МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУГУШЕВ ЕВГЕНИЙ ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

Лекция 1 **6**
Введение . . . 6
Кинематика точки. Движение точки по окружности . . . 6
Кинематика точки. Движение точки по кривой . . . 7
Кинематика твёрдого тела . . . 8
Мгновенная угловая скорость твёрдого тела . . . 10

Лекция 2 **11**
Формула Эйлера о распределении скоростей в твёрдом теле (продолжение) 11
Формула Ривальса о распределении ускорений в твёрдом теле . . . 11
Мгновенная ось винта твёрдого тела . . . 12
Плоско-параллельное движение твёрдого тела . . . 14

Лекция 3 **16**
Плоско-параллельное движение твёрдого тела (продолжение) . . . 16
Относительное (сложное) движение. Теорема о сложении скоростей . . . 17
Относительное (сложное) движение. Теорема о сложении ускорений . . . 18
Относительное (сложное) движение. Теорема о сложении угловых скоростей 19
Углы Эйлера . . . 20

Лекция 4 **22**
Кинематические формулы Эйлера . . . 22
Ньютонова механика. Принципы . . . 23
Внутренние и внешние силы . . . 25

Лекция 5 **26**
Динамика материальной точки (в инерциальной системе координат) . . . 26
Основные законы динамики точки . . . 26
Движение точки по прямой под действием силы, зависящей только от положения точки . . . 27
Формула для периода колебаний . . . 28
Фазовый портрет гармонического осциллятора . . . 29
Положение равновесия . . . 30
Линеаризация уравнений движения в окрестности состояния равновесия . 31

Лекция 6 **32**
Асимптотика периода колебаний в окрестности невырожденного устойчивого равновесия . . . 32
Фазовый портрет в окрестности невырожденного положения равновесия . 34
Понятие о фазовом портрете в общем случае . . . 35
Уравнение движения математического маятника . . . 36
Связи . . . 37

Лекция 7 **38**
Связи в механике . . . 38

Конёк Чаплыгина 39
Понятие стационарной связи 40
Виртуальные перемещения 41
Число степеней свободы 42
Реакции связей. Принцип Даламбера-Лагранжа 42

Лекция 8 **44**
Принцип Даламбера-Лагранжа (продолжение) 44
Свободное твёрдое тело 45
Внутренние и внешние силы 45
Основные теоремы динамики для систем с идеальными связями 46

Лекция 9 **48**
Основные теоремы динамики для систем с идеальными связями (продолжение) 48
Общие теоремы динамики в относительном движении 50
Динамика и статика свободного твёрдого тела. Момент инерции твёрдого тела относительно оси 52

Лекция 10 **53**
Момент инерции твёрдого тела относительно оси (продолжение) 53
Кинетическая энергия и кинетический момент для твёрдого тела с неподвижной точкой 54
Матрица тензора инерции 55
Свойства тензора инерции. Главные оси инерции 56
Уравнения движения свободного твёрдого тела 57
Эквивалентность систем сил 57
Условия равновесия 58

Лекция 11 **59**
Небесная механика. Центральные силы 59
Силы, зависящие только от расстояния до центра 60
Интегрирование уравнений движения 61
Законы Кеплера 62
Вывод формулы для гравитационной силы 62

Лекция 12 **64**
Задача Кеплера 64
Интеграл Лапласа 65
Классификация орбит 66
Задача двух тел 68
Задача n тел 68
Устойчивость по Якоби 69

Лекция 13 **71**
Устойчивость по Якоби (продолжение) 71

Динамика относительного движения 71
Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении. Закон сохранения энергии 72
Равномерно вращающаяся система координат 73
Плоская ограниченная круговая задача трёх тел 74

Лекция 14 **77**
Плоская ограниченная круговая задача трёх тел (продолжение) 77
Движение материальной точки около поверхности Земли 78

Лекция 15 **82**
Задача о падении материальной точки 82
Маятник Фуко 83
Гармонический осциллятор на плоскости 83
Маятник Фуко (продолжение) 84

Лекция 16 **86**
Маятник Фуко (продолжение) 86

Лекция 1

Введение

Объектами ньютоновской механики являются материальные точки и твёрдые тела в трёхмерном пространстве.

Материальная точка характеризуется своим радиус-вектором $\vec{r}$ и массой m.

Твёрдое тело можно рассматривать как систему материальных точек $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$, в которой расстояние между любой парой материальных точек неизменно: $||\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|| = C_{ij} = \text{const}$, где t – время.

Принято делить механику на три раздела: кинематика – изучает свойства движения, которые не зависят от причин, вызывающих это движение; статика – изучает условия, при которых механическая система может бесконечно долго оставаться в состоянии равновесия; динамика – изучает свойства движения в общем случае под действием сил. Прямая задача динамики – по заданным силам определить движение; обратная задача динамики – наблюдая за движением механической системы, сделать вывод об устройстве сил, действующих на эту систему.

Кинематика точки. Движение точки по окружности

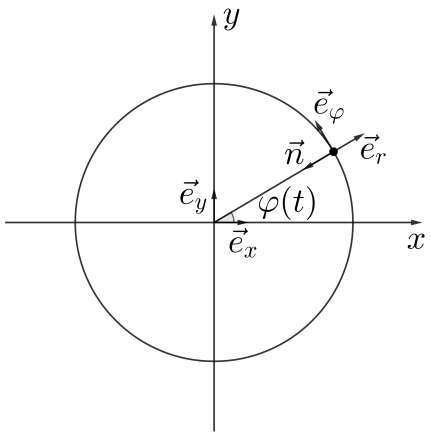

Рис. 1.1. Движение точки по окружности

Введём векторы $\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$ и $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$. Найдём их производные по времени: $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$. Учтём, что $\vec{r} = R\vec{e}_r$.

Найдём скорость: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Найдём ускорение: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$.

Введём обозначения: $K = \dfrac{1}{R}$ – кривизна окружности; $\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi$ – касательный вектор; $\vec{n} = -\vec{e}_r$ – вектор главной нормали. Заметим, что $R\varphi = S$ – длина пройденной дуги, тогда $R\dot{\varphi} = v = ||\vec{V}||$ – модуль скорости точки, а значит, $R\ddot{\varphi} = \dot{v}$. Теперь мы можем переписать формулы для скорости и ускорения в стандартных обозначениях:

$$\vec{V} = v\vec{\tau}; \tag{1.1}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + Kv^2\vec{n}. \tag{1.2}$$

Причём $\dot{v}\vec{\tau}$ – касательная составляющая ускорения, а $Kv^2\vec{n}$ – нормальная составляющая ускорения.

Кинематика точки. Движение точки по кривой

Пусть кривая параметризована каким-то параметром s, то есть радиус-вектор на ней задан как $\vec{r}(s)$. При движении точки по кривой с течением времени значение параметра будет меняться, то есть для точки $\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$. Будем считать, что точка при движении нигде не останавливается, то есть $\dot{\vec{r}} \neq 0$.

Натуральный параметр – такой параметр, для которого $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ (одинарные палочки, как и двойные ранее, обозначают модуль). Чтобы понять смысл этого натурального параметра, рассмотрим скорость: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt}$, тогда $v = \dfrac{ds}{dt}$ (мы считаем, что направление изменения параметра на кривой выбрано так, что $\dfrac{ds}{dt} > 0$). Найдём путь l от некоторой точки P_1 до некоторой точки P_2 на кривой: $l = \displaystyle\int_{P_1}^{P_2} v\,dt = s(P_2) - s(P_1)$. Таким образом, натуральный параметр – это длина кривой, отсчитываемой от некоторой фиксированной заданной точки.

Введём обозначения: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – касательный вектор. Будем обозначать штрихом дифференцирование по натуральному параметру s. Из того, что $(\vec{\tau},\, \vec{\tau}) = 1$ следует, что $(\vec{\tau},\, \vec{\tau}') = 0$, а значит, $\vec{\tau}' \perp \vec{\tau}$. Пусть $K = |\vec{\tau}'|$, $\vec{n} = \dfrac{\tau'}{|\tau'|}$ – главная нормаль кривой в данной точке. Тогда получаем:

$$\vec{\tau}' = K\vec{n}. \tag{1.3}$$

Это так называемая первая формула Френе.

Рассмотрим скорость точки, движущейся по кривой: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = v\vec{\tau}$. Теперь рассмотрим ускорение: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + Kv^2\vec{n}$ (здесь учтено, что $\dot{\vec{\tau}} = \vec{\tau}'v = K\vec{n}v$). Заметим, что мы получили формулы, аналогичные формулам (1.1) и (1.2).

Будем называть соприкасающейся плоскостью плоскость, проходящую через некоторую точку P кривой и натянутую на вектора $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ в этой точке, то есть эту плоскость можно схематично описать как $P + L(\vec{\tau},\, \vec{n})$, где $L(\vec{\tau},\, \vec{n})$ – линейная оболочка векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, тогда соприкасающуюся плоскость можно описать и как $P + L(\vec{V},\, \vec{a})$. Назовём $\dfrac{1}{K}$ радиусом кривизны, отложим от точки P в направлении $\vec{n}$ отрезок длины $\dfrac{1}{K}$ и построим окружность с центром на конце отрезка и радиусом $\dfrac{1}{K}$, это будет соприкасающаяся окружность. Таким образом, приходим к выводу, что при движении точки по прямой её скорость и ускорение устроены так, как если бы она двигалась по соприкасающейся окружности.

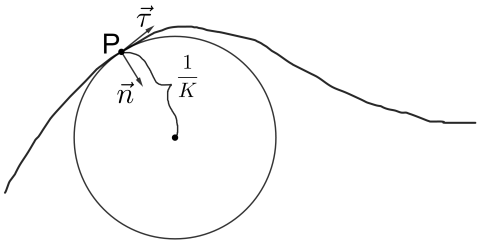

Рис. 1.2. Соприкасающаяся окружность

С помощью касательного вектора $\vec{\tau}$ и вектора главной нормали $\vec{n}$ введём вектор $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ – бинормаль. Заметим, что ускорение имеет только компоненты, направленные по векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$. Тогда приходим к выводу: ускорение лежит в соприкасающейся плоскости, и её проекция на бинормаль равна 0. Можно записать так: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{a}_\tau = \dot{v}\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = kv^2\vec{n}$.

Кинематика твёрдого тела

Твёрдое тело – система точек, расстояние между которыми неизменно. Пусть $A\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – ортонормированный репер, связанный с твёрдым телом.

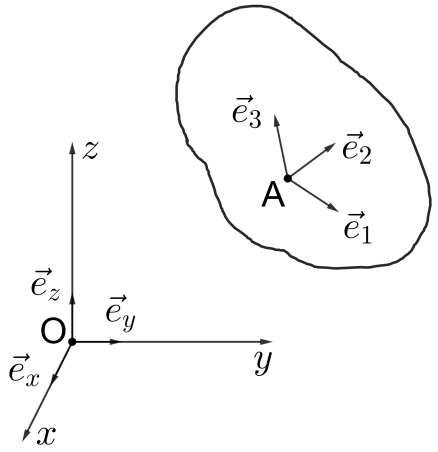

Рис. 1.3. Репер в твёрдом теле и базис

Зададим положение и ориентацию репера с помощью векторов $\vec{OA}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Разложим $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ по базису $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\vec{e}_1,\,\vec{e}_x) & (\vec{e}_1,\,\vec{e}_y) & (\vec{e}_1,\,\vec{e}_z)\\ (\vec{e}_2,\,\vec{e}_x) & (\vec{e}_2,\,\vec{e}_y) & (\vec{e}_2,\,\vec{e}_z)\\ (\vec{e}_3,\,\vec{e}_x) & (\vec{e}_3,\,\vec{e}_y) & (\vec{e}_3,\,\vec{e}_z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$$

Введём обозначение: $R = \begin{pmatrix}(\vec{e}_1,\,\vec{e}_x) & (\vec{e}_1,\,\vec{e}_y) & (\vec{e}_1,\,\vec{e}_z)\\ (\vec{e}_2,\,\vec{e}_x) & (\vec{e}_2,\,\vec{e}_y) & (\vec{e}_2,\,\vec{e}_z)\\ (\vec{e}_3,\,\vec{e}_x) & (\vec{e}_3,\,\vec{e}_y) & (\vec{e}_3,\,\vec{e}_z)\end{pmatrix}$, тогда $R^{-1}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$,

где $R^{-1} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_x, \vec{e}_1) & (\vec{e}_x, \vec{e}_2) & (\vec{e}_x, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_y, \vec{e}_1) & (\vec{e}_y, \vec{e}_2) & (\vec{e}_y, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_z, \vec{e}_1) & (\vec{e}_z, \vec{e}_2) & (\vec{e}_z, \vec{e}_3) \end{pmatrix}$ – матрица разложения векторов $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Заметим, что $R^{-1} = R^T$, а значит, R – ортогональная матрица.

$RR^T = E \;\Rightarrow\; \det(RR^T) = 1 \;\Rightarrow\; (\det R)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det R = \pm 1$. Если непрерывным образом передвинуть твёрдое тело так, чтобы репер $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ совместился с базисом $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, то получим, что $\det R = 1$, а так как при непрерывном перемещении $\det R$ будет инвариантом, то мы будем рассматривать только ортогональные матрицы R, определитель которых равен 1. Такие матрицы образуют группу $SO(3)$ – специальную группу ортогональных матриц.

Таким образом, положение твёрдого тела в пространстве задаётся с помощью 6 параметров: 3 координаты положения точки A, 2 координаты для задания положения вектора $\vec{e}_1$ на единичной сфере и ещё 1 координата для угла поворота вектора $\vec{e}_2$ вокруг вектора $\vec{e}_1$ (вектор $\vec{e}_3$ будет задан автоматически как $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$).

Теорема 1. ***(Теорема Шаля о конечных движениях твёрдого тела)*** *Любое перемещение твёрдого тела в пространстве представляет собой комбинацию параллельного сдвига и поворота тела вокруг некоторой оси (на некоторый угол).*

Чтобы выполнить перемещение тела из начала координат в некоторое заданное положение, характеризуемое репером $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, исходящим из точки A, надо:

1) Выполнить сдвиг тела на вектор $\vec{OA}$;

2) Совершить такой поворот твёрдого тела вокруг точки A, чтобы векторы $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ перешли в векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, то есть совершить ортогональное преобразование $\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$.

Нам надо убедиться эта ортогональная матрица R может быть описана как матрица поворота. Для этого выберем систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы вектор $\vec{e}_z$ был направлен по оси поворота.

Докажем, что у матрицы R, у которой $\det R = 1$ существует собственное значение, равное 1. Будем обозначать определитель двумя вертикальными линиями. Собственные значения находятся из уравнения $|R - \lambda E| = 0$. Мы знаем, что решениями этого уравнения являются 3 собственных значения λ_1, λ_2, λ_3, причём $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |R| = 1$. Отсюда следует, что все $\lambda_i \neq 0$.

Покажем, что если λ – собственное значение, то и λ^{-1} – тоже собственное значение. При транспонировании матрицы определитель не меняется $\Rightarrow$ из $|R - \lambda E| = 0$ получаем, что $|R^T - \lambda E| = 0$. Домножим последнее равенство на определитель $|R|$, и, используя свойство, что произведение определителей равно определителю произведения, а также учитывая, что $RR^T = E$, получим $|E - \lambda R| = 0$. Выносим λ из определителя: $\lambda^3|\lambda^{-1}E - R| = 0 \;\Rightarrow\; |R - \lambda^{-1}E| = 0$, а значит, λ^{-1} является собственным значением.

Введём обозначения: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda^{-1}$, $\lambda_3 = \mu$, тогда $\lambda\lambda^{-1}\mu = 1 \;\Rightarrow\; \mu = 1$. Таким образом, у ортогональной матрицы одно из собственных значений всегда равно 1.

Пусть μ – собственное значения для вектора $\vec{e}_z$, тогда $R\vec{e}_z = \vec{e}_z$. Но вектор $\vec{e}_z$ должен переходить в вектор $\vec{e}_3$, а значит, матрица выглядит следующим об-

разом: $R = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, причём матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ тоже является ортогональной, значит, $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$, $ad - bc = 1$. Осталось показать, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является матрицей поворота, то есть представляется в виде $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow \exists\, \alpha,\, \beta$: $a = \cos\alpha$, $b = -\sin\alpha$, $c = \sin\beta$, $d = \cos\beta$. $ac + bd = 0$, $ad - bc = 1 \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = 0$, $\cos(\alpha - \beta) = 1$. Тогда $\alpha = \beta \mod 2\pi$.

Замечание: можно так подобрать точку A, что вектор сдвига $(\vec{OA})$ будет коллинеарен оси поворота. По сути это означает, что движения твёрдого тела имеют «винтовой» характер.

Мгновенная угловая скорость твёрдого тела

Введём вектор $\vec{\omega} = (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_2)\vec{e}_3 + (\dot{\vec{e}}_2, \vec{e}_3)\vec{e}_1 + (\dot{\vec{e}}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_2$, он называется мгновенной угловой скоростью твёрдого тела. Изучим его свойства. При этом будем учитывать, что $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

Рассмотрим $\omega \times \vec{e}_1 = (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_2)\vec{e}_2 - (\dot{\vec{e}}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_3$. Учтём, что $(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow (\dot{\vec{e}}_3, \vec{e}_1) = -(\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_3)$. Тогда $\omega \times \vec{e}_1 = (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_3)\vec{e}_3$. Теперь учтём, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_1) = 0$. Тогда можем добавить нулевое слагаемое: $\omega \times \vec{e}_1 = (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_3)\vec{e}_3 + (\dot{\vec{e}}_1, \vec{e}_1)\vec{e}_1$, а это есть разложение вектора $\dot{\vec{e}}_1$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Тогда получим формулы:

$$\dot{\vec{e}}_i = \omega \times \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Она называются формулами Пуассона (случаи для $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ получаются аналогично).

Рассмотрим некоторые точки A и B твёрдого тела, разложим вектор $\vec{AB}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$: $\vec{AB} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. При движении векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ могут меняться, а числа x_1, x_2, x_3 остаются постоянными, поскольку тело твёрдое, тогда $\dot{\vec{AB}} = x_1\dot{\vec{e}}_1 + x_2\dot{\vec{e}}_2 + x_3\dot{\vec{e}}_3$. Учитывая формулы (1.4), получим:

$$\dot{\vec{AB}} = \vec{\omega} \times \vec{AB}. \tag{1.5}$$

Пусть $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ – радиус-векторы точек A и B, тогда $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$. Продифференцировав это равенство по времени, получим формулу Эйлера:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}. \tag{1.6}$$

Лекция 2

Формула Эйлера о распределении скоростей в твёрдом теле (продолжение)

При движении твёрдого тела в любой момент времени t найдётся вектор $\vec{\omega}$ (мгновенная угловая скорость) такой, что для любых точек A и B твёрдого тела выполнена формула Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$.

Утверждение 1. *Если твёрдое тело невырождено (то есть в нём существуют 3 точки, не лежащие на одной прямой), то вектор $\vec{\omega}$ единственен.*

Доказательство:

1) $\vec{\omega}$ существует – доказано, так как ранее была выписана формула, напрямую задающая вектор $\vec{\omega}$.

2) Докажем единственность. Пусть существует $\vec{\omega}^*$, для которого выполнена формула Эйлера, то есть для любых двух точек A и B твёрдого тела $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}^* \times \vec{AB}$. Вычтем это равенство из (1.6): $0 = 0 + (\vec{\omega} - \vec{\omega}^*) \times \vec{AB}$, значит, $\vec{\omega} - \vec{\omega}^* \parallel \vec{AB}$. Если в качестве точки B взять сначала некоторую точку B_1, а затем некоторую точку B_2 так, чтобы $\vec{AB}_1 \nparallel \vec{AB}_2$, то из того, что $\vec{\omega} - \vec{\omega}^* \parallel \vec{AB}_1$ и $\vec{\omega} - \vec{\omega}^* \parallel \vec{AB}_2$ следует, что $\vec{\omega} - \vec{\omega}^* = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\omega} = \vec{\omega}^*$. □

Покажем, что в случае вырожденного твёрдого тела (то есть отрезка) вектор $\vec{\omega}$ не единственен. Возьмём, например, в качестве точек A и B концы отрезка, и рассмотрим вектор $\vec{\omega}^* = \vec{\omega} + \lambda \vec{AB}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Запишем формулу Эйлера для $\vec{\omega}^*$: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + (\vec{\omega} + \lambda \vec{AB}) \times \vec{AB} \;\Rightarrow\; \vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega \times \vec{AB}$. Таким образом, формула Эйлера будет выполняться для любых векторов типа $\vec{\omega}^*$.

В качестве примера рассмотрим угловую скорость твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. По определению говорят, что твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси $\vec{AB}$, если в нём существуют 2 различные неподвижные точки A и B, то есть такие, что $\vec{V}_A = \vec{V}_B = 0$. Запишем формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \;\Rightarrow\; \vec{\omega} \times \vec{AB} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\omega} \parallel \vec{AB}$, то есть $\vec{\omega} = \alpha \vec{AB}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Например, если твёрдое тело вращается вокруг оси Oz, то $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, где ω – алгебраическое значение угловой скорости (с учётом знака).

Формула Ривальса о распределении ускорений в твёрдом теле

Рассмотрим некоторые точки A и B твёрдого тела. $\vec{a}_A = \dot{\vec{V}}_A$, $\vec{a}_B = \dot{\vec{V}}_B$, причём мы уже знаем, что $\dot{\vec{AB}} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$. Введём обозначение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ – угловое ускорение. Запишем формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$, и, продифференцировав её по времени, получим:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}). \tag{2.1}$$

Это равенство называется формула Ривальса. Слагаемое $\vec{\varepsilon} \times \vec{AB}$ называется вращательным ускорением, а слагаемое $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})$ называется осестремительным ускорением.

Разберёмся, почему вектор $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})$ называется осестремительным ускорением. Проведём через точку A ось l, коллинеарную вектору $\vec{\omega}$. Спроецируем точку B на ось l и назовём получившуюся точку A'. Введём направляющий вектор оси l и назовём его $\vec{e}$: $\vec{e} = \dfrac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Воспользуемся формулой «$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$»: $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{AB}) - \vec{AB}\omega^2 = -\omega^2 \left(\vec{AB} - \vec{e}(\vec{e}, \vec{AB})\right)$. Содержимое скобок представляет из себя разность вектора $\vec{AB}$ и его проекции на ось l, то есть содержимое скобок равно вектору $\vec{A'B}$. Тогда $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) = -\omega^2 \vec{A'B}$, а значит, этот вектор направлен по перпендикуляру к оси l, поэтому он и называется осестремительным ускорением.

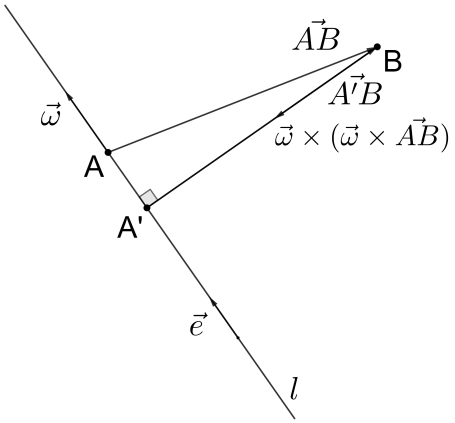

Рис. 2.1. Осестремительное ускорение

Мгновенная ось винта твёрдого тела

Мгновенная ось винта твёрдого тела – это прямая l такая, что для любой точки $A \in l$ выполнено, что $\vec{V}_A \parallel l$, а также $\vec{\omega} \parallel l$.

Рассмотрим две точки A и B, лежащие на мгновенной оси винта l, и запишем для формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$. По построению $\vec{\omega} \parallel l$ и $\vec{AB} \parallel l \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A$. Таким образом, скорости всех точек, лежащих на прямой l, равны между собой.

Докажем, что если $\vec{\omega} \neq 0$, то мгновенная винтовая ось существует. Сначала просто допустим, что винтовая ось l существует. Возьмём не на винтовой оси некоторую точку A и построим перпендикуляр AB к оси l. Тогда $(\vec{\omega}, \vec{AB}) = 0$ и $\vec{\omega} \times \vec{V}_B = 0$. Запишем формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$, и умножим её слева векторно на $\vec{\omega}$: $0 = \vec{\omega} \times \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})$. Для последнего слагаемого применим формулу «$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$»: $0 = \vec{\omega} \times \vec{V}_A + \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{AB}) - \vec{AB}\omega^2$. Но $(\vec{\omega}, \vec{AB}) = 0 \Rightarrow 0 = \vec{\omega} \times \vec{V}_A - \vec{AB}\omega^2 \Rightarrow \vec{AB} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{V}_A}{\omega^2}$. То есть если предположить, что мгновенная винтовая ось существует, то она проходит через точку B, которая строится с помощью вектора $\vec{AB} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{V}_A}{\omega^2}$. Так что мы можем по этой формуле, отталкиваясь от точки A,

найти точку B. Построим точку B и проведём через неё прямую l, параллельную $\vec{\omega}$, и покажем, что эта прямая является мгновенной винтовой осью. Для этого надо показать, что $l \parallel \vec{\omega}$ (автоматически верно по построению) и что для произвольной точки B', лежащей на l, её скорость $\vec{V}_{B'} \parallel l$ (или, что то же самое, $\vec{V}_{B'} \parallel \vec{\omega}$).

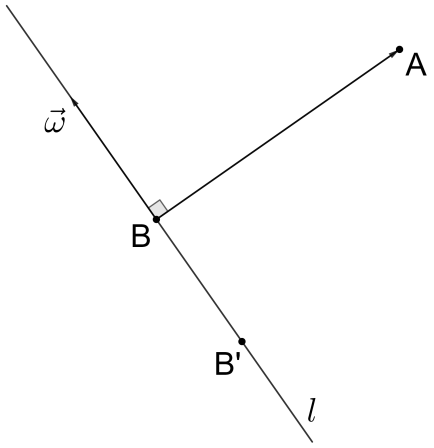

Рис. 2.2. Мгновенная ось винта твёрдого тела

Используем формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$. $\vec{AB} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{V}_A}{\omega^2} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A + \dfrac{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{V}_A)}{\omega^2}$. Снова применяем формулу «$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$»: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \dfrac{\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{V}_A)}{\omega^2} - \dfrac{\vec{V}_A \omega^2}{\omega^2} = \dfrac{\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{V}_A)}{\omega^2}$. Таким образом, $\vec{V}_B \parallel \vec{\omega}$. Для произвольной точки $B' \in l$ имеем: $\vec{BB'} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{BB'} = 0$. По формуле Эйлера $\vec{V}_{B'} = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{BB'} \Rightarrow \vec{V}_{B'} = \vec{V}_B \Rightarrow \vec{V}_{B'} \parallel \vec{\omega}$.

Применим формулу Эйлера для точки A: $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{BA}$. Слагаемое $\vec{\omega} \times \vec{BA}$ даёт такую скорость, как если бы тело вращалось вокруг оси l, а слагаемое $\vec{V}_B$ создаёт сдвиг вдоль оси l. Получается, что распределение скоростей такое же, как если бы тело совершало винтовое движение вокруг мгновенной винтовой оси l (но тело не совершает винтовое движение, просто в данный момент времени скорости распределены именно таким образом).

Мы поняли, что для любой точки, лежащей на оси l, скорость равна $\vec{V}_B = \lambda \vec{\omega}$, где $\lambda = \dfrac{(\vec{\omega}, \vec{V}_A)}{\omega^2}$ – параметр винта. Смысл этого параметра в том, что $2\pi\lambda$ – это то смещение, которое прошло бы твёрдое тело, если б оно совершило 1 оборот, вращаясь с теми же параметрами (называется шаг винта), так как $2\pi\lambda = \dfrac{2\pi}{\omega}\left(\dfrac{\vec{\omega}}{\omega}, \vec{V}_A\right) = T\left(\dfrac{\vec{\omega}}{\omega}, \vec{V}_A\right)$, где T – период вращения, $\left(\dfrac{\vec{\omega}}{\omega}, \vec{V}_A\right)$ – проекция скорости $\vec{V}_A$ в направлении $\vec{\omega}$.

Если в некоторый момент времени $\omega \neq 0$ и $\lambda \neq 0$, то такое движение называется мгновенно-винтовым.

Если в некоторый момент времени $\omega \neq 0$, а $\lambda = 0$, то такое движение называется

мгновенно-вращательным.

Если в некоторый момент времени $\omega = 0$, то такое движение называется мгновенно-поступательным.

Замечание: все точки, не лежащие на мгновенной винтовой оси, имеют скорости, неколлинеарные вектору $\vec{\omega}$, поэтому если $\vec{V}_B = 0$, то B лежит на мгновенной винтовой оси, так как $\vec{V}_B \parallel \vec{\omega}$. Если в двух точках твёрдого тела скорости равны 0, то мгновенную винтовую ось можно построить проходящей через эти две точки.

Плоско-параллельное движение твёрдого тела

Тело совершает плоско-параллельное движение, если в любой момент времени для любой точки твёрдого тела A её скорость $\vec{V}_A$ параллельно некоторой неподвижной плоскости Π.

Нам для изучения движения достаточно рассматривать не всё тело целиком, а только какое-нибудь его сечение плоскостью Π. Так и будем поступать.

При плоско-параллельном движении вектор $\vec{\omega} \perp \Pi$. Докажем это. Разложим вектор угловой скорости на 2 составляющих: нормальную $\vec{\omega}_n$ и касательную $\vec{\omega}_\tau$ по отношению к плоскости Π, тогда $\vec{\omega} = \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_\tau$. Возьмём в сечении твёрдого тела плоскостью Π точки A и B и запишем для них формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_n \times \vec{AB} + \vec{\omega}_\tau \times \vec{AB}$. По построению $\vec{V}_B \parallel \Pi$, $\vec{V}_A \parallel \Pi$, $\vec{\omega}_n \times \vec{AB} \parallel \Pi$, $\vec{\omega}_\tau \times \vec{AB} \perp \Pi$. Но так как в равенстве три вектора параллельны плоскости Π, то и оставшийся четвёртый вектор $\vec{\omega}_\tau \times \vec{AB}$ должен быть тоже параллелен плоскости Π. Таким образом, $\vec{\omega}_\tau \times \vec{AB} \perp \Pi$ и $\vec{\omega}_\tau \times \vec{AB} \parallel \Pi \Rightarrow \vec{\omega}_\tau \times \vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{\omega}_\tau = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \perp \Pi$.

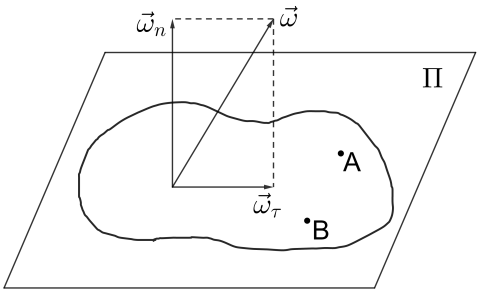

Рис. 2.3. Плоско-параллельное движение

Если $\vec{\omega} \neq 0$, то существует такая точка C твёрдого тела, что $\vec{V}_C = 0$ (в данный момент времени). Докажем это. Так как $\vec{\omega} \neq 0$, то существует мгновенная винтовая ось l, которая параллельна $\vec{\omega}$, а значит, перпендикулярна плоскости Π. Пусть l пересекает плоскость Π в некоторой точке C. Мы знаем, что для точки C, лежащей на мгновенной винтовой оси l, $\vec{V}_C \parallel \vec{\omega}$. Также мы знаем, что при плоско-параллельном движении $\vec{V}_C \parallel \Pi$. Но, как было доказано выше, $\vec{\omega} \perp \Pi \Rightarrow \vec{V}_C = 0$. Такая точка C называется мгновенным центром скоростей.

Поймём, как находить мгновенный центр скоростей C. Выберем произвольную точку A в сечении твёрдого тела и запишем формулу Эйлера: $\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{CA}$. По определению $\vec{V}_C = 0 \Rightarrow \vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{CA} \Rightarrow \vec{CA} \perp \vec{V}_A$. Таким образом, мгновенный центр скоростей лежит на прямой, проходящей через произвольную точку A

твёрдого тела и ортогональной скорости $\vec{V}_A$ этой точки. Если мы можем построить такие прямые для двух точек, то мгновенный центр скоростей будет находиться на пересечении этих прямых.

Рассмотрим качение твёрдого тела без проскальзывания по неподвижной кривой γ. Это значит, что в любой момент времени должны выполняться два условия: 1) контур твёрдого тела касается кривой γ в одной точке; 2) скорость точки твёрдого тела, которой оно касается кривой γ, равна 0. В этом случае точка касания является мгновенным центром скоростей. Траектория мгновенного центра скоростей в абсолютном пространстве называется неподвижной центроидой, а траектория мгновенного центра скоростей в твёрдом теле называется подвижной центроидой.

При плоско-параллельном движении твёрдого тела подвижная центроида катится без проскальзывания по неподвижной центроиде.

Лекция 3

Плоско-параллельное движение твёрдого тела (продолжение)

Утверждение 2. *При плоско-параллельном движении твёрдого тела: 1) в любой момент времени подвижная центроида касается неподвижной центроиды; 2) подвижная центроида совершает качение без проскальзывания по неподвижной центроиде.*

Доказательство:

Пусть C – мгновенный центр скоростей. Так как $\vec{V}_C = 0$, то из первого утверждения вытекает второе. В точке C присутствуют сразу две точки, «слившиеся» в одну: C_1 – точка твёрдого тела, C_2 – точка неподвижной центроиды. Вектор скорости $\vec{V}_{C_2}$ касается неподвижной центроиды. В абсолютном пространстве $\vec{V}_{C_1\,\text{абс.}} = 0$, так как C_1 – мгновенный центр скоростей твёрдого тела, а относительно твёрдого тела вектор скорости $\vec{V}_{C_1\,\text{отн. т. т.}}$ касается подвижной центроиды. Далее будет использоваться теорема о сложении скоростей, которая формулируется и доказывается чуть позже. $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{\text{абс.}}$, $V_{C_1\,\text{отн. т. т.}} = \vec{V}_{\text{отн.}}$, $\vec{V}_{C_1\,\text{абс.}} = \vec{V}_{\text{пер.}}$, тогда по теореме о сложении скоростей получаем: $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_1} + 0 \;\Rightarrow\; \vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_1} \;\Rightarrow$ векторы $\vec{V}_{C_1}$ и $\vec{V}_{C_2}$ совпадают, но каждый из них касается своей центроиды, а значит, подвижная центроида касается неподвижной центроиды. □

В качестве примера можно рассмотреть отрезок AB длины l, опирающийся на координатные оси Ox и Oy. Мгновенный центр скоростей C находится на пересечении перпендикуляров к $\vec{V}_A$ и к $\vec{V}_B$. Так как $A_x^2 + B_y^2 = l^2$ и точка C имеет координаты $(A_x,\, B_y)$, то точка C лежит на дуге окружности радиуса l с центром в точке O – это неподвижная центроида. Разберёмся, что представляет из себя подвижная центроида. Перейдём в систему координат, связанную с отрезком AB. Заметим, что точка C лежит на геометрическом месте точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом, то есть точка C лежит на окружности, для которой этот отрезок является диаметром, а значит, это окружность радиуса $\dfrac{l}{2}$ с центром в середине отрезка AB. Таким образом, движение отрезка можно задать прокатыванием окружности радиуса $\dfrac{l}{2}$ по окружности радиуса l.

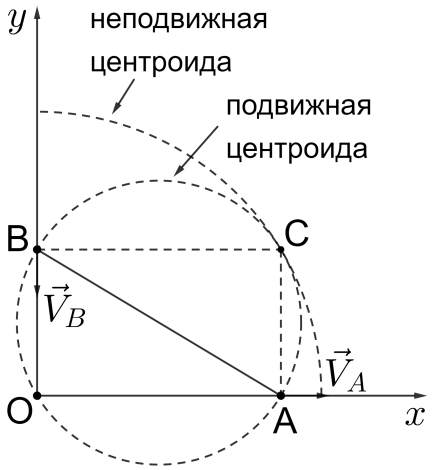

Рис. 3.1. Неподвижная и подвижная центроиды отрезка

Относительное (сложное) движение. Теорема о сложении скоростей

Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат, а $O_1x_1x_2x_3$ – движущаяся система координат, пусть $\vec{R}(t) = \vec{OO_1}$. Рассмотрим некоторую движущуюся точку A, имеющую в системе координат $Oxyz$ радиус вектор $\vec{r}(t)$, а в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ – радиус-вектор $\vec{\rho}(t)$. Тогда $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{\rho}(t)$.

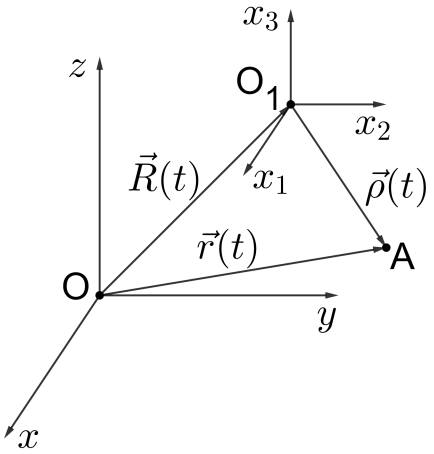

Рис. 3.2. Подвижная и неподвижная системы координат

Разложим некоторые из этих векторов по базисным векторам: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ (в $Oxyz$), $\vec{\rho} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ (в $O_1x_1x_2x_3$). Далее будем считать, что сумма по индексу i ведётся от 1 до 3. Тогда $\vec{\rho} = \sum x_i\vec{e}_i$. Найдём абсолютную скорость точки A: $\vec{V}_{\text{абс.}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$. Продифференцируем по времени $\vec{\rho}$: $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = \sum \dot{x}_i\vec{e}_i + \sum x_i\dot{\vec{e}}_i$. Слагаемое $\sum \dot{x}_i\vec{e}_i$ называется относительной скоростью: $\vec{V}_{\text{отн.}} = \sum \dot{x}_i\vec{e}_i$ (это такая скорость точки A, которую мы бы наблюдали в подвижной системе координат, если бы векторы $\vec{e}_i$ не менялись).

Теперь продифференцируем равенство $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{\rho}(t)$ по времени: $\vec{V}_{\text{абс.}} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_{\text{отн.}} + \sum x_i \dot{\vec{e}}_i$. Введём обозначение: $\vec{V}_{\text{пер.}} = \dot{\vec{R}} + \sum x_i \dot{\vec{e}}_i$ – это скорость, связанная с движением подвижной системы отсчёта относительно неподвижной. Применим формулу Пуассона: $\vec{V}_{\text{пер.}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \sum x_i \vec{e}_i = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{O_1 A}$ – получили формулу Эйлера.

Теорема 2. ***(Теорема о сложении скоростей)***

$$\vec{V}_{абс.} = \vec{V}_{отн.} + \vec{V}_{пер.}. \tag{3.1}$$

Относительное (сложное) движение. Теорема о сложении ускорений

По определению $\vec{a}_{\text{абс.}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ – абсолютное ускорение. Выпишем равенство, полученное в предыдущем пункте: $\vec{V}_{\text{абс.}} = \dot{\vec{R}} + \sum \dot{x}_i \vec{e}_i + \sum x_i \dot{\vec{e}}_i$. Продифференцируем его по времени: $\vec{a}_{\text{абс.}} = \ddot{\vec{R}} + \sum \ddot{x}_i \vec{e}_i + \sum \dot{x}_i \dot{\vec{e}}_i + \sum \dot{x}_i \dot{\vec{e}}_i + \sum x_i \ddot{\vec{e}}_i$. Слагаемое $\sum \ddot{x}_i \vec{e}_i$ отвечает ускорению, которое можно наблюдать из системы отсчёта, связанной с твёрдым телом (подвижной системы отсчёта), значит, $\vec{a}_{\text{отн.}} = \sum \ddot{x}_i \vec{e}_i$ – относительное ускорение. Введём обозначение $\vec{a}_{\text{кор.}} = 2\sum \dot{x}_i \dot{\vec{e}}_i$ – кориолисово ускорение. Остальные слагаемые получаются, если предполагать, что координаты x_i фиксированы, значит, $\vec{a}_{\text{пер.}} = \ddot{\vec{R}} + \sum x_i \ddot{\vec{e}}_i$ – переносное ускорение. Таким образом, $\vec{a}_{\text{абс.}} = \vec{a}_{\text{отн.}} + \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{кор.}}$.

Разберёмся, какой смысл имеет $\vec{a}_{\text{пер.}}$. По формуле Пуассона $\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \;\Rightarrow\; \ddot{\vec{e}}_i = \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i) \;\Rightarrow\; \sum x_i \ddot{\vec{e}}_i = \dot{\vec{\omega}} \times \sum x_i \vec{e}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \sum x_i \vec{e}_i)$. Учитывая, что $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ и $\sum x_i \vec{e}_i = \vec{\rho}$, получаем: $\sum x_i \ddot{\vec{e}}_i = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$. Учитывая, что $\ddot{\vec{R}} = \vec{a}_{O_1}$ и $\vec{\rho} = \vec{O_1 A}$, получаем: $\vec{a}_{\text{пер.}} = \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{O_1 A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O_1 A})$ – это и есть формула Ривальса для распределения ускорений в твёрдом теле, значит, $\vec{a}_{\text{пер.}}$ есть ускорение точки твёрдого тела, совпадающей в данный момент с точкой A.

Теперь разберёмся со смыслом кориолисова ускорения: $\vec{a}_{\text{кор.}} = 2\sum \dot{x}_i \dot{\vec{e}}_i = 2\sum \dot{x}_i (\vec{\omega} \times \vec{e}_i) = 2(\vec{\omega} \times \sum \dot{x}_i \vec{e}_i)$. Учитывая, что $\vec{V}_{\text{отн.}} = \sum \dot{x}_i \vec{e}_i$, получаем: $\vec{a}_{\text{кор.}} = 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн.}})$.

Теорема 3. ***(Теорема о сложении ускорений)***

$$\vec{a}_{абс.} = \vec{a}_{отн.} + \vec{a}_{пер.} + \vec{a}_{кор.}. \tag{3.2}$$

Пример: из-за вращения Земли при течении реки с севера на юг в северном полушарии кориолисово ускорение направлено на восток, поэтому правый берег реки (если стоять лицом по течению) подмывается больше левого, так как он должен толкать воду на восток.

Относительное (сложное) движение. Теорема о сложении угловых скоростей

Теперь рассмотрим неподвижную систему координат $Oxyz$ (1) и две подвижных системы координат: $O'x'y'z'$ (2) и $O''x''y''z''$ (3), причём последняя связана с твёрдым телом.

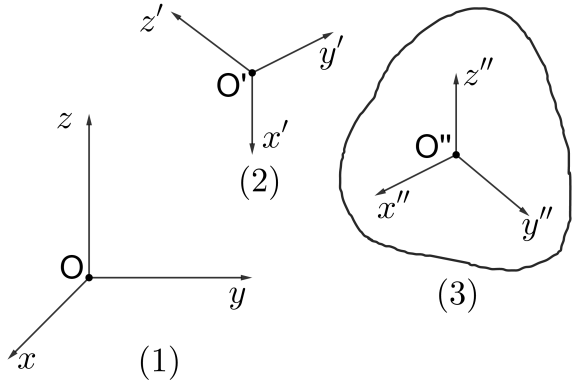

Рис. 3.3. Неподвижная и две подвижных системы координат, одна из которых связаны с твёрдым телом

Введём в рассмотрение несколько угловых скоростей: $\vec{\omega}_{3\,\text{отн.}\,1} = \vec{\omega}_{\text{абс.}}$ – угловая скорость третьей системы относительно первой (то есть относительно абсолютного пространства), является абсолютной угловой скоростью твёрдого тела; $\vec{\omega}_{3\,\text{отн.}\,2} = \vec{\omega}_{\text{отн.}}$ – угловая скорость третьей системы относительно второй, является относительной угловой скоростью твёрдого тела относительно системы (2); $\vec{\omega}_{2\,\text{отн.}\,1} = \vec{\omega}_{\text{пер.}}$ – угловая скорость второй системы относительно первой (то есть относительно абсолютного пространства), является переносной угловой скоростью твёрдого тела в системе (2).

Теорема 4. ***(Теорема о сложении угловых скоростей)***

$$\vec{\omega}_{абс.} = \vec{\omega}_{отн.} + \vec{\omega}_{пер.}. \tag{3.3}$$

Доказательство:

Рассмотрим некоторые две точки A и B твёрдого тела. По формуле Эйлера для каждой из систем координат получим: $\vec{V}_{B\,\text{абс.}} = \vec{V}_{A\,\text{абс.}} + \vec{\omega}_{\text{абс.}} \times \vec{AB}$; $\vec{V}_{B\,\text{отн.}} = \vec{V}_{A\,\text{отн.}} + \vec{\omega}_{\text{отн.}} \times \vec{AB}$; $\vec{V}_{B\,\text{пер.}} = \vec{V}_{A\,\text{пер.}} + \vec{\omega}_{\text{пер.}} \times \vec{AB}$. По теореме о сложении скоростей $\vec{V}_{\text{абс.}} = \vec{V}_{\text{отн.}} + \vec{V}_{\text{пер.}} \Rightarrow \vec{V}_{\text{абс.}} - \vec{V}_{\text{отн.}} - \vec{V}_{\text{пер.}} = 0$, применим это равенство к точкам B и A: $0 = 0 + (\vec{\omega}_{\text{абс.}} - \vec{\omega}_{\text{отн.}} - \vec{\omega}_{\text{пер.}}) \times \vec{AB}$ для любых A и B в третьей системе координат $\Rightarrow \vec{\omega}_{\text{абс.}} = \vec{\omega}_{\text{отн.}} + \vec{\omega}_{\text{пер.}}$. □

Перепишем теорему о сложении угловых скоростей в других обозначениях: $\vec{\omega}_{3\,\text{отн.}\,1} = \vec{\omega}_{2\,\text{отн.}\,1} + \vec{\omega}_{3\,\text{отн.}\,2}$. Теперь рассмотрим не 3 системы координат, а n систем координат, тогда по индукции можно показать, что $\vec{\omega}_{n\,\text{отн.}\,1} = \vec{\omega}_{2\,\text{отн.}\,1} + \vec{\omega}_{3\,\text{отн.}\,2} + \ldots + \vec{\omega}_{n-1\,\text{отн.}\,n-2} + \vec{\omega}_{n\,\text{отн.}\,n-1}$.

Углы Эйлера

Рассмотрим неподвижную систему координат $Oxyz$ и систему координат, связанную с твёрдым телом, $Ox_1x_2x_3$.

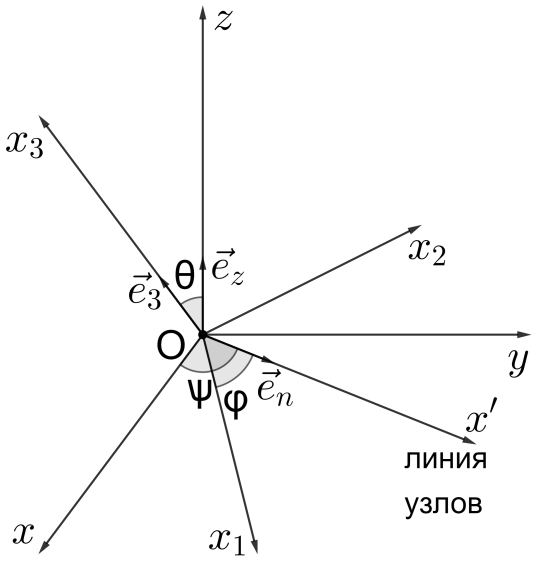

Рис. 3.4. Углы Эйлера

Плоскость Oxy пересекается с плоскостью Ox_1x_2 по некоторой прямой, назовём её линией узлов Ox'. Эта прямая ориентированная, введём на ней направляющий вектор $\vec{e}_n$. Этот вектор лежит в плоскостях Oxy и Ox_1x_2, а значит, $\vec{e}_n \perp \vec{e}_z$ и $\vec{e}_n \perp \vec{e}_3 \;\Rightarrow\; \vec{e}_n = \dfrac{\vec{e}_z \times \vec{e}_3}{|\vec{e}_z \times \vec{e}_3|}$.

Пусть $\psi \in [0;\, 2\pi)$ – угол между Ox и Ox', он называется углом прецессии. Пусть $\theta \in (0;\, \pi)$ – угол между Oz и Ox_3, он называется углом нутации. Пусть $\varphi \in [0;\, 2\pi)$ – угол между Ox' и Ox_1, он называется углом собственного вращения.

Переведём $Oxyz$ в $Ox_1x_2x_3$ тремя вращениями (будем называть $Oxyz$ системой координат (1), а $Ox_1x_2x_3$ – системой координат (4), системы координат (2) и (3) появятся в промежуточных состояниях):

1) Совершаем поворот вокруг оси Oz на угол ψ, тогда система $Oxyz$ перейдёт в систему $Ox'y'z$ (получили систему координат (2));

2) Поворачиваем систему координат (2) вокруг линии узлов на угол θ так, чтобы ось Oz перешла в ось Ox_3, тогда система $Ox'y'z$ перейдёт в систему $Ox'y''x_3$ (получили систему координат (3));

3) Совершаем поворот системы (3) вокруг оси Ox_3 на угол φ так, чтобы ось Ox' перешла в ось Ox_1, тогда система $Ox'y''x_3$ перейдёт в систему $Ox_1y_1z_1$ (получили систему координат (4)).

Заметим, что бывают ситуации, когда при выписанных нами обозначениях мы не сможем ввести углы Эйлера. Например, если $\vec{e}_3 \parallel \vec{e}_z$, то их векторное произведение равно 0, поэтому линию узлов определить будет нельзя.

При движении твёрдого тела, сохраняющем неподвижной точку O, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, тогда $\omega_{2\,\text{отн.}\,1} = \dot{\psi}\vec{e}_z$, $\omega_{3\,\text{отн.}\,2} = \dot{\theta}\vec{e}_n$, $\omega_{4\,\text{отн.}\,3} = \dot{\varphi}\vec{e}_3$. По теореме о

сложении угловых скоростей $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_n + \dot{\varphi}\vec{e}_3$.

Лекция 4

Кинематические формулы Эйлера

При движении твёрдого тела, сохраняющем неподвижной точку O, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, при этом $\vec{\omega}(t)$ – угловая скорость твёрдого тела. Распишем этот вектор по координатам в системе $Oxyz$ и в системе $Ox_1x_2x_3$: $\vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3$. Традиционно вместо обозначений ω_1, ω_2, ω_3 используются обозначения p, q, r соответственно, тогда $\vec{\omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$. Мы хотим найти зависимость p, q, $r(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$.

По теореме о сложении угловых скоростей $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{2\,\text{отн.}\,1} + \vec{\omega}_{3\,\text{отн.}\,2} + \vec{\omega}_{4\,\text{отн.}\,3}$ (здесь имеются в виду системы координат (1), (2), (3), (4), о которых говорилось в прошлом пункте). $\omega_{2\,\text{отн.}\,1}$ соответствует вращению вокруг оси Oz, поэтому $\omega_{2\,\text{отн.}\,1} = \dot{\psi}\vec{e}_z$. $\omega_{3\,\text{отн.}\,2}$ соответствует вращению вокруг оси Ox', поэтому $\omega_{3\,\text{отн.}\,2} = \dot{\theta}\vec{e}_n$. $\omega_{4\,\text{отн.}\,3}$ соответствует вращению вокруг оси Ox_3, поэтому $\omega_{4\,\text{отн.}\,3} = \dot{\varphi}\vec{e}_3$. Таким образом, $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_n + \dot{\varphi}\vec{e}_3$.

По расположению векторов замечаем, что $\vec{e}_n = \cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_{y''} = \sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2$.

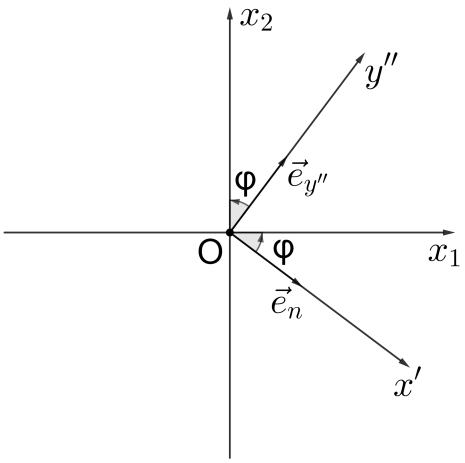

Рис. 4.1. Плоскость Ox_1x_2 и $Ox'y''$

В прошлом пункте систему координат $Ox'y'z$ мы вращали вокруг оси Ox' на угол θ и получили систему координат $Ox'y''x_3$, поэтому $\vec{e}_z = \sin\theta\,\vec{e}_{y''} + \cos\theta\,\vec{e}_3$.

Подставим выражения для $\vec{e}_n$ и $\vec{e}_z$ в формулу для $\vec{\omega}$, учитывая выражение для $\vec{e}_{y''}$: $\vec{\omega} = \dot{\psi}(\sin\theta\,(\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) + \cos\theta\,\vec{e}_3) + \dot{\theta}(\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2) + \dot{\varphi}\vec{e}_3$. Таким образом, получаем кинематические формулы Эйлера:

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \tag{4.1}$$

$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \tag{4.2}$$

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \tag{4.3}$$

Ньютонова механика. Принципы

Рассмотрим принципы ньютоновской механики.

1) Движение происходит во времени $t \in \mathbb{R}$, которое меняется равномерно и не зависит от системы материальных точек и их движения.

2) Принцип детерменизма. Рассмотрим систему материальных точек $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$, где $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^3$. Для удобства будем использовать вектор $\vec{r} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. Принцип гласит, что движение системы материальных точек полностью и однозначно задаётся (определяется) их начальными положениями и скоростями в любой начальный момент времени:

$$\vec{r}(t) = \vec{\Phi}\left(\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0), t\right), \quad t_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Запишем скорость и ускорение: $\dot{\vec{r}}(t) = \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}$, $\ddot{\vec{r}}(t) = \dfrac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} = f\left(\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0), t\right)$ (ввели обозначение). Подставим в ускорение момент времени $t = t_0$: $\ddot{\vec{r}}(t_0) = f\left(\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0), t_0\right)$, где $t_0 \in \mathbb{R}$. В этом уравнении t_0 является параметром, поэтому можно его переобозначить на t, тогда получим: $\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ – обыкновенное дифференциальное уравнение. Таким образом, уравнения движения являются ОДУ 2-го порядка: $\ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t)$, где $i = 1, \ldots, N$. Но уравнения Ньютона 2-го рода содержат в себе массы m_i, это оказывается нужным в силу универсальности массы по отношению к действующим на материальные точки силам (в общей теории относительности масса связывается с кривизной пространства).

3) Сформулируем 2-й закон Ньютона для системы материальных точек:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t). \tag{4.5}$$

В ньютоновской механике масса материальной точки не меняется во времени, выполняется закон аддитивности массы, то есть масса не исчезает и не появляется из ниоткуда. Это принцип инвариантности массы.

4) Рассмотрим принцип суперпозиции сил. Если на материальную точку в некоторой системе действовала сила $\vec{F}_1$, а при наличии некоторых других объектов на эту материальную точку действовала сила $\vec{F}_2$, то движение точки будет происходить так, как будто на неё действует сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Таким образом, силы можно складывать, а также силу можно раскладывать на составляющие, при этом движение не изменится.

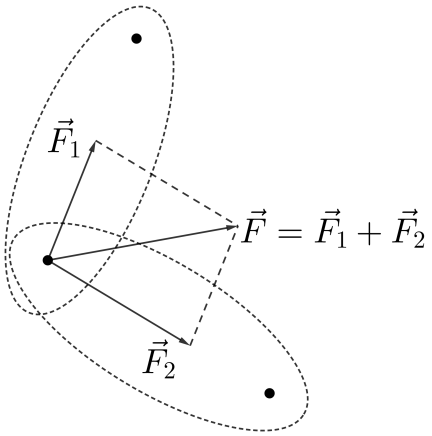

Рис. 4.2. Принцип суперпозиции сил

5) Рассмотрим принцип относительности Галилея. Сформулируем его в двух частях.

5.1) Существует такая система координат, в которой материальная точка, на которую не действуют никакие силы, совершает равномерное прямолинейное движение. Такая система называется инерциальной системой координат.

5.2) Любая система координат, которая движется равномерно и поступательно относительно инерциальной системы координат, также является инерциальной.

Законы движения часто принимают достаточно простой вид, если в качестве абсолютной системы выбрать инерциальную систему координат. Но возможно ли в каких-то случаях использовать ньютоновскую механику и находить такие системы координат, которые можно считать инерциальными? Это зависит от тех интервалов времени, на которых мы рассматриваем движение (формально математически движение происходит на бесконечном интервале времени, но физически мы наблюдаем за движением всегда на некотором ограниченном интервале времени). На коротком интервале времени материальная точка может двигаться по прямой, но на достаточно долгом интервале времени может отклониться от этой прямой, значит, в этом случае на достаточно коротком интервале времени мы можем считать систему отсчёта, в которой происходит движение этой материальной точки, инерциальной. Более точно можно сказать, что это зависит не просто от величины времени, но от некоторой пропорции малости сил, действующих на точку и величины времени наблюдения. Самая распространённая система координат, которая берётся в качестве инерциальной, – это система координат, связанная со звёздами (в начале координат находится Солнце, а оси направлены на далёкие очень медленно движущиеся по небу звёзды). В лабораторных условиях систему координат, связанную, например, со столом, можно с большой точностью считать инерциальной, если учитывать силу тяжести в качестве силы, действующей на материальные точки (хотя, конечно, Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца, что накладывает ограничения на точность рассмотрения системы координат как инерциальной). Таким образом, понятие инерциальности системы координат относительно и требует обоснования в каждой конкретной задаче.

Внутренние и внешние силы

Пусть задана система материальных точек $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ с массами $m_1, \ldots, m_N$, и на эти материальные точки действуют силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$.

Пусть нам удалось разложить силы $\vec{F}_i$ на составляющие так, что $\vec{F}_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^*$, где силы $\vec{F}_{ij}$ и $\vec{F}_{ji}$, действующие на точки i и j, равны и направлены вдоль линии, соединяющей эти точки, противоположно друг другу, то есть $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ и $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Силы $\vec{F}_{ij}$ называются внутренними силами, а силы $\vec{F}_i^*$ – внешними.

Для i-й точки $\vec{F}_{ij}$ – «сила действия», а $\vec{F}_{ji}$ – «сила противодействия». 3-й закон Ньютона гласит, что сила действия равна по величине и противоположно направлена силе противодействия.

Примеры внутренних сил: гравитационное взаимодействие, кулоновское взаимодействие. Примеры внешних сил: притяжение центра в задаче Кеплера, сила Лоренца. В природе же все силы возникают парами.

Лекция 5

Динамика материальной точки (в инерциальной системе координат)

2-й закон Ньютона является уравнением движения материальной точки: $m\ddot{\vec{r}} = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

Введём используемые понятия.

$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ – импульс (количество движения) материальной точки.

$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ – момент импульса (момент количества движения, кинетический момент) относительно точки O.

$T = \dfrac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}$ – кинетическая энергия.

Основные законы динамики точки

Теорема 5. ***(Теорема об изменении импульса)***

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{5.1}$$

Это ясно видно из 2-го закона Ньютона и из определения импульса.

Пусть существует постоянный вектор $\vec{e}$, у которого $||\vec{e}|| = 1$. Введём обозначения: $p_e = (\vec{p}, \vec{e})$, $F_e = (\vec{F}, \vec{e})$. Домножим (5.1) скалярно на $\vec{e}$: $(\dot{\vec{p}}, \vec{e}) = (\vec{F}, \vec{e}) \Rightarrow$ с учётом того, что $\vec{e}$ – постоянный вектор, получаем: $\dot{p}_e = F_e$. Если $F_e = 0$, то $p_e = \text{const}$, то есть импульс в направлении $\vec{e}$ сохраняется.

Теперь получим теорему об изменении кинетического момента. Векторно умножим уравнение (5.1) на $\vec{r}$ слева: $\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$. Учитывая, что $\vec{K} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$, получаем: $\dot{\vec{K}} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})$. Но $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{K}} = \vec{r} \times \vec{F}$. Введём обозначение: $\text{mom}_O\vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$ – момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Теорема 6. ***(Теорема об изменении кинетического момента)*** *Скорость изменения кинетического момента материальной точки равна моменту силы, действующей на точку, относительно начала координат:*

$$\dot{\vec{K}} = mom_O\vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{5.2}$$

Пусть существует постоянный вектор $\vec{e}$, у которого $||\vec{e}|| = 1$. Введём обозначения: $K_e = (\vec{K}, \vec{e})$, $\vec{M} = \text{mom}_O\vec{F}$, $M_e = (\vec{M}, \vec{e})$. Домножим (5.2) скалярно на $\vec{e}$: $(\dot{\vec{K}}, \vec{e}) = (\vec{M}, \vec{e}) \Rightarrow$ с учётом того, что $\vec{e}$ – постоянный вектор, получаем: $\dot{K}_e = M_e$. Если $\vec{F} \parallel \vec{e}$, то $M_e = \Big((\vec{r} \times \vec{F}), \vec{e}\Big) = \Big(\vec{r}, (\vec{F} \times \vec{e})\Big) = 0 \Rightarrow K_e = \text{const}$, то есть кинетический момент в направлении $\vec{e}$ сохраняется.

Теперь получим теорему об изменении кинетической энергии. Выпишем 2-й закон Ньютона: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, и умножим это уравнение скалярно на $\dot{\vec{r}}$: $(m\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}}, \vec{F})$.

Продифференцируем по времени кинетическую энергию: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}})}{2}\right) = m(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}}, \vec{F})$. Величина $(\dot{\vec{r}}, \vec{F})$ называется мощностью силы, действующей на материальную точку.

Теорема 7. ***(Теорема об изменении кинетической энергии)*** *Скорость изменения кинетической энергии равна мощности силы, действующей на материальную точку:*

$$\frac{dT}{dt} = (\dot{\vec{r}},\, \vec{F}) \tag{5.3}$$

Силы, которые всегда ортогональны скорости, называются гироскопическими. Например, сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле: $\vec{F} = q(\dot{\vec{r}},\, \vec{B})$. В этом случае $\dot{T} = 0 \;\Rightarrow\; T = \text{const}$, то есть кинетическая энергия материальной точки сохраняется.

Рассмотрим потенциальные силы. $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$ – разложение силы по базису. Сила $\vec{F}$ называется потенциальной, если найдётся функция $U(\vec{r},\, \dot{\vec{r}},\, t)$ (силовая функция) такая, что $\vec{F} = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x},\, \dfrac{\partial U}{\partial y},\, \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$, то есть $F_x = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = \dfrac{\partial U}{\partial z}$ (здесь $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$).

Интересным случаем являются консервативные силы. Сила называется консервативной, если она является потенциальной, причём для неё $U = U(\vec{r})$. В этом случае выполняется закон сохранения энергии (механической). Из (5.3) получаем: $\dfrac{dT}{dt} = \left(\dot{\vec{r}},\, \dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}}\right)$. Введём понятие: $V(\vec{r}) = -U(\vec{r})$ – потенциальная энергия. Продифференцируем потенциальную энергию по времени: $\dfrac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \left(\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}},\, \dot{\vec{r}}\right) = -(\vec{F},\, \dot{\vec{r}})$. Таким образом, $\dfrac{d}{dt}T = -\dfrac{d}{dt}V \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{dt}(T+V) = 0$ (использование значка d подразумевает подстановку закона движения $\vec{r}(t)$). Введём обозначение: $h = T + V$ – полная механическая энергия материальной точки. Таким образом, если силы консервативны, то на любом движении точки полная механическая энергия точки сохраняет своё значение:

$$h = T + V = \text{const}\,. \tag{5.4}$$

Значение константы h определяется начальными значениями движения точки: $h = h\left(\vec{r}(t_0),\, \dot{\vec{r}}(t_0),\, t_0\right)$.

Движение точки по прямой под действием силы, зависящей только от положения точки

Рассмотрим материальную точку массы m, движущуюся вдоль прямой Ox под действием силы $F(x)$, направленной вдоль этой же прямой. Уравнение движения: $m\ddot{x} = F(x)$. Покажем, что эта сила является консервативной, то есть что существует такая функция $V(x)$, что $F(x) = -\dfrac{dV}{dx}$. Выпишем силовую функцию: $U(x) = \displaystyle\int F(x)\,dx$. По определению $V(x) = -U(x) \;\Rightarrow\; F(x) = -\dfrac{dV}{dx}$.

Пример: для гармонического осциллятора $F(x) = -kx$, где $k > 0$, тогда $V(x) = \dfrac{kx^2}{2}$.

Выпишем закон сохранения энергии для рассматриваемого случая: $\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)=h$, где величина h остаётся постоянной во время движения точки.

Теперь займёмся интегрированием уравнения движения. Введём в рассмотрение фазовую плоскость $(x,\,\dot{x})$, то есть координатную плоскость, на которой по оси абсцисс откладываются значения x, а по оси ординат – значения $\dot{x}$. Траектория материальной точки на этой фазовой плоскости называется фазовой кривой. Любая точка на фазовой кривой будет удовлетворять закону сохранения энергии с некоторым определённым значением h. Из закона сохранения энергии $\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)=h$ получаем: $\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2(h-V)}{m}}$, причём знак «+» выбирается, если точка находится в верхней полуплоскости фазовой плоскости, а знак «−» выбирается, если в нижней. Если задана константа интеграла энергии h, то уравнение $\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)=h$ «высечет» некоторое множество на фазовой плоскости (оно может состоять из одной или из нескольких фазовых кривых), это множество называется уровнем интеграла энергии. Из $\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2(h-V)}{m}}$ получаем: $\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\pm\sqrt{h-V}}=dt$, тогда

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x(t_0)}^{x(t)}\frac{dx}{\pm\sqrt{h-V(x)}}=t-t_0. \tag{5.5}$$

Пусть задано значение h. Из $\frac{m\dot{x}^2}{2}\geq 0\ \Rightarrow\ h-V(x)\geq 0$. Множество значений x, удовлетворяющих неравенству $V(x)\leq h$, называется областью возможности движения (ОВД).

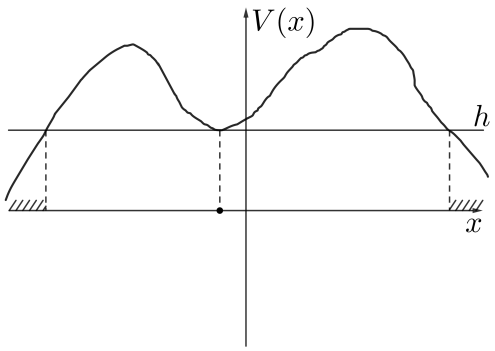

Рис. 5.1. Область возможности движения

Формула для периода колебаний

Пусть область возможности движения включает в себя некоторый изолированный отрезок $[x_1,\,x_2]$. Если точка начала своё движение в пределах этого отрезка, то выйти из него она никогда не сможет. Из $\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2(h-V)}{m}}$ следует, что фазовая

кривая на фазовой плоскости симметрична относительно оси x и пересекает эту ось в точках x_1 и x_2, в которых $h = V$ и $\dot{x} = 0$. Так как в верхней полуплоскости $\dot{x} > 0$, то фазовая кривая направлена там в сторону увеличения значений x, а в нижней полуплоскости $\dot{x} < 0$, и поэтому фазовая кривая там направлена в сторону уменьшения значений x.

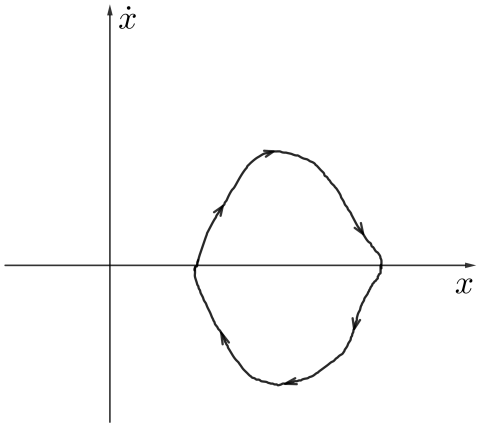

Рис. 5.2. Фазовая траектория на изолированном отрезке

Наблюдаемое движение по фазовой кривой в этом случае является периодическим. Найдём формулу для периода колебаний. В силу симметрии время движения от x_1 до x_2 равно времени движения от x_2 до x_1, тогда с помощью формулы (5.5) получаем: $T(h) = 2\sqrt{\dfrac{m}{2}} \displaystyle\int\limits_{x_1(h)}^{x_2(h)} \dfrac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}$ (выбрали знак «+» перед квадратным корнем, так как рассмотрели время движения по верхней фазовой полуплоскости и удвоили его). В итоге имеем:

$$T(h) = \sqrt{2m} \int\limits_{x_1(h)}^{x_2(h)} \frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}. \tag{5.6}$$

Фазовый портрет гармонического осциллятора

Фазовый портрет – множество всех фазовых кривых, нарисованных на фазовой плоскости.

Гармонический осциллятор – материальная точка, движущаяся под действием силы $F(x) = -kx$, где $k > 0$, тогда $m\ddot{x} = -kx$. Введём величину $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что общим решением является $x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$. При $t = 0$ получаем: $C_2 = x(0)$, $C_1 = \dfrac{\dot{x}(0)}{\omega}$.

Выпишем силовую функцию: $U(x) = \displaystyle\int (-kx)\, dx = -\frac{kx^2}{2} + \text{const}$. В качестве потенциальной энергии можно взять $V(x) = \dfrac{kx^2}{2}$.

Выпишем интеграл энергии: $\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = h$. При $h < 0$ это уравнение не задаёт никакую фазовую кривую. При $h = 0$ оно задаёт точку в начале координат на фазовой кривой. При $h > 0$ уравнение задаёт семейство эллипсов: $\frac{\dot{x}^2}{2h/m} + \frac{x^2}{2h/k} = 1$, у этих эллипсов полуоси вдоль ось x равны $\sqrt{\frac{2h}{k}}$ и вдоль оси $\dot{x}$ равны $\sqrt{\frac{2h}{m}}$.

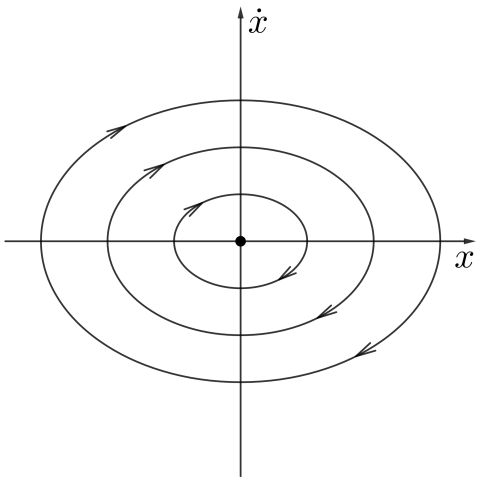

Рис. 5.3. Фазовый портрет гармонического осциллятора

Положение равновесия в начале координат устойчиво в том смысле, что при малых отклонениях в начальных условиях от положения равновесия фазовая траектория всегда будет находиться близко к положению равновесия.

Однако, заметим, что уравнения сохранения являются следствиями уравнений движения, и поэтому, вообще говоря, могут содержать посторонние решения.

Положение равновесия

Запишем уравнение движения материальной точки: $m\ddot{x} = -V'(x)$. Точка x_0 является положением равновесия, если зависимость $x(t) = x_0$ является решением уравнения движения. Физическое понимание: положение x_0 является положением равновесия, если материальная точка, помещённая в это положение с нулевой скоростью, может оставаться в нём бесконечно долго, никуда не двигаясь.

Подставим решение $x(t) = x_0$ в уравнение движения: $0 = -V'(x_0)$, то есть если x_0 – положение равновесия, то $V'(x_0) = 0$. Верно и обратное. Действительно: если $V'(x_0) = 0$, то в точке x_0 имеем $m\ddot{x} = 0$, а зависимость $x(t) = x_0$ является решением этого уравнения. Таким образом, точка x_0 является положением равновесия тогда и только тогда, когда она является критической точкой потенциальной энергии.

Линеаризация уравнений движения в окрестности состояния равновесия

Состоянием равновесия называется точка на фазовой плоскости с координатами $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, где x_0 – положение равновесия.

Выпишем уравнение движения: $m\ddot{x} = -V'(x)$. Разложим производную потенциальной энергии в ряд Тейлора: $V'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2)$ при $x \to x_0$. В положении равновесия $V'(x_0) = 0$. Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому можем выбрать эту константу так, чтобы выполнялось $V(x_0) = 0$. Для простоты перейдём к новым координатам $x \to x - x_0$, тогда в новых координатам положением равновесия является $x_0 = 0$. Таким образом, получаем: $V'(x) = V''(0)x + O(x^2)$.

Отбрасываем слагаемые $O(x^2)$ и получаем линеаризованное уравнение движения в окрестности положения равновесия: $m\ddot{x} = -V''(0)x$.

Если $V''(0) > 0$, то получаем уравнение гармонического осциллятора: $m\ddot{x} = -kx$, где $k = V''(0)$. В этом случае движение в окрестности положения равновесия будет представлять из себя гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{V''(0)}{m}}$ и периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, а уравнение движения будет называться уравнением малых колебаний. $T_{\text{м. к.}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}}$ – период малых колебаний.

Если $V''(0) < 0$, то положение равновесия будет неустойчивым.

Лекция 6

Асимптотика периода колебаний в окрестности невырожденного устойчивого равновесия

Уравнение малых колебаний: $m\ddot{x} = -V''(0)x$, где $V''(0) > 0$.

Интеграл энергии линеаризованной системы: $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{V''(0)x^2}{2} = h^*$, где $V''(0) > 0$.

Интеграл энергии исходной системы: $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = h$.

$T_{\text{м. к.}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}}$ – период малых колебаний.

$T(h) = \sqrt{2m}\displaystyle\int\limits_{x_1(h)}^{x_2(h)} \frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}$ – период колебаний в исходной системе.

Нам надо будет доказать следующее утверждение:

Утверждение 3.

$$T(h) = T_{\text{м. к.}} + O(h) \text{ при } h \to +0. \tag{6.1}$$

Но сначала нам придётся доказать две леммы.

Лемма 1. ***(Лемма Адамара)*** *Пусть $f(x) \in C^k$, $x \in \mathbb{R}$, причём $f(0) = 0$, тогда существует $g(x) \in C^{k-1}$ такая, что $f(x) = xg(x)$.*

Доказательство:

Введём параметр $t \in [0; 1]$ и рассмотрим функцию $f(tx)$, где x будем считать фиксированным. Тогда $\dfrac{df}{dt} = f'(tx)x$. Теперь рассмотрим интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{df}{dt}\,dt = f(tx)\Big|_0^1 =$ $f(x) - f(0) = f(x)$. Учитывая, что $\dfrac{df}{dt} = f'(tx)x$, получаем: $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^1 f'(tx)x\,dt =$ $xg(x)$, где $g(x) = \displaystyle\int\limits_0^1 f'(tx)\,dt$ (гладкость функции $g(x)$ по сравнению с гладкостью функции $f(x)$ понижается из-за взятия производной). □

Сформулируем необходимое нам следствие (в предположениях леммы Адамара): если $f(0) = f'(0) = 0$, то существует $g^*(x) \in C^{k-2}$ такая, что $f(x) = x^2 g^*(x)$.

Доказательство:

Из $f(x) = xg(x)$ получаем: $f'(x) = g(x) + xg'(x)$, тогда $f'(0) = g(0)$, но $f'(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$. Значит, можно применить ещё раз лемму Адамара к функции $g(x)$: $g(x) = xg^*(x)$. Таким образом, $f(x) = x^2 g^*(x)$. □

Лемма 2. ***(Лемма Морса)*** *Если* $f(0) = f'(0) = 0$ *и* $f''(0) \neq 0$, *то существует гладкая замена координат* $x = x(z)$ *такая, что* $f(x(z)) = \dfrac{f''(0)}{2}z^2$, *причём* $x'(0) = 1$.

Доказательство:

По следствию из леммы Адамара существует $g(x)$ такая, что $f(x) = \dfrac{f''(0)}{2}x^2 g^*(x)$ (множитель $\dfrac{f''(0)}{2} \neq 0$ мы вынесли из $g^*(x)$, это можно сделать всегда). Вычислим производную: $f'(x) = f''(0)xg^*(x) + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 g^{*\prime}(x)$. Вычислим вторую производную: $f''(x) = f''(0)g^*(x) + x(\ldots)$ (конкретный вид содержимого скобок нам не принципиален). Подставим $x = 0$: $f''(0) = f''(0)g^*(0)$. Так как $f''(0) \neq 0$, то $g^*(0) = 1$, причём в силу гладкости положительный знак $g^*(x)$ будет сохраняться при небольших отклонениях от $x = 0$. Тогда можем сделать в окрестности $x = 0$ такую замену: $z(x) = x\sqrt{g^*(x)}$. Продифференцируем: $z'(x) = \sqrt{g^*(x)} + x \cdot \ldots \;\Rightarrow\; z'(0) = 1$. Таким образом, из $f(x) = \dfrac{f''(0)}{2}x^2 g^*(x)$ следует, что $f(x(z)) = \dfrac{f''(0)}{2}z^2$. □

Теперь можем доказать утверждение (3).

Доказательство:

$T(h) = \sqrt{2m}\displaystyle\int_{x_1(h)}^{x_2(h)} \frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}$ – период колебаний в исходной системе, причём точки $x_1(h)$ и $x_2(h)$ определяются из условия $V(x_i) = h$.

По лемме Морса можно сделать такую замену координат $x = x(z)$, что $V(x) = \dfrac{V''(0)}{2}z^2$. В новых координатах пределы интегрирования $z_1(h)$ и $z_2(h)$ будут находиться из условия $\dfrac{V''(0)}{2}z^2 = h$, тогда $z_{1,2}(h) = \pm C$, где $C = \sqrt{\dfrac{2h}{V''(0)}}$. Перепишем период колебаний в новых координатах: $T(h) = \sqrt{2m}\displaystyle\int_{-C}^{C} \frac{x'(z)\,dz}{\sqrt{h - \dfrac{V''(0)}{2}z^2}}$.

Рассмотрим подкоренное выражение: $h - \dfrac{V''(0)}{2}z^2 = \dfrac{V''(0)}{2}\left(\dfrac{2h}{V''(0)} - z^2\right) = \dfrac{V''(0)}{2}(C^2 - z^2)$.

Возвращаемся к периоду колебаний: $T(h) = 2\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}}\displaystyle\int_{-C}^{C} \frac{x'(z)\,dz}{\sqrt{C^2 - z^2}}$. Сделаем ещё одну замену: $z = C\sin\theta$, где $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, так как $-C \leq z \leq C$ (заметим, что в этих пределах $\cos\theta \geq 0$). В новых координатах $T(h) = 2\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x'(C\sin\theta)C\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{C^2(1 - \sin^2\theta)}} = 2\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x'(C\sin\theta)\,d\theta$.

Используем формулу Лагранжа: $x'(C\sin\theta) = x'(0) + x''(0)C\sin\theta + O(C^2)$ при $h \to +0$. Учтём, что $x'(0) = 1$, функция $x''(0)C\sin\theta$ – нечётная $\Rightarrow \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x''(0)C\sin\theta\, d\theta = 0$, $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} O(C^2)\, d\theta = O(C^2) = O(h)$, так как $C = \sqrt{\dfrac{2h}{V''(0)}}$.

Возвращаемся к периоду колебаний: $T(h) = 2\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + O(h) = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{V''(0)}} + O(h) = T_{\text{м. к.}} + O(h)$ при $h \to +0$. □

Фазовый портрет в окрестности невырожденного положения равновесия

Рассмотрим случай $V(0) = V'(0) = 0$ и $V''(0) \neq 0$.

Запишем интеграл энергии нелинейной системы: $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = h$.

Сделаем замену из леммы Морса, то есть от фазовой плоскости $(x,\, \dot{x})$ перейдём к фазовой плоскости $(z,\, \dot{x})$, где $z'(0) = 1$. Тогда $V(x(z)) = \dfrac{V''(0)}{2}z^2$.

Возвращаемся к интегралу энергии: $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{V''(0)}{2}z^2 = h$.

Если $V''(0) > 0$, то фазовый портрет – семейство эллипсов (при $h = 0$ точка в начале координат) в координатах $(z,\, \dot{x})$.

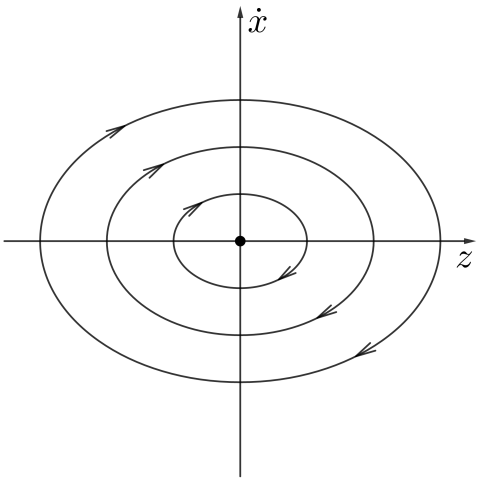

Рис. 6.1. Фазовый портрет при $V''(0) > 0$

Если $V''(0) < 0$, то фазовый портрет – семейство гипербол (при $h = 0$ две пересекающиеся в начале координат прямые) в координатах $(z,\, \dot{x})$. Введём обозначе-

ние: $V''(0) = -k^2$. Найдём асимптоты гипербол (при $h = 0$): $\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k^2z^2}{2} = h \Rightarrow m\dot{x}^2 - k^2z^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{m}\dot{x} - kz)(\sqrt{m}\dot{x} + kz) = 0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{k}{\sqrt{m}}z$ или $\dot{x} = -\frac{k}{\sqrt{m}}z$.

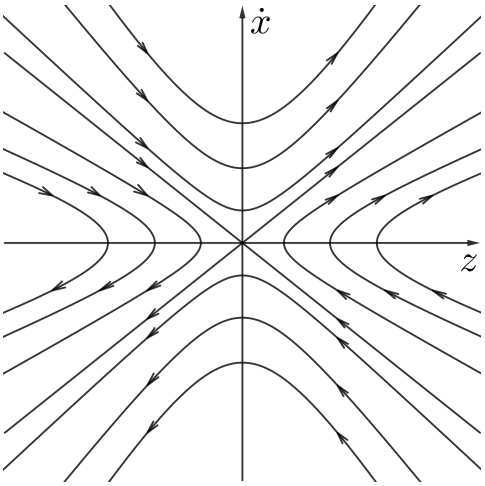

Рис. 6.2. Фазовый портрет при $V''(0) < 0$

Замечание: при $h = 0$ фазовые траектории не пересекаются в силу единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. Прямые, нарисованные в этом случае для окрестности состояния равновесия, называются сепаратрисы, и в общем случае могут замыкаться вдали от окрестности состояния равновесия, но могут и не замыкаться. Приближение к началу координат или отдаление от него на фазовой плоскости по этим прямым занимает бесконечно большое время. Таким образом, при $h = 0$ может быть от 3 (обе пары сепаратрис замыкаются + положение равновесия в начале координат) до 5 (обе пары сепаратрис не замыкаются + положение равновесия в начале координат) фазовых траекторий.

Понятие о фазовом портрете в общем случае

Обычно рисуют фазовую плоскость $(x, \dot{x})$ ровно под плоскостью с координатам $(x, V(x))$.

По плоскости с координатам $(x, V(x))$ начинают постепенно снизу поднимать прямую $V(x) = h$ (то есть увеличивать значение энергии h). При это в окрестности каждой границы области возможного движения каждый раз рисуют параболу (так как линеаризованное уравнение движения в этом случае будет иметь вид $m\ddot{x} = -V'(x^*)$, где x^* – граница области возможного движения, что соответствует движению точки под действием постоянной силы). Так продолжают делать до тех пор, пока прямая $V(x) = h$ не достигнет положения равновесия.

В окрестностях невырожденных ($V'' \neq 0$) положений равновесия рисуем эллипсы (для случаев $V'' > 0$, то есть для точек минимума $V(x)$) или гиперболы (для случаев $V'' < 0$, то есть для точек максимума $V(x)$).

Уравнение движения математического маятника

В физике математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нити. Формально же математическим маятником называется материальная точка, которая движется без трения по окружности, плоскость которой вертикальна, в однородном поле тяжести.

Пусть радиус окружности l, а её центр находится в начале координат. $\vec{r}$ – радиус-вектор точки. На точку действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции связи $\vec{R}$ со стороны окружности. $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – нормальный и касательный векторы на окружности. Так как движение происходит без трения, то $R_\tau = 0$. Будем задавать положение точки на окружности углом φ так, как это показано на рисунке.

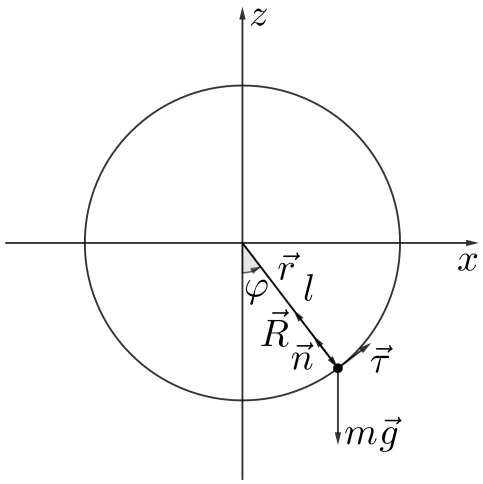

Рис. 6.3. Математический маятник

Запишем 2-й закон Ньютона: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. Умножим это равенство скалярно на $\vec{\tau}$, учитывая, что $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, $\vec{\tau} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$, $\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + Kv^2\vec{n}$, где $K = \dfrac{1}{l}$ – кривизна окружности, $v = l\dot{\varphi}$ – скорость движения точки по окружности. Получим: $(\vec{a}, \vec{\tau}) = \dot{v} = l\ddot{\varphi}$, $(\vec{R}, \vec{\tau}) = 0$, $(\vec{g}, \vec{\tau}) = -g\sin\varphi \;\Rightarrow\; ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \;\Rightarrow$ получаем уравнение движения математического маятника:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{6.2}$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением движения материальной точки, масса которой равна 1 и на которую действует сила $-\dfrac{g}{l}\sin\varphi$. Заметим, что если принять потенциальную энергию равной $V(\varphi) = -\dfrac{g}{l}\cos\varphi$, то $-\dfrac{g}{l}\sin\varphi = -V'(\varphi)$, значит, эта сила является консервативной.

Положения равновесия определяются из условия $V'(\varphi) = 0 \;\Rightarrow\; \sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_1 = 0$ или $\varphi_2 = \pi \mod 2\pi$. Рассмотрим вторую производную потенциальной энергии в положениях равновесия: $V''(\varphi) = \dfrac{g}{l}\cos\varphi \;\Rightarrow\; V''(\varphi_1) = \dfrac{g}{l} > 0$, $V''(\varphi_2) = -\dfrac{g}{l} < 0 \;\Rightarrow\; \varphi_1$ – устойчивое положение равновесия, а φ_2 – неустойчивое. Таким образом, в окрестности положения равновесия φ_1 существуют малые колебания с периодом

$T_{\text{м. к.}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{V''(\varphi_1)}}$. Подставляя значение $V''(\varphi_1) = \dfrac{g}{l}$ и учитывая, что $m = 1$, получаем формулу Гюйгенса:

$$T_{\text{м. к.}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6.3}$$

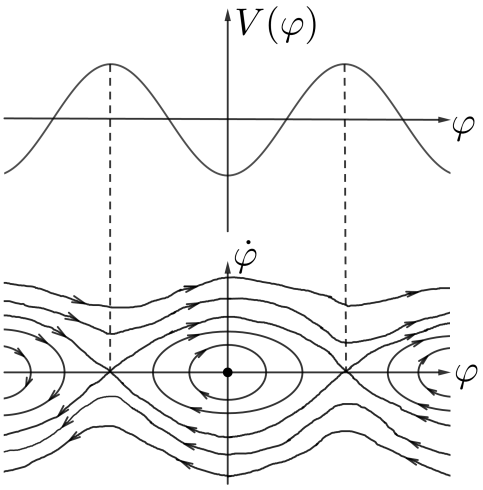

Рис. 6.4. Фазовый портрет математического маятника

Связи

Рассмотрим систему N материальных точек $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ с массами $m_1, \ldots, m_N$, на которые действуют силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$.

Будем говорить, что на систему наложены голономные (геометрические) связи, если на любом движении системы выполняются соотношения $f_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$, где $i = 1, \ldots, k$.

Положение системы задаётся набором координат $\vec{r} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. Геометрические связи «высекают» в этом пространстве некоторое множество точек Σ_t – множество (пространство, многообразие) положений системы, которое допускается связями, или, по-другому, конфигурационное пространство. На этом пространстве можно ввести обобщённые координаты $q_1, \ldots, q_n$, причём $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)$ и $f_i(\vec{r}_2(q_1, \ldots, q_n, t), \ldots, \vec{r}_n(q_1, \ldots, q_n, t), t) \equiv 0$. Количество обобщённых координат n называется числом степеней свободы голономной системы.

Лекция 7

Связи в механике

Рассмотрим систему N материальных точек $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ с массами $m_1, \ldots, m_N$, на которые действуют силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$ (эти силы называются заданными). Бывают ситуации, когда не все силы, действующие на точки, описываются в виде заданных, а некоторые силы описываются в виде условий на движение, которое совершают точки системы. Такие условия записываются обычно в виде уравнений, которые называются связями.

Рассмотрим виды связей.

Геометрические (голономные) связи – это уравнения, ограничивающие движение, вида $f_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$, где $i = 1, \ldots, k$. Эти уравнения задают некоторое множество точек, зависящее от времени, $\Sigma_t = \{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N : f_i = 0, i = 1, \ldots, k\}$ – множество положений (конфигурационное пространство, конфигурационное многообразие). Будем рассматривать ситуации, когда конфигурационное пространство является гладким многообразием, тогда на нём можно ввести локальные координаты. Если f_i функционально независимы (это значит, что ранг матрицы $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(x_1, \ldots, z_N)}$ максимален, то есть равен k), то размерность конфигурационного многообразия $\dim \Sigma_t = 3N - k = n$ (ввели обозначение n). Тогда в некоторой координатной окрестности на конфигурационном многообразии количество локальных координат будет n штук: $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, они называются обобщёнными координатами, а их производные по времени – обобщёнными скоростями. Число n называется числом степеней свободы голономной системы. Так как $\vec{q}$ – обобщённые координаты, то должны существовать функции $\vec{r}_i(\vec{q}, t)$ таким, что после их подстановки в уравнения $f_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0$ получаются тождества: $f_i(\vec{r}_1(\vec{q}, t), \ldots, \vec{r}_n(\vec{q}, t), t) \equiv 0$, причём зависимости $\vec{r}_i(\vec{q}, t)$ являются невырожденными в том смысле, что $\operatorname{rank} \dfrac{\partial(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)} = n$, то есть максимален.

Расширим понятие связи. Пусть $\vec{r} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = (x_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, тогда $f_i(\vec{r}, t) = 0$. При движении вектор $\vec{r}$ зависит от времени, тогда подстановка его в уравнения связей должна давать тождества: $\vec{f}_i(\vec{r}(t), t) \equiv 0$. Продифференцируем по времени: $\dfrac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}\dot{\vec{r}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial t} = 0$. В обратную сторону: если $\dfrac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}\dot{\vec{r}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, то $f_i(\vec{r}, t) = \text{const}$ (константа может быть ненулевой). Иногда уравнения связей записывают в форме $\dfrac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}\dot{\vec{r}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, она называется дифференциальной формой. Задание связи в дифференциальной форме в абстрактном виде: $\sum\limits_{j=1}^{N} \left(\vec{a}_{ij}(\vec{r}, t), \dot{\vec{r}}_j\right) + b_i(\vec{r}, t) = 0$, где $\vec{a}_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_j} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}, \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)$, $b_i(\vec{r}, t) = \dfrac{\partial f_i}{\partial t}$, $i = 1, \ldots, k$. Введём матрицу $A(\vec{r}, t) =$

$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$, её размер $k \times 3N$. Также введём столбец $\vec{b}(\vec{r},\, t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$. Теперь можно задать связи в дифференциальной форме в таком виде: $A(\vec{r},\, t)\dot{\vec{r}} + \vec{b}(\vec{r},\, t) = 0$, где под $\dot{\vec{r}}$ подразумевается вектор-столбец, составленный из производных по времени от $3N$ координат. Если уравнение $A(\vec{r},\, t)\dot{\vec{r}} + \vec{b}(\vec{r},\, t) = 0$ является следствием соотношений $f_i(\vec{r},\, t) = 0$, где $i = 1,\, \ldots,\, k$, то связи называются голономными (интегрируемыми). В противном случае связи называются неголономными.

Пусть наложены голономные связи $f_i(\vec{r},\, t) = 0$, где $i = 1,\, \ldots,\, k$. Вводим обобщённые координаты, в них эти связи выполняются тождественно. Из $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q},\, t)$ получаем: $\dot{\vec{r}} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{q}}\dot{\vec{q}} + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t}$. Пусть есть ещё некоторые связи, заданные в дифференциальной форме, $A\dot{\vec{r}} + \vec{b} = 0$. Подставим сюда выражение $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q},\, t)$, получим: $A^*(\vec{q},\, t)\dot{\vec{q}} + \vec{b}^*(\vec{q},\, t) = 0$. Если бы эта группа соотношений была интегрируема, тогда она бы являлась следствием группы соотношений $f_i^*(\vec{q},\, t) = 0$ или, что то же самое, была бы эквивалентна группе соотношений $f_i^*(\vec{q},\, t) = \text{const}$. Соотношения $f_i^*(\vec{q},\, t) = \text{const}$ «высекают» в пространстве обобщённых координат в каждый момент времени некоторые множества, причём разным значениям константы будут соответствовать различные множества. Если при наличии связей $f_i^*(\vec{q},\, t) = \text{const}$ мы можем в пространстве обобщённых координат в некоторый момент времени перевести систему из любого состояния в любое, то это и есть достаточное условие того, что эти связи неинтегрируемые (неголономные).

Конёк Чаплыгина

Рассмотрим пример неголономной связи, называемый «конёк Чаплыгина».

Пусть на координатной плоскости Oxy может двигаться диск. Его положение задаётся обобщёнными координатами $(x,\, y,\, \varphi)$, где x и y – координаты центра диска, φ – угол поворота некоторой фиксированной точки диска относительно оси Ox (геометрическими связями является то условие, что расстояние между точками твёрдого тела постоянно). Добавим под диск конёк, остриё которого касается плоскости ровно в одной точке в центре конька. Конёк может вращаться вокруг этой точки и поступательно двигаться, но только так, что его скорость направлена вдоль лезвия конька. Таким образом, $(x,\, y)$ – координаты точки касания конька и плоскости, а также будем считать, что лезвие конька направлено вдоль прямой, определяемой углом φ. Обозначим точку соприкосновения конька и плоскости C. Пусть $\vec{e}$ – направляющий вектор лезвия.

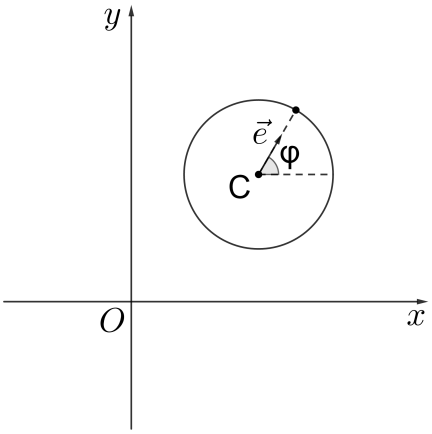

Рис. 7.1. Конёк Чаплыгина на координатной плоскости

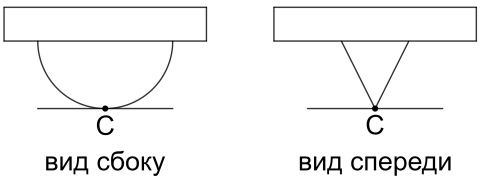

Рис. 7.2. Конёк Чаплыгина: виды сбоку и спереди

$\vec{V}_C = (\dot{x},\, \dot{y})$, $\vec{e} = (\cos\varphi,\, \sin\varphi)$. Связь накладывает условие, что $\vec{V}_C \parallel \vec{e} \;\Rightarrow\; \vec{V}_C \times \vec{e} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$. Получили связь, записанную в дифференциальном виде, определяющую модель конька Чаплыгина. Докажем, что эта связь неголономна.

Доказательство:

Допустим противное. Предположим, что существует $f(x,\, y,\, \varphi)$ такая, что соотношение $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$ эквивалентно соотношению $f(x,\, y,\, \varphi) = \text{const}$. Это означает, что трёхмерное пространство $(x,\, y,\, \varphi)$ расслаивается на двумерные поверхности, на которых значения константы различны, причём если система изначально находится на поверхности, на которой $f = C_1$, то она не может быть переведена на поверхность, на которой $f = C_2$. Но сейчас мы покажем, что конёк Чаплыгина можно переместить из любого положения в любое. Рассмотрим два произвольных положения конька: (1) и (2). При покоящемся центре конька соотношение $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$ будет выполнено при любом значении φ. Тогда повернём лезвие конька из положения (1) так, чтобы оно было направлено на центр конька в положении (2). Затем переместим конёк вдоль лезвия так, чтобы его центр попал в центр положения (2). И наконец, при покоящемся центре повернём лезвие конька так, чтобы он встал в положение (2). Таким образом, наше предположение неверно, значит, связь $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$ неголономна. □

Понятие стационарной связи

Связь $A(\vec{q},\, t)\dot{\vec{q}} + \vec{b}(\vec{q},\, t)$ называется стационарной, если $A(\vec{q},\, t) \equiv A(\vec{q})$ и $\vec{b}(\vec{q},\, t) \equiv 0$. Для геометрических связей $f_i(\vec{r},\, t)$ стационарность означает, что $f_i(\vec{r},\, t) \equiv f_i(\vec{r})$.

В примере с коньком Чаплыгина рассматриваемая неголономная связь была стационарной.

Виртуальные перемещения

Рассмотрим конфигурационное многообразие Σ_t и зафиксируем некоторый момент времени t. Выберем на Σ_t некоторую точку $\vec{r} \in \Sigma_t$. Пусть $T_{\vec{r}}\Sigma_t$ – касательное пространство к многообразию Σ_t в точке $\vec{r}$. Это касательное пространство состоит из касательных векторов, называемых виртуальными скоростями, а само касательное пространство $T_{\vec{r}}\Sigma_t$ называется пространством виртуальных скоростей. По сути это те скорости, которые могли бы иметь точки системы, если бы мы зафиксировали время, при условии, что при движении точки удовлетворяют связям. Если виртуальные скорости домножить на интервал времени, то получатся виртуальные перемещения.

Пусть заданы геометрические связи $f_i(\vec{r},\, t) = 0$. Фиксируем момент времени $t = t^*$. Выберем на Σ_{t^*} некоторую кривую $\vec{r}(\alpha)$, где α – параметр, проходящую через точку $\vec{r}$, тогда $f_i(\vec{r}(\alpha),\, t^*) = 0$. Возьмём дифференциал: $df_i(\vec{r}(\alpha),\, t^*) = \dfrac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha = 0$. Введём обозначение: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha = \delta\vec{r}$. Тогда $\dfrac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} \delta\vec{r} = 0$. Это можно записать в матричном виде: $A(\vec{r},\, t^*)\delta\vec{r} = 0$.

Пусть на систему наложены связи, заданные в дифференциальной форме, $A(\vec{r},\, t)\dot{\vec{r}} + \vec{b}(\vec{r},\, t) = 0$ (необязательно геометрические). Виртуальное перемещение в точке $\vec{r}$ в момент времени t – это любой вектор $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1,\, \ldots,\, \delta\vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ такой, что $A(\vec{r},\, t)\delta\vec{r} = 0$.

В качестве примера рассмотрим математический маятник, движущийся по окружности радиуса l с центром в начале координат в плоскости Oxz. Таким образом, связь – это уравнение окружности $x^2 + y^2 = l^2$. Возьмём дифференциал: $x\delta x + z\delta z = 0$. Из этого уравнения видно, что вектор виртуального перемещения $\delta\vec{r} = (\delta x,\, \delta z)$ направлен перпендикулярно вектору $\vec{r} = (x,\, z)$. Таким образом, вектор $\delta\vec{r}$ направлен по касательной к окружности в точке нахождения математического маятника.

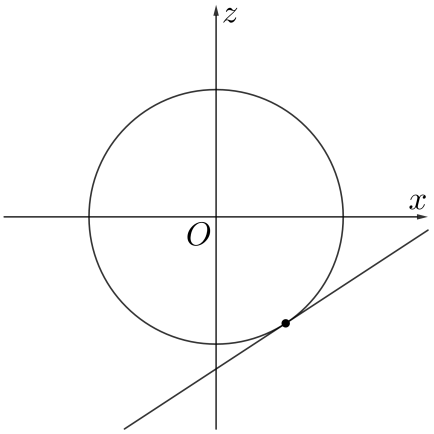

Рис. 7.3. Прямая, на которой лежит вектор виртуальных перемещений математического маятника

Число степеней свободы

Мы говорили, что число степеней свободы для системы с геометрическими связями – это число обобщённых координат. Теперь рассмотрим более общий случай.

Пусть задана система с геометрическими связями, в которой введены обобщённые координаты $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$. Так как $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}, t)$, то $\delta\vec{r} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{q}}\delta\vec{q}$ – запись виртуальных перемещений в обобщённых координатах. Добавим дополнительные связи, заданные в дифференциальной форме, $A(\vec{q}, t)\dot{\vec{q}} + \vec{b}(\vec{q}, t) = 0$. Они выделяют в изначальном пространстве виртуальных перемещений подпространство, удовлетворяющее условию $A\delta\vec{q} = 0$. Полученное подпространство будет являться новым пространством виртуальных перемещений.

Число степеней свободы – это размерность пространства виртуальных перемещений.

Если система голономная, то размерность пространства виртуальных перемещений совпадает с размерностью конфигурационного многообразия, поэтому в этом случае число степеней свободы совпадает с количеством обобщённых координат. Если система неинтегрируемая, то размерность пространства виртуальных перемещений меньше размерности конфигурационного многообразия.

Реакции связей. Принцип Даламбера-Лагранжа

Теперь займёмся выводом уравнений движения систем со связями. Для этого придётся наложить некоторые допущения.

Аксиома освобождения от связей: систему можно освободить от связей, добавив некоторые силы, при этом движение системы не изменится. Эти добавочные силы называются «реакции связей» и обозначаются $\vec{R}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. После введения реакций связей система будет двигаться в соответствии со 2-м законом Ньютона: $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$. Силы $\vec{F}_i$, действующие на систему вне зависимости от наличия или отсутствия связей, называются «заданные силы». В качестве примера можно рассмотреть математический маятник: сила тяжести $m\vec{g}$ – заданная сила, а сила $\vec{R}$,

обеспечивающая нахождение точки на окружности, – реакция связи.

Введём определение: $\delta A = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i,\, \delta\vec{r}_i)$ – элементарная работа реакций связей на виртуальном перемещении.

Связи называются идеальными, если в любом положении в любой момент времени t для любого виртуального перемещения элементарная работа реакций связей на этом виртуальном перемещении равна 0. Идеальность связей рассматривается как отсутствие трения при движении вдоль связей.

Запишем уравнения Ньютона с учётом аксиомы освобождения от связей: $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$, где $i = 1, \ldots, N$. Выразим реакции связей: $\vec{R}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i$. Если связи идеальны, то $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i,\, \delta\vec{r}_i) = 0$ для любого виртуального перемещения. Подставляем выражение для $\vec{R}_i$: $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i,\, \delta\vec{r}_i) = 0$.

Принцип Даламбера-Лагранжа (виртуальных перемещений): движение системы с идеальными связями определяется следующим соотношением:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i,\, \delta\vec{r}_i) = 0. \tag{7.1}$$

В одну сторону мы это уже показали: если связи связи идеальны и $\vec{r}(t)$ – это движение системы, то уравнение (7.1) выполняется.

Утверждение 4. *Принцип Даламбера-Лагранжа определяет ускорения точек системы однозначно.*

Введём $M = \operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \ldots, m_N, m_N, m_N)$ – диагональную матрицу масс размера $3N \times 3N$, а также векторы $\vec{r} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$, $\vec{F} = (\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N)$, $\vec{R} = (\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_N)$, $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1, \ldots, \delta\vec{r}_N)$. Пусть на систему наложены связи вида $A\dot{\vec{r}} + \vec{b} = 0$. Уравнения Ньютона в матричной форме: $M\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}$; и принцип Даламбера-Лагранжа в матричной форме: $(M\ddot{\vec{r}} - \vec{F},\, \delta\vec{r}) = 0$ для любого $\delta\vec{r}$ такого, что $A\delta\vec{r} = 0$.

Лекция 8

Принцип Даламбера-Лагранжа (продолжение)

Докажем утверждение (4). Для этого сначала нам понадобится доказать лемму.

Лемма 3. ***(Лемма о множителях Лагранжа)*** *Пусть для любого вектора $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $A\vec{b} = 0$, где A – матрица размера $k \times n$, выполняется равенство $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, где $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдётся вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\vec{a} = A^T\vec{\lambda}$.*

Доказательство:

Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ – векторы, составленные из элементов строк матрицы A, тогда условие $A\vec{b} = 0$ означает, что $\vec{b} \perp \vec{a}_i$, где $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ линейное подпространство $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$. Разложим вектор $\vec{a}$ на составляющие: $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$, где $\vec{a}_\parallel \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$, $\vec{a}_\perp \perp L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$, тогда $(\vec{a}_\perp, \vec{a}_\parallel) = 0$ и $(\vec{a}_\perp, \vec{a}_i) = 0$. Вместо последнего можно написать $A\vec{a}_\perp = 0$, но тогда $\vec{a}_\perp$ является одним из векторов типа $\vec{b}$, а значит, $(\vec{a}, \vec{a}_\perp) = 0$. Подставим $\vec{a}$ в разложенном виде: $(\vec{a}_\parallel, \vec{a}_\perp) + (\vec{a}_\perp, \vec{a}_\perp) = 0 \;\Rightarrow\; a_\perp^2 = 0 \;\Rightarrow\; a_\perp = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} \in L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$. Тогда $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \;\Rightarrow\; \vec{a} = A^T\vec{\lambda}$. □

Теперь можем доказать утверждение (4).

Доказательство:

Запишем принцип Даламбера-Лагранжа в матричной форме: $(M\ddot{\vec{r}} - \vec{F}, \delta\vec{r}) = 0$ для любого $\delta\vec{r}$ такого, что $A\delta\vec{r} = 0$. По лемме (3) существует вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такой, что $M\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = A^T\vec{\lambda} \;\Rightarrow\; M\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + A^T\vec{\lambda} \;\Rightarrow\; m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum\limits_{l=1}^{k} \lambda_l\vec{a}_{li}$ – получили $3N$ уравнений с $3N+k$ неизвестными (это $3N$ штук $\ddot{\vec{r}}_i$ и k штук λ_l). Допишем уравнения связей: $A\dot{\vec{r}} + \vec{b} = 0$ – это ещё k уравнений. Бывают ситуации, когда не все уравнения связей независимые, но среди всех уравнений связей всегда можно выделить группу независимых соотношений, через которую определяются все остальные соотношения. Будем считать, что выделили такую группу, тогда $\operatorname{rank} A = k$. Система уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + A^T\vec{\lambda} \\ A\dot{\vec{r}} + \vec{b} = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

называется уравнениями Лагранжа 1-го рода с множителями.

Пусть задан некоторый закон движения $\vec{r}(t)$. Подставим его в уравнения связей, которые в этом случае должны тождественно выполняться, и продифференцируем по времени, получим: $A\ddot{\vec{r}} + \vec{g}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$, где в $\vec{g}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ включены все слагаемые, не содержащие $\ddot{\vec{r}}$ (слагаемое с $\ddot{\vec{r}}$ только одно, так как $A(\vec{r}, t)$ и $\vec{b}(\vec{r}, t)$ не зависят от $\dot{\vec{r}}$). Из верхнего уравнения системы (8.1) выразим $\ddot{\vec{r}}$ и подставим в предыдущее соотношение, оставив в явном виде только слагаемое с $\vec{\lambda}$: $\ddot{\vec{r}} = M^{-1}\vec{F} + M^{-1}A^T\vec{\lambda} \;\Rightarrow\; AM^{-1}A^T\vec{\lambda} + \vec{h}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$. Если матрица $AM^{-1}A^T$ невырождена, то из последнего уравнения вектор $\vec{\lambda}$ находится однозначно. Убедимся в невырожденности матрицы $\Phi = AM^{-1}A^T$ (ввели обозначение). Её размерность $k \times k$. M^{-1} – положительно

определённая матрица (она диагональная с m_i^{-1} на диагонали). Для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$, $\vec{u} \neq 0$ имеем: $(AM^{-1}A^T\vec{u}, \vec{u}) = (M^{-1}A^T\vec{u}, A^T\vec{u})$. Так как $\operatorname{rank} A = k$, то $A^T\vec{u} \neq 0$. Тогда в силу положительной определённости M^{-1} получаем: $(M^{-1}A^T\vec{u}, A^T\vec{u}) > 0$. Таким образом, $(\Phi\vec{u}, \vec{u}) > 0 \;\Rightarrow\; \det\Phi \neq 0$. Тогда $\vec{\lambda} = -(AM^{-1}A^T)^{-1}\vec{h} \;\Rightarrow\; \vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ находится однозначно. Подставим в верхнее уравнение системы (8.1): $M\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + A^T(\vec{r}, t)\vec{\lambda}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Из этого уравнения ускорения точек системы находятся однозначно. □

Свободное твёрдое тело

Разберёмся, что из себя представляют виртуальные перемещения твёрдого тела. Запишем формулу Эйлера: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$. Когда мы задаём движение твёрдого тела, мы можем произвольно задать скорость точки A и угловую скорость твёрдого тела. Будем считать, что точка A находится в начале координат, тогда $\vec{AB} = \vec{r}_B$. Таким образом, для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ существует движение твёрдого тела, при котором его скорости будут иметь следующий вид: $\dot{\vec{r}}_i = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{r}_i$. Значит, эта формула задаёт распределение виртуальных скоростей. Чтобы перейти к виртуальным перемещениям, домножим предыдущее равенство на интервал времени, получим: $\delta\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{r}_i$ для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ (здесь учтено, что произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, домноженные на интервал времени, всё равно останутся произвольными векторами, поэтому после домножения можно их переобозначить прежними названиями). Таким образом, пространство виртуальных перемещений 6-мерно (3-мерный вектор $\vec{a}$ и 3-мерный вектор $\vec{b}$).

Рассмотрим частный случай: $\vec{a} = \vec{e}$, $\vec{b} = 0$ – это перемещение вдоль направления $\vec{e}$. В этом случае $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N) = (\vec{e}, \vec{e}, \ldots, \vec{e})$.

Рассмотрим другой частный случай: $\vec{a} = 0$, $\vec{b} = \vec{e}$ – это поворот вокруг оси $O\vec{e}$. В этом случае $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N) = (\vec{e} \times \vec{r}_1, \vec{e} \times \vec{r}_2, \ldots, \vec{e} \times \vec{r}_N)$.

Внутренние и внешние силы

Пусть к N точкам приложены силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$. Пусть эти силы можно разбить на составляющие следующим образом: $\vec{F}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$, причём $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$ и $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Тогда такие силы $\vec{F}_{ij}$ называются внутренними (будем обозначать их с верхним индексом (i) – internal). Пример: силы гравитационного или кулоновского взаимодействия.

Остальные силы называются внешними (будем обозначать их с верхним индексом (e) – external).

Свойства внутренних сил:

1) $\sum \vec{F}_i^{(i)} = 0$;

2) $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)} = 0$. Док-во: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$, так как $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

Будем считать, что постоянство расстояний между точками твёрдого тела обеспечивается внутренними силами, тогда связи постоянства этих расстояний идеальны. Докажем это.

Доказательство:

Теперь между точками твёрдого тела действуют внутренние силы, обеспечивающие связи, поэтому будем называть их реакциями связей и обозначать $\vec{R}_{ij}$. $(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{r}_i - \vec{r}_j) = C_{ij} = \text{const}$ – связи постоянства расстояний. Продифференцируем по времени, получим: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) = 0$. Домножим на интервал времени: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j) = 0$. Запишем элементарную работу реакций на виртуальном перемещении: $\delta A = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i, \delta\vec{r}_i)$, где $\vec{R}_i = \sum\limits_{j=1}^{N}\vec{R}_{ij}$. Домножим элементарную работу реакций на виртуальном перемещении на 2 и распишем следующим образом: $2\delta A = 2\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i, \delta\vec{r}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(\vec{R}_{ij}, \delta\vec{r}_i) + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_{ji}, \delta\vec{r}_j) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(\vec{R}_{ij}, \delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j)$. Учтём, что $\vec{R}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$, то есть $\vec{R}_{ij} = \lambda_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, тогда получаем: $2\delta A = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j) = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Rightarrow$ связи идеальны. □

Однако, отметим, что в общем случае постоянство расстояний необязательно обеспечивается внутренними силами. Пример: тройка самолётов, которые летят так, что всё время образуют правильный треугольник. Постоянство расстояний между ними обеспечивается, но силы, при помощи которых это достигается, создаются двигателями. Эти силы не направлены навстречу друг другу. Таким образом, когда мы говорим о твёрдом теле и о постоянстве расстояний между его точками, мы имеем в виду реальные физические тела, а не геометрические образования, которые могут возникать в некоторых ситуациях.

Основные теоремы динамики для систем с идеальными связями

Пусть задана система материальных точек $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ с массами $m_1, \ldots, m_N$, на которые действуют силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$. Пусть на систему наложены связи $A\dot{\vec{r}} + \vec{b} = 0$, и возникают реакции $\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_N$.

Введём определения.

$m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ – масса системы.

$\vec{r}_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m}$ – центр масс системы.

$\vec{P} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i$ – импульс системы.

Импульс системы равен суммарной массе точек системы, умноженной на скорость центра масс: $\vec{P} = m\dot{\vec{r}}_C$.

$\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$ – кинетический момент системы относительно точки O, где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, исходящий из точки O.

$T = \sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{m_i\dot{\vec{r}}_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы.

Выведем теорему об изменении импульса системы. $\vec{P} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \;\Rightarrow\; \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i$. Подставим уравнение Ньютона с реакциями связей $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$, учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(i)} + \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{R}_i^{(i)} = 0$, получим: $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} + \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{R}_i^{(e)}$.

Теорема 8. ***(Теорема об изменении импульса системы)*** *Скорость изменения импульса равна равна сумме всех внешних сил и внешних реакций:*

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i^{(e)}. \tag{8.2}$$

Следствие: для системы свободных точек скорость изменения импульса равна сумме всех внешних сил.

Утверждение 5. *Если связи системы допускают сдвиг всех точек системы как твёрдого тела вдоль направления, задаваемого постоянным вектором $\vec{e}$, то $\dfrac{dP_e}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e})$, где $P_e = (\vec{P}, \vec{e})$.*

Доказательство:

Рассмотрим виртуальное перемещение $\delta\vec{r} = (\vec{e}, \vec{e}, \ldots, \vec{e})$. Умножим уравнение (8.2) скалярно на $\vec{e}$, учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i^{(e)}, \vec{e}) = 0$, так как связи идеальны, получим: $\dfrac{dP_e}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e})$. □

Закон сохранения импульса в случае, если связи допускают сдвиг всех точек системы как твёрдого тела вдоль направления, задаваемого постоянным вектором $\vec{e}$: если $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e}) = 0$, то $\vec{P}_e = \text{const}$.

Выведем теорему об изменении кинетического момента системы. $\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i \;\Rightarrow\; \dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\ddot{\vec{r}}_i$. Первая сумма равна 0, а во вторую подставим уравнение Ньютона с реакциями связей $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$, учитывая, что сумма моментов всех внутренних сил равна 0, получим: $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \text{mom}_O\vec{F}_i^{(e)} + \sum\limits_{i=1}^{N} \text{mom}_O\vec{R}_i^{(e)}$, где $\text{mom}_O\vec{F}_i^{(e)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$ и $\text{mom}_O\vec{R}_i^{(e)} = \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{(e)}$.

Теорема 9. ***(Теорема об изменении кинетического момента системы)***

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} mom_O\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} mom_O\vec{R}_i^{(e)}. \tag{8.3}$$

Следствие: для системы свободных точек скорость изменения кинетического момента равна сумме моментов всех внешних сил.

Лекция 9

Основные теоремы динамики для систем с идеальными связями (продолжение)

Утверждение 6. *Пусть связи идеальны и допускают поворот всей системы как твёрдого тела вокруг неподвижной оси $O\vec{e}$, где $\vec{e}$ – постоянный направляющий вектор оси, тогда* $\dfrac{dK_e}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N}(mom_O\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e})$, *где* $K_e = (\vec{K}, \vec{e})$.

Доказательство:

Общий вид виртуальных перемещений твёрдого тела записывается следующим образом: $\delta\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{r}_i \quad \forall\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Так как связи допускают поворот всей системы как твёрдого тела вокруг неподвижной оси $O\vec{e}$, то вектор $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1, \ldots, \delta\vec{r}_N)$, где $\delta\vec{r}_i = e \times \vec{r}_i$, является вектором виртуальных перемещений. Так как связи идеальны, запишем принцип Даламбера-Лагранжа: $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \vec{e} \times \vec{r}_i) = 0 \Rightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i, \vec{e} \times \vec{r}_i) - \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i, \vec{e} \times \vec{r}_i) = 0$. Преобразуем первое сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i, \vec{e} \times \vec{r}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{e}, \vec{r}_i \times m_i\ddot{\vec{r}}_i) = \left(\vec{e}, \dfrac{d}{dt}\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i)\right) = \dfrac{d}{dt}(\vec{e}, \vec{K}_O) = \dfrac{dK_e}{dt}$. Преобразуем вторую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i, \vec{e}\times\vec{r}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{e}, \vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \left(\vec{e}, \sum\limits_{i=1}^{N}\mathrm{mom}_O\vec{F}_i\right) = \left(\vec{e}, \sum\limits_{i=1}^{N}\mathrm{mom}_O\vec{F}_i^{(e)}\right)$ (учли, что сумма моментов всех внутренних сил равна 0). Подставляем преобразованные выражения в принцип Даламбера-Лагранжа: $\dfrac{dK_e}{dt} - \sum\limits_{i=1}^{N}(\mathrm{mom}_O\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e}) = 0 \Rightarrow \dfrac{dK_e}{dt} =$ $\sum\limits_{i=1}^{N}(\mathrm{mom}_O\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e})$. □

Замечание: если в условиях утверждения (6) дополнительно выполняется $\sum\limits_{i=1}^{N}(\mathrm{mom}_O\vec{F}_i^{(e)}, \vec{e}) = 0$, то $K_e = \mathrm{const}$.

Введём определение: действительное перемещение – это вектор действительной скорости, домноженный на некоторый размерный коэффициент, обеспечивающий перевод в размерность перемещения: $d\vec{r} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}d\alpha$, где $\vec{r}(t)$ – действительное движение, которое дозволяется связями.

Примеры:

Если на систему наложены геометрические связи $f_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$, то вектор действительной скорости $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ условию $\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{\partial f_i}{\partial\vec{r}_i}\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} + \dfrac{\partial f_i}{\partial t} = 0$. Если связи заданы в дифференциальной форме: $A\dot{\vec{r}} + \vec{b} = 0$, то вектор $\dot{\vec{r}}$ и является вектором действительной скорости. Если теперь этот вектор действительной скорости домножить на размерный коэффициент, переводящий его в перемещение, то получим вектор действительного перемещения.

Если геометрические связи не зависят от времени, то есть $f_i = f_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)$, или если в связях, заданных в дифференциальной форме, $\vec{b} = 0$, то уравнения

для действительных перемещений совпадают с уравнениями для виртуальных перемещений. В этом случае любое действительное перемещение является также и виртуальным перемещением. Говорят: действительные перемещения лежат среди виртуальных.

Теорема 10. ***(Теорема об изменении кинетической энергии системы)*** *Если связи идеальны и действительные перемещения системы лежат среди виртуальных, то выполняется следующее соотношение:*

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_i). \tag{9.1}$$

$\sum\limits_{i=1}^{N} (\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_i)$ называется мощностью заданных силы.

Доказательство:

Так как связи идеальны, запишем принцип Даламбера-Лагранжа, учитывая, что действительные перемещения лежат среди виртуальных: $\sum\limits_{i=1}^{N} (m_i\ddot{\vec{r}} - \vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}) = 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{i=1}^{N} (m_i\ddot{\vec{r}},\, \dot{\vec{r}}) = \sum\limits_{i=1}^{N} (\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}})$. Преобразуем сумму из левой части: $\sum\limits_{i=1}^{N} (m_i\ddot{\vec{r}},\, \dot{\vec{r}}) = \dfrac{d}{dt} \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{m_i(\dot{\vec{r}}_i,\, \dot{\vec{r}}_i)}{2} = \dfrac{dT}{dt}$. Таким образом, $\dfrac{dT}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} (\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_i)$. □

Введём определения.

Силы называются потенциальными, если существует функция $V(\vec{r}_1,\, \ldots,\, \vec{r}_N,\, t)$ такая, что $\vec{F}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$.

Силы называются консервативными, если они являются потенциальными и функция V не зависит от времени, то есть если существует функция $V(\vec{r}_1,\, \ldots,\, \vec{r}_N)$ такая, что $\vec{F}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$. В случае консервативных сил $\sum\limits_{i=1}^{N} (\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_i) = -\sum\limits_{i=1}^{N} \left(\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i},\, \dot{\vec{r}}_i \right) = -\dfrac{dV}{dt}$.

Закон сохранения энергии: если выполняются условия теоремы об изменении кинетической энергии системы и заданные силы консервативны, то полная механическая энергия системы сохраняется во время движения:

$$T + V = h = \text{const}\,. \tag{9.2}$$

Доказательство:

$\dfrac{dT}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} (\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_i) = -\dfrac{dV}{dt} \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{dt}(T+V) = 0 \;\Rightarrow\; T + V = \text{const}.$ □

Замечание: для системы свободных точек выполняются все 3 теоремы динамики, выписанные выше.

Общие теоремы динамики в относительном движении

Оси Кёнига (система координат Кёнига) – это система координат $Cx_1x_2x_3$, где C – центр масс системы, $Cx_1 \parallel Ox$, $Cx_2 \parallel Oy$, $Cx_3 \parallel Oz$. Таким образом, это система координат, начало которой совпадает с центром масс системы, а оси параллельны осям абсолютной системы координат.

Пусть $\vec{r}_C$ и $\vec{r}_i$ – радиус-векторы центра масс и i-й точки в абсолютной системе координат соответственно, а $\vec{\rho}_i$ – радиус-вектор i-й точки в системе координат Кёнига.

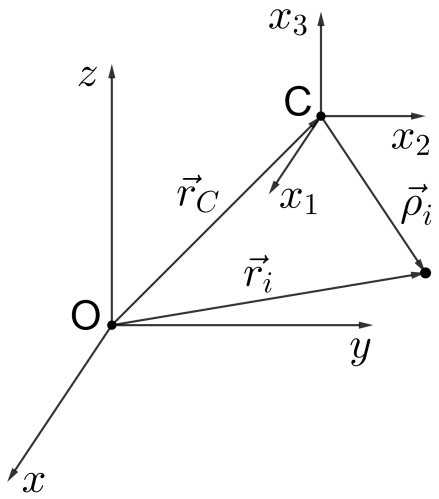

Рис. 9.1. Оси Кёнига

Выпишем соотношение для радиус-векторов: $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$. Запишем формулу центра масс в системе координат Кёнига: $\vec{\rho}_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\rho}_i}{m} = 0$, где $m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\rho}_i = 0$ в любой момент времени $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{\rho}}_i = 0$.

В осях Кёнига импульс системы всегда равен нулю: $\vec{p}_{Ken} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i = 0$.

Введём обозначения:

$\vec{K}_C = \vec{r}_C \times m\dot{\vec{r}}_C$ – кинетический момент центра масс;

$\vec{K}_{Ken} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i\dot{\vec{\rho}}_i$ – кинетический момент системы в осях Кёнига;

$T_C = \dfrac{m\dot{\vec{r}}_C^2}{2}$ – кинетическая энергия центра масс;

$T_{Ken} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i^2$ – кинетическая энергия системы в осях Кёнига.

Также будем использовать прежние обозначения:

$\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$ – кинетический момент системы в абсолютной системе координат;

$T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$ – кинетическая энергия системы в абсолютной системе координат.

Формулы Кёнига:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{K}_{Ken}; \tag{9.3}$$

$$T = T_C + T_{Ken}. \tag{9.4}$$

Докажем формулу (9.3). Подставим в формулу для $\vec{K}_O$ выражение $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$: $\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{r}_C+\vec{\rho}_i)\times m_i(\dot{\vec{r}}_C+\dot{\vec{\rho}}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_C\times m_i\dot{\vec{r}}_C+\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_C\times m_i\dot{\vec{\rho}}_i+\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i\times m_i\dot{\vec{r}}_C+\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i\times m_i\dot{\vec{\rho}}_i$. Преобразуем первую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_C \times m_i\dot{\vec{r}}_C = \vec{r}_C \times \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_C = \vec{r}_C \times m\dot{\vec{r}}_C = \vec{K}_C$. Преобразуем четвёртую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i \times m_i\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{K}_{Ken}$. Преобразуем вторую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_C \times m_i\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{r}_C \times \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i = 0$. Преобразуем третью сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_C = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\rho}_i\right) \times \dot{\vec{r}}_C = 0$. Таким образом, $\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{K}_{Ken}$.

Докажем формулу (9.4). Подставим в формулу для T выражение $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$: $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\rho}}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_C^2 + \sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\dot{\vec{\rho}}_i,\, \dot{\vec{r}}_C) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i^2$. Преобразуем первую сумму: $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_C^2 = \frac{m\dot{\vec{r}}_C^2}{2} = T_C$. Преобразуем третью сумму: $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i^2 = T_{Ken}$. Преобразуем вторую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\dot{\vec{\rho}}_i,\, \dot{\vec{r}}_C) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\rho}}_i,\, \dot{\vec{r}}_C\right) = 0$. Таким образом, $T = T_C + T_{Ken}$.

Теорема 11. ***(Теорема об изменении кинетического момента системы в осях Кёнига)*** *Пусть связи идеальны и допускают поворот всей системы как твёрдого тела вокруг оси $C\vec{e}$, где C – центр масс системы, $\vec{e}$ – постоянный направляющий вектор, тогда выполняется следующее соотношение:*

$$\frac{d(\vec{K}_{Ken},\, \vec{e})}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(mom_C\vec{F}_i^{(e)},\, \vec{e}\right) = \left(\sum_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^{(e)},\, \vec{e}\right). \tag{9.5}$$

Доказательство:

Система допускает поворот вокруг оси $C\vec{e}$, поэтому среди виртуальных перемещений существует $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1, \ldots, \delta\vec{r}_N)$, где $\delta\vec{r}_i = \vec{e} \times \vec{\rho}_i$. Запишем для этого виртуального перемещения принцип Даламбера-Лагранжа, учитывая, что $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$: $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(m_i(\ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{\rho}}_i) - \vec{F}_i,\, \vec{e}\times\vec{\rho}_i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_C,\, \vec{e} \times \vec{\rho}_i) + \sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{\rho}}_i,\, \vec{e} \times \vec{\rho}_i) - \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \vec{e} \times \vec{\rho}_i) = 0$. Преобразуем первую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_C,\, \vec{e} \times \vec{\rho}_i) = \left(\ddot{\vec{r}}_C,\, \vec{e}\times\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\rho}_i\right) = 0$. Преобразуем вторую сумму: $\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{\rho}}_i,\, \vec{e} \times \vec{\rho}_i) = \left(\vec{e},\, \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i \times m_i\ddot{\vec{\rho}}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e},\, \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i \times m_i\dot{\vec{\rho}}_i\right) = \frac{d(\vec{K}_{Ken},\, \vec{e})}{dt}$. Преобразуем третью

сумму, учитывая, что сумма моментов внутренних сил равна нулю: $\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \vec{e}\times\vec{\rho}_i) = \left(\vec{e},\, \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i\right) = \left(\vec{e},\, \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i^{(e)}\right)$. Таким образом, $\dfrac{d(\vec{K}_{Ken},\, \vec{e})}{dt} - \left(\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i^{(e)},\, \vec{e}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d(\vec{K}_{Ken},\, \vec{e})}{dt} = \left(\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i^{(e)},\, \vec{e}\right)$. □

Теорема 12. ***(Теорема об изменении кинетической энергии системы в осях Кёнига)*** *Пусть связи идеальны и действительные перемещения системы лежат среди виртуальных, а также пусть связи допускают сдвиг системы как твёрдого тела вдоль любой координатной оси абсолютной системы координат, тогда выполняется следующее соотношение:*

$$\frac{dT_{Ken}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{\rho}}_i). \tag{9.6}$$

Доказательство:

Связи допускают сдвиг системы как твёрдого тела вдоль любой координатной оси абсолютной системы координат, поэтому $m\ddot{\vec{r}}_C = \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ (это следует из теоремы об изменении импульса системы, применённой для каждой оси, при этом вместо суммы только внешних сил можно писать сумму всех сил, так как сумма всех внутренних сил равна нулю). Связи идеальны и действительные перемещения системы лежат среди виртуальных, значит, по теореме об изменении кинетической энергии системы $\dfrac{dT}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_i)$. Учитывая, что $T = T_C + T_{Ken} = \dfrac{m\dot{\vec{r}}_C^{\,2}}{2} + T_{Ken}$, получаем: $\dfrac{dT}{dt} = m(\dot{\vec{r}}_C,\, \ddot{\vec{r}}_C) + \dfrac{dT_{Ken}}{dt}$. Тогда, учитывая, что $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$, получаем: $m(\dot{\vec{r}}_C,\, \ddot{\vec{r}}_C) + \dfrac{dT_{Ken}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_C) + \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{\rho}}_i) \;\Rightarrow\; \dfrac{dT_{Ken}}{dt} - \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{\rho}}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_C) - m(\dot{\vec{r}}_C,\, \ddot{\vec{r}}_C) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_C\right) - (\dot{\vec{r}}_C,\, m\ddot{\vec{r}}_C) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i,\, \dot{\vec{r}}_C\right) - \left(\dot{\vec{r}}_C,\, \sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i\right) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dT_{Ken}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\, \dot{\vec{\rho}}_i)$. □

Динамика и статика свободного твёрдого тела. Момент инерции твёрдого тела относительно оси

Рассмотрим ось $O\vec{e}$.

$I_e = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i d_i^2$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси $O\vec{e}$, где d_i – расстояние от i-й точки до оси $O\vec{e}$.

Пусть $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$ и точка O неподвижна, тогда $\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i \;\Rightarrow\; T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2$. На следующей лекции убедимся, что $T = \dfrac{1}{2}I_e\omega^2$.

Лекция 10

Момент инерции твёрдого тела относительно оси (продолжение)

Рассмотрим твёрдое тело и будем считать, что существует точка O этого тела, которая остаётся неподвижной во время движения тела. Пусть $\vec{\omega}$ – угловая скорость твёрдого тела. Так как точка O неподвижна, то винтовая ось будет через неё проходить. Обозначим направляющий вектор винтовой оси $\vec{e}$, причём $\vec{\omega} \parallel \vec{e}$, а саму ось обозначим l. Таким образом, $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$.

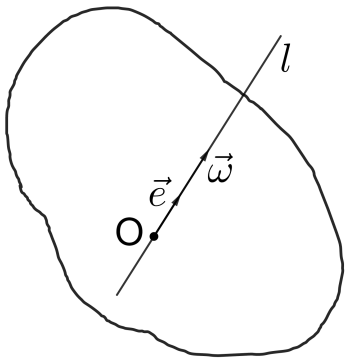

Рис. 10.1. Момент инерции твёрдого тела относительно оси

Поместим начало координат в точку O. Тогда по формуле Эйлера скорость любой точки твёрдого тела $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Запишем выражение для кинетической энергии твёрдого тела: $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i, \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$.

Используем формулу «$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$»: $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}, \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{\omega}))$. Используем $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$: $T = \frac{\omega^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{e}, \vec{e} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{e})) = \frac{\omega^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(r_i^2 - (\vec{e}, \vec{r}_i)^2)$.

Пусть d – расстояние от точки $\vec{r}$ до прямой l, тогда по теореме Пифагора $r^2 = (\vec{e}, \vec{r})^2 + d^2 \;\Rightarrow\; d^2 = r^2 - (\vec{e}, \vec{r})^2$.

Таким образом, $T = \frac{\omega^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i d_i^2$.

Введём определение момента инерции твёрдого тела относительно оси l:

$$I_l = \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2. \tag{10.1}$$

Тогда получаем формулу кинетической энергии твёрдого тела через момент инерции относительно оси l:

$$T = \frac{I_l \omega^2}{2}. \tag{10.2}$$

Пусть C – центр масс твёрдого тела, прямая $\alpha \parallel l$ проходит через C, d – расстояние между α и l, m – масса твёрдого тела.

Теорема 13. ***(Теорема Гюйгенса-Штейнера)***

$$I_l = I_\alpha + md^2. \tag{10.3}$$

Доказательство:

При сдвиге точки O вдоль прямой l момент инерции относительно оси $O\vec{e}$ не меняется, так как он зависит только от расстояния точек твёрдого тела до оси, поэтому, не уменьшая общности, выберем положение точки O так, чтобы она была проекцией точки C на прямую l. Пусть $\vec{\rho}$ – радиус-вектор, идущий из точки C, $\vec{r}$ – радиус-вектор, идущий из точки O.

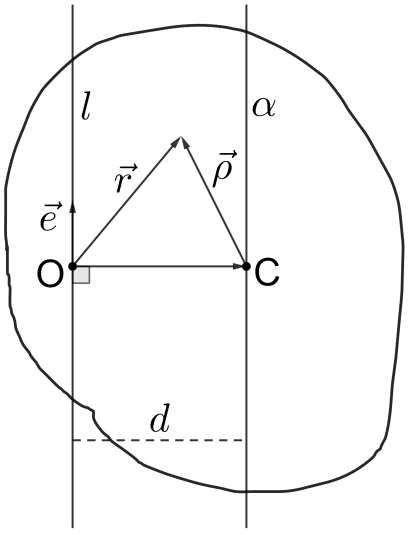

Рис. 10.2. Оси α и l

Таким образом, $\vec{r} = \vec{OC} + \vec{\rho}$ и $(\vec{OC}, \vec{e}) = 0$.

Используем выведенную ранее формулу: $I_l = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(r_i^2 - (\vec{e}, \vec{r}_i)^2) = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \left(OC^2 + 2(\vec{OC}, \vec{\rho}_i) + \rho_i^2 - (\vec{e}, \vec{\rho}_i)^2\right)$. Рассмотрим слагаемые по отдельности:

$\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \cdot OC^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i d^2 = md^2$;

$2\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{OC}, \vec{\rho}_i) = 2\left(\vec{OC}, \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\rho}_i\right) = 0$, так как $\vec{\rho}$ – радиус-вектор, идущий из центра масс;

$\sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\rho_i^2 - (\vec{e}, \vec{\rho}_i)^2) = I_\alpha$.

Таким образом, $I_l = I_\alpha + md^2$. □

Кинетическая энергия и кинетический момент для твёрдого тела с неподвижной точкой

Пусть точка O в твёрдом теле неподвижна, а $\vec{r}$ – радиус-вектор, идущий из этой точки. По формуле Эйлера скорость i-й точки $\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Как ранее мы

получили, кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i, \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$. Заметим, что кинетическая энергия является квадратичной формой относительно угловой скорости:

$$T = \frac{(J_O\vec{\omega}, \vec{\omega})}{2}, \tag{10.4}$$

где J_O – некоторая матрица, зависящая от положения точки O.

Покажем, что J_O – симметричная матрица, то есть что $J_O^T = J_O$. Рассмотрим билинейную форму $B(\vec{u}, \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{u} \times \vec{r}_i, \vec{\omega} \times \vec{r}_i)$, где $\vec{u}$ – некоторый вектор. По явному виду этой билинейной формы видно, что она симметричная, то есть $B(\vec{u}, \vec{\omega}) = B(\vec{\omega}, \vec{u})$. Значит, её матрица J_O симметрична.

Теперь рассмотрим кинетический момент твёрдого тела $\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$. Учитывая, что $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$, можно заметить связь кинетической энергии и кинетического момента:

$$T = \frac{(\vec{K}_O, \vec{\omega})}{2}. \tag{10.5}$$

Таким образом, учитывая, что $T = \frac{(J_O\vec{\omega}, \vec{\omega})}{2}$, получаем:

$$\vec{K}_O = J_O\vec{\omega}. \tag{10.6}$$

Из этой формулы следует, что J_O – линейный оператор, отображающий пространство угловых скоростей на пространство кинетических моментов. Оператор J_O называется оператором инерции или тензором инерции.

Из формулы (10.5) следует:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} = \frac{\vec{K}_O}{2}. \tag{10.7}$$

Матрица тензора инерции

Рассмотрим изменение матрицы тензора инерции при переходе к новым координатам. Будем считать, что переход к новым координатам ортогональный. Пусть сначала была система координат $Oxyz$, а потом поворотом из неё была получена система координат $Ox'y'z'$. Угловую скорость и матрицу тензора инерции в исходной системе координат будем обозначать $\vec{\omega}$ и J_O соответственно, а в новой – $\vec{\omega}'$ и J'_O, причём $\vec{\omega} = R\vec{\omega}'$, где R – некоторая ортогональная матрица. Запишем кинетическую энергию в двух системах координат, учитывая, что при выполняемом переходе от одной системы координат к другой она не изменится: $T = \frac{1}{2}(J_O\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2}(J'_O\vec{\omega}', \vec{\omega}')$.

Подставим $\vec{\omega} = R\vec{\omega}'$, получим: $T = \frac{1}{2}(J_O R\vec{\omega}', R\vec{\omega}') = \frac{1}{2}(R^T J_O R\vec{\omega}', \vec{\omega}')$. Таким образом, учитывая, что выполняемые преобразования верны для любой угловой скорости $\vec{\omega}'$, получаем выражение для матрицы тензора инерции в новой системе координат:

$$J'_O = R^T J_O R. \tag{10.8}$$

Теперь попробуем понять, как выглядит матрица J, если её расписывать через координаты точек твёрдого тела. Запишем кинетический момент твёрдого тела: $\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = J_O\vec{\omega}$. Воспользуемся формулой «$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$»: $\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i)) = J_O\vec{\omega} \;\Rightarrow\; J_O = \sum\limits_{i=1}^{N} J_i$, где $J_i\vec{\omega} = m_i(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i))$. Рассмотрим выражение $(\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{r}))$. Учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z$, получаем: $\vec{\omega} r^2 = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ и $\vec{r}(\vec{\omega}, \vec{r}) = \begin{pmatrix} \omega_x x^2 + \omega_y xy + \omega_z xz \\ \omega_x xy + \omega_y y^2 + \omega_z yz \\ \omega_x xz + \omega_y yz + \omega_z z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$. Таким образом, $J_i = m_i \begin{pmatrix} y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & x_i^2+z_i^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2 \end{pmatrix}$. Значит, $J_O = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$, где $J_{xx} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) = I_{Ox}$, $J_{yy} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + z_i^2) = I_{Oy}$, $J_{zz} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + y_i^2) = I_{Oz}$, $J_{xy} = -\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i y_i$, $J_{xz} = -\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i z_i$, $J_{yz} = -\sum\limits_{i=1}^{N} m_i y_i z_i$. Величины J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} называются «осевые моменты инерции», а величины J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} называются «центробежные момент инерции».

Свойства тензора инерции. Главные оси инерции

1) Симметричен.

2) Положительно определён, так как кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}(J_O\vec{\omega}, \vec{\omega}) \geq 0 \;\forall\vec{\omega}$.

3) Неравенство треугольника: $J_{xx} + J_{yy} \geq J_{zz}$, $J_{yy} + J_{zz} \geq J_{xx}$, $J_{zz} + J_{xx} \geq J_{yy}$ (если осевые моменты рассматривать как длины отрезков, то из них всегда можно составить треугольник). Докажем неравенство $J_{xx} + J_{yy} \geq J_{zz}$ (остальные доказываются аналогично). $J_{xx} + J_{yy} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i((y_i^2 + z_i^2) + (x_i^2 + z_i^2)) = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + x_i^2) + 2\sum\limits_{i=1}^{N} m_i z_i^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + x_i^2) = J_{zz}$.

Главные оси инерции – система координат, в которой матрица тензора инерции диагональна: $J_O = \mathrm{diag}(A, B, C)$. Если неподвижная точка O является центром масс твёрдого тела, то главные оси инерции называются «главные центральные оси

инерции». Так как тензор инерции симметричен, то его всегда можно привести к главным осям.

Пусть $\vec{\omega} = (p, q, r)$. Тогда в главных осях кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$ и кинетический момент $\vec{K}_O = (Ap, Bq, Cr)$.

Эллипсоид инерции – это эллипсоид, жёстко связанный с твёрдым телом и описывающийся уравнением $(J_O\vec{r}, \vec{r}) = 1$. В главных осях уравнение эллипсоида инерции принимает вид $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$.

Уравнения движения свободного твёрдого тела

Пусть $\vec{r}_C = (x_C, y_C, z_C)$ – центр масс твёрдого тела, J_O – матрица тензора инерции, m – масса твёрдого тела.

По теореме о движении центра масс: $m\ddot{\vec{r}}_C = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)}$. По теореме об изменении кинетического момента: $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i^{(e)}$.

$\vec{K}_O = J_O\vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$ (φ, ψ, θ – углы Эйлера), $J_O = J_O(\varphi, \psi, \theta)$ (если углы Эйлера принимать в качестве координат), значит, $\vec{K}_O = \vec{K}_O(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$. Возьмём в качестве координат, определяющих положение твёрдого тела в пространстве, набор $(x_C, y_C, z_C, \varphi, \psi, \theta)$. Предполагаем, что силы, действующие на точки твёрдого тела, являются ньютоновскими: $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_C, \dot{\vec{r}}_C, \varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$. Тогда уравнения $m\ddot{\vec{r}}_C = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)}$ и $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i^{(e)}$ являются шестью уравнениями второго порядка относительно шести неизвестных. Таким образом, для однозначного определения движения твёрдого тела необходимо задать его начальные положения и скорости. Иногда вместо уравнения $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i^{(e)}$ используют теорему об изменении кинетического момента в осях Кёнига: $\dfrac{d\vec{K}_{Ken}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_C \vec{F}_i^{(e)}$.

Эквивалентность систем сил

Системы сил $\{\vec{F}_i\}$ и $\{\vec{F}_i'\}$, где $i = 1, \ldots, N$, называются эквивалентными, если $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i'$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i'$. Таким системы сил задают одно и то же движение твёрдого тела при одинаковых начальных условиях.

Утверждение 7. *Если выполнены условия* $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i'$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{N} mom_O \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} mom_O \vec{F}_i'$, *то для любой точки* A *будет выполнено* $\sum\limits_{i=1}^{N} mom_A \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} mom_A \vec{F}_i'$.

Доказательство:

Пусть $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, идущий из точки O, $\vec{r}_i{}'$ – радиус-вектор, идущий из точки A, тогда $\vec{r}_i = \vec{OA} + \vec{r}_i{}'$. Выполним преобразования с суммой момен-

тов относительно точки O для первой системы сил: $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{OA}_i \times \vec{F}_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i = \vec{OA} \times \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_A \vec{F}_i$. Выполним аналогичные преобразования с суммой моментов относительно точки O для второй системы сил, получим: $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i' = \vec{OA} \times \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i' + \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_A \vec{F}_i'$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i'$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i'$, то $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_A \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_A \vec{F}_i'$. □

Таким образом, если суммы сил совпадают, то для проверки эквивалентности систем сил можно считать суммы моментов сил относительно любой точки.

Рассмотрим в качестве примера тело в однородном поле тяжести: $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$. Посчитаем сумму сил: $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{g} = m\vec{g}$. Посчитаем сумму моментов относительно центра масс C: $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_C \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i m_i \right) \times \vec{g} = 0$. Таким образом, в однородном поле тяжести силы, действующие на твёрдое тело, приводятся (система эквивалентна) к силе, приложенной к центру масс тела и равной $m\vec{g}$.

Условия равновесия

Выпишем уравнения движения: $m\ddot{\vec{r}}_C = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)}$ и $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_O \vec{F}_i^{(e)}$.

Утверждение 8. *Пусть в начальный момент тело покоилось, то есть* $\dot{\vec{r}}_i = 0 \ \forall i$, *тогда оно будет покоиться и во все последующие моменты времени тогда и только тогда, когда в любой момент времени в начальном положении* $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} = 0$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{N} mom_O \vec{F}_i^{(e)} = 0$.

В качестве примера рассмотрим плоское тело в однородном поле тяжести, опирающееся на горизонтальную прямую. Будем считать, что прямая не оказывает сопротивления движению вдоль неё, то есть реакция направлена по нормали к прямой в точке соприкосновения (связь идеальная). Тогда условие нахождения тела в равновесии состоит в том, что точка C (центр масс тела) должна при проецировании на прямую попадать в точку A.

Лекция 11

Небесная механика. Центральные силы

Сила $\vec{F}$ называется центральной, если $\vec{F} = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора.

Напишем уравнение движения точки под действием центральной силы: $m\ddot{\vec{r}} = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\vec{e}_r$. Рассмотрим момент силы $\vec{F}$ относительно начала координат: $\mathrm{mom}_O\vec{F} = \vec{r} \times F\vec{e}_r = 0$, так как $\vec{e}_r \parallel \vec{r}$. Тогда при движении точки в поле центральных сил сохраняется кинетический момент: $\vec{K}_O = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = \mathrm{const}$. Значит, траектория лежит в неподвижной плоскости, проходящей через начало координат и ортогональной постоянному вектору $\vec{K}_O$. Выберем систему координат так, чтобы траектория точки лежала в плоскости Oxy и $\vec{K}_O = K_O\vec{e}_z$. Будем описывать движение точки в этой плоскости в полярной системе координат (r, φ).

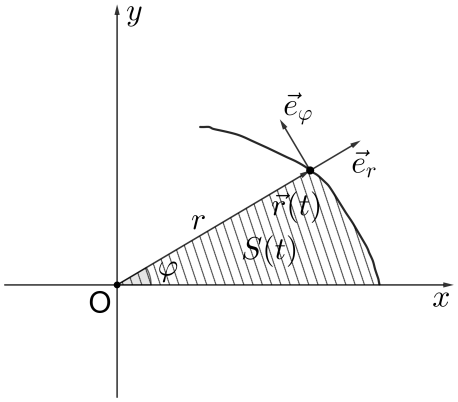

Рис. 11.1. Движение в поле центральных сил

Введём векторы $\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ и $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, причём $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ и $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$. Тогда $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Выразим кинетический момент точки в полярных координатах: $\vec{K}_O = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = r\vec{e}_r \times m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z = \mathrm{const} \;\Rightarrow$ $r^2\dot{\varphi} = c = \mathrm{const}$ (ввели обозначение c).

Пусть $S(t)$ – площадь между какой-либо неподвижной осью, проходящей через начало координат (это необязательно ось Ox, как на рисунке), траекторией точки и её радиус-вектором (по сути, это площадь, заметаемая радиус-вектором, начиная с некоторого момента времени). Найдём, с какой скоростью изменяется эта площадь. За время $dt \to +0$ радиус-вектор заметает дугу, площадь которой с точностью до бесконечно малых второго порядка совпадает с площадью треугольника с основанием $r\dot{\varphi}\,dt$ и высотой r, значит, его площадь равна $\dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,dt$. Тогда получаем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{c}{2}. \tag{11.1}$$

Таким образом, скорость изменения площади сектора, заметаемого радиус-вектором, постоянна. Получаем закон, называемый «интеграл площадей»: за равные интервалы времени радиус-вектор заметает одинаковые площади.

Найдём ускорение точки в полярных координатах. Выпишем формулу для скорости точки: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, и продифференцируем её по времени, получим: $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + +\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$. Но уравнение движения в поле центральных сил не содержит $\vec{e}_\varphi$: $m\ddot{\vec{r}} = F\vec{e}_r$. Значит, коэффициент перед $\vec{e}_\varphi$ в формуле ускорения равен нулю: $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$. Можно это показать и другим образом: продифференцируем по времени соотношение $r^2\dot{\varphi} = c$, получим: $2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$. Будем предполагать, что $c \neq 0$ (случай $c = 0$ соответствует движению по прямой, проходящей через начало координат). При $c \neq 0$ во время движения $r \neq 0$ и $\dot{\varphi}$ сохраняет свой знак. Тогда можем поделить уравнение $2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$ на r, получим: $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$. Подставим ускорение в уравнение движения, получим: $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F$.

Таким образом, из уравнения движения и из интеграла площадей получаем систему: $\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \\ r^2\dot{\varphi} = c \end{cases}$.

Утверждение 9. *Пусть 1) любая траектория точки лежит в неподвижной плоскости, проходящей через начало координат, 2) выполняется закон площадей $r^2\dot{\varphi} = c$, тогда сила является центральной, и наоборот.*

Силы, зависящие только от расстояния до центра

Пусть $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$. Покажем, что тогда сила $\vec{F}$ потенциальна, то есть существует силовая функция $U(\vec{r})$ такая, что $\vec{F} = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}}$. Убедимся, что силовую функцию можно взять в виде $U = \displaystyle\int F(r)\,dr$. Проверим: $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \dfrac{dU}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial \vec{r}}$. Учитывая, что $\dfrac{dU}{dr} = F$ и $\dfrac{\partial r}{\partial \vec{r}} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$, получаем: $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} = F\vec{e}_r = \vec{F}$.

Кроме этого, силовая функция не зависит от времени, значит, сила консервативна, тогда $V(r) = -U(r)$ – потенциальная энергия. Значит, выполняется закон сохранения энергии: $\dfrac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + V(r) = h = \text{const}$. Учитывая, что $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi$, получаем: $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Кроме этого, $r^2\dot{\varphi} = c \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = \dfrac{c}{r^2}$, тогда $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + \dfrac{c^2}{r^2}$. Подставим это выражение для скорости в закон сохранения энергии: $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{mc^2}{2r^2} + V(r) = h$. Функция

$$V_c(r) = V(r) + \frac{mc^2}{2r^2} \tag{11.2}$$

называется «приведённая потенциальная энергия». Тогда закон сохранения энергии записывается в следующем виде:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_c(r) = h. \tag{11.3}$$

Выпишем систему из предыдущего пункта: $\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \\ r^2\dot{\varphi} = c \end{cases}$. Учитём, что $F = -\dfrac{dV}{dr}$, а также выразим из второго уравнения $\dot{\varphi}$ и подставим в первое, получим: $m\ddot{r} = -\dfrac{dV}{dr} + \dfrac{mc^2}{r^3}$. Заметим, что $\dfrac{dV_c}{dr} = \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{mc^2}{r^3}$. Тогда получаем:

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_c}{dr}. \tag{11.4}$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением движения точки массы m по прямой в области $r > 0$ под действием потенциальной силы, у которой потенциальная энергия равна V_c.

Интегрирование уравнений движения

Выпишем систему уравнений движения: $\begin{cases} m\ddot{r} = -\dfrac{dV_c}{dr} \\ r^2\dot{\varphi} = c \end{cases}$.

Из закона сохранения энергии получаем: $\dot{r} = \pm\sqrt{\dfrac{2(h - V_c)}{m}}$ (знак «+» соответствует движению, при котором увеличивается расстояние до начала координат, а знак «−» – движению, при котором уменьшается расстояние до начала координат). Проинтегрируем это уравнение: $dt = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}\dfrac{dr}{\sqrt{h - V_c}} \;\Rightarrow\; t - t_0 = \displaystyle\int_{r(t_0)}^{r(t)} \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{\sqrt{h - V_c(r)}}$.

Теперь найдём закон изменения угла: $\dot{\varphi} = \dfrac{c}{r^2(t)} \;\Rightarrow\; \varphi(t) - \varphi(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{c\,dt}{r^2(t)}$.

Рассмотрим движение в потенциальной яме. На прямой r движение будет представлять из себя колебания между граничными значениями $r_1(h)$ и $r_2(h)$ такими, что $V_c(r_1) = V_c(r_2) = h$. В плоскости Oxy, в которой движется точка, траектория будет кольцеобразной с переменным радиусом от r_1 до r_2. Так как знак $\dot{\varphi} = \dfrac{c}{r^2}$ постоянен (он совпадает со знаком c), то угол будет постоянно изменяться в одну сторону. Траектория движения может быть периодической (точка вернётся на участок траектории, на котором была ранее) или непериодической (траектория точки никогда не замкнётся и будет касаться окружностей с радиусами r_1 и r_2 каждый раз в новых точках). Измение угла за период $\Delta\varphi\big|_{\text{период}}$ называется апсидальным углом. Если апсидальный угол соизмерим с 2π, то есть если $\dfrac{\Delta\varphi\big|_{\text{период}}}{2\pi}$ – рациональное число, то движение будет периодическим, иначе – будет непериодическим. Оказывается, если центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра, то $\Delta\varphi\big|_{\text{период}} = 2\pi$.

Законы Кеплера

1-й закон Кеплера: планеты совершают периодическое движение по эллипсам, в фокусе которых располагается Солнце.

2-й закон Кеплера (закон площадей): за равные промежутки времени радиус-вектор заметает одну и ту же площадь.

3-й закон Кеплера: отношение квадратов периодов к кубам больших полуосей эллипсов есть величина постоянная: $\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$ (для разных планет), где T – период движения, a – большая полуось.

Вывод формулы для гравитационной силы

Из 1-го и из 2-го законов Кеплера следует, что сила центральная. Тогда запишем уравнение движения для центральной силы: $m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r = \vec{F} = F\vec{e}_r$. И запишем закон площадей: $r^2\dot{\varphi} = c$. Выразим F, учитывая, что $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$, получим: $F = m\left(\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}\right)$.

$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}$. Рассмотрим следующую производную: $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2}\cdot\frac{r^2}{c} = -\frac{\dot{r}}{c}$. Теперь рассмотрим вторую производную: $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{c}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = -\frac{\ddot{r}}{c}\frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\ddot{r}r^2}{c^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$.

Подставим найденное выражение для $\ddot{r}$ в формулу для силы: $F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$.

Напоминание: $r(\tilde{\varphi}) = \frac{p}{1 - e\cos\tilde{\varphi}}$ – уравнение эллипса в полярных координатах. Сделаем замену угла следующим образом: $\tilde{\varphi} = \varphi + \pi$ (для дальнейшего удобства). Такой выбор угла соответствует повороту классического эллипса на $-\pi$ радиан вокруг начала координат (которое в случае полярной системы координат совпадает с одним из фокусов эллипса). Таким образом, вместо классического случая, когда начало системы координат находится в левом фокусе эллипса, в нашем случае оно будет находиться в его правом фокусе, но форма эллипса от этого никак не поменяется. Тогда будем иметь такое уравнение эллипса в полярных координатах: $r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$.

Траекторией является эллипс $\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e\cos\varphi}{p}$. Подставляем это в выражение для силы: $F = -\frac{mc^2}{pr^2}$.

Напоминание: $S = \pi ab$ – площадь эллипса, где a и b – большая и малая полуоси эллипса соответственно.

За период радиус вектор заметает весь эллипс $\Rightarrow S(T) = \pi ab = \frac{c}{2}T$, так как

$\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2}$. Тогда $c = \frac{2\pi ab}{T}$.

Напоминание: для эллипса $p = \frac{b^2}{a}$.

Подставим выражения для c и p в формулу для силы: $F = -\frac{m \cdot 4\pi^2 a^2 b^2 a}{T^2 b^2 r^2} = -\frac{4\pi a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}$. Из 3-го закон Кеплера следует, что величина $\frac{4\pi a^3}{T^2}$ постоянна для различных планет, обозначим её μ. Тогда $F = -\frac{\mu m}{r^2}$.

Мы предполагаем, что сила, с которой Солнце действует на планету, такая же, как и сила, с которой планета действует на Солнце. В формулу для силы входит масса планеты m в виде множителя, значит, и масса Солнца должна входить в эту формулу в виде множителя. Тогда $\mu = \gamma M_{\text{С.}}$, где γ – константа, универсальная как для планет, так и для Солнца. Подставим в формулу для силы и получим:

$$F = -\frac{\gamma M_{\text{С.}} m}{r^2}. \tag{11.5}$$

Ньютон также предполагал, что этот закон тяготения является общим для всех материальных точек. Позже Кавендиш доказал это экспериментально и измерил константу γ.

Лекция 12

Задача Кеплера

Задача Кеплера – задача о движении точки под действием силы притяжения со стороны некоторой неподвижной массы.

На материальную точку массы m со стороны Солнца, находящегося в начале координат, действует сила притяжения $\vec{F} = -\gamma\dfrac{M_{\text{С.}}m\vec{r}}{r^3}$. Эта сила центральная и её величина зависит только от расстояния r до притягивающего центра, поэтому она потенциальна. $V(r) = -\gamma\dfrac{M_{\text{С.}}m}{r}$ – потенциал этой силы (ньютоновский гравитационный потенциал).

Утверждение 10. *Потенциальная энергия взаимодействия однородного шара совпадает с потенциальной энергией материальной точки, масса которой равна массе шара и которая размещена в центре этого шара. (Доказано Ньютоном.)*

Это утверждение показывает, что можно применять результаты исследования задачи Кеплера к изучению движения материальной точки в поле притяжения объектов, которые близки к сферическим и распределение массы которых близко к однородному.

Утверждение 11. *Если внутрь однородного сферического слоя поместить материальную точку, то сила, с которой слой будет на неё действовать, будет равна* 0.

Таким образом, при погружении материальной точки внутрь однородного шара внешние слои шара не будут оказывать воздействия на точку.

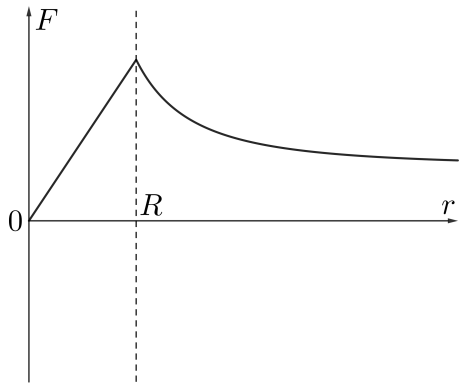

Рис. 12.1. Зависимость $F(r)$ для однородного шара радиуса R

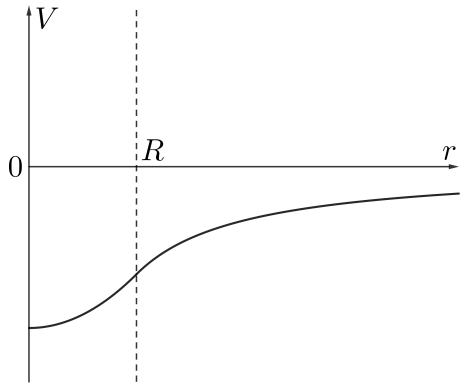

Рис. 12.2. Зависимость $V(r)$ для однородного шара радиуса R

Запишем уравнение движения для задачи Кеплера:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu m}{r^3}\vec{r}, \tag{12.1}$$

где $\mu = \gamma M_{\text{С.}}$. В таких обозначениях потенциальная энергия примет вид $V = -\dfrac{\mu m}{r}$.

Выпишем ранее полученные результаты.

$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = \text{const} \Rightarrow$ траектория лежит в неподвижной плоскости, в полярной системе координат $r^2\dot{\varphi} = c = \pm\dfrac{|\vec{K}|}{m}$, причём $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{c}{2}$.

$\dfrac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \dfrac{\mu m}{r} = h = \text{const} \;\Rightarrow\; \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V_c(r) = h$, где $V_c(r) = \dfrac{mc^2}{2r^2} - \dfrac{\mu m}{r}$.

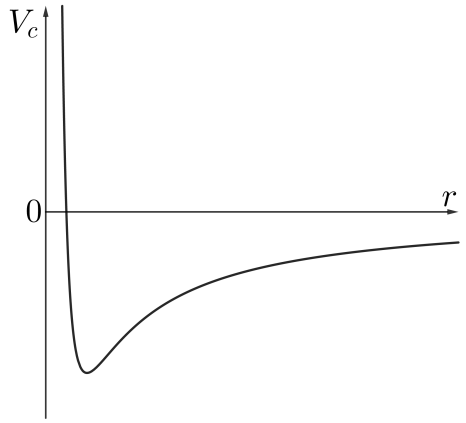

Рис. 12.3. Зависимость $V_c(r)$ для задачи Кеплера

Интеграл Лапласа

Введём обозначения: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{V} = \dfrac{\vec{K}_O}{m}$, тогда интеграл Лапласа – это следующий вектор:

$$\vec{f} = \vec{V} \times \vec{c} - \frac{\mu\vec{r}}{r}. \tag{12.2}$$

Покажем, что интеграл Лапласа остаётся постоянным во время движения точки.

Так как кинетический момент остаётся постоянным, то $\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$. Тогда $\frac{d\vec{f}}{dt} = \dot{\vec{V}} \times \vec{c} + \frac{\mu\vec{r}}{r^2}\dot{r} - \frac{\mu\dot{\vec{r}}}{r}$.

Преобразуем первое слагаемое, учитывая уравнение (12.1): $\dot{\vec{V}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{V})\right)$. Воспользуемся формулой «$\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$»: $\dot{\vec{V}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r}(\vec{r}, \vec{V}) - \vec{V}r^2\right) = -\frac{\mu\vec{r}}{r^3}(\vec{r}, \vec{V}) + \frac{\mu\dot{\vec{r}}}{r}$. Заметим, что $\frac{d}{dt}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{d}{dt}r^2 \Rightarrow 2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 2r\dot{r} \Rightarrow (\vec{r}, \vec{V}) = r\dot{r}$. Тогда $\dot{\vec{V}} \times \vec{c} = -\frac{\mu\vec{r}}{r^2}\dot{r} + \frac{\mu\dot{\vec{r}}}{r}$.

Таким образом, получем: $\frac{d\vec{f}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{f} = \text{const}$.

Теперь поймём, чему равна величина вектора $\vec{f}$.

$\vec{f}^2 = \left(\vec{V} \times \vec{c}\right)^2 + \mu^2 - \frac{2\mu}{r}\left(\vec{r}, \vec{V} \times \vec{c}\right)$. Учитывая, что $\vec{V} \perp \vec{c} \Rightarrow \left(\vec{V} \times \vec{c}\right)^2 = V^2c^2$, а также $\left(\vec{r}, \vec{V} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{c}, \vec{r} \times \vec{V}\right) = (\vec{c}, \vec{c}) = c^2$, получаем: $\vec{f}^2 = V^2c^2 + \mu^2 - \frac{2\mu c^2}{r} = \frac{2c^2}{m}\left(\frac{mV^2}{2} - \frac{\mu m}{r}\right) + \mu^2 = \frac{2c^2h}{m} + \mu^2$.

Выясним форму траектории точки с помощью интеграла Лапласа. Выберем систему координат так, чтобы вектор Лапласа был направлен вдоль полярной оси, от которой отсчитывается угол φ. Тогда $(\vec{r}, \vec{f}) = rf\cos\varphi$. С другой стороны, $(\vec{r}, \vec{f}) = \left(\vec{r}, \vec{V} \times \vec{c}\right) - \left(\vec{r}, \frac{\mu\vec{r}}{r}\right) = c^2 - \mu r$. Таким образом, $rf\cos\varphi = c^2 - \mu r \Rightarrow r = \frac{c^2}{\mu + f\cos\varphi} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ – уравнение кривой второго порядка, где $p = \frac{c^2}{\mu}$ – фокальный параметр и $e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{2c^2h}{m\mu^2}}$ – эксцентриситет.

Классификация орбит

При $e = 0$ получаем: $r = p$ – уравнение окружности (круговая орбита).
При $0 \le e < 1$ эллиптическая орбита (при $h < 0$).
При $e = 1$ параболическая орбита (при $h = 0$).
При $e > 1$ гиперболическая орбита (при $h > 0$).

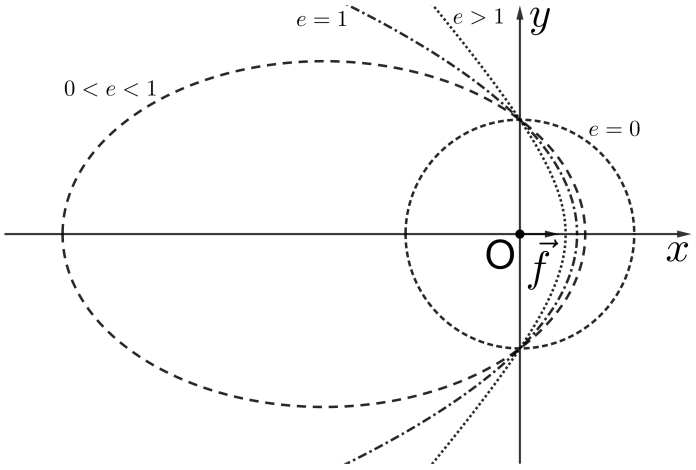

Рис. 12.4. Классификация орбит

При $\varphi = 0$ расстояние r до центра силы минимально и называется перицентром (если рассматриваем движение точки в окрестности Земли, перицентр называется перигеем). Для эллиптической орбиты при $\varphi = \pi$ расстояние r до центра силы максимально и называется апоцентром (в случае движения точки в окрестности Земли называется апогеем). Обозначения: r_π – расстояние перицентра, r_α – расстояние апоцентра. Заметим, что вектор Лапласа направлен на перицентр орбиты (это позволяется определять, как в орбита располагается в пространстве).

Круговая орбита соответствует движения с постоянной по величине скоростью. Найдём эту скорость. Если точка движется в окрестности шарообразного тела, то скорость круговой орбиты на расстоянии радиуса R этого тела называется первой космической скоростью и обозначается V_1. Для круговой орбиты $R = r = p = \dfrac{c^2}{\mu} = \dfrac{R^2V_1^2}{\mu} \Rightarrow V_1^2 = \dfrac{\mu}{R}$. Учитывая, что ускорение свободного падения $g = \dfrac{\mu}{R^2}$, получаем:

$$V_1 = \sqrt{gR}. \tag{12.3}$$

Для Земли $V_1 \approx 7,91$ км/с.

Вторая космическая скорость (V_2) – это наименьшая скорость, с которой надо запустить материальную точку, чтобы она смогла преодолеть притяжение планеты радиуса R и улететь от неё на неограниченное расстояние. Наименьшая энергия, которая для этого требуется, соответствует энергии параболического движения точки и равна нулю: $\dfrac{mV_2^2}{2} - \dfrac{\mu m}{R} = 0 \Rightarrow V_2^2 = \dfrac{2\mu}{R}$. Учитывая, что ускорение свободного падения $g = \dfrac{\mu}{R^2}$, получаем:

$$V_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}V_1. \tag{12.4}$$

Для Земли $V_2 \approx 11,2$ км/с.

Третья космическая скорость (V_3) – наименьшая скорость, с которой надо запустить материальную точку с поверхности Земли, чтобы она могла покинуть пределы Солнечной системы. То есть V_3 – это параболическая скорость для Солнца

на радиусе, равном радиусу Земли. Земля вращается вокруг Солнца со скоростью ≈ 30 км/с, тогда на этом радиусе для Солнца $V_1 \approx 30$ км/с и $V_2 = \sqrt{2}V_1 \approx 42,5$ км/с. Но, так как материальная точка при запуске уже имеет скорость Земли, и кроме этого, ей надо преодолеть притяжение Земли, выходит, что при запуске точке надо сообщить скорость $V_3 \approx 16,5$ км/с.

Задача двух тел

Задача двух тел – это задача о движении двух материальных точек под действием взаимного гравитационного притяжения. Эту задачу можно свести к задаче Кеплера, и при правильном выборе системы координат орбиты движения материальных точек будут кеплеровскими (то есть кривыми второго порядка).

Пусть даны две материальные точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ с массами m_1 и m_2 соответственно, между которыми существует гравитационное взаимодействие. Запишем уравнения движения точек: $\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma\dfrac{m_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma\dfrac{m_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \end{cases}$. Потенциальная энергия в этом случае будет $V = -\gamma\dfrac{m_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$. Так как силы в системе внутренние, то кинетический момент сохраняется: $\vec{K}_O = \text{const}$, и центр масс системы C движется с постоянной скоростью: $m\ddot{\vec{r}}_C = 0$, где $m = m_1 + m_2$, значит, $\dot{\vec{r}}_C = \text{const}$. В этом случае система Кёнига инерциальна, перейдём в неё. Так как законы физики в инерциальных системах одинаковы, то можно считать, что уравнения движения точек, выписанные выше, уже написаны в системе координат Кёнига, тогда $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = m\vec{r}_C = 0 \;\Rightarrow\; \vec{r}_2 = -\dfrac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 \;\Rightarrow\; \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \dfrac{m}{m_2}\vec{r}_1$. Подставим это в уравнение движения первой точки, получим: $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma\dfrac{m_1M_1}{r_1^3}\vec{r}_1$, где $M_1 = \dfrac{m_2^3}{m^2}$. Аналогично можно получить преобразованное уравнение движения второй точки: $m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma\dfrac{m_2M_2}{r_2^3}\vec{r}_2$, где $M_2 = \dfrac{m_1^3}{m^2}$. Таким образом, уравнения движения точек в системе Кёнига совпадают по форме с уравнением движения точки в задаче Кеплера, а значит, орбиты будут представлять собой кривые второго порядка, причём тип орбиты одной точки будет совпадать с типом орбиты второй точки, и обе точки будут двигаться в одной и той же плоскости, проходящей через центр масс и ортогональной кинетическому моменту.

Задача n тел

Пусть даны точки $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$, которые движутся под действием взаимного гравитационного притяжения.

Выпишем потенциальную энергию попарного гравитационного взаимодействия точек: $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} -\gamma\dfrac{m_im_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$. Выпишем уравнение движения: $m_i\ddot{\vec{r}}_i =$

$-\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$.

В этой системе все силы внутренние, поэтому: 1) импульс системы сохраняется, то есть $m\dot{\vec{r}}_C = \text{const}$; 2) кинетический момент системы сохраняется, то есть $\vec{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i) = \text{const}$; 3) энергия системы сохраняется, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{m_i\dot{\vec{r}}_i^2}{2} + V = h = \text{const}$.

Устойчивость по Якоби

Пусть при некотором заданном начальном условии точки в задаче n тел движется по закону $\vec{r}_i(t)$. Это движение называется устойчивым по Якоби, если выполняются 2 условия: 1) $\forall t\ \ \vec{r}_i(t) \neq \vec{r}_j(t)\ \ \forall i \neq j$, то есть в любой момент времени точки не сталкиваются; 2) $\exists C > 0\colon\ \forall t\ \ \sum\limits_{i,\,j}|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 \leq C$, то есть точки не разбегаются (как в прошлом, так и в будущем).

Далее нам понадобится лемма, которую сейчас выпишем.

Функция $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ называется однородной степени α, если $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и $\forall \lambda > 0$ выполнено условие $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$. Пример: потенциальная энергия $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = \sum\limits_{\substack{i,\,j=1\\ i>j}}^{n} -\gamma\dfrac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ – однородная функция степени $\alpha = -1$.

Лемма 4. ***(Лемма Эйлера об однородных функциях)*** *Если $f(x)$ – однородная функция степени $\alpha \neq 0$, то $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}x = \alpha f(x)$.*

Доказательство:

Продифференцируем следующее выражение как сложную функцию: $\left.\dfrac{df(\lambda x)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = \left.\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial(\lambda x)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}x$. Теперь для дифференцирования того же выражения воспользуемся однородностью функции: $\left.\dfrac{df(\lambda x)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = \left.\dfrac{d(\lambda^\alpha f(x))}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = \alpha\lambda^{\alpha-1}f(x)\Big|_{\lambda=1} = \alpha f(x)$. Таким образом, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}x = \alpha f(x)$. □

Применим лемму (4) для потенциальной энергии, получим: $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}, \vec{r}_i\right) = -V$.

Теорема 14. ***(Необходимое условие устойчивости по Якоби)*** *Пусть h – полная механическая энергия в системе Кёнига, тогда если движение устойчиво по Якоби, то $h < 0$.*

Доказательство:

Пусть столкновений нет, но $h \geq 0$. Докажем, что точки разбегаются.

Рассмотрим центральный момент инерции $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i^2$. Продифференцируем его по времени: $\dot{I} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$. Ещё раз: $\ddot{I} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r}}^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i, \ddot{\vec{r}}_i)$. Учитывая, что

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$m_i\ddot{\vec{r}}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$ и $T = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}$, получим: $\ddot{I} = 4T - 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i,\ \dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}\right)$. Учитывая следствие для потенциальной энергии из леммы (4), получим: $\ddot{I} = 4T + 2V = 4h - 2V$. Из $h \geq 0$ и $V < 0$ получаем, что $\ddot{I} > 0$. Значит, $I(t)$ – выпуклая функция, тогда либо $I(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$, либо $I(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ (так как при $\ddot{I}(t) > 0$ функция $\dot{I}(t)$ является возрастающей).

(Продолжение доказательства в следующей лекции.)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13

Устойчивость по Якоби (продолжение)

(Продолжаем доказательство необходимого условия устойчивости по Якоби.)

Рассмотрим величину $J = \sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i r_i^2 - 2\sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i r_j^2$.

Рассмотрим первую сумму: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i r_i^2 = nI$.

Рассмотрим третью сумму: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i r_j^2 \geq 0$.

Рассмотрим вторую сумму: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} m_i(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_C, \vec{r}_j\right) = 0$, так как в системе Кёнига $\vec{r}_C = 0$.

Таким образом, $J \geq nI \Rightarrow J \to +\infty$ при $t \to -\infty$ или при $t \to +\infty \Rightarrow \exists i_0, j_0\colon (\vec{r}_{i_0} - \vec{r}_{j_0})^2 \to +\infty$ при $t \to -\infty$ или при $t \to +\infty$, то есть точки разбегаются либо в прошлом, либо в будущем. Значит, для устойчивости по Якоби необходимо выполнение условия $h < 0$. □

Если планеты Солнечной системы рассматривать как материальные точки, то необходимое условие устойчивости по Якоби будет выполняться. Понять это можно следующим образом: каждая из планет движется вокруг Солнца по эллипсу (близкому к окружности), поэтому для каждой планеты механическая энергия в системе Кёнига отрицательна, а Солнце гораздо массивнее всех планет и поэтому движется мало относительно центра масс системы, значит, полная механическая энергии всей системы в осях Кёнига отрицательна.

Динамика относительного движения

Пусть $Oxyz$ – абсолютная система координат, $Sx_1x_2x_3$ – подвижная система координат. Пусть в абсолютной системе координат материальная точка массы m имеет радиус-вектор $\vec{r}$, а в подвижной системе координат – радиус-вектор $\vec{\rho}$.

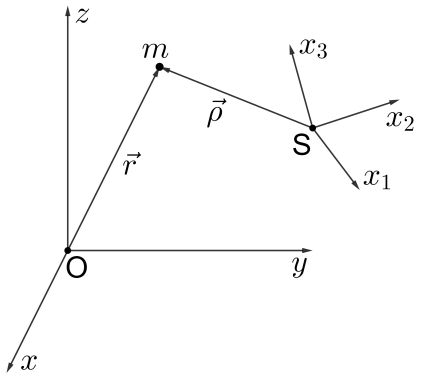

Рис. 13.1. Относительное движение

Рассмотрим случай, когда связей нет или, если они есть, то добавлены реакции связей в состав активных сил. Тогда движение точки описывается законом Ньютона: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, где $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{\text{абс.}}$ – ускорение в абсолютной системе координат. $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \;\Rightarrow\; \vec{a}_{\text{абс.}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$. По теореме о сложении ускорений (3) $\vec{a}_{\text{абс.}} = \vec{a}_{\text{отн.}} + \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{кор.}}$. $\vec{\rho} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \;\Rightarrow\; \vec{a}_{\text{отн.}} = \ddot{x}_1\vec{e}_1 + \ddot{x}_2\vec{e}_2 + \ddot{x}_3\vec{e}_3$. По формуле Ривальса (2.1) $\vec{a}_{\text{пер.}} = \vec{a}_S + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$, где $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$. $\vec{a}_{\text{кор.}} = 2(\vec{\omega}\times\vec{V}_{\text{отн.}})$, где $V_{\text{отн.}} = \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 + \dot{x}_3\vec{e}_3$. Подставим формулу для $\vec{a}_{\text{пер.}}$ в закон Ньютона, получим:

$$m\vec{a}_{\text{отн.}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{пер.}} + \vec{F}_{\text{кор.}}, \tag{13.1}$$

где $\vec{F}_{\text{пер.}} = -m\vec{a}_{\text{пер.}}$ – переносная сила инерции, $\vec{F}_{\text{кор.}} = -m\vec{a}_{\text{кор.}}$ – кориолисова сила инерции. Таким образом, в неинерциальной системе координат можно применять те же законы механики, что и в инерциальной системе, если добавить к заданным силам силы инерции.

С учётом этого можно показать, что если человек находится в замкнутом помещении без возможности посмотреть наружу, то он не сможет определить, например, находится это помещение на Земле или оно в пустом пространстве движется вверх с ускорением g. Говорят, что гравитационная и инерционная массы эквивалентны.

Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении. Закон сохранения энергии

$T_{\text{отн.}} = \dfrac{m\dot{\vec{\rho}}^2}{2} = \dfrac{m\vec{V}^2_{\text{отн.}}}{2}$ – кинетическая энергия точки в подвижной системе координат.

Теорема 15. ***(Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении)***

$$\frac{dT_{отн.}}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}_{пер.} + \vec{F}_{кор.}, \vec{V}_{отн.}). \tag{13.2}$$

Так как $\vec{F}_{\text{кор.}} = -m\vec{a}_{\text{кор.}} = -2m(\vec{\omega}\times\vec{V}_{\text{отн.}})$, то $(\vec{F}_{\text{кор.}}, \vec{V}_{\text{отн.}}) = 0$, тогда

$$\frac{dT_{\text{отн.}}}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}_{\text{пер.}}, \vec{V}_{\text{отн.}}). \tag{13.3}$$

Можно написать аналогичную теорему для системы точек.

Утверждение 12. *Если $\vec{a}_S = \text{const}$ и $\vec{\omega} = \text{const}$, то переносные силы инерции потенциальны.*

Доказательство:

Учитывая, что $\vec{\omega} = \text{const} \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon} = 0$, получаем: $\vec{F}_{\text{пер.}} = -m\vec{a}_{\text{пер.}} = -m\vec{a}_S - m(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}))$. Воспользуемся формулой «$\vec{b}(\vec{a},\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\,\vec{b})$»: $\vec{F}_{\text{пер.}} = -m\vec{a}_S - m(\vec{\omega},\,\vec{\rho})\vec{\omega} + m\omega^2\vec{\rho}$.

Убедимся, что потенциальная энергия записывается следующим образом: $W = m(\vec{a}_S,\,\vec{\rho}) + \dfrac{m(\vec{\omega},\,\vec{\rho})^2}{2} - \dfrac{m\omega^2\rho^2}{2}$. Надо проверить, что $\vec{F}_{\text{пер.}} = -\dfrac{\partial W}{\partial\vec{\rho}}$.

Действительно: $-\dfrac{\partial W}{\partial\vec{\rho}} = -m\vec{a}_S - m(\vec{\omega},\,\vec{\rho})\vec{\omega} + m\omega^2\vec{\rho} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{\text{пер.}} = -\dfrac{\partial W}{\partial\vec{\rho}}$. □

Утверждение 13. *Если* $\vec{a}_S = \text{const}$ *и* $\vec{\omega} = \text{const}$, *а также если заданные силы* $\vec{F}$ *потенциальны в подвижной системе координат, то есть* $\vec{F} = -\dfrac{\partial V(\vec{\rho})}{\partial \vec{\rho}}$, *то выполняется закон сохранения энергии:*

$$T_{отн.} + V_{изм.} = h = \text{const}, \tag{13.4}$$

где $V_{изм.} = V + W$ *– изменённая потенциальная энергия.*

Доказательство:

Используя формулу (13.3), получим: $\dfrac{dT_{\text{отн.}}}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}_{\text{пер.}}, \vec{V}_{\text{отн.}}) = \left(-\dfrac{\partial V}{\partial \vec{\rho}} - \dfrac{\partial W}{\partial \vec{\rho}}, \vec{V}_{\text{отн.}}\right) = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial \vec{\rho}} + \dfrac{\partial W}{\partial \vec{\rho}}, \dot{\vec{\rho}}\right) = -\dfrac{dV_{\text{изм.}}}{dt} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(T_{\text{отн.}} + V_{\text{изм.}}) = 0 \Rightarrow T_{\text{отн.}} + V_{\text{изм.}} = h = \text{const}.$ □

Равномерно вращающаяся система координат

Рассмотрим случай, когда начало подвижной системы координат совпадает с началом абсолютной системы координат и подвижная система координат совершает вращение с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой оси. Выберем системы координат так, чтобы ось вращения совпадала с осями Oz и Sx_3.

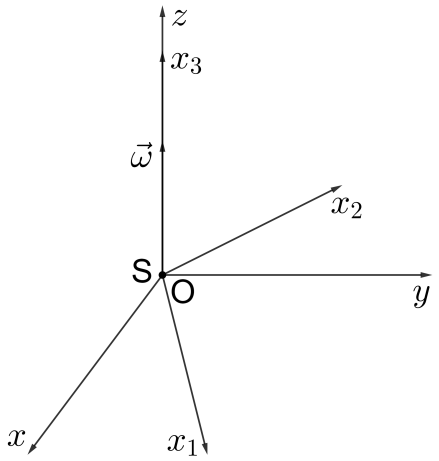

Рис. 13.2. Равномерно вращающаяся система координат

Таким образом, $\vec{a}_S = 0$, $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z = \omega\vec{e}_3$. Пусть на точку массы m действует сила $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$. Чтобы написать уравнение движения точки, надо найти силы инерции. $\vec{F}_{\text{пер.}} = -m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})) = -m\omega^2(\vec{e}_3 \times (\vec{e}_3 \times (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)))$. Учитывая, что $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$, получаем: $\vec{F}_{\text{пер.}} = -m\omega^2(\vec{e}_3 \times (x_1\vec{e}_2 - x_2\vec{e}_1)) = -m\omega^2(-x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2) = m\omega^2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$. $\vec{F}_{\text{кор.}} = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}) = -2m\omega(\vec{e}_3 \times (\dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 + \dot{x}_3\vec{e}_3)) = -2m\omega(\dot{x}_1\vec{e}_2 - \dot{x}_2\vec{e}_1) = 2m\omega(\dot{x}_2\vec{e}_1 - \dot{x}_1\vec{e}_2)$. Теперь можем записать уравнение движения: $m\ddot{\vec{\rho}} = \vec{F} + m\omega^2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) + 2m\omega(\dot{x}_2\vec{e}_1 - \dot{x}_1\vec{e}_2)$.

Перепишем в координатном виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1 + m\omega^2 x_1 + 2m\omega\dot{x}_2 \\ m\ddot{x}_2 = F_2 + m\omega^2 x_2 - 2m\omega\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_3 = F_3 \end{cases} . \tag{13.5}$$

Плоская ограниченная круговая задача трёх тел

Пусть S – Солнце, J – Юпитер, A – астероид, их массы m_S, m_J и m_A соответственно. Они движутся под действием взаимного гравитационного притяжения. $\vec{r}_S$, $\vec{r}_J$, $\vec{r}_A$ – радиус-векторы этих тел в некоторой абсолютной системе координат (считаем тела материальными точками).

Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} m_S\ddot{\vec{r}}_S = -\gamma\dfrac{m_S m_J}{|\vec{r}_S - \vec{r}_J|^3}(\vec{r}_S - \vec{r}_J) - \gamma\dfrac{m_S m_A}{|\vec{r}_S - \vec{r}_A|^3}(\vec{r}_S - \vec{r}_A) \\ m_J\ddot{\vec{r}}_J = -\gamma\dfrac{m_J m_S}{|\vec{r}_J - \vec{r}_S|^3}(\vec{r}_J - \vec{r}_S) - \gamma\dfrac{m_J m_A}{|\vec{r}_J - \vec{r}_A|^3}(\vec{r}_J - \vec{r}_A) \\ m_A\ddot{\vec{r}}_A = -\gamma\dfrac{m_A m_S}{|\vec{r}_A - \vec{r}_S|^3}(\vec{r}_A - \vec{r}_S) - \gamma\dfrac{m_A m_J}{|\vec{r}_A - \vec{r}_J|^3}(\vec{r}_A - \vec{r}_J) \end{cases} .$$

Пусть в начальный момент времени три тела и их скорости лежали в некоторой неподвижной плоскости π, тогда тела будут двигаться всегда в этой плоскости, так как на них не действуют силы, имеющие нормальную компоненту по отношению к плоскости π – предположение плоской задачи.

Третье уравнение можно сократить на m_A. Далее будем считать, что $m_A \to 0$ (то есть масса астероида пренебрежимо мала) – предположение ограниченной задачи.

Получаем такую систему:

$$\begin{cases} m_S\ddot{\vec{r}}_S = -\gamma\dfrac{m_S m_J}{|\vec{r}_S - \vec{r}_J|^3}(\vec{r}_S - \vec{r}_J) \\ m_J\ddot{\vec{r}}_J = -\gamma\dfrac{m_J m_S}{|\vec{r}_J - \vec{r}_S|^3}(\vec{r}_J - \vec{r}_S) \\ \ddot{\vec{r}}_A = -\gamma\dfrac{m_S}{|\vec{r}_A - \vec{r}_S|^3}(\vec{r}_A - \vec{r}_S) - \gamma\dfrac{m_J}{|\vec{r}_A - \vec{r}_J|^3}(\vec{r}_A - \vec{r}_J) \end{cases} .$$

Первые два уравнения теперь можно рассматривать как задачу двух тел. Как мы ранее показывали, задачу двух тел можно свести к задаче Кеплера, если перейти в систему координат Кёнига для этих двух тел. В осях Кёнига Солнце и Юпитер будут двигаться по кеплеровским орбитам: окружность, эллипс, парабола или гипербола. Будем считать, что Солнце и Юпитер движутся по круговым орбитам в системе координат Кёнига – предположение круговой задачи.

Выберем такую систему координат $Oxyz$, чтобы точка O совпадала с началом координат в осях Кёнига, плоскость Oxy лежала в плоскости π, а ось Ox всегда проходила через Солнце и Юпитер и была направлена на Юпитер. При движении Солнца и Юпитера по окружностям в задаче Кеплера их угловые скорости постоянны, значит, и угловая скорость вращения системы координат $Oxyz$ будет постоянной: $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z = \text{const}$ (выбираем систему координат так, чтобы ось Oz и вектор $\vec{\omega}$ были сонаправлены).

Далее будем использовать радиус-векторы $\vec{r}_S$, $\vec{r}_J$, $\vec{r}_A$ в системе координат $Oxyz$, поэтому это уже не те радиус-векторы, которые мы использовали в начале задачи,

просто сохраняем обозначения, но переходим в новую систему координат.

r_S и r_J – расстояния соответственно от Солнца и от Юпитера до их центра масс (то есть до начала координат O). Тогда $\vec{r}_S = (-r_S,\, 0)$, $\vec{r}_J = (r_J,\, 0)$ (для краткости z-ые координаты не пишем, так как работаем в плоскости Oxy), причём $m_S r_S = m_J r_J$. Пусть координаты астероида $\vec{r}_A = (x,\, y)$.

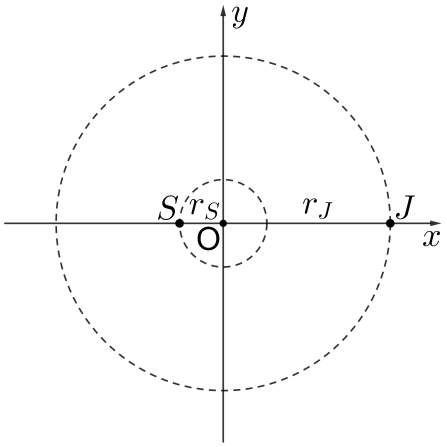

Рис. 13.3. Солнце и Юпитер в системе координат $Oxyz$

В системе координат $Oxyz$ Юпитер неподвижен, поэтому центробежная сила, действующая на него, должна уравновешиваться силой притяжения со стороны Солнца: $m_J\omega^2 r_J = \gamma\dfrac{m_S m_J}{(r_S+r_J)^2} \;\Rightarrow\; \omega^2 r_J = \gamma\dfrac{m_S}{(r_S+r_J)^2}$. Аналогично для Солнца: $m_S\omega^2 r_S = \gamma\dfrac{m_S m_J}{(r_S+r_J)^2} \;\Rightarrow\; \omega^2 r_S = \gamma\dfrac{m_J}{(r_S+r_J)^2}$. Сложим два полученных уравнения: $\omega^2(r_S+r_J) = \gamma\dfrac{m_S+m_J}{(r_S+r_J)^2}$, отсюда получаем:

$$\omega^2 = \gamma\frac{m_S+m_J}{(r_S+r_J)^3}. \tag{13.6}$$

Займёмся уравнением движения астероида. $Oxyz$ – равномерно вращающаяся система координат. На астероид действуют силы притяжения со стороны Солнца и со стороны Юпитера, эти силы потенциальны. Уравнения движения для астероида такие, как будто он имеет массу 1. Введём гравитационную потенциальную энергию астероида (с учётом единичной массы): $V = -\gamma\dfrac{m_S}{|\vec{r}_S-\vec{r}_A|} - \gamma\dfrac{m_J}{|\vec{r}_J-\vec{r}_A|}$.

Выпишем систему уравнений (13.5) для астероида (так как z-ая координата не меняется, можно для неё уравнение не писать): $\begin{cases}\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y - 2\omega\dot{x}\end{cases}$.

Условия утверждения (12) выполняются, значит, можно выписать потенциальную энергию для переносной силы: $W = -\dfrac{\omega^2(x^2+y^2)}{2}$. Тогда, согласно утверждению (13), $V_{\text{изм.}} = V + W$ и выполняется закон сохранения энергии: $\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} + V_{\text{изм.}} =$

$h = \text{const}$. Отсюда видно, что движение возможно только в области $V_{\text{изм.}} \leq h$ (называется «область Хилла»).

Теперь займёмся поиском точек равновесия астероида в системе координат $Oxyz$, они называются точками относительного равновесия (или точками либрации). В таких точках $x(t) = \text{const}$ и $y(t) = \text{const} \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{y} = 0$ и $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Подставим это в систему уравнений движения астероида: $\begin{cases} \omega^2 x = \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \omega^2 y = \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$.

Учитывая, что $\vec{r}_S = (-r_S, 0)$, $\vec{r}_J = (r_J, 0)$ и $\vec{r}_A = (x, y)$, получаем: $V = -\gamma \dfrac{m_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}_A|} - \gamma \dfrac{m_J}{|\vec{r}_J - \vec{r}_A|} = -\gamma \dfrac{m_S}{\sqrt{(x + r_S)^2 + y^2}} - \gamma \dfrac{m_J}{\sqrt{(x - r_J)^2 + y^2}}$.

Лекция 14

Плоская ограниченная круговая задача трёх тел (продолжение)

Пусть d_S и d_J – расстояния от астероида до Солнца и до Юпитера соответственно, тогда $d_S = \sqrt{(x+r_S)^2+y^2}$ и $d_J = \sqrt{(x-r_J)^2+y^2}$.

На прошлой лекции мы получили систему уравнений для точек относительного равновесия: $\begin{cases} \omega^2 x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\gamma\dfrac{m_S}{\sqrt{(x+r_S)^2+y^2}} - \gamma\dfrac{m_J}{\sqrt{(x-r_J)^2+y^2}}\right) \\ \omega^2 y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\gamma\dfrac{m_S}{\sqrt{(x+r_S)^2+y^2}} - \gamma\dfrac{m_J}{\sqrt{(x-r_J)^2+y^2}}\right) \end{cases}$.

После взятия производных получим: $\begin{cases} \omega^2 x = \dfrac{\gamma m_S(x+r_S)}{d_S^3} + \dfrac{\gamma m_J(x-r_J)}{d_J^3} \\ \omega^2 y = \dfrac{\gamma m_S y}{d_S^3} + \dfrac{\gamma m_J y}{d_J^3} \end{cases}$.

Сначала рассмотрим случай $y = 0$. В этом случае второе уравнение выполняется автоматически, $d_S = |x+r_S|$, $d_J = |x-r_J|$. Тогда из первого уравнения получим: $\omega^2 x = \dfrac{\gamma m_S}{|x+r_S|(x+r_S)} + \dfrac{\gamma m_J}{|x-r_J|(x-r_J)}$. Назовём левую часть этого уравнения $f_1(x)$, правую – $f_2(x)$ и построим их схематичные графики.

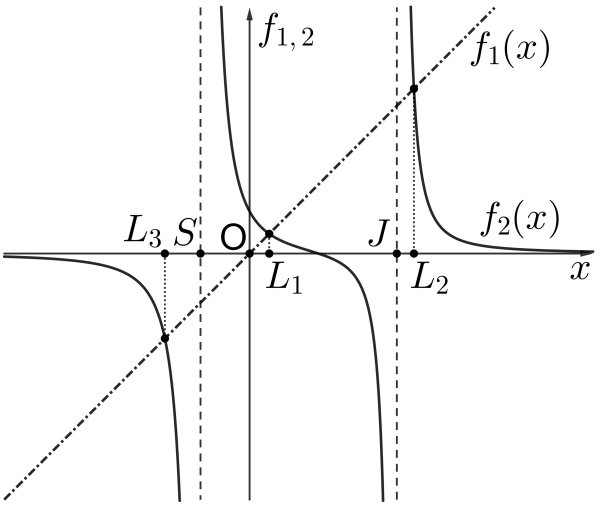

Рис. 14.1. Графики $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Положения точек L_1, L_2, L_3

Из построенных графиков видно, что уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ имеет три решения, значит, при $y = 0$ существуют три положения равновесия: точки L_1, L_2, L_3 – коллинеарные точки либрации (точки Эйлера). В этих точках гравитационные силы, действующие на астероид, уравновешиваются центробежной силой.

Теперь рассмотрим случай $y \neq 0$. Тогда второе уравнение системы можно сократить на y. После этого домножим его на x и вычтем из первого уравнения системы, получим: $0 = \dfrac{\gamma m_S r_S}{d_S^3} - \dfrac{\gamma m_J r_J}{d_J^3}$. Учитывая, что $m_S r_S = m_J r_J$, получа-

ем: $0 = \dfrac{\gamma m_S r_S}{d_S^3} - \dfrac{\gamma m_S r_S}{d_J^3} \;\Rightarrow\; 0 = \dfrac{1}{d_S^3} - \dfrac{1}{d_J^3} \;\Rightarrow\; d_S = d_J$. Значит, астероид лежит в вершине равнобедренного треугольника, у которого в вершинах при основании находятся Солнце и Юпитер. Осталось найти расстояние от астероида до оси Ox.

Снова обратимся ко второму уравнению системы, сокращённому на y. Учитывая, что $d_S = d_J = d$ (ввели обозначение), получаем: $\omega^2 = \dfrac{\gamma(m_S + m_J)}{d^3}$. Подставим ω^2 из формулы (13.6), получим: $\dfrac{\gamma(m_S + m_J)}{(r_S + r_J)^3} = \dfrac{\gamma(m_S + m_J)}{d^3} \;\Rightarrow\; d = r_S + r_J$. Таким образом, треугольник, образованный Солнцем, Юпитером и астероидом, является равносторонним. Такой треугольник может быть построен двумя способами: в верхней полуплоскости системы координат или в нижней. Значит, получаем ещё две точки либрации L_4 и L_5 (точки Лагранжа). Иногда, говоря только про эти точки, их обозначают L_1 и L_2.

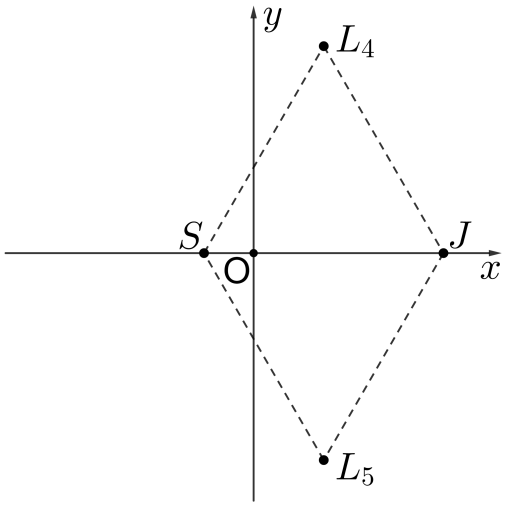

Рис. 14.2. Положения точек L_4 и L_5

В точках L_1, L_2, L_3 равновесие неустойчивое, а в точках L_4 и L_5 – устойчивое.

Пример практического применения: космическую станцию выгодно располагать в точке L_4 или L_5 в системе трёх тел «Земля, Луна, станция», так как тогда нужно будет использовать силы двигателей только для корректировки возможных возмущений.

Движение материальной точки около поверхности Земли

Земля вращается вокруг своей оси в том же направлении, в котором она вращается вокруг Солнца. Будем рассматривать движение на достаточно малых интервалах времени, чтобы движение Земли по своей орбите можно было бы считать прямолинейным.

Форма Земли – геоид. В некотором приближении форму Земли можно считать эллипсоидом вращения с полуосями a и b, причём $a - b \approx 22$ км, а $\dfrac{a+b}{2} \approx 6400$ км. Мы будем рассматривать Землю как однородный шар радиуса $R \approx 6400$ км.

Обозначим направляющий вектор оси вращения Земли $\vec{e}$, тогда угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}$. Ось вращения отклонена от плоскости орбиты Земли примерно на 23°. Принято различать солнечные ($T_{\text{С.}}$) и звёздные ($T_{\text{з.}}$) сутки – это время, за которое Земля совершает один оборот вокруг своей оси относительно Солнца и относительно далёких звёзд соответственно. Так как Земля вращается вокруг Солнца в том же направлении, в котором она вращается вокруг своей оси, то солнечные сутки короче: $T_{\text{з.}} \approx T_{\text{С.}} + 4$ мин. Так как мы будем проводить только приблизительные расчёты, то мы не будем различать угловые скорости вращения Земли вокруг своей оси относительно Солнца и относительно далёких звёзд, а будем просто считать, что $\Omega \approx \dfrac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ с$^{-1}$ (так как Земля совершает один оборот вокруг своей оси примерно за 24 часа).

Будем рассматривать движение точки массы m около поверхности Земли относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанной с Землёй, причём точка O – центр Земли. Пусть $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки. Также будем использовать обозначение $\mu = \gamma M_{\text{З.}}$, где $M_{\text{З.}}$ – масса Земли.

Запишем уравнение движения точки, учитывая, что центр Земли по предположению движется равномерно, то есть $\vec{a}_O = 0$, а также $\vec{\Omega} = \text{const}$, получим: $m\ddot{\vec{\rho}} = -\dfrac{\mu m}{\rho^3}\vec{\rho} - m\left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})\right) - 2m(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{\rho}})$. Подставим $\vec{\Omega} - \Omega\vec{e}$, получим: $m\ddot{\vec{\rho}} = -\dfrac{\mu m}{\rho^3}\vec{\rho} - m\Omega^2(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{\rho})) - 2m\Omega(\vec{e} \times \dot{\vec{\rho}})$. Если на движение точки наложена связь, то надо добавить в уравнение движения реакцию связи, назовём её $\vec{N}$, тогда $m\ddot{\vec{\rho}} = -\dfrac{\mu m}{\rho^3}\vec{\rho} - m\Omega^2(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{\rho})) - 2m\Omega(\vec{e} \times \dot{\vec{\rho}}) + \vec{N}$.

Рассмотрим связь, заключающуюся в том, что точка находится на поверхности Земли, то есть $\rho = R$, и покоится относительно Земли, то есть $\dot{\vec{\rho}} = 0$ и $\ddot{\vec{\rho}} = 0$. Тогда уравнение движения примет следующий вид: $0 = -\dfrac{\mu m}{R^3}\vec{\rho} - m\Omega^2(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{\rho})) + \vec{N}$.

Вес – это сила давления со стороны точки на поверхность. Будем обозначать вес $\vec{P}$, причём $\vec{P} = -\vec{N}$. Подставим $\vec{N}$ из уравнения движения, получим:

$$\vec{P} = -\frac{\mu m}{R^3}\vec{\rho} - m\Omega^2(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{\rho})). \tag{14.1}$$

$\vec{g} = \dfrac{\vec{P}}{m}$ – ускорение свободного падения.

$\vec{g}_0 = -\dfrac{\mu}{R^3}\vec{\rho}$ – ускорение свободного падения, которое было бы, если бы Земля не вращалась.

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \Omega^2(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{\rho})). \tag{14.2}$$

Так как мы считаем Землю однородным шаром, то без ограничения общности можно считать, что $\vec{e} \parallel Ox_3$ и точка находится в плоскости Ox_1x_3. Пусть θ – угол между $\vec{g}_0$ и x_1, φ – угол между $\vec{g}$ и x_1. Тогда $-\Omega^2(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{\rho})) = \Omega^2 R\cos\theta\,\vec{e}_1$. Таким образом, $\vec{g} = \vec{g}_0 + \Omega^2 R\cos\theta\,\vec{e}_1$.

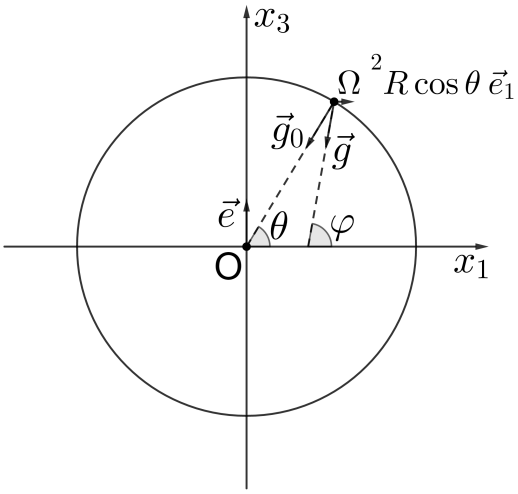

Рис. 14.3. Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли

Введём определения: $\dfrac{\vec{g}}{g}$ – местная вертикаль, θ – географическая широта, φ – астрономическая широта.

$\vec{g} = \vec{g}_0 + \Omega^2 R\cos\theta\,\vec{e}_1 \quad \Rightarrow \quad g^2 = g_0^2 + \Omega^4 R^2\cos^2\theta - 2g_0\Omega^2 R\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad g^2 = g_0^2\left(1 - \dfrac{2\Omega^2 R}{g_0}\cos^2\theta + \left(\dfrac{\Omega^2 R}{g_0}\right)^2\cos^2\theta\right)$. Заметим, что $\dfrac{\Omega^2 R}{g_0} \approx \dfrac{4\pi^2\cdot 6,4\cdot 10^6}{24^2\cdot 3,6^2\cdot 10^6\cdot 10} \approx 0,0034 \ll 1$, поэтому можем извлечь квадратный корень с точностью до величин первого порядка малости, получим:

$$g = g_0\left(1 - \frac{\Omega^2 R}{g_0}\cos^2\theta + O\left(\frac{\Omega^2 R}{g_0}\right)^2\right). \tag{14.3}$$

Как видно, на экваторе ускорение свободного падения самое маленькое, а на полюсах – самое большое.

Теперь найдём, насколько астрономическая широта φ отличается от географической широты θ. Для этого вычертим параллелограмм, построенный на векторах $\vec{g}_0$ и $\Omega^2 R\cos\theta\,\vec{e}_1$.

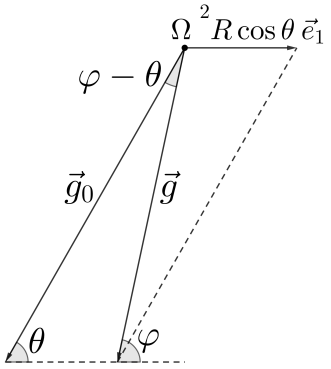

Рис. 14.4. Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{g}_0$ и $\Omega^2 R\cos\theta\,\vec{e}_1$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Распишем площадь левого треугольника двумя способами: $\frac{1}{2}g_0\Omega^2 R\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}g_0 g\sin(\varphi-\theta)$. Используя формулу синуса двойного угла и то, что g мало отличается от g_0, получаем:

$$\sin(\varphi-\theta) = \frac{\Omega^2 R\sin 2\theta}{2g} \approx \frac{\Omega^2 R\sin 2\theta}{2g_0}. \tag{14.4}$$

Как видно, на экваторе и на полюсах $\varphi = \theta$. На географической широте $\theta = 45°$ ошибка в определении местоположения на поверхности Земли по астрономической, а не по географической широте, составит примерно $R(\varphi-\theta) \approx \frac{\Omega^2 R^2}{2g_0} \approx \frac{4\pi^2\cdot 6,4^2\cdot 10^{12}}{2\cdot 24^2\cdot 3,6^2\cdot 10^6\cdot 10} \approx 10\,831$ м (здесь мы учли, что $\varphi-\theta$ – малая величина).

Лекция 15

Задача о падении материальной точки

Рассмотрим такое движение точки около поверхности Земли, когда она не слишком сильно меняет своё положение, чтобы можно было считать вектор $\vec{g}$ постоянным. Тогда уравнение движения примет следующий вид: $m\ddot{\vec{\rho}} = m\vec{g} - 2m\Omega(\vec{e} \times \dot{\vec{\rho}})$, где $\vec{g} = \text{const}$.

Пусть точка в начальный момент времени была на вершине башни на некоторой высоте над землёй и имела нулевую скорость относительно земли. Рассмотрим падение этой точки. Из-за того, что Земля вращается вокруг своей оси, на точку будет действовать кориолисова сила. Это приведёт к тому, что точка при падении отклонится от местной вертикали. Выясним, насколько велико будет это отклонение.

Пусть $\vec{\rho}_0$ – вектор, направленный из центра Земли к вершине башни, $\vec{r}$ – вектор, направленный с вершины башни к падающей точке, тогда $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}$. Введём обозначение: $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\rho}} = \vec{V}$.

Перепишем уравнение движения, сократив его на массу точки: $\dot{\vec{V}} = \vec{g} - 2\Omega(\vec{e} \times \vec{V})$. Так как точка начинает движение с вершины башни с нулевой скоростью относительно земли, то $\vec{r}(0) = 0$ и $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{V}(0) = 0$. Так как Ω мало, то можно рассматривать уравнение движения как уравнение, правая часть которого зависит от малого параметра Ω. Тогда можем разложить скорость $\vec{V}(t, \Omega)$ в ряд: $\vec{V}(t, \Omega) = \vec{V}_0(t) + \vec{V}_1(t)\Omega + \vec{V}_2(t)\Omega^2 + O(\Omega^3)$. Подставим это разложение в уравнение движения: $\dot{\vec{V}}_0(t) + \dot{\vec{V}}_1(t)\Omega + \dot{\vec{V}}_2(t)\Omega^2 + O(\Omega^3) = \vec{g} - 2\Omega\left(\vec{e} \times \left(\vec{V}_0(t) + \vec{V}_1(t)\Omega + \vec{V}_2(t)\Omega^2 + O(\Omega^3)\right)\right)$. Коэффициенты при одинаковых степенях Ω в левой и правой частях уравнения должны быть равны: $\dot{\vec{V}}_0 = g$, $\dot{\vec{V}}_1 = -2(\vec{e} \times \vec{V}_0)$, $\dot{\vec{V}}_2 = -2(\vec{e} \times \vec{V}_1)$. Проинтегрируем эти уравнения с учётом начальных условий: $\vec{V}_0(t) = \vec{g}t$, $\vec{V}_1(t) = -t^2(\vec{e} \times \vec{g})$, $\vec{V}_2(t) = \frac{2}{3}t^3(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{g}))$. Таким образом, $\vec{V}(t, \Omega) = \vec{g}t - \Omega t^2(\vec{e} \times \vec{g}) + \frac{2}{3}\Omega^2 t^3(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{g})) + O(\Omega^3)$. Проинтегрируем это выражение по времени и получим закон движения точки:

$$\vec{r}(t, \Omega) = \frac{\vec{g}t^2}{2} - \frac{\Omega t^3}{3}(\vec{e} \times \vec{g}) + \frac{\Omega^2 t^4}{6}(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{g})) + O(\Omega^3). \tag{15.1}$$

Оценим время падения в нулевом приближении. Пусть h – высота башни. Так как Ω мало, то скорость в мгновение перед падением на землю будет примерно равна $gt_{\text{пад.}}$, тогда по закону сохранения энергии $mgh = \dfrac{m(gt_{\text{пад.}})^2}{2} \Rightarrow t_{\text{пад.}} \approx \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Земля вращается с запада на восток, поэтому вектор $\vec{e}$ направлен от центра Земли на северный полюс, тогда вектор $-\dfrac{\Omega t^3}{3}(\vec{e} \times \vec{g})$ направлен на восток, а вектор $\dfrac{\Omega^2 t^4}{6}(\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{g}))$ – параллельно экватору в сторону юга для северного полушария или в сторону севера для южного полушария. При этом $|\vec{e} \times \vec{g}| = g \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right) = g\cos\varphi$ и $|\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{g})| = g\cos\varphi$, а проекция вектора $\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{g})$ на направление юга в северном полушарии или на направление севера в южном полушарии будет равна $g\cos\varphi\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = g\cos\varphi\sin\varphi = \dfrac{g\sin 2\varphi}{2}$. Таким образом, второе слагаемое в

законе движения приведёт к смещению на восток на расстояние $\frac{\Omega t_{\text{пад.}}^3}{3} g\cos\varphi$, а третье слагаемое – к смещению на юг в северном полушарии или к смещению на север в южном полушарии на расстояние $\frac{\Omega^2 t_{\text{пад.}}^4}{12} g\sin 2\varphi$.

При падении точки с останкинской башни (высота примерно 500 м) отклонение на восток, расчитанное по нашей модели, должно составить примерно 10 см, а отклонение на юг – примерно 1 мм. Однако в реальном эксперименте сопротивление воздуха будет приводить к искажению результатов.

Маятник Фуко

Сферический маятник – материальная точка, движущаяся по поверхности неподвижной сферы в однородном поле тяжести без трения. То есть на точку наложена идеальная связь $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, где l – радиус сферы, причём $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Рассмотрим случай, когда сферический маятник находится в инерциальной системе координат. Пусть некоторая вертикальная плоскость высекает из сферы окружность, на которой находится точка. Если начальную скорость точки направить по касательной к окружности, то точка всегда будет двигаться по этой окружности, так как все силы (реакция связи и сила тяжести) находятся в этой плоскости. Таким образом, точка будет двигаться так же, как математический маятник.

Маятник Фуко – это сферический маятник, расположенный в неинерциальной системе координат, а именно зафиксированный относительно поверхности Земли. Из-за вращения Земли плоскость его колебаний будет поворачиваться по отношению к наблюдателю, находящемуся на Земле. Быстрее всего плоскость колебаний поворачивается на полюсах, при приближении к экватору скорость поворота уменьшается, на экваторе плоскость колебаний неподвижна.

Прежде чем переходить к более детальному рассмотрению движения маятника Фуко, разберём вспомогательную задачу.

Гармонический осциллятор на плоскости

Пусть в плоскости Oxy находится материальная точка $\vec{r}$ массы m, на которую действует центральная притягивающая сила $\vec{F} = -k\vec{r}$, где $k > 0$. Запишем уравнение движения: $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$. Покажем, что все возможные траектории движения точки – это отрезок, проходящий через начало координат, и эллипс.

Запишем уравнения движения в координатной форме: $\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases}$.

Проинтегрировав эти уравнения, получим: $\begin{cases} x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \\ y(t) = C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t \end{cases}$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Можно представить это решение в матричном виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$. Пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$.

Если $\det C \neq 0$, то $\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Тогда $\begin{cases}\cos\omega t = a_1x + b_1y\\ \sin\omega t = a_2x + b_2y\end{cases}$, где $a_1 = \dfrac{C_4}{\det C}$, $b_1 = -\dfrac{C_2}{\det C}$, $a_2 = \dfrac{C_3}{\det C}$, $b_2 = -\dfrac{C_1}{\det C}$. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем: $(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = 1$ – уравнение эллипса.

Если $\det C = 0$, то $C_1 = \lambda C_3$ и $C_2 = \lambda C_4$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда $x = \lambda y$ – уравнение отрезка (учитывая, что x и y ограниченны).

Теперь рассмотрим этот же гармонический осциллятор на плоскости в системе координат Ox_1x_2, вращающейся с частотой ω. Тогда уравнения движения примут следующий вид: $\begin{cases}m\ddot{x}_1 = -kx_1 + m\omega^2x_1 + 2m\omega\dot{x}_2\\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + m\omega^2x_2 - 2m\omega\dot{x}_1\end{cases}$.

Введём обозначения: $A = k - m\omega^2$, $B = 2m\omega$. Перепишем уравнения движения: $\begin{cases}m\ddot{x}_1 = -Ax_1 + B\dot{x}_2\\ m\ddot{x}_2 = -Ax_2 - B\dot{x}_1\end{cases}$.

Нам далее понадобится следующий вывод: если уравнения движения будут иметь вид, аналогичный выписанной выше системе, то это будет означать, что мы рассматриваем движение точки во вращающейся системе координат, и траектория точки будет представлять из себя эллипс или отрезок, который поворачиваются в сторону, обратную вращению системы координат.

Маятник Фуко (продолжение)

Введём систему координат $Oxyz$ так, чтобы точка O была в центре сферы, начальная скорость маятника лежала в плоскости Oxz и $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Тогда связь можно записать в виде $r^2 = l^2 \;\Rightarrow\; r = l$. Выпишем уравнение движения точки около поверхности Земли с добавлением реакции связи $\vec{N}$: $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\Omega(\vec{e}\times\dot{\vec{r}}) + \vec{N}$, где $\vec{N} = mN\dfrac{\vec{r}}{r} = mN\dfrac{\vec{r}}{l}$ (здесь N – не модуль силы реакции, а неизвестная функция $N = N(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, множитель m вводим заранее, чтобы дальше можно было удобно сократить).

Нижнее положение равновесия имеет координаты $\vec{r}_0 = (0, 0, -l)$, где l – радиус сферы. Будем рассматривать движение сферического маятника в том случае, когда отклонения от нижнего положения равновесия не очень велики.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

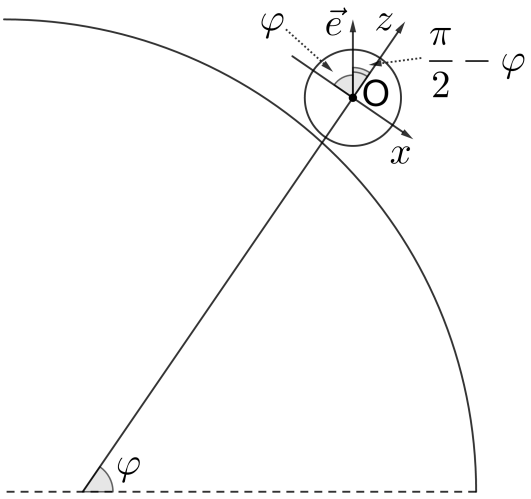

Рис. 15.1. Маятник Фуко около поверхности Земли

Как видно из рисунка, $\vec{e} = (-\cos\varphi,\, 0,\, \sin\varphi)$. Тогда $\vec{e} \times \dot{\vec{r}} = (-\dot{y}\sin\varphi,\, \dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi,\, -\dot{y}\cos\varphi)$. Распишем координаты реакции связи: $\vec{N} = \left(\dfrac{mNx}{l},\, \dfrac{mNy}{l},\, \dfrac{mNz}{l}\right)$.

Запишем уравнения движения (сразу сократив на m) и уравнение связи в координатной форме: $\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\sin\varphi\,\dot{y} + \dfrac{Nx}{l} \\ \ddot{y} = -2\Omega\cos\varphi\,\dot{z} - 2\Omega\sin\varphi\,\dot{x} + \dfrac{Ny}{l} \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\cos\varphi\,\dot{y} + \dfrac{Nz}{l} \\ x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \end{cases}$.

Подставим координаты положения равновесия $\vec{r}_0 = (0,\, 0,\, -l)$ в систему, учитывая, что скорость и ускорение в положении равновесия равны 0. Получим, что первые два уравнения и четвёртое выполняются тождественно, а третье уравнение преобразуется в следующее: $0 = -g - N \;\Rightarrow\; N = -g$ (мы нашли это только для положения равновесия).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 16

Маятник Фуко (продолжение)

Выпишем ещё раз систему уравнений, задающих движение маятника: $\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega \sin\varphi\, \dot{y} + \dfrac{Nx}{l} \\ \ddot{y} = -2\Omega \cos\varphi\, \dot{z} - 2\Omega \sin\varphi\, \dot{x} + \dfrac{Ny}{l} \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega \cos\varphi\, \dot{y} + \dfrac{Nz}{l} \\ x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \end{cases}$.

Исследуем движение маятника Фуко в окрестности нижнего положения равновесия, а в качестве приближения воспользуемся линеаризованными уравнениями движения. Для этого разложим правые части первых трёх уравнений системы в окрестности состояния нижнего равновесия и оставить только слагаемые, линейные по отклонениям от положения равновесия.

Введём обозначения: $\vec{\nu} = (x,\, y,\, z,\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z})$ – вектор состояния маятника, $\vec{\nu}_0 = (0,\, 0,\, -l,\, 0,\, 0,\, 0)$ – состояние нижнего равновесия, $O_1 = O(|\vec{\nu} - \vec{\nu}_0|)$, $O_2 = O(|\vec{\nu} - \vec{\nu}_0|^2)$ – слагаемые первого и второго порядков малости отклонения от состояния равновесия.

Будем считать, что $N(\vec{\nu}) = N(\vec{\nu}_0) + O_1 = -g + O_1$. Далее будем учитывать, что $xO_1 = O_2$, $yO_1 = O_2$, $zO_1 = O_2$.

Так как мы работаем в окрестности нижнего положения равновесия, то из последнего уравнения системы получаем: $z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \;\Rightarrow\; \dot{z} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} = O_2$.

Линеаризуем два первых уравнения системы, то есть отбросим слагаемые O_2 (остальные уравнения нам не нужны): $\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega \sin\varphi\, \dot{y} - \dfrac{gx}{l} \\ \ddot{y} = -2\Omega \sin\varphi\, \dot{x} - \dfrac{gy}{l} \end{cases}$. Эта система замкнута, так как в неё входят только x, y и их производные.

Эта система уравнений по виду совпадает с системой уравнений, полученной на прошлой лекции для гармонического осциллятора на плоскости. Таким образом, маятник Фуко в проекции на плоскость Oxy будет описывать эллипс или отрезок, который поворачивается в сторону, обратную вращению системы координат.

Сопоставляя множители в системе перед скоростями с теми, что были выписаны на прошлой лекции для гармонического маятника на плоскости, найдём частоту ω вращения плоскости колебаний: $2\omega = 2\Omega \sin\varphi \;\Rightarrow\; \omega = \Omega \sin\varphi$. Также можем найти частоту ω_0 колебаний маятника Фуко: $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l} + \omega^2 \;\Rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \Omega^2 \sin^2\varphi}$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ