_2} g(z)\, dz$.

Фиксируем $z \in B(a, R)$ и выберем любое $r \in (|z - a|, R)$. Тогда по интегральной формуле Коши (6.1) $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(a,r)} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$.

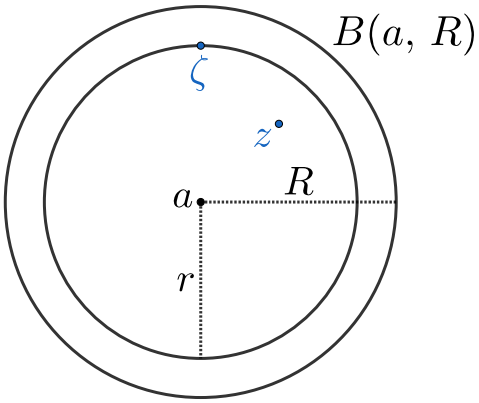

Рис. 6.2: Точка z фиксирована в круге радиуса r,
а точка ζ пробегает границу этого круга

Вспомним формулу бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $1 + q + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$ при $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$.

Запишем разложение $\dfrac{1}{\zeta - z}$ в ряд: $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \dfrac{1}{\zeta - a} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$. Тогда ряд $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$ сходится равномерно на $\partial B(a, r) = \{|\zeta - a| = r\}$ по признаку Вейерштрасса (свойство (1) равномерной сходимости), так как $\forall \zeta \in \partial B(a, r)$ выполнено неравенство $\left| \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \dfrac{M}{r} \left(\dfrac{|z-a|}{r} \right)^n = \dfrac{M}{r} q^n$, где $M := \max\limits_{\zeta \in \partial B(a,r)} |f(\zeta)|$, а $q = \dfrac{|z-a|}{r} < 1$.

По свойству (2) равномерной сходимости ряд $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$ можно проинтегрировать почленно. Тогда получим: $\int\limits_{|\zeta - a| = r} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta$. Поделим это равенство на $2\pi i$, получим: $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z - a)^n$. Воспользовавшись формулой Коши, написанной выше, и определением чисел c_n, получаем: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Неравенства Коши

Утверждение 17. (Неравенства Коши) *В условиях теоремы (6) о разложении голоморфной функции в степенной ряд имеем:*

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \tag{6.4}$$

$\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ *при* $0 < r \leq R$, *где* $M(r) := \max\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Доказательство:

По определению (6.2) $|c_n| = \left| \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=r} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \dfrac{1}{2\pi} \max\limits_{|\zeta-a|=r} \dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}} \cdot 2\pi r \leq$
$\leq \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \dfrac{M(r)}{r^n}$. □

Теорема Лиувилля

Теорема 7. (Теорема Лиувилля) *Если* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *и* $\exists M > 0\colon\ |f(z)| \leq M\ \forall z \in \mathbb{C}$, *то* $f \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство:

Разложение с центром $a = 0$ $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ справедливо для всех $z \in \mathbb{C}$, то есть неравенства Коши (6.4) верны $\forall r > 0\colon\ |c_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n} \leq \dfrac{M}{r^n}\ \forall r > 0\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$. При $n \geq 1$ отсюда, устремляя $r \to \infty$, получаем $c_n = 0$. Следовательно, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 \equiv \mathrm{const}\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. □

Сформулируем следствия из теоремы Лиувилля (7).

Утверждение 18. $\nexists$ *конформного отображения* $f : \mathbb{C} \to U = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ *(хотя* $\exists$ *гомеоморфизм* $\mathbb{C}$ *на* U*).*

Доказательство:

Если f – такое конформное отображение, то $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f'(z) \neq 0\quad \forall z \in \mathbb{C}$ и $|f(z)| < 1\quad \forall z \in \mathbb{C}$, так как $f(\mathbb{C}) \subset U$. Следовательно, по теореме Лиувилля (7) $f \equiv \mathrm{const}$. Это противоречит конформности (и взаимооднозначности) f. □

Упражнение 9. *Докажите, что на полуплоскость* $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ *и даже на плоскость без луча* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *тоже нельзя конформно отобразить* $\mathbb{C}$, *хотя они и не ограничены.*

Теорема 8. (Основная теорема алгебры) *Любой полином* $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, *где* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *и* $n \geq 1$, *имеет хотя бы один корень в* $\mathbb{C}$ *(то есть* $\exists z_0 \in \mathbb{C}\colon\ P(z_0) = 0$*).*

Доказательство:

Иначе функция $f(z) \coloneqq \dfrac{1}{P(z)}$ будет $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Но если $R > \max(2(|a_1|+\ldots+|a_n|), 1)$, то при $|z| \geq R$ имеем: $|P(z)| \geq |z^n| - (|a_1|\cdot|z|^{n-1}+\ldots+|a_n|) \geq R^n - (|a_1|\cdot R^{n-1}+\ldots+|a_n|) \geq$ $\geq R^n - \dfrac{R^n}{2} = \dfrac{R^n}{2}$. Таким образом, $|f(z)| \leq \dfrac{2}{R^n}$ при $|z| \geq R$. А $\max\limits_{|z|\leq R}|f(z)| \leq \mathrm{const}$ по теореме Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте $\Rightarrow$ f ограничена на $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f \equiv \mathrm{const}$ по теореме Лиувилля (7) $\Rightarrow$ $P \equiv \mathrm{const}$ $\Rightarrow$ $\deg P = 0$. Это противоречит условию $n \geq 1$. $\square$

Лекция 7

Формула Коши-Адамара

Утверждение 19. (Формула Коши-Адамара) *Пусть $a, b_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Определим $R \in [0, +\infty]$ формулой*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}. \tag{7.1}$$

Тогда степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходится при $|z-a| < R$, причём абсолютно и равномерно на каждом компакте $K \subset B(a, R)$, и расходится при $|z-a| > R$.

Доказательство:

1) Пусть $0 < R < +\infty$. Тогда формула (7.1) эквивалентна тому, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|R^n} = 1$.

Докажем абсолютную и равномерную сходимость при $|z-a| < R$. $\forall$ компакта $K \subset B(a, R)$ $\exists r \in (0, R):$ $K \subset B(a, r)$ (достаточно взять $\max\limits_{z\in K} |z-a| < r < R$). По определению $\overline{\lim}$ из равенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|R^n} = 1$ вытекает, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon):$ $n > N \Rightarrow |b_n|R^n < (1+\varepsilon)^n$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $(1+\varepsilon)\dfrac{r}{R} =: q < 1$. Тогда $\forall n > N(\varepsilon)$ $\forall z \in K$ имеем: $|b_n(z-a)^n| = |b_n|R^n \cdot \dfrac{|z-a|^n}{R^n} < (1+\varepsilon)^n \cdot \left(\dfrac{r}{R}\right)^n = q^n$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходится абсолютно и равномерно на K по признаку Вейерштрасса (так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $0 \le q < 1$).

Докажем расходимость при $|z-a| > R$. По определению $\overline{\lim}$ из равенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|R^n} = 1$ вытекает, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ подпоследовательность $n_k \to \infty:$ $|b_n|R^n > (1-\varepsilon)^n$ при всех $n = n_k$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $(1-\varepsilon)\dfrac{|z-a|}{R} =: Q > 1$. Тогда при $n = n_k$ получаем: $|b_n(z-a)^n| = |b_n|R^n \cdot \dfrac{|z-a|^n}{R^n} > (1-\varepsilon)^n \dfrac{|z-a|^n}{R^n} = Q^n \to \infty$ при $n_k \to \infty$. Таким образом, $b_n(z-a)^n \not\to 0$ при $n \to \infty$, значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ расходится.

2) Пусть $R = 0$, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = +\infty$. Тогда $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$ будет выполнено неравенство $\sqrt[n]{|b_n| \cdot |z-a|^n} > 2$ при $n = n_k \to \infty$. Таким образом, $b_n(z-a)^n \not\to 0$ при $n \to \infty$, значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ расходится $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$.

3) Пусть $R = +\infty$, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0$. $\forall$ компакта $K \in \mathbb{C}$ положим $r := \max\limits_{z\in K} |z-a|$. Тогда $\forall z \in K$ имеем: $\sqrt[n]{|b_n(z-a)|^n} \le \sqrt[n]{|b_n|} \cdot r \to 0$

при $n \to \infty$. Значит, $\exists N: \quad n > N \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n(z-a)|^n} < \dfrac{1}{2}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходится абсолютно и равномерно на K по признаку Вейерштрасса (так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q = \dfrac{1}{2}$). $\square$

Определение 15. *Число $R \in [0, +\infty]$ называется радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, а открытый круг $B(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ (равный $\varnothing$ при $R = 0$ или $\mathbb{C}$ при $R = +\infty$) называется кругом сходимости этого ряда.*

Приведём примеры.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ радиус сходимости $R = 0$.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ радиус сходимости $R = 1$.

3) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z}{n}\right)^n$ радиус сходимости $R = +\infty$.

Сформулируем следствие из формулы Коши-Адамара.

Утверждение 20. *Любой степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходится равномерно на компактных подмножествах в своём круге сходимости. В частности, его сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ непрерывна в круге сходимости $B(a, R)$.*

Упражнение 10. *Введём обозначение: $R_1 := \sup\{r \geq 0 \mid$ последовательность $|b_n|r^n$ ограничена$\}$. Доказать непосредственно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходится при $|z-a| < R_1$ и расходится при $|z-a| > R_1$.*

(Это даёт доказательство предыдущего утверждения без $\overline{\lim}$).

Голоморфность суммы степенного ряда

Теорема 9. *Сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ любого степенного ряда голоморфна в его круге сходимости $B(a, R)$, причём $\forall z \in B(a, R)$ имеем:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (z-a)^{n-1}. \tag{7.2}$$

Доказательство:

Заметим, что ряд $g(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n(z-a)^{n-1}$ сходится равномерно на компактах в круге сходимости $B(a,R)$. Действительно, любой компакт $K \in B(a,R)$ лежит в $B(a,r)$ для некоторого $r < R$ (мы считаем, что $R > 0$, иначе нечего доказывать). Выберем любое $\rho \in (r,R)$. Тогда последовательность $|b_n|\rho^n$ ограничена (так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|\rho^n$ сходится по определению R), то есть $\exists C > 0\colon\ |b_n|\rho^n \le C$. Следовательно, $\forall z \in K$ имеем: $n|b_n||z-a|^{n-1} \le n|b_n|r^{n-1} \le n \cdot \dfrac{C}{\rho^n} \cdot r^{n-1} = \dfrac{C}{\rho} \cdot nq^{n-1}$, где $q = \dfrac{r}{\rho} < 1$. Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} < +\infty$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n(z-a)^{n-1}$ сходится равномерно на K по признаку Вейерштрасса. Следовательно, $g(z)$ непрерывна в круге $B(a,R)$. При этом $\forall$ открытого треугольника $T\colon\ \overline{T} \subset B(a,R)$ в силу равномерной сходимости на компакте ∂T имеем: $\int\limits_{\partial T} g(z)\,dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n \int\limits_{\partial T} (z-a)^{n-1}\,dz$. По лемме Гурса (1) (или по формуле Ньютона-Лейбница (4.2)) $\int\limits_{\partial T} (z-a)^{n-1}\,dz = 0\ \ \forall n \ge 1$, значит, $\int\limits_{\partial T} g(z)\,dz = 0$. Следовательно, по теореме (4) о $\exists$ первообразной в круге функция $G(z) := \int\limits_{[a,z]} g(\zeta)\,d\zeta \in \mathcal{O}(B(a,R))$ и $G' = g$ в $B(a,R)$. Но $g(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n(z-a)^{n-1}$ сходится равномерно на $[a,z]$, следовательно, $G(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n \int\limits_{[a,z]} (\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^n = f(z) - b_0$ (применили формулу Ньютона-Лейбница (4.2)). Следовательно, $f(z) = G(z) + b_0$ голоморфна в $B(a,R)$ и $f'(z) = g(z)$ в $B(a,R)$. $\square$

Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций

Утверждение 21. *Для любой $f \in \mathcal{O}(D)$, где $D \in \mathbb{C}$ – открытое множество, имеем: $f' \in \mathcal{O}(D)$. В частности, любая голоморфная функция имеет производные всех порядков: f', f'', ….*

Доказательство:

$\forall a \in D$ пусть $U = B(a,r)$ – круг, лежащий в D. По теореме (6) о разложении голоморфной функции в степенной ряд $\forall z \in U$ имеем: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_n := \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \dfrac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$, где c_n не зависят от выбора $\rho \in (0,r)$.

Следовательно, U лежит в круге сходимости $B(a,R)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, тогда по

теореме (9) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \quad \forall z \in U$.

Значит, U лежит в круге сходимости и ряда $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$, поэтому по той же теореме (9) $f' \in \mathcal{O}(U)$ и имеет в U производную $f''(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z-a)^{n-2}$.

И так далее.

В силу произвольности $a \in D$ и $U \in D$ имеем: f', f'', $\ldots \in \mathcal{O}(D)$. □

Формула для коэффициентов ряда Тейлора

Утверждение 22. *Если* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \in \mathcal{O}(|z-a| < r)$, *то*

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{7.3}$$

$\forall n = 0, 1, 2, \ldots$. *В частности, коэффициенты сходящегося степенного ряда однозначно определяются его суммой, то есть разложение в степенной ряд единственно (если существует).*

Доказательство:

Продифференцируем равенство $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m(z-a)^m$ почленно n раз (это разрешено в силу теоремы (9)) и подставим $z = a$, получим: $f^{(n)}(a) = n!b_n \;\Leftrightarrow\; b_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. □

Как следствие, получаем следующее утверждение.

Утверждение 23. *Каждый сходящийся степенной ряд – это ряд Тейлора своей суммы:* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ *в круге сходимости.*

Интегральная формула Коши для производных

Утверждение 24. *Пусть* $D \in \mathbb{C}$ *– ограниченная область с кусочно-гладкой границей и* $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ *(то есть* $f \in \mathcal{O}(G)$ *для некоторого открытого* $G \supset \overline{D}$*). Тогда* $\forall a \in D$ *и* $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеем:*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}. \tag{7.4}$$

Доказательство:

Пусть $r > 0: \ B(a,r) \subset D$. Тогда $\forall z \in B(a,r)$ имеем: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(a,\rho)} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$, где $\rho \in (0,r)$ (по теореме (6) о разложении голономной функции в степенной ряд).

При этом по утверждению (22) $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Таким образом, $f^{(n)}(a) = n! c_n = \dfrac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(a,\rho)} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$. По интегральной теореме Коши (5) для области $D \backslash \overline{B(a,\rho)}$ имеем: $\int\limits_{\partial D} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} - \int\limits_{\partial B(a,\rho)} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = 0$. Тогда $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$. □

Теорема Морера

Теорема 10. (Теорема Морера) *Пусть $D \in \mathbb{C}$ – открытое множество, $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна и $\forall$ открытого треугольника T с $\overline{T} \subset D$ имеем $\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Тогда $f \in \mathcal{O}(D)$.*

Доказательство:

$\forall a \in D$ пусть $U \subset D$ – открытый круг с центом a. Достаточно доказать, что $f \in \mathcal{O}(U)$, а в силу произвольности выбора точки a и радиуса круга $U \subset D$ будем иметь $f \in \mathcal{O}(D)$.

По теореме (4) о существовании первообразной в круге $\forall z \in U$ имеем: $F'(z) = f(z)$, где $F(z) \coloneqq \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta \in \mathcal{O}(U)$.

Тогда $f \in \mathcal{O}(U)$ по утверждению (21). □

Эквивалентность трёх определений голоморфной функции

Следующие утверждения о функции f, определённой в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, эквивалентны.

Утверждение 25. *$f \in \mathcal{O}(a)$, то есть f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в некоторой окрестности точки a.*

Утверждение 26. *f является суммой сходящегося степенного ряда: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ в некоторой окрестности точки a.*

Утверждение 27. *f непрерывна в некоторой окрестности U точки a и $\forall$ открытого треугольника T с $\overline{T} \subset U$ имеем* $\displaystyle\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

В утверждении (25) предполагается существование одной производной, в утверждении (26) – бесконечного количества производных, в утверждении (27) – нуля производных.

Упражнение 11. *Доказать эквивалентность утверждений (25), (26) и (27).*

Лекция 8

Нули голоморфных функций

Утверждение 28. *Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(a)$ и $f(a) = 0$. Тогда либо $f \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a (то есть при $|z-a| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$), либо $\exists n \in \mathbb{N}\colon\ f(z) = (z-a)^n g(z)$, где $g \in \mathcal{O}(a)$ и $g(a) \neq 0$.*

Доказательство:

По теореме (6) о разложении в степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m$ при $|z-a| < \varepsilon$. При этом по условию $c_0 = f(a) = 0$. Либо все c_m, $m = 1, 2, \ldots$, равны 0 (тогда $f \equiv 0$ в окрестности точки a), либо $\exists n \coloneqq \min\{m \in \mathbb{N} \mid c_m \neq 0\}$. Во втором случае $f(z) = \sum\limits_{m=n}^{\infty} c_m (z-a)^m = (z-a)^n g(z)$, где $g(z) \coloneqq \sum\limits_{m=n}^{\infty} c_m (z-a)^{m-n}$. Ряд $\sum\limits_{m=n}^{\infty} c_m (z-a)^{m-n}$ сходится при $|z-a| < \varepsilon$, следовательно, его сумма $g \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon)$. При этом $g(a) = c_n \neq 0$ по определению n. $\square$

Определение 16. *Число n называется порядком нуля функции $f(z)$ в точке $z = a$.*

Замечание 12. *Поскольку $c_m = \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}$, можно также сказать, что порядок нуля функции $f(z)$ в точке a равен $\min\{m \in \mathbb{N} \mid f^{(m)}(a) \neq 0\}$.*

Приведём пример. Выясним, каков порядок нуля функции $f(z) = \sin z - z$ при $z = 0$.

$f(0) = 0$;
$f'(z) = \cos z - 1 \ \Rightarrow\ f'(0) = 0$;
$f''(z) = -\sin z \ \Rightarrow\ f''(0) = 0$;
$f'''(z) = -\cos z \ \Rightarrow\ f'''(0) = -1 \neq 0$.
Таким образом, это нуль 3-го порядка.

Упражнение 12. *Доказать, что если $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$, то $\exists \mathbb{C}\colon\ f(z) = Cg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.*

Указание: применить утверждение (28) и теорему Лиувилля (7).

Принцип изолированности нулей

Утверждение 29. *Пусть $f \in \mathcal{O}(a)$ и $f(a) = 0$. Тогда либо $f \equiv 0$ в окрестности точки a, либо $\exists \varepsilon > 0\colon\ f(z) \neq 0$ при $0 < |z-a| < \varepsilon$.*

Доказательство:

Если $f \not\equiv 0$ в окрестности точки a, то $f(z) = (z-a)^n g(z)$, где $g \in \mathcal{O}(a)$ и $g(a) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности $g(z)$ при $z = a \quad \exists \varepsilon > 0\colon\ g(z) \neq 0$ при $|z-a| < \varepsilon$. $\square$

Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве

Определение 17. *Открытое множество $D \in \mathbb{C}$ называется областью, если оно линейно связно, то есть $\forall a, b \in D \ \ \exists$ непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to D$, для которого $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ (иными словами, любые две точки из D можно соединить непрерывной кривой в D).*

Замечание 13. *Раньше, когда мы говорили об области, мы не имели в виду это топологическое определение, а просто использовали этот термин как синоним понятия множества.*

Приведём примеры.

1) Круг $B(a,r) = \{|z-a| < r\}$ – область.

2) Два непересекающихся круга $B(a_1, r_1) \cup B(a_2, r_2)$ – открытое множество, но не область.

Теорема 11. (Теорема об открыто-замкнутом подмножестве) *Пусть $D \in \mathbb{C}$ – область и $A, B \in \mathbb{C}$ – такие открытые множества, что $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = D$. Тогда либо $A = \varnothing$, либо $B = \varnothing$.*

Доказательство:

Предположим, что оба множества A и B непусты. Выберем $a \in A$, $b \in B$ и пусть $\gamma : [0,1] \to D$ – непрерывное отображение с $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ (такое γ существует по определению области). Пусть $t_0 \coloneqq \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\}$. Имеем: $t_0 > 0$ в силу открытости A и непрерывности γ, $t_0 < 1$ в силу открытости B и непрерывности γ.

Если $\gamma(t_0) \in A$, то $\exists \varepsilon > 0\colon\ \gamma([t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon]) \subset A$, то есть $\exists t > t_0$ (так как $t_0 < 1$) такое, что $\gamma(t) \in A$. Это противоречит определению t_0 как sup.

Если $\gamma(t_0) \in B$, то $\exists \varepsilon > 0\colon\ \gamma([t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon]) \subset B$, тогда множество $\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\}$ имеет верхнюю грань $t_0 - \varepsilon < t_0$ (так как $t_0 > 0$). Это противоречит определению t_0 как sup. $\square$

Теорема единственности

Теорема 12. (Теорема единственности) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(D)$ и $\exists$ множество $M \subset D$, имеющее в D предельную точку (то есть такую точку $a \in D$, что $\forall \varepsilon > 0\ \{0 < |z-a| < \varepsilon\} \cap M$ непусто) и такое, что $f_1(z) = f_2(z) \ \ \forall z \in$ $\in M$. Тогда $f_1(z) = f_2(z) \ \ \forall z \in D$.*

Доказательство:

Пусть $A \coloneqq$ множество всех предельных точек $a \in D$ множества нулей $f_1 - f_2$. По условию A непусто (содержит предельную точку множества M). По утверждению (29) о принципе изолированности нулей A открыто.

При этом $B \coloneqq D \backslash A$ тоже открыто по определению A как множества предельных точек (если $b \in B$, то b не является предельной точкой множества нулей $f_1 - f_2$, то есть в некоторой проколотой окрестности точки b нет нулей $f_1 - f_2$, а значит, нет и точек A, то есть эта окрестность $\subset B$).

По теореме (11) об открыто-замкнутом подмножестве получаем, что одно из множеств A или B пусто, но A непусто, значит, $B = \varnothing \;\Rightarrow\; A = D \;\Rightarrow$ множество нулей $f_1 - f_2$, которое содержит в себе A в силу непрерывности $f_1 - f_2$, совпадает с D. $\square$

Приведём примеры.

1) Если $f, g \in \mathcal{O}(0)$ и $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = g\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, то $f \equiv g$ в окрестности точки 0.

2) Если $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ совпадают $\forall z \in \mathbb{R}$, то они совпадают $\forall z \in \mathbb{C}$ (так как $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{C}$ предельную точку, а именно: любая точка $\mathbb{R}$ – предельная).

В частности, свойство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \;\; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ вытекает из голоморфности e^z и того, что это свойство верно $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Сформулируем в качестве утверждения следствие из теоремы единственности (12).

Утверждение 30. *Если $f \in \mathcal{O}(D)$, где $D \in \mathbb{C}$ – область, то $\{a \in D \mid f(a) = 0\}$ не более чем счётно (либо $f \equiv 0$ в D).*

Доказательство:

Обозначим $Z(f) \coloneqq \{a \in D \mid f(a) = 0\}$. По теореме единственности (12) все точки множества $Z(f)$ изолированы: $\forall a \in Z(f) \;\; \exists \varepsilon > 0 : \;\; \{0 < |z - a| < \varepsilon\} \cap Z(f) = \varnothing$ (иначе a – предельная точка $Z(f)$ и, следовательно, $f \equiv 0$ в D). Выберем произвольные точки $q(a) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap \left\{0 < |z - a| < \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$. Тогда отображение, описываемое соответствием $a \mapsto q(a)$, есть вложение $Z(f)$ в счётное множество $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. $\square$

Упражнение 13. *Пусть $f_1(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$ и $f_2(z) \equiv 0$. Тогда f_1, f_2 совпадают на множестве $\left\{\dfrac{1}{\pi n} \mid n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$, имеющем предельную точку $z = 0$, но неверно, что $f_1 \equiv f_2$. Какое условие теоремы единственности не выполнено?*

Упражнение 14. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $f \in \mathcal{O}(D)$ и $\forall a \in D \;\; \exists n = n(a) \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(a) = 0$. Доказать, что можно выбрать n одно и то же для всех $a \in D$, то есть что f – полином.*

Примеры разложений в степенной ряд

а) Полиномы, или вообще целые функции $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

По теореме (6) о разложении голономной функции в степенной ряд и по утверждению (22) имеем: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \;\; \forall a, z \in \mathbb{C}$.

Например, при $a = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$ имеем:

$e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$;

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

б) Рациональные функции.

$\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \sum\limits_{j=1}^{J} \sum\limits_{k=1}^{K_j} \dfrac{c_{jk}}{(z-b_j)^k} + P_1(z)$ – разложение на простейшие дроби. В силу этого разложения достаточно уметь разлагать $f(z) = (z-b)^{-k}$ по степеням $(z-a)$.

По теореме (6) о разложении голономной функции в степенной ряд и по утверждению (22) имеем: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ при $|z-a| < |b-a|$.

$f^{(n)}(z) = -k(-k-1) \cdot \ldots \cdot (-k-n+1)(z-b)^{-k-n}$.

$c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = (-1)^n \cdot \dfrac{k(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n-1)}{n!} \cdot (a-b)^{-k-n} = (-1)^n C_{k+n-1}^{k-1} \cdot$ $\cdot (a-b)^{-k-n}$.

Итак, $\dfrac{1}{(z-b)^k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{k+n-1}^{k-1} (a-b)^{-k-n} (z-a)^n$ при $|z-a| < |b-a|$.

Эквивалентно: $\left(\dfrac{a-b}{z-b}\right)^k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{k+n-1}^{k-1} \left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$ при $|z-a| < |b-a|$.

в) Простейшие частные случаи для $\left(\dfrac{a-b}{z-b}\right)^k$ $(a = 0,\ b = 1)$.

При $k = 1$: $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$ при $|z| < 1$ – геометрическая прогрессия.

При $k = 2$: $\dfrac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots$ при $|z| < 1$ – продифференцированная геометрическая прогрессия.

г) Логарифм.

Проинтегрируем геометрическую прогрессию из предыдущего пункта, получим: $-\ln(1-z) = z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} + \ldots$ при $|z| < 1$, где логарифм определяется рисунком ниже или формулой $\ln w = \ln|w| + i \arg w$, где $-\pi < \arg w < \pi$.

Для доказательства формулы надо продифференцировать $\ln w$ по теореме (3) об обратной функции.

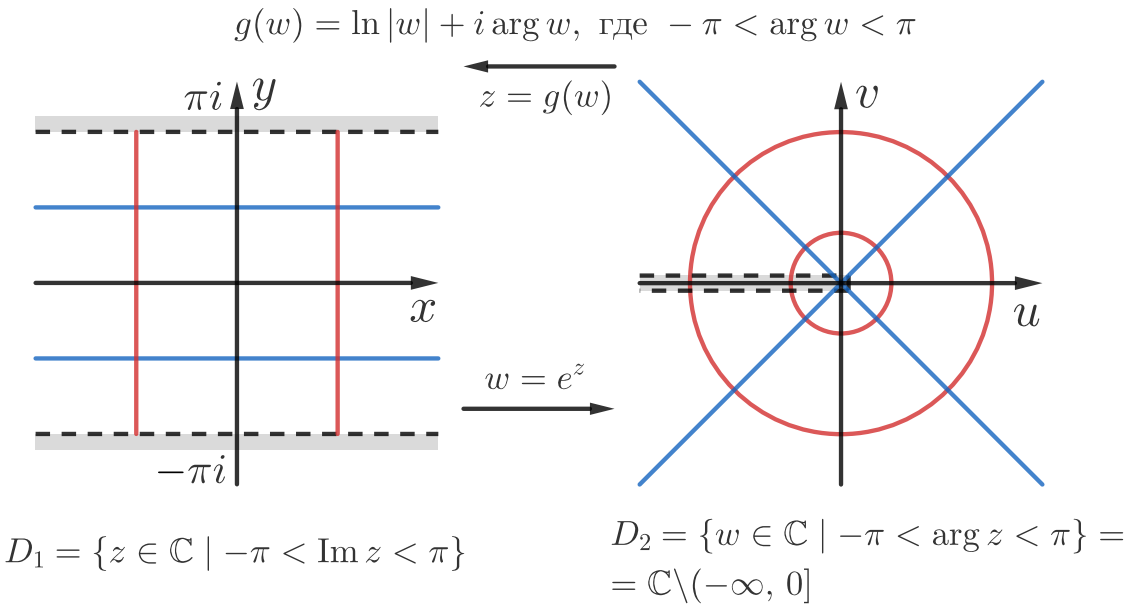

Рис. 8.1: Логарифм как обратное отображение к экспоненциальному отображению

д) Бином Ньютона.

$1 + C_\alpha^1 z + C_\alpha^2 z^2 + \ldots = (1+z)^\alpha$ при $|z| < 1$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ – любое, $C_\alpha^n := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$, $(1+z)^\alpha := e^{\alpha\ln(1+z)}$.

Для доказательства надо продифференцировать n раз функцию $(1+z)^\alpha$ при $\alpha = 0$.

Частные случаи: при $\alpha = -1$ и $\alpha = -2$ получаем формулы из пункта (в).

Упражнение 15. *Доказать, что при* $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ *получается формула* $(1-4z)^{-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n z^n$ *при* $|z| < 1$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9

Разложение голоморфных функций в ряд Лорана

Теорема 13. *Пусть $f \in \mathcal{O}(V)$, где $V := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$, $0 \le r_1 < r_2 \le ++\infty$. Тогда числа*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \tag{9.1}$$

при всех $n \in \mathbb{Z}$ не зависят от выбора $\rho \in (r_1, r_2)$, и $\forall z \in V$ имеем:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{9.2}$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ означает, что сходятся его главная часть $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ и правильная часть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$.

Доказательство:

1) Независимость c_n от выбора ρ вытекает из интегральной теоремы Коши (5) для области $\{\rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$ и функции $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$.

2) Зафиксируем $z \in V$ и выберем s, t так, что $r_1 < s < |z-a| < t < r_2$. По интегральной формуле Коши (6.1) $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=t} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=s} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$.

Обозначим $I_1 := \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=t} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ и $I_2 := \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=s} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$. Тогда $f(z) = I_1 - I_2$.

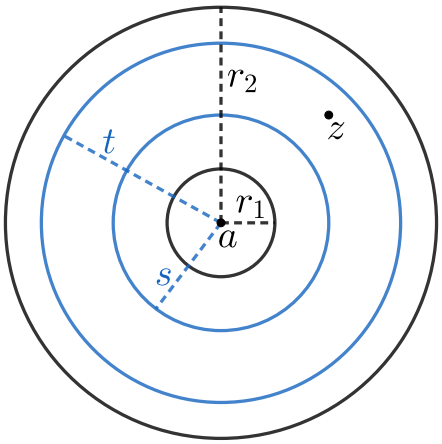

Рис. 9.1: Область V и контуры интегрирования

Для $|\zeta - a| = t$ имеем $|\zeta - a| > |z - a|$. Тогда $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}$ Используя разложение суммы бесконечно убывающей геометрической прогресии $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$, получаем: $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$. Полученный ряд сходится равномерно по ζ на окружности $|\zeta - a| = t$ по признаку Вейерштрасса, так как $\left|\dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}\right| \leq \dfrac{M|q|^n}{t}$, где $M := \max\limits_{|\zeta - a| = t} |f(\zeta)|$, $|q| = \left|\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right| = \dfrac{|z-a|}{t} < 1$. Тогда можем проинтегрировать этот ряд почленно: $I_1 = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = t} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = t} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ – получилась правильная часть ряда Лорана.

Для $|\zeta - a| = s$ имеем $|\zeta - a| < |z - a|$. Тогда $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\dfrac{f(\zeta)}{(z - a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)}$. Используя разложение суммы бесконечно убывающей геометрической прогресии $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)^m$, получаем: $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{f(\zeta)(\zeta - a)^m}{(z - a)^{m+1}}$. Полученный ряд сходится равномерно по ζ на окружности $|\zeta - a| = s$ по признаку Вейерштрасса, так как $\left|\dfrac{f(\zeta)(\zeta - a)^m}{(z - a)^{m+1}}\right| \leq \dfrac{M|q|^m}{t}$, где $M := \max\limits_{|\zeta - a| = s} |f(\zeta)|$, $|q| = \left|\dfrac{\zeta - a}{z - a}\right| = \dfrac{s}{|z - a|} < 1$. Тогда можем проинтегрировать этот ряд почленно: $I_2 = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = s} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = -\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = s} f(\zeta)(\zeta - a)^m\, d\zeta \cdot (z-a)^{-m-1} = -\sum\limits_{m=0}^{+\infty} c_{-m-1}(z-a)^{-m-1} = -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ – получилась главная часть ряда Лорана.

Таким образом, $f(z) = I_1 - I_2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. $\square$

Сходимость рядов по целым степеням $z - a$

Утверждение 31. *Пусть $b_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Положим*

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}}, \qquad r := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_{-n}|}. \tag{9.3}$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ сходится абсолютно и равномерно на компактах в кольце $\{r < |z-a| < R\}$.

При $|z-a| > R$ расходится правильная часть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} +b_n(z-a)^n$, а при $|z-a| < r$ расходится главная часть $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n$.

Доказательство:

Это вытекает из формулы Коши-Адамара (7.1) и её следствия для степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_{-n}Z^n$, где $Z := \dfrac{1}{z-a}$. □

Сформулируем следствие.

Утверждение 32. (Единственность разложения в ряд Лорана) *Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ при $r_1 < |z-a| < r_2$, то $\forall \rho \in (r_1, r_2)$ имеем: $b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \dfrac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$. В частности, разложение f в ряд по целым степеням $z-a$ в данном кольце единственно.*

Доказательство:

Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Ряд $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(z-a)^{m-n-1}$ сходится равномерно на окружности $|z-a| = \rho$, где $r_1 < \rho < r_2$. Следовательно, его можно проинтегрировать почленно: $\int\limits_{|z-a|=\rho} \dfrac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} b_m \int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{m-n-1}\,dz = b_n \cdot 2\pi i$ (использовали формулу (4.3)). □

Замечание 14. *Одна и та же функция $f(z)$ в разных кольцах с центром a может иметь разные разложения в ряд Лорана.*

Приведём пример.

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Эта функция голоморфна в трёх кольцах: $D_1 := \{|z| < 1\}$ – круг радиуса 1, $D_2 := \{1 < |z| < 2\}$ – кольцо с радиусами от 1 до 2, $D_3 := \{|z| > 2\}$ – внешность круга радиуса 2.

1) Рассмотрим $z \in D_1 := \{|z| < 1\}$. Тогда, используя разложение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем: $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$.

2) Рассмотрим $z \in D_2 := \{1 < |z| < 2\}$. Тогда, используя разложение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем: $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} - \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n - \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}} = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} z^n$.

3) Рассмотрим $z \in D_3 := \{|z| > 2\}$. Тогда, используя разложение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем: $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} - \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n - \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n-1}{z^{n+1}} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(2^{-n-1}-1)z^n$.

Неравенства Коши

Утверждение 33. *Если* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \in \mathcal{O}(r_1 < |z-a| < r_2)$, *то*

$$|c_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \tag{9.4}$$

$\forall n \in \mathbb{Z} \;\; \forall r \in (r_1, r_2)$, *где* $M(r) := \max\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Доказательство:

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{|z-a|=r}\frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \cdot 2\pi r \le \frac{M(r)}{r^n}. \qquad \square$$

Классификация изолированных особых точек однозначного характера

Определение 18. *Точка* $a \in \mathbb{C}$ *называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$, *если* $\exists \varepsilon > 0\colon\; f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$.

Такая точка a *для функции* $f(z)$ *называется:*

1) устранимой, если $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

2) полюсом, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$*;*

3) существенно особой точкой, если $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z) \in \overline{\mathbb{C}}$.

Приведём примеры. Точка $a = 0$ является:

1) устранимой для $f(z) \equiv 1$ или для $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$;

2) полюсом для $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$, где $n \in \mathbb{N}$, или для $f(z) = \operatorname{ctg} z$;

3) существенно особой точкой для $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ (так как $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty \neq 0 = \lim\limits_{x\to-0} f(x)$);

4) неизолированной особой точкой для $f(z) = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$ (так как $\nexists \varepsilon > 0\colon\ f(z) \in \mathcal{O}(0 < |z| < \varepsilon)$, поскольку $f(z)$ не голоморфна в точках $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$);

5) особой точкой неоднозначного характера для $f(z) = \sqrt{z}$ (так как $\nexists f(z) \in \mathcal{O}(0 < |z| < \varepsilon)\colon\ (f(z))^2 = z$).

Описание устранимой особой точки

Следующие утверждения про функцию $f \in \mathcal{O}(0 < |z - a| < \varepsilon)$ эквивалентны.

Утверждение 34. *$f(z)$ имеет устранимые особую точку при $z = a$.*

Утверждение 35. *$f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, то есть $\exists \varepsilon_1 > 0$ и $\exists M > 0\colon\ |f(z)| \leq M$ при $0 < |z - a| < \varepsilon_1$.*

Утверждение 36. *В разложении $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ в кольце $0 < |z - a| < \varepsilon$ имеем $c_n = 0$ при всех $n < 0$.*

Утверждение 37. *Можно доопределить $f(z)$ при $z = a$ так, что $f \in \mathcal{O}(|z - a| < \varepsilon)$.*

Доказательство:

Докажем, что из утверждения (34) следует утверждение (35). Действительно, функция имеющая предел, ограничена.

Докажем, что из утверждения (35) следует утверждение (36). По неравенствам Коши (33) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \ \forall r \in (0, \varepsilon)$ имеем $|c_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n} \leq \dfrac{M}{r^n}$. Если $n < 0$, то при $r \to +0$ получаем, что $|c_n| \to +0$, но c_n не зависит от r, поэтому $c_n = 0\ \ \forall n < 0$.

Докажем, что из утверждения (36) следует утверждение (37). По условию $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ при $0 < |z - a| < \varepsilon$. Полагая $f(a) := c_0$, получаем, что $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ при $|z - a| < \varepsilon$. Тогда по теореме (9) о голоморфности суммы степенного ряда $f \in \mathcal{O}(|z - a| < \varepsilon)$.

Докажем, что из утверждения (37) следует утверждение (34). Любая голоморфная функция непрерывна, а значит, $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$. $\square$

Замечание 15. *Утверждение о том, что из утверждения (35) следует утверждение (37), то есть что любую ограниченную $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$ можно продолжить до $f \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon)$, доопределяя $f(a)$, называется теоремой Римана об устранимой особенности.*

Приведём независимое доказательство теоремы Римана об устранимой особенности.

Доказательство:

Рассмотрим функцию $g(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & 0 < |z-a| < \varepsilon \\ 0, & z = a \end{cases}$. Тогда $\exists g'(a) := = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{g(z)-g(a)}{z-a} = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$ в силу ограниченности $f(z)$. Таким образом, $g \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon)$, при этом $g(a) = g'(a) = 0 \Rightarrow g(z)$ имеет при $z = a$ нуль порядка ≥ 2 (тривиальный случай $g \equiv 0$ влечёт $f \equiv 0$, и тогда теорема очевидна). Тогда по утверждению (28) $g(z) = (z-a)^2 h(z)$ для некоторой функции $h \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon)$. Полагая $f(a) := h(a)$, получим требуемое продолжение. $\square$

Упражнение 16. *Доказать, что $\nexists f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)\colon\ (f(z))^2 = z - a$ при $0 < |z-a| < \varepsilon$.*

Указание: доказать, что при $f(a) := 0$ будет $f \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon)$ и выяснить, нуль какого порядка у $f(z)$ при $z = 0$.

Упражнение 17. *Можно ли конформно отобразить $\mathbb{C}$ без точки на единичный круг без точки? А $\mathbb{C}$ без двух точек на круг без двух точек?*

Описание полюса

Утверждение 38. *Функция $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$ имеет при $z = a$ полюс тогда и тольк тогда, когда $\exists N \in \mathbb{N}\colon\ c_n = 0$ при $n < -N$, а $c_{-N} \neq 0$ (то есть главная часть ряда Лорана имеет конечное ненулевое число ненулевых коэффициентов).*

Доказательство:

Докажем $\Leftarrow$. По условию $f(z) = \sum\limits_{-N}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^{-N} \sum\limits_{m=0}^{+\infty} c_{m-N}(z-a)^m = = \dfrac{g(z)}{(z-a)^N}$, где $g(z) := \sum\limits_{m=0}^{+\infty} c_{m-N}(z-a)^m$. Тогда $g(a) = c_{-N} \neq 0$ по условию. Следовательно, $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{g(z)}{(z-a)^N} = \infty$.

Докажем $\Rightarrow$. По условию $f(z)$ имеем полюс при $z = a$. Тогда $f(z) \neq 0$ при $0 < < |z-a| < \varepsilon_1$ для некоторого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$. Следовательно, $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon_1)$

имеем при $z = a$ предел 0, то есть устранимую особую точку. Тогда по утверждению (37), полагая $\dfrac{1}{f(a)} := 0$, получим, что $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon_1)$. При этом $\dfrac{1}{f} \not\equiv 0$ (иначе было бы $f \equiv \infty$). Обозначим через N порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$ при $z = a$. Тогда по утверждению (28) $\dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^N h(z)$ для некоторой функции $h \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon_1)$, причём $h(a) \neq 0$. Следовательно, используя разложение в ряд Тейлора, получим: $f(z) = (z-a)^{-N}\dfrac{1}{h(z)} = (z-a)^{-N}(b_0 + b_1(z-a) + \ldots)$, причём $b_0 \neq 0$. Тогда $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ при $0 < |z-a| < \varepsilon_1$, где $c_{-N} = b_0 \neq 0$. $\square$

Определение 19. *Число $N \in \mathbb{N}$ называется порядком полюса функции $f(z)$ при $z = a$.*

Замечание 16. *Согласно доказательству утверждения (38), порядок полюса функции $f(z)$ при $z = a$ равен порядку нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$ при $z = a$.*

Лекция 10

Теорема Сохоцкого

Теорема 14. (Теорема Сохоцкого) *Пусть $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$ имеет существенно особую точку при $z = a$. Тогда $\forall w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ $\exists$ последовательность $z_n \to a\colon\ f(z_n) \to w_0$.*

Доказательство:

1) Пусть $w_0 = \infty$. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z_n\colon\ 0 < |z_n - a| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(z_n)| > n$, так как иначе $f(z)$ была бы ограниченной при $0 < |z-a| < \dfrac{1}{n}$, а тогда по утверждению (35) особенность при $z = a$ была бы устранимой. Тогда $z_n \to a$ при $n \to \infty$ и $f(z_n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

2) Пусть $w_0 \in \mathbb{C}$. Тогда либо $\exists$ последовательность $z_n \to a\colon\ f(z_n) = w_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, либо $\exists \varepsilon_1 > 0\colon\ f(z) \neq w_0$ при $0 < |z-a| < \varepsilon_1$.

В первом случае последовательность z_n – искомая.

Во втором случае $z = a$ является изолированной особой точкой однозначного характера для функции $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w_0}$. Если $\exists \lim\limits_{z\to a} g(z) \in \overline{\mathbb{C}}$, то функция $f(z) = w_0 + \dfrac{1}{g(z)}$ тоже имеет при $z \to a$ предел $\in \overline{\mathbb{C}}$, но это противоречит условию, что $z = a$ – существенно особая точка для $f(z)$. Следовательно, $z = a$ – существенно особая точка для $g(z)$. Тогда по пункту (1) этого доказательства $\exists z_n \to a\colon\ g(z_n) \to \infty$. Следовательно, $f(z_n) = w_0 + \dfrac{1}{g(z_n)} \to w_0$ при $n \to \infty$. $\square$

Замечание 17. (Эквивалентная формулировка теоремы Сохоцкого (14)) *$\forall$ функции $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$ множество частичных пределов $f(z)$ при $z \to a$ есть либо одна точка из $\overline{\mathbb{C}}$, либо вся расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.*

Упражнение 18. *Пусть $f \in \mathcal{O}(D \backslash M)$, где $D = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$, а $M = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность, сходящаяся к a, причём $f(z)$ имеет полюс при $z = z_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Доказать, что $\forall w_0 \in \overline{\mathbb{C}}\ \ \exists z'_n \to a\colon\ f(z'_n) \to w_0$ при $n \to \infty$.

$a = \infty$ как изолированная особая точка

Определение 20. *Функция $f(z)$ имеет изолированную особую точку однозначного характера при $z = a$, если $\exists R > 0\colon\ f \in \mathcal{O}(|z| > R)$.*

Точка $a = \infty$ для функции $f(z)$ называется:

1) устранимой, если $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$;

2) полюсом, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$;

3) существенно особой точкой, если $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \overline{\mathbb{C}}$.

Приведём примеры. Точка $a = \infty$ является:

1) устранимой для $f(z) = \dfrac{1}{z}$;
2) полюсом для $f(z) = z^n$, где $n \in \mathbb{N}$;
3) существенно особой точкой для $f(z) = e^z$.

Замечание 18. *Характер особенности $f(z)$ при $z = \infty$ такой же, как у функции $g(\zeta) := f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ при $\zeta = 0$. В частности, $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \in \mathcal{O}(|z| > R)$ имеет при $z = \infty$:*

1) устранимую особую точку, если $c_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$;
2) полюс, если $\exists N \in \mathbb{N}\colon\ c_N \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n > N$ ($N :=$ порядок полюса);
3) существенную особую точку, если $\exists$ последовательность $n_k \to \infty\colon\ c_{n_k} \neq 0$.

Таким образом, если под главной частью ряда Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \in \mathcal{O}(|z| > R)$ на ∞ понимать по определению $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$, то критерий особенности в терминах ряда Лорана один и тот же для $a \in \mathbb{C}$ и для $a = \infty$, а именно:

1) устранимая особая точка $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана $\equiv 0$;
2) полюс $\Leftrightarrow$ в главной части конечное ненулевое число ненулевых коэффициентов;
3) существенно особая точка $\Leftrightarrow$ в главной части ряда Лорана бесконечное число ненулевых коэффициентов.

Упражнение 19. *Какая особенность у $\dfrac{\sin z}{z^2}$ при $z = \infty$?*

Целые функции с полюсом на ∞

Утверждение 39. *Функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ имеет при $z = \infty$ устранимую особенность или полюс тогда и только тогда, когда является полиномом.*

Доказательство:

Пусть $P(z) := \begin{cases} 0, & \text{если } z = \infty \text{ – устранимая особая точка} \\ \sum\limits_{n=1}^{N} c_n z^n, & \text{если } z = \infty \text{ – полюс} \end{cases}$ есть главная часть ряда Лорана $f(z)$ на ∞ (то есть в кольце $\{|z| > R\}$).

Тогда $f(z) - P(z)$ имеет главную часть ряда Лорана $\equiv 0$, то есть особенность $f - P$ на ∞ устранима, поэтому $\exists \lim\limits_{z\to\infty} (f(z) - P(z))$. Кроме этого, $f(z) - P(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Таким образом, $g := f - P$ есть ограниченная целая функция, тогда по теореме Лиувилля (7) $g \equiv \text{const}$. Следовательно, $f = g + P$ – полином (причём степени 0 в случае устранимой особой точки и степени N в случае полюса порядка $N \in \mathbb{N}$). $\square$

Упражнение 20. *Верно ли, что $\forall f \in \mathcal{O}(|z| > 1)\ \ \exists g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\colon\ \lim\limits_{z\to\infty} (f(z) - g(z)) = 0$?*

Упражнение 21. *Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Доказать, что уравнение $f(z) = 5$ имеет решение, причём число решений (с учётом кратности) конечно.*

Описание всех конформных отображений $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя

Утверждение 40. *1) Конформные отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – это линейные функции $f(z) = az + b$, где $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, и только они.*

2) Конформные отображения $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – это ДЛО $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, и только они.

Доказательство:

1) Всякое конформное отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – это целая функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, то есть $z = \infty$ – изолированная особая точка однозначного характера для f. Если $z = \infty$ – существенно особая точка для f, то по теореме Сохоцкого (14) $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ $\exists$ последовательность $z_n \to \infty$: $f(z_n) \to w_0 := f(z_0)$ при $n \to \infty$. Тогда обратное отображение $z = g(w)$ разрывно в точке $w_0 = f(z_0)$, так как $\exists$ последовательность $w_n = f(z_n) \to w_0$: $g(w_n) = z_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Это противоречит гомеоморфности f. Следовательно, f имеет при $z = \infty$ устранимую особую точку или полюс. Тогда по утверждению (39) f – полином. При этом $f' \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, так как f – конформное отображение. Тогда по основной теореме алгебры (8) степень полинома $f'(z)$ равна 0, то есть $f'(z) \equiv a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тогда по единственности первообразной $f(z) = az + b$.

2) Если $f(\infty) = \infty$, то f конформно отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$, тогда по пункту (1) этого доказательства $f(z) = az + b$ – частный случай ДЛО. Если же $f(\infty) = w_0 \in \mathbb{C}$, то рассмотрим $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w_0}$ – конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ как композиция ДЛО и f. При этом $g(\infty) = \infty$, тогда по пункту (1) этого доказательства $g(z) = az + b$. Следовательно, $f(z) = w_0 + \dfrac{1}{g(z)} = w_0 + \dfrac{1}{az+b} = \dfrac{aw_0 z + bw_0 + 1}{az + b}$ – ДЛО. $\square$

Упражнение 22. *Доказать, что $\nexists$ конформного отображения $\mathbb{C}$ ни на какое открытое множество $D \subset \mathbb{C}$, отличное от $\mathbb{C}$.*

Мероморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$

Определение 21. *Функция $f(z)$ называется мероморфной в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ (запись: $f \in \mathcal{M}(D)$), если $f(z)$ не имеет в D особенностей, кроме полюсов, то есть $\exists$ множество $M \subset D$ (возможно, пустое) такое, что $f \in \mathcal{O}(D\backslash M)$ и $f(z)$ имеет полюс при $z = a$ $\forall a \in M$.*

Замечание 19. *Множество M в определении мероморфной функции состоит из изолированных точек (по определению полюса) $\Rightarrow$ M не имеет предельных точек в D и не более чем счётно.*

Приведём примеры.

1) $f(z) = \operatorname{tg} z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, так как множество M её полюсов – это $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$, оно состоит из полюсов 1-го порядка;

2) $g(z) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{z} \notin \mathcal{M}(\mathbb{C})$, так как $z = 0$ – предельная точка полюсов (то есть эта особая точка не является полюсом).

Упражнение 23. *Доказать, что $\mathcal{M}(D)$, пополненное функцией $f(z) \equiv \infty$, совпадает с множеством всех голоморфных отображений $D \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Утверждение 41. *Функция $f(z)$ мероморфна на $\overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда f рациональна (то есть $f = \dfrac{P}{Q}$, где P, Q – полиномы, $Q \not\equiv 0$).*

Доказательство:

Доказательство в сторону $\Leftarrow$ ясно из определения.

Докажем $\Rightarrow$. Так как $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, то множество полюсов f конечно (так как любое бесконечное подмножество $\overline{\mathbb{C}}$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ предельную точку, а предельная точка полюсов – не полюс). Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – все полюсы f в $\mathbb{C}$, $R_j(z) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{l_j} c_{jk}(z-a_j)^{-k}$ – главная часть ряда Лорана f в точке a_j (то есть в кольце $\{0 < |z-a_j| < \varepsilon\}$), $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{l} c_k z^k$ – главная часть ряда Лорана f на ∞ (то есть в кольце $\{|z| > R\}$). Тогда функция $g \coloneqq f - \sum\limits_{j=1}^{n} R_j - P$ является целой функцией с устранимой особенностью на ∞, то есть по доказательству утверждения (39) g является константой (обозначим её C). Таким образом, $f(z) = C + \sum\limits_{j=1}^{n} R_j + P$ – рациональная функция.

$\square$

Замечание 20. *Равенство $f(z) = C + \sum\limits_{j=1}^{n} R_j + P$ является разложением рациональной функции $f(z)$ на простейшие дроби.*

Вычеты

Определение вычета

Определение 22. *Пусть $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$. Тогда вычетом функции $f(z)$ в точке a называется число*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)\,dz, \tag{10.1}$$

где $0 < r < \varepsilon$.

По интегральной теореме Коши (5) для кольца $\{r_1 < |z-a| < r_2\}$ от выбора $r \in (0, \varepsilon)$ интеграл, стоящий в определении вычета, не зависит.

Теорема Коши о вычетах

Теорема 15. (Теорема Коши о вычетах) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{O}(\overline{D} \backslash \{a_1, \ldots, a_n\})$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in D$.*

Тогда

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z). \tag{10.2}$$

Доказательство:

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что замкнутые круги $K_j := \overline{B(a_j, \varepsilon)}$ при $j = 1, \ldots, n$ не пересекаются и лежат в D. Тогда множество $D_1 := D \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$ является ограниченной областью с кусочно-гладкой границей. Используя интегральную теорему Коши (5), получаем: $0 = \int\limits_{\partial D_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial K_j} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)$.

Таким образом, $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)$. □

Вычет в терминах ряда Лорана

Утверждение 42. *Если* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{10.3}$$

Доказательство:

Это частный случай формулы (9.1) для коэффициентов ряда Лорана: $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \dfrac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$, где $0 < r < \varepsilon$.

Можно получить формулу (10.3) и непосредственно почленным интегрированием ряда $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ по $\{|z-a| = r\}$. □

Формулы для вычисления вычета в полюсе 1-го порядка

Пусть $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$ имеет при $z = a$ не более чем полюс 1-го порядка (то есть устранимую особую точку или полюс 1-го порядка): $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$ при $0 < |z-a| < \varepsilon$. Тогда $g(z) := (z-a)f(z) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + \ldots$ имеет устранимую особую точку при $z = a$, то есть $\exists \lim\limits_{z \to a} (z-a)f(z) = g(a) = c_{-1}$.

Утверждение 43. *Пусть $f(z)$ имеет при $z = a$ не более чем полюс 1-го порядка. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{10.4}$$

Утверждение 44. *Если $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(|z-a| < \varepsilon)$, причём $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{10.5}$$

Доказательство:

В этом случае $\exists \lim\limits_{z\to a}(z-a)\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim\limits_{z\to a}\dfrac{z-a}{\psi(z)-\psi(a)}\varphi(z) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. Следовательно, $f(z) \coloneqq \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ имеет при $z=a$ не более чем полюс 1-го порядка, так как $(z-a)f(z)$ имеет при $z=a$ устранимую особую точку. Тогда по утверждению (43) получаем, что $\operatorname*{res}\limits_{z=a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. $\square$

Упражнение 24. *Вывести отсюда интегральную формулу Коши (6.1):* $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D}\dfrac{f(z)\,dz}{z-a} \quad \forall f \in \mathcal{O}(\overline{D}) \quad \forall a \in D.$

Лекция 11

Вычеты (продолжение)

Формула для вычисления вычета в полюсе любого порядка

Утверждение 45. *Пусть $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a| < \varepsilon)$ имеет при $z = a$ не более чем полюс порядка $n \in \mathbb{N}$ (эквивалентно: функция $g(z) := (z-a)^n f(z)$ имеет устранимую особую точку при $z = a$). Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}\left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}\Big|_{z=a}. \tag{11.1}$$

Доказательство:

По условию $f(z) = \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dfrac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \ldots$ при $0 < |z-a| < \varepsilon$. Следовательно, $g(z) = (z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \ldots$. Отсюда по формуле (7.3) для коэффициентов ряда Тейлора и по формуле (10.3) для вычета получаем, что $c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=a} f(z)$ совпадает с $\dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$. $\square$

Приведём примеры.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ вычислим $I_n := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Пусть $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^n}$, $D_R := \{|z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\gamma_R = \{|z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ (R считаем достаточно большим, то есть $R > 1$). Полюсами функции $f(z)$ являются точки $\pm i$, но только точка i лежит в D_R.

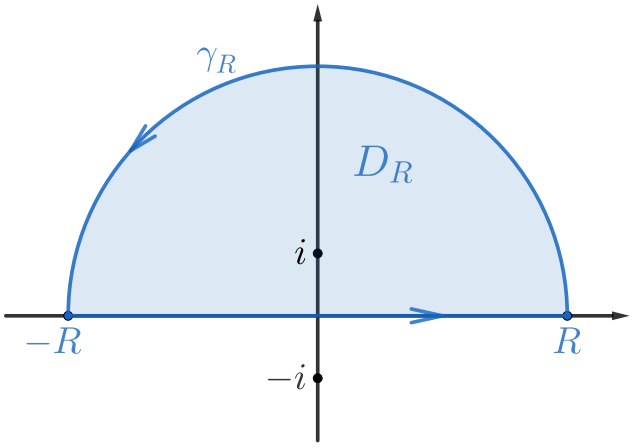

Рис. 11.1: Область D_R для вычисления интеграла I_n

Тогда по теореме Коши о вычетах (15) имеем: $2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \displaystyle\int_{\partial D_R} f(z)\,dz =$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^n} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При $R \to +\infty$ имеем: $\int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \to I_n$, а $\int\limits_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^n} \to 0$, так как $\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^n}\right| \le \max\limits_{z\in\gamma_R} \frac{1}{|1+z^2|^n} \cdot \pi R \le \max\limits_{z\in\gamma_R} \frac{1}{(|z|^2-|1|)^n} \cdot \pi R = \frac{\pi R}{(R^2-1)^n} \to 0$ при $R \to +\infty$, так как $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} f(z) \to I_n$ при $R \to +\infty$. Поскольку $2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} f(z)$ не зависит от R, то $2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} f(z) = I_n$.

Таким образом, по утверждению (45) получаем: $I_n = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^n} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left((z-i)^n \frac{1}{(1+z^2)^n}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{-n(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-(n-2))}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}}\Bigg|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = 2\pi i \cdot \frac{i^{2n-2}(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n-1} i^{2n-1}} = \frac{\pi}{2^{2n-2}} \cdot C_{2n-2}^{n-1} = \frac{\pi}{4^{n-1}} \cdot C_{2n-2}^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\forall a > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ вычислим $I(t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2+a^2}\, dx$.

Сначала рассмотрим случай $t \ge 0$.

Заметим, что $I(t) = \operatorname{Re} J(t)$, где $J(t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}\, dx}{x^2+a^2}$.

Пусть $f(z) := \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}$, $D_R := \{|z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\gamma_R = \{|z| = R,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$ (R считаем достаточно большим, то есть $R > a$). Полюсами функции $f(z)$ являются точки $\pm ai$, но только точка ai лежит в D_R.

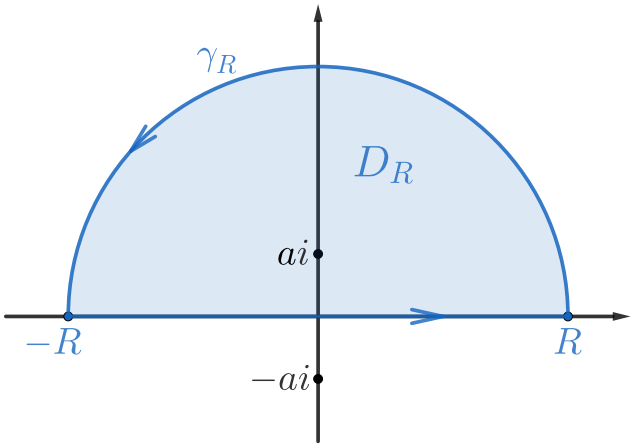

Рис. 11.2: Область D_R для вычисления интеграла $J(t)$

Тогда по теореме Коши о вычетах (15) имеем: $2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z) = \int\limits_{\partial D_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{itx}\,dx}{x^2+a^2} + \int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+a^2}$.

При $R \to +\infty$ имеем: $\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{itx}\,dx}{x^2+a^2} \to J(t)$, а $\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+a^2} \to 0$, так как $\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{itz}\,dz}{z^2+a^2}\right| \le \max\limits_{z\in\gamma_R} \frac{|e^{itz}|}{|z^2+a^2|} \cdot \pi R \le \max\limits_{z\in\gamma_R} \frac{e^{-t\operatorname{Im} z}}{|z|^2-|a|^2} \cdot \pi R = \frac{\pi R}{R^2-a^2} \to 0$ при $R \to +\infty$.

Тогда $2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z) \to J(t)$ при $R \to +\infty$. Поскольку $2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z)$ не зависит от R, то $2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z) = J(t)$.

Таким образом, по утверждению (44) получаем: $J(t) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2} = 2\pi i \cdot \frac{\varphi(ai)}{\psi'(ai)}$, где $\varphi(z) := e^{itz}$ и $\psi(z) := z^2+a^2$, так как $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(|z-ai|<\varepsilon)$, $\psi(ai)=0$, $\psi'(ai) \ne 0$. Тогда $J(t) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ta}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ta}$.

Следовательно, $I(t) = \operatorname{Re} J(t) = \frac{\pi}{a} e^{-ta} \quad \forall a>0 \quad \forall t \ge 0$.

Заметим, что если $t<0$, то $\cos tx = \cos|t|x \;\Rightarrow\; I(t) = I(|t|) = \frac{\pi}{a} e^{-a|t|}$.

Таким образом, $I(t) = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a} \quad \forall a>0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Упражнение 25. *Найти* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^4+1}\,dx \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Лемма о логарифмическом вычете

Лемма 2. (Лемма о логарифмическом вычете)

1) Если $f \in \mathcal{O}(|z-a|<\varepsilon)$ имеет при $z=a$ нуль порядка $n \in \mathbb{N}$, то $\operatorname*{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n$.

2) Если $f \in \mathcal{O}(0<|z-a|<\varepsilon)$ имеет при $z=a$ полюс порядка $p \in \mathbb{N}$, то $\operatorname*{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p$.

Доказательство:

1) По условию $f(z) = (z-a)^n g(z)$, где $g(z) \in \mathcal{O}(|z-a|<\varepsilon)$, $g(a) \ne 0$. Следовательно, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$. Функция $\frac{g'(z)}{g(z)} \in \mathcal{O}(|z-a|<\varepsilon_1)$, значит, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет при $z=a$ полюс 1-го порядка с вычетом $\operatorname*{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname*{res}_{z=a} \frac{n}{z-a} = n$.

2) Заменяем в пункте (1) этого доказательства n на $-p$, всё остальное полностью аналогично. $\square$

Теорема о логарифмическом вычете

Теорема 16. (Теорема о логарифмическом вычете) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{M}(G)$ для некоторого открытого множества $G \supset \overline{D}$, причём f не имеет на ∂D ни нулей, ни полюсов. Тогда*

$$N(f, D) - P(f, D) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz, \tag{11.2}$$

где $N(f, D)$ – число нулей f в D с учётом кратностей, $P(f, D)$ – число полюсов f в D с учётом кратностей.

Доказательство:

Из-за отстутствия нулей и полюсов на ∂D множество нулей f в D и множество полюсов f в D конечны (иначе у них была бы предельная точка в $\overline{D}$, следовательно, в D, следовательно, по теореме единственности (12) $f \equiv 0$ или $f \equiv \infty$ в D). Обозначим все нули f в D через $a_1, \ldots, a_k$, а их кратности – $n_1, \ldots, n_k$. Также обозначим все полюсы f в D через $b_1, \ldots, b_l$, а их кратности – через $p_1, \ldots, p_l$.

Тогда по лемме (2) о логарифмическом вычете $\operatorname*{res}\limits_{z=a_i} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = n_i$, где $i = 1, \ldots, k$, и $\operatorname*{res}\limits_{z=b_j} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = -p_j$, где $j = 1, \ldots, l$.

Следовательно, по теореме Коши о вычетах (15) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}\limits_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{j=1}^{l} \operatorname*{res}\limits_{z=b_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{l} p_j = N(f, D) - P(f, D)$. $\square$

Непрерывная ветвь аргумента вдоль пути

Теорема 17.

1) Если $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ – непрерывное отображение, то $\forall$ значения θ_0 аргумента числа $\alpha(a)$ (то есть $\alpha(a) = |\alpha(a)| e^{i\theta_0}$) $\exists$ единственная непрерывная функция $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$: $\theta(a) = \theta_0$ и $\alpha(t) = |\alpha(t)| e^{i\theta(t)}$ $\forall t \in [a, b]$.

2) Если при этом путь α кусочно-гладкий, то

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dw}{w} = \ln \frac{|\alpha(b)|}{|\alpha(a)|} + i(\theta(b) - \theta(a)). \tag{11.3}$$

3) Если, кроме того, путь α замкнут, то есть $\alpha(a) = \alpha(b)$, то

$$\theta(b) - \theta(a) = \frac{1}{i} \int\limits_{\alpha} \frac{dw}{w}. \tag{11.4}$$

Доказательство:

1) Если $\alpha([a,b])$ лежит в некоторой полуплоскости $\varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + \pi$, то в качестве $\theta(t)$ можно взять $\arg\alpha(t)$, где интервал $\varphi_0 + 2\pi k < \arg w < \varphi_0 + 2\pi k + \pi$ подобран так, чтобы он содержал θ_0. Получаем искомую функцию $\theta(t)$.

В общем случае каждая точка $t \in [a,b]$ имеет окрестность $U_t := (t-\varepsilon,\ t+\varepsilon)$, образ которой лежит в некоторой полуплоскости. Для любого открытого покрытия $\{U_\beta \mid \beta \in B\}$ отрезка $[a,b]$ $\exists\delta > 0$ такое, что любой отрезок $[t_1,t_2] \subset [a,b]$ длины δ лежит целиком в одном из множеств покрытия (иначе существовала бы последовательность $[a_n,b_n]$ отрезков длины $\dfrac{1}{n}$, не обладающих этим свойством, и для предельной точки $t_0 := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ получили бы, что её окрестность диаметра $\dfrac{1}{n}$, где $n \to \infty$, не покрывается целиком никаким U_β – противоречие). Разобьём отрезок $[a,b]$ на отрезки длины $< \delta$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда образ каждого отрезка $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ лежит в некоторой полуплоскости $\Rightarrow$ $\theta(t)$ находится последовательно для I_0, I_1, …, I_{n-1}.

Этим доказано существование $\theta(t)$.

Теперь докажем единственность $\theta(t)$. Если $\theta_1, \theta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ – две такие функции, то $\psi := \theta_1 - \theta_2$ непрерывна и $e^{i\psi(t)} \equiv 1 \quad \forall t \in [a,b]$ по определению θ. Значит, $\psi(t)$ принимает значения только из $2\pi\mathbb{Z}$. По теореме о промежуточном значении $\psi(t) \equiv \mathrm{const}$. Но $\psi(a) = 0$ по условию $\theta_1(a) = \theta_2(a) = \theta_0$, значит, $\psi(t) \equiv 0$.

2) Если образ α лежит в полуплоскости $\varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + \pi$, то $f(w) := \ln|w| + i\arg w$, где $\varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + \pi$, голоморфна в этой полуплоскости и $f'(w) = \dfrac{1}{w}$ (по теореме об обратной функции (3)). Следовательно, применяя формулу Ньютона-Лейбница (4.2), получим: $\displaystyle\int\limits_\alpha \frac{dw}{w} = \int\limits_\alpha f'(w)\,dw = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = \ln\frac{|\alpha(b)|}{|\alpha(a)|} + i(\theta(b) - \theta(a))$.

В общем случае надо разбить $[a,b]$ на подотрезки, как в пункте (1) этого доказательства, и сложить результаты.

3) Это частный случай пункта (2) при $\alpha(b) = \alpha(a)$. $\square$

Лекция 12

Определения и свойства чисел $\Delta \arg\limits_{\gamma} f$ и $\Delta \arg\limits_{\partial D} f$

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ – непрерывное отображение и функция $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ такая, что $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ – непрерывное отображение. Тогда по теореме (17) о непрерывной ветви аргумента вдоль пути $\exists$ единственное с точностью до $+2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, непрерывная функция $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ такая, что $f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{i\theta(t)} \quad \forall t \in$ $\in [a, b]$.

Определение 23. *Изменение аргумента вдоль пути γ функции f определяется следующим образом:*

$$\Delta \arg_{\gamma} f := \theta(b) - \theta(a). \tag{12.1}$$

Свойства числа $\Delta \arg\limits_{\gamma} f$:

1) (Логарифмическое свойство)

$$\Delta \arg_{\gamma}(f_1 f_2) = \Delta \arg_{\gamma} f_1 + \Delta \arg_{\gamma} f_2. \tag{12.2}$$

2) (Независимость от параметризации)

$$\Delta \arg_{\gamma\circ\tau} f = \Delta \arg_{\gamma} f \tag{12.3}$$

$\forall$ монотонно возрастающего гомеоморфизма $\tau : [a_1, b_1] \to [a, b]$.

3) (Зависимость от ориентации)

$$\Delta \arg_{\gamma\circ\tau} f = -\Delta \arg_{\gamma} f \tag{12.4}$$

$\forall$ монотонно убывающего гомеоморфизма $\tau : [a_1, b_1] \to [a, b]$.

Замечание 21. *Свойства (1)-(3) вытекают прямо из определения (23) числа $\Delta \arg\limits_{\gamma} f$. Например, если θ_1 отвечает f_1, а θ_2 отвечает f_2, то $\theta_1 + \theta_2$ отвечает $f_1 f_2$.*

Из свойств (2) и (3) следует, что можно корректно определить число $\Delta \arg\limits_{\partial D} f$ (изменение аргумента функции f вдоль границы области D) для любой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей и любой непрерывной функции $f : \partial D \to$ $\to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Можно корректно определить в том смысле, что число $\Delta \arg\limits_{\partial D} f$ не будет зависеть от выбора параметризации.

4) Если непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ и функция $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ таковы, что $f \circ \gamma$ являются кусочно-гладким отображением $[a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, то

$$\Delta \arg_{\gamma} f = \operatorname{Im} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w}. \tag{12.5}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если к тому же $\gamma(a) = \gamma(b)$, то

$$\Delta \arg_{\gamma} f = \frac{1}{i} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w}. \tag{12.6}$$

Замечание 22. *Свойство (4) вытекает из теоремы (17) о непрерывной ветви аргумента вдоль пути.*

Принцип аргумента

Теорема 18. (Принцип аргумента) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей и функция $f \in \mathcal{M}(\overline{D})$ не имеет на границе ни нулей, ни полюсов. Тогда*

$$N(f, D) - P(f, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\partial D} f, \tag{12.7}$$

где $N(f, D)$ – число нулей f в D с учётом кратностей, $P(f, D)$ – число полюсов f в D с учётом кратностей.

Замечание 23. *Геометрический смысл: (число нулей) – (число полюсов) = (числу обходов $f(z)$ вокруг 0 с учётом знака, когда z обходит ∂D один раз в положительном направлении).*

Доказательство:

Пусть ∂D состоит из одной замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой и $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ – параметризация ∂D. Тогда по теореме (16) о логарифмическом вычете $N(f, D) - P(f, D) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w}$ (использовали определение интеграла (11)). Используя формулу (12.6) из свойства (4) и свойство (2) о независимости от параметризации, получаем: $N(f, D) - P(f, D) = \dfrac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\gamma} f = \dfrac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\partial D} f$.

Если ∂D состоит из нескольких компонент, то доказательство аналогично с заменой γ на набор $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. □

Теорема Руше

Теорема 19. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f, g \in \mathcal{O}(\overline{D})$: $|f(z)| > |g(z)| \ \ \forall z \in \partial D$. Тогда $N(f + g, D) = N(f, D)$.*

Доказательство:

Из условия $|f| > |g|$ на ∂D вытекает, что $f \neq 0$ на ∂D и $f + g \neq 0$ на ∂D. Поэтому применима теорема (18) о принципе аргумента: $N(f + g, D) - N(f, D) = \dfrac{1}{2\pi} \left(\Delta \arg_{\partial D}(f + g) - \Delta \arg_{\partial D} f \right)$. Применяя формулу (12.2) из логарифмического свойства (1), получаем: $N(f + g, D) - N(f, D) = \dfrac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\partial D} \left(\dfrac{f + g}{f} \right)$.

Используя формулу (12.6) из свойства (4), получаем: $\Delta \arg\limits_{\partial D} \left(\dfrac{f+g}{f}\right) = \Delta \arg\limits_{\partial D} \left(1+\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{1}{i} \int\limits_{\varphi(\partial D)} \dfrac{d\zeta}{\zeta}$, где $\varphi(z) := 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$. По формуле Ньютона-Лейбница

(4.2) $\int\limits_{\varphi(\partial D)} \dfrac{d\zeta}{\zeta} = 0$, так как $\dfrac{1}{\zeta}$ (как и любая другая голоморфная функция) имеет первообразную в круге $|\zeta - 1| < 1$ по теореме (4) о существовании первообразной в круге (фактически $F(\zeta) := \ln|\zeta| + i \arg \zeta$, где $-\dfrac{\pi}{2} < \arg\zeta < \dfrac{\pi}{2}$, голоморфна при $|\zeta - 1| < 1$ и $F'(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta}$ при $|\zeta - 1| < 1$ по теореме (3) об обратной функции).

Таким образом, $\Delta \arg\limits_{\partial D} \left(\dfrac{f+g}{f}\right) = 0$, значит, $N(f+g, D) = N(f, D)$. □

Проиллюстрируем геометрический смысл теоремы Руше (19). Эту теорему иногда называют принцип дамы с собачкой. В роли дамы выступает функция f, а в роли собачки – функция $f+g$ (тогда функция g – в роли поводка). Дама гуляет вокруг клумбы (начала координат) и следит, чтобы собачка не забегала на клумбу (условие $|f(z)| > |g(z)| \ \ \forall z \in \partial D$). Тогда сколько раз дама обойдёт вокруг клумбы, столько же раз и собачка, как бы она ни бегала.

Приведём примеры.

1) Найдём $N(z^{15} + 7z^{12} + z^7 - iz^5 + 2, |z| < 1)$.

Заметим, что $|7z^{12}| = 7 > 1 + 1 + 1 + 2 \geq |z^{15} + z^7 - iz^5 + 2|$ при $|z| = 1$, тогда по теореме Руше (19) получаем: $N(z^{15} + 7z^{12} + z^7 - iz^5 + 2, |z| < 1) = N(7z^{12}, |z| < 1) = 12$.

2) Докажем ещё одним способом основную теорему алгебры (8), но уже сразу вместе с её следствием, которое можно было бы получить с помощью теоремы Безу.

Теорема 20. (Основная теорема алгебры со следствием из теоремы Безу) *Любой полином $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и $n \geq 1$, имеет ровно n нулей в $\mathbb{C}$ с учётом кратностей.*

Доказательство:

Пусть $R_0 > 0$ таково, что $R^n > |a_1|R^{n-1} + \ldots + |a_n| \ \ \forall R \geq R_0$. Тогда по теореме Руше (19) получаем: $N(P(z), |z| < R) = N(z^n, |z| < R) = n$. Так как это верно $\forall R \geq R_0$, то $N(P(z), \mathbb{C}) = n$. □

Принцип сохранения области

Утверждение 46. *Если $D \subset \mathbb{C}$ – область (то есть открытое линейно связное множество), $f \in \mathcal{O}(D)$ и $f \not\equiv \mathrm{const}$, то $f(D)$ – тоже область.*

Доказательство:

1) Множество $f(D)$ линейно связно в силу непрерывности f, так как если $z_1, z_2 \in D$ – любые точки и $\gamma : [t_1, t_2] \to D$ – непрерывный путь с $\gamma(t_1) = z_1$ и $\gamma(t_2) = z_2$, то непрерывный путь $f \circ \gamma \to f(D)$ соединяет $f(z_1)$ и $f(z_2)$ в $f(D)$.

2) Покажем, что $f(D)$ открыто. Пусть $z_0 \in D$ – произвольная точка и $w_0 := f(z_0)$. Тогда по утверждению (29) о принципе изолированности нулей для функции $f(z) - w_0$ из условия, что $f \not\equiv w_0$ в D вытекает, что $\exists \varepsilon > 0 : \ f(z) \neq w_0$ при $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Выберем любое $r \in (0, \varepsilon)$ и обозначим $\mu := \min\limits_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0|$. Тогда $\mu > 0$ по определению ε. Обозначим круг $U := \{|z - z_0| < r\}$.

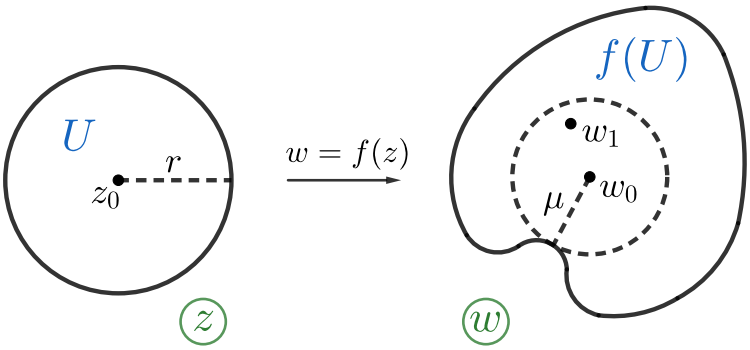

Рис. 12.1: Круг U и его образ $f(U)$

Тогда $\forall w_1$ из круга $\{|w - w_0| < \mu\}$ имеем: $f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + w_0 - w_1$. Заметим, что $|f(z) - w_0| \geq \mu$ на ∂U, а $|w_0 - w_1| < \mu$. Следовательно, по теореме Руше (19) $N(f(z) - w_1, U) = N(f(z) - w_0, U) \geq 1$, так как $f(z_0) = w_0$. Этим доказано, что $w_1 \in f(U)$. Следовательно, круг $\{|w - w_0| < \mu\}$ лежит целиком в $f(D)$. То есть $f(D)$ вместе с каждой своей точкой $w_0 = f(z_0)$ содержит её окрестность $\Rightarrow$ $f(D)$ открыто. $\square$

Критерий локальной однолистности

Определение 24. *Функция $f \in \mathcal{O}(D)$ называется однолистной на открытом множестве D, если $f(z_1) \neq f(z_2) \ \ \forall z_1, z_2 \in D: \ z_1 \neq z_2$.*

Утверждение 47. *Функция $f \in \mathcal{O}(z_0)$ однолистна в некоторой окрестности точки z_0 тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство:

Докажем $\Leftarrow$. Если $f'(z_0) \neq 0$, то $N(f(z) - w_0, U) = 1$ при $0 < r < \varepsilon$ (в обозначениях из доказательства утверждения (46) о принципе сохранения области), так как $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) \neq 0$ и $f(z) \neq w_0$ при $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Как было показано в доказательстве утверждения (46) о принципе сохранения области, $N(f(z) - w_1, U) = N(f(z) - w_0, U) \ \Rightarrow \ N(f(z) - w_1, U) = 1 \ \ \forall w_1$ в круге $\{|w - w_0| < \mu\}$. В силу непрерывности f в точке z_0 $\ \exists r_1 \in (0, r): \ |z - z_0| < r_1 \ \Rightarrow \ |f(z) - w_0| < \mu$. Тогда равенство $N(f(z) - w_1, U) = 1 \ \forall w_1$ в круге $\{|w - w_0| < \mu\}$ означает однолистность $f(z)$ в круге $\{|z - z_0| < r_1\}$.

Докажем $\Rightarrow$. Покажем, что если $f'(z_0) = 0$, то f не является однолистной ни в какой окрестности точки z_0. Причём будем рассматривать случай, когда $f(z) \not\equiv \text{const}$ ни в какой окрестности точки z_0, так как в этом случае функция f уже не будет однолистной ни в какой окрестности точки z_0. Раз $f'(z_0) = 0$, то кратность N нуля функции $f(z) - w_0$ при $z = z_0$ будет > 1 (она равна порядку нуля f' при $z = z_0$ плюс 1). Как было показано в доказательстве утверждения (46) о принципе сохранения

области, $N(f(z) - w_1,\, U) = N(f(z) - w_0,\, U) \;\Rightarrow\; N(f(z) - w_1,\, U) = N > 1 \;\; \forall w_1$ в круге $\{|w - w_0| < \mu\}$, так как $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) = 0$ и $f(z) \neq w_0$ при $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. При этом все эти N нулей имеют кратность 1 в некоторой проколотой окрестности z_0 (то есть геометрически различны), так как $f'(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности z_0 по утверждению (29) о принципе изолированности нулей. Таким образом, f не является однолистной ни в какой окрестности точки z_0. □

Окончательная форма теоремы об обратной функции

На первой лекции мы делали замечание (2), в котором обещали предоставить доказательство позже. Сейчас сделаем это.

Теорема 21. (Окончательная форма теоремы об обратной функции) *Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ – открытые множества и $f \in \mathcal{O}(D_1)$ биективно отображает D_1 на D_2. Тогда обратная функция $g := f^{-1} \in \mathcal{O}(D_2)$.*

Доказательство:

Заметим, что $f'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in D_1$ по утверждению (47) о критерии локальной однолистности. А также отображение $g : D_2 \to D_1$ непрерывно (то есть f является гомеоморфизмом D_1 на D_2) в силу утверждения (46) о принципе сохранения области, так как $\forall$ открытого $U \subset D_1$ прообраз $g^{-1}(U) = f(U)$ открыт в D_2 по принципу сохранения области.

Таким образом, выполнены все условия теоремы (3) об обратной функции, которая и даёт, что $g \in \mathcal{O}(D_2)$. □

Сформулируем следствие.

Утверждение 48. *Если $D \subset \mathbb{C}$ – любое открытое множество и $f \in \mathcal{O}(D)$ однолистна, то f конформно отображает открытое множество D на открытое множество $f(D)$.*

Лекция 13

Принцип максимума модуля

Утверждение 49. (Принцип максимума модуля в двух формулировках)
1) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $f \in \mathcal{O}(D)$ и $\exists a \in D$ и $\varepsilon > 0 :\ |f(a)| \geq |f(z)|$ при $|z - a| < \varepsilon$. Тогда $f \equiv \text{const}$.
2) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область и $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|. \tag{13.1}$$

Доказательство:
1) Если $f \not\equiv \text{const}$, то по утверждению (46) о принципе сохранения области образ при f круга $|z - a| < \varepsilon$ содержит некоторый круг $|w - f(a)| < \delta$, где $\delta > 0$. В последнем круге всегда есть точка $w_0 :\ |w_0| > |f(a)|$. Следовательно, $\exists$ точка z_0 круга $|z - a| < \varepsilon$ такая, что $f(z_0) = w_0$, и значит, $|f(z_0)| > |f(a)|$. Это противоречит условию $|f(a)| \geq |f(z)|$ при $|z - a| < \varepsilon$. Значит, $f \equiv \text{const}$.
2) По теореме Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте $\exists z_0 \in \overline{D} :$ $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$. Если $z_0 \in \partial D$, то требуемое равенство $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max\limits_{z \in \partial D} |f(z)|$ доказано. А если $z_0 \in D$, то $f \equiv \text{const}$ по пункту (1) этого доказательства, и тогда равенство $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max\limits_{z \in \partial D} |f(z)|$ тоже доказано. □

Упражнение 26. *Пусть D – ограниченная область и $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$, причём $\operatorname{Re} f(z) = 0 \quad \forall z \in \partial D$. Доказать, что $f \equiv \text{const}$.*
Указание: применить утверждение (49) о принципе максимума в формулировке (2) к функциям e^{if} и e^{-if}, а затем применить к любой из них формулировку (1) этого же утверждения.

Лемма Шварца

Лемма 3. (Лемма Шварца) *Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $f \in \mathcal{O}(U)$, $f(U) \subset \overline{U}$ (то есть $|f(z)| \leq 1$ при $|z| < 1$) и $f(0) = 0$. Тогда:*
1) $|f(z)| \leq |z|$ при $|z| < 1$;
2) если $\exists z_0 \in U \backslash \{0\} :\ |f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z) = e^{i\theta} z \quad \forall z \in U$ и для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$;
3) $|f'(0)| \leq 1$;
4) если $|f'(0)| = 1$, то $f(z) = e^{i\theta} z \quad \forall z \in U$ и для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство:
Докажем пункты (1) и (3). Функция $g(z) := \dfrac{f(z)}{z} = \dfrac{f(z) - f(0)}{z} \in \mathcal{O}(0 < |z| < 1)$ по определению производной (1) имеет предел $\lim\limits_{z \to 0} g(z) = f'(0)$. Следовательно, особенность функции $g(z)$ при $z = 0$ устранима, то есть после доопределения $g(0) := f'(0)$ имеем $g \in \mathcal{O}(|z| < 1)$.

Фиксируем $z_0 \in U$ и выберем $r\colon\ |z_0| < r < 1$. Тогда по утверждению (49) о принципе максимума в формулировке (2) получаем: $|g(z_0)| \le \max\limits_{|z|=r} |g(z)| = \max\limits_{|z|=r} \dfrac{|f(z)|}{|z|} \le$ $\le \dfrac{1}{r}$, так как $|f(z)| \le 1$ при $|z| < 1$ по условию. При $r \to 1-0$ получаем: $|g(z_0)| \le 1$, то есть $\begin{cases} \dfrac{|f(z_0)|}{|z_0|} \le 1 \text{ при } z_0 \in U\backslash\{0\} \\ |f'(0)| \le 1 \text{ при } z_0 = 0 \end{cases}$. Этим доказаны пункты (1) и (3).

Докажем пункты (2) и (4). Если какое-то из неравенств $\begin{cases} \dfrac{|f(z_0)|}{|z_0|} \le 1 \text{ при } z_0 \in U\backslash\{0\} \\ |f'(0)| \le 1 \text{ при } z_0 = 0 \end{cases}$ превратилось в равенство, то по утверждению (49) о принципе максимума в формулировке (1) $g(z) \equiv \text{const}$ и, следовательно, $f(z) = Cz$, где $|C| = 1$ (ясно из подстановки z_0), значит, $C = e^{i\theta}$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. □

Описание всех конформных отображений единичного круга $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на себя

Утверждение 50. *Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и $f : U \to U$ – конформное отображение. Тогда f является ДЛО и, следовательно, по утверждению (10)*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \tag{13.2}$$

для некоторых $a \in U$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

1) Пусть дополнительно $f(0) = 0$. Тогда по пункту (1) леммы Шварца (3) $|f(z)| \le |z| \quad \forall z \in U$. Для обратного отображения $z = g(w)$ тоже применим пункт (1) леммы Шварца (3): $|g(w)| \le |w| \quad \forall w \in U$. Подставим в последнее неравенство $w = f(z)$, получим: $|z| \le |f(z)| \quad \forall z \in U$. Таким образом, $|f(z)| = |z| \quad \forall z \in U$. Тогда по пункту (2) леммы Шварца (3) $f(z) = e^{i\theta}z$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. Значит, $f(z)$ является частным случаем ДЛО $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ при $a = 0$.

2) В общем случае согласно доказательству утверждения (10) получаем, что функция $h(z) = \dfrac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$ удовлетворяет условиям $h : U \to U$ конформно и $h(0) = 0$. Следовательно, $h(z) = e^{i\theta}z \quad \forall z \in U$ и для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда $f(z)$ – ДЛО, так как по утверждению (5) о групповом свойстве ДЛО отображения, обратные к ДЛО, являются ДЛО. А то, что любое ДЛО единичного круга U на себя имеет вид $z \mapsto e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$для некоторых $a \in U$, $\theta \in \mathbb{R}$, известно из утверждения (10). □

Упражнение 27. *Пусть $a \in U$ и $f : U\backslash\{a\} \to U\backslash\{0\}$ – конформное отображение. Доказать, что $\exists\theta \in \mathbb{R}\colon\ f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \forall z \in U\backslash\{a\}$.*

Указание: применить критерий устранимой особой точки (чтобы получить $f \in \mathcal{O}(a)$), принцип максимума модуля (чтобы получить $f(a) = 0$), критерий локальной обратимости (чтобы получить $f'(a) \neq 0$) и описание всех конформных отображений U на себя.

Единственность конформного отображения области на круг

Утверждение 51. *Пусть $D \in \mathbb{C}$ – область и $\exists$ конформное отображение D на единичный круг $U := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$. Тогда $\forall a \in D$ и $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\exists$ единственное конформное отображение $f : D \to U$ такое, что $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = \theta$.*

Доказательство:

1) Докажем существование. Доказательство приведём в виде построения схемы отображений.

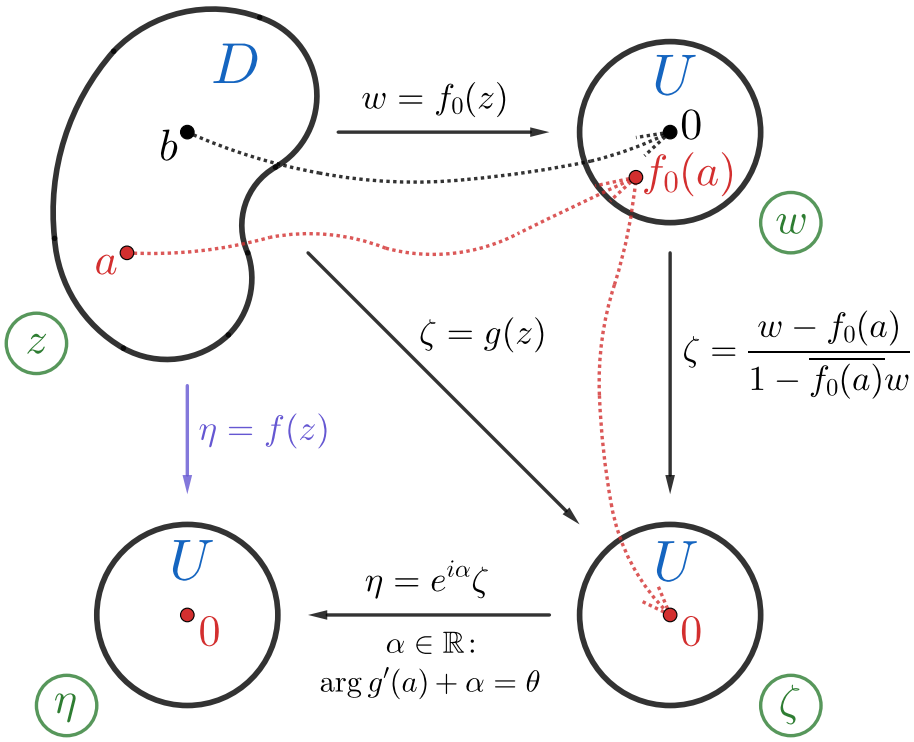

Рис. 13.1: Доказательство существования отображения $f : D \to U$ такого, что $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = \theta$

2) Докажем единственность. Если $f_1, f_2 : D \to U$ – конформные отображения с $f_j(a) = 0$ и $f_j'(a) = \theta$, то $g := f_1 \circ f_2^{-1}$ – конформное отображение U на U с $g(0) = 0$ и $\arg g'(0) = \arg \dfrac{f_1'(a)}{f_2'(a)} = \theta - \theta = 0$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

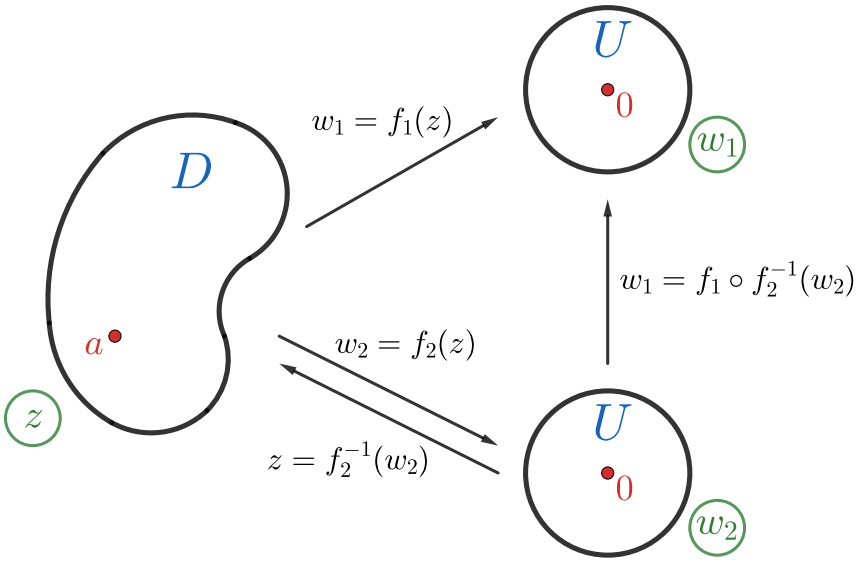

Рис. 13.2: Доказательство единственности отображения $f : D \to U$ такого, что $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = \theta$

Применим формулу (13.2): $g(w_2) = e^{i\alpha}\dfrac{w_2 - b}{1 - \bar{b}w_2}$ для некоторых $b \in U$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда из условия $g(0) = 0$ вытекает, что $b = 0$, значит, $g(w_2) = e^{i\alpha}w_2$. А тогда из условия $\arg g'(0) = 0$ вытекает, что $\alpha = 0$, значит, $g(w_2) = w_2$. Таким образом, $g = \mathrm{Id}$ – тождественное отображение, значит, $f_1 \circ f_2^{-1} = \mathrm{Id}$, то есть $f_1 = f_2$. $\square$

Задача на экстремум, решением которой является конформное отображение области на круг

Утверждение 52. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $U := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ и $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(D) \mid f(D) \subset U\}$. Допустим, что $\exists$ конформное отображение $f_0 : D \to U$ и обозначим $a := f_0^{-1}(0) \in D$. Тогда*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)| = |f_0'(a)|, \tag{13.3}$$

причём этот sup *достигается только при $f(z) = e^{i\theta}f_0(z)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.*

Доказательство:

Положим $F := \Phi \circ f \circ f_0^{-1}$, где $f \in \mathcal{F}$ – произвольный элемент, а Φ – ДЛО U на U, переводящее $f(a)$ в 0.

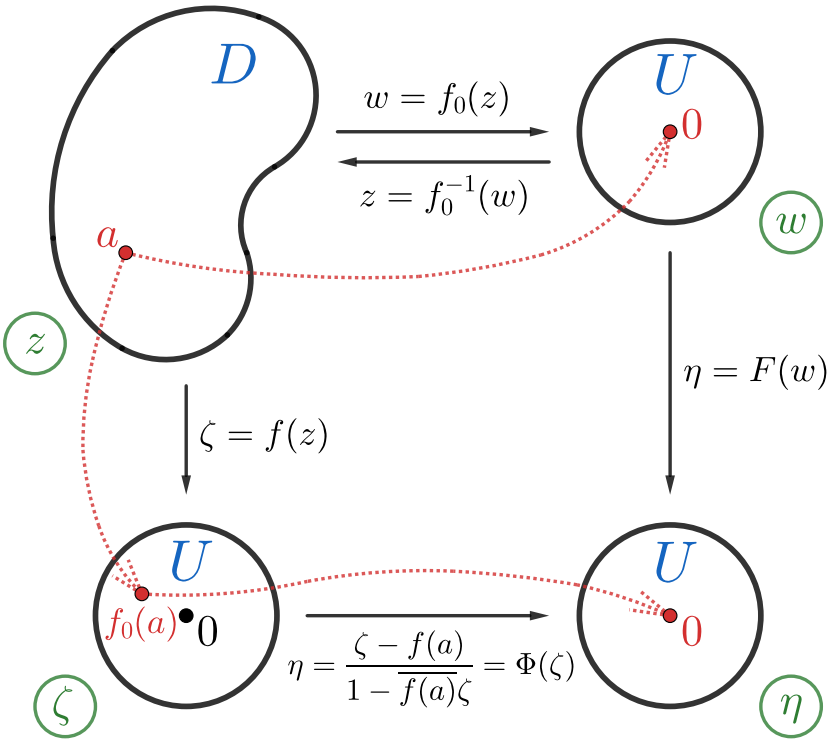

Рис. 13.3: Схема отображений для доказательства

Тогда по теореме (2) о сложной функции и по теореме (3) об обратной функции $F'(0) = \Phi'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot \dfrac{1}{f_0'(a)}$. При этом $\Phi'(\zeta) = \dfrac{1 - \overline{f(a)}\zeta - (\zeta - f(a)) \cdot \left(-\overline{f(a)}\right)}{\left(1 - \overline{f(a)}\zeta\right)^2} = \dfrac{1 - |f(a)|^2}{\left(1 - \overline{f(a)}\zeta\right)^2}$, тогда $\Phi'(f(a)) = \dfrac{1 - |f(a)|^2}{(1 - |f(a)|^2)^2} = \dfrac{1}{1 - |f(a)|^2}$. Таким образом, $F'(0) = \dfrac{1}{1 - |f(a)|^2} \cdot \dfrac{f'(a)}{f_0'(a)}$.

По лемме Шварца (3) $|F'(0)| \le 1$, то есть $|f'(a)| \le |f_0'(a)| \cdot (1 - |f(a)|^2) \quad \forall f \in \mathcal{F}$. Отсюда вытекает, что $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)| \le |f_0'(a)|$, причём равенство $|f'(a)| = |f_0'(a)|$ возможно, только если $f(a) = 0$ и $|F'(0)| = 1$, а тогда по пункту (4) леммы Шварца (3) при этом должно выполнить равенство $F(w) = e^{i\theta} w$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. Отсюда $\Phi(\zeta) \equiv \zeta$ и $F(w) = e^{i\theta} w$, тогда $f = \Phi^{-1} \circ F \circ f_0 = e^{i\theta} f_0$. $\square$

Таким образом, экстремальная задача заключается в следующем: надо максимизировать $|f'(a)|$ по всем $f \in \mathcal{O}(D)$: $f(D) \subset U$. Как мы доказали, если конформное отображение области на круг существует, то решение этой экстремальной задачи и есть это самое конформное отображение с точностью до умножения на $e^{i\theta}$.

Теорема Вейерштрасса «о рядах»

Теорема 22. (Теорема Вейерштрасса «о рядах») *Если $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $f_n \in \mathcal{O}(D)$ и $f_n \to f$ равномерно на компактах в D (то есть $\forall$ ком-*

пакта $K \subset D$ $\max\limits_{z\in K}|f(z)-f_n(z)| \to 0$ *при* $n\to\infty$*). Тогда* $f\in\mathcal{O}(D)$ *и* $\forall k\in\mathbb{N}$ *имеем:* $f_n^{(k)}\to f^{(k)}$ *равномерно на компактах в* D*.*

Доказательство:

Ясно, что $f: D\to\mathbb{C}$ непрерывна, так как $\forall$ открытого круга U с $\overline{U}\subset D$ имеем $f_n \rightrightarrows f$ на $\overline{U}$, то есть f непрерывна на U. При этом в силу равномерной сходимости $\forall$ открытого треугольника T с $\overline{T}\subset U$ имеем: $\int\limits_{\partial T} f\,dz = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\partial T} f_n\,dz = 0$ (по лемме Гурса (1) или по интегральной теореме Коши (5)). Следовательно, $f\in\mathcal{O}(U)$ по теореме Морера (10). В силу произвольности U отсюда вытекает, что $f\in\mathcal{O}(D)$.

Пусть U, V – круги с общим центром, $\overline{U}\subset V\subset\overline{V}\subset D$. Пусть r – радиус U, R – радиус V. Тогда по интегральной формуле Коши для производных (7.4) $\forall z\in\overline{U}$ и $\forall k\in\mathbb{N}$ имеем: $f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z) = \dfrac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\partial V}\dfrac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta$. Тогда $\left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| =$

$= \left|\dfrac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\partial V}\dfrac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \le \dfrac{k!}{2\pi}\cdot\max\limits_{\zeta\in\partial V}\dfrac{|f_n(\zeta)-f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{k+1}}\cdot 2\pi R$. Так как при $\zeta\in\partial V$ и $z\in\overline{U}$ выполнено неравенство $|\zeta-z|\ge R-r$, то $\left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| \le \dfrac{k!R}{(R-r)^{k+1}}\cdot$ $\cdot\max\limits_{\zeta\in\partial V}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\to 0$ при $n\to\infty$, так как $f_n\rightrightarrows f$ на ∂V. Следовательно, $f_n^{(k)}\rightrightarrows f^{(k)}$ на $\overline{U}$. Любой компакт $K\subset D$ покрывается конечным числом таких кругов U $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f_n^{(k)}\rightrightarrows f^{(k)}$ на K. $\square$

Лекция 14

Теорема Гурвица

Теорема 23. (Теорема Гурвица) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, последовательность $f_n \in \mathcal{O}(D)$ сходится к $f \in \mathcal{O}(D)$ равномерно на компактах в D, причём $f \not\equiv 0$, но $\exists a \in D: \ f(a) = 0$. Тогда в любой окрестности точки a все функции f_n, начиная с некоторой, имеют хотя бы один нуль, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N(\varepsilon) \ \ N(f_n(z), |z-a| < \varepsilon) \geq 1$.*

Доказательство:

По утверждению (29) о принципе изолированности нулей $\exists \varepsilon' \in (0, \varepsilon): \ f(z) \neq 0$ при $0 < |z-a| \leq \varepsilon'$. Положим $\mu := \min\limits_{|z-a|=\varepsilon'} |f(z)|$, тогда $\mu > 0$. Пусть N таково, что $\forall n > N \ \ |f_n(z) - f(z)| < \mu$ при $|z-a| = \varepsilon'$. Тогда $N(f_n(z), |z-a| < \varepsilon') = N(f_n - f + f, |z-a| < \varepsilon')$. Так как при $|z-a| = \varepsilon'$ имеем $|f_n - f| < \mu$ и $|f| \geq \mu$, то по теореме Руше (19) получим: $N(f_n(z), |z-a| < \varepsilon') = N(f(z), |z-a| < \varepsilon') \geq 1$ по условию. $\square$

Сформулируем следствие.

Утверждение 53. *Если $D \subset \mathbb{C}$ – область, $f_n \in \mathcal{O}(D)$ однолистны и $f_n \to f$ равномерно на компактах в D, то либо $f \equiv \mathrm{const}$, либо $f \in \mathcal{O}(D)$ однолистна.*

Доказательство:

Имеем $f \in \mathcal{O}(D)$ по теореме Вейерштрасса (22).

Если $z_1 \neq z_2 \in D$ и $f(z_1) = f(z_2) = w_0$, то по теореме Гурвица (23) либо $f(z) \equiv w_0$, либо все $f_n(z) - w_0$ при $n \geq n_0$ имеют нули в произвольных окрестностях окрестностях U_1 и U_2 точек z_1 и z_2 соответственно. В силу произвольности окрестностей U_1 и U_2 выберем их непересекающимися. Тогда это противоречит однолистности f_n. $\square$

Принцип компактности

Утверждение 54. (Принцип компактности) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $f_k \in \mathcal{O}(D)$ и $\exists M > 0: \ |f_k(z)| \leq M \ \ \forall z \in D$ и $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists$ подпоследовательность $\{f_{k_l}\}$, которая сходится равномерно на компактах в D.*

Доказательство:

1) Пусть сначала $D = \{|z-a| < R\}$ – произвольный круг. Обозначим $c_n(f) := \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Тогда по теореме (22) о разложении в ряд Тейлора $f_k(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_n(f_k)(z-a)^n \ \ \forall z \in D$ и $\forall k \in \mathbb{N}$, причём по неравенствам Коши (6.4) $|c_n(f_k)| \leq \dfrac{M}{r^n} \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ при $0 < r < R$.

Последовательность $c_0(f_k) \in \mathbb{C}$ ограничена $\Rightarrow \ \exists$ подпоследовательность $k_l^{(0)}: \ l \mapsto c_0\left(f_{k_l^{(0)}}\right)$ сходится.

Из подпоследовательности $k_l^{(0)}$ выберем подпоследовательность $k_l^{(1)}$: $l \mapsto$ $\mapsto c_1\left(f_{k_l^{(1)}}\right)$ сходится (она $\exists$, так как последовательность $c_1(f_k)$ ограничена по неравенствам Коши).

Из подпоследовательности $k_l^{(1)}$ выберем подпоследовательность $k_l^{(2)}$: $l \mapsto$ $\mapsto c_2\left(f_{k_l^{(2)}}\right)$ сходится (она $\exists$, так как последовательность $c_2(f_k)$ ограничена по неравенствам Коши).

И так далее.

Положим $k_l := k_l^{(l)}$ $\forall l \in \mathbb{N}$ («диагональная подпоследовательность»). Тогда $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $c_n(f_{k_l})$ сходится. Переобозначим последовательность $\{k_l\}$ опять через $\{k\}$ и будем тем самым считать, что $f_k \in \mathcal{O}(D)$ – такая последовательность, что $c_n(f_k)$ сходится при $k \to \infty$ $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$.

Покажем, что последовательность f_k с таким свойством сходится равномерно на $\{|z-a| \le r\}$ $\forall r \in (0, R)$. Выберем $r_1 \in (r, R)$ и запишем: $|f_k(z) - f_l(z)| =$ $= \left|\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n(f_k) - c_n(f_l))(z-a)^n\right| \le \sum\limits_{n=0}^{N}|c_n(f_k) - c_n(f_l)| \cdot |z-a|^n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{2M}{r_1^n}r^n$ (использовали неравенства Коши с r_1 и неравенство $|z-a| \le r$).

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N\colon \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{2M}{r_1^n}r^n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (так как $M = \text{const}$ и сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^n$ сходится).

Зафиксируем N и выберем $K(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялись неравенства $|c_n(f_k) - c_n(f_l)| < \dfrac{\varepsilon}{2r^n(N+1)}$ $\forall k, l \ge K(\varepsilon)$ $\forall n = 0, 1, \ldots, N$ (это возможно по критерию Коши для сходящихся числовых последовательностей $c_0(f_k)$, $c_1(f_k)$, …, $c_N(f_k)$).

Таким образом, $|f_k(z) - f_l(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall k, l \ge K(\varepsilon)$ при $|z-a| \le r$. Следовательно, пр критерию Коши последовательность f_k сходится равномерно на $\{|z-a| \le r\}$.

Этим принцип компактности доказан для $D = \{|z-a| < R\}$.

2) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $K \subset D$ – компакт. Каждая точка $a \in K$ имеет окрестность $U_a = \{|z-a| < r_a\}$: $\{|z-a| < 2r_a\} \subset D$. Пусть U_{a_1}, …, U_{a_m} – конечное подпокрытие компакта K. Повторяя m раз выбор подпоследовательности из пункта (1) этого доказательства, получим подпоследовательность, которая сходится равномерно на всех $\overline{U}_{a_j}$ и, следовательно, на $K \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_m}$.

3) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – произвольное открытое множество. Положим $K_n :=$ $:= \left\{z \in D \mid |z| \le n,\ \operatorname{dist}(z, \partial D) \ge \dfrac{1}{n}\right\}$. Тогда K_n – компакты при $n \ge n_0$ и $D =$ $= \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} K_n$.

Пользуясь пунктом (2) этого доказательства, выберем из $\{k\}$ подпоследовательность $\left\{k_l^{(1)}\right\}$: $f_{k_l^{(1)}}$ сходится равномерно на K_1. Из неё – подпоследовательность $\left\{k_l^{(2)}\right\}$: $f_{k_l^{(2)}}$ сходится равномерно на K_2. И так далее.

Положим $k_l := k_l^{(l)} \quad \forall l \in \mathbb{N}$. Тогда подпоследовательность $\{f_{k_l}\}$ сходится равномерно на $K_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Поскольку любой компакт $K \subset D$ содержится в K_n для некоторого n, то подпоследовательность $\{f_{k_l}\}$ сходится равномерно на любом компакте $K \subset D$, то есть является искомой. $\square$

Упражнение 28. *Пусть $S := \{-1 < \operatorname{Im} z < 1\}$, $f \in \mathcal{O}(S)$ и $|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in S$. Пусть $\exists y_0 \in (-1, 1) : \lim\limits_{x \to +\infty} f(x + iy_0) = A$. Доказать, что $\forall y \in (-1, 1)$ $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x + iy) = A$.*

Указание: применить принцип компактности для $f_n(z) = f(z + n)$.

Определение первообразной вдоль пути

Определение 25. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\gamma : [a, b] \to$ $\to D$ – непрерывное отображение. Функция $\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется первообразной функции f вдоль пути γ, если $\forall \tau \in [a, b] \quad \exists$ окрестность u_τ точки τ в $[a, b]$, круговая окрестность $U_\tau := \{|z - \gamma(\tau)| < R(\tau)\} \subset D$ точки $\gamma(\tau)$ в $\mathbb{C}$ и функция $F_\tau \in \mathcal{O}(U_\tau)$ такие, что:*

1) $F'_\tau(z) = f(z) \quad \forall z \in U_\tau$;

2) $\Phi(t) = F_\tau(\gamma(t)) \quad \forall t \in u_\tau$.

Утверждение 55. *$\forall$ открытого множества $D \subset \mathbb{C}$, $\forall$ функции $f \in \mathcal{O}(D)$ и $\forall$ непрерывного отображения $\gamma : [a, b] \to D$ функция Φ из определения (25) первообразной вдоль пути существует и единствена с точностью до прибавления константы.*

Доказательство:

Докажем существование. $\forall t \in [a, b] \quad \exists$ круг $V_t \subset D$ с центром $\gamma(t)$ и окрестность $v_t \subset [a, b]$ такая, что $\gamma(v_t) \subset V_t$. Также $\exists \delta > 0$ такое, что любой интервал $I \subset [a, b]$ длины $< \delta$ содержится в некотором интервале v_t (δ – число Лебега покрытия $\{v_t\}$ отрезка $[a, b]$, его существование легко доказать от противного, это было сделано в пункте (1) доказательства теоремы (17)). Рассмотрим разбиение $a = t_0 < t_1 <$ $< \ldots < t_n = b$ на отрезки длины $< \delta$. Тогда $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset V_j$, где $j = 1, \ldots, n$, для некоторых кругов $V_j \subset D$.

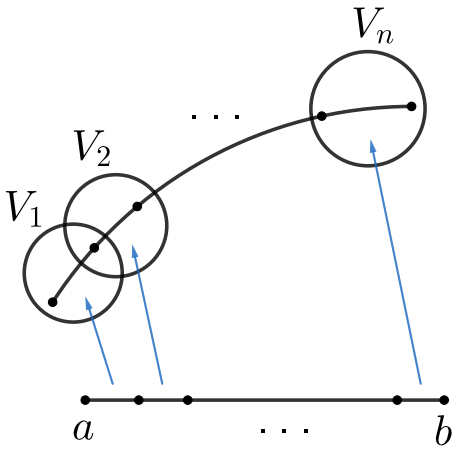

Рис. 14.1: Разбиение для доказательства существования первообразной вдоль пути

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По теореме (4) о существовании первообразной в круге имеем:
$\exists F_1 \in \mathcal{O}(V_1)\colon\ F_1' = f$ на V_1 и $F_1(\gamma(t_0)) = 0$;
$\exists F_2 \in \mathcal{O}(V_2)\colon\ F_2' = f$ на V_2 и $F_2(\gamma(t_1)) = F_1(\gamma(t_1))$;
И так далее по индукции.

Тогда $\Phi(t) := F_j(\gamma(t))$ для $t \in [t_{j-1}, t_j]$, где $j = 1, \ldots, n$ является первообразной функции f вдоль пути γ (а именно: $\forall \tau \in [a, b]$, то есть $\tau \in [t_{j-1}, t_j]$ для некоторого j, пусть U_τ – любая круговая окрестность точки $\gamma(\tau)$, лежащая в круге V_j, а u_τ – любая окрестность точки τ такая, что $\gamma(\tau) \subset U_\tau$, и пусть $F_\tau := F_j$, тогда все условия выполнены).

Докажем единственность с точностью до прибавления константы. Если $\Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ – две первообразные f вдоль γ, то соответствующие $F_\tau^1 \in \mathcal{O}(U_\tau^1)$ и $F_\tau^2 \in \mathcal{O}(U_\tau^2)$ отличаются на круге $U_\tau^1 \cap U_\tau^2$ с центром $\gamma(\tau)$ на константу $C = C(\tau)$ (единственность первообразной в круге с точностью до прибавления константы). Следовательно, $\Phi_1 - \Phi_2 = C$ на окрестности $u_\tau^1 \cap u_\tau^2$ точки τ. Значит, любая точка $\tau \in [a, b]$ имеет окрестность $\tilde{u}_\tau := u_\tau^1 \cap u_\tau^2$, в которой $\Phi_1 - \Phi_2 = \mathrm{const}$. Если $\delta > 0$ – число Лебега покрытия $\{\tilde{u}_\tau \mid \tau \in [a, b]\}$ отрезка $[a, b]$, то двигаясь по индукции конечным числом шагов длины $< \delta$, получим, что $\Phi_1 - \Phi_2 = \mathrm{const}$ на $[a, b]$. $\square$

Лекция 15

Формула Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути

Утверждение 56. (Формула Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\gamma : [a, b] \to D$ – кусочно-гладкое отображение, $\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ – первообразная f вдоль γ. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{15.1}$$

Доказательство:

1) Пусть D – круг. Тогда по теореме (4) о существовании первообразной в круге $\exists F \in \mathcal{O}(D)\colon\ F' = f$ в D. Кроме этого, по утверждению (55) в силу единственности первообразной вдоль пути с точность до прибавления константы имеем: $\Phi(t) = F(\gamma(t)) + C$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$. Следовательно, пользуясь обычной формулой Ньютона-Лейбница (4.2), получаем: $\int\limits_{\gamma} f\,dz = \int\limits_{\gamma} F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

2) В общем случае $\exists$ разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ такое, что $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$ при $j = 1, \ldots, n$ для некоторых кругов $U_j \subset D$ (это было показано в утверждения (55)). Запишем результат пункта (1) этого доказательства для каждого отрезка $[t_{j-1}, t_j]$ и сложим, получим $\int\limits_{\gamma} f\,dz = \Phi(b) - \Phi(a)$. □

Определение 26. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $f \in \mathcal{O}(D)$ и $\gamma : [a, b] \to D$ – любое непрерывное отображение. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz \coloneqq \Phi(b) - \Phi(a), \tag{15.2}$$

где $\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ – любая первообразная f вдоль γ.

Согласно утверждению (56) о формуле Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути это определение совпадает со старым определением $\int\limits_{\gamma} f\,dz \coloneqq \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ для кусочно-гладких путей γ.

Определение гомотопных путей

Определение 27. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество. Непрерывные отображения (пути) $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to D$ с общим началом $p = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и общим концом $q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ называются гомотопными в D, если $\exists$ непрерывное отображение $\Gamma : [0, 1] \times [a, b] \to D$ такое, что $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ и $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)\ \ \forall t \in [a, b]$, а также $\Gamma(s, a) = p$ и $\Gamma(s, b) = q\ \ \forall s \in [0, 1]$.*

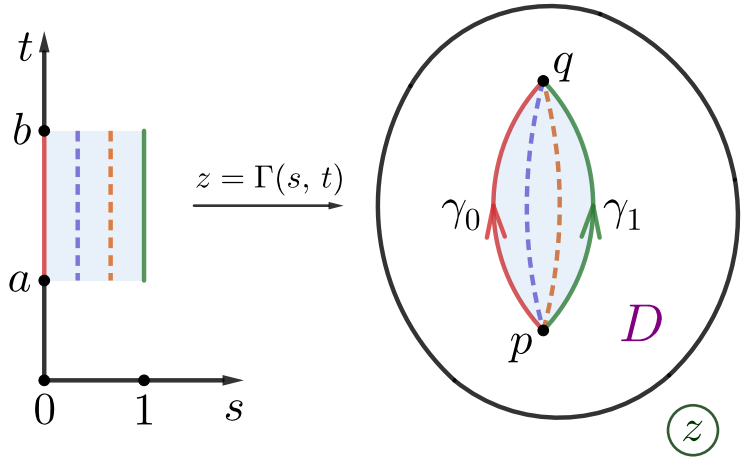

Рис. 15.1: Гомотопные пути γ_0 и γ_1

Теорема Коши о гомотопии

Теорема 24. (Теорема Коши о гомотопии) *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, непрерывные отображения (пути) $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to D$ с общим началом $p = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и общим концом $q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ гомотопны в D. Тогда $\forall f \in \mathcal{O}(D)$ выполнено равенство*

$$\int\limits_{\gamma_0} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz. \tag{15.3}$$

Доказательство:

Положим $\gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ и $J(s) := \int\limits_{\gamma_s} f\,dz \quad \forall s \in [0,1]$. Покажем, что $\forall s_0 \in [0,1] \quad \exists \delta > 0 : \quad J(s) \equiv \text{const}$ на $[s_0 - \delta,\ s_0 + \delta] \cap [0,1]$ (если это верно, то с помощью числа Лебега покрытия $(s_0 - \delta,\ s_0 + \delta)$, где $s_0 \in [0,1]$, легко вывести, что $J \equiv \text{const}$ на $[0,1]$, что и требуется доказать).

Фиксируем $s_0 \in [0,1]$ и выберем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b : \quad \gamma_{s_0}([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$ для некоторого круга $U_j \subset D$, где $j = 1, \ldots, n$. Пусть $F_j \in \mathcal{O}(U_j)$ – такие первообразные f в U_j, что $\Phi_{s_0}(t) := F_j(\gamma_{s_0}(t))$ при $t \in [t_{j-1}, t_j]$, где $j = 1, \ldots, n$, является первообразной f вдоль пути γ_{s_0}. В силу равномерной непрерывности Γ на $[0,1] \times [a,b] \quad \exists \delta > 0 : \quad \Gamma(s,t) \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j \quad \forall s \in [s_0 - \delta,\ s_0 + \delta] \quad \forall t \in [a,b]$. Тогда функция $\Phi_s(t) := F_j(\gamma_s(t))$ при $t \in [t_{j-1}, t_j]$, где $j = 1, \ldots, n$, является первообразной f вдоль пути $\gamma_s \quad \forall s \in [s_0 - \delta,\ s_0 + \delta]$.

По утверждению (56) о формуле Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути $\int\limits_{\gamma_s} f\,dz = \Phi_s(b) - \Phi_s(a)$. Так как $\Phi_s(a) = F_1(a)$ и $\Phi_s(b) = F_n(q)$, то $\int\limits_{\gamma_s} f\,dz = F_n(q) - F_1(p)$ не зависит от $s \in [s_0 - \delta,\ s_0 + \delta]$.

Таким образом, локальное постоянство интеграла $\int\limits_{\gamma_s} f\,dz$ доказано, а из этого, как

было сказано выше, вытекает глобальное постоянство $\forall s \in [0,1]$. Значит, $\int\limits_{\gamma_0} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz$. □

Определение односвязной области

Определение 28. *Область (то есть открытое линейно связное множество) $D \subset \mathbb{C}$ называется односвязной, если любые два непрерывных пути $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ с общими началом и концом гомотопны в D.*

Приведём примеры.

1) Любое выпуклое открытое множество $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область (например, круг, полуплоскость, полоса, полуполоса).

Доказательство:

$\Gamma(s,t) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ $\forall (s,t) \in [0,1] \times [a,b]$ лежит в D в силу выпуклости D и осуществляет гомотопию. □

2) $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \right\}$ – односвязная невыпуклая область.

Упражнение 29. *Доказать, что этот пример верен.*

3) $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ – неодносвязная область.

Доказательство:

Для путей $\gamma_0(t) = e^{it}$, где $0 \le t \le \pi$, и $\gamma_1(t) = e^{-it}$, где $0 \le t \le \pi$, с общими началом и концом имеем: $\int\limits_{\gamma_0} \dfrac{dz}{z} = \pi i \neq -\pi i = \int\limits_{\gamma_1} \dfrac{dz}{z}$. Следовательно, по теореме Коши о гомотопии (24) γ_0 и γ_1 негомотопны в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

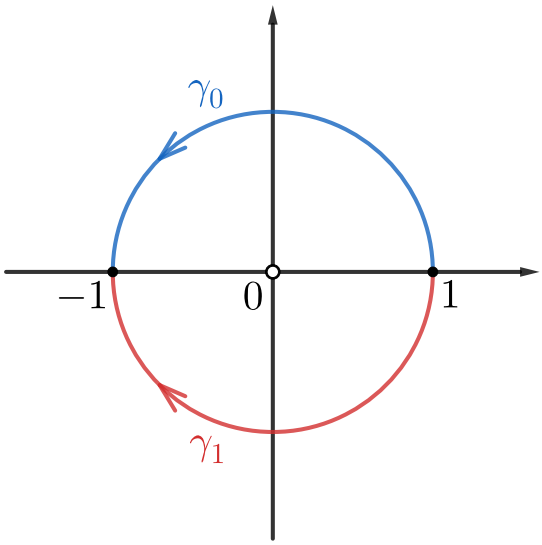

Рис. 15.2: Пример негомотопных путей в $C\backslash\{0\}$

□

Существование первообразной в односвязной области

Теорема 25. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, тогда $\forall f \in \mathcal{O}(D) \quad \exists F \in \mathcal{O}(D)\colon\ F' = f$ в D.*

Доказательство:

Фиксируем z_0 и положим $F(z) := \int\limits_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta$, где $\gamma_z : [a,b] \to D$ – любой непрерывный путь с $\gamma_z(a) = z_0$ и $\gamma_z(b) = z$. Это определение не зависит от выбора γ_z по определению односвязной области (28) и теореме Коши о гомотопии (24). При этом для любого круга $B(z_1, r) \subset D$ имеем: $F(z) = F(z_1) + \int\limits_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad \forall z \in B(z_1, r)$, откуда $F' = f$ в $B(z_1, r)$ по теореме (4) о существовании первообразной в круге. В силу произвольности круга $B(z_1, r)$ функция F обладает свойством $F' = f$ во всей области D. □

Лемма о корнях и логарифмах

Лемма 4. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область и $f \in \mathcal{O}(D)$ нигде в D не обращается в 0. Тогда $\exists g \in \mathcal{O}(D)\colon\ f = e^g$ в D и $\exists h \in \mathcal{O}(D)\colon\ f = h^2$ в D.*

Доказательство:

По условию $\dfrac{f'}{f} \in \mathcal{O}(D)$. Следовательно, по теореме (25) о существовании первообразной в односвязной области $\exists \varphi \in \mathcal{O}(D)\colon\ \varphi' = \dfrac{f'}{f}$ в D. Тогда $(fe^{-\varphi})' = f'e^{-\varphi} - f\varphi' e^{-\varphi} = (f' - f\varphi')e^{-\varphi} \equiv 0$ в области D. Следовательно, по утверждению (56) о формуле Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути имеем: $fe^{-\varphi} \equiv C = \text{const}$ в области D (важна линейная связность). Ясно, что $C \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (так как f не имеет нулей). Запишем $C = e^B$ для некоторого $B \in \mathbb{C}$. Тогда $fe^{-\varphi} = e^B$, то есть $f = e^{\varphi + B}$, значит, $g(z) := \varphi(z) + B$ – искомая функция.

Функция $h(z) := e^{\frac{g(z)}{2}}$ – тоже искомая. □

Теорема Римана о конформном отображении

Теорема 26. (Теорема Римана о конформном отображении) *Для любой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, отличной от всей плоскости $\mathbb{C}$, $\exists$ конформное отображение области D на единичный круг $U = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.*

Замечание 24. *Всю плоскость $\mathbb{C}$ нельзя конформно отобразить на U по теореме Лиувилля (7).*

Доказательство:

Фиксируем $z_0 \in D$ и рассмотрим семейство функций $\mathcal{A} := \{$все однолистные функции $f \in \mathcal{O}(D) : \ f(D) \subset U$ и $f(z_0) = 0\}$. Мы покажем, что: 1) $\mathcal{A}$ непусто;

2) $\sup\limits_{f\in\mathcal{A}}|f'(z_0)|$ конечен и достигается на некоторой функции $\Psi\in\mathcal{A}$; 3) Ψ конформно отображает D на U.

1) По условию $D\neq\mathbb{C}$, то есть $\exists a\in\mathbb{C}\backslash D$. При этом $\exists b\neq a:\ \ b\in\mathbb{C}\backslash D$, иначе $D=\mathbb{C}\backslash\{a\}$, а эта область неодносвязна. По лемме (4) о корнях и логарифмах $\exists h\in\mathcal{O}(D)$: $(h(z))^2=\dfrac{z-a}{z-b}$. Функции $h_1:=h$ и $h_2:=-h$ голоморфны в D, однолистны (так как из $h_1(z_1)=h_1(z_2)$ путём возведения в квадрат получаем, что $\dfrac{z_1-a}{z_1-b}=\dfrac{z_2-a}{z_2-b}$, следовательно, $z_1=z_2$), и их образы $h_1(D)$ и $h_2(D)$ не пересекаются (так как из $h_1(z_1)=h_2(z_2)$ путём возведения в квадрат опять получаем, что $\dfrac{z_1-a}{z_1-b}=\dfrac{z_2-a}{z_2-b}$, следовательно, $z_1=z_2$, а тогда $h(z_1)=-h(z_1)$, то есть $h(z_1)=0$, что невозможно для $z_1\in D$).

По утверждению (46) о принципе сохранения области $\forall\zeta_0\in h_2(D)\ \ \exists R>0:$ $B(\zeta_0,R)\subset h_2(D)$. Тогда функция $g(z):=\dfrac{R}{h(z)-\zeta_0}$ однолистна (как композиция однолистных отображений) и $g(D)\subset U$. Тогда функция $f(z)=\dfrac{g(z)-g(z_0)}{1-\overline{g(z_0)}g(z)}\in\mathcal{A}$, так как $f(z_0)=0$.

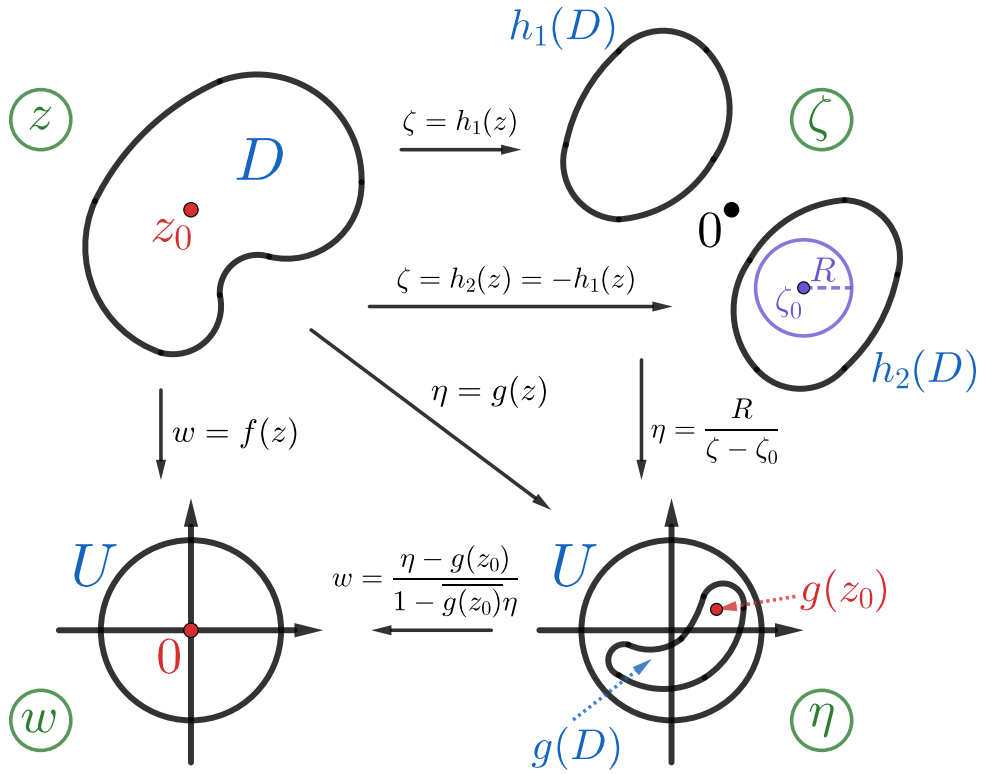

Рис. 15.3: Построение отображения $f\in\mathcal{A}$

2) По определению sup $\exists$ последовательность $f_k\in\mathcal{A}$: $|f_k'(z_0)|\to S:=\sup\limits_{f\in\mathcal{A}}|f'(z_0)|$. По утверждению (54) о принципе компактности $\exists$ подпоследовательность f_{k_l}, рав-

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

номерно сходящаяся на компактах в D. Переобозначая, считаем, что сама последовательность f_k сходится равномерно на компактах в D. Пусть $\Psi := \lim\limits_{k\to\infty} f_k$. Тогда:

· по теореме Вейерштрасса «о рядах» (22) $\Psi \in \mathcal{O}(D)$ и $f_k'(z_0) \to \Psi'(z_0)$ при $k \to \infty$;

· в частности, $|f_k'(z_0)| \to |\Psi'(z_0)|$ при $k \to \infty$, значит, $S = |\Psi'(z_0)|$ – конечное число;

· ясно, что $S > 0$ (так как $S \geq |f_0'(z_0)|$, где $f_0 \in \mathcal{A}$ – функция, построенная в пункте (1) этого доказательства, а у неё $f_0'(z_0) \neq 0$ по критерию локальной обратимости), поэтому $\Psi'(z_0) \neq 0$, откуда, в частности, $\Psi \not\equiv \text{const}$;

· тогда по теореме Гурвица (23) Ψ однолистна;

· при этом $\Psi(D) \subset \overline{U}$ (так как из $|f_k(z)| < 1$ при $k \to \infty$ получается $|\Psi(z)| \leq \leq 1$), но из существования точки $z_1 \in D$ такой, что $|\Psi(z_1)| = 1$ по утверждению (49) о принципе максимума модуля вытекало бы, что $\Psi \equiv \text{const}$, а это не так, следовательно, $\Psi(D) \subset U$;

· $\Psi(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0$.

Таким образом, из трёх последних замечаний следует, что $\Psi \in \mathcal{A}$.

3) По окончательной форме теоремы об обратной функции (21) Ψ как однолистная функция конформно отображает D на $\Psi(D)$. Осталось доказать, что $\Psi(D) = = U$. Для этого покажем, что если $f \in \mathcal{A}$ не принимает значения $b \in U$, то $\exists f_1 \in \mathcal{A}\colon\ |f_1'(z_0)| > |f'(z_0)|$. Применяя это к Ψ, получим $\Psi(D) = U$.

Ясно, что $b \neq 0$ (так как $0 = f(z_0)$ принимается). Тогда по лемме (4) о корнях и логарифмах $\exists h \in \mathcal{O}(D)\colon\ (h(z))^2 = (\varphi_b \circ f)(z)$, где $\varphi_b(\zeta) := \dfrac{\zeta - b}{1 - \bar{b}\zeta}$ – ДЛО U на себя.

Заметим, что $\varphi_c'(0) = 1 - |c|^2$ и $\varphi_c'(c) = \dfrac{1}{1 - |c|^2}\ \ \forall c \in U$.

Обозначим $h(z_0) =: c$ и положим $f_1(z) := (\varphi_c \circ h)(z)$. Тогда f_1 однолистна (h однолистна, так как h^2 однолистна), $f_1(D) \subset U$ по построению и $f_1(z_0) = 0$ по построению. Значит, $f_1 \in \mathcal{A}$. При этом $f_1'(z_0) = \varphi_c'(h(z_0)) \cdot h'(z_0) = \dfrac{1}{1 - |c|^2} \cdot \dfrac{\varphi_b'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)}{2h(z_0)}$ ($h'(z_0)$ выразили, дифференцируя равенство $(h(z))^2 = (\varphi_b \circ f)(z)$). Так как $f(z_0) = = 0$ и $|c|^2 = |h(z_0)|^2 = |\varphi_b(0)| = |b|$, то $f_1'(z_0) = \dfrac{1}{1 - |b|} \cdot \dfrac{\varphi_b'(0) \cdot f'(z_0)}{2h(z_0)} = \dfrac{1}{1 - |b|} \cdot \cdot \dfrac{(1 - |b|^2) f'(z_0)}{2c}$. Берём левую и правую части равенства по модулю и учитываем, что $|c| = \sqrt{|b|}$, получаем: $|f_1'(z_0)| = \left| \dfrac{1}{1 - |b|} \cdot \dfrac{(1 - |b|^2) f'(z_0)}{2c} \right| = \dfrac{(1 - |b|^2)|f'(z_0)|}{(1 - |b|)\sqrt{|b|}} = = \dfrac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} \cdot |f'(z_0)| > |f'(z_0)|$, так как $\dfrac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{|b|}} + \sqrt{|b|} \right) > 1$ при $0 < |b| < 1$.

□

Упражнение 30. *Доказать, что область $D \subset \mathbb{C}$ допускает конформное отображение на U тогда и только тогда, когда D односвязна и $D \neq \mathbb{C}$.*

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ