ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

СТЕПАНЬЯНЦ
КОНСТАНТИН ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
ЧЕРНИКОВУ ПОЛИНУ ГЕОРГИЕВНУ

Оглавление

Лекция 1. Лагранжев формализм в теории поля. Электродинамика с внешним источником 6

Глава I. Электродинамика с внешним источником 6

Глава II. Лагранжев формализм в теории поля 10

§1. Уравнения Лагранжа в теории поля 10

§2. Электродинамика с внешним источником на лагранжевом языке 11

Лекция 2. Тензор энергии-импульса в электродинамике 14

§3. Используемая система единиц 14

§4. Сохранение тензора энергии-импульса (ТЭИ) 15

§5. Тензор энергии импульса в электродинамике 17

Лекция 3. Теории со скалярными полями 20

Глава III. Теория со скалярными полями 20

§1. Комплексное скалярное поле 20

§2. Глобальная калибровочная инвариантность 22

§3. Локальная калибровочная инвариантность. Электродинамика со скалярным полем 23

Теперь мы можем записать функцию Лагранжа, которая будет инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований 24

§4. Низкоэнергетический предел уравнения Клейна-Гордона-Фока с электромагнитным полем 25

Лекция 4. Массивные поля и спонтанные нарушения калибровочной симметрии. Часть I. 28

Глава 4. Массивные поля и спонтанное нарушение калибровочной симметрии 28

§1. Массивное векторное поле 28

§2. Сравнение с безмассовым векторным полем 29

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (Абелев случай) 31

Лекция 5. Массивные поля и спонтанные нарушения калибровочной симметрии. Часть II. Группы Ли 35

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (Абелев случай) 35

§4. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (Абелев случай) 36

Глава 5. Некоторые сведения о группах алгебры Ли 39

§1. Группы Ли 39

Лекция 6. Алгебры Ли и их связь с группами Ли. Генераторы и структурные константы. 42

§1. Группы Ли 42
§2. Алгебры Ли и их связь с группами Ли 43
§5. Генераторы и структурные константы 47

Лекция 7. Представление групп и алгебр Ли 48

§5. Генераторы и структурные константы 48
§4. Представление групп и алгебр Ли 49

Лекция 8. Неабелевы калибровочные теории. Часть 1. 53

Глава VI. Неабелевы калибровочные теории 53
§1. Поля Янга-Миллса 53

Лекция 9. Неабелеевы калибровочные теории. Часть 2. 57

§1. Поля Янга-Миллса 57
§2. Электродинамика как частный случай Янга-Миллса 59
§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией 60

Лекция 10. Неабелевы калибровочные теории. Часть 3. 62

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (общий случай) 62
§5. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (пример) ... 65

Лекция 11. Неабелевы калибровочные теории. Часть 4. 68

§5. Спектр частиц с локальной калибровочной симметрией (пример) 68
§6. Спектр частиц с локальной калибровочной симметрией (общий случай) 69

Лекция 12. Теории со спинорными полями. Часть1 74

Глава 7. Теории со спинорными полями 74
§1. Уравнения Дирака 74
§2. Классическая (спинорная) электродинамика 77

Лекция 13. Теории со спинорными полями. Часть 2. 81

§3. Нерелятивистский предел уравнения Дирака. Уравнение Паули. 81
§5. Решение свободного уравнение Дирака 85
§5. Зарядовое сопряжение. Позитрон. 87

Лекция 14. Теории со спинорными полями. Часть 3 90

§6. Спиноры и преобразования Лоренца.....90
§7. Майорановские и вейлевские спиноры 93
§8. Киральные преобразования. Понятия об аномалиях 97

Лекция 1. Лагранжев формализм в теории поля. Электродинамика с внешним источником

Рекомендуемая литература:

- В. А. Рубаков. Классические калибровочные поля. М., УРСС, 2005
- Пескин М., Шрёдер Д. Введение в квантовую теорию поля

Глава I. Электродинамика с внешним источником

Основные уравнения в электродинамике – уравнения Максвелла в сгс записываются следующим образом:

$$\begin{cases} div\,\vec{H} = 0 \\ rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ div\,\bar{E} = 4\pi\rho \\ rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Где ток удовлетворяет условию непрерывности $\frac{\partial p}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$.
Однако в теории поля уравнения редко записывают в таком виде, так как у этих уравнений есть симметрия относительно группы Лоренца, и если записывать уравнения в таком виде, то такая симметрия, вообще говоря, явной не является.

Рассмотрим первые 2 уравнения Максвелла, которые не содержат источники. Их легко решать введением потенциалов:
$div\,\vec{H} = 0 \;\Rightarrow\; H = rot\,\vec{A}$, где $\vec{A} -$ векторный потенциал некоторого магнитного поля.
$rot\,\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = 0$
$rot\,\left(\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \bar{\nabla}\,\varphi$, где
$\varphi -$ скалярный потенциал электромагнитного поля
$\vec{A} -$ векторный потенциал электромагнитного поля

Потенциалы определены неоднозначно: при калибровочных преобразованиях электрическое и магнитное поля инварианты.
$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\,\alpha \\ \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} \end{cases}$ – калибровочные преобразования
Доказательство.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\vec{H} \to rot\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\,\alpha\right) = rot\,\bar{A} = \bar{H}$

$\vec{E} \;\to\; -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\,\alpha\right) - \vec{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\,\varphi = \vec{E}$ ■.

Чтобы сделать симметрию относительно группы Лоренца явной, вводится четырехмерное пространство-время с координатами

$$x^\mu = (ct, \vec{r}), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Тогда $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$

Определим вектор $A_\mu \equiv \left(\varphi, -\vec{A}\right)$.

Тогда $A_\mu \to \partial_\mu \alpha \begin{cases} \mu = 0\colon \varphi \;\to\; \varphi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ \mu \neq 0\colon\; -\vec{A} \;\to\; -\vec{A} - \vec{\nabla}\,\alpha \end{cases}$

Отсюда очевидно, что $A_\mu \equiv \left(\varphi, -\vec{A}\right)$ есть четырехвектор.

Для того, чтобы у кого-то вектора поднять или опустить вектор, будем использовать метрический тензор

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu}$$

$A^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} A_\nu = (\varphi, \vec{A}\,)$

$(A, B) = A_\mu \eta^{\mu\nu} B_\nu = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - (\vec{A}, \vec{B})$

если $\begin{matrix} A^\mu = (A_0,\ \vec{A}) \\ B^\mu = (B_0, B) \end{matrix}$

Электрическое и магнитное поля являются компонентами тензорного поля

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_z & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Например,

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-A_x) - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = +E_x$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(-A_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}(-Ax) = H_z$$

$$\bar{H} = rot\,\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

При калибровочных преобразованиях тензор поля поменяется следующим образом:

$$F_{\mu\nu} \to \partial_\mu\left(A_\nu - \partial_\mu \alpha\right) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \alpha = F_{\mu\nu}$$

Соответственно, уравнение Максвелла в четырехмерных обозначениях имеет вид:

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$, где $j^\nu = (c\rho, \vec{j})$

$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$

$\upsilon = 0$	$\upsilon = 1$
$4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} j^0 \overset{?}{=} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu 0} =$ $= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} =$ $= -\partial_1 F_{10} - \partial_2 F_{20} - \partial_3 F_{30} =$ $= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ $4\pi\rho = div\,\bar{E}$	$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{4\pi}{c} j^1 \overset{?}{=} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu 1}$ $= \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} =$ $= -\partial_0 F_{01} - \partial_2 F_{21} - \partial_3 F_{31} =$ $= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} =$ $= -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + (rot\,\bar{H})_x$ $\frac{4\pi}{c} j^1 = \partial_\mu F^{\mu\nu}$

Чтобы определить знак ротора при $\upsilon = 1$, посчитаем

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Таким образом, симметрия второй пары уравнений Максвелла по отношению к группе Лоренца очевидна.

Чтобы показать симметрию первой пары уравнений Максвелла, построим *дуальный тензор поля.*

$$\tilde{F}^{\mu\upsilon} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{E}^{0123} \equiv +1\ (\mathcal{E}_{0123} \equiv -1)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}^{02} = \frac{1}{2}\varepsilon^{02\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0213}F_{13} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0231}F_{31} = \varepsilon^{0213}F_{13} - 1\cdot H_y = -H_y$$

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2}\varepsilon^{12\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} + \frac{1}{2}\varepsilon^{1230}F_{30} = +1\cdot E_z = E_z$$

Запишем пару уравнений Максвелла, которые не содержат источников:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

Здесь возникает свертка антисимметричного тензора с симметричным тензором, которая всегда дает 0.

Докажем это утверждение:

$$A^{[\mu\nu]}S^{(\mu\,\nu)} = -A^{[\nu\mu]}S^{(\nu\mu)} = -A^{[\mu\nu]}S^{(\mu\,\nu)} = 0$$

$A^{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор, который меняет знак при перестановке индексов μ и ν.

$S^{(\mu\,\nu)}$ – симметричный тензор, который не меняет знак при перестановке индексов μ и ν ■.

Соответственно,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\big(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\big) = 0.$$

Таким образом, из определения дуального тензора поля следуют уравнения с явной симметрией относительно группы Лоренца.

Можно убедиться, что $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ действительно уравнения Максвелла:

$\nu = 0$: $0 = \partial_1\tilde{F}^{10} + \partial_2\tilde{F}^{20} + \partial_3\tilde{F}^{30} = div\,\bar{H}$

$\nu = 1$: $0 = \partial_0\tilde{F}^{01} + \partial_2\tilde{F}^{21} + \partial_3\tilde{F}^{31} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-H_x) + \frac{\partial}{\partial y}(-E_z) + \frac{\partial}{\partial z}E_y == -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} - (rot\,\bar{E})_x$

$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ – тождество Бьянки.

Теперь получим уравнение непрерывности в четырехмерных обозначениях из второй пары уравнений Максвелла (с источниками). Для этого возьмем производную ∂_ν от $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu$.

$$\partial_\nu|\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$0 = \{\text{т. к. свертка}\} = \partial_\nu \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \;\Rightarrow 0 = \partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 + div\,\vec{j} = \frac{\frac{1}{c}\partial}{\partial t}(c\rho) + div\,\vec{j}$$

Глава II. Лагранжев формализм в теории поля

§1. Уравнения Лагранжа в теории поля

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$q_i -$ некоторый набор обобщенных координат, однозначно характеризующих положение системы,
$L(q_i, \dot{q}_i, t) -$ функция Лагранжа, зависящая от обобщенных координат, скоростей и времени.
Обобщенными координатами в теории поля будут значения полей в точках пространства (трехмерного). Количество обобщенных координат естественно бесконечно в теории поля.

В механике уравнение Лагранжа можно было вывести из *принципа наименьшего действия*:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i(t), t)$$

причем значения координат в моменты времени t_1, t_2 должны быть фиксированы, и система должна двигаться таким образом, чтобы этот функционал действий был минимален.

Рассмотрим, как устроена функция Лагранжа.
Если есть система, состоящая из большого числа материальных точек, то при построении функции Лагранжа суммируется кинетическая энергия по всем материальным точкам.
В теории поля аналогично ведется сумма по всем обобщенным координатам (значениям полей в точках пространства). Разумно предположить, что в теории поля

$$L = c\int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$$

$\mathcal{L} -$ плотность функции Лагранжа,
$\varphi_i -$ поля
Тогда действие записывается в виде:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$S = c\int dt \int d^3x\, \mathcal{L} = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$$

Потребуем, чтобы действие было экстремальным на траектории системы, то есть поля будут меняться таким образом, чтобы функционал действия являлся экстремальным. Соответственно, в точке экстремума вариация функционала действия равна 0:

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[\mathcal{L}\big(\varphi_i + \delta\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i + \partial_\mu\delta\varphi_i\big) - \mathcal{L}\big(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i\big)\right]$$

Вариация линейна по координатам, соответственно, раскладывая в ряд Тейлора функцию Лагранжа получаем

$$\int d^4x \left[\mathcal{L}\big(\varphi_i + \delta\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i + \partial_\mu\delta\varphi_i\big) - \mathcal{L}\big(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i\big)\right] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\partial_\mu\delta\varphi_i\right]$$

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\delta\varphi_i\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right)\delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i\right] =$$
$$= \oint\limits_{\text{границе}} dS \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\partial_\mu\delta\varphi_i + \int d^4x\delta\varphi_i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right)\right]$$

$\varphi_i|\text{граница фиксирована} \Rightarrow \delta\varphi_i|\text{ граница} = 0 \Rightarrow \oint_{\text{границе}} dS \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\partial_\mu\delta\varphi_i = 0.$

В силу произвольности $\delta\varphi_i$ (основной леммы вариационного исчисления)

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right) = 0$ – уравнение Лагранжа в поле

$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) = 0$ – уравнение Лагранжа в механике

Как и в механике, поля φ_i и их производные $\partial_\mu\varphi_i$ являются независимыми.

§2. Электродинамика с внешним источником на лагранжевом языке

Рассмотрим, как на языке Лагранжа с формулировать электродинамику с внешним источником.

Обобщенными координатами в электродинамике правильно считать потенциалы. Поэтому $\varphi_i(x) \to A_\nu(x)$ и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 0$$

Запишем действие в виде $S = \int d^4x \left\{-\frac{1}{16\pi c}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}A_\mu j^\mu\right\}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu,$$

где $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ($\Rightarrow\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$)

$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$

Попробуем построить по функции Лагранжа уравнения Лагранжа.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c^2} j^\mu \delta_\mu^\nu = -1/c^2 j^\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{8\pi c} F^{\alpha\beta} \cdot \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu\right) = \frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi c} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial F_{\alpha\beta}} F^{\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\delta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial F_{\alpha\beta}}}_{-\frac{1}{16\pi c} F^{\gamma\delta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{F_{\alpha\beta}}} = -\frac{1}{16\pi c} \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta\right) F^{\mu\nu} \cdot 2 =$$

$$= -\frac{1}{16\pi c}\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right) = -\frac{1}{8\pi c} F^{\alpha\beta}$$

Осталось записать уравнения Лагранжа:

$0 = -\frac{1}{c^2} j^\nu - \partial_\mu \left(-\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu}\right)$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$

Таким образом, уравнения Лагранжа совпадают с уравнениями Максвелла, которые содержат источники, а уравнения Максвелла без источников получаются автоматически, поскольку теория сформулирована в терминах без потенциалов.

Действие $S = \int d^4x \left\{-\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu\right\}$ будет инвариантно относительно калибровочных преобразований с точностью до интеграла полной производной, или другими словами, функция Лагранжа при калибровочных преобразованиях будет меняться на полную производную.

$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha$

$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$

$$S \to \int d^4x \left\{-\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{c^2\left(A_{\mu\mu} - \partial_\mu \alpha\right) j^\mu}\right\}$$

$$= S + \int d^4x \left[\frac{1}{c^2} \partial_\mu(\alpha j^\mu) - \underbrace{\frac{1}{c^2} \alpha \partial_\mu j^\mu}_{\to 0}\right] = S + \int dS_\mu \frac{1}{c^2} \alpha j^\mu$$

$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{1}{c^2}\partial_\mu(\alpha j^\mu)$ – функция Лагранжа инварианта с точностью до добавления 4 дивергенций.

Что очень похоже на поведение функции Лагранжа в механике:

$L \to L + \frac{df(q_i,t)}{dt}$

Аналогично в теории поля при следующем изменении функции Лагранжа уравнения Лагранжа остаются инвариантными:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\varphi_i, x)$$

Лекция 2. Тензор энергии-импульса в электродинамике

Для описания моделей в теории поля вводятся:

$\mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$ – плотность функции Лагранжа,
$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$ – действие,
$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\, \varphi_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \varphi_i}$ – уравнение Лагранжа,
$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu$,
$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор поля.

Теория формулируется в терминах потенциалов, что означает, что $\varphi_i \sim A_\mu$, то есть поля представляют собой калибровочное поле. Поэтому уравнения Максвелла без источников удовлетворяются автоматически:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Уравнения Максвелла, содержащие источники получаются как уравнения Лагранжа и имеют вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Все эти уравнения записаны в системе сгс, однако в теории поля не очень удобно использовать эту систему. Используется другая система, в которой $c = 1, \hbar = 1$.

§3. Используемая система единиц

Положим $c = \hbar = 1$. Тогда размерности величин
$[v] = 1$
$[\vec{p}] = [mv] = m$
$[E] = [mc^2] = m$
$[p] \cdot [x] = [\hbar] = 1$
$[x] = \frac{1}{[p]} = m^{-1}$
$[t] = \frac{[x]}{[v]} = m^{-1}$
$[S] = [\hbar] = 1$ – размерность действия

В четырехмерном пространстве размерность действия $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$:
$1 = [S] = [x^4][\mathcal{L}]$
$[\mathcal{L}] = \frac{1}{[x^4]} = \frac{1}{m^{-4}} = m^4$
$[F_{\mu\nu}] = \sqrt{[\mathcal{L}]} = m^2, [F_{\mu\nu}] = [\partial_\mu][A_\mu]$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$[\partial_\mu] = \frac{1}{[x]} = m$
$[A_\mu] = m$
$[j^\nu] = m^3$
$[\rho] = \frac{[q]}{[x^3]}$
$m^3[q] = m^3 \ \Rightarrow [q] = 1$
$\left[\frac{e^2}{\hbar c}\right] = 1, \ \ \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ \ \Rightarrow [e] = 1 -$ постоянная тонкой структуры.
Чтобы вычислить размерность гравитационной постоянной, запишем:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$[F] = [ma] = \left[\frac{mx}{t^2}\right] = m\frac{m^{-1}}{m^{-2}} = m^2$
$m^2 = [G]\frac{m}{[m]} = [G]m^4 \ \ \Rightarrow [G] = m^{-2}$
$E_{PL} = M_{PL}c^2 = c^2\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1{,}2 \cdot 10^{19}$ ГэВ
Переопределим заряд электромагнитного поля и потенциал следующим образом:
$A_\mu \ \rightarrow \ \sqrt{4\pi}A_\mu$
$e \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e$
$j^\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}}j^\mu$
Тогда функция Лагранжа для электродинамики с внешним источником будет записываться следующим образом:
$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}A_\mu j^\mu$, где
$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu -$ тензор поля,
$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 -$ уравнение Максвелла без источников,
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu -$ уравнение Максвелла с источниками,
$\frac{e^2}{\hbar c} \rightarrow \frac{e^2}{4\pi} \approx 137 -$ постоянная тонкой структуры.

§4. Сохранение тензора энергии-импульса (ТЭИ)

В классической механике система описывалась функцией Лагранжа, которая зависела от обобщенных координат, скоростей и времени $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

В теории поля функция Лагранжа зависит от полей и производных полей $\mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$ и

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\,\varphi_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,\varphi_i} = 0$$

Если $L = L(q_i, \dot{q}_i) \neq L(t)$, то $E \equiv \dot{q}_i\frac{\partial L}{\dot{q}_i} - L$ удовлетворяет уравнению $\frac{dE}{dt} = 0 \ \Rightarrow$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$E = const,$ то есть
если функция Лагранжа зависит только от обобщенных координат и скоростей, а явная зависимость от времени отсутствует, то сохраняется обобщенная энергия.

Рассмотрим величину $T^{\mu}_{\cdot\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}$ – *канонический тензор энергии-импульса.* Тогда уравнение, аналогичное $\frac{dE}{dt} = 0$ может быть записано следующим образом: $0 = \partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}$.

Доказательство:

$$0 =?\ \partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\alpha \varphi_i) \right] =$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) \partial_\nu \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_i - \partial_\nu \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) =$$

$$= \{\text{ур} - \text{е Лагранжа}\} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \partial_\nu \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \partial_\nu \varphi_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_i = 0 \ \blacksquare.$$

Чтобы получить аналог $E = const$, проинтегрируем закон сохранения канонического тензора энергии импульса:

$$0 = \int d^4x \partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}$$

В качестве области интегрирования возьмем цилиндр в четырехмерном пространстве, одно основание которого будет соответствовать моменту времени t_2, другое - t_1, а боковая сторона имеет бесконечно большой радиус (рис. 2.1).

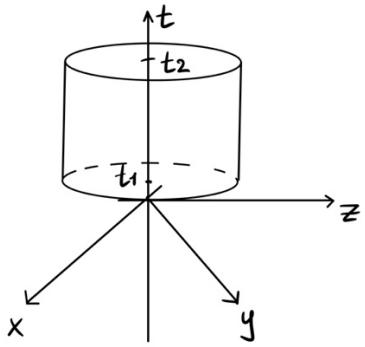


Рис. 2.1. Область интегрирования – цилиндр в четырехмерном пространстве

То есть мы интегрируем по всему трехмерному пространству, и по промежутку времени $[t_1; t_2]$. Можно заметить, что этот интеграл может быть преобразован в поверхностный интеграл с помощью теоремы аналогичной теоремы Гаусса:

$$0 = \int d^4x \partial_\mu T^\mu_{\cdot\nu} = \oint_{\substack{\text{граница} \\ \text{области } V}} dS_\mu T^\mu_{\cdot\nu}$$

Будем предполагать, что на пространственной бесконечности поля теории достаточно быстро убывают. В этом случае интеграл по боковой поверхности будет равен 0, так как канонический тензор энергии-импульса составлен из полей теории, и если теории убывают, то и тензор энергии-импульса быстро убывает и не дает вклада в интеграл. При этом на верхнем основании dS_μ направлена вверх вдоль оси t, а на нижнем, наоборот, против оси t (рис. 2.3).

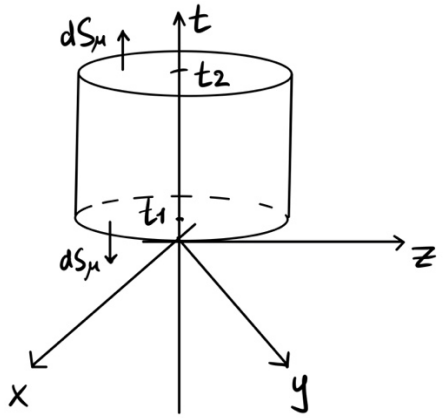


Рис. 2.2. направление dS_μ на основаниях цилиндра

Это означает, что только нулевая компонента dS_μ будет отлична от 0 и

$$0 = \int\limits_V d^4x \partial_\mu T^\mu_{\cdot\nu} = \oint\limits_{\text{граница области } V} dS_\mu T^\mu_{\cdot\nu} = \int\limits_{t=t_2} d^3x T^0_{\cdot\nu} - \int\limits_{t=t_1} d^3x d^3x T^0_{\cdot\nu}$$

$p \equiv \int d^3x T^{0\nu}(t, \vec{r}) = const$

$p^0 = \int d^3x [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial_0 \varphi_i - \mathcal{L}] = E$ – энергия полевой конфигурации

Эта величина очень похожа на выражение для обобщенной энергии в классической механике:

$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,\ L = \int d^3x \mathcal{L}.$

Тогда $(\vec{p})^i = \int d^3x T^{0i}$ и $p^\nu = (E, \vec{p})$.

§5. Тензор энергии импульса в электродинамике

Рассмотрим свободную электродинамику, которая описывается функцией Лагранжа

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Найдем энергию и импульс электромагнитного поля.

$\varphi_i \sim A_\alpha$

$$T_{\cdot\nu}^{\mu} = \partial_\nu A_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - \delta_\nu^\mu\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^2\right) = -\partial_\nu A_\alpha F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}^2$$

Энергия электромагнитного поля не должна зависеть от того, как мы вводим потенциал, то есть энергия электромагнитного поля должна быть калибровочно инварианта.

При калибровочных преобразованиях:

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha;\ \ F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\partial_\nu A_\alpha}_{\substack{\text{изменится на}\\ \text{некоторую}\\ \text{вторую производную}}} \quad \underbrace{F^{\mu\alpha}}_{\text{не поменяется}} + \underbrace{\frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}^2}_{\text{не поменяется}}$$

Поэтому заведомо это выражение не будет являться калибровочно инвариантным. Чтобы решить эту проблему, определим величину$\theta_{\cdot\nu}^{\mu}$:

$$\theta_{\cdot\nu}^{\mu} \equiv T_{\cdot\nu}^{\mu} + \partial_\alpha A_\nu F^{\mu\alpha}$$

Эта величина сохраняется на уравнения движения, так как

$$\partial_\mu\theta_{\cdot\nu}^{\mu} = \partial_\mu T_{\cdot\nu}^{\mu} + \partial_\mu(\partial_\alpha A_\alpha F^{\mu\alpha}) = 0 + \underbrace{\boldsymbol{\partial_\mu\partial_\alpha} A_\nu F^{\boldsymbol{\mu\alpha}}}_{\text{свертка}} + \underbrace{\partial_\alpha A_\nu \partial_\mu F^{\mu\alpha}}_{0} = 0$$

Эта величина калибровочно инварианта, так как

$\theta_{\cdot\nu}^{\mu} = \boldsymbol{\partial_\alpha A_\nu} F^{\mu\alpha} - \boldsymbol{\partial_\nu A_\alpha} F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}^2$

$\theta_{\cdot\nu}^{\mu} = -F_{\nu\alpha}F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}^2$

Видно, что в правой части стоит только тензор поля, которыя является калибровочно инвариантным.

$\theta_{\cdot\nu}^{\mu} = -F_{\nu\alpha}F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}^2$ – *симметризованный импульс энергии импульса.*

$\theta_{\cdot\nu}^{\mu}$ называется симметризованным, так как

$$\theta_{\cdot\nu}^{\mu} = -F^{\mu\alpha}F_{\cdot\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -F^{\nu\alpha}F_{\cdot\alpha}^{\mu} + \frac{1}{4}\eta^{\nu\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \theta^{\nu\mu}$$

Также симметризованный тензор энергии импульса обладает следующим свойством:

$$\theta_{\cdot\mu}^{\mu} = -F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4}4F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0$$

Таким образом, энергия электромагнитного поля

$$E = \int d^3x\theta^{00}$$

$$= \int d^3x\left\{-F^{0\alpha}F^{0}_{\cdot\alpha} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right\} =$$

$$= \int d^3x\left\{-F^{0i}F^{0}_{\cdot i} + \frac{1}{4}\left(F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij}\right)\right\} =$$

$$= \int d^3x\left\{F^2_{0i} - \frac{1}{2}F^2_{0i} + \frac{1}{4}F^2_{ij}\right\} = \int d^3x\left\{\frac{1}{2}F^2_{0i} + \frac{1}{4}F^2_{ij}\right\} = \frac{1}{2}\int d^3x\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_z & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим первую компоненту импульса:

$$p^1 = \int d^3x\,\theta^{01} = \int d^3x\,(-1)F^{0\alpha}F^{1}_{\cdot\alpha}$$

$$= -\int d^3x\left(\underbrace{F^{00}}_{0}F^{1}_{\cdot 0} + F^{01}\underbrace{F^{1}_{\cdot 1}}_{0} + F^{02}F^{1}_{\cdot 2} + F^{03}F^{1}_{\cdot 3}\right) =$$

$$= \int d^3x(-F_{02}F_{12} - F_{03}F_{13}) = \int d^3x\left(-E_y(-H_z) - E_zH_y\right) =$$

$$= \int d^3x\left(E_yH_z - E_zH_y\right) = +\int d^3x\,[\bar{E}X\bar{H}]_x$$

$$[\bar{E}X\bar{H}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Поэтому $\vec{p} = \int d^3x[\bar{E}X\bar{H}]$ – импульс электромагнитного поля.

Лекция 3. Теории со скалярными полями

Глава III. Теория со скалярными полями

§1. Комплексное скалярное поле

Рассмотрим поле $\phi(x^\mu)$ (далее будем записывать $\phi(x)$). Закон преобразования по отношению к группе Лоренца: $\phi'(x') = \phi(x)$.
Запишем самую простую функцию Лагранжа, описывающую комплексное скалярное поле. При этом функция Лагранжа

1) должна быть вещественной
2) должна содержать вторые производные

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi -$ лоренц-инвариантное вещественное слагаемое, содержащее вторые производные скалярного поля;
$V(\phi^* \phi) -$ потенциал, зависящий от квадрата поля;
$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \overline{\nabla}\right)$
$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = |\partial_0 \phi|^2 - |\partial_i \phi|^2$

Запишем уравнение движения. В качестве полевых переменных φ_i можно взять вещественную и мнимую часть поля ϕ или эквивалентное поле и его комплексно-сопряженное:

$$\varphi_i = (\phi\,, \phi^*)$$

Тогда уравнение Лагранжа:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$$

Рассмотрим уравнение

$$\phi^*\colon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -V'(\phi^* \phi)\phi$$

Тогда уравнение движения для ϕ^*:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + V'(\phi^* \phi)\phi$$

где $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_\mu^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \overline{\nabla}^2$
Теперь рассмотрим уравнение для ϕ:

$$\phi^*:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^*; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -V'(\phi^*\phi)\phi^*$$

Уравнение Лагранжа для ϕ:

$$0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + V'(\phi^*\phi)\phi^*$$

Легко заметить, что эти два уравнения Лагранжа отличаются на комплексное сопряженное, то есть ϕ и ϕ^* отличаются друг от друга на комплексное сопряженное.
Интересный частный случай функции Лагранжа $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^*\phi)$
возникает при $V(\phi^*\phi) = m^2 \phi^* \phi$,

где m – некоторая постоянная, имеющая размерность массы.

Тогда уравнение Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

И при $V'(\phi^*\phi) = m^2$ уравнение движения и комплексно-сопряженное уравнение:

$0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi -$ уравнение Клейна-Гордона-Фока

$0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^*$

Легко заметить, что уравнение движения линейно по ϕ, поэтому решение найти легко. Найдем решение уравнение в виде плоской волны:

$$\phi(t, \vec{r}) = A \cdot exp\left(-ik_0 t + i\vec{k}\vec{r}\right) = A \cdot \exp\left(-ik_\mu x^\mu\right)$$

$k^\mu = \left(k^0, \vec{k}\right)$

$k_\mu x^\mu = k_0 x^0 - \vec{k}\vec{r} = k_0 t - \vec{k}\vec{r}$

Применяя производную к этому выражению, получим

$$\partial_\mu \phi = \partial_\mu (A \cdot \exp(-ik_\alpha x^\alpha)) = -ik_\mu \phi$$

$$0 = -ik_\mu\left(-ik_\mu\right) + m^2)\phi$$

Нетривиальные решения будут возникать только в том случае, когда

$$-k_\mu k^\mu + m^2 = 0,$$

где $k_\mu k^\mu \equiv k_\mu^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ в силу метрики Минковского

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu}$$

Отсюда получаем дисперсионное отношение

$$0 = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2$$

$k_0^2 = \vec{k}^2 - m^2$

$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \;\; c = \hbar = 1$

В связи с этим уравнение Клейна-Гордона-Фока стоит рассматривать как релятивистское обобщение уравнения Шредингера. В дальнейшем покажем, что уравнение Клейна-Гордона-Фока может быть сведено в некотором пределе к уравнению Шредингера в случае с магнитным полем.

Уравнение Клейна-Гордона-Фока может быть представлено как суперпозиция плоских волн:

$$\phi(x) = \sum_{\pm} A_{\vec{k}}^{\pm} \cdot \exp(-ik_\alpha x^\alpha) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha k^\alpha - m^2) \tilde{\phi}(k) \exp\left(-ik_\beta x^\beta\right)$$

§2. Глобальная калибровочная инвариантность

Полученная функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

инвариантна относительно группы Лоренца и, кроме того, обладает следующей симметрией:

$$\begin{cases} \phi \to \exp(-ie\alpha)\, \phi \\ \phi \to \exp(-ie\alpha)\, \phi' \end{cases}$$

α −вещественная постоянная - параметр преобразований, $\alpha \neq \alpha(x)$;
e − вещественная постоянная - константа связи;
$\partial_\mu \phi \to \exp(-ie\alpha)\, \partial_\mu \phi$
$\partial_\mu \phi^* \to \exp(-ie\alpha)\, \partial_\mu \phi^*$
Отсюда, очевидно

$$\partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi^* \to \partial_\mu \phi \cdot \exp(-ie\alpha) \cdot \exp(ie\alpha)\, \partial^\mu \phi^* = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* = inv$$

$$\phi^* \phi \to \phi^* \phi = inv$$

При этом $\alpha \neq \alpha(x)$ - *глобальное* преобразование.
Глобальными преобразованиями называются такие преобразования, параметр которых не зависит от координат.
В свою очередь *локальные* преобразования – преобразования, которые зависят от координат. Часто калибровочными преобразованиями называют локальные преобразования, но тем не менее, мы будем называть калибровочные преобразования

глобальной калибровочной инвариантностью, подчеркивая, что они не зависят от координат.
Будет ли локальная инвариантность, при которой $\alpha = \alpha(x)$?
В этом случае при локальных преобразованиях по-прежнему

$$\phi^*\phi \to \phi^*\phi = inv$$

Однако,

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu(\exp(-ie\alpha)\,\phi) = \exp(-ie\alpha)\left[-ie\partial_\mu\alpha\phi + \partial_\mu\phi\right]$$

$\partial_\mu\phi^* \cdot \partial^\mu\phi \equiv \left|\partial_\mu\phi\right|^2 \to \left|\partial_\mu\phi - ie\partial_\mu\alpha\phi\right|^2 \neq \left|\partial_\mu\phi\right|^2$ – не инвариантно.

§3. Локальная калибровочная инвариантность. Электродинамика со скалярным полем

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi - V(\phi^*\phi)$
$\varphi_i = (\phi, \phi^*, A_\nu)$
$0 = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + V'(\phi^*\phi)\phi$
$0 = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi^* + V'(\phi^*\phi)\phi^*$
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, где $j^\nu = ie(\phi^*\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}^\nu\phi^*)$
$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

Как мы уже выяснили, полученная функция Лагранжа $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\phi^*\phi)$ не является локальной инвариантной. Мы хотим, чтобы следующие преобразования стали симметрией:

$$\begin{cases} \phi \to \exp\big(-ie\alpha(x)\big)\phi \\ \phi^* \to \exp\big(+ie\alpha(x)\big)\phi^* \quad (*) \\ A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) \end{cases}$$

Рассмотрим *ковариантную производную* $\mathcal{D}_\mu\phi$ и ее изменения при локальных калибровочных преобразованиях, задаваемых формулами (*).
$\mathcal{D}_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$
$\mathcal{D}_\mu\phi \to \partial_\mu\phi' - ieA'_\mu\phi' = \partial_\mu\big(\exp\big(-ie\alpha(x)\big)\,\phi\big) - ie\left(A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)\right)\exp\big(-ie\alpha(x)\big)\phi =$
$\exp\big(-ie\alpha(x)\big)\left[\,\partial_\mu\phi - ie\partial_\mu\alpha(x)\phi - ieA_\mu\phi + ie\partial_\mu\alpha(x)\phi\right] = \exp\big(-ie\alpha(x)\big)\mathcal{D}_\mu\phi$

Другими словами, ковариантная производная преобразовывается так же, как и поле, на которое она действует.
Функция Лагранжа должна быть вещественной, поэтому если мы заменим в ней производную на ковариантную производную, то в ней должно заведомо присутствовать сопряженное выражение. Определим ковариантную производную поля ϕ^*:

$$\mathcal{D}_\mu\phi^* \equiv \left(\mathcal{D}_\mu\right)^* = \partial_\mu\phi^* + ieA_\mu\phi^* \to$$
$$\to \exp\big(ie\alpha(x)\big)\left[\partial_\mu\phi^* + ie\partial_\mu\alpha(x)\phi^* + ieA_\mu\phi^* - ie\partial_\mu\alpha(x)\phi^*\right] =$$
$$= \exp\big(ie\alpha(x)\big)\,\mathcal{D}_\mu\phi^*$$

Теперь мы можем записать функцию Лагранжа, которая будет инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi - V(\phi^*\phi)$$

При этом $\mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi \to \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi = inv$

$$\varphi_i = (\phi, \phi^*, A_\nu)$$

Модифицируем функцию Лагранжа, добавив к ней еще одну калибровочно-инвариантную часть, содержащую производную поля A_ν:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu A_\mu \to F_{\mu\nu}$

Таким образом можно построить теорию инвариантную относительно локальных калибровочных преобразований, которая описывает *скалярную электродинамику*:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi - V(\phi^*\phi)$$

Для этой теории $\varphi_i = (\phi, \phi^*, A_\nu)$. Запишем для всех этих полей уравнение движения:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^*\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}$$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = \mathcal{D}^\mu\phi$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi^*} = -V'(\phi^*\phi)\phi + ieA_\mu\mathcal{D}^\mu\phi$

$$0 = \partial_\mu\mathcal{D}^\mu\phi - ieA_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + V'(\phi^*\phi)\phi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\mathcal{D}^\mu\phi + V'(\phi^*\phi)\phi =$$
$$= \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + V'(\phi^*\phi)\phi$$

Уравнение движения для ϕ^*:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^*\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi^* + V'(\phi^*\phi)\phi^*$$

где $\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\mathcal{D}^\mu\phi^*$

Очевидно, что это уравнение также является инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований.

Уравнение движения для A_ν:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\mathcal{D}_\alpha \phi^*)} \frac{\partial\,(\mathcal{D}_\alpha \phi^*)}{\partial A_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\mathcal{D}_\alpha \phi\,)} \frac{\partial\,(\mathcal{D}_\alpha \phi\,)}{\partial A_\nu} = \mathcal{D}^\alpha \phi \cdot \delta^\nu_\alpha ie\phi^* + \mathcal{D}^\alpha \phi^* (-ie)\delta^\nu_\alpha \phi =$$
$$= ie(\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi - ieA_\alpha \phi$$
$$\mathcal{D}_\alpha \phi^* = \partial_\alpha \phi^* + ieA_\alpha \phi^*$$

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - ie(\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ie(\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*) \equiv j^\nu$$

Ток $j^\nu \equiv ie(\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*)$

То есть ток задается не извне, а определяется самими полями. И как следствие введения потенциала выполняется тождество Бьянки: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$.

Ток должен удовлетворять условию непрерывности:

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu$$

$$0 \underset{?}{=} \frac{1}{ie} \partial_\nu j^\nu = \partial_\nu (\phi \mathcal{D}^\nu \phi^* - \phi^* \mathcal{D}^\nu \phi\,) =$$
$$= \partial_\nu \phi \mathcal{D}^\nu \phi^* + \phi \partial_\nu \mathcal{D}^\nu \phi^* - \partial_\nu \phi^* \mathcal{D}^\nu \phi$$
$$- \phi^* \partial_\nu \mathcal{D}^\nu \phi \underbrace{-ieA_\nu \phi \mathcal{D}^\nu \phi^* + ieA_\nu \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*}_{0} \underbrace{-ieA_\nu \phi^* \mathcal{D}^\nu \phi + ieA_\nu \phi^* \mathcal{D}^\nu \phi}_{0} = \mathcal{D}_\nu \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*$$
$$+ \phi \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi^* - \mathcal{D}_\nu \phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi^* \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi = \phi \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi^* - \phi^* \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi$$

Воспользуемся уравнениями движений для полей ϕ и ϕ^*:

$$0 \underset{?}{=} \frac{1}{ie} \partial_\nu j^\nu = \phi \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi^* - \phi^* \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi = \phi(-V'(\phi\phi^*)\phi) + \phi^* V'(\phi^*\phi)\phi = 0$$

Ток действительно удовлетворяет уравнению непрерывности.

§4. Низкоэнергетический предел уравнения Клейна-Гордона-Фока с электромагнитным полем

Рассмотрим случай $V(\phi^*\phi) = m^2 \phi^* \phi$.

Тогда

$$0 = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi + m^2 \phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\varphi \right)^2 \phi - \left(\vec{\nabla} + ie\vec{A} \right)^2 \phi + m^2 \phi$$

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$$
$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \overline{\nabla}\right)$$
$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$
$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu = \mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_i^2$$

Ранее упоминалось, что можно взять решение уравнения Клейна-Гордона-Фока в свободном случае в виде плоской волны. Тогда ϕ ведет себя как волновая функция в квантовой механике:

$$\phi \sim \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$$

Важно, что частица релятивистская, и в низкоэнергетическом пределе при малых скоростях $v \ll c$

$$E = mc^2 + \Delta E$$

Волновая функция в квантовой механике из уравнения Шредингера ведет себя следующим образом:

$$\psi \sim \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta Et\right)$$

Функции ϕ и ψ можно связать между собой.
Положим

$$\phi \equiv \exp(-imt)\,\psi \qquad (\hbar = c = 1)$$

Тогда

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \exp(-imt)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - im\psi\right)$$

$\overline{\nabla}\phi = \exp(-imt)\,\overline{\nabla}\psi$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - im - ie\varphi\right)^2\psi - \left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)^2\psi + m^2\psi =$$
$$= \underbrace{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}}_{\substack{\text{можно}\\ \text{пренебречь}\\ \text{в пределе}}} - m^2\psi - \underbrace{e^2\varphi^2\psi}_{\substack{\text{можно}\\ \text{пренебречь}}} - 2me\varphi\psi - 2im\frac{\partial\psi}{\partial t} - \underbrace{ie\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\substack{\text{можно}\\ \text{пренебречь}}}$$
$$- \underbrace{ie\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\psi)}_{\substack{\text{можно}\\ \text{пренебречь}}} - \left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)^2\psi + m^2\psi$$

$\frac{\partial\psi}{\partial t} \sim \Delta E\psi$
$|\Delta E| \ll m$ в нерелятивистском пределе
В итоге

$$2im\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)^2\psi - 2me\varphi\psi$$

Разделим на $2m$ и получим уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)^2\psi - e\varphi\psi \ (*)$$

Вспомним, как выглядит функция Гамильтона для (нерелятивистской) частицы массы m заряда q в произвольном электромагнитном поле:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi$$

Возьмем $q = -e$ (из уравнения $(*)$) и заменим функцию Гамильтона на оператор Гамильтона

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - e\varphi = \left[\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\overline{\nabla}\right] = -\frac{1}{2m}\left(\hbar\overline{\nabla} + \frac{ie}{c}\vec{A}\right)^2 - e\varphi$$

Сравнивая полученное уравнение и уравнение (*), получаем, что

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi$$

Таким образом, низкоэнергетический предел уравнения Клейна-Гордона-Фока есть уравнение Шредингера.

Замечание: релятивистский электрон не описывается уравнением Клейна-Гордона-Фока, так как у него есть спин, а уравнение Клейна-Гордона-Фока описывает частицы со спином 0 (например, бозон Хиггса).

Лекция 4. Массивные поля и спонтанные нарушения калибровочной симметрии. Часть I.

Глава 4. Массивные поля и спонтанное нарушение калибровочной симметрии

§1. Массивное векторное поле

Запишем лагранжиан для векторного поля A_μ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$$

Уравнение Лагранжа:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu$$

Уравнение движения:

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu$$

Применим производную ∂_ν и получим

$$0 = \underbrace{\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}}_{\substack{0 \\ \text{свертка}}} + m^2\partial_\nu A^\nu$$

Тогда при $m \neq 0$ $\partial_\nu A^\nu = 0$.

Это выражение напоминает калибровку Лоренца из электродинамики, но на самом деле это следствие уравнение движения.

$$0 = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = \left(\partial_\mu\partial^\mu A^\nu + m^2 A^\nu\right) - \partial^\nu\left(\underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{0}\right) = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)A^\nu$$

$0 = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)A^\nu$ – уравнение Клейна -Гордона-Фока для векторного поля.

Уравнения линейные, поэтому их решение можно искать в виде плоской волны:

$$A_\mu = B_\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha} = B_\mu e^{-ik_0 t + i\vec{k}\vec{r}}$$

$$k^\mu = \left(k_0, \vec{k}\right), \;\; k_\mu = (k_0, -\vec{k})$$

$$0 = \left(-ik_\mu(-i)k^\mu + m^2\right)B_\mu = (-k_\mu k^\mu + m^2)B_\mu$$

$$0 = k_\mu k^\mu - m^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2$$

$$k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$$

$$0 = \partial_\mu A^\mu \to 0 = -ik_\mu B^\mu$$
$$0 = k_\mu B^\mu$$

Выберем систему отсчета, в которой k_μ для массивной частицы выглядит максимально просто – массивная частица покоится - $k^\mu = (m, 0,0,0)$.
Тогда

$$0 = mB_0 \quad \Rightarrow B_0 = 0,$$

B_1, B_2, B_3 –произвольные, и массивное векторное поле имеет 3 степени свободы.
Запишем решение уравнений в виде суперпозиции плоских волн:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha k^\alpha - m^2) \tilde{A}_\mu(k) e^{-ik^\alpha x^\alpha}$$

где $k_\mu \tilde{A}_\mu(k) = 0$.
В такой записи решения явно видно симметрию Лоренца.
Таким образом была построена модель, описывающая массивное векторное поле, однако она не очень хорошо описывает массивное поле.
Вернемся к функции Лагранжа векторного поля A_μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu^2$$

В этой модели нет калибровочной симметрии, столь важно для теории поля:

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha$$
$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$$
$$A_\mu^2 \to \left(A_\mu - \partial_\mu \alpha\right)^2 \neq A_\mu^2$$

Таким образом при добавлении массы в теорию сразу рушится калибровочная инвариантность. Соответственно для описания фундаментальных взаимодействий в теории поля такую модель использовать не получится.

§2. Сравнение с безмассовым векторным полем

Сравним теорию массивного векторного поля с теорией безмассового векторного поля. Рассмотрим модель векторного поля, в которой $m = 0$.
Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$$

инвариантна относительно преобразований $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha$
Тогда уравнение Лагранжа:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + 0$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда не следует условие $0 = \partial_\mu A^\mu$, которое было в модели массивного векторного поля. Однако, есть калибровочная инвариантность, и на потенциал можно наложить условие.

Наложим условие калибровки $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Существует остаточная калибровочная инвариантность $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha$,

где $\partial_\mu \partial^\mu \alpha = 0$ $(\partial_\mu^2 \alpha = 0)$.

Действительно,

$$0 = \partial_\mu A^\mu \to \partial_\mu (A^\mu - \partial^\mu \alpha) = \partial_\mu A^\mu - \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu \alpha}_{\substack{0 \\ \text{усл. остаточной} \\ \text{калибровочной} \\ \text{инвариантности}}} = 0$$

Подставим в уравнение движения $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$0 = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu^2 A^\nu - \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{\substack{0 \\ \text{усл. остаточной} \\ \text{калибровочной} \\ \text{инвариантности}}} -$$ уравнение Клейна-Гордона-Фока

Его решение также можно записать в виде плоской волны:

$$A_\mu = B_\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha},$$

где $k_\alpha^2 = 0$ и из условия Лоренца $k_\mu B^\mu = 0$.

Исходя из остаточных условий инвариантности

$$\alpha = b e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

Тогда

$$k_\alpha^2 = 0$$

Запишем остаточные калибровочные преобразования и выясним, как меняется амплитуда:

$$A_\mu = B_\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha} \to A_\mu - \partial_\mu \alpha = B_\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha} + ik_\mu b e^{-ik_\alpha x^\alpha} \Leftrightarrow B_\mu \to ik_\mu b$$

Выберем удобную систему отсчета, в которой импульс безмассовой частицы направлен вдоль третьей оси - $k^\mu = (E, 0, 0, E)$, исходя из $k_0^2 - \vec{k}^2 = \vec{k}_\alpha^2 = 0$.

Тогда

$$0 = k_\mu B^\mu = EB^0 - EB^3 \Rightarrow B^0 = B^3 \ (B_0 = -B_3)$$

Запишем остаточные калибровочные преобразования в новой системе отсчета:

$B_0 \to B_0 + iEb = B_0{}'$

$B_1 \to B_1$

$B_2 \to B_2$

$B_3 \to B_3 - iEb$

Используем произвольность остаточной калибровки, чтобы занулить B_0. Выберем постоянную b так, чтобы $B_0' = 0 \quad (B_0 + iEb = 0)$.
Тогда $B_3' = B_3 - iEb = -B_0 - iEb = -B_0 = 0$.
Таким образом, есть только 2 нетривиальные компоненты, то есть $B_1 = B_1'$и $B_2 = B_2{}'$ остаются произвольными. Поэтому говорят, что безмассовое векторное поле имеет 2 степени свободы.
Теперь запишем все формулы в виде плоских волн:
$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0; \quad \partial_\mu A^\mu = 0$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \tilde{A}_\mu(k) e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

Из условия Лоренца

$$k_\mu \tilde{A}^\mu(k) = 0$$

Остаточная инвариантность

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha; \quad \partial_\mu \partial^\mu \alpha = 0$$

$$\alpha(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \tilde{\alpha}\,(k) e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

Тогда остаточные преобразования

$$\tilde{A}^\mu(k) \to \tilde{A}^\mu(k) + ik_\mu \tilde{\alpha}\,(k)$$

Так как $\alpha^*(x) = \alpha(x)$,

$$\alpha^*(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \tilde{\alpha}^*\,(k) e^{+ik_\alpha x^\alpha} = \{k_\mu \to -k_\mu\} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \tilde{\alpha}^*\,(-k) e^{-ik_\alpha x^\alpha} =$$

$$= \alpha(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \tilde{\alpha}\,(k) e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

Следовательно, $\tilde{\alpha}^*\,(-k) = \tilde{\alpha}\,(k)$. Аналогично $\tilde{A}_\mu(-k) = \tilde{A}_\mu(k)$.

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (Абелев случай)

Для того, чтобы понять, что такое спонтанное нарушение симметрии, отвлечемся от векторных полей и рассмотрим модель с глобальной симметрией.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \ \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

Эта теория инвариантна относительно следующих преобразований:

$$\begin{cases} \phi \to \exp\,(-ie\alpha)\phi \\ \phi^* \to \exp(-ie\alpha)\,\phi^* \end{cases}, \quad \alpha \neq \alpha(x)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Исследуем спектр частиц в этой теории.

$$E = \int d^3x T^{00},$$

где $T^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$ - тензор энергии импульса.

$\varphi_i = (\phi, \phi^*)$

$$T^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\nu \phi^* - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} =$$
$$= \partial^\mu \phi^* \, \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi^* - \delta^\mu_\nu (\partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - V(\phi^* \phi)$$

$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \, \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi + \eta^{\mu\nu} V(\phi^* \phi) = T^{\nu\mu}$
$E = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \{\partial^0 \phi^* \partial^0 \, \phi + \partial^0 \phi^* \partial^0 \phi - (\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi - \partial_i \phi^* \partial_i \phi) + V(\phi^* \phi)\}$
$E = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \, \{\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi \, V(\phi^* \phi)\}$

Система стремится занять положение с минимальной энергией. Пусть $V(\phi^* \phi) \geq 0$. V должен иметь не более, чем четвертую степень по полям. Если это условие выполняется, то в квантовой теории поля получается *перенормируемая* теория. Существуют 2 фактические возможности:

а) $V = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$, где $m \in Re, \ \lambda \geq 0$

б) $V = \lambda(\phi^* \phi - v^2)^2 = \lambda(\phi^* \phi)^2 - 2\lambda v^2 \phi^* \phi + \lambda v^4, \ \lambda > 0, [\lambda] = 1, [v] = m$

Основное различие между а) и б) – в знаке. Исследуем устройство спектра частиц в этих двух теориях.

В первую очередь нужно определить, что будет являться состоянием с наименьшей энергии (в теории поля такое состояние называется *вакуумом*).

Вакуум ϕ : $E[\phi_0] \to \min$

1) $\phi_0 \neq \phi_0(t, \vec{r})$ – вакуумное значение поля не зависит от координат и времени
2) $V(\phi^* \phi) \to \min$

Найдем вакуумное состояние в случае а) и б). Для этого представим поле в виде суммы его вещественной и мнимой части:

$$\phi \equiv P + iS, \qquad P, S \in Re$$

При калибровочных преобразованиях

$\phi \to \exp(-ie\alpha)\phi$

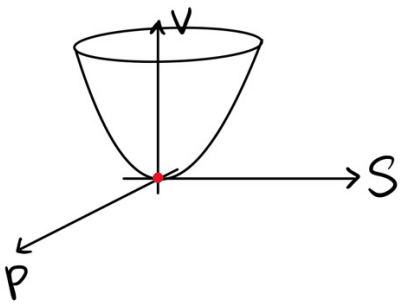
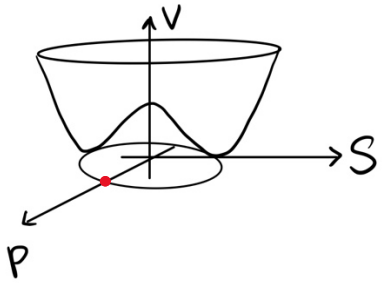
$(P + iS) \to (\cos(e\alpha) - i \sin(e\alpha))(P + iS) = [\cos(e\alpha)P + \sin(e\alpha)S] + i[-\sin(v)P + \cos(e\alpha)P]$

$\begin{cases} P \to \cos(e\alpha) \, P + \sin(e\alpha)S \\ S \to -\sin(e\alpha)P + \cos(e\alpha)S \end{cases}$ - поворот в плоскости PS

То есть калибровочные преобразования в координатах PS будут соответствовать повороту, теория калибровочно-инвариантна, то есть потенциал будет поверхностью вращения:

$$V(\phi^*\phi) = V(P^2 + S^2)$$

Изобразим график потенциала в случае а) и б).

а) $V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$	б) $V = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$
 Рис. 4.1. график потенциала а) Вакуум помечен красной точкой на графике: $\phi_0 = 0$ Этот вакуум калибровочно-инвариантен: $\phi_0 \to \exp(-ie\alpha)\phi_0$ $0 \to \exp(-ie\alpha)\,0 = 0$ $\phi_0 \to \phi_0$ Эта ситуация называется *ненарушенная симметрия*	 Рис. 4.2. график потенциала б) $\min \sim \phi^*\phi = v^2$ $p^2 + s^2 = v^2$ Вакуум в некоторой точке, принадлежащей окружности. Например, удобно выбрать точку на окружности, где $p = 0$. Можно выбрать $\phi_0 = v$ Это вакуумное состояние не является калибровочно-инвариантным: $v \to \exp(-ie\alpha)\,v \neq v$ $\phi_0 \nrightarrow \phi_0$ Такая ситуация называется *спонтанное нарушение симметрии.* *Спонтанное нарушение симметрии* – это, когда теория инвариантна относительно калибровочных преобразований, но вакуум не инвариантен относительно калибровочных преобразований.

Исследуем спектр частиц.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^* \;\; \partial^\mu\phi - V(\phi^*\phi)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предполагаем, что теория движется вблизи вакуумного состояния, причем все поля несильно отличаются от вакуумных значений, то есть отклонения полей от вакуума малы. Разложим функцию Лагранжа в квадратичном приближении:

а) $\phi_0 = 0,\ \phi = \phi - \phi_0 -$ поле мало

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \approx \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi =$$
$$= \left(\partial_\mu P\right)^2 + \left(\partial_\mu S\right)^2 - m^2 (P^2 + S^2)$$

Спектром является одно комплексное массивное скалярное поле массы m, или эквивалентно два вещественных скалярных поля массы m. В случае б) спектр будет совершенно другой.

Лекция 5. Массивные поля и спонтанные нарушения калибровочной симметрии. Часть II. Группы Ли.

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (Абелев случай)

Мы рассмотрели теорию, описываемую следующей функцией Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \ \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

Эта теория инвариантна относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\phi \to \exp(-ie\alpha)\,\phi, \qquad \alpha \neq \alpha(x)$$

И энергия может быть записана в виде:

$$E = \int d^3x = \int d^3x\,\{\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi\, V(\phi^* \phi)\}$$

Энергия всегда стремится к вакуумному состоянию (состоянию наименьшей энергии) и при этом ограничена снизу (в классической теории поля это условие накладывается специально). Мы предположили, что энергия ограничена снизу и в минимуме значение потенциала равно 0. Кроме того, в квантовой теории поля не противоречивы только те теории, в которых потенциал $V(\phi^* \phi)$ имеет не более, чем 4 степень по полям. Также были рассмотрены 2 случая:
а) $V = m^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2$ и б) $V = \lambda(\phi^* \phi - v^2)^2$

а) $V = m^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2$	б) $V = \lambda(\phi^* \phi - v^2)^2$
Вакуум: $\phi_0 = 0$ Этот вакуум калибровочно-инвариантен: $\phi_0 \to \exp(-ie\alpha)\phi_0$ $0 \to \exp(-ie\alpha)\,0 = 0$ $\phi_0 \to \phi_0$ $\phi = \phi - \phi_0$ – мала $\mathcal{L} \approx \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi = \left(\partial_\mu P\right)^2 +$ $+\left(\partial_\mu S\right)^2 - m^2(P^2 + S^2)$	$\min \sim \phi^* \phi = v^2$ $p^2 + s^2 = v^2$ (СНС) $\phi_0 = v$ Это вакуумное состояние не является калибровочно-инвариантным: $v \to \exp(-ie\alpha)\,v \neq v$ $\phi_0 \nrightarrow \phi_0$ $\phi = v + P_1 + iS_1 \ \ (P = P_1$ P_1, S_1 – малые $V(\phi^* \phi) = \lambda[(v + P_1)^2 + S_1 - v^2]^2 =$ $\lambda[2vP_1 + P_1^2 + S_1^2]^2 \approx 4v^2 \lambda P_1^2$ $\mathcal{L} \approx \left(\partial_\mu P_1\right)^2 + \left(\partial_\mu S_1\right)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$ Спектр частиц: 1) Re скалярное поле $P_1, m_p = 2v\sqrt{\lambda}$ 2) Re скалярное поле $S_1, m_s = 0$ – голдстоуновский бозон

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В случае а) массы соответствовали колебаниям в двух перпендикулярных направлениях (рис. 5.1):

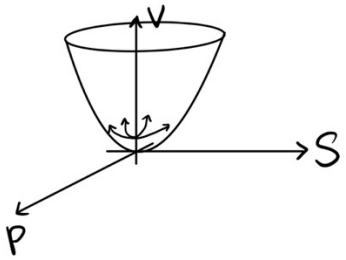


Рис. 5.1. Колебания в случае а)

В случае б) частота колебаний движения по окружности равна 0, и голдстоуновский бозон соответствует сдвигу по касательной к окружности, являющейся минимумом потенциала (рис. 5.2):

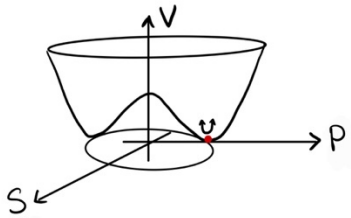


Рис. 5.2. Колебания в случае б)

Тогда на выбранном нами вакууме $P = v$, и касательная направлена вдоль оси OS. Существование окружности, вдоль которой потенциал не растет, следует из того, что симметрия спонтанно нарушена:
Известно, что потенциал инвариантен. Возьмем вакуум – минимум потенциала. Вакуумное состояние меняется при калибровочных преобразованиях:

$$v \to \exp(-ie\alpha)\, v \neq v$$

Значит, есть направление, вдоль которого потенциал не растет.

§4. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (Абелев случай)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi - V(\phi^*\phi), \text{ где}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$$

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi^* - ieA_\mu\phi^*$$

Преобразования:

$$\begin{cases} \phi \to \exp\big(-ie\alpha(x)\big)\phi \\ \phi^* \to \exp\big(+ie\alpha(x)\big)\phi^* \\ A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

Два случая потенциала:

а) $V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$

б) $V = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$

Симметризованный тензор энергии-импульса:

$$E = \int d^3\theta^{00} = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{H} + \mathcal{D}_0\phi^*\mathcal{D}_0\phi + \mathcal{D}_i\phi^*\mathcal{D}_i\mathcal{D}_\mu + V(\phi^*\phi)\right\}$$

Канонический тензор энергии импульса:

$$T^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\varphi_i\big)}\partial_\nu\varphi_i - \delta^\mu_\nu\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)}\partial_\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi^*\big)}\partial_\nu\phi^* - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}$$
$$= \partial^\mu\phi^*\,\partial_\nu\phi + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi^* - -\delta^\mu_\nu(\partial_\alpha\phi^*\partial^\alpha\phi - V(\phi^*\phi)$$

Симметризованный импульс отличается от канонического на некоторое слагаемое с производной:

$$\theta^{\mu}_{\cdot\nu} = T^{\mu}_{\cdot\nu} + \partial_\alpha(A_\nu F^{\mu\alpha})$$

Так как

$$\partial_\mu\theta^{\mu}_{\cdot\nu} = \underbrace{\partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}}_{0} + \underbrace{\partial_{\boldsymbol{\mu}}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(A_\nu F^{\boldsymbol{\mu\alpha}})}_{0}$$

Вакуумное состояние – это состояние минимальной энергии, поэтому в вакуумном состоянии

$$A_{\mu 0} = 0;\;\; \phi_0 = const\colon\; V(\phi^*\phi) \to min$$

Тогда

$$\vec{E}_0 = 0;\;\; \vec{H}_0 = 0;\; \mathcal{D}_\mu\phi_0 = \underbrace{\partial_\mu\phi_0}_{0} - \underbrace{ieA_{\mu 0}\phi_0}_{0} = 0$$

В случае а) $V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2, \lambda \geq 0$

$$A_{\mu 0} = 0;\;\; \phi_0 = 0$$
$$A_\mu = A_\mu - A_{\mu 0};\;\; \phi = \phi - \phi_0 - \text{малы}$$
$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \underbrace{ieA_{\mu 0}\phi}_{0} \approx \partial_\mu\phi$$
$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$$

Следовательно, в спектре частиц будут

1) безмассовое векторное поле A_μ
2) комплексное скалярное поле $m_\phi = m$

Число степеней свободы = 2+2=4

В случае б) $V = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$A_{\mu 0} = 0;\ \ \phi_0 = v$
$A_\mu = A_\mu - A_{\mu 0}$ –отклонение мало
$\phi = v + P_1 + iS_1$, где P_1, S_1 – малые
Ковариантная производная:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi = \partial_\mu P_1 + i\partial_\mu S_1 - ieA_\mu (v + P_1 + iS_1) \approx \partial_\mu P_1 + i\partial_\mu S_1 - ievA_\mu$$

$$V(\phi^* \phi) = \lambda[(v + P_1)^2 + S_1 - v^2]^2 = \lambda[2vP_1 + P_1^2 + S_1^2]^2 \approx 4v^2 \lambda P_1^2$$

$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \left(\partial_\mu P_1\right)^2 + \left(\partial_\mu S_1 - evA_\mu\right)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

Необходимо перейти к нормальным координатам, чтобы функция Лагранжа распалась на лагранжианы для отдельных полей и можно было рассмотреть спектр.
Введем поле B_μ:

$$B_\mu \equiv A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu S_1$$

$$\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \partial_\mu \left(A_\nu - \frac{1}{ev} \partial_\nu S_1\right) - \partial_\nu \left(A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu S_1\right) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

$$\left(\partial_\mu S_1 - evA_\mu\right)^2 = e^2 v^2 B_\mu^2 (e^2 v^2 B_\mu B^\mu)$$

$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2 + e^2 v^2 B_\mu^2 + \left(\partial_\mu P_1\right)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

В спектре частиц будут

1) массивное векторное поле B_μ
   $m_B = \sqrt{2} ev$ так как $m_B^2 = 2e^2 v^2 \ \Rightarrow\ m_B = \sqrt{2} ev$
2) Массивное вещественное скалярное поле P_1 – хиггсовский бозон
   $m_P = 2v\sqrt{\lambda}$

Число степеней свободы = 3+1 = 4

Таким образом, мы получили теорию, содержащую массивные поля, без нарушения локальной калибровочной инвариантности. Масса этих векторных полей получается за счет механизма спонтанного нарушения калибровочной симметрии – механизма Хиггса.

Выводы:

- При различных спектрах и потенциалах в случаях а) и б) число степеней свободы в обоих случаях равна 4, так как степени свободы не зависят от потенциала.
- В случае б) присутствовал голдстоуновский бозон S_1 , но при нарушении локальной калибровочной симметрии он ликвидировался. Говорят, что векторное поле «съедает» голдстоуновский бозон и приобретает массу.

Ликвидация голдстоуновского бозон связана с локальной калибровочной инвариантность в рассматриваемой модели. Голдстоуновский бозон можно удалить из теории, выбрав специальным образом калибровку.

Скалярное поле ϕ при локальных калибровочных преобразованиях меняется по следующим законам:

$$\phi \to \exp\big(-ie\alpha(x)\big)\phi \quad (*)$$

$$\phi = v + P_1 + iS_1, \text{ где } P_1, S_1 - \text{малые}$$

Пусть α мало, тогда запишем преобразование (*) с точностью до величин первого порядка малости в правой части:

$$v + P_1 + iS_1 \to (1 - ie\alpha)(v + P_1 + iS_1) \approx v + P_i + iS_1 \;\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 \to P_1 \equiv P_1{}' \\ S_1 \to S_1 - ev\alpha \equiv S_1{}' \end{cases}$$

Параметр α всегда можно подобрать таким образом, чтобы преобразованное поле $S_1{}' = 0$. Другими словами, существует калибровка, в которой $S_1 = 0$ (*унитарная калибровка*).

Исследование спектра упрощается в унитарной калибровке:
$\phi = v + P_1$

$$V(\phi^*\phi) = \lambda[(v + P_1)^2 + S_1 - v^2]^2 \approx 4v^2\lambda P_1^2$$

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \approx \partial_\mu P_1 + i\partial_\mu S_1 - ieA_\mu v$$

$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \left(\partial_\mu P_1\right)^2 + \left(\partial_\mu S_1 - evA_\mu\right)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

Таким образом, не нужно вводить новое поле B.

Глава 5. Некоторые сведения о группах алгебры Ли

§1. Группы Ли

<u>*Опр.*</u> *Группой* называется некоторое множество, на котором задана операция умножения такая, что для $\forall a, b, c \in G$

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность
2) $\exists\, 1: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – существование нейтрального элемента
3) $\forall a\, \exists\, a^{-1}: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ – существование обратного элемента

Если для $\forall a, b, c \in G\; a \cdot b = b \cdot a$, то G – *абелева (коммутативная)* группа.
Если элементы группы гладким образом зависят от некоторого количества параметров, то G – *группа Ли*.

[Примеры]

1) $\mathbb{Z}_n = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, \text{где } k, n \in \mathbb{Z},\; n > 0\}$ – рис. 5.3.
   $e^{\frac{2\pi ik_1}{n}} e^{\frac{2\pi ik_2}{n}} = e^{\frac{2\pi i(k_1+k_2)}{n}}$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

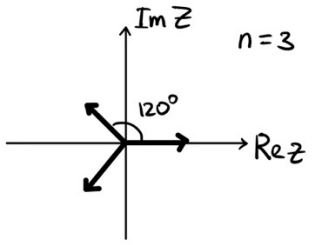


Рис. 5.3. Группа $\mathbb{Z}_3$

2) $U(1) = \{e^{i\alpha}, \alpha \in Re\}$ – рис. 5.4.

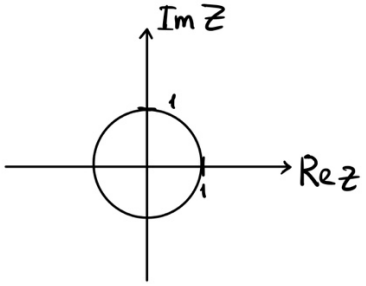


Рис. 5.4. Группа $U(1)$

3) Матричные группы Ли
$a \cdot b$ – умножение матриц $n \times n$
а) $GL(n, \mathbb{R})$; $GL(n, \mathbb{C})$
$\det(\omega) \neq 0$

б) $SL(n, \mathbb{R})$; $SL(n, \mathbb{C})$
$\det(\omega) = 1$
$\det(\omega_1 \omega_2) = \det(\omega_1)\det(\omega_2) = 1$

в) $O(n, \mathbb{R})$; $O(n, \mathbb{C})$
$\omega^T \omega = 1_n$
$(\det(\omega))^2 = 1$
$\det(\omega) = \pm 1$

г) $SO(n, \mathbb{R})$; $SO(n, \mathbb{C})$
$\omega^T \omega = 1_n$
$\det(\omega) = 1$

д) $U(n)$; $SU(n)$
$\omega^+ \omega = 1_n$; $\omega^+ \omega = 1_n; \det(\omega) = 1$

е) $O(p, q)$ – матрицы размера $(p + q) \times (p + q)$
$\omega^T \eta \omega = \eta$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$O(3,3)$ – группа Лоренца

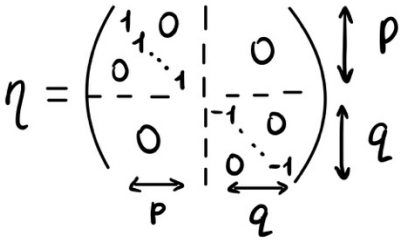


Рис. 5.5. η

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Алгебры Ли и их связь с группами Ли. Генераторы и структурные константы.

§1. Группы Ли

Опр. *Компактными группами Ли* называются группы, у которых групповое многообразие является компактом.

[Пример]

1) $U(1) = \{e^{i\alpha}, \alpha \in Re\}$ – рис. 5.4.

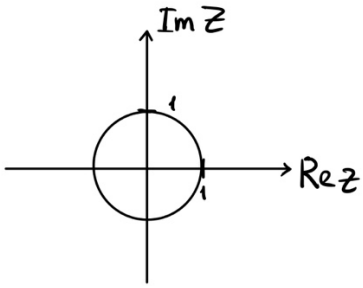


Рис. 6.1. Группа $U(1)$

Так как окружность – замкнутое и ограниченное множество.

Рассмотрим пример компакта и не компакта:

$$SL(2,\mathbb{R}) \text{ - матрица } 2\times 2$$
$$\det(\omega) = 1, \omega \in Re$$
$$\det(\omega_1\omega_2) = \det(\omega_1)\det(\omega_2) = 1$$

$$\omega = \begin{pmatrix} a_4 + a_3 & a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 & a_4 - a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3, a_4 \in Re$$

$1 = \det(\omega) = a_4^2 - a_3^2 - a_1^2 + a_2^2$ – поверхность, которая задается этим уравнением уходит на бесконечность ⇒ нет ограниченности ⇒ не компактная группа.

$$SU(2) \text{ - матрица } 2\times 2$$
$$\omega^+\omega = 1\,; \det(\omega) = 1$$
$$\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\omega^+ = \omega^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$1 = \det(\omega) = ad - bc$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \omega^+ = \omega^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$a^* = d;\ c^* = -b;\ \ b^* = -c;\ \ d^* = a$$

Таким образом $\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_4 - a_2 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3, a_4 \in Re$

$1 = \det(\omega) = a_4^2 + a_3^2 + a_2^2 + a_4^2$ −сфера $S^3 \Rightarrow$ компактное многообразие $\Rightarrow$ компактная группа.

$\omega = a_4 \cdot 1_2 + i\vec{\sigma}\vec{a} = a_4 \cdot 1_2 i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 + i\sigma_3 a_3$

§2. Алгебры Ли и их связь с группами Ли

<u>*Опр.*</u> *Алгебра Ли* – линейное пространство, на котором задана операция [,], которая удовлетворяет свойствам

1) $[a, b] = -[b, a]$ − антисимметрия
2) $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$ − линейность по двум аргументам
   $[a, \lambda b] = \lambda[a, b]$, если λ − число
3) $\big[a, [b, c]\big] + \big[c, [a, b]\big] + \big[b, [c, a]\big] = 0$ − тождество Якоби

Если для $\forall\ a, b\ [a, b] = 0$, то алгебра Ли называется *абелевой (коммутативной).*

Матричные алгебры Ли:

Рассмотрим линейное пространство матриц $n \times n$.
Рассмотрим операцию $[a, b] = ab - ba$. Очевидно, что свойства 1 и 2 выполняется. Докажем, что операция удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\begin{aligned}\big[a, [b, c]\big] + \big[c, [a, b]\big] + \big[b, [c, a]\big] \\ = a(bc - cb) - (bc - cb)a + c(ab - ba) - -(ab - ba)c + b(ca - ac) \\ - (ca - ac)b = 0.\end{aligned}$$

Теорема. Любая конечномерная алгебра Ли является матричной.

В некоторой окрестности единичного элемента группы Ли G справедлива формула:

$$\omega = e^{\alpha}, \qquad \alpha \in A$$

$$\omega \in G$$

Если ω_1 и $\omega_2\ \in G$, то $\omega_1\omega_2\ \in G$.

$$\omega_1 = e^{\alpha_1} \approx 1 + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \cdots$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\omega_2 = e^{\alpha_2} \approx 1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \cdots$$

$$\omega_1\omega_2 \approx 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_2^2 + \cdots$$

$$e^{\alpha_1+\alpha_2} \approx 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \boldsymbol{\frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1)}$$

Тогда

$$\omega_1\omega_2 \approx 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \cdots$$

$$= 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \frac{1}{2}[\alpha_1, \alpha_2] + \cdots$$

$$\approx \exp\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}[\alpha_1, \alpha_2] + \cdots\right)$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in A \;\Rightarrow\; \alpha_1 + \alpha_2 \in A,\;\; [\alpha_1, \alpha_2] \in A$

Множество A должно быть замкнуто, относительно операции коммутирования $\Rightarrow$ алгебра Ли.

Построим алгебры Ли, соответствующие группам Ли, рассмотренным ранее.

а) $GL(n, \mathbb{R})$; $GL(n, \mathbb{C})$ – группа матриц $n \times n$ $dim = n^2$
$\det\omega \neq 0$
$gl(n, \mathbb{R})$; $gl(n, \mathbb{C})$ – алгебры Ли, матрицы $n \times n$
Нет условий на ω, так как

$$\ln\det\omega = tr\ln\,\omega$$

Доказательство. Пусть все собственные значения матрицы ω – различны.
Тогда матрицу ω можно привести к диагональному виду:

$$A\omega A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\ln\det\omega = \ln\det A\omega A^{-1} = \det\omega\} = \ln(\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i$
Так как $\det(A\omega A^{-1}) = \det A\det\omega\;\; \frac{1}{\det A}$

$$tr\ln\omega = tr\ln[1 + (\omega - 1)] = tr\left[(\omega - 1) - \frac{1}{2}(\omega - 1)^2 + \frac{1}{3}(\omega - 1)^3 \ldots\right] =$$

$$= tr[A(\omega - 1)A^{-1}] = tr\,(\omega - 1)$$

$tr[A(\omega - 1)A^{-1}A(\omega - 1)A^{-1}] = tr((\omega - 1)^2$

$$tr\left[(\omega-1)-\frac{1}{2}(\omega-1)^2+\frac{1}{3}(\omega-1)^3\ldots\right]$$
$$=tr\left[A(\omega-1)A^{-1}-\frac{1}{2}(A(\omega-1)A^{-1})^2+\cdots\right]$$
$$=tr[A\omega A^{-1}-1)-\frac{1}{2}(A\omega A^{-1}-1)^2+\cdots]$$

$$tr\ln\omega=tr\ln[1+(\omega-1)]=tr\ln(A\omega A^{-1})=tr\begin{pmatrix}\ln\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \ln\lambda_1\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i$$

Таким образом, $\ln\det\omega=tr\ \ln\ \omega$, если все собственные значения различны. При совпадении собственных значений в общем случае используется приведение к Жордановой форме ■.

$$\omega=e^{\alpha}\Rightarrow\ \ln\det\omega=tr\ln\ \omega=tr\ \alpha$$
$$\det\omega=\exp(tr\ \alpha)\neq 0\ \Rightarrow \text{алгебра Ли.}$$

б) $SL(n,\mathbb{R});\ SL(n,\mathbb{C})-$ группа матриц $n\times n\ dim=n^2-1$
$\det(\omega)=1$
$\omega=e^{\alpha}\Rightarrow\det\omega=\exp(tr\ \alpha)$
$\ln\det\omega=tr\ln\ \omega=tr\ \alpha=0$
Тогда алгебры Ли - $sl(n,\mathbb{R});\ sl(n,\mathbb{C})$ состоят из матриц $n\times n$ таких, что $tr\ \alpha=0$.
Так как

$$[\alpha_1,\alpha_2]=tr\ (\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_1)=0$$

Условия, накладываемые на группу Ли, сложные и нелинейные, а условия, накладываемые на элементы алгебры Ли всегда линейные.

в) $O(n,\mathbb{R});\ O(n,\mathbb{C})-$ ортогональная группа Ли
$\omega^T\omega=1_n$
$(\det(\omega))^2=1$
$\det(\omega)=\pm 1$

$dim=\frac{n(n-1)}{2}$, так как у кососимметрической матрицы на диагонали 0, и она задается остальными элементами.
$\omega=e^{\alpha}\Rightarrow\ e^{\alpha^T}e^{\alpha}=1\Rightarrow\alpha^T=-\alpha\Rightarrow tr\alpha=-tr\ \alpha\ \ \Rightarrow tr\ \alpha=0.$
Соответственно алгебры Ли $o(n,\mathbb{R});\ o(n,\mathbb{C})$ состоят из матриц $n\times n$, удовлетворяющих условию $\alpha^T=-\alpha$.

г) $SO(n,\mathbb{R});\ SO(n,\mathbb{C})$

$$\omega^T\omega = 1_n$$
$$\det\ \omega = 1$$

Алгебры Ли $so(n,\mathbb{R});\ so(n,\mathbb{C})$ совпадают с $o(n,\mathbb{R});\ o(n,\mathbb{C})$.

д) $U(n)$ – компактны

$$\omega^+\omega = 1_n$$
$$\omega = e^\alpha \Rightarrow\ e^{\alpha^+}e^\alpha = 1\ \Rightarrow\ \ \alpha^+ = -\alpha$$

Алгебра Ли $U(n)$ удовлетворяет условию антиэрмитовости $\alpha^+ = -\alpha$.

Из условия антиэрмитовости вытекает, что на диагонали матрицы стоят мнимые числа. Справа от диагонали (в правом верхнем углу матрицы) стоят комплексные числа. Поэтому $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 + n = n + n^2 - n = n^2 = dim$

Утверждение. Любая компактная группа может быть представлена в виде подгруппы $U(n)$ при достаточно большом n.

е) $SU(n)$ – группа Ли

$$\omega^+\omega = 1_n; \det(\omega) = 1$$
$$\omega = e^\alpha \Rightarrow\ e^{\alpha^+}e^\alpha = 1\ \Rightarrow\ \ \alpha^+ = -\alpha,\ \ tr\alpha = 0$$

Алгебра Ли $su(n)$ удовлетворяет условию антиэрмитовости $\alpha^+ = -\alpha$ и $tr\alpha = 0$.
Соответственно $dim = n^2 - 1$, так n^2 параметров (как в $U(n)$) и 1 связь - $tr\alpha = 0$.

*) $O(p,q)$ – матрицы размера $(p+q)\times(p+q)$
$\omega^T\eta\omega = \eta$
$O(3,3)$ – группа Лоренца

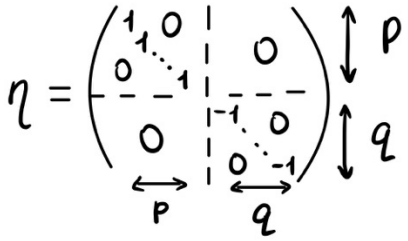


Рис. 6.2. η

$$\omega = e^\alpha \approx 1 + \alpha$$
$$\eta = (1 + \alpha^T + \cdots)\eta(1 + \alpha + \cdots) = \eta + \alpha^T\eta + \eta\alpha + \cdots$$
$$\Rightarrow 0 = \alpha^T\eta + \eta\alpha = (\eta\alpha)^T + \eta\alpha$$

Пусть $\alpha^\nu_\mu \in o(p,q)$.
Тогда $\alpha^{\mu\nu}\alpha^\nu_\alpha = \alpha^{\mu\nu}$ *и* $\eta^{\mu\alpha}\alpha^\nu_\alpha = \alpha^{\mu\nu}$

$$\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$$

Соответственно алгебра Ли удовлетворяет условию $\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$.

$dim = \frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$

§5. Генераторы и структурные константы

$\mathcal{A}$ – алгебра Ли
Базис в $\mathcal{A}$ обозначим $it^A,\ A = \overline{1, dim\mathcal{A}}$, где величины t^A называются генераторами.
Если G – компактная группа Ли, то ее элементы удовлетворяют условию $\omega^+\omega = 1$. Следовательно, элементы $\mathcal{A}$ удовлетворяют условию антиэрмитовости: $\alpha^+ = -\alpha$.
$\alpha = i\alpha^A t^A \in \mathcal{A}$, где α^A – параметр. Если $\mathcal{A}$ соответствует компактной группе, то эти параметры вещественные.

Тогда для компактный групп (алгебр):

$$\alpha^+ = -i\alpha^A (t^A)^+ = -\alpha = -i\alpha^A t^A$$

Следовательно, генераторы эрмитовы:

$$(t^A)^+ = t^A$$

[Пример 1]

$SU(2)$ – группа Ли матриц 2×2
$\omega^+\omega = 1_n; \det(\omega) = 1$
$su(2)$ – алгебра Ли состоит из матриц 2×2, удовлетворяющих условию антиэрмитовости $\alpha^+ = -\alpha$ и $\mathrm{tr}\,\alpha = 0$.
Выберем базис:

$$it^A = \frac{1}{2} i\sigma^A \Rightarrow t^A = \frac{1}{2}\sigma^A,\ \ A = 1, 2, 3$$

$$tr(t^A t^B) = tr\left(\frac{1}{2}\sigma^A \frac{1}{2}\sigma^B\right) = \frac{1}{4} 2\delta^{AB} = \frac{1}{2}\delta^{AB}$$

Для компактных группы Ли матрица $tr(t^A t^B)$ положительно определена.
Можно выбрать t^A таким образом, чтобы $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$

[Пример 2]

$SL(2, \mathbb{R})$ – группа Ли вещественных матриц 2×2 таких, что $\det\omega = 1, \omega \in Re$
$sl(2, \mathbb{R})$ – алгебра Ли такая, что $\alpha \in Re,\ tr\ \alpha = 0$

$$it^A = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \{\sigma^1; i\sigma^2;\ \sigma^3\}$$

$t^1 = -\frac{1}{2}\sigma^1;\ \ t^2 = \frac{1}{2}\sigma^2;\ \ t^3 = -\frac{i}{2}\sigma^3$ – генераторы

$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ –матрица знаконеопределена.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7. Представление групп и алгебр Ли

§5. Генераторы и структурные константы

$\omega \in G,\ \omega = e^{\alpha}, \alpha \in \mathcal{A}$ – алгебра Ли
$\alpha = i\alpha^A t^A$
it^A – базис в $\mathcal{A}$
t^A – генераторы
Для компактных элементов групп алгебры Ли выполняется условие унитарности:

$$\omega^+ = \omega^{-1}$$

$\alpha^+ = -\alpha \Rightarrow (t^A)^+ = t^A$
$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$
Алгебра Ли – линейное пространство относительно операции коммутирования. Соответственно, если

$$\alpha, \beta \in \mathcal{A}, \text{то } [\alpha, \beta] \in \mathcal{A}$$

Разложим α, β по базису из генератора:

$$[\alpha, \beta] = [i\alpha^A t^A, i\beta^B t^B] = i\gamma^C t^C$$

$[t^A, t^B] = if^{ABC}t^C$, где
f^{ABC} – структурные константы

$$[\alpha, \beta] = -\alpha^A \beta^B [t^A, t^B] = -if^{ABC}\alpha^A \beta^B t^C$$

$\Rightarrow \gamma^C = -\alpha^A \beta^B f^{ABC}$

Свойства структурных констант:

$[t^A, t^B] = if^{ABC}t^C \Rightarrow f^{ABC} = -f^{BAC}$ – антисимметричность
[Пример]

$SU(2)$ – группа Ли
$t^A = \frac{1}{2}\sigma^A$

$$[t^A, t^B] = \left[\frac{1}{2}\sigma^A, \frac{1}{2}\sigma^B\right] = \frac{1}{4}2i\varepsilon^{ABC}\sigma^C = \frac{i}{2}\varepsilon^{ABC}\sigma^C = i\varepsilon^{ABC}$$

Тогда для группы $SU(2)$ $f^{ABC} = \varepsilon^{ABC}$
Утверждение. Для некомпактных групп (алгебр) Ли f^{ABC} полностью антисимметрично, если $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$.

Доказательство.

$$tr(t^A[t^B,t^C]) = tr(t^A i f^{BCD} t^D) = i f^{BCD} tr(t^A t^D) = \frac{1}{2} f^{BCD}\delta^{AD} = \frac{1}{2} f^{BCA}.$$

С другой стороны

$$tr(t^A[t^B,t^C]) = tr\big(t^A(t^B t^C - t^C t^B)\big) = tr(t^A t^B t^C - t^A t^C t^B)$$
$$= tr(t^A t^B t^C - t^B t^A t^C) = tr([t^A,t^B]t^C) = i f^{ABD} tr(t^D t^C) = \frac{i}{2} f^{ABC}$$

Следовательно,

$$f^{BCA} = f^{ABC} = -f^{BAC}$$
$$-f^{CBA} = f^{ABC} \blacksquare.$$

Утверждение. Для компактных групп (алгебр) Ли

$$f^{ABC} \in Re$$

Доказательство.

$[t^A,t^B] = i f^{ABC} t^C$

Для некомпактных групп $(t^A)^+ = t^A$, следовательно,

$$[t^A,t^B]^+ = -i(f^{ABC})^*(t^C)^+ = -i\,(f^{ABC})^+ t^C$$

С другой стороны

$$[t^A,t^B]^+ = (t^A t^B - t^B t^A) += t^B t^A - t^A t^B = -[t^A,t^B] = -i f^{ABC} t^C$$

Следовательно,

$$(f^{ABC})^* = f^{ABC} \;\Rightarrow f^{ABC} \in Re \blacksquare.$$

Тождество Якоби (свойство алгебры Ли):

$$0 = \big[\alpha,[\beta,\gamma]\big] + \big[\beta,[\gamma,\alpha]\big] + \big[\gamma,[\alpha,\beta]\big]$$

Утверждение. Тождество Якоби, записанное через коммутаторы, будет иметь вид

$$0 = i^3\{[t^A[t^B,t^C] + \big[t^B,[t^C,t^A]\big] + \big[t^C,[t^A,t^B]\big]\}$$

$$0 = i\{[t^A, f^{BCD} t^D] + [t^B, f^{CAD} t^D] + [t^C, f^{ABD} t^D]\}$$

$$0 = i f^{BCD} f^{ADE} t^E + i f^{CAD} f^{BDE} t^E + i f^{ABD} f^{CDE} + t^E$$

$$0 = f^{BCD} f^{ADE} + f^{CAD} f^{BDE} + f^{ABD} f^{CDE}$$

§4. Представление групп и алгебр Ли

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

<u>*Опр.*</u> Говорят, что *задано представление группы* Ли G, если $\forall\omega \in G$ соответствует оператор $T(\omega)$ такой, что

$$T(\omega_1, \omega_2) = T(\omega_1)T(\omega_2)$$

$T(1) = 1$

$$T(\omega^{-1}) = T(\omega)^{-1}$$

<u>*Опр.*</u> Говорят, что *задано представление алгебры Ли*, если $\forall\alpha \in \mathcal{A}$ соответствует оператор $T(\alpha)$, причем

$$T([\alpha, \beta]) = [T(\alpha), T(\beta)]$$

$T(0) = 0$

Существуют *тривиальные* представления:

$T(\omega) = 1$ для группы Ли

$T(\alpha) = 0$ для алгебры Ли

Фундаментальное представления:

$T(\omega) = T(\omega)$ для группы Ли

$$\alpha = i\alpha^A t^A \;\Rightarrow T(\alpha) = T(i\alpha^A t^A) = i\alpha^A T(t^A) = i\alpha^A T^A$$

$T(t^A) \equiv T^A$

$[\alpha, \beta] = -\alpha^A\beta^B[t^A, t^B] = -if^{ABC}\alpha^A\beta^B t^C$

С одной стороны

$$T([\alpha, \beta]) = -if^{ABC}\alpha^A\beta^B T^C$$

С другой стороны

$$T([\alpha, \beta]) = [T(\alpha), T(\beta)] = [i\alpha^A T^A, i\beta^B T^B] = -\alpha^A\beta^B[T^A, T^B]$$

$\Rightarrow [T^A, T^B] = if^{ABC}\, T^C$

[Пример]

Присоединенное представление (Ad_j)

Определим квадратные матрицы $(T^A)_{BC}$, размер которых равен размерности калибровочной группы (алгебры)

$$\left(T^A_{Ad_j}\right)_{BC} \equiv if^{ACB}$$

$$\left[T^A_{Ad_j}, T^B_{Ad_j}\right]_{KL} = \left(T^A_{Ad_j}\right)_{KN}\left(T^B_{Ad_j}\right)_{ML} - \left(T^B_{Ad_j}\right)_{KM}\left(T^A_{Ad_j}\right)_{ML} = -f^{A\underline{M}K}f^{BL\underline{M}} + f^{B\underline{M}K}f^{AL\underline{M}} =$$
$$= -f^{A\underline{M}\boldsymbol{K}}f^{BL\underline{M}} - f^{B\underline{M}\boldsymbol{K}}f^{LA\underline{M}} = f^{LKM}f^{ABM} = if^{ABC}(-i)f^{LCK} = if^{ABC}if^{CLK}$$
$$= if^{ABC}\left(T^C_{Ad_j}\right)_{KL}$$

Пусть задано представление $T(\omega)$ и поле ϕ_i , которое при калибровочных преобразованиях преобразовывается по заданному закону

$$\phi_i \to T(\omega)_i^j\phi_j = \phi_i{}'$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда бесконечно малое изменение поля

$$\delta\phi_i = \phi_i' - \phi_i = T(e^\alpha)_i^j \phi_j - \phi_i$$

Если $\omega = e^\alpha \approx 1 + \alpha$, то

$$T(e^\alpha)_i^j \phi_j - \phi_i = T(1+\alpha)_i^j \phi_j - \phi_i = \big(T(1) + T(\alpha)\big)_i^J \phi_j - \phi_i = \phi_i + T(\alpha)_i^j \phi_j - \phi_i = \\ = T(\alpha)_i^j \phi_j$$

$\delta\phi_i = T(\alpha)_i^j \phi_j$

Пусть $\phi_A \in Ad_j$. Тогда

$$\delta\phi_A = T_{Ad_j}(\alpha)_{AB}\phi_B = T_{Ad_j}(i\alpha^C t^C)_{AB}\phi_B = i\alpha^C \left(T_{Ad_j}^c\right)_{AB} \phi_B = i\alpha^C i f^{CBA}\phi_B = \\ = -\alpha^C \phi_B f^{CBA}$$

Определим величину $\phi \equiv i\phi_A t^A$.

$$[\alpha, \phi] = [i\alpha^C t^C, i\phi^B t^B] = -i\alpha^C \phi^B f^{CBA} t^A = i\delta\phi_A t^A = \delta\phi$$

$$\delta\phi = [\alpha, \phi]$$

Таким образом, компоненты ϕ можно записывать в виде столбца ($\delta\phi_A$) и в виде матрицы ($\phi \equiv i\phi_A t^A$).

Рассмотрим, как $\phi \equiv i\phi_A t^A$ меняется при конечных преобразованиях:

$\phi \to \omega\phi\omega^{-1}$, где $\omega = e^\alpha$

$\phi' = \omega\phi\omega^{-1} = e^\alpha \phi e^{-\alpha} \approx (1+\alpha)\phi(1-\alpha) \approx \phi + \alpha\phi - \phi\alpha = \phi + [\alpha, \phi]$

$\delta\phi = \phi' - \phi \approx [\alpha, \phi]$

Утверждение. Если $\phi \in \mathcal{A}$, то $\omega\phi\omega^{-1} \in \mathcal{A}$.

Доказательство.

$$\omega\phi\omega^{-1} = e^\alpha \phi e^{-\alpha} = \underbrace{\phi}_{\in\mathcal{A}} + \frac{1}{1!}\underbrace{[\alpha, \phi]}_{\in\mathcal{A}} + \frac{1}{2!}\underbrace{[\alpha, [\alpha, \phi]]}_{\in\mathcal{A}} + \dots \in \mathcal{A} \ \blacksquare.$$

[Пример]

$SU(2)$ – группа Ли

$t^A = \frac{\sigma^A}{2}$

$[t^A, t^B] = i\varepsilon^{ABC} t^C \quad \Leftrightarrow f^{ABC} = \varepsilon^{ABC}$

$\left(T_{Ad_j}^A\right)_{BC} = i\varepsilon_{ACB} = -i\varepsilon_{ABC}$

$$T^1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$[T^A, T^B] = -i\varepsilon^{ABC} T^C$

$$[T^1, T^2] = T^1T^2 - T^2T^1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i(-i)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iT^3$$

T^A – генераторы фундаментального представления $SO(3, R)$

$\dim SO(3) = \frac{3(3-1)}{2} = 3$

$\alpha^T = -\alpha,\ \alpha \in Re \quad \alpha = i\alpha^A T^A$

Соответственно, генераторы должны быть мнимыми и антисимметричными. Также они образуют базис в пространстве вещественных антисимметричных матриц.

$$SO(3) \cong SU(3)$$

Лекция 8. Неабелевы калибровочные теории. Часть 1.

Глава VI. Неабелевы калибровочные теории

§1. Поля Янга-Миллса

Ранее мы рассматривали теорию инвариантную относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \ \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

Потом заменили производную на ковариантную производную и получили

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$
$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi$$

Затем добавили калибровочный объект:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Рассмотрим n-компонентный столбец из полей $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$ и функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \ \partial^\mu \phi - V(\phi^+ \phi)$$
$$\phi^+ = (\phi_1^+, \phi_2^+, \dots \phi_n^+)$$

Такая функция Лагранжа инвариантна относительно глобальных калибровочных преобразований:

$$\phi \to \omega \phi$$
$$\phi^+ \to \omega^+ \phi^+$$
$$\omega \neq \omega(x)$$
$$\omega^+ \omega = 1 \Leftrightarrow \ \omega^{-1} = \omega^+$$
$$\omega \in G$$

Локальной инвариантности нет, так как если $\omega = \omega(x)$, то

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu (\phi \omega) = \omega \partial_\mu \phi + \partial_\mu \omega \ \phi$$

Модифицируем теорию таким образом, чтобы получить локальную калибровочную инвариантность. Чтобы добиться локальной калибровочной инвариантности, заменим $\partial_\mu \phi$ на $\mathcal{D}_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi + A_\mu \phi$, где $A_\mu - n \times n$ матрица

$\partial_\mu \phi -$ столбец, соответственно, $A_\mu \phi$ тоже должно быть столбцом.

Рассмотрим преобразование

$$\mathcal{D}_\mu \phi \to \omega \mathcal{D}_\mu \phi$$
$$\mathcal{D}_\mu \phi \to \partial_\mu \phi' + A'_\mu \phi' = \omega(\partial_\mu \phi + A_\mu \phi), \text{ где } \ \phi' = \omega \phi, \omega = \omega(x)$$
$$\partial_\mu (\omega \phi) + A'_\mu \omega \phi = \omega \partial_\mu \phi + \omega A_\mu \phi$$

$$\partial_\mu \omega\omega^{-1}\omega\phi + A'_\mu \omega\phi = \omega A_\mu \omega^{-1}\omega\phi$$

В силу произвольности ϕ

$$A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} - \partial_\mu \omega\omega^{-1}$$

$$0 = \partial_\mu 1 = \partial_\mu(\omega\omega^{-1}) = \partial_\mu\omega\omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1}$$
$$\partial_\mu\omega\omega^{-1} = -\omega\partial_\mu\omega^{-1}$$

Поэтому калибровочные преобразования:

$$\mathcal{D}_\mu\phi \to \omega\mathcal{D}_\mu\phi$$
$$\phi \to \omega\phi$$
$$\phi^+ \to \phi^+\omega^{-1}$$
$$A_\mu \to \omega A_\mu\omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1} \equiv A_\mu{}'$$

A_μ – поле Янга-Миллса (неабелево калибровочное поле).

Отсюда видно, что можно считать A_μ элементом алгебры ЛИ калибровочной группы G.

$A_\mu \in \mathcal{A}$

Тогда

$$\omega A_\mu\omega^{-1} = [\omega = e^\alpha] = e^\alpha A_\mu e^{-\alpha} = \underbrace{A_\mu}_{\in\mathcal{A}} + \underbrace{[\alpha, A_\mu]}_{\in\mathcal{A}} + \frac{1}{2!}\underbrace{[\alpha,[\alpha,A_\mu]]}_{\in\mathcal{A}} + \frac{1}{3!}\underbrace{[\alpha,[\alpha,[\alpha,A_\mu]]]}_{\in\mathcal{A}} + \cdots$$

$\omega A_\mu\omega^{-1} \in \mathcal{A}$

$\omega(\partial_\mu\omega^{-1}) = \omega\hat{\partial}_\mu - \hat{\partial}_\mu$, действительно,

$$(\omega\hat{\partial}_\mu - \hat{\partial}_\mu)f = \omega\partial_\mu\omega^{-1}f + \omega\omega'^{\partial_\mu}f - \partial_\mu f$$

$$\begin{aligned}\omega(\partial_\mu\omega^{-1}) = \omega\hat{\partial}_\mu - \hat{\partial}_\mu &= e^\alpha\hat{\partial}_\mu e^{-\alpha} - \hat{\partial}_\mu \\ &= \hat{\partial}_\mu + \frac{1}{1!}[\alpha,\hat{\partial}_\mu] + \frac{1}{2!}[\alpha_1[\alpha_1,\hat{\partial}_\mu]] + \frac{1}{3!}[\alpha,[\alpha,[\alpha,\hat{\partial}_\mu]]] + \cdots \\ &= \left[[\alpha,\hat{\partial}_\mu] = -\partial_\mu\alpha \in \mathcal{A}\right] = \underbrace{\partial_\mu\alpha}_{\in\mathcal{A}} - \frac{1}{2!}\underbrace{[\alpha,\partial_\mu\alpha]}_{\in\mathcal{A}} - \frac{1}{3!}\underbrace{[\alpha[\alpha,\partial_\mu\alpha]]}_{\in\mathcal{A}} + \cdots \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

$[\alpha,\hat{\partial}_\mu]f = \alpha\partial_\mu f - \partial_\mu(\alpha f) = \alpha\partial_\mu f - \partial_\mu\alpha f - \alpha\partial_\mu f$

Таким образом, если $A_\mu \in \mathcal{A}$, то

$$A'_\mu = \underbrace{\omega A_\mu\omega^{-1}}_{\in\mathcal{A}} + \underbrace{\omega\partial_\mu\omega^{-1}}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$\omega^+ = \omega^{-1} \to \alpha^+ = -\alpha$

$\Rightarrow A_\mu^+ = -A_\mu$ для произвольной компактной калибровочной группы

Таким образом, мы можем построить теорию, инвариантную относительно локальных калибровочных преобразований:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi, \phi^*)$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi^+ \equiv \left(\mathcal{D}_\mu \phi\right)^+ = \left(\partial_\mu \phi + A_\mu \phi\right)^+ = \partial_\mu \phi^+ + \phi^+ A_\mu^+ = \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ A_\mu \to$$
$$\to \partial_\mu(\phi^+ \omega^{-1}) - \phi^+ \omega^{-1}\left(\omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}\right) =$$
$$= \partial_\mu \phi^+ \omega^{-1} + \phi^+ \partial_\mu \omega^{-1} - \phi^+ A_\mu \omega^{-1} - \phi^+ \partial_\mu \omega^{-1} = \left(\partial_\mu \phi^+ - \phi^+ A_\mu\right)\omega^{-1} =$$
$$= \mathcal{D}_\mu \phi^+ \omega^{-1}$$

Теперь необходимо предъявить тензор поля в теории Янга-Миллса:

$$F_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu A_\nu}_{\in \mathcal{A}} - \underbrace{\partial_\nu A_\mu}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu A_\mu A_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) \to$$
$$\to \left[A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}\right] \to$$
$$\partial_\mu(\omega A_\nu \omega^{-1}) + \left(\omega A_\mu \omega^{-1} + \underbrace{\omega \partial_\mu \omega^{-1}}_{-\partial_\mu \omega \omega^{-1}}\right)(\omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) = \partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1} +$$
$$\omega \partial_\mu A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\nu \partial_\mu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \partial_\nu \omega^{-1} + \omega A_\mu A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\mu \partial_\nu \omega^{-1} -$$
$$\partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1} - \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) = \omega \partial_\mu A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\mu A_\nu \omega^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) =$$
$$\omega\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu\right)\omega^{-1} = \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}$$

Тензор поля Янга-Миллса не является калибровочно инвариантным.

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2e^2} tr F_{\mu\nu}^2$$

$\mathcal{L}_2$ инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований.
Действительно,

$$tr F_{\mu\nu}^2 \to tr\left(\omega F_{\mu\nu}^2 \omega^{-1}\right) = tr\left(\omega^{-1} \omega tr F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) = tr F_{\mu\nu}^2 = inv$$

Тогда функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2e^2} tr F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi, \phi^*)$$

$A_\mu \in \mathcal{A}$; $F_{\mu\nu} \in \mathcal{A}$
Соответственно,

$$A_\mu = ieA_\mu^A t^A, \qquad A_\mu^A \in Re, \qquad A = \overline{1, \dim G}$$

$(t^A)^+ = t^A$ – генераторы эрмитовы
$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$
$[t^A, t^B] = if^{ABC} t^C$
Аналогично по генераторам можно разложить тензор поля:

$$F_{\mu\nu} = ieF_{\mu\nu}{}^A t^A = F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \left[A_\mu, A_\nu\right] =$$
$$= \partial_\mu(ieA_\nu^A t^A) - \partial_\nu\left(ieA_\mu t^A\right) + \left[ieA_\mu^B t^B, ieA_\nu^C t^C\right]$$
$$= iet^A\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right) - ie^2 f^{BCA} t^A A_\mu^B A_\nu^C$$
$$= iet^A(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - ef^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C)$$

Следовательно,

$$F_{\mu\nu}{}^{A} = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - ef^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C$$

$$\frac{1}{2e^2} trF_{\mu\nu}{}^{2} = \frac{1}{2e^2} tr\left(ieF_{\mu\nu}{}^{A} t^A ieF^{\mu\nu B} t^B\right) = -\frac{1}{4}\delta^{AB} F_{\mu\nu}{}^{A} F^{\mu\nu B} t^B = -\frac{1}{4}\delta^{AB} F_{\mu\nu}{}^{A} F^{\mu\nu B}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\delta^{AB} F_{\mu\nu}{}^{A}\right)^2$$

$$\phi \to \omega\phi$$
$$\phi \to T(\omega)\phi$$
$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi + T(A_\mu)\phi = \left[A_\mu = ieA_\mu^A t^A\right] = \partial_\mu\phi + T\left(ieA_\mu^A t^A\right)\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu^A T(t^A)\phi$$
$$= \partial_\mu\phi + ieA_\mu^A T^A\phi$$

Обычно записывают так:

$\phi \to \omega\phi$

$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi$

Говоря, что поле ϕ лежит в каком-то представлении калибровочной группы и A_μ раскладывается по генераторам данного представления.

Построим уравнение движения в теории Янга-Миллса.

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_i\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}$$

где $\varphi_i = (\varphi^+, \varphi, A_\nu^A)$

Тогда для полей φ^+:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^+\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^+} = \partial_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + T(A_\mu)\mathcal{D}^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi^+} = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi^+}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi^+\right)} = \mathcal{D}_\mu\phi$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^+} = -T(A_\mu)A^\mu\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi^+}$$
$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi + T(A_\mu)\phi$$
$$\mathcal{D}_\mu\phi^+ = \partial_\mu\phi^+ + \phi^+ T(A_\mu)$$

Для полей φ:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\mathcal{D}^\mu\phi^+ - \mathcal{D}^\mu\phi^+ T(A_\mu) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi^+ + \frac{\partial V}{\partial\phi}$$

Для полей A_ν^A:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu^A\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu^A}$$

Лекция 9. Неабелеевы калибровочные теории. Часть 2.

§1. Поля Янга-Миллса

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \to T(\omega)\phi \ , \omega^+\omega = 1 \Leftrightarrow \ \omega^{-1} = \omega^+, \ \omega \in G$$

$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \equiv A_\mu{}'$
$A_\mu \in \mathcal{A} \Rightarrow \ A_\mu^+ = -A_\mu$
$\mathcal{D}_\mu \phi \ = \partial_\mu \phi \ - T(A_\mu)\phi \ ) \to T(\omega)\mathcal{D}_\mu \phi$
$\mathcal{D}_\mu \phi^+ = \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ T(A_\mu) \to \mathcal{D}_\mu \phi \ ^* T(\omega^{-1})$
$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \underbrace{\frac{1}{2e^2} \ trF_{\mu\nu}^2}_{\text{чистая теория Янга–Миллса}} + \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi, \phi^*)$$

Разложение по генераторам:

$A_\mu = ieA_\mu^A t^A, \ \ T(A_\mu) = ieA_\mu^A T^A$
$F_{\mu\nu} = ieF_{\mu\nu}{}^A t^A$
$F_{\mu\nu}{}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - ef^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C$
$\frac{1}{2e^2} trF_{\mu\nu}{}^2 = -\frac{1}{4}\left(\delta^{AB} F_{\mu\nu}{}^A\right)^2$

Уравнение движения

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$$

где $\varphi_i = (\varphi^+, \varphi \, , A_\nu^A)$

Для полей φ^+:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^{\ +})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\ +}} = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \phi \ + T(A_\mu)\mathcal{D}^\mu \phi \ + \frac{\partial V}{\partial \phi^+} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi \ + \frac{\partial V}{\partial \phi^+}$$

Для полей φ:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi \ )} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \phi^{\ +} - \mathcal{D}^\mu \phi^{\ +} T(A_\mu) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi^+ \ + \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Для полей A_ν^A:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu^A \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^A} =$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu^A \right)} = -F^{\mu\nu A}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi)} \frac{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi)}{\partial A_\nu^A} + \frac{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi^+)}{\partial A_\nu^A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi^+)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}^B} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^B}{\partial A_\nu^A} =$$

$$= \mathcal{D}^\alpha \phi^+ ie \delta_\alpha^\nu T^A \phi - ie\, \delta_\alpha^\nu\, \phi^+ T^A\, \mathcal{D}^\alpha \phi\ - \frac{1}{2} F^{\alpha\beta B}$$

$$- e f^{BCD} \left(\delta_\alpha^\nu A_\beta^D \delta^{AC} + A_\alpha^C \delta^{AD} \delta_\beta^\nu \right)$$

$$= ie(\mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi\ ) + \frac{e}{2} F^{\nu\beta B} f^{BAD} A_\beta^D + \frac{e}{2} F^{\alpha\nu B} f^{BCA} A_\alpha^C$$

$$= ie(\mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi) + e F^{\mu\nu B} f^{BCA} A_\mu^C$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi\ = \partial_\mu \phi\ + ie A_\mu^A T^A \phi$$
$$\mathcal{D}_\mu \phi^{\ +} = -ie A_\mu^A \phi^+ T^A$$
$$F_{\alpha\beta}^B = \partial_\alpha A_\beta^B - \partial_\beta A_\alpha^B - e f^{BCD} A_\alpha^C A_\beta^D$$

$$0 = -\partial_\mu F^{\mu\nu A} - e f^{ABC} A_\nu^C F^{\mu\nu B} - ie(\mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi\ )$$
$$iet^A |\ \partial_\mu F^{\mu\nu A} - e f^{ABC} A_\mu^B F^{\mu\nu c} = -ie(\mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi\ ) = j^{\nu A}$$

где $j^{\nu A} \equiv -ie(\mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi) \in Re$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \left[A_\mu, \partial_\mu F^{\mu\nu} \right] = iet^A j^{\nu A}$$

$$\left[A_\mu, \partial_\mu F^{\mu\nu} \right] = [ie A_\mu^B F^{\mu\nu C} i f^{BCA} t^A$$
$$iet^A j^{\nu A} \equiv j \in \mathcal{A}$$

Таким образом, уравнение движения для полей A_ν^A:

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Теория Янга-Миллса	Электродинамика
$\mathcal{D}_\nu \mid\ \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ $\mathcal{D}_\nu\, \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\nu j^\nu$ $\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\nu\, \mathcal{D}_\mu +\ \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_\nu\, \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \right) F^{\mu\nu} =$ $= -\frac{1}{2}\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu \right] F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[F^{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0$ $\mathcal{D}_\mu \widetilde{F^{\mu\nu}} = 0$	$\partial_\nu \mid\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ $0 = \partial_\nu j^\nu$ $\partial_\mu \widetilde{F^{\mu\nu}} = 0$

Ковариантные производные не коммутируют. Рассмотрим пример:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu\,\mathcal{D}_\mu\right)\phi &= \left(\partial_\mu + A_\mu\right)(\partial_\nu + A_\nu)\phi - (\mu \leftrightarrow \nu)\\ &= \partial_\mu\partial_\nu\phi + \partial_\mu(A_\nu\phi) + A_\mu\partial_\nu\phi + A_\mu A_\nu\phi - \partial_\nu\partial_\mu\phi - \partial_\nu\left(A_\mu\phi\right) - A_\nu\partial_\mu\phi\\ &- A_\nu A_\mu\phi\\ &= \partial_\mu A_\nu\phi + A_\nu\partial_\mu\phi + A_\mu A_\nu\phi - \partial_\nu A_\mu\phi - A_\mu\partial_\nu\phi - A_\nu\partial_\mu\phi - A_\nu A_\mu\phi\\ &= \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \left[A_\mu, A_\nu\right]\right)\phi = F_{\mu\nu}\phi\end{aligned}$$

$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right]\phi = F_{\mu\nu}\phi$
$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right] = F_{\mu\nu}$
Если $\phi \to T(\omega)\phi$, то

$$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right]\phi = T(F_{\mu\nu})\phi$$

Таким образом, в неабелевом случае аналогом непрерывности тока в электродинамике является (аналог уравнения Максвелла с источником)

$$0 = \mathcal{D}_\nu j^\nu$$

§2. Электродинамика как частный случай Янга-Миллса

Теория Янга-Миллса задается калибровочной группой:
$G = U(1)$

$$\omega = \exp\left(\frac{i\alpha e}{\sqrt{2}}\right) \in U(1), \qquad \alpha \in Re, \qquad \alpha - \text{число}$$

$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$
$t^A \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ – генератор
$A_\mu = ieA_\mu^A t^A \to ie\frac{1}{\sqrt{2}}A_{\mu_{\text{эл/д}}}$, $A_{\mu_{\text{эл/д}}}$ – из электродинамики
$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1} = A_\mu \exp\left(\frac{i\alpha e}{\sqrt{2}}\right)\partial_\mu\left(-\frac{i\alpha e}{\sqrt{2}}\right) = A_\mu - \frac{ie}{\sqrt{2}}\partial_\mu\alpha$
$\frac{ie}{\sqrt{2}}A_{\mu_{\text{эл/д}}} \to ie\frac{1}{\sqrt{2}}A_{\mu_{\text{эл/д}}} - \frac{ie}{\sqrt{2}}\partial_\mu\alpha$
$A_{\mu_{\text{эл/д}}} \to A_{\mu_{\text{эл/д}}} - \partial_\mu\alpha$
Тогда тензор поля

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \left[A_\mu, A_\nu\right] \to \frac{ie}{\sqrt{2}}\left(\partial_\mu A_{\nu_{\text{эл/д}}} - \partial_\nu A_{\mu_{\text{эл/д}}}\right) = \frac{ie}{\sqrt{2}}F_{\mu\nu_{\text{эл/д}}}$$

$F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu}\omega^{-1} = F_{\mu\nu}$
$F_{\mu\nu_{\text{эл/д}}} \to F_{\mu\nu_{\text{эл/д}}}$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2}\,trF_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu_{\text{эл/д}}}\right)^2$

$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu^A t^A\phi \to \partial_\mu\phi + \frac{ie}{\sqrt{2}}A_{\mu_{\text{эл/д}}}\phi$ –ковариантная производная

Ранее в электродинамике

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ie_{\text{эл/д}}A_{\mu_{\text{эл/д}}}\phi$$

$$e_{\text{эл/д}} = -\frac{e}{\sqrt{2}}$$

При калибровочных преобразованиях

$$\phi \to \omega\phi = \exp\left(\frac{i\alpha e}{\sqrt{2}}\right)\phi = \exp\left(-ie_{\text{эл/д}}\alpha\right)\phi$$

$$\mathcal{D}_\mu F_{\alpha\beta} \to \partial_\mu F_{\alpha\beta}$$

Таким образом, электродинамика является частным случаем теории Янга-Миллса в случае, когда калибровочной группой является группой $U(1)$.

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией

При построении теории Янга-Миллса мы рассматривали более простую теорию

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\mu\phi^+\mathcal{D}^\mu\phi - V(\phi,\phi^*)$$

инвариантную относительно глобальных преобразований
$\phi \to \omega\phi, \omega \neq \omega(x),\ \ \omega^{-1} = \omega^+,\ \omega \in G$

Рассмотрим пример модели и исследуем ее спектр:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_i\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_i^2 - v^2)^2$$

где $i = 1,2,3$ и $\phi_i \in Re$
Эта теория инвариантна относительно калибровочных преобразований с группой $G = SO(3)$:

$$\phi_i \to \omega_i^j\phi_j$$

$\omega \in SO(3)$
$\omega \neq \omega(x)$
Найдем вакуумное состояние ϕ_{0i}

$$\phi_{0i} \neq \phi_{0i}(x), \qquad V(\phi_{0i}) \to min$$

$$V(\phi_i) = \frac{\lambda}{2}(\phi_i^2 - v^2)^2 = \frac{\lambda}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 - v^2)^2 \geq 0$$

То есть в качестве вакуума можно взять любую точку на сфере

$$\phi_{01}^2 + \phi_{02}^2 + \phi_{03}^2 = v^2$$

Пусть $\phi_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$. В общем случае $\omega\phi_0 \neq \phi_0$. Поэтому вакуумное состояние не инвариантно относительно калибровочных преобразований (Спонтанное Нарушение Симметрии). Далее разложим поле ϕ вблизи вакуумного состояния:

$$\phi_i = \phi_{0i} + \varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix}, \text{где } \varphi_i - \text{малы}$$

Разложим функцию Лагранжа в ряд по ϕ_i

$$\partial_\mu \phi_i = \partial_\mu \varphi_i = \begin{pmatrix} \partial_\mu \varphi_1 \\ \partial_\mu \varphi_2 \\ \partial_\mu \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_3\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \underbrace{(\varphi_3 + v)^2 - v^2}_{\varphi_3^2 + 2v\varphi_3}\right)^2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_3\right)^2 - 2\lambda v^2 \varphi_3^2$$

Следовательно,

$\varphi_1, \varphi_2 -$ безмерные Re скалярные поля (голдстоуновские бозоны);

$\varphi_3 - Re$ массивное скалярное поле $m = 2\sqrt{\lambda} v$ (хиггсовый бозон).

Лекция 10. Неабелевы калибровочные теории. Часть 3.

§3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (общий случай)

Рассмотрим следующую модель:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 - V(\phi_i), \;\; \phi_i \in Re$$

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований:
$\phi_i \to \omega_i \phi^j, \;\; \omega \in G, \;\; \omega \in Re$
$\omega^T \omega = 1$
$G -$ компактная группа инвариантности потенциала.
Пока вид потенциала и количество полей не фиксированы. эта теория остается общей.
Найдем вакуумное состояние ϕ_{0i}:

$$\phi_{0i} \neq \phi_{0i}(x), \qquad V(\phi_{0i}) \to min$$

При исследовании спектра частиц в общем случае важную роль играет малая группа H.
Малая группа H оставляет вакуумное состояние инвариантным:

$$\text{H}: \{\omega \in G, \qquad \phi_0 = \omega\phi_0\}, \qquad H \subset G$$

Это группа, так как

1) Если $\omega_1, \omega_2 \in H$, то $(\omega_1\omega_2)\phi_0 = \omega_1(\omega_2\phi_0) = \omega_1\phi_0 = \phi_0 \;\Rightarrow \omega_1, \omega_2 \in H$
2) $1 \in H$, так как $1\phi_0 = \phi_0$
3) Если $\omega \in H$, то $\omega^{-1}\phi_0 = \omega^{-1}\omega\phi_0 = 1\phi_0 = \phi_0 \;\Rightarrow \omega^{-1} \in H$

Рассмотрим генераторы исходной калибровочной группы G:

$$T^A = \{T_H^\alpha, \qquad T_{G/H}^a\}$$

$T_H^\alpha -$ генераторы малой группы
$T_{G/H}^a -$ остальные генераторы

$$\omega = e^\alpha \in H$$
$$\phi_0 = \omega\phi_0 = e^\alpha\phi_0 = (1 + \alpha + \cdots)\phi_0$$
$$0 = \alpha\phi_0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_i^j \phi_{0_j} = 0$$
$$\alpha \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \alpha = i\alpha^\beta T^\beta \phi_0$$
$$0 = i\alpha^\beta T^\beta \phi_0 \;\Rightarrow\; 0 = iT^\beta \phi_0$$

Очевидно, что остальные генераторы при действии на вакуумное состояние дает не 0.
$iT_{G/H}^a \phi_0 \equiv E^a -$ набор линейно независимых векторов

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$i\left(T^a_{G/H}\right)^j_i \phi_{0j} \equiv E^a_j$$

Можно выбрать ортонормированных базис в линейной оболочке, натянутой на вектора E^a.

Пусть e^a – ОНБ в пространстве линейных комбинаций векторов E^a:

$$e^a_i e^b_j = \delta^{ab} \ \ (e^{a^T} e^b = \delta^{ab})$$

Эти вектора не будут образовывать ОНБ в пространстве $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$.

Построим ОНБ в $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$ следующим образом:

Возьмем вектора e^a дополним его векторами $\tilde{e}^{\tilde{a}}$ до ОНБ. Тогда $(e^a, \tilde{e}^{\tilde{a}})$ – ОНБ в пространстве столбцов с n компонентами ($\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$).

Представим ϕ в виде суммы вакуумного состояния и малого отклонения, разложим по базису:

$$\phi_i = \phi_{0i} + \ \varphi_i = \phi_{0i} + e^a \varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

Разложим функцию Лагранжа по малым величинам:

$\varphi^a, \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$ – малые величины

$e^a_i e^b_j = \delta^{ab}, \ \ \tilde{e}^{\tilde{a}}_i e^b_i = 0, \ \ \tilde{e}^{\tilde{a}}_i \tilde{e}^{\tilde{b}}_i = \delta^{\tilde{a}\tilde{b}}$

$\partial_\mu \phi_i = e^a_i \partial_\mu \varphi^a + \ \tilde{e}^{\tilde{a}}_i \partial_\mu$

Тогда функция Лагранжа

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(e^a_i \partial_\mu \varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}} \partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)\left(e^b_i \partial_\mu \varphi^b + \tilde{e}^{\tilde{b}}_i \partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2$$

$$\begin{aligned} V(\phi_i) &= V\left(\phi_{0i} + e^a \varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right) \\ &\approx V(\phi_0) + \frac{\partial V}{\partial \phi_i}(\phi_0)\left(e^a_i \ \varphi^a + \tilde{e}_i{}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \ (\phi_0)\left(e^a_i \ \varphi^a + \tilde{e}_i{}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)\left(e^b_j \ \varphi^b + \tilde{e}_j{}^{\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$V(\phi) = V(\omega\phi), \ \omega \in G$ – условие калибровочной инвариантности

$\omega = e^\alpha \in H; \ \ \alpha = iT^A \alpha^A = iT^\beta_H \alpha^\beta_H + iT^a_{G/H} \alpha^a_{G/H}$

$V(\phi_0) \to min$ – вакуум

$V(\omega\phi_0) = V(\phi_0) \to min$

Следовательно, $\frac{\partial V}{\partial \phi_i}(\omega\phi_0) = 0$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}(e^\alpha \phi_0) = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}(\phi_0 + \alpha\phi_0 + \cdots) = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\left(\phi_0 + i\alpha_H^\beta T_H^\beta \phi_0 + iT_{G/H}^a \alpha_{G/H}^a \phi_0 + \cdots\right)$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\left(\phi_0 + \alpha_{G/H}^a E^a + \cdots\right) = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}(\phi_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)\alpha_{G/H}^a E_j^a + \cdots$$

В силу произвольности величин

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)E_j^a = \left[E_j^a = K^{ab}e_j^b\right] = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)K^{ab}e_j^b$$

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)e_j^b$$

В итоге

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2 - V(\phi_0) - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)\tilde{e}_i{}^{\tilde{a}}\tilde{e}_j{}^{\tilde{b}}}_{(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

$(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)e_j^b$

$$\mathcal{L}^{(2)} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2 - \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

Индекс a (φ^a) впервые возник при разделении генераторов группы G на генераторы группы H и все остальные генераторы:

$T^A = \{T_H^\alpha,\ T_{G/H}^a\}$

$$iT_{G/H}^a \phi_0 \equiv E^a = K^{ab}e^b, \qquad \alpha = \overline{1, \dim H}, \qquad A = \overline{1, \dim G}$$

$a = 1, \dim G - \dim H$

$\varphi^a - (\dim G - \dim H)$ шт. – голдстоуновские бозоны

$\dim G > \dim H$, если $\exists\ \omega \in G$ такой, что $\omega\phi_0 \neq \phi_0 -$ СНС

$\tilde{\varphi}^{\tilde{a}} - (n - \dim G + \dim H)$ шт. –массивные хиггсовские бозоны.

Ранее мы рассматривали пример теории

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_i^2 - v^2)^2$$

где $i = 1,2,3$ и $\phi_i \in Re$ и калибровочная группа $G = SO(3)$

Вакуумное состояние $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$ и разложение

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\phi_i = \phi_{0i} + \varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix}$, где φ_i – малы

Функция Лагранжа в квадратичном приближении

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_3\right)^2 - 2\lambda v^2 \varphi_3^2$$

φ_1, φ_2 – безмерные Re скалярные поля (голдстоуновские бозоны);

φ_3 – Re массивное скалярное поле $m = 2\sqrt{\lambda} v$ (хиггсовый бозон).

$\phi \to \omega\phi$

Очевидно, что $\phi_0 = \omega\phi_0$, если $\omega \in SO(2)$ соответствует вращениям в плоскости xy.
Группа $SO(2)$ изоморфна группе $U(1)$. Поэтому $H = SO(2) = U(1)$.
Построим соответствующие генераторы:

$$T^1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv T^1_{G/H}; \quad T^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv T^2_{G/H}; \quad T^3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вращениям в плоскости xy соответствует генератор T^3, поэтому $T^3 \equiv H$, так как

$$iT_H\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$iT^1_{G/H}\phi_0 = E^1 = iT^1\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iT^2_{G/H}\phi_0 = E^2 = iT^2\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ОНБ в пространстве трехкомпонентных столбцов будет

$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{e} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Разложим поле ϕ:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + e^1\varphi_1 + e^2\varphi_2 + \tilde{e}\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\varphi_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\varphi_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

φ_1, φ_2 – голдстоуновские бозоны;

$\tilde{\varphi}$ – массивный хиггсовский бозон

§5. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (пример)

Пусть калибровочная группа $G = SO(3)$, а функция Лагранжа содержит калибровочные поля Янга-Миллса

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu\phi_A\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_A^2 - v^2\,)^2$$

$A = 1,2,3$

$\phi_A \in Ad_j$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - ef^{ABC}A_\mu^B A_\nu^C$$

Для $SO(3)$ $f^{ABC} = \varepsilon^{ABC}$

Поэтому для $G = SO(3)$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B A_\nu^C$$

$\mathcal{D}_\mu\phi_A = \partial_\mu\phi_A + \left(A_\mu\right)_a^B\phi_B = \partial_\mu\phi_A + ieA_\mu^C\left(T_{Ad_j}^C\right)_A^B\phi_B = \partial_\mu\phi_A + ieA_\mu^C(-i)f^{CAB}\phi_B = \partial_\mu\phi_A - ef^{ABC}A_\mu^B\phi_C$

$$\mathcal{D}_\mu\phi_A = \partial_\mu\phi_A - e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B\phi_C$$

Найдем спектр частиц. Выберем вакуумное состояние $\phi_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\v\end{pmatrix}$.

Разложим величины в окрестности вакуумного состояния. В вакуумном состояние калибровочное поле $A_{\mu\nu}^A = 0$.

$$\phi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ v+\tilde{\varphi}\end{pmatrix}, \qquad \varphi, A_\mu^A - \text{мало}$$

$\frac{\lambda}{2}(\phi_A^2 - v^2\,)^2 = \frac{\lambda}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (\varphi_3 + v)^2 - v^2\,)^2 \approx 2\lambda v^2\varphi_3^2$

$-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2 \approx -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right)^2$

$$\mathcal{D}_\mu\phi_A = \partial_\mu\phi_A - e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B\phi_C \approx \partial_\mu\varphi_A - e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B\phi_0^C = \partial_\mu\varphi^A - e\varepsilon^{AB3}A_\mu^B v = \\ = \begin{pmatrix}\partial_\mu\varphi_1 - evA_\mu^2\\ \partial_\mu\varphi_2 + evA_\mu^1\\ \partial_\mu\varphi_3\end{pmatrix}$$

Теперь функцию Лагранжа можно записать в квадратичном приближении:

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_1 - evA_\mu^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_2 + evA_\mu^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_3\right)^2 \\ - 2\lambda v^2\varphi_3^2 \\ = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu^1 - \partial_\nu B_\mu^1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu^2 - \partial_\nu B_\mu^2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3\right)^2 \\ + \frac{e^2v^2}{2}\left(\left(B_\mu^1\right)^2 + \left(B_\mu^2\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_3\right)^2 - 2\lambda v^2\varphi_3^2$$

$B_\mu^1 \equiv A_\mu^1 + \frac{1}{ev}\partial_\mu \varphi_2$

$B_\mu^2 \equiv A_\mu^2 + \frac{1}{ev}\partial_\mu \varphi_1$

$\partial_\mu B_\nu^{1,2} - \partial_\nu B_\mu^{1,2} = \partial_\mu A_\nu^{1,2} - \partial_\nu A_\mu^{1,2}$

Таким образом, спектр частиц:

1) Массивные векторные поля B_μ^1, B_μ^2, $m_B = ev$ – 3 степени свободы
2) Безмассовое векторное поле A_μ^3 – 2 степени свободы
3) Массивное вещественное скалярное поле φ_3 (хиггсовский бозон) $m_\varphi = 2v\sqrt{\lambda}$

Лекция 11. Неабелевы калибровочные теории. Часть 4.

§5. Спектр частиц с локальной калибровочной симметрией (пример)

Ранее мы исследовали теорию

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi_A\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_A^2 - v^2\,)^2$$

$G = SU(2),\ \ \phi_A \in Ad_j,\ \ \phi_A \in Re,\ \ A = 1,2,3$

Вакуумное состояние $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$.

Вакуумное среднее $A_{\mu 0} = 0$ и $\phi\ = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix}$

Теория калибровочно инвариантная

$$\phi_A \to \omega_A^B \phi_B = (e^\alpha)_A^B \phi_B \approx \phi_A + \alpha_A^B \phi_{0B} = \phi_A + i\alpha^C \left(T_{Ad_j}^C\right)_A^B \phi_{0B} = \phi_A + \varepsilon^{ABC}\alpha^C \phi_{0B}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1 - \alpha_2 v \\ \varphi_2 + \alpha_1 v \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(T_{Ad_j}^C\right)_A^B = \{SU(2)\} = -i\varepsilon^{ABC}$$

Таким образом, можно выбрать α_1 и α_2 так, чтобы новые значения $\varphi_1' = 0,\ \varphi_2' = 0$. То есть существует (унитарная) калибровка, в которой голдстоуновские бозоны равны 0, величина α_3 не фиксирована.

В унитарной калибровке

$\phi\ = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix};\ \ F_{\mu\nu}^A \approx \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_A = \partial_\mu \phi_A - e\varepsilon^{ABC} A_\mu^B \phi_C \approx \partial_\mu \varphi_A - e\varepsilon^{ABC} A_\mu^B \phi_0^C = \partial_\mu \varphi^A - e\varepsilon^{AB3} A_\mu^B v =$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_\mu \varphi_1 - evA_\mu^2 \\ \partial_\mu \varphi_2 + evA_\mu^1 \\ \partial_\mu \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi_A\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_A^2 - v^2\,)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_3\right)^2 + \frac{e^2 v^2}{2}\left(\left(A_\mu^1\right)^2 + \left(A_\mu^2\right)^2\right) - 2\lambda v^2 \varphi_3^2$$

§6. Спектр частиц с локальной калибровочной симметрией (общий случай)

Рассмотрим теорию с локальной калибровочной симметрией относительно преобразований из некоторой компактной группы G.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi_A\right)^2 - V(\phi_i)$$

при этом $\phi_i \in Re$ и при калибровочных преобразованиях:

$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$
$\phi_i \to \omega_i^j \phi_j$
$\omega \in G,\ \omega = \omega(x)$
Исследуем спектр частиц для этой теории в общем виде.
Найдем вакуумное состояние ϕ_{0i}:

$$\phi_{0i} \neq \phi_{0i}(x), \qquad V(\phi_{0i}) \to min$$

При этом вакуумное среднее

$$A_{\mu 0} = 0$$

Малая группа H оставляет вакуумное состояние инвариантным:

$$\text{H}: \{\omega \in G, \qquad \phi_0 = \omega \phi_0\}, \qquad H \subset G$$

Разобьем генераторы исходной калибровочной группы G:

$$T^A = \{T_H^\alpha, \qquad T_{G/H}^a\}$$

T_H^α – генераторы малой группы
$T_{G/H}^a$ – остальные генераторы

$$iT_H^\alpha \phi_0 = 0, \quad \alpha = \overline{1, \dim H}$$

$$i\left(T_{G/H}^a\right)_i^j \phi_{0j} \equiv E_j^a, \qquad a = \overline{1, \dim G - \dim H}$$

E_j^a не образуют ортонормированный базис, поэтому введем вектора

$(e^a, \tilde{e}^{\tilde{a}})$ – ОНБ в пространстве столбцов с n компонентами ($\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$).

Представим ϕ в виде суммы вакуумного состояния и малого отклонения, разложим по базису:

$$\phi_i = \phi_{0i} + \varphi_i = \phi_{0i} + e^a \varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

$\varphi^a, \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}, A_\mu$ – малые величины

$$V(\phi_i) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}(\phi_0)\tilde{e}_i{}^{\tilde{a}}\tilde{e}_j{}^{\tilde{b}}}_{(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}} + \cdots$$

$(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}(\phi_0)e_j^b$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu\phi_A\right)^2 - V(\phi_i)$$

$F_{\mu\nu}{}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - ef^{ABC}A_\mu^B A_\nu^C \approx \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A$
Ковариантная производная поля ϕ_i:

$$\mathcal{D}_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + \left(A_\mu\right)_i^j\phi_j \approx \partial_\mu\phi_i + \left(A_\mu\right)_i^j\phi_{0j}$$
$$= e_i^a\partial_\mu\varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}}\partial_\mu\tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + ie(T_H^\alpha)_i^j A_\mu{}^\alpha\phi_{0j} + ie\left(T_{G/H}^a\right)_i^j A_\mu{}^a\phi_{0j}$$

$\mathcal{D}_\mu\phi_i \approx e_i^a\partial_\mu\varphi^a + \tilde{e}_i{}^{\tilde{a}}\partial_\mu\,\tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + eE_i^a A_\mu{}^a = \tilde{e}_i{}^{\tilde{a}}\partial_\mu\,\tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + e_i^a(\partial_\mu\varphi^a + eK^{ba}A_\mu{}^b)$
$E_i^a \equiv K^{ab}e_i^b$
$A = (\alpha, a)$
Запишем квадратичное приближение функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu\phi_A\right)^2 - V(\phi_i)$$
$$\approx -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi^a + eK^{ba}A_\mu{}^b\right)^2 - V(\phi_0) - \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

$e_i^a e_j^b = \delta^{ab},\ \ \tilde{e}_i^{\tilde{a}}e_i^b = 0,\ \ \tilde{e}_i^{\tilde{a}}\tilde{e}_i^{\tilde{b}} = \delta^{\tilde{a}\tilde{b}}$

Без преобразований по этой функции Лагранжа невозможно определить спектр частиц. Введем новые поля:
$B_\mu^b \equiv A_\mu^b + \frac{1}{e}(K^{-1})^{cb}\partial_\mu\varphi^c$
$eK^{ba}B_\mu^b = eK^{ba}A_\mu^b + (K^{-1})^{cb}K^{ba}\partial_\mu\varphi^c = eK^{ba}A_\mu^b + \partial_\mu\varphi^a$
$\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$

$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}e^2K^{ac}B_\mu^a K^{bc}B_\mu^b$$
$$-\frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

Спектр частиц:

1) $\dim H$ безмассовых полей A_μ^α
2) $\dim G - \dim H$ массовых векторных полей B_μ^a
   $(M^2)^{ab} \equiv e^2 K^{ac} K^{bc}$ –массовая матрица
3) $n - \dim G + \dim H$ хиггсовских бозонов
   $\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$ – вещественные массивные скалярные поля
   $(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_j}(\phi_0)\tilde{e}_i^{\tilde{a}^2}\tilde{e}_i^{\tilde{b}^2}$

Таким образом, в спектре больше нет голдстоуновских бозонов.
Спектр частиц существенно зависит от малой группы H.
Число степеней свободы $= 2\underbrace{\dim H}_{A_\mu^\alpha} + 3\underbrace{(\dim G - \dim H)}_{B_\mu^a} + \underbrace{n - \dim G + \dim H}_{\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}} =$

$2\dim G + n$
$n = \dim R$

Голдстоуновские бозоны исчезают из теории за счет локальных калибровочных преобразований. Покажем в общем виде, что существует унитарная калибровка, в которой все голдсоуновские бозоны равны 0.

$$\phi_i \to \omega_i^j \phi_j = (e^\alpha)_i^j \phi_j \approx \phi_i + \alpha_i^j \phi_{0j} = \phi_{0i} + e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + i\left(T_H^\beta\right)_i^j \alpha_H^\beta \phi_{0j} +$$
$$i\left(T_{G/H}^b\right)_i^j \alpha_{G/H}^b \phi_{0j} = \phi_{0i} + e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + \alpha_{G/H}^b E_i^b = \phi_{0i} + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + e_i^a(\varphi^a + \alpha_{G/H}^b K^{ba})$$
$$\omega \in G,\ \omega = \omega(x)$$

Следовательно, можно подобрать $\alpha_{G/H}^b$ так, чтобы $\varphi'^a \approx \varphi^a + \alpha_{G/H}^b K^{ba} = 0$
Следовательно, существует унитарная калибровка, в которой

$$\phi_i = \phi_{0i} + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \ \ (\Leftrightarrow \varphi^a = 0)$$

$$\alpha = \underbrace{i\alpha_H^\beta T_H^\beta}_{\text{произвольные}} + i\alpha_{G|H}^b T_{G|H}^b$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}(M^2)^{ab} A_\mu^a A_\mu^b$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2 - \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

При низких энергиях нестабильные массивные поля невидимы. Например, W- и Z-бозоны. Они распадаются практически моментально. Чтобы их получить, необходимо

построить ускоритель, который разгоняет частицу до колоссальных энергий. Просто так, при низких энергиях эти поля не существует.
Выкинем из теории все массивные возбуждения, тогда

$$\mathcal{L}^{(2)} \to -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2$$

$$\mathcal{L} \to -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^\alpha\right)^2$$

где $F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - ef^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$
$\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, \dim H}$

Таким образом, эта теория при низких энергия сводится к теории Янга-Миллса с калибровочной группой H.
Говорят, что исходная калибровочная группа нарушается до малой группы H:

$$G \to H$$

Вернемся к рассмотрению модели, инвариантной относительно калибровочной группы $G = SU(2)$.

$\phi_A \in Ad_j,\ \phi_A \in Re,\ A = 1,2,3$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu\phi_A\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_A^2 - v^2)^2$$

Сравним результаты общего исследования с результатами явных вычислений.

Вакуумное состояние $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$.

Вакуумное среднее $A_{\mu 0} = 0$ инвариантно относительно группы и $H = SO(2) = U(1)$.
Генератором группы является

$$T_H = T^3 = -iT^3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$iT_H\phi_0 = 0$

$$iT_{G/H}^1\phi_0 = E^1 = iT^1\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iT_{G/H}^2\phi_0 = E^2 = iT^2\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Построим ортонормированный базис в трехмерном пространстве столбцов, добавив вектор $\tilde{e}$:

$e^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ e^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{e} \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$E_i^a = K^{ab} e_i^b$

$$K^{ab} = \begin{pmatrix}0 & v\\ -v & 0\end{pmatrix}$$

Разложим поле ϕ:

$$\phi = \phi_0 + e^1\varphi_1 + e^2\varphi_2 + \tilde{e}\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix}0\\0\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\varphi_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\varphi_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ v+\tilde{\varphi}\end{pmatrix}$$

$\varphi_1, \varphi_2 -$ голдстоуновские бозоны;
$\tilde{\varphi} -$ массивный хиггсовский бозон

В соответствии с общей теорией в унитарной калибровке $\phi = \begin{pmatrix}0\\0\\v+\tilde{\varphi}\end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}e^2v^2\left(\left(A_\mu^1\right)^2 + \left(A_\mu^2\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}\right)^2 - \underbrace{2\lambda v^2}_{\frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}}\ \tilde{\varphi}^2$$

$(M^2)^{ab} = e^2K^{ac}K^{bc} = e^2(KK^T)^{ab} = e^2v^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Лекция 12. Теории со спинорными полями. Часть1

Глава 7. Теории со спинорными полями

§1. Уравнения Дирака

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\psi = 0$$

Попробуем извлечь из этого уравнения уравнение Клейна-Гордона-Фокка. Для этого нам необходима релятивистская инвариантность и первые производные. Чтобы записать Лоренц-инвариантное уравнение, необходимо как-то свернуть индекс по группе Лоренца. например,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

Применим к этому уравнению слева оператор $(-i\gamma^\nu \partial_\nu - m)$:

$$(-i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$0 = \left(\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2\right)\psi = \left[\frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu)\partial_\nu \partial_\mu + \overbrace{\frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu)}^{\gamma^{\nu\mu}}\partial_\nu \partial_\mu + m^2\right]\psi =$$

$\gamma^{\nu\mu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) = -\gamma^{\mu\nu}$

Таким образом, из

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

получается

$$(-i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

если $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, где антикоммутатор

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$0 = \left(\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu \partial_\mu + m^2\right)\psi = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi$$

Возьмем в качестве γ^μ матрицы, размер которых, вообще говоря, зависит от размерности пространства времени, поскольку $D = 1 + 3$. Соответственно минимальных размер матриц равен 4.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{1_2}^{2} \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, i = \overline{1,3}$$

где $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Проверим, что данные матрицы удовлетворяют равенству.
Пусть $\mu = \nu = 0$. Тогда

$$\gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 \overset{?}{=} 2\eta^{00} \Leftrightarrow \gamma^0\gamma^0 = \eta^{00} = 1$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} = 1_4$$

$\mu = 0,\ \nu \to i,\ i = \overline{1,3}$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 \overset{?}{=} 2\eta^{0i} = 0$$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0$$

$\mu \to i,\ \nu \to j,\ i,j = \overline{1,3}$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i \overset{?}{=} 2\eta^{ij} = -2\delta^{ij}$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i & \sigma^i \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} = \left[\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \cdot 1_2\right] =$$
$$= -2\delta^{ij}\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} = -2\delta^{ij} \cdot 1_4$$

Таким образом,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1_4$$

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$
$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$

Чтобы слагаемые имели одинаковую структуру, нужно, чтобы $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4)\psi = 0$
$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 -$ уравнение Дирака

Компоненты дираковского спинора $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ представляют собой

антикоммутирующие величины:

$$\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a = 0, \;\; a, b = \overline{1,4}$$

Следствием антикоммутации является принцип Паули: на одном уровне может находиться либо ни одного фермиона, либо один фермион.

$$0 = -i\partial_\mu \psi^+ \overbrace{\quad}^{1_4 = \gamma^0\gamma^0} (\gamma^\mu)^+ - m\psi^+ \;\; | \cdot \gamma^0$$
$$0 = i\partial_\mu \psi^+ \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\mu)^+ \gamma^0 - m\psi^+ \gamma^0$$

Так как

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

То

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^+ \gamma^0 = \gamma^\mu$$

Действительно, рассмотрим случай $\mu = 0$:

$$\gamma^0 (\gamma^0)^+ \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0$$

При $\mu \to i, \;\; i = \overleftarrow{1,3}$

$$\gamma^0 \left(\gamma^i\right)^+ \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = \gamma^i \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^i$$

Кроме того,

$\psi^+ \gamma^0 \equiv \bar{\psi} -$ дираковский сопряженный спинор

Таким образом, уравнение, сопряженное к уравнению Дирака

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - m\bar{\psi} = 0$$

Убедимся, что уравнение Лагранжа

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

Уравнение движения

$$0 = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i},$$

где $\varphi_i(\bar{\psi}, \psi)$

Тогда для ψ:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi$$

Для $\bar{\psi}$:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = -i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi}(-m\bar{\psi}\psi) = m\bar{\psi} - \partial_\mu(-i\bar{\psi}\gamma^\mu) = -i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

Иногда можно встретить такую запись уравнения Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$
$$= i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi + \partial_\mu \left[-\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \right]$$

То есть функции Лагранжа отличаются 4 дивергенциями, соответственно, уравнения движения совпадают.

Договоримся, что комплексное сопряжение

$$(\psi_a \psi_b)^* \equiv \psi_b \psi_a$$

Например,

$$(\bar{\psi}\psi)^* = (\psi^+ \gamma^\mu \psi)^+ = \psi^+ (\gamma^0)^+ \psi = \psi^+ \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi$$

$$\left(\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \right)^* = -\frac{i}{2}\left(\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi\right)^+ = -\frac{i}{2}\partial_\mu \psi^+ \underbrace{}_{1_4 = \gamma^0\gamma^0} (\gamma^\mu)^+ \gamma^0 \psi = -\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

§2. Классическая (спинорная) электродинамика

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Данная функция Лагранжа инварианта относительно преобразований:

$\psi \to \exp(-ie\alpha)\psi$
$\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0} \to \bar{\psi}\exp(ie\alpha)\,, \quad \alpha \in Re,\ \alpha \neq \alpha(x) -$ число
$e -$ константа связи
Эти <u>глобальные</u> образования образуют группу $\mathrm{U}(1)$.

Если , $\alpha = \alpha(x)$, то

$$\partial_\mu\psi \to \partial_\mu(\exp(-ie\alpha)\,\psi) = \exp(ie\alpha)$$

$\partial_\mu\psi - ie\partial_\mu\ \alpha\psi \quad \Rightarrow$ нет локальной калибровочной инвариантности

Модифицируем теорию таким образом, чтобы получить локальную калибровочную инвариантность.
$\alpha = \alpha(x) \in Re$
Добавим поле A_μ, которое при калибровочных преобразованиях меняется следующим образом:

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha$$

Заменим производную на ковариантную производную:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$\partial_\mu\psi \to \mathcal{D}_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi$
$\mathcal{D}_\mu\psi \to \partial_\mu(exp(-ie\alpha)\psi - ie\big(A_\mu - \partial_\mu\alpha\big)\exp(-ie\alpha)\,\psi = \exp(-ie\alpha)\,\big[\partial_\mu\psi - ie\partial_\mu\alpha\psi - ieA_\mu\psi + ie\partial_\mu\alpha\psi\big] = \exp(-ie\alpha)\mathcal{D}_\mu\psi$

Ковариантная производная для $\bar{\psi}$:

$$\mathcal{D}_\mu\bar{\psi} = \big(\mathcal{D}_\mu\psi\big)^{+}\,\gamma^{0} = \big(\partial_\mu\psi^{+} + ie\psi^{+}A_\mu\big)\gamma^{0} = \partial_\mu\bar{\psi} + ie\bar{\psi}A_\mu \to \exp(ie\,\alpha)\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}$$

Чтобы получить теорию, необходимо добавить калибровочный инвариантный кинетический член для калибровочного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ \ F_{\mu\nu}^{2} \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Тогда лагранжиан этой теории – классической спинорной электродинамики

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{2}$$

Исследуем свойства этой теории.
Уравнения движения:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\varphi_i\big)}\right) - \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}$$

$\varphi_i = (\bar{\psi}, \psi, A_\nu)$

Уравнение движения для $\bar{\psi}$:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \underbrace{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right)}_{0} = i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\psi$$

Это уравнение Дирака при наличии электромагнитного поля.

Уравнение движения для ψ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = m\bar{\psi} - \bar{\psi}\gamma^\mu e A_\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -i\bar{\psi}\gamma^\mu$$

$$0 = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - \bar{\psi}\gamma^\mu e A_\mu + m\bar{\psi} = i\left(\partial_\mu \bar{\psi} + ieA_\mu \bar{\psi}\right)\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

Сопряженное уравнение в случае электромагнитного поля:

$$0 = i\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

Уравнение движения для A_ν:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \bar{\psi}\gamma^\mu e \delta_\mu^\nu \psi = \bar{\psi} e \gamma^\nu \psi$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu \psi \equiv j^\nu$$

$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ (следствие $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$)

Ток должен удовлетворять условиям сохранения. Применим производную ∂_ν к $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu \psi \equiv j^\nu$:

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu$$

Проверим справедливость равенства:

$$0 \overset{?}{=} -\frac{1}{e}\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = \left(\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\right)\psi + \bar{\psi}\left(\gamma^\mu \partial_\mu \psi\right)$$
$$= \left(-ieA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + im\bar{\psi}\right)\psi + \bar{\psi}\left(ieA_\mu \gamma^\mu \psi - im\psi\right) = 0$$

Так как

$0 = \left(\partial_\mu \bar{\psi} + ieA_\mu \bar{\psi}\right)\gamma^\mu - im\bar{\psi}$

$\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu = -ieA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + im\bar{\psi}$

Из уравнения движения для $\bar{\psi}$:

$$\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\psi \to 0 = \gamma^\mu \left(\partial_\mu \psi - ieA_\mu \psi\right) im\psi$$

$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = ieA_\mu \gamma^\mu \psi - im\psi$

Запишем уравнение Дирака с электромагнитным полем:

$$i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\psi = 0$$

Попробуем получить уравнение Клейна-Гордона-Фокка.

$$\begin{aligned}
0 &= (-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)\left(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\right)\psi = \gamma^\nu \gamma^\mu \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \psi + m^2 \psi \\
&= \left[\overbrace{\frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu)}^{2\eta^{\mu\nu} 1_4} + \overbrace{\frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu)}^{\gamma^{\nu\mu}}\right] \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \psi + m^2 \psi \\
&= \mathcal{D}_\mu^2 \psi + m^2 \psi + \gamma^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi \\
&= \left(\mathcal{D}_\mu^2 + m^2\right)\psi + \gamma^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \left(\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu\right)\right)\psi \\
&= \left(\mathcal{D}_\mu^2 + m^2\right)\psi + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right]\psi = \mathcal{D}_\mu^2 \psi - \frac{ie}{2}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\psi + m^2 \psi
\end{aligned}$$

$0 = \mathcal{D}_\mu^2 \psi - \frac{ie}{2}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\psi + m^2 \psi -$ уравнение Дирака в случае наличия электромагнитного поля, так как

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right]\psi &= \left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu\right)\psi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)(\partial_\nu - ieA_\nu)\psi - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\
&= (\partial_\mu \partial_\nu \psi - ieA_\mu \partial_\nu \psi - ie\partial_\mu (A_\nu \psi) - e^2 A_\mu A_\nu \psi - \partial_\nu \partial_\mu \psi - ieA_\nu \partial_\mu \psi \\
&- ie\partial_\nu \left(A_\mu \psi\right) - e^2 A_\nu A_\mu \psi \\
&= -ieA_\mu \partial_\nu \psi - ie\left(\partial_\mu A_\nu\right)\psi - ieA_\nu \partial_\mu \psi + ieA_\nu \partial_\mu \psi + ie\left(\partial_\nu A_\mu\right)\psi + ieA_\mu \partial_\nu \psi \\
&= -ie\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\psi = -ieF_{\mu\nu}\psi
\end{aligned}$$

Лекция 13. Теории со спинорными полями. Часть 2.

§3. Нерелятивистский предел уравнения Дирака. Уравнение Паули.

Ранее мы построили спинорную теорию электродинамики, лагранжиан которой равен

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

где $G = U(1)$

$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ – дираковский спинор

γ^μ, γ^ν – матрицы, удовлетворяющие условию

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Уравнение движения для поля $\bar{\psi}$ – уравнение Дирака при наличии электромагнитного поля:

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \underbrace{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)}_{0} = i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\psi$$

$\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu\,\psi$

Вообще говоря, матрицы γ^μ определены неоднозначно. Ранее мы использовали такое определение:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & 1_2\\ 1_2 & 0\end{pmatrix};\quad \gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}, i = \overline{1,3}$$

Перейдем к другим матрицам, используя замену:

$\gamma^\mu \to M\gamma^\mu M^{-1}$

M – унитарная матрица 4×4: $M^+ = M^{-1}$

$$\{M\gamma^\mu M^{-1}, M\gamma^\nu M^{-1}\} = M\gamma^\mu M^{-1}M\gamma^\nu M^{-1} + (\mu\leftrightarrow\nu) = M(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)M^{-1} =$$
$$= M2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4 M^{-1} = 2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4$$

То есть новые матрицы γ удовлетворяют антикоммутационному соотношению.
При этом можно заменить

$$\psi \to M\psi$$

Рассмотрим матрицу M вида:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}$$

$M^{-1} = M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}$

Вычислим матрицы γ^μ

$$\gamma^\mu \to M\gamma^\mu M^{-1}$$

$$\gamma^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & -1_2 \\ 1_2 & 1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^i & -\sigma^i \\ -\sigma^i & \sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix};\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим лагранжиан:

$$i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\psi = 0$$

$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ieA_\mu\, \psi$

$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$

$\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \overline{\nabla})$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix}$$

$$\left[i\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}(\partial_\nu \psi - ie\varphi\psi) + i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}(\overline{\nabla}\psi + ie\vec{A}\psi) - m\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix} = 0$$

При этом

$$\psi \sim e^{-iEt}\ (\hbar = 1)$$

E —релятивистская энергия

$E = m + \Delta E \quad (c = 1)$

Поэтому

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\psi \sim e^{-i(m+\Delta E)t}$$

С другой стороны, в нерелятивистской квантовой механике

$$e^{-i\Delta E t}$$

Сделаем замену:

$$\psi \equiv e^{-imt}\psi'$$

Тогда $\psi' \sim e^{-i\Delta E t}$

$$\partial_0 \psi = e^{-imt}(\partial_0 \psi' - im\psi')$$
$$\overline{\nabla}\psi = e^{-imt}\overline{\nabla}\psi'$$

Подставим эти выражения в уравнение Дираката, разбив его на 2 части (верхние и нижние уравнения):

$$i(\partial_0 \psi'_{12} - im\psi'_{12} - ie\varphi\psi'_{12}) - i\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\psi'_{34} - m\psi'_{12} = 0$$
$$-i(\partial_0 \psi'_{34} - im\psi'_{34} - ie\varphi\psi'_{34}) - i\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\psi'_{12} - m\psi'_{34} = 0$$
$$0 = \underbrace{-i\partial_0 \psi'_{34}}_{\sim\Delta E} - 2m\psi'_{34} - ie\varphi\psi'_{34} + i\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\psi'_{12}$$

Так как $c = 1$, то при $v \ll c = 1$, то $|\Delta E| \ll M$

Тогда в нерелятивистком пределе:

$$\psi'_{34} = \frac{i}{2m}\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\psi'_{12}$$
$$i\partial_0 \psi'_{12} + e\varphi\psi'_{12} + \frac{1}{2m}\left[\left(\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\right]^2 \psi'_{12} = 0$$

Для матриц Паули известно, что

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} 1_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Тогда

$$\left[\left(\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\right]^2 = \sigma^i \sigma^j \left(\partial_i + ie\left(\vec{A}\right)_i\right)\left(\partial_j + ie\left(\vec{A}\right)_j\right) = \left(\delta_{ij}1_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\left(\partial_j + ie\left(\vec{A}\right)_j\right)$$
$$= \left[\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\right]^2$$
$$+ i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left[\partial_i\partial_j + ie\left(\vec{A}\right)_i\partial_j + ie\left(\partial_i\left(\vec{A}\right)_j\right) + ie\left(\vec{A}\right)_j\partial_i - e^2\left(\vec{A}\right)_i\left(\vec{A}\right)_j\right] =$$

$$\left[\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\right]^2 = \left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)^2 - e\bar{\sigma}\left[\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)^2 - e\bar{\sigma}\overline{H}$$

Так как $A_\mu = \left(\varphi, -\vec{A}\right),\ A_i = -\left(\vec{A}\right)_i$

$i\partial_0 \psi'_{12} = -\frac{1}{2m}\left[\left(\bar{\sigma}\left(\overline{\nabla} + ie\vec{A}\right)\right]^2 \psi'_{12} + \frac{e}{2m}(\bar{\sigma}\overline{H})\psi'_{12} - e\varphi\psi'_{12}$ – уравнение Паули
Уравнение Паули хорошо описывает электрон.

Построим гамильтониан для заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi$$

$\hbar = c = 1$

$\hat{\vec{P}} = \frac{\hbar}{i}\overline{\nabla}$

Уравнение Шредигера частицы в произвольном магнитном поле:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\overline{\nabla} - \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}\vec{A}\right)^2 + q\varphi$$

$$i\partial_0\,\psi = \left[-\frac{1}{2m}\left(\overline{\nabla} - iq\vec{A}\right)^2 + q\varphi\right]\psi$$

Если $q = -e$ $(e > 0)$, то часть уравнения Паули совпадает с уравнением Шредингера.

$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\bar{\sigma}$ − оператор спина.

$$\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] = \frac{\hbar^2}{4}\left[\sigma_i, \sigma_j\right] = \frac{\hbar^2}{2}i\varepsilon_{ijk}\sigma_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$$

Например, $\hat{S}_3$ − проекция спина на ось z:

$$\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_3\begin{pmatrix}\psi_1{}'\\ \psi_2{}'\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1{}'\\ \psi_2{}'\end{pmatrix}$$

Состояние, в котором $\begin{pmatrix}\psi'\\ 0\end{pmatrix}$ − состояние, в котором $\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}$, которое описывает электрон со спином вверх.

$\begin{pmatrix}0'\\ \psi'\end{pmatrix}$: $\hat{S}_3 = -\frac{\hbar}{2}$, спин вниз

Соответственно,

$|\psi_1'|^2$ −плотность вероятности того, что электрон находится в состоянии со спином вверх.

$|\psi_2'|^2$ −плотность вероятности того, что электрон находится в состоянии со спином вниз.

Рассмотрим классическую механику. Пусть есть однородное магнитное поле, направленное вдоль оси z, тогда гамильтониан заряженной частицы:

$\vec{H} = \mathcal{H}\vec{e}_z,\ \mathcal{H} = const$

$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$

$$\vec{H} = rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$\vec{A} = (-\frac{1}{2}\mathcal{H}y, \frac{1}{2}\mathcal{H}x, 0)$

Тогда

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(P_x + \frac{q\mathcal{H}}{2c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(P_y - \frac{q\mathcal{H}}{2c}x\right)^2 + \frac{1}{2m}P_z^2$$
$$= \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + \frac{q\mathcal{H}}{2mc}\underbrace{\left(P_y y - P_y x\right)}_{-L_z} + \frac{q^2\mathcal{H}^2(x^2+y^2)}{8mc^2}$$
$$= \frac{1}{2m}\vec{P}^2 - \frac{q\mathcal{H}}{2mc}L_z + \frac{q^2\mathcal{H}^2(x^2+y^2)}{8mc^2}$$

$$\bar{L} = [\bar{r} \times \bar{p}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

Так как магнитное поле направлено по оси z, то

$$-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}L_z = -(\bar{\mu}\bar{H})$$
$$\bar{\mu} = \frac{q}{2mc}\bar{L}$$

$\bar{L} \to \hat{S} = \frac{\hbar}{2}\bar{\sigma}$

$-(\bar{\mu}\bar{H}) \to \{\hbar = c = 1\} \to +\frac{e}{4m}(\bar{\sigma}\bar{H})$

Это слагаемое очень похоже на слагаемое из уравнения Паули $\frac{e}{2m}(\bar{\sigma}\bar{H})\psi'_{12}$, отличие в множителе $\frac{1}{2}$ против $\frac{1}{4}$. Экспериментально доказано, что гораздо лучше согласуется слагаемое с множителем $\frac{1}{2}$. Низкоэнергетический предел уравнение Дирака (уравнение Паули) включает в себя слагаемое, описывающее взаимодействие магнитного момента электрона с магнитным полем, при этом магнитный момент электрона по модулю равен (приближенно) $\frac{e}{2m}$. Поэтому уравнение Дирака хорошо описывает магнитный мрмент электрона.

Экспериментально было посчитано, что магнитный момент электрона равен

$$\mu = \frac{e}{2m} \cdot 1{,}00115965 \ldots$$

С такой же точностью эта величина может быть вычислена в рамках квантовой теории поля. Экспериментальное значение μ согласуется с теоретическим вплость до 10 знаков после запятой, что указывает на то, что мир описывается с помощью квантовой теории поля.

Кроме того, уравнение Дирака можно решить в кулоновском поле и получить спектр уровней водородоподобных атомов, при этом будет предсказываться тонкая структура уровней. Однако ура

§5. Решение свободного уравнение Дирака

Уравнение Дирака без электромагнитного поля:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

Выберем матрицы γ:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку уравнение линейно по ψ, то

$$\psi = e_\alpha^{-ik} x^\alpha A$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{34} \end{pmatrix}$$

$$\left[i\gamma^\mu(-ik_\mu) - m\right]A = 0$$

$$\left(\gamma^\mu k_\mu - m\right)A = 0$$

$k_\mu = (k_0, -\bar{k})$

$$0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} k_0 + \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ -\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}(-\bar{k}) + m1_4\right]\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{34} \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} k_0 - m & (\bar{\sigma}\bar{k}) \\ -(\bar{\sigma}\bar{k}) & -k_0 - m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = (k_0 - m)A_{12} + (\bar{\sigma}\bar{k})A_{34} \\ 0 = -(\bar{\sigma}\bar{k})A_{12} - (k_0 + m)A_{34} \end{cases}$$

Соответственно,

$$A_{34} = -\frac{(\bar{\sigma}\bar{k})}{(k_0 + m)}A_{12}$$

$$0 = (k_0 - m)A_{12} + (\bar{\sigma}\bar{k})\left(-\frac{(\bar{\sigma}\bar{k})}{k_0 + m}\right)A_{12}$$

Так как

$$(\bar{\sigma}\bar{k})^2 = \sigma^i\sigma^j(\bar{k})_i(\bar{k})_j = (\delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k)(\bar{k})_i(\bar{k})_j = (\bar{k})^2$$

То

$$0 = [k_0^2 - m^2 - \bar{k}^2]A_{12}$$

$$\Rightarrow k_0^2 = \bar{k}^2 + m^2 \Rightarrow \ k_0 = \pm\sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$$

Тогда ответ

$$\psi = e_\alpha^{-ik}\begin{pmatrix} A_{12} \\ -\frac{(\bar{\sigma}\bar{k})}{k_0+m}A_{12} \end{pmatrix}$$

A_{12} − произвольный столбец из 2 компонент.
Или эквивалентная запись:

$$\psi = e_\alpha^{-ik}\begin{pmatrix} \frac{(\bar{\sigma}\bar{k})}{m-k_0}A_{34} \\ A_{34} \end{pmatrix}$$

Вернемся к $k_0 = \pm\sqrt{\bar{k}^2+m^2}$.
Если $k_0 = \sqrt{\bar{k}^2+m^2}$ и $|\bar{k}\,|$ мал по сравнению с m, то $|A_{34}| \ll |A_{12}|$, то есть две нижние компоненты А намного меньше двух верхних компонент.
Если $k_0 = -\sqrt{\bar{k}^2+m^2}$, $|\bar{k}\,| \ll m$, то $k_0 \approx -m$. то $|A_{12}| \ll |A_{34}|$.

§5. Зарядовое сопряжение. Позитрон.

$\mathrm{C} \equiv i\gamma^0\gamma^i$ − матрица зарядового сопряжения

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

В обоих случая матрицы γ^0 симметричны, матрицы γ^1 антисимметричны, γ^2 антисимметричны.
То есть матрица С обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{C}\gamma^\mu C^{-1} = (-\gamma^\mu)^T$

Действительно,

$$\mathrm{C}\gamma^0 C^{-1} = i\gamma^0\gamma^2\gamma^0 C^{-1} = -\gamma^0 i\gamma^0\gamma^2 C^{-1} = \gamma^0(-1)CC^{-1} = -\gamma^0 = -(\gamma^0)^T$$

Аналогично
$\mathrm{C}\gamma^2\mathrm{C}^{-1} = -\gamma^2 = -(\gamma^2)^T$
$\mathrm{C}\gamma^1 C^{-1} = i\gamma^0\gamma^2\gamma^1 C^{-1} = \gamma^1 = -(\gamma^1)^T$
$\mathrm{C}\gamma^3 C^{-1} = \gamma^3 = -(\gamma^3)^T$

2. $C^{-1} = C$

Действительно,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$C^2 = i\gamma^0\gamma^2 i\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = (\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = 1_4(-1_4) = -1_4$$

$$\mathrm{C} = i\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C} = i\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью матрицы С можно определить зарядово сопряженный спинор.
Зарядово сопряженный спинор ψ^C:

$$\overline{\psi^C} \equiv \psi^T C$$

$(\psi^C)^+ = \psi^T C \ \ | \cdot \gamma^0$
$(\psi^C)^+ = \psi^T C\gamma^0$

$$\psi^C = (\psi^T C\gamma^0)^+$$

$\psi^C = \gamma^0(-C)\psi^*$

$$\psi^C = -\gamma^0 C\psi^*$$

Уравнение Дирака с электромагнитным полем:

$$i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\psi - m\psi = 0$$

где $\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi$

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi) - m\psi = 0$$

Сопряженное выражение:

$$-i(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu\psi^* + ieA_\mu\psi^*) - m\psi^* = 0$$

Умножим на матрицу С и вставим $1 = \mathrm{C}^{-1}C$:

$$C| \ \ -i(\gamma^\mu)^* \underbrace{\ }_{1=C^{-1}C}(\partial_\mu\psi^* + ieA_\mu\psi^*) - m\psi^* = 0$$

$$-Ci(\gamma^\mu)^* C^{-1}(\partial_\mu(C\psi^*) + ieA_\mu(C\psi^*)) - m(C\psi^*) = 0$$

$$i(\gamma^\mu)^+(\partial_\mu(C\psi^*) + ieA_\mu(C\psi^*)) - m(C\psi^*) = 0$$

Вставим 1 как $\gamma^0\gamma^0$ и воспользуемся свойством $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma^\mu)^+$:

$$i\gamma^\mu[\partial_\mu(\gamma^0 C\psi^*) + ieA_\mu(\gamma^0 C\psi^*)] - m(\gamma^0 C\psi^*) = 0$$

Получим уравнение для зарядово сопряженного спинора:

$$i\gamma^{\mu}[\partial_{\mu}\psi^{C} + ieA_{\mu}\psi^{C}] - m\psi^{C} = 0$$

Полученное уравнение отличается с исходным уравнением Дирака только знаком внутри скобки. То есть разница будет заключаться только в изменении знака перед зарядом e.

$$\psi \sim e^{-ik_0 t}$$

Если $k_0 < 0$, то $\psi \sim e^{i|k_0|t}$.
Но с другой стороны

$$\psi^{*} \sim e^{-i|k_0|t}$$
$$\psi^{C} \sim e^{-i|k_0|t}$$

Это говорит о том, что если мы хотим интерпретировать отрицательные частотные решения, то мы должны строить волновую функцию исходя из спинора ψ^{C}. Кроме того, знак заряда в уравнения Дирака поменяется.

$$\psi^{C} = -\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1^{*} \\ \psi_2^{*} \\ \psi_3^{*} \\ \psi_4^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_4^{*} \\ -\psi_3^{*} \\ -\psi_3^{*} \\ \psi_1^{*} \end{pmatrix}$$

Если переходит к уравнению Паули, то первые 2 компоненты будут большими.

Лекция 14. Теории со спинорными полями. Часть 3

§6. Спиноры и преобразования Лоренца

Лагранжиан в спинорной электродинамике:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

где $\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu\,\psi$

Инвариантность относительно группы Лоренца присутствует, однако, чтобы ее получить, необходимо нетривальным образом преобразовать спинарное поле ψ. Спинор ψ будет преобразовываться по некоторому представлению. Для того, чтобы построить это представление, построим соответствующее представление алгебры Ли этой группы Лоренца. Чтобы задать представление группы, нужно определить новый набор генераторов, который имеет те же коммутационные соотношения, что и исходный набор генераторов.

Запишем генераторы исходного представления:

$$(t^{\mu\nu})_\alpha^\beta = \frac{i}{2}\left(\delta_\alpha^\mu\eta^{\nu\beta} - \delta_\alpha^\nu\eta^{\mu\beta}\right)$$
$$(t^{\mu\nu})_\alpha^\beta = -((t^{\nu\mu})_\alpha^\beta$$

Число генераторов совпадает с размерностью группы Лоренца и равно $\frac{4(4-1)}{2} = 6$. При этом параметрами группы Лоренца будут

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$$

Поэтому домножив генераторы на этот параметр получим:

$$-i\alpha_{\mu\nu}(t^{\mu\nu})_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}\left(\delta_\alpha^\mu\eta^{\nu\beta} - \delta_\alpha^\nu\eta^{\mu\beta}\right) = \frac{1}{2}\alpha_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\alpha_\alpha^\beta = \alpha_\alpha^\beta$$

Найдем коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}
\left[t^{\mu\nu}, t^{\alpha\beta}\right]_\gamma^\sigma &= (t^{\mu\nu})_\gamma^\sigma\left(t^{\alpha\beta}\right)_\sigma^\delta - \left(t^{\alpha\beta}\right)_\gamma^\sigma(t^{\mu\nu})_\sigma^\delta \\
&= -\frac{1}{4}\left[\left(\delta_\gamma^\mu\eta^{\nu\sigma} - \delta_\gamma^\nu\eta^{\mu\sigma}\right)\left(\delta_\sigma^\alpha\eta^{\beta\delta} - \delta_\sigma^\beta\eta^{\alpha\delta}\right) - \binom{\alpha \leftrightarrow \mu}{\beta \leftrightarrow \nu}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\Big[\delta_\gamma^\mu\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\delta} - \delta_\gamma^\mu\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\delta} - \delta_\gamma^\nu\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\delta} + \delta_\gamma^\nu\eta^{\mu\beta}\eta^{\alpha\delta} - \delta_\gamma^\alpha\eta^{\beta\mu}\eta^{\nu\delta} \\
&+ \delta_\gamma^\alpha\eta^{\beta\nu}\eta^{\mu\delta} + \delta_\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\delta} - \delta_\gamma^\beta\eta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\delta}\Big] \\
&= \frac{i}{2}\left[-\eta^{\mu\alpha}\left(t^{\nu\beta}\right)_\gamma^\delta + \eta^{\mu\beta}(t^{\nu\alpha})_\gamma^\delta + \eta^{\nu\alpha}\left(t^{\mu\beta}\right)_\gamma^\delta - \eta^{\nu\beta}(t^{\mu\alpha})_\gamma^\delta\right]
\end{aligned}$$

Таким образом, генераторы фундаментального представления группы Лоренца, определенные соотношением

$$(t^{\mu\nu})^{\beta}_{\alpha} = \frac{i}{2}\left(\delta^{\mu}_{\alpha}\eta^{\nu\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\eta^{\mu\beta}\right)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[t^{\mu\nu}, t^{\alpha\beta}\right] = \frac{i}{2}\left(-\eta^{\mu\alpha}\left(t^{\nu\beta}\right)^{\delta}_{\gamma} + \eta^{\mu\beta}(t^{\nu\alpha})^{\delta}_{\gamma} + \eta^{\nu\alpha}\left(t^{\mu\beta}\right)^{\delta}_{\gamma} - \eta^{\nu\beta}(t^{\mu\alpha})^{\delta}_{\gamma}\right)$$

Для построения другого представления потребуется объект с 2 индексами, обладающий антисимметрией, например

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \eta^{\mu\nu}\cdot 1_4$$

$$\left[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}\right] = \left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}, \gamma^{\alpha}\,\gamma^{\beta}\right]$$

Воспользуемся равенствами:

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B = A(BC - CB) + (AC - CA)B = (AB)C - C(AB)$$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B = A(BC + CB) - (AC + CA)B = (AB)C - C(AB)$$

Получим

$$\begin{aligned}\left[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}\right] &= \left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}, \gamma^{\alpha}\,\gamma^{\beta}\right] = [\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}, \gamma^{\alpha}]\gamma^{\beta} + \gamma^{\alpha}\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}, \gamma^{\beta}\right] \\ &= (\gamma^{\mu}\{\gamma^{\nu}, \gamma^{\alpha}\} - \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\alpha}\}\gamma^{\nu})\gamma^{\beta} + \gamma^{\alpha}\left(\gamma^{\mu}\{\gamma^{\nu}, \gamma^{\beta}\} - \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\beta}\}\gamma^{\nu}\right) \\ &= 2\eta^{\nu\alpha}\left(\gamma^{\mu\beta} + \eta^{\alpha\beta}\cdot 1_4\right) - 2\eta^{\mu\alpha}\left(\gamma^{\nu\beta} + \eta^{\nu\beta}\cdot 1_4\right) + 2\eta^{\nu\beta}(\gamma^{\alpha\mu} + \eta^{\alpha\mu}\cdot 1_4) \\ &- 2\eta^{\mu\beta}(\gamma^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\nu}\cdot 1_4) = 2[-\eta^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\gamma^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\alpha}\gamma^{\mu\beta} - \eta^{\nu\beta}\gamma^{\mu\alpha}]\end{aligned}$$

Таким образом, матрицы γ обладают заданным коммутационным соотношением, если добавить постоянный коэффициент:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\gamma^{\mu\nu}$$

$$\left[T^{\mu\nu}, T^{\alpha\beta}\right] = \frac{i}{2}\left(-\eta^{\mu\alpha}T^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}T^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\alpha}T^{\mu\beta} - \eta^{\nu\beta}T^{\mu\alpha}\right)$$

Таким образом, мы задали представление группы Ли для группы Лоренца.

Тогда образ элемента $\alpha^{\beta}_{\alpha} = -i\alpha_{\mu\nu}(t^{\mu\nu})^{\beta}_{\alpha}$ в спинорном представлении равен

$$-i\alpha_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$$

Если элемент принадлежит группе,

$$\omega^{\beta}_{\alpha} = \exp(\alpha)^{\beta}_{\alpha} \in \text{связной компоненте группы Лоренца}$$

то соответствующий элемент в спинорном представлении равен

$$T(\omega) = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)$$

Экспоненциальное отображение может дать только связную часть группы Лоренца, которая состоит из 4 компонент связности.

Закон преобразования спинора под действием группы Лоренца:

$$\psi \to \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi$$

Будет ли лагранжиан электродинамики инвариантен относительно эти преобразований?

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \equiv \psi^{+}\gamma^{0} \to \psi^{+}\underbrace{}_{1=\gamma^0\gamma^0}\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^{+}\right)\gamma^{0} &= \bar{\psi}\gamma^{0}\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^{+}\right)\gamma^{0}\\ &= \gamma^{0}\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^{+}\right)\gamma^{0}\\ &= \gamma^{0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^{+}\right)^{n}\gamma^{0} = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\,\gamma^{0}(\gamma^{\mu\nu})^{+}\gamma^{0}\right)\\ &= \bar{\psi}\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{0}(\gamma^{\mu\nu})^{+}\gamma^{0} &= \frac{1}{2}\gamma^{0}\left(\gamma^{\nu+}\underbrace{}_{1=\gamma^0\gamma^0}\gamma^{\mu+} - \gamma^{\mu+}\underbrace{}_{1=\gamma^0\gamma^0}\gamma^{\nu+}\right)\gamma^{0} = \{\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0} = (\gamma^{\mu})^{+}\}\\ &= \frac{1}{2}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = -\gamma^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi \to \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{+}\gamma^{0} \to \bar{\psi}\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)$$

$$\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi = \bar{\psi}\psi$$

Рассмотрим величину, которая с точностью до некоторого постоянного множителя совпадает с током в рассматриваемой теории - $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$.
Рассмотрим, как это величина меняется при действии группы Лоренца:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \bar{\psi}\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\gamma^\mu\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi = \exp(\alpha)^\mu_{.\nu}\,\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

Так как

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}\big[A,[A,B]\big] + \cdots = \gamma^\mu + \frac{1}{1!}\alpha^\mu_{.\nu}\gamma^\nu + \frac{1}{2!}\alpha^\mu_{.\sigma}\alpha^\sigma_{.\nu}\gamma^\nu + \cdots =$$
$$\exp(\alpha)^\mu_{.\nu}\,\gamma^\nu = \exp(-\alpha)^\mu_{\nu.}\,\gamma^\nu$$
$$[A,B] = \left[-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta},\gamma^\mu\right] = -\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\left[\gamma^\alpha\gamma^\beta,\gamma^\mu\right] = -\frac{1}{4}\,\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^\alpha\{\gamma^\beta,\gamma^\mu\} - \{\gamma^\alpha,\gamma^\mu\}\gamma^\beta)$$

$$[A,B] = -\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\left(2\eta^{\beta\mu}\gamma^\alpha - 2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\beta\right) = \frac{1}{2}\alpha^\mu_{.\alpha}\gamma^\alpha + \frac{1}{2}\alpha^\mu_{.\beta} = \alpha^\mu_{.\alpha}\gamma^\alpha$$

Следовательно, $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\mu\psi$ – скаляр, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ – скаляр.
Таким образом, все величины, входящие в лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

скалярны по группе Лоренца, и, следовательно лагранжиан инвариантен относительно группы Лоренца.

У матрицы $(\gamma^\mu)^b_a$ есть матричные индексы a и b. У спинора тоже есть матричные индексы, и он преобразуется следующим образом:

$$\psi_a \to \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)^b_a\psi_b$$
$$\bar{\psi}^a \to \bar{\psi}^{\,\mathrm{b}}\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)^{\mathrm{a}}_b$$

Поэтому для преобразования гамма-матрицы необходимо делать преобразования по всем 3 индексам.

$$(\gamma^\mu)^b_a \to \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)^{\mathrm{c}}_a(\gamma^\mu)^d_{\mathrm{c}}\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)^{\mathrm{b}}_d\exp(\alpha)^\mu_{.\nu} =$$
$$\exp(-\alpha)^\nu_{.\sigma}\,(\gamma^\sigma)^b_a\exp(\alpha)^\mu_{.\nu} = (\gamma^\sigma)^b_a\underbrace{[\exp(\alpha)\exp(-\alpha)]^\mu_{.\sigma}}_{\delta^\mu_{.\sigma}} = (\gamma^\mu)^b_a \text{ –инвариантный тензор}$$

Запишем лагранжиан, учитывая все индексы:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}^a(\gamma^\mu)^b_a\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}^a\psi_a$$

§7. Майорановские и вейлевские спиноры

Условием связи инваринтным относительно группы Лоренца будет условие майорановским

$$\psi^c = \psi - \text{майорановский спинор}$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\psi^c = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\psi$$

Запишем явное представление майорановского спинора, используя матрицы

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

матрицу зарядового сопряжения

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{\psi^c} = \bar{\psi}$ или $\psi^T C = \bar{\psi}$

$$\psi^T C = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_2, -\psi_1, -\psi_4, \psi_3)$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_3^*, \psi_4^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$$

Приравнивая эти величины получим следующие условия:

$$\psi_2 = \psi_3^*; \;\; -\psi_1 = \psi_4^*; \;\; -\psi_4 = \psi_1^*; \;\; \psi_3 = \psi_2^*$$

То есть

$$\psi^c = \psi - \text{майорановский спинор}$$

$\psi^T C = \bar{\psi}$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

Построим матрицу $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$(\gamma_5)^2 = 1_4$$

Действительно,

$$(\gamma_5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (\gamma^1)^2\,\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3$$
$$= (\gamma^2)^2(\gamma^2)^2 = 1_4$$

Кроме того,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

Действительно, выберем некоторую матрицу γ^μ, например γ^2:

$$\gamma_5\,\gamma^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,\gamma^2 = (-1)^3\gamma^2 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^2\gamma_5$$

Вейлевские спиноры (киральные) спиноры:

$$\gamma_5|\ \gamma_5\psi = \lambda\psi$$
$$\psi = (\gamma_5)^2\psi = \lambda\gamma_5\psi - \lambda^2\psi$$
$$\lambda^2 = 1 \ \Rightarrow\ \lambda = \pm 1$$

$\lambda = 1$ соответсвует правому спинору, $\lambda = -1$ соответствует левому спинору.

$$\gamma_5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Правый спинор ψ_R:

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Аналогичного левый спинор ψ_L:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Между вейлевскими и майорановскими спинорами существует соответствие:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

Аналогично для правых спиноров.

Функцию Лагранжа можно переписать в терминах вейлевских спиноров:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi =$$
$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$$

$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$ – левый проектор

$\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ – правый проектор

$\psi = \psi_L + \psi_R$

Действительно,

$$\bar{\psi}_L \equiv \psi_L^+\gamma^0 = \left(\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi\right)^+\gamma^0 = \psi^+\gamma^0\frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

Аналогично,

$$\bar{\psi}_R = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$$

Рассмотрим величину $\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$:

$$\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi + \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi =$$
$$= \left[\left[\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\right]^2 = \frac{1}{4}(1+\gamma_5^2 \pm 2\gamma_5) = \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\right] =$$
$$= \bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi + \bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi = \bar{\psi}\psi$$

$$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_R$$
$$= \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi + \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi$$
$$= \bar{\psi}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right]^2\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi + \bar{\psi}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\right]^2\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi$$
$$= \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi + \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi$$

Вейлеровские условия так же, как и майорановские – лоренц-инварианты.

$$\gamma_5\psi = \lambda\psi$$

$\psi \to \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi$
$\gamma_5 \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi$
$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$
$\gamma_5\gamma^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}\gamma_5 = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\gamma_5\psi = \lambda \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi$

С любым четным числом матриц γ_5 коммутирует, нечетным – антикоммутирует.

§8. Киральные преобразования. Понятия об аномалиях

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

При $m = 0$ лагранжиан инвариантен относительно преобразований:

$$\psi \to \exp(\, i\alpha\,\gamma_5)\,\psi$$

где $\alpha \in Re,\ \alpha -$ число, $\alpha \neq \alpha(x)$

$\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0 \to\ \psi^+ \exp(-\, i\alpha\,\gamma_5)\,\gamma^0 = \psi^+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\, i\alpha\,\gamma_5)^n\gamma^0 = \psi^+\gamma^0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\, i\alpha\,\gamma_5)^n = \bar{\psi}\exp(\, i\alpha\,\gamma_5)$

Таким образом, киральные преобразования

$$\begin{cases}\psi \to \exp(\, i\alpha\,\gamma_5)\,\psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}\exp(\, i\alpha\,\gamma_5)\end{cases}$$

$$\bar{\psi}\,\psi \to \bar{\psi}\exp(2\, i\alpha\,\gamma_5)\,\psi \neq \bar{\psi}\,\psi$$

Следовательно, нет симметрии, если $m \neq 0$.

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi \to \bar{\psi}\exp(\, i\alpha\,\gamma_5)\gamma^\mu\exp(\, i\alpha\,\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi = \bar{\psi}\,\gamma^\mu\exp(\, -i\alpha\,\gamma_5)\exp(\, i\alpha\,\gamma_5)\,\mathcal{D}_\mu\psi = \\ = \bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi$$

Таким образом, безмассовая электродинамика является инвариантной относительно киральных преобразований.

Киральный ток имеет вид $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$. Покажем, что ток сохраняется.

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi = \left(\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\right)\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5(\gamma^\mu\partial_\mu\psi)$$

Из уравнения Дирака и сопряженного к нему выразим необходимые величины

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi) - m\psi = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$i(\partial_\mu\bar{\psi} - ieA_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0$$

$\gamma^\mu\partial_\mu\psi = ieA_\mu\gamma^\mu\psi - im\psi$
$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = -ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + im\bar{\psi}$
$\partial_\mu j_5^\mu = \left(-ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + im\bar{\psi}\right)\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5\left(ieA_\mu\gamma^\mu\psi - im\psi\right) = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi$

Поэтому в случае $m = 0$ $\partial_\mu j_5^\mu = 0$. Такой закон сохранения верен только в классической теории. На квантовом уровне этот закон сохранения нарушается квантовыми поправками.
Если классический закон сохранения нарушается радиационными поправками на квантовом уровне (квантовыми поправками), то это называется *аномалией.*

На квантовом уровне этот закон сохранения тока

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial im\bar{\psi}\gamma_5\psi + \underbrace{\frac{e^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}}_{\text{аномалия}}$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ