



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ФОМЕНКО
АНАТОЛИЙ ТИМОФЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ



Содержание

Лекция 1	7
1. Псевдоевклидово пространство	7
Рекомендуемая литература	7
Напоминание о свойствах \mathbb{R}^n	7
Псевдоевклидово пространство	8
Примеры псевдоевклидовых пространств	9
Случай \mathbb{R}_1^2	9
Случай \mathbb{R}_1^3	10
Случай \mathbb{R}_1^4	11
Стереографическая проекция псевдосферы	12
Примеры геометрий	15
Лекция 2	18
2. Криволинейные координаты и риманова метрика	18
Длина кривой в евклидовой системе координат	18
Простейшие примеры криволинейных систем координат	21
Общие понятия криволинейные системы координат	23
Простейшие примеры криволинейных систем координат	26
k -мерные гладкие поверхности	28
k -мерное глобальное многообразие	29
Простейшие примеры поверхностей	30
Лекция 3	31
3. Римановы метрики и многообразия	31
Простейшие примеры поверхностей	31
Понятие римановой метрики в области евклидова пространства	31
Длина кривой в криволинейной системе координат в области в \mathbb{R}^n	34
Определение индуцированной римановой метрики	37
Лекция 4	39
4. Основные примеры римановых метрик. Группы изометрий римановых метрик	39
Пример. Случай сферы	39
Различные виды метрики Лобачевского	43
Сравнение метрики сферы и метрики Лобачевского	44
Комплексная запись метрик сферы и Лобачевского	44
Группы изометрий, или группы движений римановых метрик	46
Лекция 5	48

5. Группы изометрий римановых метрик	48
Изометрия двух многообразий	48
Изометрии на многообразии	49
Примеры групп изометрий для некоторых метрик	49
Группа изометрий евклидовой плоскости	49
Группа изометрий псевдоевклидовой плоскости	50
Группа изометрий двумерной сферы	50
Теорема о гомеоморфности группы $SO(3)$ пространству $\mathbb{R}P^3$	51
Изометрии метрик Лобачевского	52
 Лекция 6	 55
6. Метрика Лобачевского. Элементы теории плоских кривых	55
Теорема о метрике Лобачевского	55
Матричный вид группы преобразований	55
Можно ли вложить плоскость Лобачевского в \mathbb{R}^3 ?	56
Многообразия. Атлас	58
Элементы теории плоских кривых	60
Формулы Френе	61
 Лекция 7	 63
7. Элементы теории плоских кривых	63
Формулы Френе	63
Элементы теории пространственных кривых	64
Кривизна плоской кривой в произвольной параметризации	66
Натуральное уравнение плоской кривой	67
Примеры гладких многообразий	69
Геометрический смысл теоремы о неявной функции	69
 Лекция 8	 73
8. Гладкие многообразия и подмногообразия	73
Гладкое подмногообразие	73
Примеры гладких многообразий	74
Понятие касательного вектора	75
Следствия	77
Погружения и вложения гладких многообразий	78
 Лекция 9	 80
9. Теорема Уитни о вложении гладких многообразий	80
Теорема Уитни	80
Ориентируемые многообразия	84
Классификация двумерных гладких поверхностей	86
Шаг 1	86
Шаг 2	88

Шаг 3	88
Лекция 10	90
10.Классификация двумерных гладких поверхностей	90
Классификация двумерных гладких поверхностей	90
Шаг 4	90
Шаг 5	90
Шаг 6	92
Шаг 7	92
Шаг 8	93
Шаг 9	93
Шаг 10	94
Связная сумма многообразий	94
Лекция 11	98
11.Классификация двумерных гладких поверхностей	98
Вклейка пленки Мебиуса	98
Бутылка Клейна	99
Ориентируемость многообразий	102
Гладкое погружение	104
Теорема классификации двумерных поверхностей	104
Минимальная триангуляция	105
Задачи	107
Лекция 12	108
12.Первая и вторая квадратичные формы поверхности	108
Первая квадратичная форма поверхности	108
Вторая квадратичная форма поверхности	110
Инварианты пары форм	112
Явный вид второй формы	113
Теория плоских сечений гиперповерхности	114
Формула Эйлера	116
Лекция 13	117
13.Классификация двумерных гладких поверхностей	117
Гауссова кривизна двумерных поверхностей	117
Средняя кривизна двумерных поверхностей	119
Минимальные поверхности	120
Примеры минимальных поверхностей	120
Гиперплоскость	120
Мыльные пленки	121
Геликоид	121
Катеноид	121

Минимальные и гармонические поверхности	122
Лекция 14	126
14. Алгебраические функции. Римановы поверхности алгебраических функций. Топология римановых поверхностей	126
Сведения из геометрии комплексной плоскости	126
Комплексный вариант теоремы о неявных функциях	126
Риманова поверхность в \mathbb{R}^4	127
Основные свойства алгебраических функций	128
Топология пополненной римановой поверхности	130
Лекция 15	133
15. Элементы теории Морса	133
Определение функции Морса	133
Функции Морса на многообразии	133
Теорема существования функции Морса	134

Лекция 1

1. Псевдоевклидово пространство

Рекомендуемая литература

- 1) А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко «Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии».
- 2) А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко «Курс дифференциальной геометрии и топологии» (источник иллюстраций).
- 3) А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев, А.Т.Фоменко «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии».
- 4) Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко «Современная геометрия».
- 5) А.Т.Фоменко «Дополнительные главы дифференциальной геометрии и топологии».

Напоминание о свойствах \mathbb{R}^n

Начнем с напоминания о свойствах евклидова пространства \mathbb{R}^n . Базисные векторы обозначим e_1, \dots, e_n , координаты векторов обозначим $a = (a^1, \dots, a^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$. Сразу договоримся, что индексы у векторов пишем внизу, а индексы у координат векторов пишем наверху. В дальнейшем это соглашение будет нам удобно при записи формул и тензорных законов.

Определение 1. *Евклидовым скалярным произведением* называется билинейная форма

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i.$$

Свойства этой формы:

- 1) Билинейность

$$\langle \lambda a + \mu b, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle + \mu \langle b, c \rangle.$$

- 2) Симметричность $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$.

- 3) Невырожденность и положительная определенность

$$\langle a, a \rangle \geq 0 \text{ и } \langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0.$$

Псевдоевклидово пространство

По аналогии определим новый объект — псевдоевклидово n -мерное пространство индекса s . Обозначим его через \mathbb{R}_s^n . Оно задается следующей билинейной формой:

$$\langle a, b \rangle_s = - \sum_{i=1}^s a^i b^i + \sum_{j=s+1}^n a^j b^j; \quad 0 \leq s \leq n.$$

Ясно, что $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}$. Свойства этой новой формы таковы:

- 1) Билинейность.
- 2) Симметричность.
- 3) Невырожденность, но положительной определенности уже нет, если $s \neq 0, n$. Эта форма индефинитна.

$$\langle a, a \rangle_s = - \sum_{i=1}^s (a^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (a^j)^2.$$

Существуют векторы $\vec{a} \neq 0$, для которых $\langle a, a \rangle_s = 0$. Они образуют «конус» в \mathbb{R}_s^n .

Замечание 1. Изучение пространств \mathbb{R}_{n-s}^n сводится в некотором смысле к изучению пространств \mathbb{R}_s^n , поскольку все длины в \mathbb{R}_{n-s}^n можно умножить на i (мнимая единица); тогда форма \langle, \rangle_{n-s} превращается в форму \langle, \rangle_s . Поэтому будем для простоты считать, что выполнено неравенство $s \leq [n/2]$ (целая часть).

Как и в обычном евклидовом пространстве, длина вектора ξ в пространстве \mathbb{R}_s^n определяется по формуле: $|\xi|_s = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_s}$, однако в \mathbb{R}_s^n , в отличие от \mathbb{R}^n , длины векторов могут быть нулевыми и мнимыми. В самом деле, так как форма \langle, \rangle_s не является положительно определенной, то множество всех векторов $\xi \in \mathbb{R}_s^n$, выходящих, например, из начала координат, разбивается на следующие три непересекающиеся подмножества: $\langle \xi, \xi \rangle_s < 0$ (времени-подобные векторы), $\langle \xi, \xi \rangle_s = 0$ (световые или *изотропные* векторы), $\langle \xi, \xi \rangle_s > 0$ (пространственно-подобные векторы). Это обстоятельство вызывает появление векторов, имеющих нулевую, вещественную и чисто мнимую длину. В самом деле, времени-подобные векторы имеют чисто мнимую длину, световые (изотропные) — нулевую длину, а пространственно-подобные — вещественную длину. Эти три типа векторов отделены друг от друга и с точки зрения их расположения в пространстве. Опишем это распределение для векторов, выходящих из начала координат. Из определения видно, что изотропные векторы заполняют конус

$$- \sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0$$

с вершиной в начале координат; времени-подобные векторы расположены «внутри» конуса, т.е. в его полости, определяемой координатной плоскостью (x^1, \dots, x^s) , а пространственно-подобные векторы расположены вне светового конуса. Уже одно это обстоятельство показывает, что индефинитная метрика определяет значительно более разнообразную геометрию (в метрическом смысле), чем евклидова метрика.

Замечание 2. В пространстве Минковского (в специальной теории относительности) \mathbb{R}_1^4 изотропный конус целиком состоит из так называемых «световых векторов» ξ (т.е. $\langle \xi, \xi \rangle_1 = 0$) и называется световым конусом, так как луч света, выпущенный из начала координат, будет распространяться по одной из образующих этого конуса (в предположении, что в качестве координаты x^1 выбран параметр ct , где c — постоянная, обозначающая скорость света).

Примеры псевдоевклидовых пространств

Рассмотрим псевдоевклидово пространство \mathbb{R}_s^n индекса s . В евклидовом пространстве \mathbb{R}^n сфера S^{n-1} (гиперсфера) может быть определена как множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ . В псевдоевклидовом пространстве также можно рассмотреть множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ (но только теперь число ρ может быть не только вещественным, но также чисто мнимым или нулем). Это множество точек мы будем называть *псевдосферой* индекса s и обозначать через S_s^{n-1} . Ясно, что $S_0^{n-1} = S^{n-1}$. В дальнейшем будем различать псевдосферы вещественного, мнимого и нулевого радиусов. Псевдосфера нулевого радиуса описывается уравнением второго порядка

$$-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0$$

где x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , на котором мы и моделируем псевдоевклидово пространство \mathbb{R}_s^n . Очевидно, что псевдосфера нулевого радиуса совпадает с изотропным (нулевым) конусом.

Случай \mathbb{R}_1^2

Пусть $n = 2, s = 1$. Изотропный конус состоит из двух прямых: $x = \pm y$ (мы рассматриваем двумерную плоскость \mathbb{R}^2 , отнесенную к декартовым координатам x, y , и на этой плоскости мы моделируем псевдоевклидову геометрию). Этот конус разбивает \mathbb{R}^2 на две области: в одной из них $\langle \xi, \xi \rangle_1 > 0$ (это область, определяемая

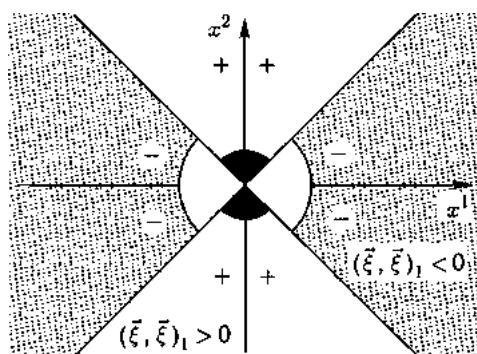


Рис. 1.1

неравенством $|y| > |x|$), в другой $\langle \xi, \xi \rangle_1 < 0$ (это область, определяемая неравенством $|y| < |x|$) (рис. 1.1). Псевдосферы вещественного радиуса — это гиперболы:

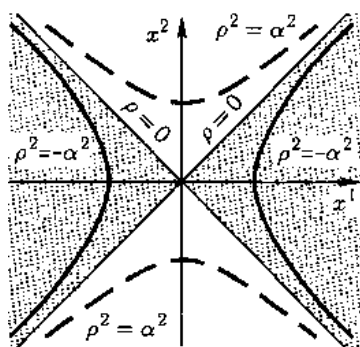


Рис. 1.2

$-x^2 + y^2 = \alpha^2$, где α — вещественное число. Псевдосферы мнимого радиуса — это гиперболы: $-x^2 + y^2 = -\alpha^2$ (рис. 1.2).

Случай \mathbb{R}_1^3

Пусть теперь $n = 3, s = 1$. Изотропный конус (псевдосфера нулевого радиуса)

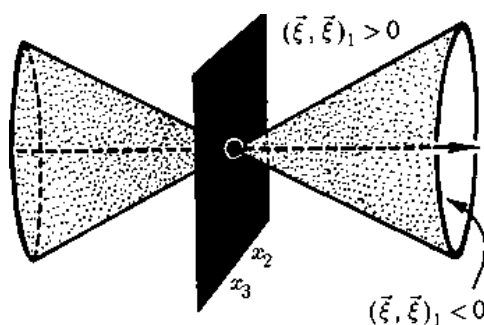


Рис. 1.3

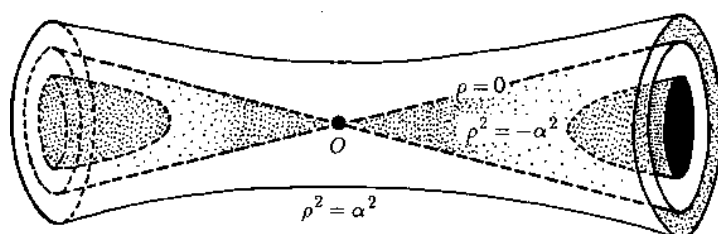


Рис. 1.4

— это обычный конус второго порядка, задаваемый уравнением: $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Он также разбивает все пространство на две области (в данном случае, пользуясь привычными терминами, можно сказать «разбивает на внутреннюю» и «внешнюю области») (рис. 1.3).

Псевдосферы вещественного радиуса — это однополостные гиперболоиды $-x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$. Псевдосферы мнимого радиуса — это двухполостные гиперболоиды: $-x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2$ (рис. 1.4).

Случай \mathbb{R}_1^4

Большую роль в истории развития науки сыграло пространство \mathbb{R}_1^4 , введенное для более удобной записи некоторых эффектов специальной теории относительности. Отнесем пространство \mathbb{R}_1^4 к координатам $x^0 = ct$, $x_1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, т.е.

$$dl^2 = -c^2 dt + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Здесь t — время, c — скорость света. Рассмотрим в \mathbb{R}_1^4 орторепер e_1, e_2, e_3, e_4 (относительно евклидовой метрики \mathbb{R}^4 , которой снабжена модель пространства \mathbb{R}_1^4 , совмещенная в целях наглядности изложения с евклидовым четырехмерным пространством). Рассмотрим так называемую «мировую линию» какой-нибудь материальной частицы $\gamma(\tau)$; эта линия является гладкой траекторией в пространстве \mathbb{R}_1^4 .

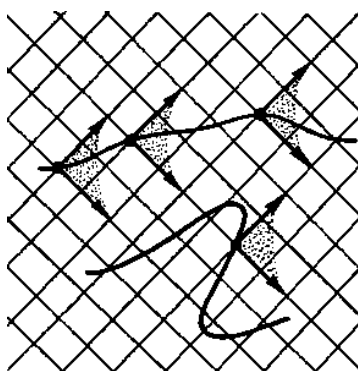


Рис. 1.5

Если координаты x, y, z трактовать как пространственные координаты, то тогда движение частицы по этой траектории $\gamma(\tau)$ можно интерпретировать как эволюцию в пространстве и во времени некоторой материальной точки, перемещающейся в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть (cdt, dx, dy, dz) — координаты \vec{a} — бесконечно малого вектора смещения вдоль траектории $\gamma(\tau)$ в направлении касательного вектора $\dot{\gamma}(\tau)$. Имеем

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_1 = -c^2 dt + dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dt)^2(-c^2 + |v|^2)$$

Тогда поскольку в специальной теории относительности принимается постулат, согласно которому никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света c , то

$$cdt > \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

Иными словами, длина любого пути оценивается сверху тем расстоянием, которое успеет за данный промежуток времени пройти луч света. Отсюда мы получаем, что вдоль мировой линии $\gamma(\tau)$ любой материальной частицы всегда выполнено соотношение $-c^2 dt + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0$, т.е. $\langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle_1 < 0$. Это означает, что каждый

касательный вектор к мировой линии является времени-подобным вектором. Отсюда следует также, что мировая линия материальной частицы всегда имеет чисто мнимую длину. В частности, мировая линия целиком распространяется строго внутри светового (изотропного) конуса, имеющего своей осью прямую, параллельную оси t . Это условие должно выполняться в каждой точке мировой линии (рис. 1.5). Напомним, что изотропный конус определен в каждой точке псевдоевклидова пространства. К более подробному изучению геометрии пространства Минковского мы вернемся в следующих лекциях.

Стереографическая проекция псевдосферы

Вспомним, как устроена проекция стандартной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Буквами N и S обозначают соответственно северный и южный полюс. Возникает стереографическое отображение $f : S^2/N \rightarrow \mathbb{R}^2(x, y)$.

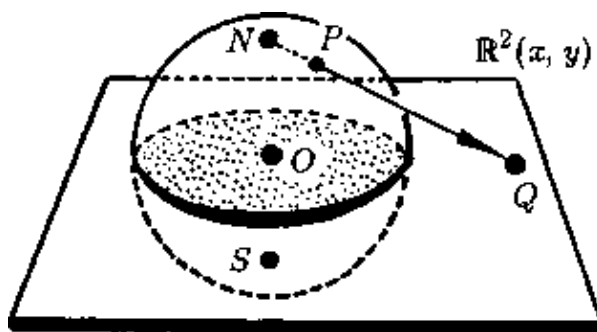


Рис. 1.6

Рассмотрим теперь \mathbb{R}_1^3 , которое снова будем моделировать в пространстве \mathbb{R}^3 ; через x, y, z будем обозначать декартовы координаты в \mathbb{R}^3 ; тогда

$$\langle \xi, \xi \rangle_1 = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Рассмотрим псевдосферу мнимого радиуса. Это — двухполостный гиперboloид, задаваемый уравнением: $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Пусть теперь точка P имеет декартовы координаты (x, y, z) (где $x > 0$) и пусть (u^1, u^2) — декартовы координаты точки $f(P)$, где отображение f — стереографическая проекция. Найдем формулы, связывающие эти координаты.

Теорема 1. Пусть $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u^1, u^2)$. Тогда

$$x = \alpha \cdot \frac{|u|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |u|^2}, \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |u|^2}, \quad z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |u|^2},$$

где $|u|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$; $u = (u^1, u^2)$.

Доказательство. Из рис. 1.7 следует:

$$\frac{y}{u^1} = \frac{x + \alpha}{\alpha}; \quad \frac{z}{u^2} = \frac{x + \alpha}{\alpha} \implies y = u^1 \frac{x + \alpha}{\alpha}; \quad z = u^2 \frac{x + \alpha}{\alpha}.$$

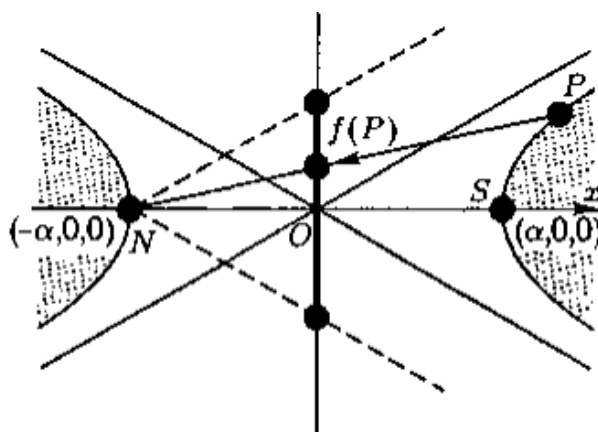


Рис. 1.7

Так как $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то

$$-\alpha^2 = -x^2 + ((u^1)^2 + (u^2)^2) \frac{(x + \alpha)^2}{\alpha^2};$$

далее (поскольку $(x - \alpha) > 0$):

$$x - \alpha = \frac{x + \alpha}{\alpha^2} \cdot |u|^2 \implies x = \alpha \cdot \frac{|u|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |u|^2}.$$

Теорема доказана. □

Вернемся теперь к псевдоевклидовой геометрии и к геометрии, которую она индуцирует на псевдосфере мнимого радиуса. При стереографической проекции

$$f : +S_1^2 \longrightarrow \{y^2 + z^2 < \alpha^2\} = D^2$$

(где через $+S_1^2$ мы обозначаем правую полость гиперboloида) точки гиперboloида переходят во внутренние точки двумерного диска D^2 радиуса α . В какие кривые на круге D^2 перейдут «прямые» нашей геометрии на гиперboloиде, т.е. линии пересечения его с плоскостями $\gamma = \mathbb{P}^2 \cap S_1^2(i\alpha)$, проходящими через центр псевдосферы — точку O (т.е. аналоги экваторов на сфере)?

Теорема 2. Каждая линия пересечения $+S_1^2$ с плоскостью вида $ax + by + cz = 0$ переходит при отображении f в дугу окружности, пересекающую окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ под прямым углом.

Доказательство. Напомним, что углом между пересекающимися гладкими кривыми мы называем угол между их векторами скоростей в точке пересечения. В силу леммы 1 для выяснения того, в какую кривую переходит прямая на $+S_1^2$, достаточно подставить в уравнение плоскости $ax + by + cz = 0$ явные выражения переменных x, y, z как функций от переменных u^1, u^2 . Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда уравнение

$$a\alpha \frac{|u|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |u|^2} + \frac{2b\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |u|^2} + \frac{2c\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |u|^2} = 0$$

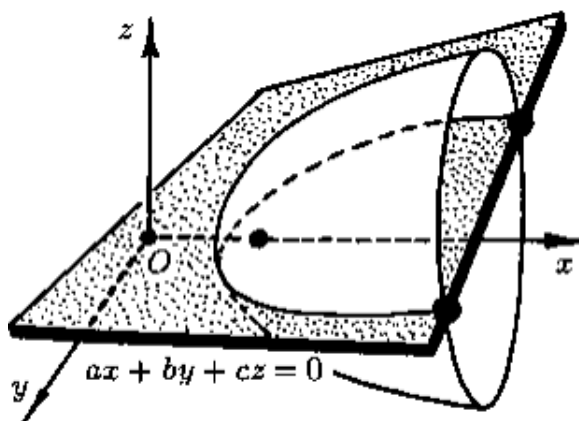


Рис. 1.8

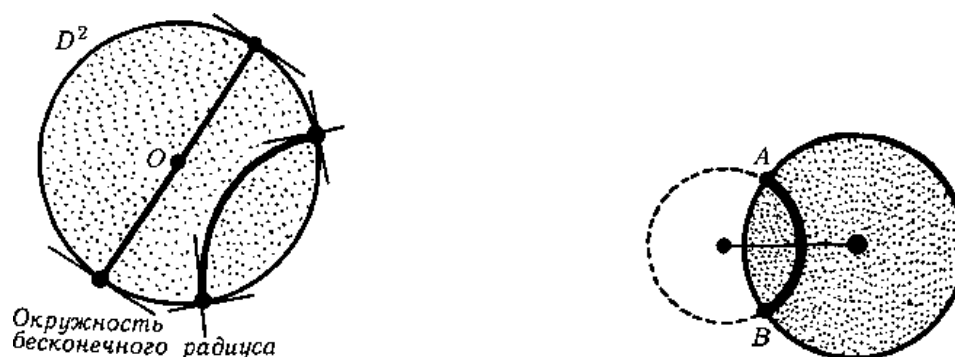


Рис. 1.9

после элементарных алгебраических преобразований приводится к виду

$$\left(u^1 + \frac{b\alpha}{a}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{c\alpha}{a}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}(b^2 + c^2 - a^2),$$

т.е. определяет окружность с центром в точке $\left(-\frac{b\alpha}{a}, -\frac{c\alpha}{a}\right)$, радиуса

$$\frac{\alpha}{a}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} = r,$$

пересекающую окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ в точках A и B под углом $\pi/2$ (рис. 1.9). Тот факт, что угол в точках пересечения равен $\pi/2$, вытекает из очевидного соотношения

$$\alpha^2 + r^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Отметим, что «прямой» из $+S_1^2$ при отображении f является не вся окружность

$$\left(u^1 + \frac{b\alpha}{a}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{c\alpha}{a}\right)^2 = r^2,$$

а только та ее часть, которая содержится в круге $y^2 + z^2 < \alpha^2$. □

Примеры геометрий

Напомним, что «задать геометрию» означает описать два класса объектов: точки и прямые, а также, как эти два класса взаимодействуют.

- 1) Евклидова геометрия. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 . «Точки» этой геометрии — это обычные точки плоскости, «прямые» — обычные прямые на плоскости. В этой геометрии выполняются пять постулатов. Два из них нам будут наиболее важны:

- через две различные точки проходит ровно одна прямая
- через точку, взятую вне прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной

- 2) Сферическая или эллиптическая геометрия. Рассмотрим сферу S^2 . «Точки» геометрии — точки этой сферы. «Прямые» — экваторы сферы.

Ясно, что через каждую пару не диаметрально противоположных точек проходит одна и только одна прямая; однако если точки диаметрально противоположны, т.е. вида P и $-P$, то через эти точки проходит бесконечное множество прямых. Кроме того, через точку, расположенную вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, не пересекающейся с исходной прямой, т.е. в этой геометрии на сфере не существует параллельных (т.е. не пересекающихся) прямых.

Однако, объявив «точками» новой геометрии пары диаметрально противоположных точек, $(P, -P)$, на сфере S^2 , мы устраним первый из отмеченных выше «недостатков», а именно — теперь через любую пару точек проходит одна и только одна прямая (если эти точки не совпадают). Это свойство уже аналогично соответствующему свойству в евклидовой геометрии. Эквивалент-

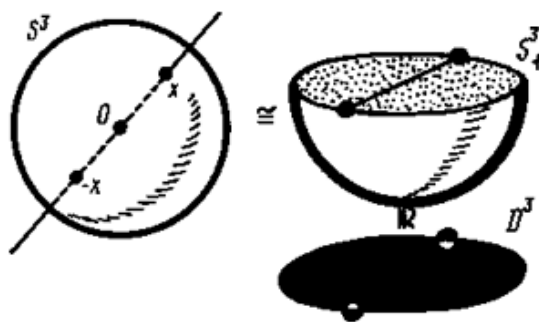


Рис. 1.10

ное определение \mathbb{RP}^2 : рассмотрим точку $0 \in \mathbb{R}^3$ и пучок прямых, проходящих через нее; объявляем «точками» эти прямые. Как устроено соответствие этих двух определений? Если мы рассмотрим сферу S^2 с центром в нуле, то каждая из прямых в пучке однозначно задает и однозначно задается парой точек $(x, -x)$, в которых прямая «протыкает» сферу (рис. 1.10).

Геометрия, возникающая при факторизации сферы S^2 по действию инволюции $\sigma : x \rightarrow -x$, задает проективную плоскость

$$\mathbb{R}P^2 \simeq S^2/\mathbb{Z}_2 \simeq S^2/(x, -x).$$

Элементарно проверяется, что теперь в нашей геометрии выполнены все классические аксиомы Евклида, кроме так называемого пятого постулата, а именно: по-прежнему, через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной, т.е. любые две прямые либо пересекаются в одной точке, либо совпадают. В самом деле, любые два экватора на сфере (не совпадающие) определяют одну и только одну точку $(P, -P)$.

- 3) Геометрия, индуцированная на псевдосфере мнимого радиуса в \mathbb{R}_1^3 совпадает (после подходящей замены координат) с геометрией, возникающей в круге радиуса α на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , если в качестве «точек» этой геометрии взять обычные точки этого круга (без граничных точек), а в качестве «прямых» этой геометрии взять дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом (в частности, «прямыми» являются все диаметры круга, поскольку их можно рассматривать как дуги окружностей бесконечно большого радиуса). Геометрия эта называется геометрией Лобачевского (иногда называют гиперболической геометрией), а ее модель в круге радиуса α на евклидовой плоскости называется моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского. Сам Н. И. Лобачевский построил свою геометрию совсем иным путем, без использования псевдоевклидовых пространств, а непосредственно отталкиваясь от такой формы «пятого постулата», которая предполагала наличие бесконечного множества прямых, параллельных данной. На модели Пуанкаре

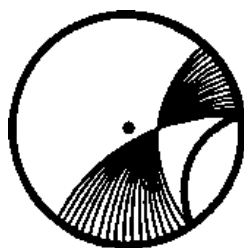


Рис. 1.11

легко проверить все аксиомы (постулаты) Евклида и убедиться, что все они, кроме пятого постулата, справедливы. На рис. 1.11 наглядно показано, что через любую точку, взятую вне прямой, можно провести бесконечное число прямых, параллельных данной (т.е. прямых, не пересекающихся с ней). С точки зрения аксиомы о параллельных, геометрия Лобачевского противоположна эллиптической геометрии. Отметим также, что если устремить параметр α к бесконечности, то в любой конечной области модели Пуанкаре геометрия Лобачевского будет «стремиться» к евклидовой геометрии, так как дуги окружностей начнут распрямляться и превращаться в евклидовы прямые. Граница модели Пуанкаре — окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ — называется *абсолют*ом, на ней

расположены бесконечно удаленные точки плоскости Лобачевского. Иногда при изучении плоскости Лобачевского полагают для простоты $\alpha = 1$.

Замечание 3. Можно было бы рассмотреть геометрию, возникающую на псевдосферах вещественного радиуса в \mathbb{R}_1^3 (т.е. на однополостных гиперboloидах).

В каждой из трех описанных геометрий можно рассмотреть треугольники. Для евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна π . В дальнейшем мы покажем, что сумма углов сферического треугольника $> \pi$, а сумма углов гиперболического треугольника $< \pi$.



Лекция 2

2. Криволинейные координаты и риманова метрика

Длина кривой в евклидовой системе координат

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^n и зададим в нем евклидово скалярное произведение $\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi^i \eta^i$; $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда каждому вектору $\xi \in \mathbb{R}^n$ можно сопоставить вещественное число, называемое его модулем или длиной и определяемое формулой $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Эта формула задает длины векторов, идущих из точки O в некоторую точку $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Если же мы хотим определить расстояние между двумя произвольными точками $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, то следует вычислить длину вектора $\xi - \eta$. Как известно из аналитической геометрии, угол φ между двумя векторами $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, также может быть выражен через скалярные произведения по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi| \cdot |\eta|}.$$

Кроме длин прямолинейных отрезков в евклидовом пространстве нужно уметь вычислять длины гладких кривых. Для этого зададим кривую $\gamma(t)$ в параметрическом виде, т.е.

Определение 2. Будем считать, что *гладкая кривая* задана в евклидовом пространстве набором n гладких функций $x^1(t), \dots, x^n(t)$, где параметр (время) пробегает либо всю вещественную ось, либо (этот случай будет для нас особенно важен) отрезок $[a, b]$.

При этом мы считаем, что x^1, \dots, x^n являются декартовыми координатами в \mathbb{R}^n . В дальнейшем все функции будут гладко, и упоминание об этом условии мы будем опускать.

Определение 3. Рассмотрим вектор $\dot{\gamma}(t)$ с координатами

$$\left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx^n(t)}{dt} \right),$$

называемый иногда *вектором скорости* кривой $\gamma(t)$ в точке t , или *касательным вектором* к кривой $\gamma(t)$. Кривая называется *регулярной*, если $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t$.

Замечание 4. Отметим также, что наличие на гладкой кривой точки излома (в тех значениях параметра, для которых вектор скорости аннулируется) отнюдь не противоречит гладкости кривой (см. определение гладкой кривой).

Пример гладкой кривой, имеющей излом в одной точке, показан на рис. 2.1; здесь «угол излома» гладкой кривой в особой точке равен $\pi/2$. Однако эта кривая не аналитическая. Легко построить пример гладкой кривой, имеющей в особой точке угол излома, равный π (рис. 2.2). Кроме того, если кривая аналитическая, то изломы имеют только данный вид.

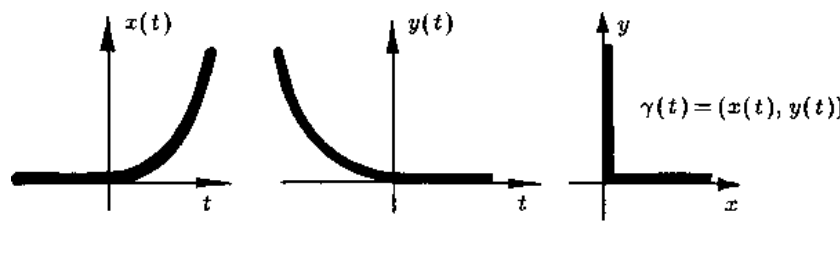


Рис. 2.1



Рис. 2.2

Определение 4. Длиной кривой $\gamma(t)$ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ (или от значения параметра $t = a$ до значения параметра $t = b$) называется число

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

где $\dot{\gamma}(t)$ — вектором скорости кривой $\gamma(t)$ в точке t .

Таким образом, мы назвали длиной кривой интеграл от длины ее вектора скорости (или от модуля ее вектора скорости). В явном виде формула для длины кривой приобретает вид

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \right)^2} dt.$$

Теорема 3. Пусть задана гладкая кривая $\gamma(t)$ и на ней фиксированы две точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, отвечающие значениям параметра $t = a$ и $t = b$. Пусть $t = t(\tau)$ — произвольная гладкая замена параметра t на новый параметр τ , причем $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Тогда длина кривой $l(\gamma(t))_a^b$ не изменится, т.е. имеет место равенство $l(\gamma(t))_a^b = l(\gamma(\tau))_\alpha^\beta$, где $a = t(\alpha)$, $b = t(\beta)$. Иными словами, при монотонной замене параметра, длина кривой не меняется.

Доказательство. Прямое вычисление дает:

$$\begin{aligned} l(\gamma(t))_a^b &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t \rangle} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \frac{dt}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle} \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle} d\tau, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Пусть теперь заданы две гладкие кривые, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$, пересекающиеся в некоторой точке P евклидова пространства, т.е. существуют такие значения параметров $t = a$ и $\tau = b$, что $P = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$. Определим угол между двумя кривыми в точке их

Определение 5. Углом между двумя пересекающимися гладкими траекториями $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$ в точке их пересечения $P = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$ называется угол φ , определяемый равенством:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \dot{\gamma}_1(a), \dot{\gamma}_1(b) \rangle}{|\dot{\gamma}_1(a)| \cdot |\dot{\gamma}_1(b)|},$$

если только оба вектора скорости $\dot{\gamma}_1(a)$ и $\dot{\gamma}_1(b)$, отличны от нуля в точке P .

Замечание 5. Строго говоря, это равенство определяет не один угол, а два угла, дающих в сумме угол, равный π ; однако если считать, что наши кривые занумерованы, то тогда возникает понятие ориентированного угла, который уже определяется приведенной выше формулой однозначно.

Остановимся также на требовании, чтобы оба вектора скорости были отличны от нуля в точке пересечения. Дело в том, что в точках, где вектор скорости гладкой кривой обращается в нуль, эта кривая может претерпевать излом, скачком меняя направление своего движения.

Таким образом, при попытке определить угол в точке пересечения с такой кривой, возникает неопределенность в выборе одного из двух гладких кусков кривой, которые разделяет точка излома (рис. 2.3).

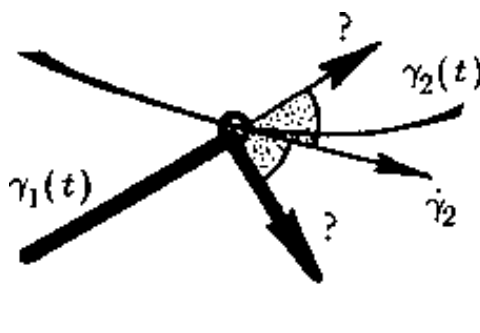


Рис. 2.3

- 1) Пусть кривая $\gamma(t)$ задается линейными функциями $x^i(t) = \alpha^i t$, где $\alpha^i = \text{const}$, $1 \leq i \leq n$, $a \leq t \leq b$. Тогда, вычисляя длину этой гладкой кривой от значения параметра $t = a$ до $t = b$, получаем:

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2} dt = (b - a) \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2}.$$

Поскольку начальной точкой отрезка является точка с координатами $\{\alpha^i a\}$, а его конечной точкой — точка $\{\alpha^i b\}$, то обычная (евклидова) длина отрезка

равна

$$(b - a) \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2},$$

что совпадает со значением интеграла $l(\gamma)_a^b$.

- 2) Пусть окружность задается на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Непосредственный подсчет интеграла дает $l(\gamma)_a^b = 2\pi R$, где $a = 0$, $b = 2\pi$, что, очевидно, совпадает с известным выражением для длины окружности радиуса R .

Простейшие примеры криволинейных систем координат

- 1) *Полярная система координат.* Рассмотрим функции замены координат от полярной системы к декартовой системе. Эти функции таковы: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Укажем (не вдаваясь пока в подробности) на одну задачу, в которой использование полярных координат является полезным. Рассмотрим

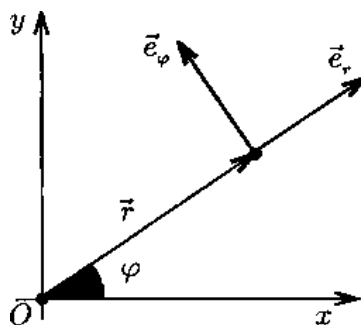


Рис. 2.4

движение материальной точки на плоскости в центральном поле сил. Пусть центр находится в точке O и на плоскости введены полярные координаты (r, φ) . Пусть \vec{r} — радиус-вектор движущейся точки (радиус-вектор выходит из точки O), r — его длина, t — время (параметр движения); тогда координаты r и φ будут какими-то функциями времени.

Рассмотрим в точке $\vec{r}(t)$, имеющей полярные координаты $r = |\vec{r}|$, φ , два единичных ортогональных вектора: вектор e_r , направленный по радиус-вектору точки (отметим, что при этом выполнено соотношение $\vec{r} = r \cdot e_r$), и вектор e_φ , ортогональный вектору e_r и направленный в сторону увеличения полярной координаты φ (рис. 3.3). Точкой будем обозначать дифференцирование радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t . Тогда, как известно из механики, движение материальной точки (будем считать для простоты, что ее масса равна 1)

в центральном поле сил на плоскости определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r,$$

где f — некоторая гладкая функция от одного аргумента r .

Движение нашей материальной точки можно задать в виде двух функций:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

т.е. в полярной системе координат. Довольно легко убедиться в том, что при движении материальной точки в центральном поле сил сохраняется величина $r^2\dot{\varphi}$. Это есть один из законов Кеплера, которые он открыл, изучая движение планет в Солнечной системе (в его распоряжении уже были таблицы, указывающие координаты планет на небесной сфере как функции времени).

Этой сохраняющейся величине может быть придан довольно прозрачный геометрический смысл. А именно, если рассмотреть малые перемещения на $\Delta\varphi$, то площадь сектора $\Delta s = \frac{1}{2}r \cdot r\Delta\varphi = r^2\Delta\varphi$, где за r мы принимаем высоту соответствующего треугольника, а за $r\Delta\varphi$ — его основание. Сам Кеплер ввел для этого следующее удобное понятие: он назвал секториальной скоростью v скорость изменения площади $s(t)$, заметаемой радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}(t)$ (радиус-вектор есть функция времени), т. е.

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

В терминах секториальной скорости закон Кеплера формулируется так: в равные времена радиус-вектор заметает равные площади, иными словами, секториальная скорость постоянна: $\frac{ds(t)}{dt} = \text{const}$. Можно также показать (мы здесь не будем на этом останавливаться), что это — одна из формулировок закона сохранения момента импульса.

- 2) *Цилиндрическая система координат.* Формулы замены следующие:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = t.$$

(рис. 3.4).

- 3) *Сферическая система координат.* Для трехмерного евклидова пространства сферические координаты обычно обозначаются через (r, θ, φ) ; в этих обозначениях формулы замены приобретают вид (рис. 3.4):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta$$

$$(0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, r \geq 0).$$

Угловые параметры θ, φ иногда называются широтой и долготой (дают координатную сетку на глобусе).

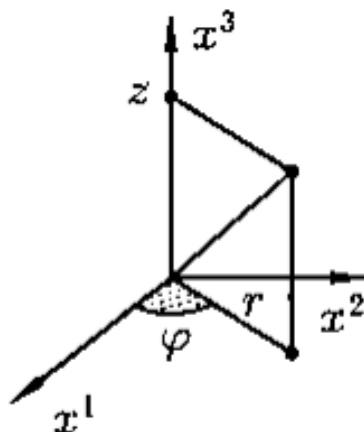


Рис. 2.5

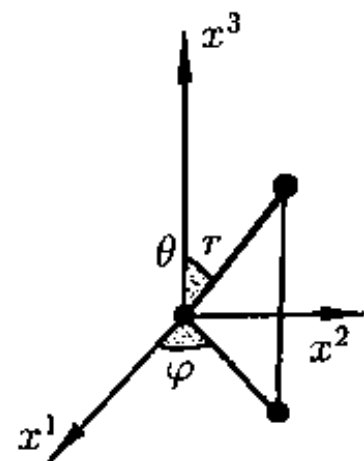


Рис. 2.6

Общие понятия криволинейные системы координат

Рассмотрим произвольную область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Напомним, что, как и в курсе анализа, мы называем областью произвольное множество V в евклидовом пространстве, каждая точка P которого входит в это множество вместе с некоторым шаром достаточно малого радиуса, имеющим точку P своим центром. Рассмотрим второй экземпляр евклидова пространства, который обозначим через \mathbb{R}_1^n . Задать координаты точки P в области V — значит сопоставить этой точке набор чисел, которые и можно будет назвать координатами.

Итак, рассмотрим два экземпляра евклидова пространства: \mathbb{R}^n с декартовыми координатами y^1, \dots, y^n и \mathbb{R}_1^n с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n ; пусть V — область в \mathbb{R}^n .

Замечание 6. Евклидово пространство \mathbb{R}_1^n можно было бы считать «арифметическим пространством», отождествив его точки с последовательностями длины n , составленными из вещественных чисел.

Определение 6. *Непрерывной системой координат* в области V евклидова пространства \mathbb{R}^n называется система функций $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$, задающих взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны отображение области V на некоторую область U в евклидовом пространстве \mathbb{R}_1^n . Иными словами, эта система функций $x^1(P), \dots, x^n(P)$ задает отображение, называемое гомеоморфизмом области V на область U (о понятии гомеоморфизма мы, впрочем, будем говорить позже). Области V и U называют в таком случае *гомеоморфными*.

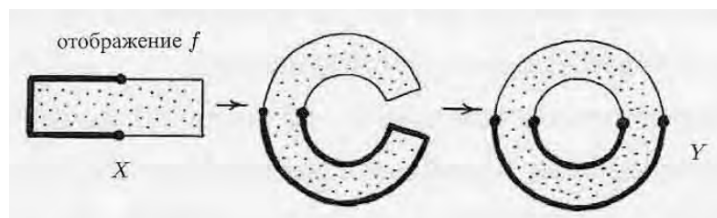


Рис. 2.7

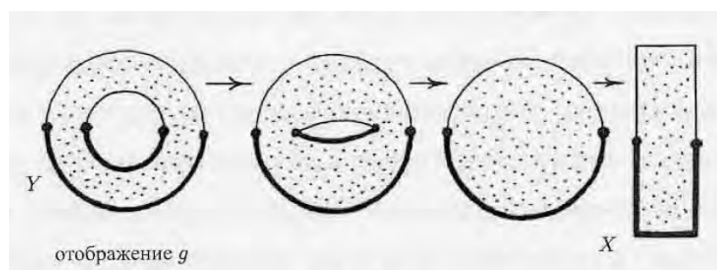


Рис. 2.8

Пример 1. В заключение вернемся к понятию гомеоморфизма f и поясним, почему важно требовать непрерывности как f , так и обратного отображения f^{-1} . Приведем пример двух топологических и негомеоморфных пространств X и Y , для которых существует два отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$, которые оба непрерывны и взаимно-однозначны (но $g \neq f^{-1}$). В качестве X возьмем пространство, получающееся из открытого прямоугольника на плоскости путем присоединения к нему «половины его границы», как показано на рис. 2.7. В качестве Y возьмем пространство, получающееся из открытого плоского кольца присоединением «половины его границы», как показано на рис. 2.7. Отображения f и g , показанные на рис. 2.8, очевидно непрерывны и взаимно-однозначны. Но они не взаимно-обратны. Пространства X и Y негомеоморфны (докажите!)

Определение 6 формализует наше желание, чтобы при непрерывном изменении точки P из области V набор ее координат также менялся непрерывно. Функции $x^1(P), \dots, x^n(P)$ будем называть координатами точки P относительно координатного отображения $f : V \rightarrow U$.

Например, в качестве координатного отображения $f : V \rightarrow U$ можно взять тождественное отображение, задаваемое линейными функциями

$$x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n.$$

Иногда будем записывать точку P с ее координатами $x^1(P), \dots, x^n(P)$ в виде $P(x^1, \dots, x^n)$, предполагая, что уже задано и фиксировано координатное отображение $f : V \rightarrow U$.

Определение 7. *Гладкой регулярной системой координат* в области V евклидова пространства \mathbb{R}^n называется система функций $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$, задающих взаимно-однозначное и гладкое в обе стороны отображение области V на некоторую область U в евклидовом пространстве \mathbb{R}_1^n . Иными словами, эта система функций $x^1(P), \dots, x^n(P)$ задает отображение, называемое диффеоморфизмом области V на область U (о понятии гомеоморфизма мы, впрочем, будем говорить позже). Области V и U называют в таком случае *диффеоморфными*.

Пусть $f : V \rightarrow U$ — гладкое отображение, задаваемое набором функций

$$x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n).$$

Определение 8. *Матрицей Якоби* отображения f называется функциональная матрица

$$df = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

составленная из частных производных от координат $x^1(P), \dots, x^n(P)$. Определитель этой матрицы будем обозначать через $J(f)$ и называть якобианом отображения f .

Определение 9. *Регулярной системой координат* в области V евклидова пространства \mathbb{R}^n называется система гладких функций $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$, задающих взаимно-однозначное отображение области V на некоторую область U в евклидовом пространстве \mathbb{R}_1^n , причем таких, что якобиан отображения $J(f)(P)$, отличен от нуля во всех точках области V .

Теорема 4. *Требование отличия от нуля якобиана отображения f во всех точках области V автоматически означает, что отображение f^{-1} , обратное к отображению f , является не только непрерывным, но и гладким. Иными словами, определения 7 и 9 эквивалентны.*

Доказательство. $\boxed{\implies}$ $E = d(f \circ f^{-1}) = df \cdot df^{-1}$. Т.е. отображение невырождено в смысле определения 9.

$\boxed{\impliedby}$ Это следует из теоремы о системе неявных функций. □

Определение 10. Регулярную систему координат в области C будем называть также *криволинейной системой координат* в области C .

Каждая система криволинейных координат в области V определяет семейства так называемых координатных линий, определяемых так: p -ая координатная линия задается уравнением

$$x^1(P) = c_1, x^2(P) = c_2, \dots, x^{p-1}(P) = c_{p-1}, x^p(P) = t, x^{p+1}(P) = c_{p+1}, \dots, x^n(P) = c_n,$$

где все c_p — постоянные, а t — непрерывный параметр.

С изменением t точка P пробегает некоторую гладкую траекторию в области V . Обозначим

$$\gamma_p(t) = x^i = x^i(y_0^1, \dots, y_0^{p-1}, y^p = t, y_0^{p-1}, y_0^n).$$

Таким образом, из каждой точки P области V выходит n гладких траекторий, которые и называются координатными линиями данной системы координат (в точке P). Для другой точки P будет другая система координатных линий, и это семейство координатных линий гладко деформируется при изменении точки P . Например, если система координат — декартова, то ее координатные линии являются прямыми, проходящими через точку P параллельно координатным осям.

В каждой точке P возникает набор из n векторов a_1, \dots, a_n , которые являются векторами скоростей координатных линий

$$a_p = \dot{\gamma}_p(t=0) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^p}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial y^p} \right).$$

Теорема 5. Пусть задана криволинейная система координат. Она является регулярной тогда и только тогда, когда в каждой точке области U векторы скоростей a_i линейно независимы.

Доказательство. Рассмотрим матрицу Якоби

$$df = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

Ее строки — это в точности координаты векторов a_i . Т.е.

$$df = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

т.е. эти векторы линейно независимы. □

Примеры криволинейных систем координат

- 1) *Полярная система координат.* Рассмотрим функции замены координат от полярной системы к декартовой системе. Эти функции таковы: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Полярная система координат (r, φ) на евклидовой плоскости не является регулярной системой координат, определенной на всей плоскости \mathbb{R}^2 . Найдем якобиан $J(f)$ этой замены. Прямое вычисление дает

$$df = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad J(f) = r.$$

Таким образом, якобиан равен нулю в начале координат. Так как декартова система координат x^1, x^2 , очевидно, регулярна (как система координат) на плоскости $\mathbb{R}^2(x^1, x^2)$, то отсюда следует, что полярная система координат не является регулярной. Кроме того, эта система координат не является взаимно однозначным отображением всей двумерной евклидовой плоскости на себя, так как точки вида (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi)$ переходят в одну и ту же точку. Следует выделить ту область V , в которой полярная система координат является регулярной системой координат. Разберем этот пример подробно. Рассмотрим

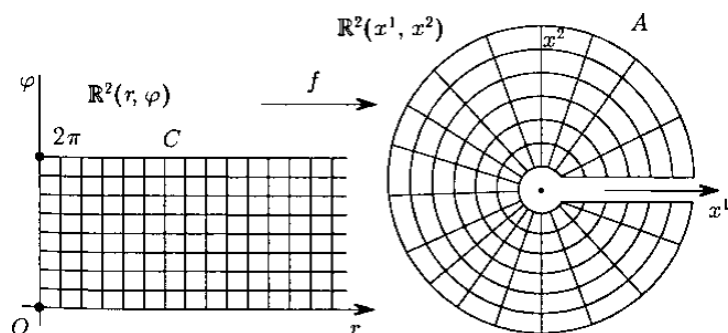


Рис. 2.9

евклидову плоскость $\mathbb{R}^2(r, \varphi)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$. В качестве области V возьмем бесконечную полосу, определяемую неравенствами: $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < r < +\infty$. Тогда в качестве области U в плоскости $\mathbb{R}^2(x^1, x^2)$ следует взять всю двумерную плоскость, за исключением луча $x^1 \geq 0, x^2 = 0$. Отображение $f : V \rightarrow U$ задается формулами: $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$. На рис. 2.9 показано, что происходит с координатными линиями систем координат при отображении f . Прямоугольная сетка декартовых координат превращается в полярную сетку. Взаимная однозначность и регулярность построенного отображения f очевидны.

2) *Цилиндрическая система координат.* Формулы замены следующие:

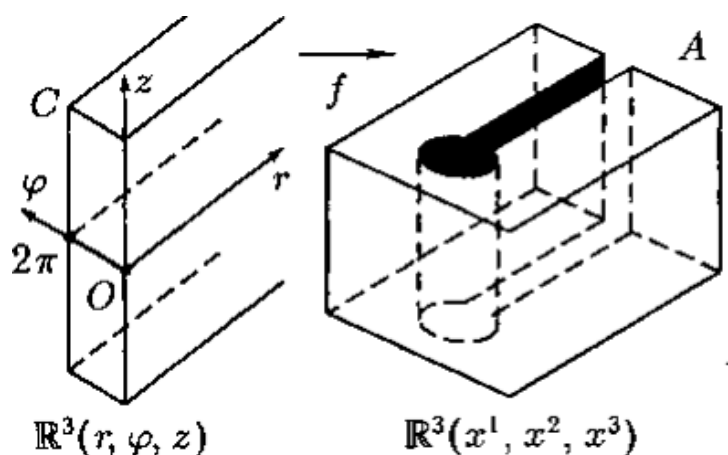


Рис. 2.10

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = t.$$

Рассмотрим $\mathbb{R}^3(y^1, y^2, y^3)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$ и в качестве V возьмем область $(0 < r; 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty)$. Приведенные выше формулы определяют гладкое отображение $f : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$, где область V получается из $\mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$ выбрасыванием полуплоскости $\varphi = 0$, $r \geq 0$ (рис. 2.10).

Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$df = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан замены равен r . Таким образом, в области U цилиндрическая система координат регулярна (якобиан равен нулю только в точках оси z); полуплоскость $\varphi = 0$, $r \geq 0$ исключена для обеспечения взаимно однозначного соответствия.

k -мерные гладкие поверхности

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^k с декартовыми координатами u^1, \dots, u^k и открытый шар $D^k \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^n , $n > k$ с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n и отображение $f : D^k(u) \rightarrow \mathbb{R}^n(x)$.

Определение 11. Будем говорить, что отображение f задает гладкую локальную регулярную поверхность в пространстве \mathbb{R}^n , если оно обладает следующими свойствами:

- 1) f гладко;
- 2) $f : D^k \rightarrow f(D^k) \in \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм;
- 3) ранг (df) равен $k \iff$ касательные векторы к координатным линиям a_1, \dots, a_k линейно независимы.

Будем считать, что $f(D^k) = M^k$. Еще говорят, что f задает параметризацию поверхности.

Замечание 7. Почему мы кроме биекции требуем условия гомеоморфизма? Посмотрим на пример (рис. 2.11), на котором видно, что образ не гомеоморфен интервалу. Мы не хотим ситуации, в которых возникают склейки.

Замечание 8. Если мы положим $k = n$, то получим в точности определение регулярной криволинейной системы координат в \mathbb{R}^n .

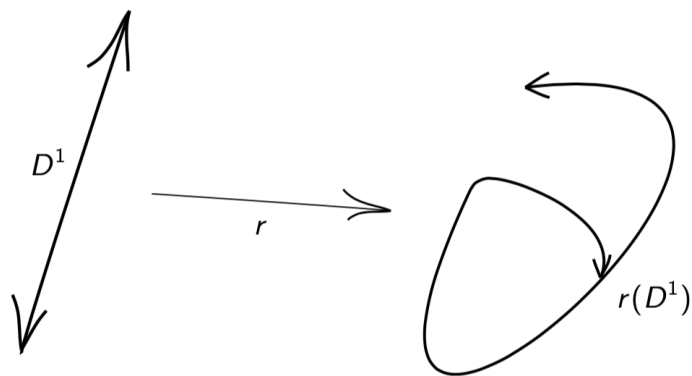


Рис. 2.11

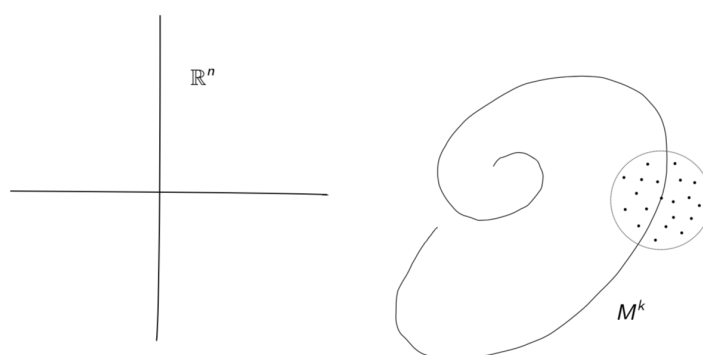


Рис. 2.12

k -мерное глобальное многообразие

Пусть M — некоторое подмножество в \mathbb{R}^n .

Определение 12. Скажем, что подмножество M является k -мерной гладкой поверхностью или k -мерным гладким глобальным подмногообразием, если для каждой точки $P \in M \exists U(P) \in \mathbb{R}^n: M \cap U(P)$ — локальная гладкая поверхность в \mathbb{R}^n (рис. 2.12). Число k — это размерность M^k .

Так как многообразие является гладким, то локально у нас есть гладкая параметризация. В каждой точке возникает набор линейно независимый набор векторов скоростей. Так как эти векторы линейно независимые, то можем рассмотреть линейное пространство $T_P(a_1, \dots, a_n)$ (взяли линейную оболочку векторов a_1, \dots, a_n), где $P \in M^k$.

Определение 13. Плоскость $T_P(a_1, \dots, a_n)$ назовем касательной k -мерной плоскостью к многообразию M^k в точке P .

Простейшие примеры поверхностей

- 1) Рассмотрим пространство \mathbb{R}^2 со сферическими координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Пусть $r = r_0 = \text{const}$. Это уравнение окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.
- 2) Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 с цилиндрическими координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = t$. Пусть $r = r_0 = \text{const}$. Это уравнение цилиндра.

Цилиндр является гладким глобальным многообразием в смысле данного выше определения. В самом деле, рассмотрим точку P . Ее координаты $x = r_0 \cos \varphi$, $y = r_0 \sin \varphi$, $z = t$. Через каждую точку проходят две координатные линии: $\varphi = \text{const}$ (прямая) и $t = \text{const}$ (окружность). Рассмотрим вектора скоростей этих координатных линий. Вектор a_1 касается окружности $t = \text{const}$, а a_2 — вдоль прямой. Очевидно, что a_1 и a_2 ортогональны и отличны от нуля, тогда по определению цилиндр является гладкой двумерной локальной поверхностью в \mathbb{R}^3 (в окрестности точки P). В силу произвольности выбора точки P определение выполняется для любой точки цилиндра, и он является гладким глобальным многообразием.

Лекция 3

3. Римановы метрики и многообразия

Простейшие примеры поверхностей

Рассмотрим координатную линию $r = r_0$.

Утверждение 1. Сфера $S^2 \in \mathbb{R}^3$ является гладким двумерным подмногообразием в \mathbb{R}^3 .

Доказательство. Рассмотрим точку $P \neq N, S$. Получим две координатные линии: параллель $\theta = \theta_0$ и меридиан $\varphi = \varphi_0$. Векторы скоростей этих координатных линий очевидно линейно независимы и отличны от нуля в точке P . Следовательно, в окрестности точки P сфера является локальным подмногообразием. См. рис. 3.1. Рассмотрим точку N . Рассмотрим ортогональный поворот, т.е. вращение сферы

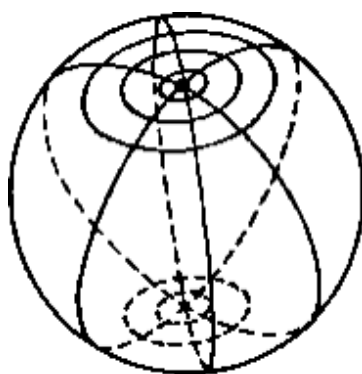


Рис. 3.1

вокруг начала системы координат. Т.е. можем перевести полюс в какую-то точку P , близкую к нему, но отличную от N, S . Так как сфера инвариантна относительно ортогонального вращения, то доказательство повторяется аналогично первому случаю.

Таким образом, мы проверили определение для всех точек, а значит сфера $S^2 \in \mathbb{R}^3$ является гладким двумерным подмногообразием, т.е. утверждение доказано. \square

Понятие римановой метрики в евклидовом пространстве

Рассмотрим теперь произвольную криволинейную систему координат в области V евклидова пространства, и пусть $\gamma(t)$ — произвольная гладкая кривая в этой области. Как запишется длина кривой $\gamma(t)$ в этой криволинейной системе координат?

Проследим, что происходит с компонентами вектора скорости кривой при замене координат. Обозначим криволинейные координаты через u^1, \dots, u^n , т.е. $x^i = x^i(u)$; тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{dx^i(u(t))}{dt} = \sum_{(\alpha)} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(u(t))}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{(k)} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt}\right)^2} dt = \\
 &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(u) \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt}} dt,
 \end{aligned}$$

где функции $g_{\alpha\beta}(u)$ имеют следующий вид

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}.$$

Очевидно, эти функции симметричны по индексам α и β , т.е. $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$; следовательно, набор функций $g_{\alpha\beta}$ может быть организован в симметричную матрицу, которую мы будем в дальнейшем обозначать через $G = (g_{\alpha\beta})$. В полученной нами формуле коэффициенты матрицы G представлены в виде сумм произведений элементов матрицы Якоби. Выражение $g_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$g_{\alpha\beta} = \langle \vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta \rangle.$$

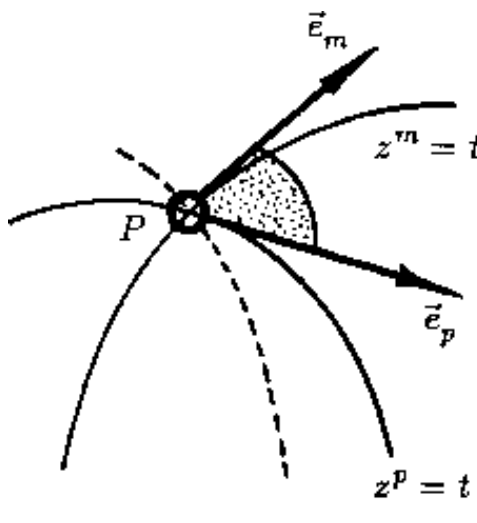


Рис. 3.2

Ясно, что матрица G зависит от криволинейной системы координат u и будет, вообще говоря, изменяться при заменах системы координат. Каков закон изменения матрицы $G(u)$? Сделаем еще одну замену переменных, т.е. рассмотрим регулярную замену координат вида $x(u) \rightarrow x(z(u))$. При этом мы считаем $\{z^k\}$ снова криволинейными координатами в области V .

Тогда коэффициенты $g_{\alpha\beta}(z)$ меняются по закону

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial z^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial z^q} \frac{\partial z^q}{\partial u^\beta} = \varphi_{pq} \frac{\partial z^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial z^q}{\partial u^\beta},$$

$$\varphi_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial x^i}{\partial z^q},$$

а знак суммирования опущен по соглашению Эйнштейна. Соглашение Эйнштейна состоит в том, что мы опускаем знак суммирования, понимая под ним запись одинаковых верхних и нижних коэффициентов:

$$\sum_i a_i b^i = a_i b^i.$$

Таким образом имеем

$$g_{\alpha\beta} = \varphi_{pq} \frac{\partial z^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial z^q}{\partial u^\beta},$$

т.е. $G = A\Phi A^T$, где $A = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$. Кроме того,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Мы сопоставили каждой криволинейной системе координат u в области V гладкую матричную функцию $G(u)$, преобразующуюся при замене координат, как квадратичная форма (в каждой точке). Роль этого набора матричных функций заключается в том, что его задание позволяет вычислить длины кривых в криволинейных системах координат.

Выделим из всех свойств этого набора матричных функций свойство преобразовываться, как квадратичная форма (в каждой точке). Рассмотрим теперь произвольные наборы, удовлетворяющие этому свойству.

Определение 14. Мы скажем, что задана *риманова метрика* в области U евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат x^1, \dots, x^n определен набор гладких функций g_{ij} таких, что:

- 1) $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$, т. е. матрица $G(x)$ симметрична;
- 2) матрица $G(x) = (g_{ij})$ невырождена и положительно определена;
- 3) при замене системы координат $x \rightarrow x'$ матрица $G(x)$ преобразуется по правилу $G(x') = d\psi G(x) (d\psi)^T$ (напомним, что мы рассматриваем только регулярные замены систем координат). Здесь через $d\psi$ обозначена матрица Якоби замены системы координат $x \rightarrow x'$.

Данное выше определение римановой метрики можно теперь сформулировать в более инвариантных терминах, не апеллируя к явной координатной записи метрики. А именно, задание римановой метрики позволяет определить квадратичную форму \langle, \rangle_g , определенную (в каждой точке области) на множестве всех векторов, касательных к гладким траекториям, проходящим через эту точку. В таком случае

$$\langle a, b \rangle_g = g_{ij} a^i b^j.$$

Длина кривой в криволинейной системе координат в \mathbb{R}^n

Определение 15. Если в области U задана риманова метрика $G(x) = (g_{ij})$, и в системе координат (x^i) задана гладкая кривая $\gamma(t) = \{x^i(t)\}$ то ее *длиной* от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

Если в некоторой точке $P \in U$ пересекаются две гладкие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ (такие, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$; $\dot{\gamma}_1(0) \neq 0$, $\dot{\gamma}_2(0) \neq 0$), то углом между ними (в данной римановой метрике) называется число φ такое, что

$$\cos \varphi = \frac{g_{ij}(x) \frac{dx_1^i(t)}{dt} \frac{dx_2^j(t)}{dt}}{\sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx_1^i(t)}{dt} \frac{dx_1^j(t)}{dt}} \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx_2^i(t)}{dt} \frac{dx_2^j(t)}{dt}}}.$$

Утверждение 2. *Отображение $\xi, \eta \rightarrow \langle \xi, \eta \rangle_g$ задает невырожденную, положительно определенную квадратичную форму, гладко зависящую от точки.*

Доказательство. Симметрия и билинейность построенного отображения следует из определения 15.

Убедимся в том, что это соответствие определяет билинейную форму. Сделаем регулярную замену координат $\{x^i\} \rightarrow \{x^{i'}\}$. Тогда

$$\gamma_1(t) = \{x_1^1(t), \dots, x_1^n(t)\}; \quad \gamma_2(t) = \{x_2^1(t), \dots, x_2^n(t)\};$$

$$\xi^{i'} = \frac{dx_1^{i'}}{dt} = \frac{dx_1^{i'}}{dx^i} \frac{dx_1^i}{dt} = \frac{dx^{i'}}{dx^i} \xi^i;$$

$$\eta^{i'} = \frac{dx_2^{i'}}{dx^i} \eta^i;$$

$$g^{i'j'} = \frac{dx^i}{dx^{i'}} \frac{dx^j}{dx^{j'}} g_{ij}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle_{g'} &= g^{i'j'} \xi^{i'} \eta^{j'} = \frac{dx^i}{dx^{i'}} \frac{dx^j}{dx^{j'}} g_{ij} \frac{dx^{i'}}{dx^k} \xi^k \frac{dx^{j'}}{dx^p} \eta^p = \\ &= \left(\frac{dx^i}{dx^{i'}} \frac{dx^j}{dx^{j'}} \right) \left(\frac{dx^k}{dx^k} \frac{dx^p}{dx^p} \right) g_{ij} \xi^k \eta^p = \delta_k^i \delta_p^j g_{ij} \xi^k \eta^p = g_{ij} \xi^i \eta^j = \langle \xi, \eta \rangle_g, \end{aligned}$$

т.е. $\langle \xi, \eta \rangle_g$, действительно, является билинейной формой. При доказательстве мы воспользовались тем, что

$$\frac{dx^i}{dx^{i'}} \frac{dx^{i'}}{dx^k} = \delta_k^i.$$

Это вытекает из того, что $(df)(df)^{-1} = E$. Утверждение доказано.

Как следствие, длина относительно одной и той же римановой метрики кривой не меняется при замене координат. \square

Часто бывает удобно записывать не матрицу $G(z)$ римановой метрики, а квадрат дифференциала длины дуги гладкой кривой: $(dl)^2 = g_{ij}(z)dz^i dz^j$.

Таким образом, определение римановой метрики можно давать в следующих терминах:

Определение 16. Будем говорить, что в области U евклидова пространства задана риманова метрика, если в каждой точке области задана билинейная форма (скалярное произведение), определенная на векторах, касательных к гладким кривым, проходящим через эту точку, причем форма невырожденная и положительно определенная.

Из утверждения 2 вытекает эквивалентность этого и предыдущего определений. В частности, из утверждения 2 вытекает независимость длины гладкой кривой от выбора криволинейной системы координат (если риманова метрика фиксирована, т.е. если она задана в какой-то одной системе координат и преобразуется при заменах координат по указанному выше правилу).

- 1) Рассмотрим декартову систему координат x^1, \dots, x^n и матрицу $G(x) = (\delta_{ij})$. Эта метрика является евклидовой метрикой, и квадрат дифференциала дуги гладкой кривой в декартовой системе координат записывается так:

$$(dl)^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

Определение 17. Риманова метрика G , заданная в области C , называется *евклидовой*, если в C существует такая (вообще говоря, криволинейная) система координат y , в которой матрица $G(y)$ становится единичной матрицей.

Если задана евклидова метрика (относительно некоторой системы координат), то можно описать все другие системы координат, в которых эта метрика также является евклидовой (таких систем много). Это описание мы дадим значительно позже, поскольку не располагаем в данный момент необходимым аппаратом для решения этой задачи. Здесь отметим только, что все такие системы координат можно получить из одной системы путем вращений, сдвигов и отражений в евклидовом пространстве. Приведем примеры.

- 2) Полярные координаты на двумерной плоскости $\mathbb{R}^2(r, \varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2) имеет вид:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Матрица Якоби, уже вычисленная выше, имеет вид

$$df = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix};$$

отсюда

$$G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в полярной системе координат длина кривой, заданной в виде $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$, выражается по формуле

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

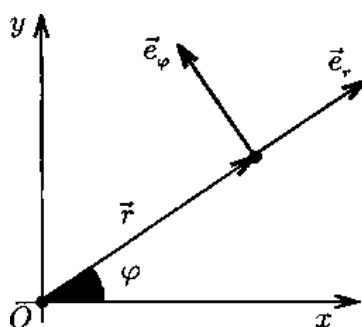


Рис. 3.3

- 3) Цилиндрические координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(r, \varphi, z)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби была уже вычислена нами выше, она имеет вид

$$df = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\implies G(r, \varphi, z) = df(df)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в цилиндрической системе координат длина кривой, заданной в виде: $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$ выражается по формуле:

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

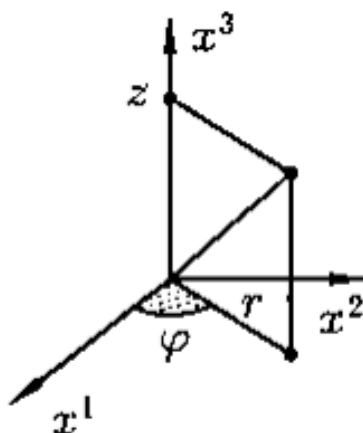


Рис. 3.4

Определение 18. Два римановых многообразия называются изометричными, если существует диффеоморфизм одного многообразия на другое, переводящий одну риманову метрику в другую. Подробнее об этом будет рассказано в следующих лекциях.

Определение индуцированной римановой метрики

Рассмотрим в области n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n риманову метрику (не обязательно евклидову) $g_{ij}(x)$. Пусть далее в области будет задана какая-то гладкая k -мерная поверхность (многообразие) M . Пусть M задано (например, локально) каким-то радиус-вектором $r = r(u^1, \dots, u^k)$.

Тогда на поверхности M возникает *индуцированная* риманова метрика. А именно, ограничим объемлющую риманову метрику на поверхность M . То есть

$$ds^2(M^k) = g_{ij} dx^i(u) dx^j(u) = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = \varphi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}.$$

Таким образом, объемлющая n -мерная риманова метрика индуцирует k -мерную риманову метрику $\varphi_{\alpha\beta}$ на M^k , т.е. на поверхности (многообразии) M^k .

Определение 19. Поверхности (многообразия), снабженные римановой метрикой, называются *римановыми многообразиями*.

Их можно рассматривать «отдельно», т.е. безотносительно к какому-то вложению многообразия в евклидово пространство. К качеству примеров мы далее рассмотрим римановы метрики, индуцированные на двумерных поверхностях в евклидовом (или псевдоевклидовом) пространстве.

Определение 20. Два римановых многообразия называются изометричными, если существует диффеоморфизм одного многообразия на другое, переводящий одну риманову метрику в другую.

Подробнее об этом будет рассказано в следующих лекциях.



Лекция 4

4. Основные примеры римановых метрик. Группы изометрий римановых метрик

Пример. Случай сферы

Рассмотрим теперь стандартное вложение двумерной сферы в трехмерное пространство, отнесенное к декартовым координатам x, y, z в виде множества точек, являющихся концами векторов длины R , выходящих из точки O .

Сферические координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(r, \theta, \varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x, y, z) имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби была уже вычислена нами выше, она имеет вид:

$$df = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в сферической системе координат длина кривой, заданной в виде $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$, выражается по формуле

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Вообще говоря, можно было бы с самого начала рассмотреть евклидову метрику, сосредоточенную только в точках двумерной сферы, и записать эту метрику в терминах координат на этой сфере. Поскольку сфера S^2 задается в \mathbb{R}^3 одним уравнением, то, следовательно, число параметров, описывающих положение точки на сфере, равно двум (т.е. на единицу меньше, чем соответствующее число параметров в трехмерном пространстве). Двумерная сфера радиуса R задается одним уравнением: $r = R = \text{const}$. Вычислим в явном виде скалярное произведение двух векторов, касательных к кривым, целиком лежащим на сфере S^2 (и тем самым являющихся касательными к сфере). Пусть

$$\gamma_1(t) = (R, \theta_1(t), \varphi_1(t)); \quad \gamma_2(t) = (R, \theta_2(t), \varphi_2(t)),$$

тогда

$$\dot{\gamma}_1(t) = (R, \dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1), \quad \dot{\gamma}_2(t) = (R, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2),$$

т.е.

$$\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = R^2(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin^2 \theta(t) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2),$$

где $(\theta(t), \varphi(t))$ — координаты точки пересечения кривых $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$. Отсюда видно, что вычисленное нами скалярное произведение совпадает со скалярным произведением двух векторов: $(\dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1)$ и $(\dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2)$ относительно новой билинейной формы $R^2(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin^2 \theta(t) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2)$. Эта билинейная форма определяет квадратичную форму $R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, получающуюся из соответствующей квадратичной формы в евклидовом пространстве $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ путем подстановки в нее вместо переменных r, θ, φ новых функций от θ, φ вида: $r = R = \text{const}$, $\theta = \theta$, $\varphi = \varphi$. Будем говорить, что полученная после этой операции риманова метрика на сфере S^2 : $R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ является *индуцированной* на сфере объемлющей евклидовой метрикой трехмерного пространства.

Итак, рассмотрим двумерную сферу S^2 , стандартно вложенную в \mathbb{R}^3 и снабженную индуцированной римановой метрикой. Как было уже вычислено ранее, явный вид этой метрики такой: $R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, где θ, φ — сферические координаты. На сфере S^2 можно ввести также и другие криволинейные координаты, иногда используемые при конкретных вычислениях. Приведем основные примеры таких координат. Сначала рассмотрим стереографическую проекцию сферы S^2 на плоскость

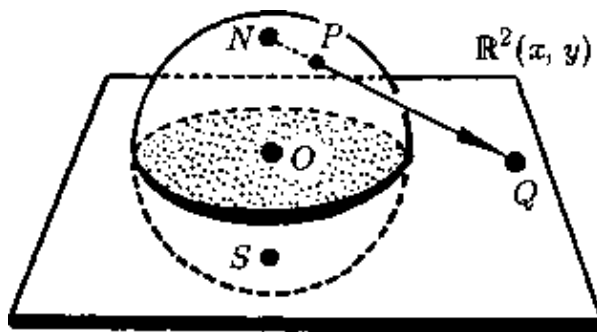


Рис. 4.1

\mathbb{R}^2 . Для этого поместим центр сферы радиуса R в начало координат O и рассмотрим координатную плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$, проходящую через точку O ; отметим также на сфере S^2 северный полюс N и южный полюс S . Пусть P — произвольная точка сферы, отличная от N ; соединим северный полюс N с точкой P и продолжим отрезок NP до пересечения с плоскостью $\mathbb{R}^2(x, y)$. Сопоставим точке P точку Q . Мы получим некоторое отображение $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое и называется стереографической проекцией сферы на плоскость. Как видно из построения, отображение f определено во всех точках сферы, за исключением северного полюса N . Можно условно считать, что северный полюс изображает бесконечно удаленные точки двумерной плоскости). Запишем отображение f аналитически. Для этого следует ввести координаты как на сфере, так и на плоскости. Рассмотрим, например, сферические координаты r, θ, φ в \mathbb{R}^3 . Эти координаты индуцируют координаты на сфере S^2 и на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. В самом деле, на сфере возникают координаты (r, θ) , а на \mathbb{R}^2 — координаты (r, φ) (полярные координаты). Так как отображение

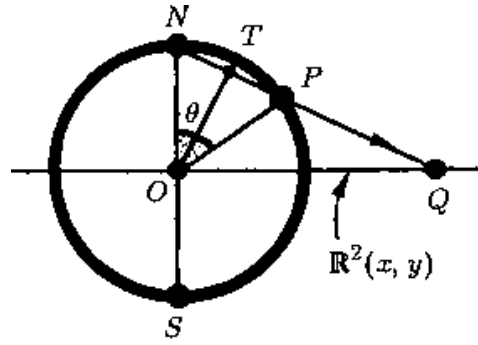


Рис. 4.2

f сохраняет координату φ , то для определения f достаточно найти явную зависимость радиуса r от угла θ . Для этого рассмотрим плоское сечение S^2 плоскостью (рис. 4.2), проходящей через точки P, O, N . Так как угол ONT равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ то из прямоугольного треугольника ONQ получаем $r = OQ = R \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) = R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$. Таким образом, окончательные формулы замены координат выглядят так: $\varphi = \varphi$, $r = R \operatorname{ctg} \theta/2$. Найдем матрицу Якоби этой замены. Несложно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}, \quad J = -\frac{R}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}};$$

таким образом, замена является регулярной во всех точках, за исключением северного полюса. Тем самым на сфере S^2 можно ввести координаты, заимствованные с полярных координат на евклидовой плоскости. Какой вид принимает риманова метрика сферы в этих новых координатах? Имеем

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad dr = -\frac{R}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta;$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{R^2 + r^2}; \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{r^2}{R^2 + r^2};$$

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Следует отметить, что полученный нами вид метрики на сфере отличается от евклидовой метрики на плоскости, записанной в полярных координатах, т.е. от $dr^2 + r^2 d\varphi^2$, только переменным $\frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}$ множителем. Такие метрики называются конформными.

Определение 21. Риманова метрика $g_{ij}(z)$ заданная в области C евклидова пространства в криволинейных координатах z^1, \dots, z^n , называется *конформной*, если она имеет вид $g_{ij}(z) = \lambda(z) g_{ij}^l(z)$, где $\lambda(z)$ — гладкая функция на C , а $g_{ij}^l(z)$ — компоненты евклидовой метрики, записанной в координатах z^1, \dots, z^n . Иными словами, метрика $g_{ij}(z)$ называется конформной, если существует такая система координат x , в которой $g_{ij}(x) = \lambda(x) \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$.

Таким образом, на евклидовой плоскости (отнесенной к полярным координатам), можно рассмотреть две римановы метрики: $dr^2 + r^2d\varphi^2$ (евклидова) и $\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2d\varphi^2)$ (метрика сферы). Обе метрики можно считать заданными на одной и той же области определения. Вернемся к вопросу, затронутому выше, — вопросу об эквивалентности метрик. Существует ли такая регулярная замена координат на плоскости \mathbb{R}^2 , при которой метрика $dr^2 + r^2d\varphi^2$ перейдет в метрику $\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2d\varphi^2)$? Мы приведем по крайней мере интуитивное обоснование того факта, что эти две метрики неэквивалентны. Для этого подсчитаем длину окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в двух метриках: в евклидовой и в сферической. Мы понимаем здесь окружность как некоторую гладкую траекторию на плоскости \mathbb{R}^2 , длину которой можно вычислять в различных метриках, вводимых на \mathbb{R}^2 . Найдем интересующую нас величину как функцию от радиуса окружности. Длина в евклидовой метрике нам известна: $l_e = 2\pi a$, где a — радиус (подсчитанный в евклидовой метрике). Найдем длину окружности в сферической метрике. Сначала найдем соотношение между евклидовой величиной радиуса a и его величиной ρ в сферической метрике. Имеем

$$\rho = 2 \int_0^a \frac{R^2}{R^2 + r^2} dr = 2R \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right);$$

$$l_c = 2 \int_0^{2\pi} \frac{R^2 a d\varphi}{R^2 + a^2} = \frac{4\pi a R^2}{R^2 + a^2} = 2\pi R \sin \frac{\rho}{R}.$$

Геометрически величина ρ изображается как длина меридиана, соединяющего северный полюс с переменной точкой на окружности. Вычисления, выполненные нами формально на языке римановых метрик на плоскости, можно произвести, используя элементарные геометрические соотношения. Таким образом, если бы мы смогли дать определение окружности радиуса a с центром в некоторой точке, в терминах, не зависящих от выбора локальной системы координат, то тогда формула длины окружности тоже не зависела бы от выбора локальной системы координат. Такое определение существует. Назовем расстоянием между двумя точками P и Q минимальную длину кривой, соединяющей эти точки (минимум берется по всем гладким кривым, соединяющим точки). Тогда окружностью радиуса a с центром в точке P назовем множество всех точек Q , расстояние от которых до точки P равно a . Для того чтобы применить это определение к случаю сферы, необходимо доказать, что расстояние между двумя точками P и Q на сфере S^2 равняется длине дуги большой окружности, проходящей через точки P и Q . Для этого достаточно любую кривую, соединяющую P и Q , аппроксимировать ломаной, составленной из конечного числа дуг больших окружностей.

В частности, при $\rho \rightarrow 0$ (т.е. для окружностей малого радиуса по сравнению с R) получаем, что $l_c \sim 2\pi\rho$, т.е. полученная нами формула переходит в евклидово выражение для длины окружности. Сопоставляя две формулы: «евклидова длина окружности радиуса ρ равна $2\pi\rho$ » и «сферическая длина окружности радиуса ρ равна $2\pi R \sin \frac{\rho}{R}$ », мы видим, что функции длины существенно различны; в частности, одна линейная, а вторая периодическая.

Различные виды метрики Лобачевского

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}_1^3 псевдосферу мнимого радиуса $S_1^2(\rho = i\alpha)$:

$$ds^2(\mathbb{R}_1^3) = -dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$\langle a, a \rangle_1 = -x^2 + y^2 + z^2,$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем аналог сферических координат, с помощью которых запишем в удобной для нас форме уравнение псевдосферы. В плоскости YOZ введем полярные координаты (r, φ) , где φ — угол с осью y . Кроме того, введем еще параметр χ — аналог соответствующего параметра в обычных сферических координатах. Сделаем теперь замену переменных:

$$y = r \operatorname{sh} \chi \cos \varphi; \quad z = r \operatorname{sh} \chi \sin \varphi; \quad x = r \operatorname{ch} \chi.$$

В этой «псевдосферической» системе координат уравнение псевдосферы запишется в виде $r = \operatorname{const}$. Это непосредственно вытекает из уравнения псевдосферы мнимого радиуса.

Вычислим вид римановой метрики на псевдосфере в координатах u^1, u^2 на модели Пуанкаре. Используя формулы для стереографической проекции и подставляя их в выражение для квадрата дифференциала длины дуги в \mathbb{R}_1^3 получаем (проверьте!):

$$-(dx(u^1, u^2))^2 + (dy(u^1, u^2))^2 + (dz(u^1, u^2))^2 = \frac{4((du^1)^2 + (du^2)^2)}{(\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2}.$$

Следовательно, в полярных координатах (пусть $\alpha = 1$) на модели Пуанкаре эта же метрика запишется так:

$$ds^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1 - r^2)^2}.$$

Как видно из этой записи, получившаяся метрика является конформной, т.е. отличается от евклидовой переменным множителем $\lambda(r) = 4(1 - r^2)^{-2}$. Перепишем теперь эту же метрику в псевдосферических координатах. Для этого сделаем замену координат (r, φ) на новые параметры (χ, φ) по формулам: $r = \operatorname{cth}(\chi/2)$, $\varphi = \varphi$. Непосредственное вычисление дает (проверьте!) $ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2$. Этот вид метрики полностью аналогичен записи метрики сферы в координатах (θ, φ) , но только обычные тригонометрические функции заменены здесь на гиперболические. Найдем геометрический смысл параметра χ . Рассмотрим, например, плоскость XOZ , тогда на ней возникает индуцированная псевдоевклидова метрика $ds^2 = -dx^2 + dz^2$. Псевдосфера пересекает эту плоскость по гиперболе, параметрическое задание которой в псевдосферических координатах имеет вид (мы считаем, что $\alpha = 1$): $x = \operatorname{ch} \chi$, $z = \operatorname{sh} \chi$ (рис. 4.3). В качестве параметра χ возьмем евклидово значение угла POS ; тогда, очевидно, $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{th} \chi$.

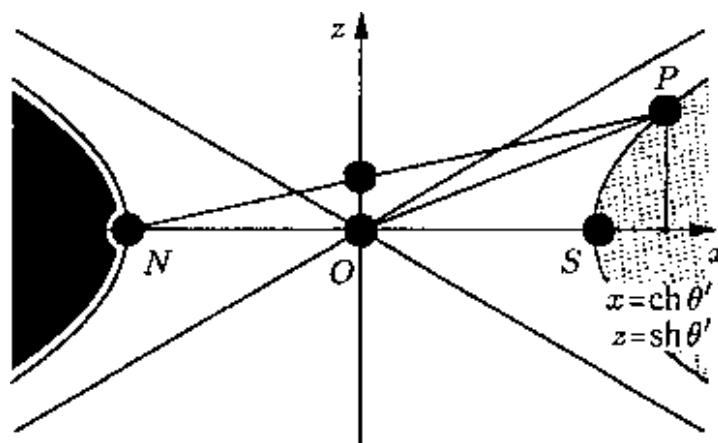


Рис. 4.3

Рассмотрим теперь другой случай. Снова возьмем стереографическую проекцию (для простоты, по-прежнему рассматриваем только плоскость XOZ , так как все наши вычисления сохраняются при вращениях плоскости XOZ , вокруг оси OX). Введем новые координаты (χ, φ) : $r = \text{cth}(\chi/2)$, $\varphi = \varphi$. Мы получили на модели Пуанкаре риманову метрику

$$ds^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1 - r^2)^2}.$$

Сравнение метрики сферы и метрики Лобачевского

S^2	L^2
$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$	$d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\varphi^2,$
$0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ на S^2/S	$0 \leq \chi < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$
$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1+r^2)^2}$	$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$
$0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$	$0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$

Комплексная запись метрик сферы и Лобачевского

Укажем еще две полезные формы записи перечисленных ранее метрик — так называемые комплексные формы записи. Для этого рассмотрим евклидову плоскость и введем на ней «комплексную координату» $z = x + iy$. Тогда в качестве \bar{z} возьмем $x - iy$. Мы не будем здесь вдаваться в геометрический смысл этих новых координат, а будем рассматривать замену $(x, y) \rightarrow (z, \bar{z})$ как некую формальную замену. Матрица Якоби этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Якобиан $J = -2i \neq 0$, а потому эту замену можно считать регулярной. Так как $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, то евклидова метрика в этих новых координатах принимает вид:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy) = dzd\bar{z}$$

Метрика сферы, следовательно, принимает вид:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

где $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$. Совершенно аналогично получаем комплексную форму метрики Лобачевского:

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Для метрики Лобачевского существует еще одна полезная форма записи на верхней

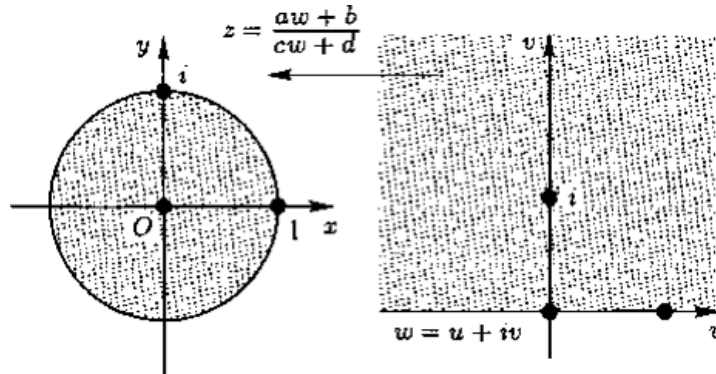


Рис. 4.4

полуплоскости. Рассмотрим еще один экземпляр евклидовой плоскости, на которой введем новую комплексную координату w , и выделим на этой плоскости верхнюю полуплоскость (т.е. множество всех точек, для которых $\text{Im}(w) > 0$, где $w = u + iv$; $v = \text{Im}(w)$). Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^2(w) \rightarrow \mathbb{R}^2(z)$, задаваемое формулой

$$z = \frac{1 + iw}{1 - iw},$$

Лемма 1. *Отображение f , заданное формулой выше, переводит верхнюю полуплоскость в единичный круг (рис. 4.4).*

Доказательство. Граница переходит в границу. В самом деле, пусть $w = u$, $u \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|z| = \left| \frac{1 + iu}{1 - iu} \right| = 1, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Теперь рассмотрим точку в верхней полуплоскости $w = u + iv$. Хотим убедиться, что образ точки попадает внутрь круга радиуса 1.

$$z = \frac{1 + iu - v}{1 - iu + v} = \frac{(1 - v) + iu}{(1 + v) - iu}.$$

Чтобы модуль этого числа был меньше 1, должно выполняться

$$(1 - v)^2 + u^2 < (1 + v)^2 + u^2 \iff (1 - v) < (1 + v) \iff 2v > 0,$$

а это верно, так как взяли точку в верхней полуплоскости ($v > 0$). Таким образом, лемма доказана. \square

Найдем dz . Имеем

$$dz = \frac{idw(1 - iw) + idw(1 + iw)}{(1 - iw)^2} = \frac{2idw}{(1 - iw)^2}.$$

Отсюда

$$dzd\bar{z} = \frac{4dwd\bar{w}}{|1 - iw|^4}.$$

Производя соответствующую замену в выражении

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2},$$

получаем:

$$ds^2 = \frac{4dwd\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

Отсюда еще раз видно, что точки вещественной оси (образ абсолюта модели Пуанкаре) являются бесконечно удаленными точками на плоскости Лобачевского (на этот раз смоделированной на верхней полуплоскости). В самом деле, если мы захотим подсчитать длину отрезка оси Ov , от точки i до точки O (уже не принадлежащей плоскости Лобачевского), то получим

$$l = \int_0^1 \frac{dv}{v} = \ln v|_0^1 = -\ln(0) \rightarrow \infty.$$

Группы изометрий или движений римановых метрик

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^n и билинейную форму $\langle a, b \rangle_C = c_{ij}a^ib^j$. Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(0) = 0$. Тогда возникает преобразование $C' = ACA^T$.

Определение 22. Преобразование A называется *движением* формы C (или форма C инвариантна относительно преобразования A), если $C' = C$. Тогда $C = ACA^T$.

Если форма C дана, то возникает задача найти все ее движения.

- 1) Пусть $C = E$, $c_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда $\langle a, b \rangle_E = \sum a^ib^j$. Следовательно, $E = AA^T$, $A^T = A^{-1}$. Такие матрицы называются *ортогональными*. Совокупность всех ортогональных матриц образуют группу $O(n)$. Мы знаем что для $A \in O(n)$ $\det A = \pm 1$. Возникает подгруппа $SO(n) \subset O(n)$: $\det A = 1$ для $A \in SO(n)$. Такие повороты сохраняют ориентацию в \mathbb{R}^n .

2) Рассмотрим \mathbb{C}^n . Рассмотрим форму $\langle a, b \rangle_E = \sum a^\alpha \bar{b}^\alpha$. Тогда $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ устроены так: $E = A\bar{A}^T$, $A^{-1} = A^T$. Это унитарные матрицы, они образуют унитарную группу $U(n)$. Операторы из этой группы обладают свойством $|\det A| = 1$, т.е. $\det A = e^{i\epsilon}$. Возникает специальная унитарная группа $SU(n) \subset U(n)$ с условием $\det A = 1$

Рассмотрим риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij} .

Определение 23. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *движением* римановой метрики g_{ij} или *изометрией*, если риманова метрика при этом отображении переходит в себя, т.е. выполнено тождество

$$g_{\alpha\beta}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^\beta},$$

$$G(x) = AG(y(x))A^T,$$

где A — это матрица Якоби $(\frac{\partial y}{\partial x})$, и y^1, \dots, y^n — локальные координаты в некоторой окрестности точки $y \in M^n$; x^1, \dots, x^n — локальные координаты в некоторой окрестности точки $x \in M^n$; $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, — функции, задающие (локально) отображение f , причем $x = f(y)$.

Лекция 5

5. Группы изометрий римановых метрик

Изометрия двух многообразий

Рассмотрим многообразие M^n с метрикой $g_{ij}(x)$, т.е. $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ и многообразие P^n с метрикой $\varphi_{ij}(y)$, т.е. $ds^2 = \varphi_{ij}dy^i dy^j$.

Определение 24. Диффеоморфизм f многообразия $f : M^n \rightarrow P^n$, $y = f(x)$ называется *изометрией*, если выполнено тождество

$$g_{\alpha\beta}(y) = \varphi_{ij}(y(x)) \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j(x)}{\partial x^\beta},$$

$$G(x) = A\Phi(y(x))A^T,$$

где A — это матрица Якоби $(\frac{\partial y}{\partial x})$.

Мы дали «координатное» определение изометрии. Иногда бывает удобно пользоваться инвариантным определением, не использующим локальные координаты, выбор которых неоднозначен. При отображении f дифференциал df отображает $T_x M^n$ на $T_y P^m$, причем это отображение — линейный изоморфизм, так как f — диффеоморфизм.

Рассмотрим вектор $a \in T_x M^n$ и его образ $f(a) = b \in T_y P^m$. Тогда

$$b^i = \left. \frac{dy^i(x)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} a^\alpha, \quad (df(a))^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} a^\alpha.$$

Теперь рассмотрим многообразия одинаковой размерности. В каждом из касательных пространств $T_x M^n$ и $T_y P^n$ определены скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$ соответственно, построенные по римановым метрикам.

Определение 25. Диффеоморфизм f многообразия M^n на P^n называется *изометрией*, если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_G = \langle df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b}) \rangle_\Phi$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_y M^n$; $y = f(x)$.

Лемма 2. Координатное и инвариантное определение изометрий эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} \in T_x M^n$, $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ в локальных координатах (x^i) ; отсюда $df(\mathbf{a}) \in T_y P^n$ имеет вид

$$(df(\mathbf{a}))^i = \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k} a^k,$$

так как $df : T_x M^n \rightarrow T_y P^n$ задается матрицей Якоби. Отсюда

$$\langle df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b}) \rangle_\Phi = \varphi_{ij}(y(x)) \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k} \frac{\partial y^j(x)}{\partial x^p} a^k a^p = g_{kp} a^k a^p,$$

что и доказывает лемму. □

Изометрии на многообразии

Лемма 3. Множество всех изометрий риманова многообразия M^n образует группу (в алгебраическом смысле).

Доказательство. То, что композиция изометрий снова изометрия, вытекает из правила дифференцирования сложной функции и закона изменения коэффициентов g_{ij} при замене координат. То, что f^{-1} является изометрией, вытекает из того, что матрица Якоби f^{-1} является матрицей, обратной к матрице Якоби $J(f)$. В качестве единичного элемента группы следует взять тождественное преобразование. \square

Группа изометрий риманова многообразия M^n обычно снабжается топологией из пространства отображений и обозначается через $\text{Iso}(M^n)$. Рассмотрим простейшие примеры.

Примеры групп изометрий для некоторых метрик

Группа изометрий евклидовой плоскости

Пример 2. Рассмотрим евклидову двумерную плоскость и найдем группу изометрий, сохраняющих точку O — начало координат. Будем искать изометрии среди линейных преобразований плоскости (можно показать, что любая изометрия плоскости линейна; но сейчас мы не будем на этом останавливаться). Требование инвариантности метрики $dx^2 + dy^2$, $g_{ij} = \delta_{ij}$ записывается в виде матричного уравнения $E = AA^T$, где $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное преобразование. Это — определение ортогональной группы, т.е. в данном случае группы $O(2)$, состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ (собственные вращения) и}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \text{ (несобственные вращения, или отражения).}$$

Собственные вращения образуют подгруппу в $O(2)$, обозначаемую $SO(2)$; несобственные вращения подгруппы не образуют.

Пример 3. Движение евклидовой плоскости можно записать в виде $y = Ax + b$, где $A \in O(2)$, а вектор b определяет параллельный перенос (сдвиг) на плоскости. Ясно, что все такие преобразования сохраняют евклидову метрику (проверьте!). Как будет показано далее, они исчерпывают собою все изометрии плоскости. Эту группу можно представить в виде матриц

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & b & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Кроме того, $\dim \text{Iso}(\mathbb{R}^2) = 3$ (параметры b_1, b_2, φ).

Группа изометрий псевдоевклидовой плоскости

Пример 4. Рассмотрим индефинитные метрики. Зададим на \mathbb{R}^2 индефинитную метрику $-dx^2 + dy^2$, превращающую двумерное пространство в псевдоевклидову плоскость \mathbb{R}_1^2 . Матрица первой формы постоянна и имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если мы хотим найти все линейные преобразования вида $\xi = A\eta + b$, сохраняющие эту метрику, то должны решить уравнение $G = AGA^T$, где $A : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow$

\mathbb{R}_1^2 — линейное преобразование. Записав его в виде $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, получаем систему

уравнений на a, b, c, d : $a^2 - b^2 = 1$; $ac = bd$; $d^2 - c^2 = 1$. Решая систему, получаем

$$A = \begin{pmatrix} \pm \operatorname{ch} \psi & \pm \operatorname{sh} \psi \\ \pm \operatorname{sh} \psi & \pm \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} & \pm \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} & \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \end{pmatrix}; \quad \frac{a}{b} = \beta, \quad \beta = \operatorname{th} \psi$$

и допустимыми являются следующие комбинации знаков

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \in G_1; \quad \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \in G_2; \quad \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \in G_3; \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \in G_4.$$

Здесь представлены все возможные варианты. Тем самым $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ (проверьте!) и $G_i \cap G_j = \emptyset$, если $i \neq j$. В самом деле, допустим, например, что $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, тогда $\operatorname{ch} \varphi = -\operatorname{ch} \psi$, $\operatorname{sh} \varphi = -\operatorname{sh} \psi$, что невозможно, поскольку $\operatorname{ch} \varphi > 0$ при любом φ . Аналогично устанавливается, что $G_i \cap G_j = \emptyset$.

Группа изометрий двумерной сферы

Пример 5. Рассмотрим группу изометрий двумерной сферы, рассматриваемой как риманово многообразие с метрикой, индуцированной стандартным вложением в \mathbb{R}^3 . Сначала рассмотрим \mathbb{R}^n и найдем группу линейных однородных преобразований A , сохраняющих евклидову метрику $ds^2 \sim (dx^i)^2$. Так как матрица $(g_{ij}) = E$, то имеем $E = AA^T$; решениями этого уравнения являются ортогональные матрицы, образующие группу $O(n)$. В ней содержится подгруппа $SO(n)$, состоящая из собственных вращений; остальные вращения (несобственные) подгруппы не образуют.

Пусть $n = 3$. Тогда $O(3)$ сохраняет евклидову метрику в \mathbb{R}^3 . Следовательно, переводит в себя $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \operatorname{const}$. Итак, $O(3)$ — подгруппа в $\operatorname{Iso}(S^2)$. Далее мы покажем, что $O(3) = \operatorname{Iso}(S^2)$.

Теорема о гомеоморфности группы $SO(3)$ пространству \mathbb{RP}^3

Теорема 6. *Группа $SO(3)$ как топологическое пространство гомеоморфна трехмерному проективному пространству \mathbb{RP}^3 .*

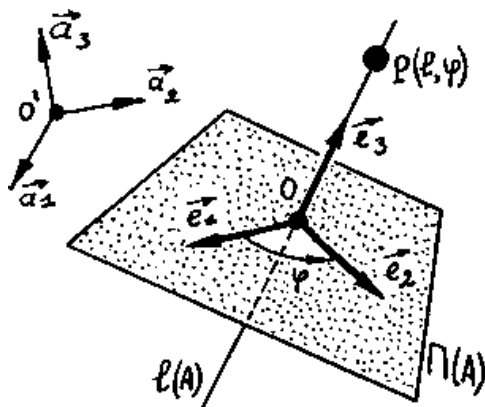


Рис. 5.1

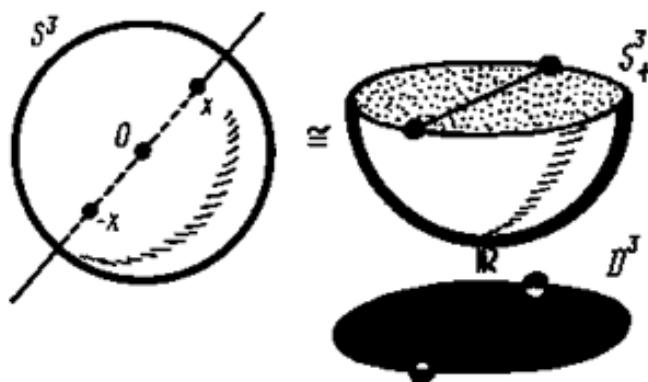


Рис. 5.2

Доказательство. Пусть A — элемент $SO(3)$. Тогда в \mathbb{R}^3 существует неподвижная ось $l(A)$ такая, что действие A в \mathbb{R}^3 сводится к повороту вокруг $l(A)$ на некоторый угол $\varphi(A)$. Если $A \neq E$, то $l(A)$ определена однозначно.

Рассмотрим плоскость $\Pi(A)$, ортогональную оси $l(A)$ и проходящую через O . В $\Pi(A)$ выберем произвольный вектор e_1 и пусть e_2 — вектор, получающийся из e_1 при повороте на угол $\varphi(A)$ (рис. 5.1). Дополним e_1, e_2 третьим вектором e_3 до репера (e_1, e_2, e_3) так, чтобы ориентация репера (e_1, e_2, e_3) совпала с ориентацией репера (a_1, a_2, a_3) , где $((a_1, a_2, a_3))$ — некоторый фиксированный репер в \mathbb{R}^3 . Ось $l(A)$ превращается в вещественную прямую, если на ней можно задать направление с помощью e_3 и отложить значение $\varphi(A)$.

Мы однозначно сопоставили каждому элементу $A \in SO(3)$ точку в \mathbb{R}^3 ; обозначим ее $P(l, \varphi)$. Ясно, что $P(l, \pi) = P(l, -\pi)$, так как повороты вокруг $l(A)$ на π и

на $-\pi$ совпадают. Если же $|\varphi(A)| < \pi$, то $P(l, \varphi)$ соответствует одному и только одному вращению A . Непрерывно меняя A , мы непрерывно меняем $P(l, \varphi)$; верно и обратное.

Итак, мы взаимно-однозначно и непрерывно в обе стороны отождествили ортогональные преобразования A с точками трехмерного шара радиуса π , на границе которого (т.е. на сфере радиуса π) склеены диаметрально противоположные точки $P(l, \pi)$ и $P(l, -\pi)$.

Осталось доказать, что этот «шар со склейками на границе» гомеоморфен $\mathbb{R}P^3$. Одно из определений $\mathbb{R}P^3$ реализует его как пучок прямых в \mathbb{R}^4 , проходящих через O . Эта модель эквивалентна следующей: нужно взять сферу S^3 и отождествить у нее диаметрально противоположные точки. Для этого нужно взять полусферу S_+^3 и отождествить диаметрально противоположные точки на ее границе, т.е. на экваторе S^2 (см. рис. 5.2). Полусфера диффеоморфна трехмерному диску; диффеоморфизм можно осуществить ортогональным проектированием S_+^3 на D^3 (рис. 5.2). Итак, $\mathbb{R}P^3$ гомеоморфно D^3 с отождествленными диаметрально противоположными граничными точками. \square

Так как $\mathbb{R}P^3$ — линейно связно, то $O(3)$ состоит из двух компонент линейной связности.

Изометрии метрик Лобачевского

Рассмотрим группу изометрий плоскости Лобачевского со стандартной римановой метрикой. Рассмотрим реализацию плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с метрикой

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Будем искать группу изометрий этой метрики среди дробно-линейных преобразований комплексной плоскости

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

где a, b, c, d — комплексные числа такие, что $ad - bc \neq 0$. Такие отображения называются дробно-линейными. Отметим, что если $ad - bc = 0$, то это отображение переводит всю плоскость $\mathbb{R}^2(w)$ в одну точку. Действительно, если $ad = bc$, то положим

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \lambda.$$

Тогда

$$w = \frac{b(\lambda + 1)}{d(\lambda + 1)} = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим специальный класс дробно-линейных преобразований. Пусть при домножении a, b, c, d на некоторое λ имеем $\lambda(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ и $ad - bc > 0$. Можно считать, что $ad - bc = 1$.

Теорема 7. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное дробно-линейным невырожденным преобразованием. Оно переводит верхнюю полуплоскость в себя тогда и только тогда, когда $\lambda(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ и $ad - bc = 1$.

Доказательство. Пусть четверка коэффициентов пропорциональна вещественной четверке (которую сразу обозначим через a, b, c, d). Ясно, что вещественная ось переходит в себя

$$w = \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{R}.$$

Докажем, что если точка z принадлежит верхней полуплоскости, то ее образ $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ тоже принадлежит верхней полуплоскости, т. е. что $\text{Im}(f(z)) > 0, y > 0$. В самом деле,

$$\text{Im}(w) = \text{Im} \left(\frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} \right) = \text{Im} \left(\frac{((ax + b) + iay)((cx + d) - icy)}{|(cx + d) + icy|^2} \right),$$

$$-cy(ax + b) + ay(cx + d) = y(ad - bc) = y > 0.$$

Обратно. Пусть $f(z)$ переводит в себя верхнюю полуплоскость. Требуется доказать, что существует общий такой множитель λ , что a, b, c, d пропорциональны вещественным a', b', c', d' . При $x = 0$ имеем

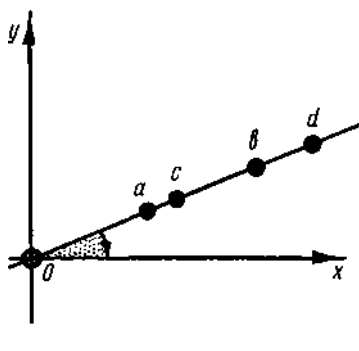


Рис. 5.3

$$\frac{b}{d} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

При $x = \infty$ имеем

$$\frac{a}{c} = \mu \in \mathbb{R}.$$

При $x = 1$ имеем

$$\frac{a + b}{c + d} = \rho \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$b = \lambda d, \quad a = \mu c, \quad a + b = \rho c + \rho d \implies (\mu - \rho)c = (\rho - \lambda)d.$$

Рассматривая случай общего положения, т.е. когда $\mu - \rho \neq 0$ и $\rho - \lambda \neq 0$, получаем, что все четыре комплексных числа a, b, c, d расположены на одной прямой (рис. 5.3). Домножая на общий комплексный множитель, можем повернуть эту прямую на вещественную ось.

Рассмотрим точку i .

$$\frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{|ci + d|^2} \implies \frac{i(ad - bc)}{|ci + d|^2}.$$

Так как по условию мнимая часть положительна, то $ad - bc > 0$.

Теорема доказана. □



Лекция 6

6. Метрика Лобачевского. Элементы теории плоских кривых

Теорема о метрике Лобачевского

Рассмотрим группу изометрий плоскости Лобачевского со стандартной римановой метрикой. Рассмотрим реализацию плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с метрикой

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{-(z - \bar{z})^2}.$$

Теорема 8. Преобразование $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $\lambda(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $ad - bc = 1$ сохраняет метрику плоскости Лобачевского (т.е. является ее изометрией).

Доказательство. Найдем dw :

$$dw = \frac{adz(cz + d) - cdz(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{(ad - bc)dz}{(cz + d)^2} = \frac{dz}{(cz + d)^2}.$$

Подставляем это выражение в метрику Лобачевского

$$\begin{aligned} ds^2(L^2) &= \frac{dwd\bar{w}}{-(w - \bar{w})^2} = \frac{dzd\bar{z}}{-|cz + d|^4 \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+\bar{b}}{c\bar{z}+\bar{d}}\right)^2} = \\ &= \frac{dzd\bar{z}}{(acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd - acz\bar{z} - bcz - ad\bar{z} - bd)^2} = \\ &= \frac{dzd\bar{z}}{-(ad - bc)^2(z - \bar{z})^2} = \frac{dzd\bar{z}}{-(z - \bar{z})^2}. \end{aligned}$$

□

Матричный вид группы преобразований

Теорема 9. Группа изометрий плоскости Лобачевского содержит подгруппу G , изоморфную группе $SL_2(\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $h : SL_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow G$, где

$$G = \left\{ w = \frac{az + b}{cz + d} \mid \lambda(a, b, c, d) \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, ad - bc = 1 \right\}.$$

Докажем, что

$$h : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow w = \frac{az + b}{cz + d}$$

— гомоморфизм.

$$w = \frac{a \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Значит, $h(p \cdot q) = h(p) \circ h(q)$, т.е. h — гомоморфизм.

Очевидно, что отображение h — эпиморфизм. В таком случае $G = SL_2 / \text{Ker } h$.
 Ищем ядро:

$$g \in SL_2(\mathbb{R}); g \in \text{Ker } h \iff h(g) = \text{id} : L^2 \longrightarrow L^2,$$

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \iff az + b = cz^2 + dz \iff b = c = 0, a = d, a = \pm 1$$

$$\text{Ker } h = (E; -E) = \mathbb{Z}_2.$$

□

Можно ли вложить плоскость Лобачевского в \mathbb{R}^3 ?

Можно ли вложить плоскость Лобачевского L^2 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 с евклидовой метрикой так, чтобы метрика Лобачевского была бы индуцирована из объемлющей метрики. Ответ: нельзя. Однако можно рассмотреть такой пример:

Пример 6. Рассмотрим на плоскости (x, y) гладкую кривую γ , расположенную в первом квадранте, со следующим свойством: длина отрезка касательной от точки касания с кривой до точки пересечения касательной с осью Ox постоянна и равна a (рис. 13.1).

При перемещении точки A по кривой γ точка B скользит по оси Ox , и отрезок AB имеет постоянную длину, равную a . Кривая γ может быть получена чисто механическим путем, если связать две точки, A и B , нерастяжимой нитью длины a и, поместив A и B в положения A_0, B_0 соответственно (см. рис. 13.1), начать перемещать точку B по оси Ox . При этом точка A будет прочерчивать кривую γ , касающуюся оси Oy в точке A_0 и имеющую асимптоту — ось Ox .

При этом мы считаем, что точки A и B скользят по плоскости без трения; тогда вектор скорости будет все время направлен вдоль нити, соединяющей точки A и B , т.е. движение точки B будет однозначно определено. Найдем дифференциальное уравнение кривой γ . Из треугольника ABx (см. рис. 13.1) имеем

$$\begin{cases} \text{tg } \varphi = -y'_x \\ a \sin \varphi = y \end{cases},$$

где $y = y(x)$ — график γ . Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{y'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}, \quad \frac{ay'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}; \quad x'_y = -\frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y},$$

где $x = x(y)$ — график γ . Итак:

$$\begin{aligned} x(y) &= - \int_y^a \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2} dy = -a^2 \int_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} + \int_y^a \frac{y dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} = \\ &= -a^2 \int_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2} = -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right). \end{aligned}$$

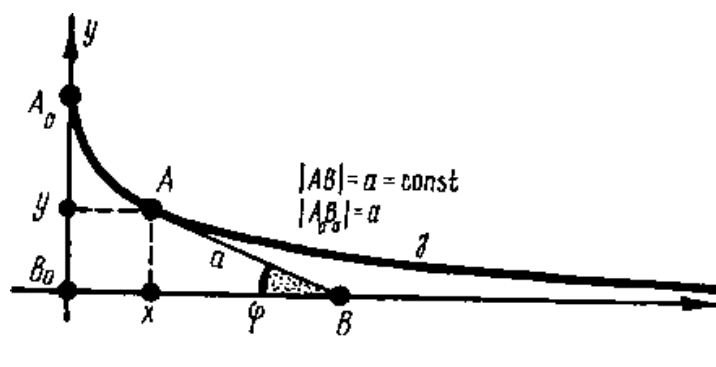


Рис. 6.1

Мы получили явную формулу графика $x = x(y)$. Рассмотрим поверхность вращения, получающуюся при вращении кривой γ вокруг оси Ox (рис. 13.2). Получающаяся поверхность V^2 называется *поверхностью Бельтрами*, или псевдосферой. Она реализует часть плоскости Лобачевского в виде гладкой поверхности в \mathbb{R}^2 . Она некомпактна, гладка, связна, с краем.

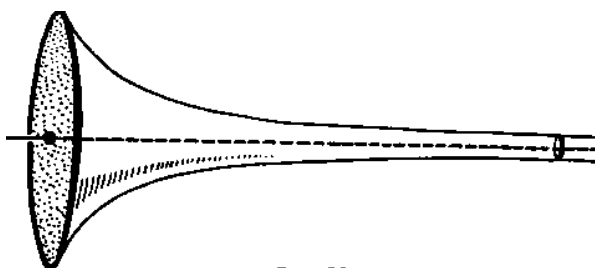


Рис. 6.2

Какую часть плоскости Лобачевского реализует поверхность Бельтрами? Рассмотрим точку на абсолюте и две параллельные прямые (рис. 13.3). Рассмотрим в этой точке окружность — орицикл. Тогда эта окружность вырезает сектор, который будет изометричен поверхности Бельтрами, разрезанной по образующей (рис. 13.4).

Рассмотрим двумерную плоскость. Ее можно разбить на квадраты: возникает целочисленная решетка. Взяв один из квадратов, можно путем сдвигов (изометрий) с помощью группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ замостить всю плоскость. Есть ли похожее покрытие на плоскости Лобачевского?

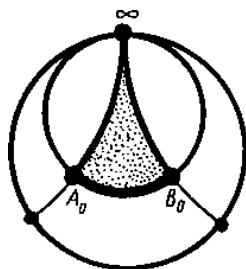


Рис. 6.3

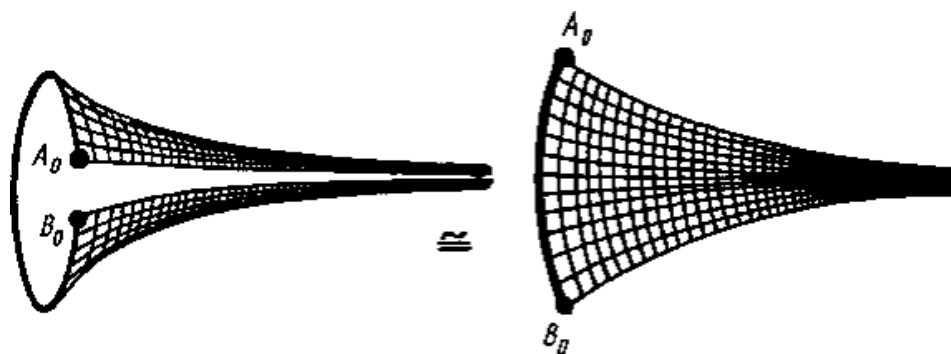


Рис. 6.4

В модели Пуанкаре плоскости Лобачевского точками являются точки единичного круга, а прямыми — дуги окружностей, выходящие на границу круга под углом $\pi/2$. Плоскость Лобачевского можно целиком замостить изометричными правильными $4g$ -угольниками с подходящими углами. Например, для правильного восьмиугольника (см. рисунок 6.5) угол равен $\pi/4$. Будем последовательно отражать многоугольник относительно всех его сторон. Его образы при отражениях покроют всю плоскость Лобачевского. По мере приближения к границе круга евклидовы изображения этих $4g$ -угольников все более уменьшаются. Фактор плоскости Лобачевского по действию дискретной группы, порожденной этими отражениями, является сферой с g ручками.

Многообразия. Атлас

Пусть нам задано топологическое хаусдорфово пространство X .

Определение 26. Пространство X называется топологическим непрерывным *многообразием*, если $X = \bigcup_{(i)} U_i$, где U_i — открытые множества такие, что $\forall \varphi_i : U_i \rightarrow D^n \subset \mathbb{R}^n$, где φ_i — гомеоморфизм, а n не зависит от i . Число n называется размерностью X .

Определение 27. Пара (U_i, φ_i) называется *локальной картой*, φ — *координатным гомеоморфизмом*, а совокупность $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — *атласом*.

Определение 28. Рассмотрим пересечение карт $U_i \cap U_j$ (рис. 6.7). Отображение $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ называется *функцией склейки*.

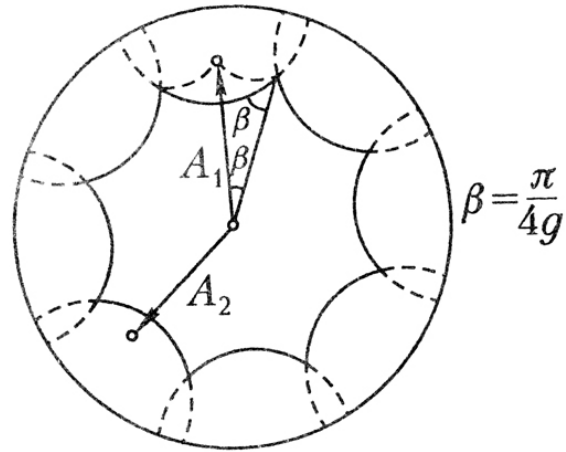


Рис. 6.5

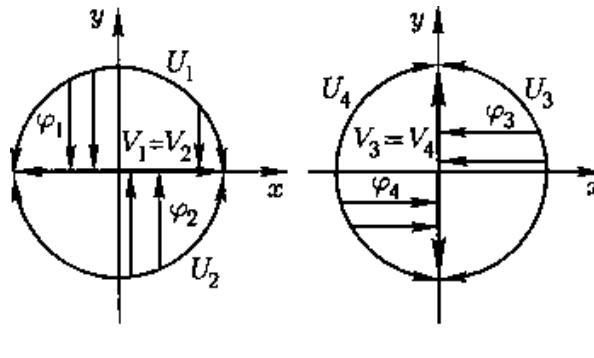


Рис. 6.6

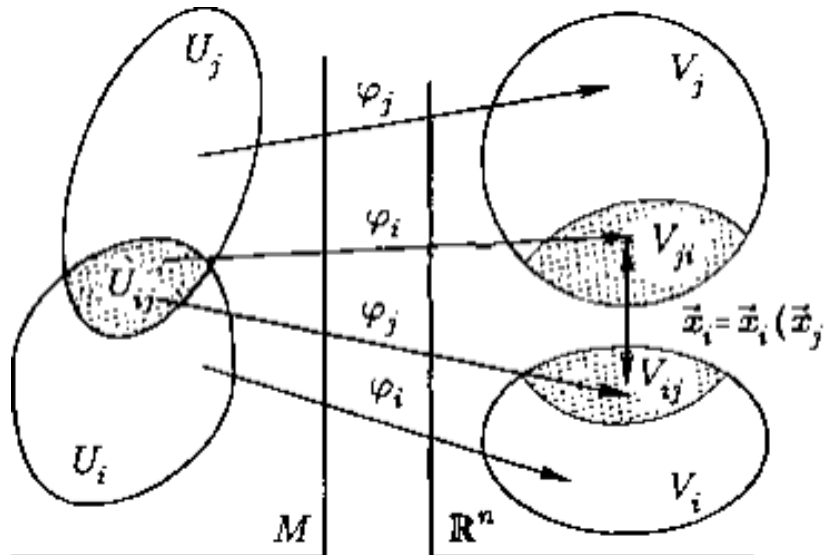


Рис. 6.7

Определение 29. Топологическое многообразие X^n называется гладким, если все функции перехода $\varphi_{ij} \in C^\infty$. Аналогично определяются комплексно-аналитические, вещественно-аналитические многообразия.

Теорема 10. Рассмотрим гладкое связное многообразие M^1 . Если оно компактно, то оно гомеоморфно окружности, если многообразие некомпактно, то оно гомеоморфно прямой \mathbb{R}^1 .

Напомним, что многообразия M^n и P^n называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм $f : M^n \rightarrow P^n$.

Элементы теории плоских кривых

Мы будем рассматривать евклидову плоскость \mathbb{R}^2 , отнесенную к декартовым координатам (x, y) . Гладкие кривые $\gamma(t)$ на плоскости \mathbb{R}^2 будем задавать с помощью двух функций: $x(t), y(t)$, т.е. будем рассматривать радиус-вектор

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

гладкой кривой $\gamma(t)$, выходящий из начала координат — точки O . Напомним, что вектором скорости $v(t)$ кривой $\gamma(t)$ в точке t называется вектор с координатами

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (x', y').$$

Определяемая этим вектором прямая является касательной к кривой в точке $\gamma(t)$. При этом, конечно, предполагаем, что $v(t) = r'(t) \neq 0 \forall t$. Это предположение мы будем на протяжении этой и следующей лекции считать выполненным (напомним, что в тех точках, в которых вектор скорости обращается в нуль, гладкая кривая может претерпевать излом; примеры были приведены ранее).

Рассмотрим длину кривой

$$s = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| dt,$$

$$ds = \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| dt.$$

Введем *натуральный параметр* s . Рассмотрим точку O на кривой и длину дуги s от нее до скользящей точки и положим, что $t = s$. Т.е. мы параметризуем кривую с помощью длины дуги, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Такая параметризация $r(s) = (x(s), y(s))$ называется *натуральной параметризацией кривой*. Дифференцирование по t по-прежнему обозначаем штрихом, а по s — точкой.

$$ds = \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| dt \iff \left| \frac{dr(s)}{ds} \right| = 1.$$

$$v(s) = \dot{r}(s), \quad |v(s)| = 1;$$

$$\ddot{r}(s) = \dot{v}(s) = \frac{d^2 r(s)}{ds^2} = w(s)$$

— ускорение точки. Кроме того, $w(s) \perp v(s)$. Покажем это при помощи леммы.

Лемма 4. Если $|p(t)| = \text{const}$, то $p'(t) \perp p(t)$.

Доказательство.

$$\langle p(t), p(t) \rangle = \text{const}.$$

Продифференцируем равенство по t :

$$\begin{aligned} \langle p'(t), p(t) \rangle + \langle p(t), p'(t) \rangle &= 0, \\ 2\langle p'(t), p(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

В нашем случае $w = \dot{v}(s)$ и тогда по лемме $w(s) \perp v(s)$.

Определение 30. Кривизной кривой называется функция $k(s) = |w(s)|$.

1) Прямая:

$$\begin{cases} x = as + \alpha, \\ y = bs + \beta. \end{cases}$$

Тогда $v(s) = (a, b)$ и $w(s) = \dot{v}(s) = 0$, $|w(s)| = k(s) = 0$.

2) Окружность

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi. \end{cases}$$

Натуральный параметр $s = R\varphi$. Тогда

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{s}{R}, \\ y = R \sin \frac{s}{R}. \end{cases}$$

Вектор скорости и ускорения имеют вид

$$v(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right); \quad w(s) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}\right)$$

Тогда $k(s) = \frac{1}{R}$.

Формулы Френе

Рассмотрим плоскую кривую $\gamma(t)$. В каждой точке гладкой кривой, отнесенной к натуральному параметру, естественно возникают два ортогональных друг другу вектора $v(s)$ и $w(s)$ (рис. 6.8). Рассмотрим вектор

$$n(s) = \frac{w(s)}{|w(s)|} = \frac{\dot{v}(s)}{k(s)} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{k(s)}.$$

Этот вектор называется вектором нормали $w(s) \perp v(s)$. Тем самым при изменении параметра s мы получаем вдоль кривой гладкое реперное поле, т. е. семейство двумерных реперов вида:

$$e(s) = \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

Это и есть *репер Френе*.

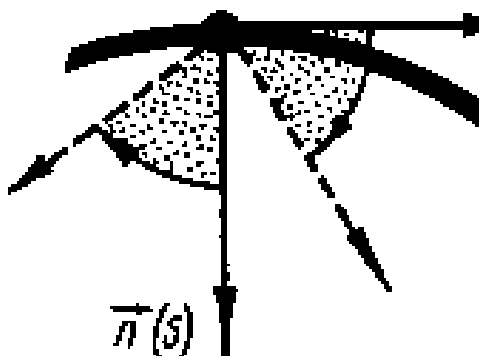


Рис. 6.8

Теорема 11. Верны равенства $\dot{v} = kn$, $\dot{n} = -kv$.

Доказательство. Первая формула следует из определения. Докажем вторую формулу:

$$\langle v(s), n(s) \rangle = 0$$

$$\langle \dot{v}, n \rangle + \langle v, \dot{n} \rangle = 0$$

Так как $|n(s)| = 1$, $\dot{n}(s) \perp n$, $\dot{n} = \lambda v$

$$\langle kn, n \rangle + \langle v, \lambda v \rangle = 0, \quad k + \lambda = 0 \implies \lambda = -k,$$

что доказывает вторую формулу. □

Лекция 7

7. Элементы теории плоских кривых

Формулы Френе

Рассмотрим натуральную параметризацию плоской кривой $\gamma(s)$. Репер Френе для нее

$$e(s) = \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

Теорема 12. Верны равенства $\dot{v} = kn$, $\dot{n} = -kv$.

Рассмотрим запись этой теоремы в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{e}(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} e(s).$$

Пусть фиксирована точка $s = 0$ и в ней рассмотрим репер Френе $e(0)$. Рассмотрим

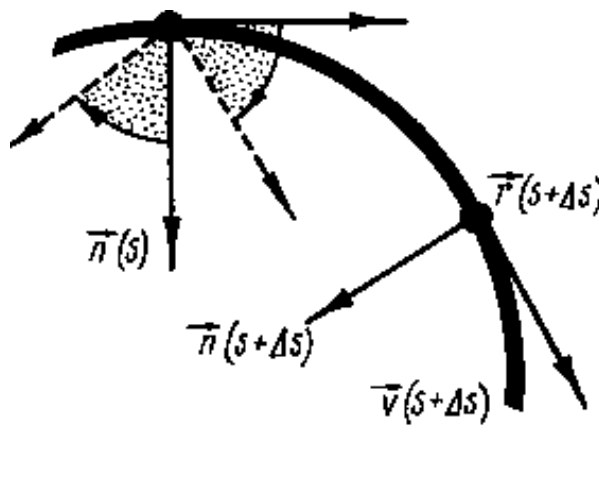


Рис. 7.1

другую точку s и в ней рассмотрим второй репер Френе $e(s)$ (рис. 7.1). Переместим второй репер параллельно, поместив начало в точку $s = 0$. Получаем два репера, которые связаны ортогональным преобразованием. Понятно, что

$$e(s) = A(s)e(0), \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & \sin \varphi(s) \\ -\sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(s)$ — угол поворота репера Френе. Возьмем производную по s и положим $s = 0$:

$$\dot{e}(0) = \dot{A}(0)e(0)$$

$$\dot{A}\Big|_0 = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi & \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi}(0) \\ -\dot{\varphi}(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi}(0) \\ -\dot{\varphi}(0) & 0 \end{pmatrix} e(0).$$

Вычисления формально не зависят от точки s ($s = 0$ была выбрана произвольно), следовательно,

$$\dot{e}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi}(s) \\ -\dot{\varphi}(s) & 0 \end{pmatrix} e(s).$$

Но ранее мы получили, что

$$\dot{e}(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} e(s).$$

Следовательно, $k(s) = \dot{\varphi}(s)$. Таким образом, кривизна кривой в точке s может быть интерпретирована как скорость изменения угла $\varphi(s)$ в этой точке. В случае плоской кривой задание функции $k(s)$ полностью определяет кривую, если только $k(s) \neq 0$ для всех s .

Элементы теории пространственных кривых

Рассмотрим теперь гладкую кривую $\gamma(t)$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , отнесенном к декартовым координатам x, y, z , т.е. $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Оказывается, что, как и в плоском случае, с каждой точкой кривой $\gamma(t)$ можно однозначно связать некоторый репер, который будет гладко меняться вдоль кривой при изменении натурального параметра s .

Снова рассмотрим $v(s) = \dot{r}(s)$ — *касательный вектор* к кривой в точке s . Длина $|v(s)| = 1$. Второй вектор — *вектор нормали*

$$n(s) = \frac{w(s)}{k(s)} = \frac{\dot{v}(s)}{k(s)} = \frac{\ddot{r}(s)}{k(s)}.$$

Заметим, что по определению кривизна не отрицательна: $k(s) = |w(s)| = |\ddot{r}| \geq 0$. Введем третий вектор — *бинормаль* $b(s) = [v(s), n(s)] = v(s) \times n(s)$ (векторное произведение векторов $v(s)$ и $n(s)$). Длина $|b(s)| = 1$.

Пусть фиксирована точка $s = 0$ и в ней рассмотрим репер Френе $e(0)$. Рассмотрим другую точку s и в ней рассмотрим второй репер Френе $e(s)$ (рис. 7.1). Переместим

второй репер параллельно, поместив начало в точку $s = 0$. Получаем два репера, которые связаны ортогональным преобразованием. Понятно, что

$$e(s) = A(s)e(0), \quad A \in SO(3),$$

где $\varphi(s)$ — угол поворота репера Френе. Возьмем производную по s и положим $s = 0$:

$$\dot{e}(0) = \dot{A}(0)e(0)$$

Пусть $X = \dot{A}(0)$. Утверждается, что $X = -X^T$, т.е. матрица X кососимметрическая. Покажем это.

Лемма 5. Матрица $X = \dot{A}(0)$, где матрица $A \in SO(3)$ определена выше, кососимметрическая.

Доказательство. Запишем условие ортогональности матрицы A . Для всяких $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$\langle A(s)a, A(s)b \rangle = \langle a, b \rangle, \quad A(0) = E.$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \dot{A}(0)a, b \rangle + \langle a, \dot{A}(0)b \rangle &= 0, \\ \langle Xa, b \rangle + \langle a, Xb \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Это и есть условие кососимметричности матрицы X . Действительно, в качестве векторов a и b можно взять базисные векторы e_i, e_j . Тогда

$$\langle Xe_i, e_j \rangle + \langle e_i, Xe_j \rangle = x_{ij} + x_{ji} = 0$$

— в точности условие кососимметричности.

Заметим, что лемма будет верна для $A(s) \in SO(n) \forall n \in \mathbb{N}$. □

Вычисления формально не зависят от точки s ($s = 0$ была выбрана произвольно), следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{e}(s) &= X(s)e(s) \\ \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определение 31. Функция $\kappa(s)$ называется кручением данной кривой.

Перепишем это выражение и получим

Теорема 13 (Френе).

$$\begin{aligned} \dot{v} &= kn, \\ \dot{n} &= -kv - \kappa b, \\ \dot{b} &= \kappa n, \end{aligned}$$

где $k(s)$ — кривизна кривой, а $\kappa(s)$ — ее кручение.

Если кривая плоская, то кручение равно нулю. И наоборот, если кручение кривой равно нулю, то кривая плоская.

Кривизна плоской кривой в произвольной параметризации

Рассмотрим плоскую кривую $\gamma(s)$. При решении многих конкретных задач оказывается, что уравнения кривой отнесены не к натуральному параметру, а к какому-то произвольному параметру t , а потому полезно уметь вычислять кривизну кривой, отнесенной к произвольному параметру.

Теорема 14. Пусть гладкая кривая $\gamma(t)$ отнесена к некоторому параметру t , не обязательно натуральному. Пусть в точке t вектор скорости $v(t)$ отличен от нуля. Тогда имеет место формула:

$$k(s) = \frac{|x''y' - x'y''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

где через $x', x'' \dots$ обозначены производные по параметру t .

Доказательство. Вспомним, что

$$ds = \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| dt, \quad r(t) = (x(t), y(t)).$$

Кроме того,

$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2} \implies ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Тогда

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

и так как

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} \implies \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{d}{dt}.$$

По определению кривизна имеет вид $k(s) = |\ddot{r}(s)|$. Перепишем вторую производную, перейдя к произвольному параметру t :

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{dr}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{dr}{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{dr}{dt} \right)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{x'' \sqrt{x'^2 + y'^2} - x' \frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^2}, \frac{y'' \sqrt{x'^2 + y'^2} - y' \frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^4} (x''x'^2 + x''y'^2 - x'^2x'' - x'y'y'', y''x'^2 + y''y'^2 - y'x'x'' - y'^2y'') = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^4} (y'(x''y' - x'y''), -x'(x''y' - x'y'')) = \frac{x''y' - x'y''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^4} (y', -x') = \ddot{r}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$k(s) = \frac{|x''y' - x'y''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

что и требовалось. □

Натуральное уравнение плоской кривой

Теорема 15. Пусть задана гладкая функция $k(s)$, не обращающаяся в нуль для всех таких s , что $a \leq s \leq b$. Тогда на плоскости существует гладкая кривая $r(s)$, определяемая однозначно с точностью до параллельного переноса и ортогонального преобразования, для которой $k(s)$ является кривизной, а s — натуральным параметром.

Доказательство. Рассмотрим репер Френе $e(s) = (v(s), n(s))$. Дана кривизна. Хотим найти радиус-вектор $r(s)$. Найти его — это и означает найти данную кривую.

Вспомним, что

$$e(s) = A(s)e(0), \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & \sin \varphi(s) \\ -\sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Подставим в эту формулу $e(s) = (v(s), n(s))$:

$$\begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & \sin \varphi(s) \\ -\sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0) \\ n(0) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\dot{r}(s) = v(s) = \cos \varphi(s)v(0) + \sin \varphi(s)n(0).$$

Проинтегрируем данное выражение:

$$r(s) = \int_0^s \cos \varphi(u)v(0)du + \int_0^s \sin \varphi(u)n(0)du + b (b = \text{const}).$$

Помним, что $\dot{\varphi}(u) = k(u)$. Тогда

$$\varphi(u) = \int_0^u k(t)dt.$$

После подстановки этого выражения в $r(t)$ все подынтегральные функции нам известны. Следовательно, известно и выражение для $r(t)$. Так как любые два начальных данных могут быть совмещены на плоскости параллельным переносом и ортогональным преобразованием, то, следовательно, однозначно определенное решение фиксируется с точностью до преобразований указанного типа. □

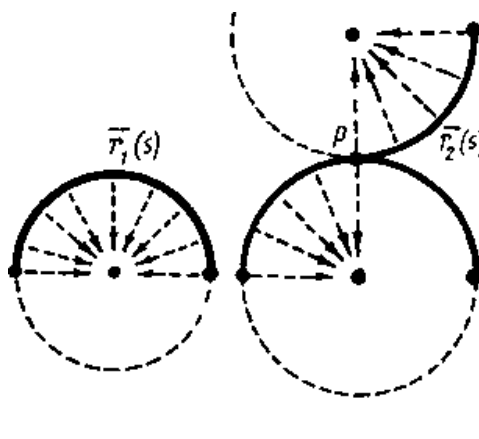


Рис. 7.2

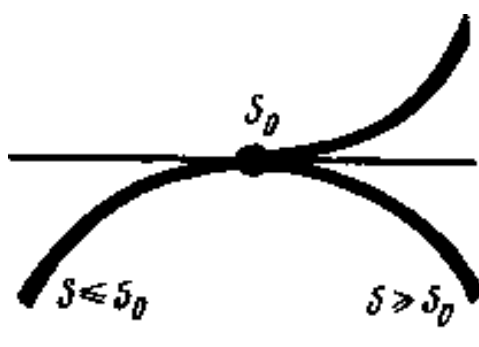


Рис. 7.3

Замечание 9. Следует обсудить роль условия $k(s) \neq 0$. На рис. 7.2 и 7.3 приведены две кривые на плоскости, имеющие совпадающие гладкие функции $k(s)$, но, очевидно, не переводимые друг в друга параллельными переносами и ортогональными преобразованиями. Обе кривые составлены из дуг окружностей. Различный характер поведения этих кривых особенно отчетливо проявляется при рассмотрении вектор-функции нормали $k(s)$. Нормаль для кривой $\gamma(s)$ все время направлена в точку O — центр окружности. Кривая $\gamma_1(s)$ является гладкой кривой, а кривая $\gamma_2(s)$ не гладкая, так как вторая производная радиус-вектора $r_2(s)$ терпит разрыв в точке P . Это обстоятельство связано с тем, что кривизна $k(s)$ является отличной от нуля постоянной во всех точках обеих кривых.

Итак, можно добиться того, чтобы обе кривые, имеющие совпадающие кривизны, были неконгруэнтны и гладки. Понятно, как надо поступать. Рассмотрим произвольную гладкую кривую, функция кривизны которой является гладкой и в некоторой точке $s = s_0$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными всех порядков. Существование таких кривых вытекает из теоремы 7, примененной к гладкой функции $k(s)$, имеющей нуль бесконечного порядка в одной из концевых точек: a или b , где $a \leq s \leq b$. Тогда, сопрягая две такие кривые в их общей концевой точке, в которой функции кривизны обращаются в нуль вместе со всеми своими производными, мы и получаем две гладкие кривые, имеющие совпадающие функции кривизны, но не конгруэнтные (см. рис. 7.3).

Однако картина меняется, если мы рассмотрим вдоль кривой гладкое поле единичных нормалей, не обращая внимание на выпуклость или вогнутость. Для этого фиксируем нормаль в какой-то точке кривой и продолжим ее до гладкого поля нормалей вдоль всей кривой. При этом мы разрешим кривизне менять знак и обращаться в ноль. То есть кривизна будет, например, положительна на выпуклых участках кривой и отрицательна на вогнутых. В таком случае теорема о восстановлении кривой по ее кривизне (с точностью до параллельного переноса и ортогонального преобразования) становится верной и для тех случаев, когда кривизна может обращаться в ноль и менять знак.

Задание кривой с помощью кривизны называется *натуральным уравнением кривой* по отношению к натуральному параметру s . То есть соотношение $k = k(s)$ – натуральное уравнение кривой (задав кривизну, мы задали и кривую $r(s)$).

Примеры гладких многообразий

Рассмотрим многообразие $M^n = \cup(U_i, \varphi_i)$. Из определения сразу видно очень важное свойство этого многообразия: для любой точки x на нем существует окрестность $U(x)$, которая гомеоморфна n -мерному диску D^n . В этом смысле все точки многообразия внутренние.

Определение 32. Многообразие будем называть *замкнутым*, если все его точки внутренние.

Рассмотрим замкнутое многообразие M^n и функцию $f(x) \in C^\infty$ на нем. Рассмотрим поверхность уровня $(f(x) = c) = V$. Рассмотрим на этом множестве $\text{grad } f(x)$. Предположим, что $\text{grad } f(x) \neq 0$ на множестве $V \forall x \in V$.

Рассмотрим в многообразии M^n подмножество $f \geq 0$, обозначим его W^n .

Определение 33. Множество W^n называется *гладким многообразием с краем*, $\partial W^n = V^{n-1}$.

Пример 7. Пространство $\mathbb{R}^n = U$ является гладким многообразием.

Пример 8. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n гиперплоскость \mathbb{R}^{n-1} и гладкую функцию $x^n = f(x_1, \dots, x^n)$ на области D . Возникает график. График является гладким многообразием размерности $n - 1$.

Как построить атлас? Область D можно покрыть открытыми шарами V_i . Тогда на графике возникает карта U_i с $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$. Все функции перехода можно считать линейными.

Геометрический смысл теоремы о неявной функции

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^n с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n . Пусть в \mathbb{R}^n задан набор гладких функций

$$\begin{cases} g_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \dots \\ g_k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} .$$

Предположим, что эти функции функционально независимы. Это означает, что матрица Якоби

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x^k} & \frac{\partial g_1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x^k} & \frac{\partial g_k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный k ($\text{rk } A = k$), что эквивалентно тому, что определитель выделенной матрицы не равен нулю.

Тогда теорема о неявных функциях утверждает, что система может быть решена

$$\begin{cases} x^1 = f_1(x^{k+1}, \dots, x^n), \\ \dots \\ x^k = f_k(x^{k+1}, \dots, x^n) \end{cases}.$$

Лемма 6. Рассмотрим поверхность уровня, задаваемую уравнением $g_\alpha(x) = 0$. Возьмем на ней произвольную точку x и рассмотрим вектор $\text{grad } g_\alpha$.

Утверждается, что $\text{grad } g_\alpha$ ортогонален поверхности уровня. Рассмотрим касательный вектор a в данной точке.

Доказательство. Рассмотрим на поверхности гладкую траекторию $x(t)$, выходящую из данной точки

$$\begin{cases} x(0) = x, \\ x'(0) = a \end{cases}.$$

Рассмотрим ограничение функции g_α на траекторию $x(t)$: $g_\alpha(x(t)) = 0$. В таком случае

$$0 = \left. \frac{dg_\alpha(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = a^i \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} = \langle a, \text{grad } g_\alpha \rangle = 0 \forall a,$$

что и требовалось доказать. \square

Рассмотрим совместную поверхность уровня, на которой все $g_\alpha = 0$. Обозначим ее M^{n-k} , так как размерность линейной оболочки, натянутой на $\text{grad } g_\alpha$, равна k .

Рассмотрим две проекции. Одна, p_1 , проектирует плоскость, натянутую на градиенты, на координатную плоскость $\mathbb{R}^k(x^1, \dots, x^k)$, а вторая проекция, p_2 , проектирует касательную плоскость к поверхности M^{n-k} на координатную плоскость $\mathbb{R}^{n-k}(x^1, \dots, x^n)$.

Лемма 7. Проекция p_1 является линейным изоморфизмом плоскостей $\{\text{grad } g_\alpha\}$ и \mathbb{R}^k , а проекция p_2 является линейным изоморфизмом касательной плоскости к M^{n-k} и координатной плоскости \mathbb{R}^{n-k} .

Доказательство. Матрица Якоби A при проекции на \mathbb{R}^k принимает вид

$$\begin{pmatrix} \text{grad } g_1 \\ \vdots \\ \text{grad } g_k \end{pmatrix}.$$

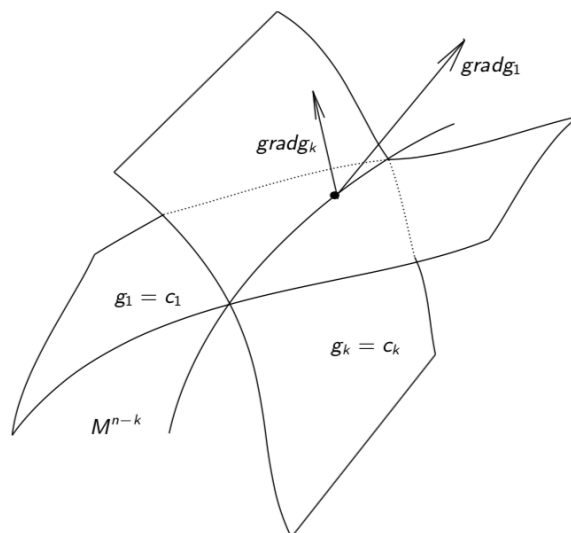


Рис. 7.4

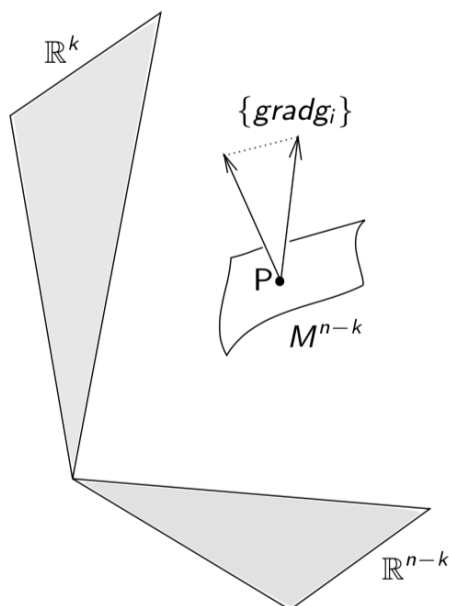


Рис. 7.5

Без ограничения общности можно считать, что ранг k матрицы Якоби достигается на первых k координатах x^1, \dots, x^k . В противном случае всегда можно перенумеровать координаты. При проекции p_1 градиентов $\{\text{grad } g_\alpha\}$ на плоскость \mathbb{R}^k их координаты $(\frac{\partial g_i}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial x^n})$ переходят в 0. Следовательно, плоскость, натянутая на градиенты, проектируется изоморфно на плоскость \mathbb{R}^k . Но тогда и ортогональная ей плоскость, касающаяся поверхности M^{n-k} проектируется при отображении p_2 изоморфно на плоскость \mathbb{R}^{n-k} . Докажем это.

Пусть у нас есть пространства A^k и B^{n-k} (перпендикулярны); пусть задана еще одна пара подпространств A' и B' (перпендикулярны). Рассмотрим проекции p_1 :

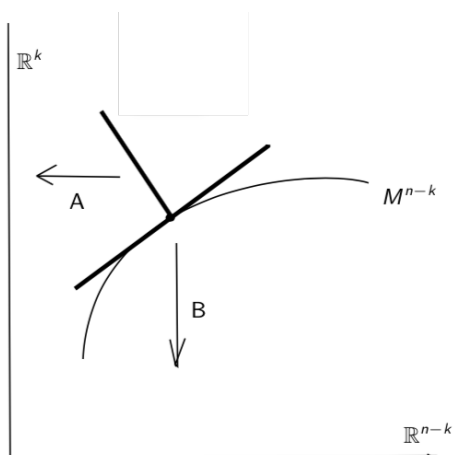


Рис. 7.6

$A \rightarrow A'$ и $p_2 : B' \rightarrow B$. Утверждается, что если p_1 — линейный изоморфизм, то и p_2 — линейный изоморфизм. Считаем, что $\mathbb{R}^n = A' \oplus B'$. Так как p_1 — линейный изоморфизм, то $\dim A' = k$, а значит $\dim B' = n - k$.

Предположим обратное. Пусть $\text{Ker } p_2 \ni v \neq 0, v \in B'$. При проекции p_2 пространство A проектируется в ноль. Следовательно, $v \in A \cap B'$. спроектируем $p_2(v) = w \in A'$. Тогда w раскладывается в прямую сумму $w = z + v$, где $z \in B$. Имеем

$$\langle w, v \rangle = \langle z + v, v \rangle = \langle z, v \rangle + \langle v, v \rangle = 0 + \langle v, v \rangle \neq 0.$$

С другой стороны, $v \in B'$, а $A' \perp B' \implies \langle w, v \rangle = 0$ — противоречие.

Лемма доказана. □

Тем самым мы вводим гладкий атлас на поверхности M^{n-k} (представили ее в виде графика гладкого отображения). Т.е. совместный уровень является гладким $n-k$ -мерным подмногообразием пространства \mathbb{R}^n . В этом и состоит геометрический смысл теоремы о неявных функциях.

Лекция 8

8. Гладкие многообразия и подмногообразия

Гладкое подмногообразие

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^n с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n . Пусть в \mathbb{R}^n задан набор гладких функций

$$\begin{cases} g_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \dots \\ g_k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Предположим, что эти функции функционально независимы, т.е. ранг матрицы Якоби равен k . Тогда существует решение

$$\begin{cases} x^1 = f_1(x^{k+1}, \dots, x^n), \\ \dots \\ x^k = f_k(x^{k+1}, \dots, x^n) \end{cases},$$

и совместный уровень $\{g_\alpha = 0\}$ является гладким $n - k$ -мерным подмногообразием пространства \mathbb{R}^n .

Определение 34. Подмножество $V^{n-k} \subset M^n$ является $n - k$ -мерным гладким подмногообразием в M^n , если для любой точки $x \in V$ найдется открытая окрестность $U(x) \subset V$ и функции $g_i \in C^\infty$, что

$$U \cap V = \{g_i(x) = 0\} \text{ и } \text{rk}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}\right) = k.$$

Определение 35. Подмножество $V^{n-k} \subset M^n$ является $n - k$ -мерным гладким подмногообразием в M^n , если для любой точки $x \in V$ найдется открытая окрестность $U(x) \subset V$ и в ней локальные координаты x^1, \dots, x^n , что

$$U \cap V = \{x^i(x) = 0 \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Утверждение 3. Два определения подмногообразия эквивалентны.

Доказательство. Из определения 35 очевидно следует определение 34. В самом деле, за искомые функции $g_i(x)$ достаточно взять первые k координат x^1, \dots, x^n , уже заданные в окрестности $U(x)$.

Выведем из определения 34 определение 35. Нам уже даны функции g_1, \dots, g_k , функционально независимые в окрестности $U(x)$. Требуется дополнить этот набор еще $n - k$ гладкими функциями g_{k+1}, \dots, g_n , чтобы получившийся полный набор задавал регулярную локальную систему координат. Можем считать, что окрестность $U(x)$ совмещена с открытым диском в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , поскольку объемлющее многообразие M^n является гладким и на нем заданы локальные гладкие координаты, отождествляющие окрестность $U(x)$ с евклидовым шаром.

Рассмотрим векторы $\text{grad } g_1, \dots, \text{grad } g_k$, т.е. градиенты заданных нам функций g_1, \dots, g_k . Градиенты линейно независимы (ввиду условия на ранг матрицы Якоби), а потому на них натягивается k -мерная плоскость в \mathbb{R}^n . Рассмотрим $(n-k)$ -мерную плоскость, ортогональную плоскости градиентов и пусть векторы e_{k+1}, \dots, e_n образуют базис, т.е. все они линейно независимы. Для каждого из них очевидно существует линейная функция a_α такая, что $e_\alpha = \text{grad } a_\alpha$.

Рассмотрим набор функций $g_1, \dots, g_k, a_{k+1}, \dots, a_n$. Поскольку их градиенты линейно независимы, то ранг этой системы функций равен n , а следовательно, они образуют регулярную локальную систему координат в заданной окрестности. Теорема доказана. \square

Примеры гладких многообразий

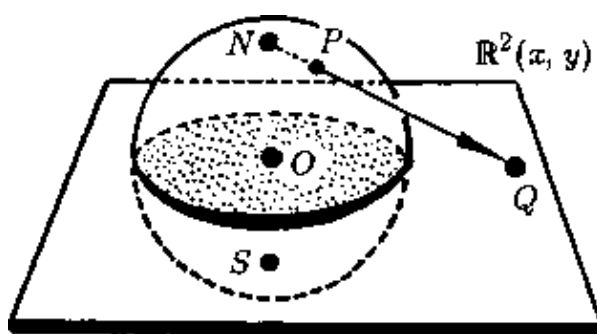


Рис. 8.1

- 1) Рассмотрим сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Точка $Q = \varphi_1(P)$, $\varphi_1 : S^n/N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда $U_1 = S^n/N$, φ_1 — координатное отображение. Получили первую карту (U_1, φ_1) . Соединим теперь точку P с южным полюсом S , а пересечение этой прямой с горизонтальной осью обозначим $\varphi_2(P)$, $\varphi_2 : S^n/S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда $U_2 = S^n/S$, φ_2 — координатное отображение. Получили вторую карту (U_2, φ_2) .

Очевидно, что $S^n = U_1 \cup U_2$. Осталось доказать, что функция перехода φ_{12} гладкая. Пусть $|O\varphi_1(P)| = r$, $|O\varphi_2(P)| = \rho$,

$$\varphi_1(P) = (r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad \varphi_2(P) = (\rho, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}),$$

где α_i — направляющие углы, задающие радиус-вектор от нуля до точки $\varphi_1(P)$. Пусть угол между $N\varphi_1(P)$ и вертикальной осью равен φ (угол между SP и вертикальной осью такой же). Тогда

$$1 = \text{tg } \varphi, \quad \rho = 1 \cdot \text{tg } \varphi \implies \rho = \frac{1}{r}, \quad r \neq 0.$$

Таким образом, нашли функцию перехода φ_{12} .

- 2) Рассмотрим $\mathbb{R}P^n$. Одна из моделей — это пучок прямых в пространстве \mathbb{R}^{n+1} , проходящих через точку 0. Точка из $\mathbb{R}P^n$ может быть задана как набор чисел $l = \lambda(x_1, \dots, x_n)$ с условием, что $\exists i : x_i \neq 0$ и $\lambda \neq 0$ — вещественное.

Теорема 16. *Пространство $\mathbb{R}P^n$ является гладким вещественно-аналитическим многообразием.*

Доказательство. Построим атлас $\mathbb{R}P^{n+1} = (U_1, \varphi_1) \cup \dots \cup (U_{n+1}, \varphi_{n+1})$. Введем множество $U_i = (\lambda(x^1, \dots, x^{n+1}))$, где $x^i \neq 0, \lambda = 0$. Это множество открыто, так как дополнение к нему задается одним уравнением $x^i = 0$, а $(x^i = 0)$ — замкнутое подмножество. Значит, $\mathbb{R}P^{n+1}/(x_i = 0)$ открыто. Теперь введем координатное отображение φ_i . Делим всю строку $(\lambda(x^1, \dots, x^{n+1}))$ на λx_i . Получим

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Введем новые координаты $(\alpha^1, \dots, \hat{\alpha}^i, \dots, \alpha^{n+1})$, где $\alpha^j = x^j/x^i$, а $\hat{\alpha}^i$ означает, что данная координата отсутствует. Таким образом, получили отображение

$$\varphi_i((\lambda(x^1, \dots, x^{n+1}))) \longrightarrow (\alpha^1, \dots, \hat{\alpha}^i, \dots, \alpha^{n+1}), \quad \alpha^k = \frac{x^k}{x^i}, \quad k \neq i.$$

Найдем функции склейки

$$U_i \cap U_j = (\lambda(x^1, \dots, x^i \neq 0, \dots, x^j \neq 0, x^{n+1})),$$

$$\varphi_i(\alpha^k = \frac{x^k}{x^i}), k \neq j \quad \varphi_j(\beta^k = \frac{x^k}{x^j}), k \neq j$$

Напишем функции перехода

$$\alpha^k = \frac{x^k}{x^i} = \frac{x^k/x^j}{x^i/x^j} = \frac{\beta^k}{\beta^i}; \quad \alpha^j = \frac{x^j}{x^i} = \frac{1}{x^i/x^j} = \frac{1}{\beta^i}.$$

Итак,

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \alpha^k = \frac{\beta^k}{\beta^i}, \\ \alpha^j = \frac{1}{\beta^i}. \end{cases}$$

Это гладкие вещественно-аналитические функции. □

Понятие касательного вектора

Пусть на многообразии $M^n \subset \mathbb{R}^N$ задан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Координатные отображения вводят локальные регулярные координаты x^1, \dots, x^n в картах. Рассмотрим гладкие функции $f(x)$ на M^n .

Определение 36 (Первое определение касательного вектора). Рассмотрим кривые $\gamma(t)$ в окрестности U , проходящие через точку x : $\gamma(0) = x, \gamma(t) = x(t)$. Две кривые γ_1 и γ_2 называются *эквивалентными* или *соприкасающимися*, если для любой $f \in U$

$$\frac{df}{d\gamma_1} = \frac{df}{d\gamma_2}.$$

Касательным вектором в данной точке назовем класс соприкасающихся кривых в данной точке (рис. 8.2).

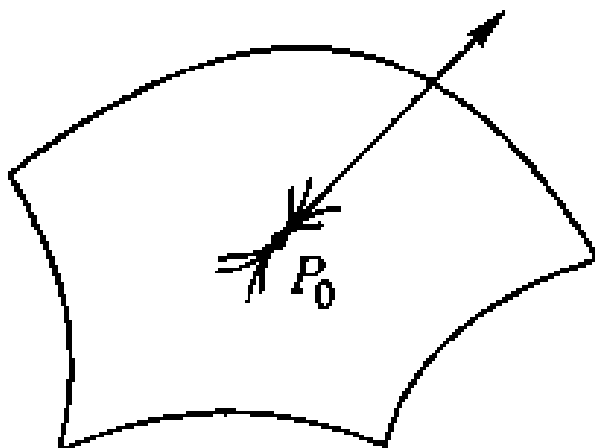


Рис. 8.2

Напомним, что

$$\frac{df}{d\gamma} = \frac{d}{dt} f(x(t))|_{t=0}.$$

Определение 37 (Второе определение касательного вектора). Скажем, что в точке $x \in M$ задан касательный вектор $a = (a^1, \dots, a^n)$, если в любой локальной регулярной криволинейной системе координат числа a^i преобразуются по следующему закону

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i.$$

Определение 38 (Третье определение касательного вектора). Скажем, что в точке $x \in M$ задан касательный вектор $a = (a^1, \dots, a^n)$, если задан линейный дифференциальный оператор

$$D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Теорема 17. Все три определения касательного вектора эквивалентны.

Доказательство. $1 \implies 2$ Пусть в точке задан пучок соприкасающихся кривых. Имеем

$$\frac{df}{d\gamma} = \frac{d}{dt} f(x(t))|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} |_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} a^i.$$

Набор чисел (a^i) сопоставим пучку кривых. Скажем, что мы получили касательный вектор в смысле определения 2. Проверим корректность определения.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} a^i = \frac{df}{d\gamma_1} = \frac{df}{d\gamma_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} b^i. \forall t \implies a^i = b^i.$$

Убедимся теперь, что числа преобразуются по нужному нам закону

$$a^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt} |_{t=0} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} |_{t=0} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i.$$

$2 \implies 3$ По определению 2 задан набор чисел. Сопоставим ему оператор $D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Проверим корректность при замене координат:

$$\tilde{D} = a^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{x^i} a^i \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^p} = \delta_i^{p'} a^i \frac{\partial}{\partial x^p} = D.$$

$3 \implies 1$ Пусть задан дифференциальный оператор $D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Рассмотрим точку x и все кривые $\gamma(t): \gamma(0) = x$ такие, что $D(f) = \frac{df}{d\gamma} \forall f$. берем γ_1 и γ_2 из этого пучка. Тогда

$$\frac{df}{d\gamma_1} = D(f) = \frac{df}{d\gamma_2}.$$

Значит, эти кривые соприкасаются. Мы получили пучок таких кривых, а это и есть касательный вектор в смысле определения 1. Почему существуют такие кривые? Рассмотрим кривую $\gamma(t): \dot{\gamma}(t) = a$. Тогда $D(f) = \frac{df}{d\gamma} \forall f$ очевидно выполнено. \square

Следствия

Пусть на многообразии $M^n \subset \mathbb{R}^N$ задан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$.

Определение 39. Касательным пространством в точке x к многообразию M^n назовем все операторы вида $D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, т.е.

$$T_x M^n = \left\{ D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}.$$

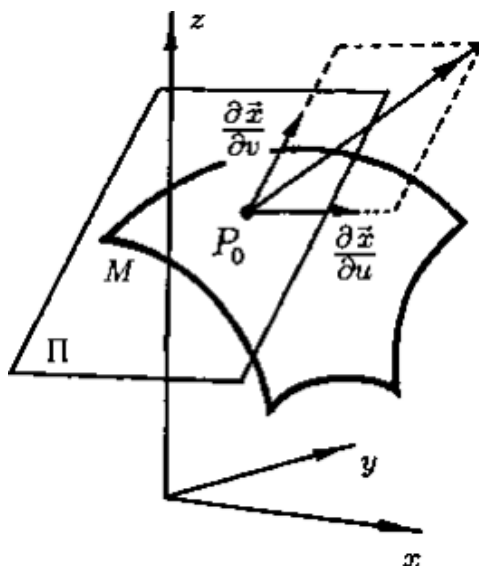


Рис. 8.3

Пространство $T_x M^n$ является линейным вещественным пространством. Пусть даны два дифференциальных оператора D и Q . Тогда определена их линейная комбинация

$$\alpha D + \beta Q = (\alpha a^i + \beta b^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

— это снова линейный дифференциальный оператор. Значит, это снова касательный вектор.

Рассмотрим теперь два гладких многообразия M^n и P^m . Пусть есть гладкое отображение $f : M \rightarrow P$. Тогда возникает отображение

$$df : T_x M \rightarrow T_{y=f(x)} P.$$

Рассмотрим вектор $a \in T_x M^n$ и его образ $f(a) = b \in T_y P^m$. Тогда

$$b^i = \left. \frac{dy^i(x)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} a^\alpha,$$

$$(df(a))^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} a^\alpha.$$

Погружения и вложения гладких многообразий

Пусть дано отображение $f : M^n \rightarrow P^m$, где M^n и P^m — два гладких многообразия.

Определение 40. Точка x называется *регулярной точкой* отображения f , если $\text{rk}(df)|_x = \min(n, m)$.

- 1) $n \leq m$. В этом случае точка будет регулярной, если $\text{rk}(df)|_x = n$. Подмножество $f(M^n)$ будет являться гладким подмногообразием в P^m .

В самом деле, введем в окрестности U координаты u^1, \dots, u^n . При отображении f возникают координатные линии на образе $f(U) \subset P^m$. Следовательно, возникает набор n линейно независимых векторов a_1, \dots, a_n . Рассмотрим теперь линейно независимые векторы b_1, \dots, b_{m-n} из точки $f(x) = y$. Пусть они образуют базис в ортогональной $(m-n)$ -мерной плоскости. Получили в точке x базис из m векторов. Тогда, оказывается, можно определить базис во всех близких точках, так как система уравнений $\langle b_i, a_\alpha \rangle = 0$ гладкая и возникает решение во всех близких точках.

Убедимся, что $f(M)$ — гладкая поверхность вблизи точки y . Рассмотрим точку $v \in P^m$ с координатами v^i . построим гладкие функции

$$g_1(v) = v^1, \dots, g_{m-n}(v) = v^{n-m}$$

в окрестности образа. Эти функции гладко продолжаются на окрестность данной точки y (задан гладкий базис). Их совместный уровень — наше множество $f(M)$. Тогда по теореме о неявной функции $f(M)$ — гладкое подмногообразие размерности n .

- 2) $n > m$. В этом случае точка будет регулярной, если $\text{rk}(df)|_x = m$.

Определение 41. Точка $y \in P^m$ является *регулярным значением* отображения f , если все точки ее прообраза $f^{-1}(\xi)$ являются регулярными в M^n . По условию это означает, что $\text{rk}(df)|_x = m \implies f^{-1}(\xi) = Q^{n-m}$ — гладкое подмногообразие.

Определение 42. Пусть дано гладкое отображение $f : M^n \rightarrow P^m$, где M^n и P^m — два гладких многообразия, $n \leq m$. Оно называется *погружением*, если $\text{rk}(df)|_x = n$, т.е. $\det(df) \neq 0 \forall x \in M$.

Определение 43. Пусть дано гладкое отображение $f : M^n \rightarrow P^m$, где M^n и P^m — два гладких многообразия, $n \leq m$. Оно называется *вложением*, если оно погружение и $f : M^n \rightarrow f(M^n)$ — гомеоморфизм.

Пример 9. Пример погружения, которое не является вложением: рассмотрим отображения окружности в эллипс и в «восьмерку». Первое является вложением, а второе погружением, так как имеет место «склеивка точек».

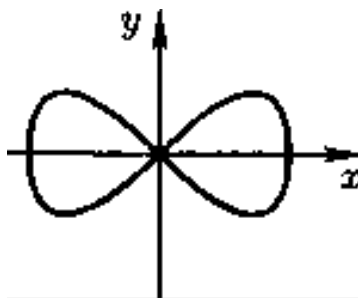


Рис. 8.4

Лекция 9

9. Теорема Уитни о вложении гладких многообразий

Теорема Уитни

Рассмотрим два класса объектов: первый класс — гладкие многообразия в конечномерном евклидовом пространстве (гладкие поверхности) $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, второй класс — гладкие многообразия M^n , заданные с помощью гладкого атласа. Во втором определении никакого вложения в евклидово пространство не предусматривается. Как соотносятся эти два класса?

Понятно, что первый класс является подмножеством второго.

Теорема 18 (Уитни). Пусть M^n , заданное с помощью гладкого атласа. Тогда его можно вложить в некоторое конечномерное евклидово пространство \mathbb{R}^N , $N < \infty$. Т.е. его можно реализовать как гладкую поверхность в конечномерном евклидовом пространстве.

Доказательство. Проведем доказательство только в случае, когда M^n компактно. В случае, когда M^n некомпактно теорема тоже верна.

Лемма 8. Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^n . В нем рассмотрим $D^n \subset \mathbb{R}^n$ и сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Существует гладкое отображение $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$, при котором диск D^n диффеоморфно отображается на S^n/N , а все дополнение диска отображается в северный полюс $h : \mathbb{R}^n/D^n \rightarrow N$.

Доказательство. Начнем со случая $n = 1$. Утверждается, что можно построить отображение интервала на дополнение точки в окружности, т.е. $h : D^1 \rightarrow S^1/N$.

Пусть φ — полярный угол. Рассмотрим отображение вида (рис. 9.1)

$$f : \begin{cases} x = \cos \varphi(t) \\ y = \sin \varphi(t) \end{cases}$$

Однако у этой функции в точках 0 и 2π имеется излом. Как сгладить излом? Рассмотрим функцию

$$y : \begin{cases} e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}}, & a < x < b \\ 0, & x \geq b \\ 0, & x \leq a \end{cases}$$

Это функция класса C^∞ .

Теперь построим функцию $\rho(x) = \int_0^x u(u) du$ (это площадь под графиком функции $y(u)$ (рис. 9.2)). Ее график имеет вид (рис. 9.3)

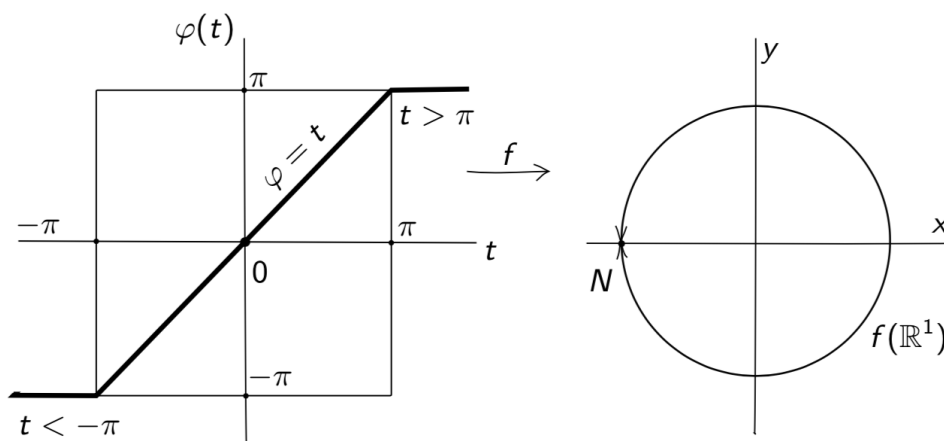


Рис. 9.1

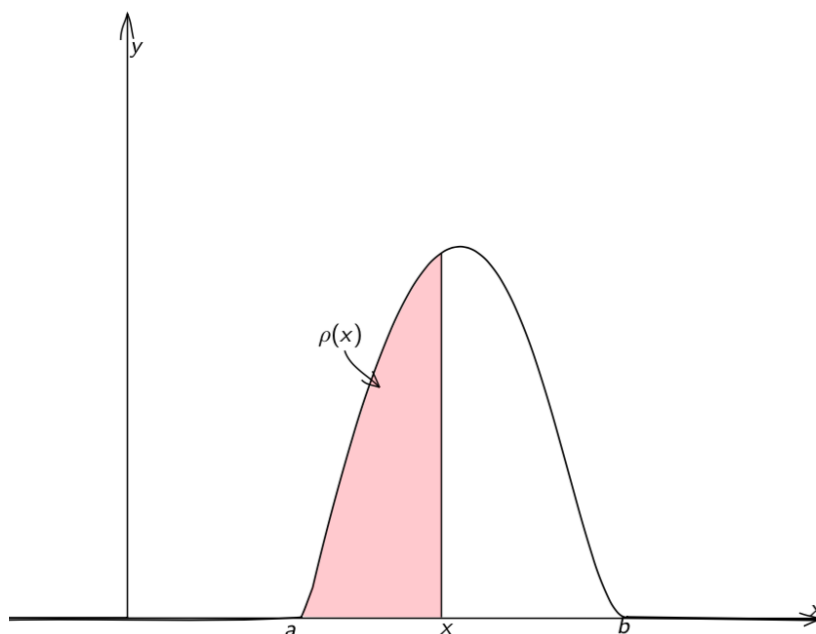


Рис. 9.2

Таким образом, мы можем сгладить функцию $\varphi(t)$, получив гладкую функцию $\tilde{\varphi}(t)$. Теперь рассмотрим гладкое отображение

$$h : \begin{cases} x = \cos \tilde{\varphi}(t) \\ y = \sin \tilde{\varphi}(t) \end{cases} .$$

Получаем отображение всей вещественной прямой на окружность, при этом интервал $(-\pi, \pi)$ переходит диффеоморфно на интервал S^1/N , а дополнение отображается в точку N (рис. 9.4). Лемма для случая $n = 1$ доказана. Как доказать для произвольного n ? Рассмотрим сферу S^n и диск D^n (рис. 9.5). Диск расслоим на диаметры. Возьмем один из них (отмечен красным) и прямую, которая им порожд-

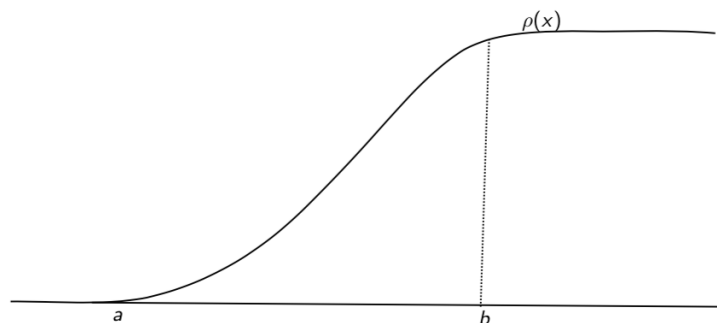


Рис. 9.3

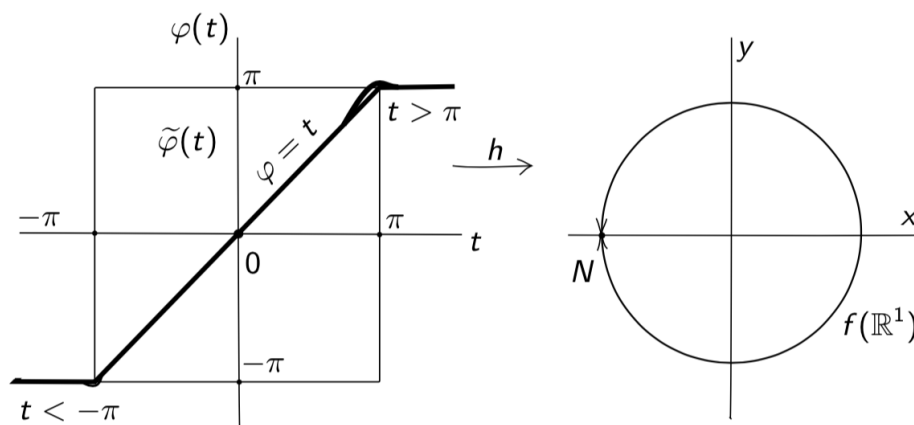


Рис. 9.4

дена в пространстве \mathbb{R}^n . Хотим отобразить шар D^n на сферу с проколом. Возьмем диаметр (отмечен красным) и на нем построим функцию

$$h : \begin{cases} x = \cos \tilde{\varphi}(t) \\ y = \sin \tilde{\varphi}(t) \end{cases} .$$

Т.е. отобразим диаметр (а точнее, всю прямую) на окружность S^1 , которая лежит на сфере и проходит через северный полюс N . По лемме для $n = 1$ это возможно сделать. Повторяя эту процедуру для всех диаметров диска, получаем искомое отображение. Лемма полностью доказана. \square

Рассмотрим компактное многообразие $M^n = \cup(U_i, \varphi_i)$, заданное с помощью атласа. Для компактных многообразий из любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, поэтому считаем, что $M^n = \bigcup_{i=1}^k (U_i, \varphi_i)$, $k < \infty$. Рассмотрим произвольную карту U_i . Каждая карта по определению гомеоморфна диску. по предыдущей лемме можно построить отображение φ_i всего многообразия на сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (рис. 9.6)

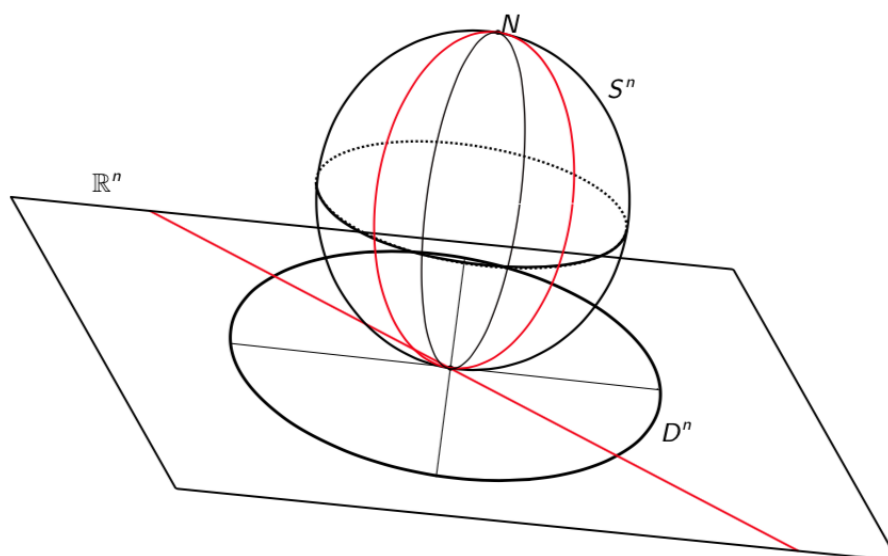


Рис. 9.5

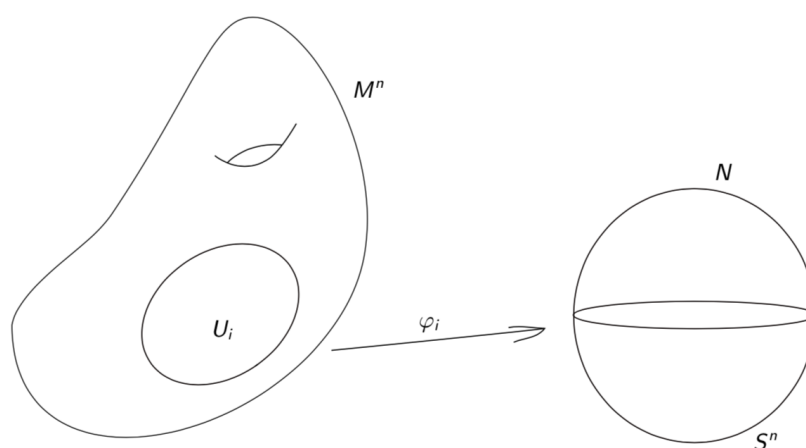


Рис. 9.6

$$\begin{cases} \varphi_i : U_i \rightarrow S^n/N \text{ — диффеоморфизм} \\ \varphi_i : M^n/U_i \rightarrow N \end{cases}$$

Строим такое отображение для каждой карты. Получаем набор гладких отображений $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$, где k — число элементов покрытия. Итак, отображение многообразия M^n на сферу S^n — это $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$, $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{k(n+1)}$:

$$\varphi_i(x) = (y_i^1(x), \dots, y_i^{n+1}(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}(y).$$

Нужно проверить, что

- φ — гладкое отображение. Это очевидно, так как по предыдущей лемме все φ_i были гладкие.

- Хотим доказать, что φ — погружение. Найдем его ранг (хотим убедиться, что он равняется n). Запишем матрицу Якоби:

$$df = (d\varphi_1, \dots, d\varphi_k).$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in M^n$. Существует $i: x \in U_i$. Рассмотрим $d\varphi_i(x)$ для этого i . Так как $\varphi_i: U_i \rightarrow S^n/N$ — диффеоморфизм, то $\text{rk } d\varphi_i(x) = n$. В силу произвольности выбора точки x $\text{rk } df = n$. Положим $N = k(n+1) < \infty$.

- Хотим доказать, что φ — вложение, т.е., что точки не склеиваются (φ — го-меоморфизм). Рассмотрим две точки $x \neq y \in M^n$.

– Пусть точки x, y «близки», т.е. есть карта $U_i \ni x, y$.

$$\varphi(x) = (\dots, \varphi_i(x), \dots),$$

$$\varphi(y) = (\dots, \varphi_i(y), \dots).$$

Так как φ_i диффеоморфизм на S^n для внутренних точек шара, то $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) \implies \varphi(x) \neq \varphi(y)$.

- Пусть точки x, y «далеки», т.е. есть $x \in U_i, y \notin U_i$. Точка x как внутренняя точка шара при отображении φ_i переходит в точку сферы, отличную от северного полюса:

$$\varphi(x) = (\dots, \varphi_i(x) \neq N, \dots).$$

Все точки, лежащие вне шара, переводятся отображением φ_i в северный полюс

$$\varphi(y) = (\dots, \varphi_i(y) = N, \dots).$$

Таким образом, $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) \implies \varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Теорема доказана. □

Ориентируемые многообразия

Определение 44. Многообразие $M^n = \cup(U_i, \varphi_i)$ называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентируемый атлас (т.е. в каждой карте U_i задана своя локальная ориентация), и на пересечении карт $U_i \cap U_j$ ориентации локальных карт согласованы $\det \varphi_{ij} > 0$.

Что означает задать ориентацию? Если в каждой карте U_i введены локальные координаты x_1, \dots, x_n , то «задать ориентацию» означает «задать порядок координат» (какая будет первой, какая второй и т.д).

Определение 45. Многообразие $M^n = \cup(U_i, \varphi_i)$ называется *неориентируемым*, если какой бы атлас мы на нем не взяли, найдутся две карты U_i и U_j , что на их пересечении $U_i \cap U_j$: $\det \varphi_{ij} < 0$.

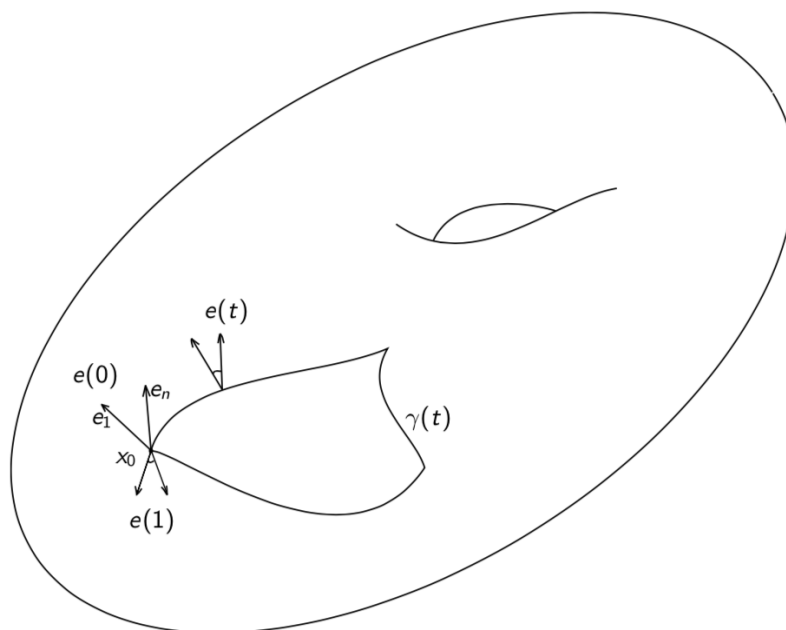


Рис. 9.7

Определение 46. Рассмотрим точку $x_0 \in M^n$. В ней рассмотрим касательную плоскость и репер, т.е. набор независимых векторов e_1, \dots, e_n . Рассмотрим кусочно–гладкие пути $\gamma(t) \in M^n$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, $0 \leq t \leq 1$ — петля. Обозначим базис e_1, \dots, e_n в начальный момент времени за $e(0)$. Начнем его непрерывно деформировать вдоль петли $\gamma(t)$. В процессе деформации базис остается базисом. Получили непрерывное семейство базисов. В конечной точке получили новый базис $e(1)$. Скажем, что многообразие *ориентируемое*, если для любой петли с вершиной в точке x_0 и для любой непрерывной деформации базиса вдоль этой петли мы возвращаемся в исходную точку с той же ориентацией базиса (т.е. ориентация базиса $e(0)$ совпадает с ориентацией базиса $e(1)$). Два базиса считаются одинаково ориентированными, если детерминант матрицы перехода положителен. Напомним, что $e(t) \in T_{\gamma(t)}M^n$.

Многообразие называется *неориентируемым*, если существует такая петля, вдоль которой непрерывная деформация репера меняет ориентацию.

Теорема 19. Два определения (опр. 44 и опр.46) ориентируемого многообразия эквивалентны.

Доказательство. Если многообразие M ориентировано в смысле определения 44, то в каждой точке $x \in M$ в качестве ориентирующего репера можно взять репер (e_{1j}, \dots, e_{nj}) , состоящий из базисных ортов к координатным осям (x_j^1, \dots, x_j^n) области U_j , в которой находится точка x . Так как якобианы переходов положительны, то это определение не зависит от выбора окрестности U_j , в которой находится точка x (если она находится в двух областях U_j и U_k). Обратно, если многообразие ориентировано в смысле определения 46, то в каждой точке x задан ориентирующий класс реперов. Рассмотрим достаточно малую ε -окрестность точки x : введем координаты (x^1, \dots, x^n) в этой φ -окрестности такие, что репер (e_1, \dots, e_n) , составленный из касательных ортов к осям (x^j) , определяет ту же ориентацию, что и

ориентирующий репер, во всех точках ε -окрестности. Такое малое $\varepsilon > 0$ можно выбрать, так как ориентирующий класс реперов непрерывно зависит от точки x (хотя φ может зависеть от точки). Прделав эту процедуру для всех точек, получим покрытие многообразия областями, где якобианы перехода все положительны, так как в каждой точке знак касательного репера к выбранным системам координат положителен по отношению к ориентирующему классу реперов. Утверждение доказано. \square

Классификация двумерных гладких поверхностей

Рассмотрим квадрат и будем из него склеивать двумерные многообразия. В первом случае получаем двумерное ориентированное многообразие — цилиндр. Во втором — неориентируемую двумерную поверхность — лист Мебиуса.

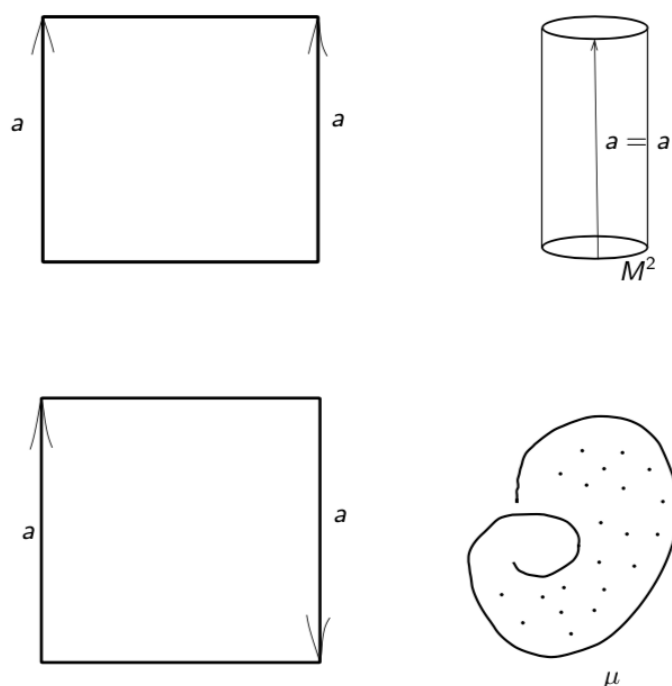


Рис. 9.8

Далее будем рассматривать M^2 — двумерное гладкое замкнутое (без края) связное компактное многообразие.

Рассмотрим еще один пример склейки. В результате получим тор (рис. 9.9).

Если расположить стрелки немного в другом направлении, то получится бутылка Клейна KL (рис. 9.10).

Перейдем к классификации двумерных поверхностей.

Шаг 1

Определение 47. Рассмотрим двумерную поверхность M^2 . Скажем, что на ней задана *гладкая триангуляция*, если задан набор гладких дуг, которые будут пе-

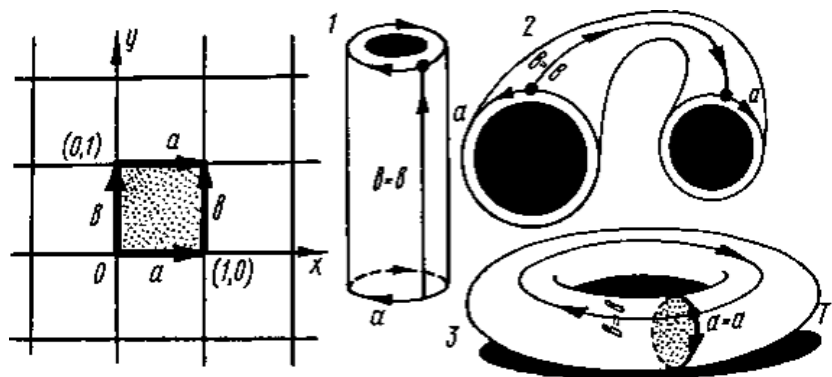


Рис. 9.9

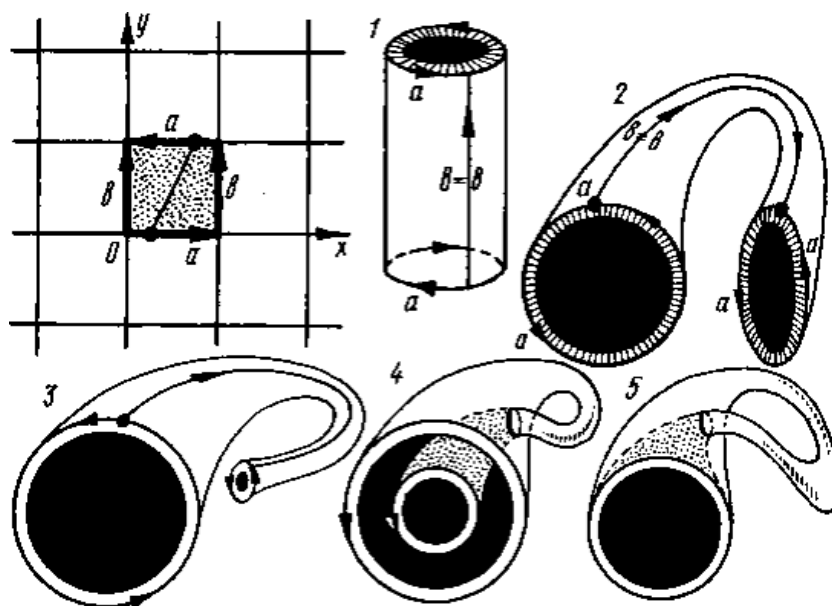


Рис. 9.10

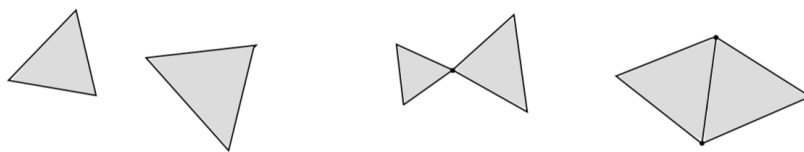
ресекаются только в своих концах. Эти дуги называются ребрами триангуляции. Концы лежат в конечном наборе точек на поверхности, которые называются вершинами триангуляции.

Итак, дуги разбивают поверхности на набор треугольников, причем, разрешены следующие ситуации: либо треугольники не пересекаются, либо пересекаются по одной вершине, либо по одной общей стороне (рис. 9.11).

Теорема 20 (без доказательства). *На любом гладком многообразии всегда существует конечная гладкая триангуляция.*

Очевидно, что триангуляция на многообразии определена не единственным образом.

Разрешенные ситуации



Запрещенные ситуации

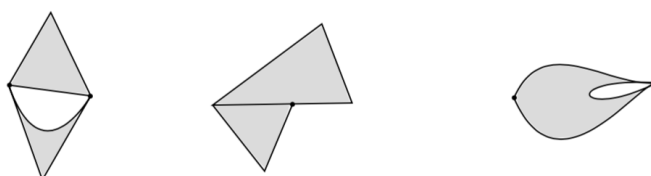


Рис. 9.11

Шаг 2

Рассмотрим любую гладкую конечную триангуляцию на многообразии. На ребрах треугольников ставим стрелки (ориентацию выбираем произвольно) и различные буквы. Затем режем многообразие вдоль всех ребер. Каждое ребро тем самым удваивается, а многообразие теперь представляет собой набор треугольников с таким свойством: на сторонах каждого треугольника есть буква и стрелка, причем каждая буква встречается два раза (т.к. у многообразия нет края). Треугольники рассматриваем с точностью до гомеоморфизма, т.е. не стремимся сохранять углы, длины сторон и т.д. (рис. 9.12)

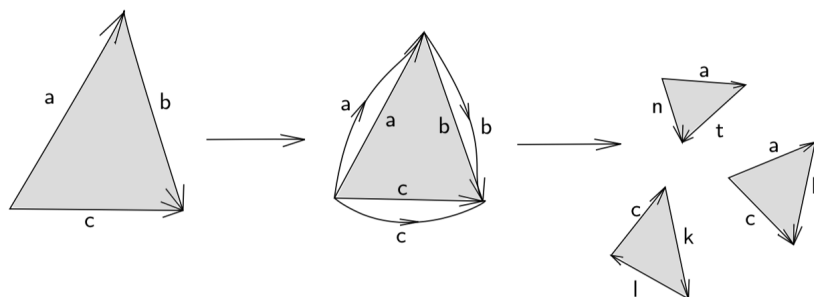


Рис. 9.12

Шаг 3

Склеиваем обратно треугольники, стремясь получить плоскую фигуру (многоугольник), на границе которой будут расставлены буквы и стрелки. На границе полученного плоского многоугольника обязательно существует хотя бы одна буква «b» такая, что ее дубликат лежит на каком-то из оставшихся треугольников. Действительно, допустим противное. Восстановим все склейки, но тогда M^2 окажется

несвязным объединением по крайней мере двух непересекающихся кусков (компонент). Противоречие. Итак, существует « b » со своим дубликатом в оставшихся

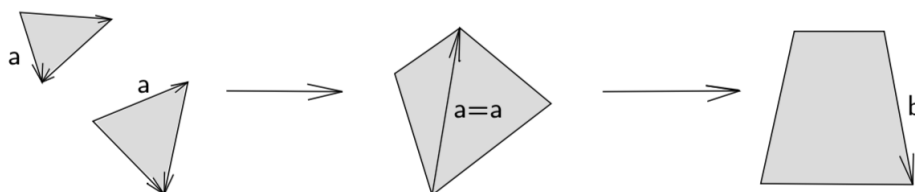


Рис. 9.13

треугольниках. Склеиваем по « b » и «стираем» этот разрез. И т.д. В итоге получим плоский связный многоугольник W . Мы исчерпаем (т.е. подклеим) все треугольники (иначе будет противоречие со связностью M^2). (рис. 9.13)

Итог: на границе ∂W многоугольника W каждая буква « a » встречается ровно два раза. Построение W , вообще говоря, неоднозначно. Он называется плоской разверткой или фундаментальным многоугольником. Склеив стороны W , получим исходное многообразие и некую систему линий на нем, которая уже может не образовывать триангуляцию.

Лекция 10

10. Классификация двумерных гладких поверхностей

Классификация двумерных гладких поверхностей

Шаг 4

По многоугольнику W строим «слово» (код) W . Будем его упрощать и приведем к каноническому виду (это конечная цель). Обходим границу ∂W и выписываем буквы, указывая их ориентации (рис. 10.1)

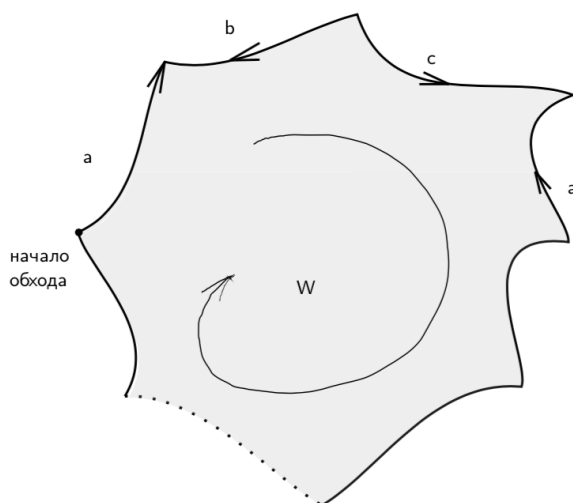


Рис. 10.1

$$W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}; \quad \varepsilon_\alpha = \pm 1.$$

Итак, $M^2 \rightarrow W(M^2)$ (=слово, код). Снова получили неоднозначное представление. Исправим это.

Лемма 9. Если $W = \text{---}aa^{-1}\text{---}$ (прочерком обозначаем остальные буквы), то на том же M^2 существует новая система разрезов, что $W' = \text{---}\text{---}$ (т.е. aa^{-1} исчезает, а остальные не меняются).

Доказательство. См. рис. 10.2. □

Шаг 5

В этом шаге сделаем так, что все вершины переходят в одну вершину.

Рассмотрим классы эквивалентных вершин (т.е. склеивающихся в одну точку на M^2): $\{P\}, \{Q\}, \dots, \{R\}$. Тогда (если их больше, чем один) существуют два класса $\{P\}$ и $\{Q\}$ с парой их вершин на одном ребре (рис. 10.3)

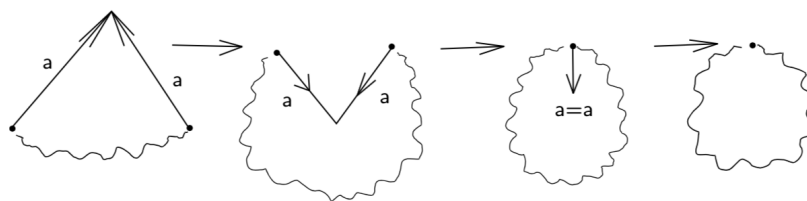


Рис. 10.2

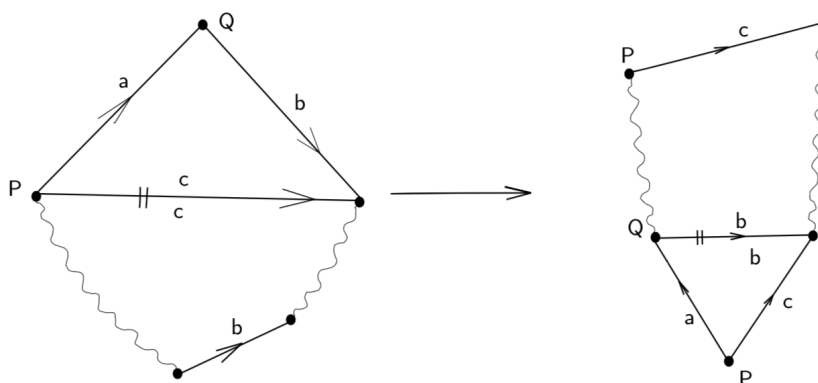


Рис. 10.3

Тут $a \neq b$, т.к. иначе было бы: $P = Q$, что противоречит выбору $P \neq Q$. А также $b \neq a^{-1}$. Кроме того, $b \neq a^{-1}$ (см. выше). Итак, $\{P\} + 1$ и $\{Q\} - 1$. Продолжая таким образом, «перекачиваем» весь класс $\{Q\}$ в другие классы вершин. Последний шаг: когда в $\{Q\}$ осталась 1 вершина: (рис. 10.4).

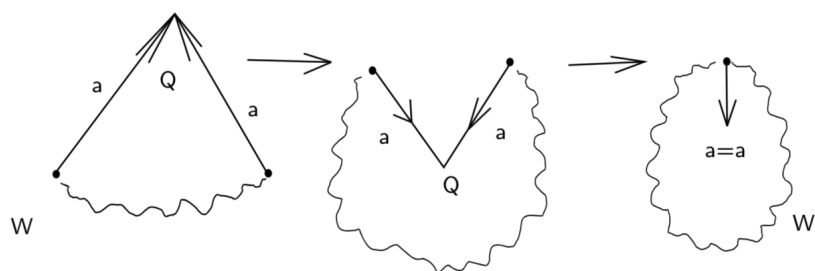


Рис. 10.4

Итак, класс $\{Q\}$ исчерпан. И т.д.

При всех этих операциях M^2 заменяется на гомеоморфное: мы меняем лишь код $W \rightarrow W'$ (a не M^2), меняем систему разрезов. Т.е. выбираем более экономичные, оптимальные разрезы. При упрощении W новые разрезы уже не являются триангуляцией, но это уже неважно. Поверхность M^2 при этом не меняется.

Шаг 6

Лемма 10. $W = \text{---}a\text{---}a\text{---} \implies W' = \text{---}aa\text{---}$

Доказательство. См. рис. 10.5. □

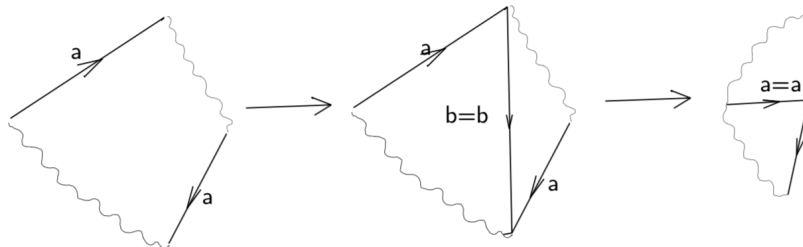


Рис. 10.5

Шаг 7

Лемма 11 (сбори́ние коммутаторов). $W = \text{---}a\text{---}b\text{---}a^{-1}\text{---}b^{-1}\text{---} \implies W' = \text{---}aba^{-1}b^{-1}\text{---}$

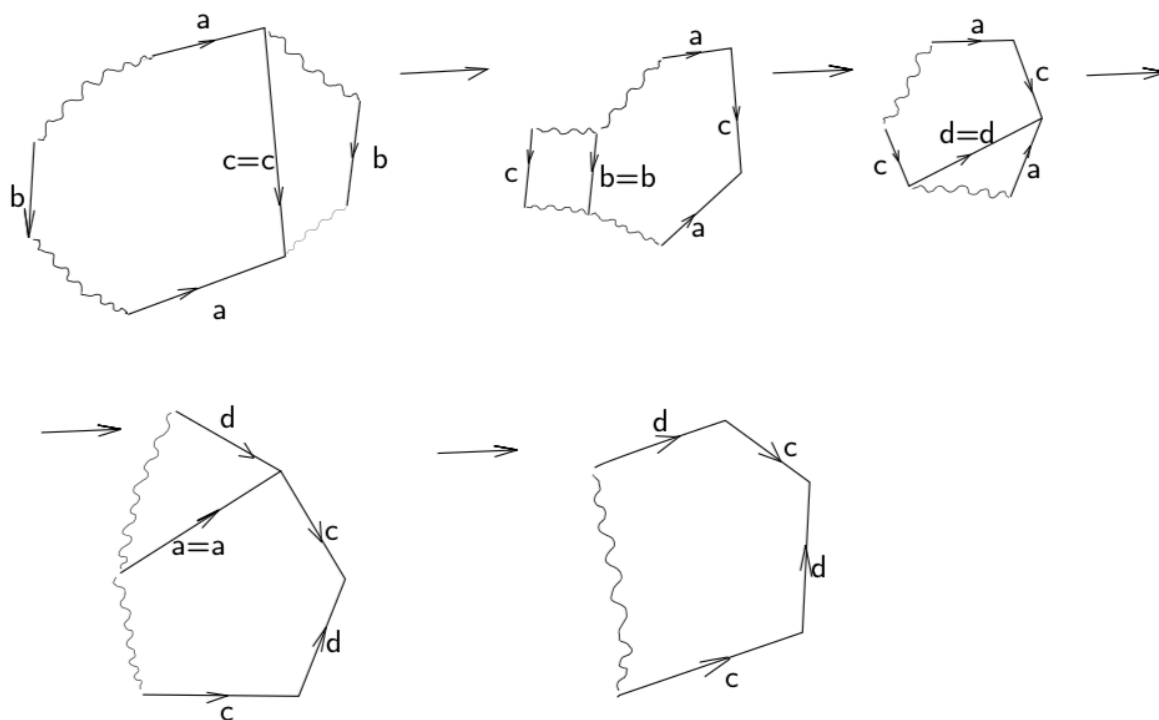


Рис. 10.6

Доказательство. См. рис. 10.6.

Переобозначим $d \rightarrow a, c \rightarrow b$. □

Шаг 8

Лемма 12. Пусть $W = \text{---}a\text{---}a^{-1}\text{---}b\text{---}$, тогда существует b между a и a^{-1} такое, что его дубликат b^{-1} расположен вне «отрезка» aa^{-1} (именно b^{-1} , так как все квадраты мы уже собрали вместе).

Доказательство. Допустим противное, т.е. для всякого b между a и a^{-1} существует b^{-1} снова между a и a^{-1} . Склеим a с a . Но тогда все вершины из H склеены с вершинами из H , и все вершины из R склеены с вершинами из R (см. рис 10.7). Т.е. возникают два класса разных вершины. Но мы уже привели все к одной вершине. Противоречие. \square

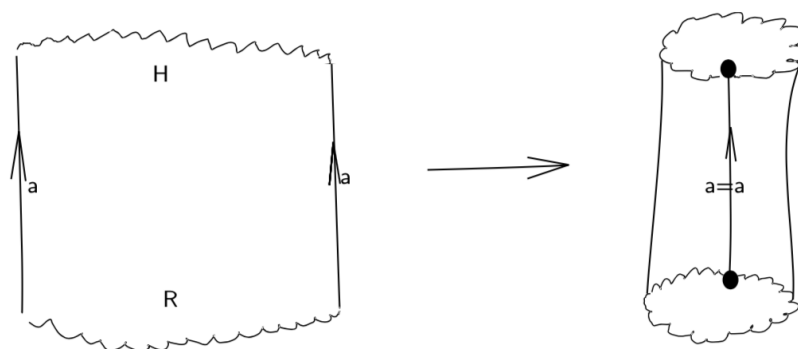


Рис. 10.7

Шаг 9

Смешанная серия отсутствует. В присутствии квадрата коммутатор превращается в 2 квадрата.

Лемма 13. $W = \text{---}aba^{-1}b^{-1}\text{---}cc\text{---} \implies W' = \text{---}a^2\text{---}b^2\text{---}c^2\text{---}$

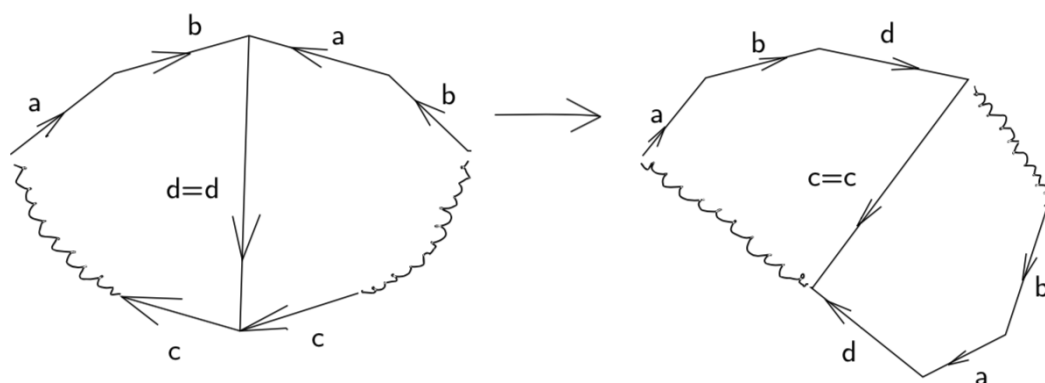


Рис. 10.8

Доказательство. См. рис. 10.8, получим $\text{---}abd\text{---}bad\text{---}$ и теперь собираем вместе 3 квадрата $\text{---}a^2\text{---}b^2\text{---}d^2\text{---}$. \square

Шаг 10

Мы доказали, что существуют три канонических кода

α) aa^{-1} ,

β) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, $g > 0$,

γ) $c_1^2c_2^2 \dots c_k^2$, $k > 0$.

Код α — это сфера (рис. 11.1).

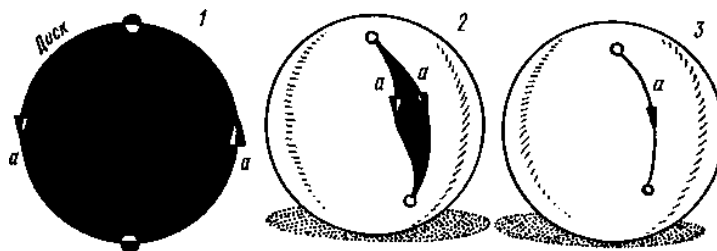


Рис. 10.9

Код β для $g = 1$ — это тор (рис. 9.9).

Код β для $g = 2$ — это «крендель» (две ручки) (рис. 11.2).

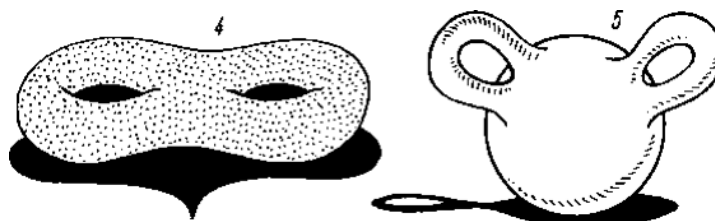


Рис. 10.10

Код β для всякого g — это «крендель с g ручками».

Другая модель в \mathbb{R}^3 — сфера с ручками. Условно запишем так: $S^2 + g$ (ручек), где $g \geq 0$. При $g = 0$ получится двумерная сфера. Тем самым мы объединяем в записи $S^2 + g$ (ручек) оба кода α и β . Эту бесконечную серию назовем серией I. Как увидим далее, это ориентируемые 2-многообразия.

Связная сумма многообразий

Определение 48. Пусть M и P — два связных многообразия. Рассмотрим M/D и P/D , т.е. выбросим из M и P по диску (шару). Получим два многообразия с краем сферой. отождествим эти две граничные сферы при помощи гомеоморфизма. Полученные многообразия называются *связной суммой* $Q = M \# P$ (на предпоследнем шаге два многообразия склеиваются при помощи цилиндра).

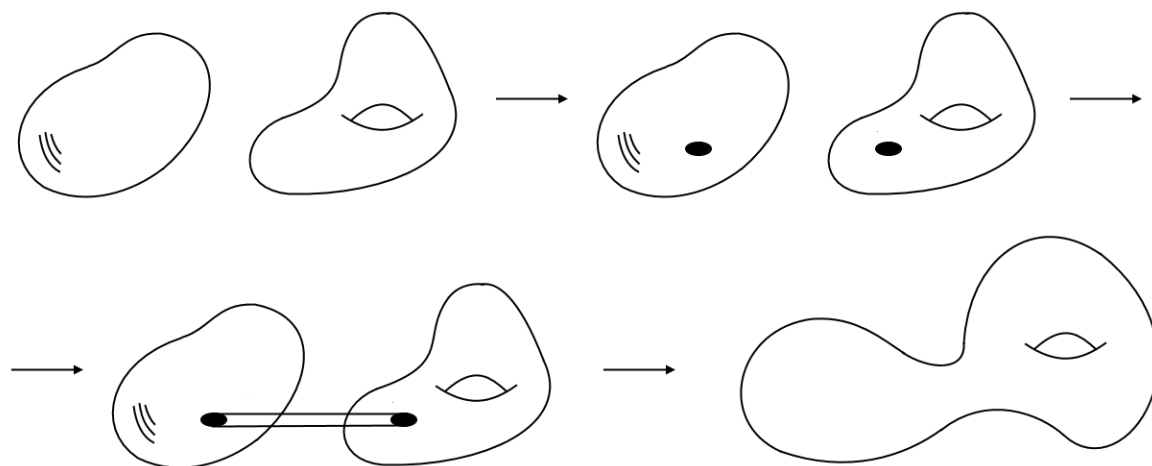


Рис. 10.11

Отметим, что

$$M \# P \simeq P \# M,$$

$$M^n \# S^n \simeq M^n.$$

Получили коммутативную полугруппу.

Утверждение 4. *Связная сумма корректно определена.*

Утверждение 5. *Если M и P — гладкие многообразия, то и $M \# P$ можно считать гладким.*

Рассмотрим поверхность рода $g = 2$. Имеем (рис. 10.12)

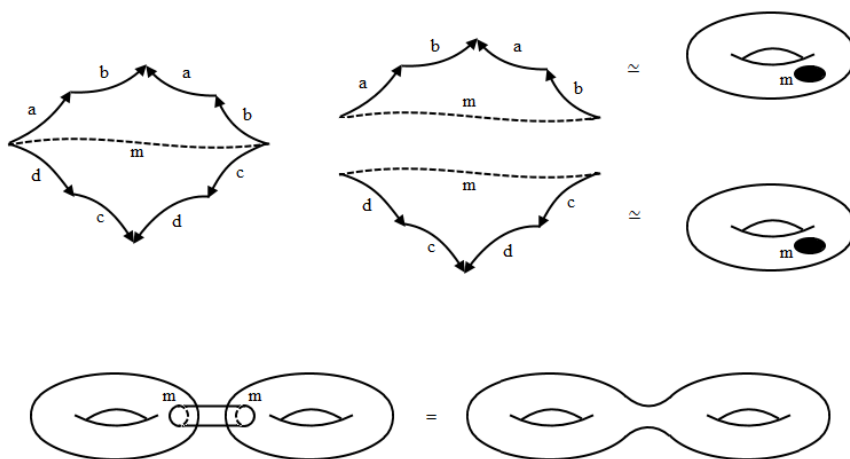


Рис. 10.12

Таким образом, многообразия серии I имеют вид

$$M_g^2 = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g \geq 1} = S^2 + g$$

Исследуем теперь серию II, т.е. серию, состоящую из квадратов. Рассмотрим $W = c^2 = cs$, где $c = ab$ (рис. 10.13):

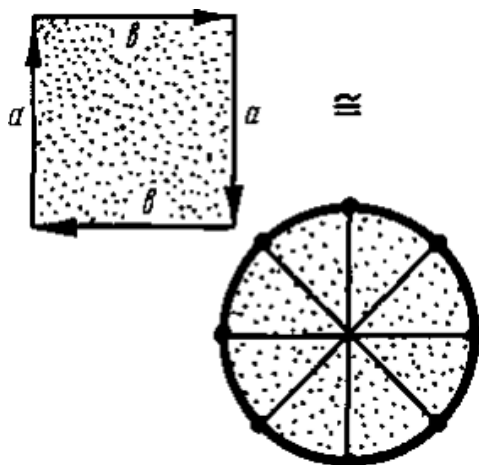


Рис. 10.13

т.е. $W = c^2$ — это диск D^2 , на границе которого отождествлены точки по правилу: $x \sim (-x)$, т.е. диаметрально противоположные точки. А это одна из моделей проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Более наглядно ее можно представить следующим образом — см. рис. 10.14.

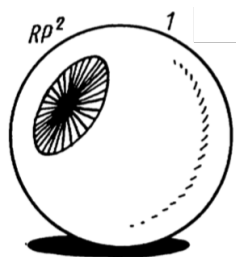


Рис. 10.14

Прделаем операцию склейки для $\mathbb{R}P^2$ более подробно в \mathbb{R}^3 — см. рис. 10.15.

Если снизу у полученного объекта (рис. 10.15) отрезать «шапочку», то получится лист Мебиуса. Это будет погружением листа Мебиуса в \mathbb{R}^3 , при котором его граница стала плоской. Из-за этого у листа Мебиуса появились самопересечения (в точках A и B ветвление порядка 2). Такую модель для μ называют «скрещенный колпак» (рис. 10.16).

Лемма 14. $\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$, где μ — лист Мебиуса.

Доказательство. Имеем: $\partial\mu = S^1$, $\partial D^2 = S^1$. Итак, $\mathbb{R}P^2/D^2 = \mu$: см. рис. 10.17. □

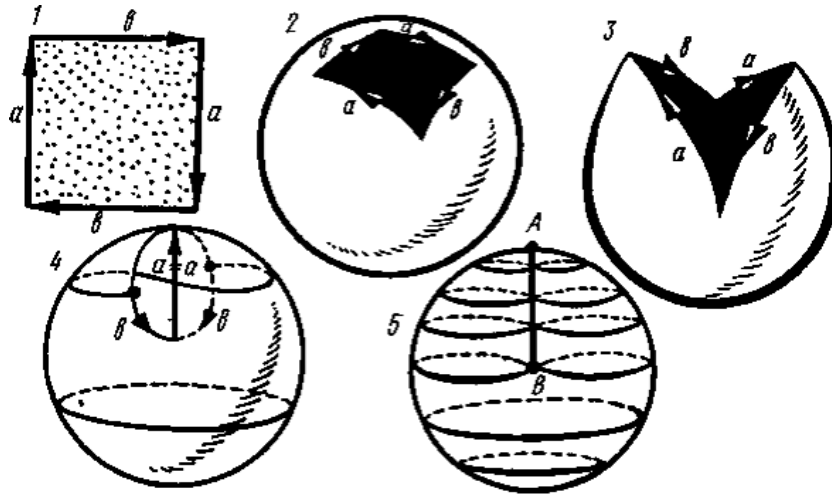


Рис. 10.15

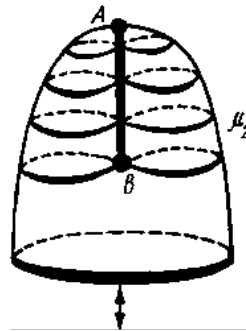


Рис. 10.16

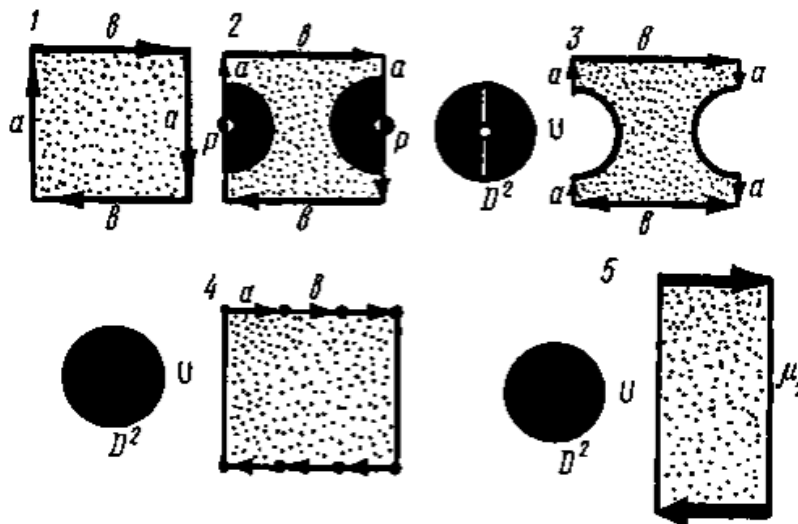


Рис. 10.17

Лекция 11

11. Классификация двумерных гладких поверхностей

Вклейка пленки Мебиуса

На предыдущей лекции мы показали, что существуют три канонических кода

$$\alpha) aa^{-1},$$

$$\beta) a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, g > 0,$$

$$\gamma) c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2, k > 0.$$

Код α — это сфера (рис. 11.1).

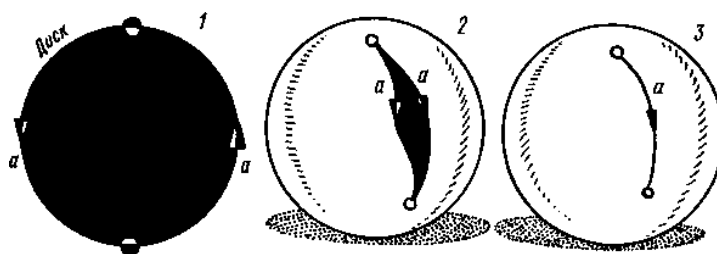


Рис. 11.1

Код β для $g = 1$ — это тор (рис. 9.9).

Код β для $g = 2$ — это «крефель» (две ручки) (рис. 11.2).

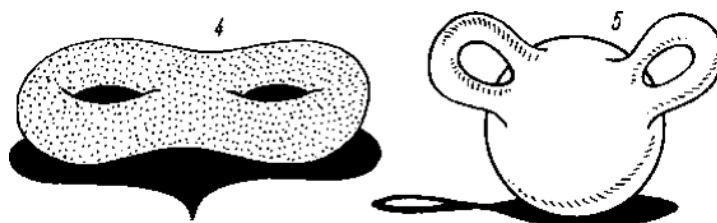


Рис. 11.2

Код β для всякого g — это «крефель с g ручками».

Код $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, g > 0$ мы уже разобрали. Разберем случай $c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2, k > 0$.

Пример 10. Квадрат: $W = a^2 b^2 = aabb = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ (связная сумма) — см. рис. 11.3. Это вклейка пленки Мебиуса: $W = S^2 + 2\mu$

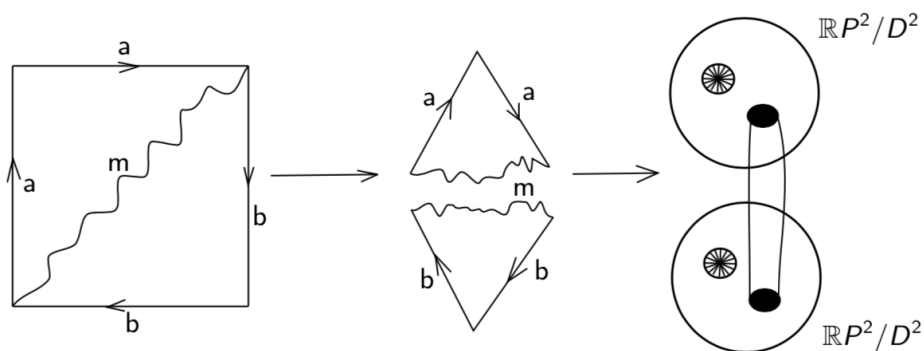


Рис. 11.3

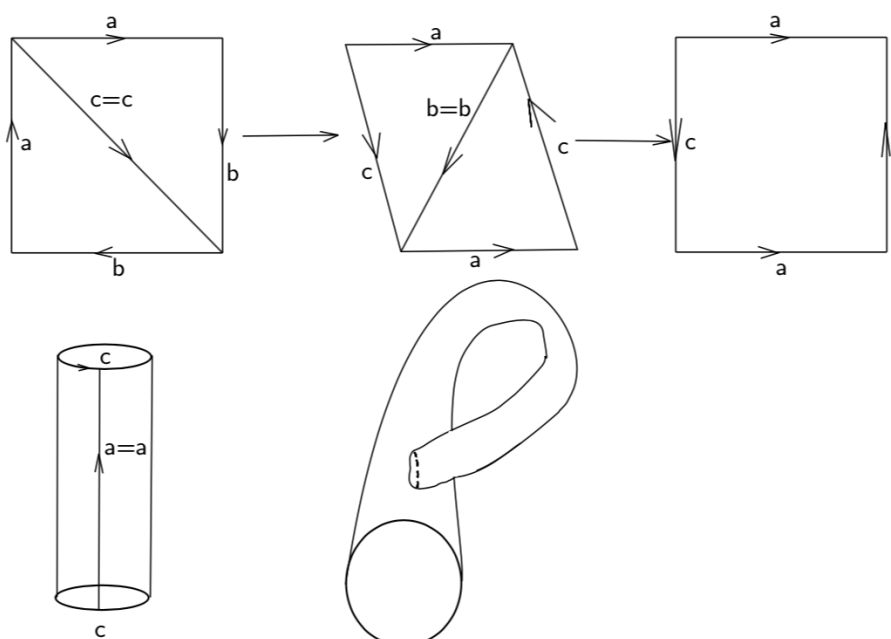


Рис. 11.4

Бутылка Клейна

Пример 11. Сделаем другой разрез. Тогда получим $W = aca^{-1}c$. На рисунке 11.4 дано наглядное представление этой поверхности

Лемма 15. $KL = \mu + \mu \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = S^2 + 2\mu$.

Доказательство. Доказательство см. на рис. 11.5. Склейка двух листов Мёбиуса по их общей границе эквивалентна вклейке этих листов в сферу с двумя дырками (заклейка цилиндра двумя пленками Мёбиуса). \square

Операции вклейки ручки в случае листа Мёбиуса соответствует операция «вывернутой ручки» (рис. 11.6).

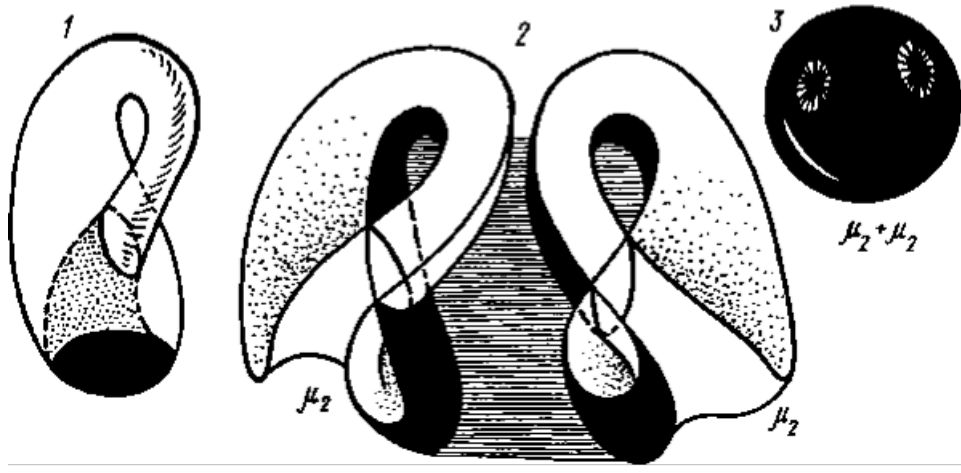
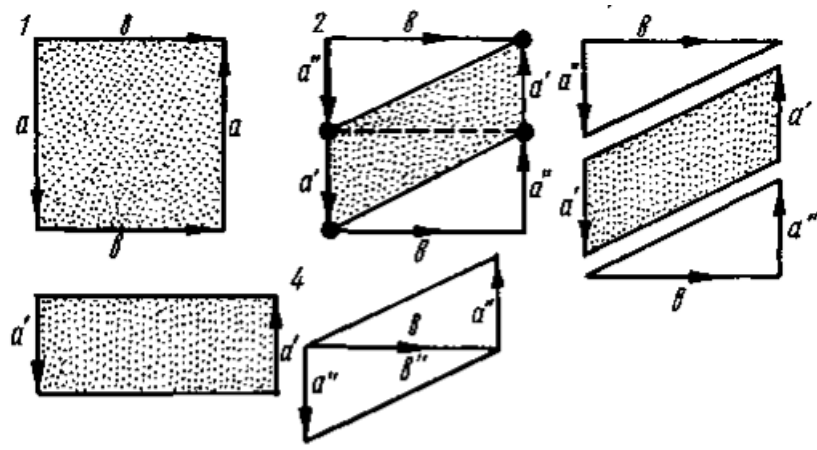


Рис. 11.5

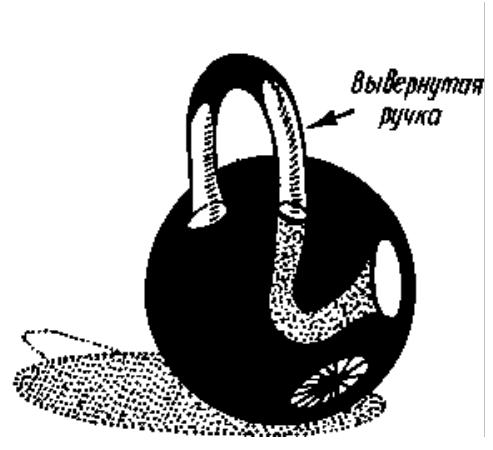


Рис. 11.6

Тогда бутылку Клейна можно изобразить следующим образом — см. на рис. 11.7.

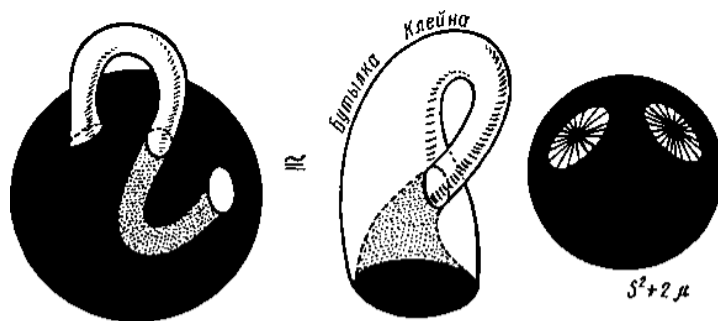


Рис. 11.7

Покажем еще раз, что в присутствии ручки сфера с листом Мебиуса превращается в сферу с тремя листами Мебиуса. Обозначим ручку за r : $S^2 + r + m = S^2 + 3\mu$, т.е. ручка в присутствии листа Мебиуса превращается в 2 листа Мебиуса. Зафиксируем одну подошву ручки r и начнем перемещать вторую подошву по направлению к пленке Мебиуса, затем проведем подошву вдоль оси листа Мебиуса и уйдем с него, вернувшись в прежнюю позицию. Ручка претерпит изменения в ее расположении (см. рис. 11.8); это положение называется вывернутой ручкой и отличается от обычной способом приклейки подошв к S^2 . Но (рис. 11.7) сфера с вывернутой ручкой гомеоморфна бутылке Клейна, т.е. сфере с двумя пленками Мебиуса (лемма 15). Это значит, что ручка в присутствии пленки Мебиуса превращается в две пленки Мебиуса.

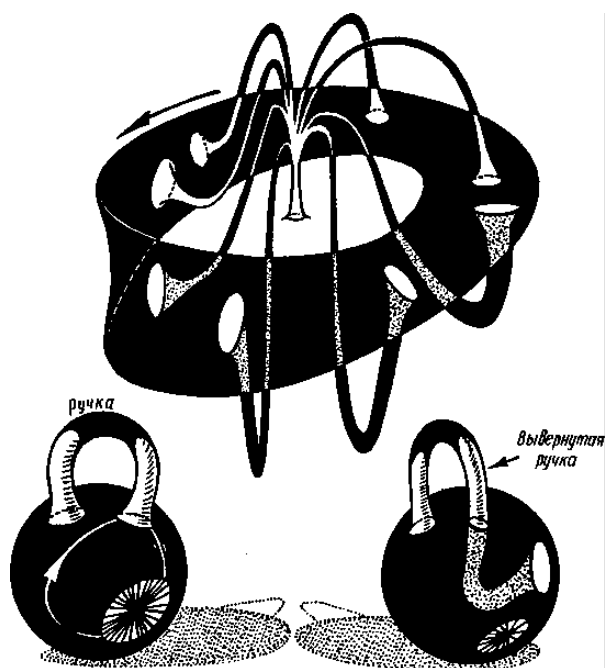


Рис. 11.8

Итак, мы доказали, что многообразие серии I — это

$$M_k^2 = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g, \quad g \geq 1,$$

$$S^2, \quad g = 0;$$

а многообразие серии II — это

$$M_k^2 = \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_k.$$

Ориентируемость многообразий

Лемма 16. *Многообразия серии I ориентируемы, а многообразия серии II — неориентируемы.*

Доказательство. Воспользуемся определением ориентируемости в смысле деформации касательных реперов вдоль кусочно-гладких петель на многообразии. В нашем случае репер двумерный, так как многообразие двумерное.

Рассмотрим многообразие серии I. По доказанному оно кодируется плоской разверткой W , где каждое a_i входит в коммутатор с двумя различными «направлениями». Рассмотрим точку 0 и всевозможные петли. Возникают два случая.

Первый: петля γ «мала», т.е. не выходит на границу многоугольника W . Перемещаем репер вдоль этой петли, возвращаемся в исходную точку. Очевидно, что репер на плоскости вернется в начальную точку с прежней ориентацией (рис. 11.9).

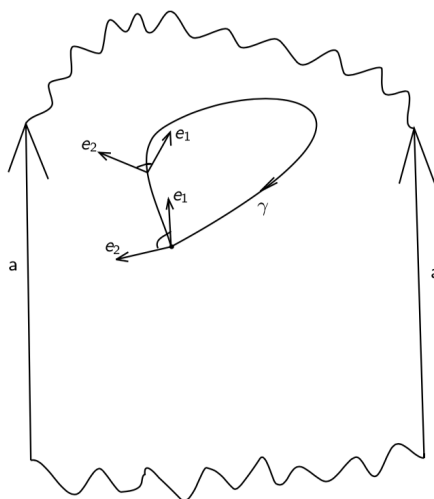


Рис. 11.9

Второй: петля γ «большая», т.е. выходит на границу многоугольника W . Переходя через сторону a , репер не изменил ориентацию, так как переход на дубликат стороны не изменил направление базисных векторов. Итак, репер снова вернется в

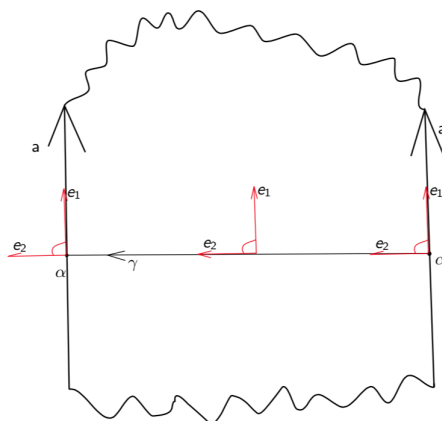


Рис. 11.10

начальную точку с прежней ориентацией (рис. 11.10). Многообразия серии I ориентируемые.

Рассмотрим многообразие серии II. По доказанному оно кодируется плоской разверткой W , где каждое a_i входит в коммутатор с одинаковыми «направлениями». Рассмотрим точку 0 и всевозможные петли. Возникают два случая.

Первый: петля γ «мала», т.е. не выходит на границу многоугольника W . Перемещаем репер вдоль этой петли, возвращаемся в исходную точку. Очевидно, что репер на плоскости вернется в начальную точку с прежней ориентацией (рис. 11.11).

Второй: петля γ «большая», т.е. выходит на границу многоугольника W . Переходя через сторону a , репер изменил ориентацию, так как переход на дубликат стороны изменил направление базисных векторов. Итак, репер вернется в начальную точку с противоположной ориентацией (рис. 11.12). Многообразия серии I неориентируемые. \square

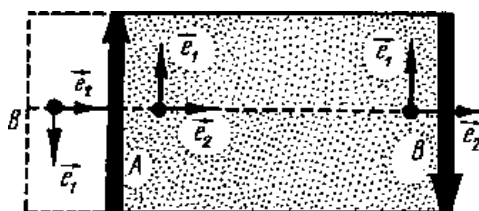


Рис. 86

Рис. 11.11

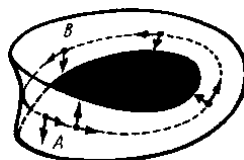


Рис. 11.12

Гладкое погружение

Лемма 17. *Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ гладко погружается в \mathbb{R}^3 .*

Доказательство. Вспомним, что $\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$ (см. выше). Рассмотрим $KL = \mu + \mu$ и разрежем KL пополам (рис. 11.7). Это погружение μ в \mathbb{R}^3 . Граница μ — это плоская кривая с самопересечением. Будем поднимать вверх плоскость Π , одновременно деформируя кривую γ как показано на рис. 11.13. Цель: продеформировать γ в стандартную окружность S^1 без самопересечения в Π . Таким образом, если проследить, какую кривую замечает рассматриваемая кривая при деформации, то можно заметить, что в некий момент мы получим на верхнем слое окружность. Заклеим ее диском и тогда поверхность примет вид $\mu + D^2 = \mathbb{R}P^2$.

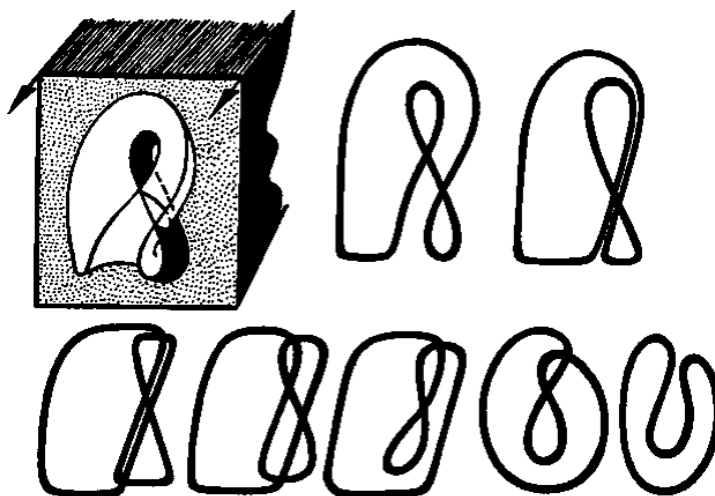


Рис. 11.13

□

Лемма 18. *Любое многообразие серии II допускает гладкое погружение в \mathbb{R}^3 .*

Доказательство. Так как $M_k^2 = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ (k раз), то по лемме 17 мы получаем погружение M_k^2 серии II в \mathbb{R}^3 .

Почему M_k^2 серии II нельзя вложить в \mathbb{R}^3 ? Легко доказать, что если M^2 — гладкая компактная замкнутая поверхность, вложенная в \mathbb{R}^3 (без самопересечения), то она разбивает \mathbb{R}^3 на две части, а потому определено поле нормалей, а потому ориентируема, что противоречит выбору серии II. □

Теорема классификации двумерных поверхностей

Теорема 21 (Теорема классификации M^2). 1) *Любое связное, компактное, гладкое, замкнутое (без края) M^2 гомеоморфно (и диффеоморфно) либо в случае I — $S^2 + g$, $g \geq 0$, либо в случае II — $S^2 + k\mu$, $k > 0$. Числа g и k назовем родом.*

2) *Многообразия серии I ориентированы. Многообразия серии II — неориентированы.*

- 3) Многообразия серии I и серии II не гомеоморфны. Внутри каждой серии многообразия разного рода не гомеоморфны.
- 4) Многообразия серии I гладко вкладываются в \mathbb{R}^3 .
- 5) Многообразия серии II гладко погружены в \mathbb{R}^3 , но не вкладываются.

Доказательство. 1) Пункт 1 и 2 уже доказаны выше.

- 2) Докажем пункт 3. Многообразия I и II не гомеоморфны, т.к. I — ориентированы, а II — неориентированы. А вот негомеоморфность многообразий разного рода внутри каждой серии — факт более сложен. Мы его докажем потом, используя гомологии.
- 3) Пункт 4 доказан выше.
- 4) Пункт 4 доказан выше: лемма 18.

□

Минимальная триангуляция

Триангуляция минимальна, если у нее минимальное число треугольников.

Пример 12. Рассмотрим сферу S^2 : 4 треугольника и 4 вершины. Опишем вокруг симплекса (тетраэдра) сферу и спроектируем его из центра на сферу. Возникающий граф будет полным.

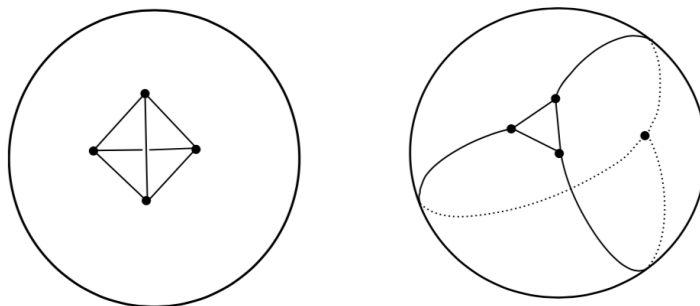


Рис. 11.14

Пример 13. Минимальная триангуляция тора T^2 : 14 треугольников и 7 вершин. Возникающий граф будет полным.

Доказательство. Пусть n — число треугольников в триангуляции тора. Тогда число ребер равно $3n/2$, т.к. к каждому ребру примыкают два треугольника. А всего ребер у n треугольников — $3n$. Эйлерова характеристика тора равна 0, т.е.

$$\text{количество вершин} - \text{количество ребер} + \text{количество треугольников} = 0,$$

т.е.

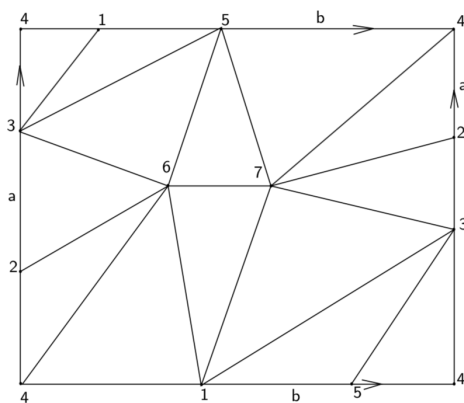


Рис. 11.15

количество вершин $-3n/2 + n = 0 \implies$ вершин $-n/2$.

Всего вершин у n треугольников $-3n$, поэтому при склейке M^2 из n треугольников в одну вершину на T^2 «в среднем» попадает $3n/(n/2) = 6$ вершин. А потому существует вершина на T^2 кратности ≥ 6 . Но тогда ее «звезда» имеет вид (рис. 11.16):

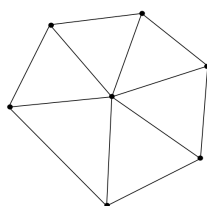


Рис. 11.16

Т.е. к ней примыкают по крайней мере 6 треугольников. А тогда число вершин ≥ 7 . А мы предъявили триангуляцию с 7 вершинами. Поэтому она минимальна. \square

Пример 14. Минимальная триангуляция проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеет вид (рис. 11.17):

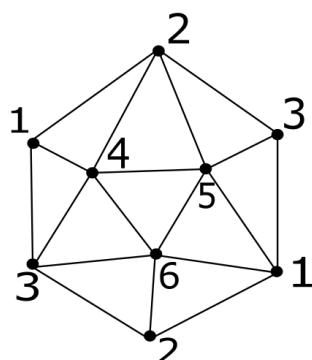


Рис. 11.17

Задачи

- 1) Тор с дыркой T^2/D^2 можно вывернуть наизнанку: см. рис.11.18.

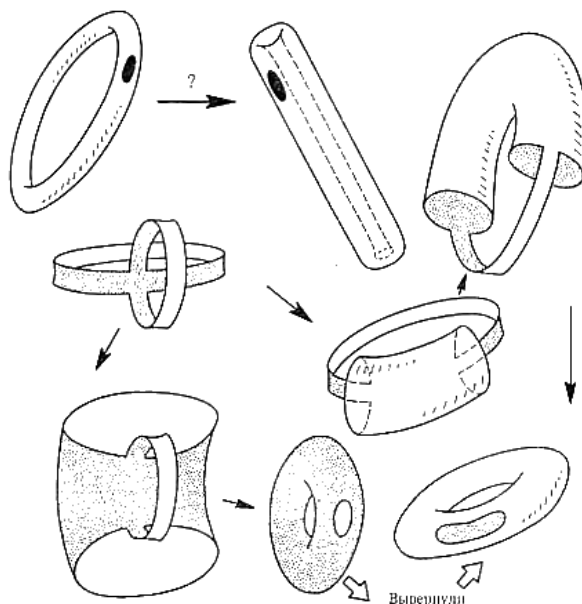


Рис. 11.18

- 2) Расщепление пальцев в \mathbb{R}^3 : см. рис.11.19.
3) Разрезать лист Мебиуса по его оси: см. рис.11.20.

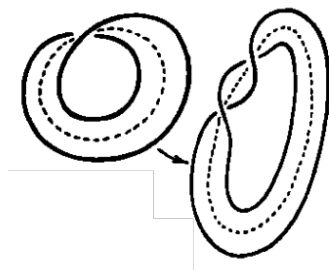


Рис. 11.20

- 4) Чему гомеоморфно множество всех прямых на плоскости? Ответ: листу Мебиуса.
5) Построить гомеоморфизм кренделя на себя, переводящий пару циклов a, b в пару $b, a \cdot b$: см. рис.11.21.

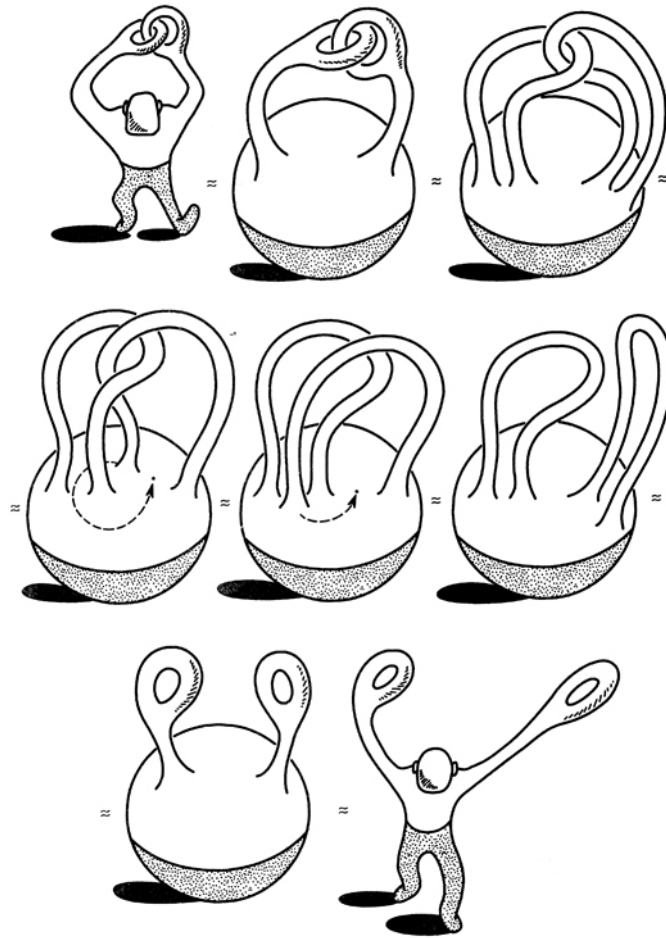


Рис. 11.19

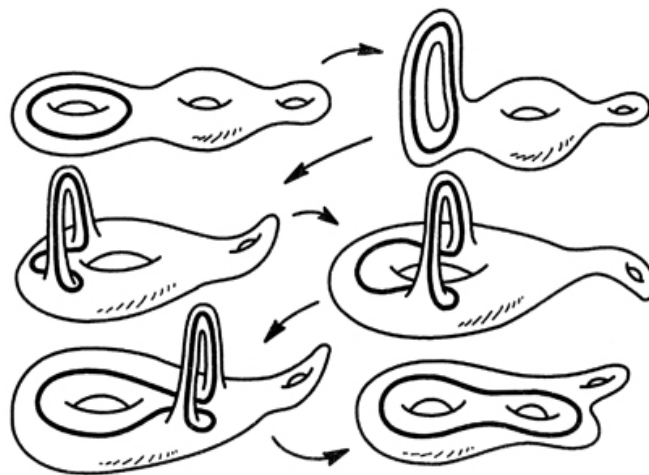


Рис. 11.21

Лекция 12

12. Первая и вторая квадратичные формы поверхности

Первая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^n , и пусть V^{n-1} — гладкое подмногообразие размерности $n - 1$ (или, как говорят, «коразмерности один»), вложенное в \mathbb{R}^n . В настоящем параграфе мы будем в основном интересоваться только локальными свойствами этой гиперповерхности, не интересуясь ее глобальной структурой, поэтому можно считать, что у нас просто имеется гладкое вложение диска D^{n-1} в \mathbb{R}^n .

Выше мы уже обсуждали различные способы задания многообразий, в том числе гиперповерхностей. Для удобства выберем параметрическое задание V^{n-1} , т. е. будем считать, что V^{n-1} (или вложенный диск D^{n-1}) определяется гладким радиус-вектором $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$ с \mathbb{R}^n , где параметры (координаты) u^1, \dots, u^{n-1} меняются в некотором диске в евклидовом пространстве параметров $\mathbb{R}^{n-1}(u^1, \dots, u^{n-1})$. Поскольку мы считаем, что радиус-вектор определяет гладкое подмногообразие, то это означает, что векторы $\frac{dr}{du^1}, \dots, \frac{dr}{du^{n-1}}$ линейно независимы в каждой точке области определения. Напомним, что эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям, проходящим через выбранную точку P на поверхности V^{n-1} . Как было показано выше, гладкое вложение V^{n-1} в \mathbb{R}^n порождает на V^{n-1} индуцированную риманову метрику. Напомним эту конструкцию. Пусть x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbb{R}^n ; тогда радиус-вектор r задается набором гладких функций $x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $ds^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$ — евклидова метрика в \mathbb{R}^n ; тогда возникает следующая квадратичная форма:

$$\begin{aligned} ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^n (x^i(u^1, \dots, u^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p, \\ g_{kp} &= \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^p} \right\rangle; \end{aligned}$$

здесь через \langle, \rangle обозначено скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Определение 49. Первой квадратичной формой гиперповерхности V^{n-1} в \mathbb{R}^n называется форма $ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p$, где функции $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ определены выше.

Функции g_{kp} зависят от радиус-вектора гиперповерхности и меняются, вообще говоря, при изменении радиус-вектора, т.е. при деформации гиперповерхности. Пер-

вая квадратичная форма определена на векторах, касательных к V^{n-1} . Более точно: если $a, b \in T_P V^{n-1}$ — два произвольных касательных вектора, то определено скалярное произведение

$$\langle a, b \rangle_{ds^2(V^{n-1})} = g_{kp} a^k b^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp} a^k b^p.$$

Напомним, что для упрощения обозначений мы опускаем знак суммирования, когда суммирование ведется по совпадающим верхним и нижним индексам. Из геометрического смысла функций g_{kp} следует, что скалярное произведение $\langle a, b \rangle_{ds^2(V^{n-1})}$ просто совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением векторов a и b , рассматриваемых как векторы объемлющего пространства \mathbb{R}^n . Матрица метрического тензора G , составленная из функций $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь, какой вид приобретает первая квадратичная форма для различных способов задания гиперповерхности.

Пример 15. Пусть V^{n-1} задана в виде графика $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Имеем:

$$\begin{aligned} ds^2|_V^{n-1} &= \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + (dx^n(x^1, \dots, x^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} dx^k dx^p = \\ &= \sum_{k,p=1}^{n-1} \left(\delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} \right) dx^k dx^p = g_{kp}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^k dx^p. \end{aligned}$$

Иногда будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ через f_{x^α} .

Пример 16. Пусть теперь поверхность V^{n-1} задана с помощью неявной функции, т.е. в виде $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, где $\frac{\partial F}{\partial x^n} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует (локально) решение уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ вида $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = - \frac{\partial F}{\partial x^i} / \frac{\partial F}{\partial x^n}.$$

Подставляя вместо f_{x^α} выражение вида

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} / \frac{\partial F}{\partial x^n},$$

получаем $G = (g_{kp})$, где

$$g_{kp} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial F}{\partial x^p} \right) / \left(\frac{\partial F}{\partial x^n} \right)^2 + \delta_{kp}.$$

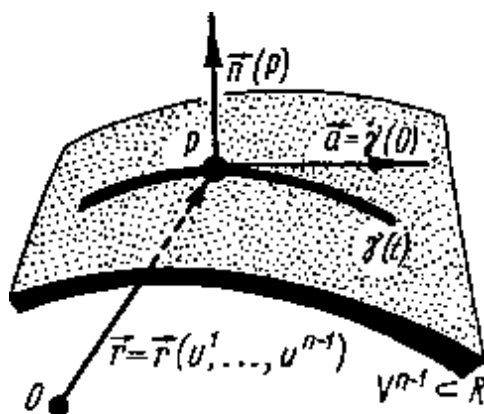


Рис. 12.1

Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим V^{n-1} — гиперповерхность в \mathbb{R}^n , заданная радиус-вектором вида $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$. Пусть $n = n(P)$ — единичный вектор, ортогональный поверхности V^{n-1} в точке P . Определим квадратичную форму $Q(a, a)$, задав ее значения $Q(a, a)$ для произвольного вектора $a \in T_P(V^{n-1})$. Для этого рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$ лежащую на V^{n-1} и проходящую через точку P , причем так, что $\gamma(0) = P, \dot{\gamma}(0) = a$. Такая кривая всегда существует, хотя и определена неоднозначно (рис. 12.1). Так как вдоль кривой $\gamma(t)$ радиус-вектор r является функцией от t , то $a = \left. \frac{d}{dt} r(u(t)) \right|_{t=0}$. Рассмотрим радиус-функцию $\dot{r} = \frac{d}{dt} r(u(t))$ и ее производную по t , т. е. $\ddot{r} = \frac{d^2}{dt^2} r(u(t))$. Обозначим через \ddot{r}_a значение \ddot{r} при $t = 0$. Это и есть вторая производная радиус-вектора r по направлению вектора a .

Определение 50. Положим $Q(a, a) = \langle \ddot{r}_a; a \rangle$.

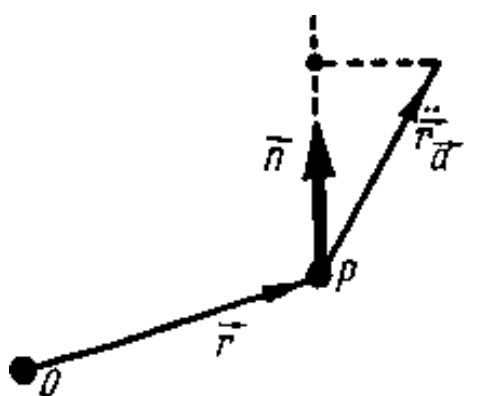


Рис. 12.2

Определенное нами число является величиной проекции вектора \ddot{r}_a на вектор нормали n в точке P (рис. 12.2). Вычислим значение $Q(a, a)$ в явном виде через

координаты вектора r . Имеем

$$\frac{dr}{dt} = r_{u^k} \frac{du^k(t)}{dt}; \quad \frac{d^2r}{dt^2} = r_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + r_{u^k} \frac{d^2u^k(t)}{dt^2};$$

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2} r(u(t)), n \right\rangle = \left\langle r_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, n \right\rangle + 0,$$

так как

$$\left\langle r_{u^k} \frac{d^2u^k(t)}{dt^2}, n \right\rangle = \frac{d^2u}{dt^2} \langle r_{u^k}, n \rangle = 0;$$

$$r_{u^k} \in T_P(V^{n-1}); \quad n \perp T_P(V^{n-1});$$

отсюда получаем

$$\left\langle \frac{d^2r}{dt^2} \Big|_{t=0}, n \right\rangle = \left\langle r_{u^k, u^p} \Big|_{t=0}, n \right\rangle \frac{du^k}{dt} \Big|_{t=0} \frac{du^p}{dt} \Big|_{t=0} = Q(a, a).$$

При этом следует помнить, что вектор a имеет координаты

$$\left(\frac{du^1(0)}{dt}, \dots, \frac{du^{n-1}(0)}{dt} \right),$$

т.е. окончательно $Q(a, a) = \left\langle n, r_{u^k, u^p} \Big|_{t=0} \right\rangle a^k a^p$.

Эта квадратичная форма однозначно определяет билинейную форму $Q(a, b)$, значение которой на паре произвольных векторов $a, b \in T_P(V^{n-1})$ определяется так: $Q(a, b) = q_{kp}(P) a^k a^p$, где

$$q_{kp}(P) = \left\langle r_{u^k, u^p} \Big|_{t=0}, n \right\rangle.$$

Лемма 19. Выражение $Q(a, b) = q_{kp} a^k b^p$, где $a, b \in T_P(V^{n-1})$ определяет билинейную форму.

Доказательство. Имеем

$$q_{k'p'} = \left\langle r_{u^{k'}, u^{p'}} \Big|_{t=0}, n \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} \left\langle \frac{\partial^2 r(0)}{\partial u^k \partial u^p} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} q_{kp}.$$

т.е. функции q_{kp} преобразуются при замене координат как коэффициенты билинейной формы, что и требовалось доказать. \square

Определение 51. Билинейная форма $Q(a, b)$ называется *второй квадратичной формой* поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Ясно, что форма Q зависит от способа вложения V^{n-1} в \mathbb{R}^n , т.е. при гладкой деформации V^{n-1} эта форма, вообще говоря, будет меняться. При этом форма уже не является инвариантной относительно изометрий V^{n-1} в \mathbb{R}^n . Так, например, при изгибании V^{n-1} , т.е. при гладкой деформации, при которой первая форма не меняется, форма Q будет, вообще говоря, изменяться. Например, пусть V^2 — двумерная плоскость в \mathbb{R}^3 ; тогда радиус-вектор $r(u, v)$ можно считать линейной функцией от

параметров u, v . Следовательно, первая форма является евклидовой плоской метрикой: $du^2 + dv^2$.

Теперь рассмотрим изометрическое преобразование V^2 — свертывание плоскости \mathbb{R}^2 в цилиндр, ось которого параллельна оси ox . Ясно, что вторая форма цилиндра отлична от нуля, так как отлично от нуля число $\langle r_{vv}, n \rangle$. В то же время вторая форма плоскости \mathbb{R}^2 тождественно равна нулю, следовательно, при изгибании (т. е. при изометрии) вторая форма изменилась.

Инварианты пары форм

Рассмотрим фиксированное подмногообразие $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, пусть $P \in V^{n-1}$. В каждой точке P определена пара форм G и Q (первая и вторая формы). С этой парой связан набор числовых инвариантов, позволяющих изучать V^{n-1} независимо от введенной на ней системы координат. Обозначим через G и Q матрицы соответствующих форм и рассмотрим полином по переменной λ : $\det(Q - \lambda G)$. Поскольку форма G невырождена, то существует матрица G^{-1} , обратная к G ; следовательно, уравнение $\det(G^{-1}Q - \lambda E) = 0$ эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda G) = 0$.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ собственные числа матрицы $G^{-1}Q$, т.е. корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$. Вскоре мы докажем, что все они вещественны. Запишем характеристический полином $F(\lambda)$ в виде $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \lambda^k$, где σ_k — симметрические функции от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Лемма 20. *Функции $\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ являются инвариантами пары форм G и Q , т.е. сохраняются при произвольной невырожденной замене координат в окрестности точки $P \in V^{n-1}$.*

Доказательство. При регулярной замене координат $x \rightarrow x'$ в окрестности точки P в касательном пространстве $T_P V^{n-1}$ возникает индуцированное линейное невырожденное преобразование с помощью матрицы Якоби: $J : T_P \rightarrow T_P$. При этом матрицы G и Q подвергаются преобразованию: $G \rightarrow JGJ^T = G'$; $Q \rightarrow JQJ^T = Q'$. Следовательно:

$$\det((G')^{-1}Q' - \lambda E) = \det[(J^T)^{-1}(G^{-1}Q - \lambda E)J^T] = \det(G^{-1}Q - \lambda E),$$

что и требовалось доказать. □

Нас будут особенно интересовать инварианты:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k, \quad \sigma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \det(G^{-1}Q).$$

Остальные σ_k , $2 \leq k \leq n-2$ описывают более тонкие свойства V^{n-1} , которыми мы сейчас заниматься не будем. Поскольку $G^{-1}Q \neq 0$, если $Q \neq 0$, то существует хотя бы один инвариант σ_k , отличный от нуля. Инварианты σ_1 и σ_{n-1} являются «крайними» инвариантами.

Определение 52. Функция $H(P) = \sigma_1(P) = \sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется *средней кривизной поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $P \in V^{n-1}$. Функция $K(P) = \sigma_{n-1}(P) = \sigma_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется *гауссовой кривизной поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке P .

Если $n = 3$ и $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, то $H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$, $K(P) = \lambda_1 \lambda_2$.

Теорема 22. Все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ пары форм G, Q вещественны. В том случае, когда все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ парно различны, все собственные векторы e_1, \dots, e_{n-1} матрицы $G^{-1}Q$ взаимно ортогональны, как относительно обьемлющей евклидовой метрики в \mathbb{R}^n , так и относительно римановой метрики, индуцированной на V^{n-1} вложением $V^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказательство. По известной теореме из алгебры собственные числа симметрической матрицы вещественны, и все ее собственные векторы взаимно ортогональны для различных собственных чисел. Пока что эта теорема не может быть применена в нашей ситуации, так как матрица $G^{-1}Q$, вообще говоря, не симметрична. Симметрия $G^{-1}Q$ имела бы, например, место, если бы G и Q коммутировали. Так как форма $G(P)$ симметрична при каждом P , то в некоторой окрестности P существует регулярная замена координат $x \rightarrow x'$ такая, что в одной точке P форма $G(P)$ приводится к диагональному виду. Такое приведение возможно, вообще говоря, только в одной точке. Поскольку приведение к диагональному виду необходимо осуществить только в одной точке, то в качестве искомой замены достаточно взять линейную замену. Приведя G к диагональному виду, можно затем привести ее к единичной матрице, применяя растяжения вдоль главных осей формы. Пусть A — линейный оператор $A: T_P V^{n-1} \rightarrow T_P V^{n-1}$, осуществляющий приведение G к единичной матрице; тогда $G = AEA^T = AA^T$. Матрица E , возникающая после выполнения A , определяет ортобазис $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в $T_P V^{n-1}$. Получаем $\det(Q - \lambda G) = \det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^T - \lambda E)A^T]$. Рассмотрим форму $\tilde{Q} = BQB^T$, где $B = A^{-1}$. Исходное уравнение $\det(Q - \lambda G) = 0$ запишется в базисе $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в виде $\det(\tilde{Q} - \lambda E) = 0$, так как $\det A \neq 0$. При этом $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T$, так как $Q^T = Q$. Следовательно, все собственные числа и собственные векторы у формы \tilde{Q} и матрицы $G^{-1}Q$ одни и те же. Так как форма \tilde{Q} симметрична, то все ее собственные числа (т.е. $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$) вещественны, и в случае, когда все они попарно различны, все ее собственные векторы взаимно ортогональны. Это следует из известной теоремы алгебры. Ортобазис e_1, \dots, e_{n-1} не обязан совпадать с ортобазисом $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$. Теорема доказана. \square

Определение 53. Векторы e_1, \dots, e_{n-1} (определены однозначно, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$) называются *главными направлениями* гиперповерхности V^{n-1} в точке P , или *главными осями*.

Явный вид второй формы

Рассмотрим частный случай. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ задана в виде графика $x^n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$; пусть плоскость $T_P V^{n-1}$ в некоторой точке $P \in V^{n-1}$ совпадает с плоскостью переменных x_1, \dots, x_{n-1} (рис. 12.3). Тогда нормаль $n(P)$ к V^{n-1} в точке

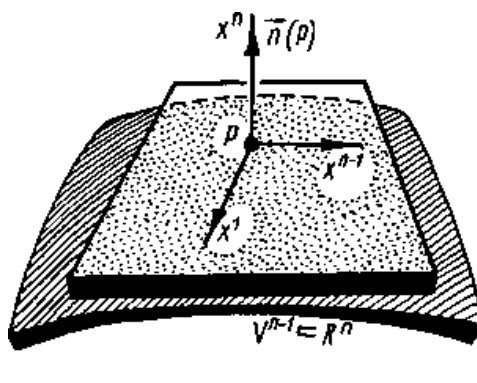


Рис. 12.3

P имеет координаты $(0, \dots, 0, 1)$; радиус-вектор r , описывающий поверхность V^{n-1} имеет вид

$$r = r(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Так как гиперплоскость $(x_1, \dots, x_{n-1}) = T_P V^{n-1}$ касается V^{n-1} в точке P , то выполнено соотношение $\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_P = 0$, $1 \leq i \leq n-1$; отсюда: $G(P) = E$, так как $g_{ij} = f_{x^i} f_{x^j} + \delta_{ij}$. Рассмотрим матрицу $Q = (q_{ij})$, где

$$q_{ij} = \langle r_{x^i x^j}, n \rangle = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Итак, $Q = (f_{x^i x^j}(P))$ совпадает с матрицей гессиана функции f в точке P . Средняя кривизна $H(P)$ имеет вид

$$H(P) = \text{tr}(G^{-1}Q) = \text{tr} Q = \sum_{k=1}^{n-1} f_{x^k x^k}.$$

для гауссовой кривизны $K(P)$ получаем

$$K(P) = \det(G^{-1}Q) = \det Q = \det(f_{x^i x^j}(P)).$$

Для двумерной поверхности (при $n = 3$) получаем

$$z = f(x, y); \quad H(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа на плоскости \mathbb{R}^2 ;

$$K(P) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Теория плоских сечений гиперповерхности

Рассмотрим произвольную точку $P \in V^{n-1}$, и пусть $n(P)$ — нормаль к гиперповерхности V^{n-1} в \mathbb{R}^n . Рассмотрим произвольную двумерную плоскость \mathbb{R}^2 , проходящую через P и пересекающую V^{n-1} по некоторой гладкой кривой $\gamma(t) = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ (по-прежнему нас интересуют только события, происходящие в малой окрестности точки P).

Определение 54. Гладкая кривая $\gamma(t) = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ называется *плоским сечением гиперповерхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

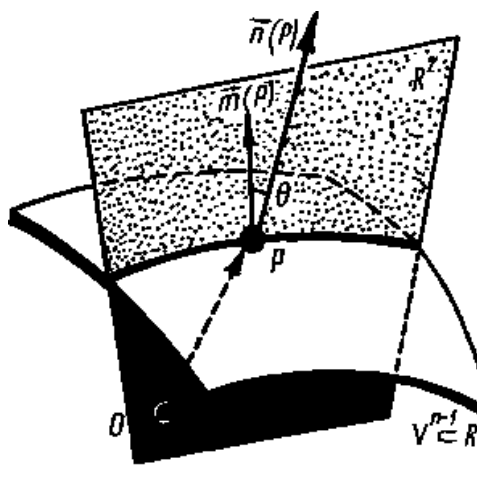


Рис. 12.4

Через точку P проходит бесконечно много плоских сечений. В то же время далеко не всякая гладкая кривая $\gamma \subset V^{n-1}$ является плоским сечением V^{n-1} . Для того чтобы $\gamma \subset V^{n-1}$ не была плоским сечением, достаточно, чтобы γ имела ненулевое кручение. Пусть γ — плоское сечение V^{n-1} (зафиксируем содержащую ее плоскость \mathbb{R}^2), и пусть точка O — начало координат, из которого выходит радиус-вектор $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$, описывающий поверхность V^{n-1} , принадлежит плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть $m(P)$ — вектор нормали к плоской кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$, содержащийся в \mathbb{R}^2 (рис. 12.4). Поскольку мы рассматриваем произвольное плоское сечение, то нормали n и m , вообще говоря, не совпадают.

Введем на кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ натуральный параметр $s : \gamma = \gamma(s)$ (s — длина дуги). Тогда в плоскости \mathbb{R}^2 кривая $\gamma(s)$ задается радиус-вектором $r = r(s)$, где $r(s) = r(u^1(s), \dots, u^{n-1}(s))$. В силу формул Френе для плоских кривых имеем

$$k(s) = \left| \frac{d^2 r(s)}{ds^2} \right|,$$

где $k(s)$ — кривизна кривой $\gamma(s)$ в точке P . Напомним также, что $\frac{d^2 r(s)}{ds^2} = mk(s)$, где $m = m(P)$, $P \in \gamma(s)$. С другой стороны, если $a = \frac{d}{ds} r(s)$ — вектор скорости кривой $\gamma(s)$ в точке P , то (в силу определения второй формы Q) имеем

$$Q(a, a) = \left\langle \frac{d^2 r}{ds^2}, n \right\rangle = \langle km, n \rangle = k \langle m, n \rangle = k \cos \theta,$$

где θ — угол между нормальными m и n в точке P (см. рис. 12.4). С другой стороны,

$$Q(a, a) = Q\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right) = Q\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2} Q\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right),$$

где t — произвольный гладкий параметр вдоль кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$. Здесь $\frac{dr}{dt} = \alpha$ — произвольный касательный вектор к кривой γ в точке P . Если $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$, то

$$k \cos \theta = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j}.$$

Поскольку в направлении любого касательного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ можно провести кривую γ , являющуюся плоским сечением, то, следовательно, нами доказана.

Теорема 23 (Первая теорема Менье). *Для любого касательного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ и любого плоского сечения γ (такого, что $\dot{\gamma} = \alpha$) отношение второй формы к первой равно $k \cos \theta$, т.е.*

$$\frac{Q(\alpha, \alpha)}{G(\alpha, \alpha)} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = k \cos \theta.$$

Кривизна k называется *кривизной плоского сечения*. Среди плоских сечений выделен класс нормальных сечений.

Определение 55. Плоское сечение $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ в точке P называется *нормальным*, если $n(P) \in \mathbb{R}^2$, т.е. $\theta = 0$.

Таким образом, каждое нормальное сечение γ в точке $P \in V^{n-1}$ взаимно-однозначно задается касательным вектором $\alpha \in T_P V^{n-1}$, т.е. двумерная плоскость \mathbb{R}^2 , определяющая это сечение, натянута на два вектора: нормаль $n(P)$ и вектор $\alpha \in T_P V^{n-1}$. Вращая плоскость \mathbb{R}^2 вокруг $n(P)$, получаем все нормальные сечения гиперповерхности V^{n-1} в точке P .

Для нормального сечения $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ доказанная в первой теореме Менье формула принимает вид

$$k = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{G(\alpha, \alpha)} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j},$$

так как $\theta = 0$. Так как кривизна плоского сечения (вдоль вектора α), образующего угол θ с нормалью $n(P)$, зависит от θ , то эту функцию следует записать в виде $k(\theta, \alpha)$. В силу доказанного утверждения: $k(\theta, \alpha) \cos \theta = k(0, \alpha)$, где $k(0, \alpha)$ — кривизна нормального сечения (вдоль вектора α).

Таким образом, если известна кривизна нормального сечения $k(0, \alpha)$, то кривизна любого плоского сечения (вдоль α), образующего угол θ с n , находится из формулы $k(\theta, \alpha) = \frac{1}{\cos \theta} k(0, \alpha)$.

Теперь напомним, что в касательной плоскости $T_P V^{n-1}$ всегда определены главные направления $e_1(P), \dots, e_{n-1}(P)$, определяющиеся однозначно, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим эти «главные оси» $e_1(P), \dots, e_{n-1}(P)$ и построим по каждому из них соответствующее нормальное плоское сечение $\gamma_i = \mathbb{R}_i^2 \cap V^{n-1}$, где плоскость \mathbb{R}_i^2 натянута на $n(P), e_i(P)$. Все главные направления $e_i(P)$ взаимно ортогональны в евклидовой метрике на $T_P V^{n-1}$. Обозначим через $k_i(P)$ кривизну нормального сечения γ_i (эти сечения иногда называются главными нормальными сечениями).

Теорема 24 (Вторая теорема Менье). *Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ совпадают с кривизнами k_1, \dots, k_{n-1} главных нормальных сечений.*

Доказательство. Из первой теоремы Менье имеем

$$k \cos \theta = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j};$$

так как $\theta = 0$ для нормального сечения, то

$$k = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j},$$

где α — определяющий вектор нормального сечения. Фиксируем в $T_P V^{n-1}$ ортобазис e_1, \dots, e_{n-1} ; тогда $g_{ij} = \delta_{ij}$; $q_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$; следовательно

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}.$$

Если $\alpha \in T_P V^{n-1}$ совпадает с одним из e_i , то $k_i = \lambda_i$, что и требовалось. □

Формула Эйлера

Рассмотрим в $T_P V^{n-1}$ произвольный вектор α и рассмотрим нормальное сечение вдоль α . Обозначим через φ_i ($1 \leq i \leq n-1$) углы, образуемые α с главными направлениями e_1, \dots, e_{n-1} (рис. 12.5).

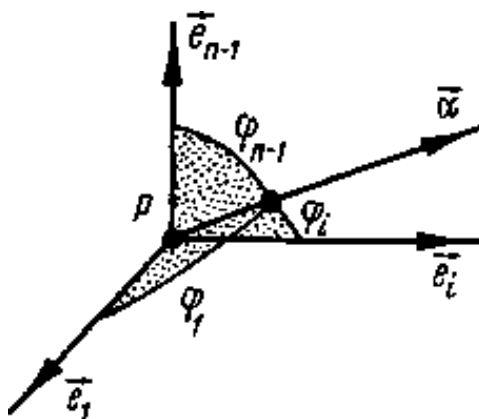


Рис. 12.5

Теорема 25. *Для нормального сечения вдоль произвольного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ выполнено соотношение (формула Эйлера)*

$$k = k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Доказательство. В силу второй теоремы Менье имеем

$$k(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

где

$$\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|},$$

где через $|\alpha|$ обозначена длина α . То, что $\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}$ очевидно. □

Лекция 13

13. Классификация двумерных гладких поверхностей

Гауссова кривизна двумерных поверхностей

Рассмотрим поверхность V^2 , гладко вложенную в \mathbb{R}^3 , и точку P на ней. Напомним, что

$$H(P) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad K(P) = \lambda_1 \lambda_2.$$

Выделяются три случая

$$K = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 < 0 \end{cases}.$$

В первом случае λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки, и этому случаю отвечают точка минимума и максимума; во втором одна из кривизны равна нулю, поверхность локально имеет вид цилиндра, а если обе кривизны равны нулю, то локально — это плоскость; в третьем кривизны имеют разные знаки, особенность — седло.

Пусть гауссова кривизна постоянна $K = \text{const}$.

Теорема 26. *Рассмотрим поверхность V^2 , гладко вложенную в \mathbb{R}^3 , $K = \text{const}$. Локально такая поверхность изометрична*

$$K = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \implies S^2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 \implies \mathbb{R}^2 \\ \lambda_1 \lambda_2 < 0 \implies L^2 \end{cases}.$$

Теорема 27. *Пусть $V^2 \subset \mathbb{R}^2$ — гладкая связная замкнутая компактная поверхность, $K = \text{const} > 0$. Тогда V^2 изометрична стандартной двумерной сфере S^2 .*

Рассмотрим произвольную гладкую кривую в \mathbb{R}^3 . Поверхность, образованную всеми касательными этой кривой обозначим через N .

Рассмотрим произвольную гладкую кривую в \mathbb{R}^3 . Через точки кривой проводим пучок параллельных прямых. Полученную поверхность обозначим через P .

Рассмотрим произвольную гладкую кривую в \mathbb{R}^3 и точку не лежащую на ней. Через проводим прямые через эту точку через все точки кривой («конус»). Полученную поверхность обозначим через Q (точку вне кривой удаляем).

Теорема 28. *Пусть $V^2 \subset \mathbb{R}^2$ — гладкая связная без края полная компактная поверхность, $K = \text{const} = 0$. Тогда V^2 изометрична либо N , либо P , либо Q .*

Теорема 29. *В трехмерном пространстве не существует гладких связных без края полных поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^2$, у которых $K = \text{const} < 0$.*

Однако можно рассмотреть такой пример:

Пример 17. Рассмотрим на плоскости (x, y) гладкую кривую γ , расположенную в первом квадранте, со следующим свойством: длина отрезка касательной от точки касания с кривой до точки пересечения касательной с осью Ox постоянна и равна a (рис. 13.1).

При перемещении точки A по кривой γ точка B скользит по оси Ox , и отрезок AB имеет постоянную длину, равную a . Кривая γ может быть получена чисто механическим путем, если связать две точки, A и B , нерастяжимой нитью длины a и, поместив A и B в положения A_0, B_0 соответственно (см. рис. 13.1), начать перемещать точку B по оси Ox . При этом точка A будет прочерчивать кривую γ , касающуюся оси Oy в точке A_0 и имеющую асимптоту — ось Ox .

При этом мы считаем, что точки A и B скользят по плоскости без трения; тогда вектор скорости будет все время направлен вдоль нити, соединяющей точки A и B , т.е. движение точки B будет однозначно определено. Найдем дифференциальное уравнение кривой γ . Из треугольника ABx (см. рис. 13.1) имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = -y'_x \\ a \sin \varphi = y \end{cases},$$

где $y = y(x)$ — график γ . Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{y'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}, \quad \frac{ay'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}; \quad x'_y = -\frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y},$$

где $x = x(y)$ — график γ . Итак:

$$\begin{aligned} x(y) &= -\int_y^a \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2} dy = -a^2 \int_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} + \int_y^a \frac{y dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} = \\ &= -a^2 \int_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2} = -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right). \end{aligned}$$

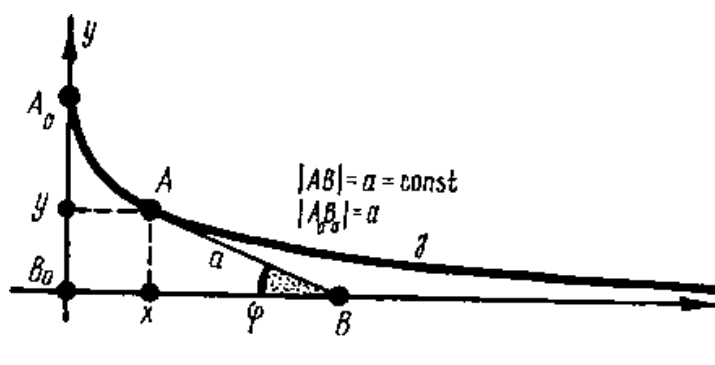


Рис. 13.1

Мы получили явную формулу графика $x = x(y)$. Рассмотрим поверхность вращения, получающуюся при вращении кривой γ вокруг оси Ox (рис. 13.2). Получающаяся поверхность V^2 называется *поверхностью Бельтрами*, или псевдосферой.

Она реализует часть плоскости Лобачевского в виде гладкой поверхности в \mathbb{R}^2 . Она некомпактна, гладка, связна, с краем.

$$K = \text{const} = -\frac{1}{a^2}, \quad g_{ij} \sim L^2 : \quad \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

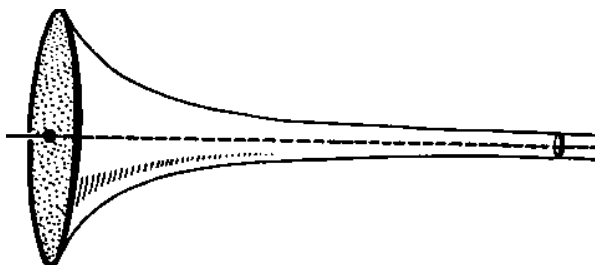


Рис. 13.2

Какую часть плоскости Лобачевского реализует поверхность Бельтрами? Рассмотрим точку на абсолюте и две параллельные прямые (рис. 13.3). Рассмотрим в этой точке окружность — орицикл. Тогда эта окружность вырезает сектор, который будет изометричен поверхности Бельтрами, разрезанной по образующей (рис. 13.4).

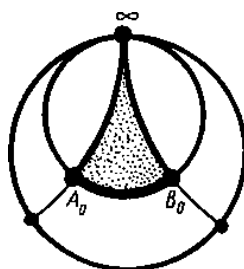


Рис. 13.3

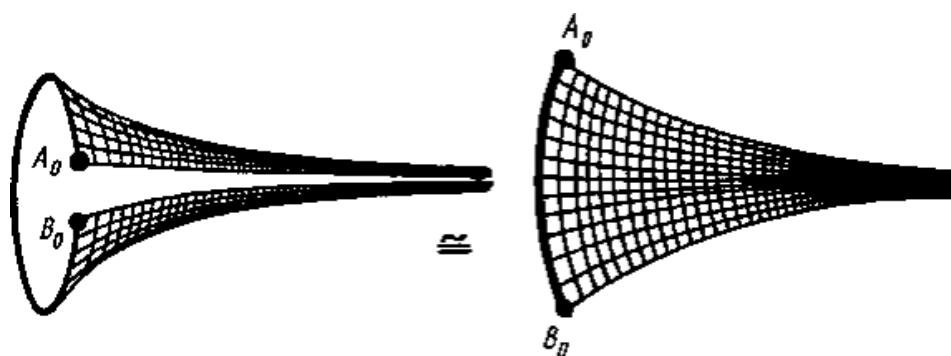


Рис. 13.4

Средняя кривизна двумерных поверхностей

Рассмотрим поверхность V^2 , гладко вложенную в \mathbb{R}^3 . Напомним, что

$$H = \text{tr}(G^{-1}Q).$$

Введем криволинейные координаты u, v . Метрика запишется в следующем виде

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

где $E = \langle r_u, r_u \rangle$, $F = \langle r_u, r_v \rangle$, $G = \langle r_v, r_v \rangle$;

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

где $L = \langle r_{uu}, n \rangle$, $M = \langle r_{uv}, n \rangle$, $N = \langle r_{vv}, n \rangle$.

Пусть $g = EG - F^2$. Имеем

$$\frac{1}{g} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} GL - FM & \star \\ \star & -FM + EN \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{g}(GL - 2FM + EN).$$

Запишем среднюю кривизну в локальных координатах. Если $z = f(x, y)$, то

$$ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2.$$

Так как радиус-вектор поверхности V^2 , заданной графиком $z = f(x, y)$, имеет вид

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

то

$$r_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad r_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad r_{yy} = (0, 0, f_{yy});$$

$$n = \frac{\text{grad}(z - f)}{|\text{grad}(z - f)|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};$$

$$L = \langle r_{xx}, n \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}; \quad M = \langle r_{xy}, n \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};$$

$$N = \langle r_{yy}, n \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Отсюда

$$H = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2}(GL - 2FM + EN) = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Минимальные поверхности

Рассмотрим поверхности нулевой средней кривизны — так называемые минимальные поверхности. Их площадь локально минимальна по сравнению с площадью других гиперповерхностей, отличающихся от исходной только внутри (любого) шара достаточно малого радиуса.

Определение 56. Скажем, что поверхность V^2 , гладко вложенная в \mathbb{R}^3 , является локально минимальной \iff любое малое возмущение этой поверхности не уменьшает площади поверхности (рис. 13.5).

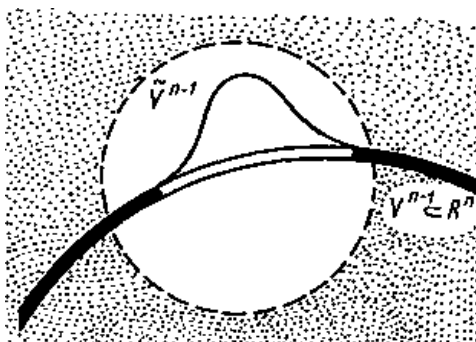


Рис. 13.5

Теорема 30 (без доказательства). Поверхность V^2 , гладко вложенная в \mathbb{R}^3 , является локально минимальной $\iff H = 0$.

Выведем уравнение двумерных минимальных поверхностей. Так как

$$H = \frac{1}{g}(GL - 2FM + EN),$$

где $g = EG - F^2$, то уравнение $H = 0$ примет вид

$$GL - 2FM + EN = 0.$$

Если поверхность задана с помощью графика функции $z = f(x, y)$, то, следовательно, условие $H = 0$ эквивалентно уравнению

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Уже сам вид этого нелинейного уравнения в частных производных (решениями которого и являются минимальные поверхности) показывает, что решения его довольно сложны.

Так как $H = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, то окрестность любой точки представляет собой «седло» (по одному направлению кривизна положительна, по другому — отрицательна).

Примеры минимальных поверхностей

Гиперплоскость

Евклидова плоскость является минимальной поверхностью, так как $\lambda_1 = \lambda_2 \implies H = 0$.

Теорема 31 (Пуассон–Лаплас). Пусть даны две среды и поверхность V^2 , которая их разделяет. Поверхность V^2 называется границей раздела двух сред. Пусть давления в средах — $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответственно. Подсчитаем среднюю кривизну в точке на границе раздела — $H(x)$. Утверждается, что если данная система находится в равновесии, то

$$p_1(x) - p_2(x) = \lambda H(x),$$

где λ — константа, которая зависит только от свойств границы раздела. Если давления постоянные, то получим, что $H = \text{const}$, так как $p_1 - p_2 = \text{const} = \lambda H$.

Мыльные пленки

Представим ситуацию: у нас есть мыльный раствор, в который мы опустили замкнутый контур γ без самопересечений из проволоки. Если вытащить его из жидкости, то на нем появится тонкая мыльная пленка — двумерная поверхность V^2 , $\partial V^2 = \gamma$.

Посмотрим на получившуюся поверхность с точки зрения теоремы 31. Мы утверждаем, что $H = \text{const} = 0$. Действительно, рассмотрим точку $P \in V^2$ и ее окрестность $U(P) \in \mathbb{R}^3$. Тогда можно считать, что в этой окрестности задано две среды: воздух над и под пленкой с давлениями p_1 и p_2 . Но с другой стороны, эти две среды представляют собой одну и ту же среду — внешнее пространство, поэтому $p_1 = p_2 \implies p_1 - p_2 = H = 0$ ($\lambda \neq 0$).

Вывод: мыльные пленки это физические модели минимальных поверхностей.

Кроме того, есть еще один вид мыльных пленок — мыльные пузыри. Фактически, они представляют собой сферу S^2 . Применим к этой модели пленок теорему Пуассона–Лапласа. Тогда S^2 — граница раздела двух сред: воздух внутри и воздух снаружи с давлениями p_1 и p_2 . Понятно, что $p_1 > p_2$. Итак, $H = \text{const} > 0$.

Теорема 32. Пусть дана гладкая связная компактная поверхность V^2 с постоянной средней кривизной. Такая поверхность изометрична стандартной сфере S^2 .

Геликоид

Более сложный пример некомпактной минимальной поверхности получается так: рассмотрим в \mathbb{R}^3 две ортогональные, пересекающиеся в точке O прямые l_1 и l_2 . Фиксируем прямую l_1 и будем перемещать вдоль нее с постоянной скоростью a прямую одновременно вращая l_2 с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси l_1 (возникает винтовое движение). Прямая l_2 будет заметать некоторое двумерное гладкое подмногообразие $V_2 \subset \mathbb{R}^3$, которое называется *прямым геликоидом* (рис. 13.6). Отметим, что любая минимальная поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ имеет неположительную гауссову кривизну, т.к. $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

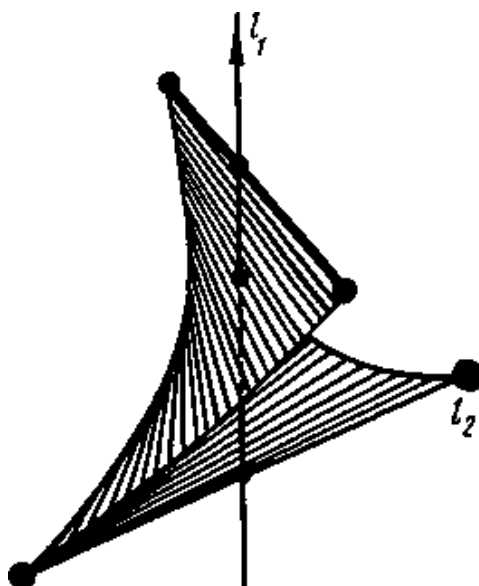


Рис. 13.6

Катеноид

Следующий пример будет связан с контуром $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, где под Γ понимается гладкое вложение набора окружностей в \mathbb{R}^3 , которые не пересекаются. Рассмотрим некомпактную минимальную поверхность вращения, образованную вращением вокруг оси Ox гладкой кривой $\gamma(t)$ задаваемой уравнением $y = a \operatorname{ch}(x/a)$. Как известно из курса анализа, эта кривая определяет форму провисания тяжелой цепи, закрепленной в двух точках: A и B (рис. 13.7). При этом мы предполагаем, что

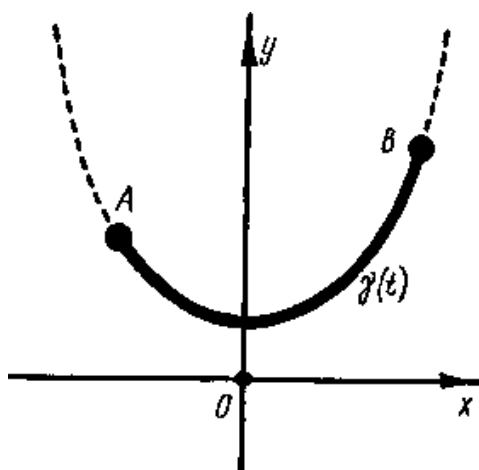


Рис. 13.7

тяжелая цепь подвешена достаточно высоко, так что кривая $y(x)$ не пересекает оси Ox . Сила тяжести направлена вниз, вдоль оси Oy . Соответствующая поверхность называется *катеноидом* (рис. 13.8). Для этой поверхности $H = 0$.

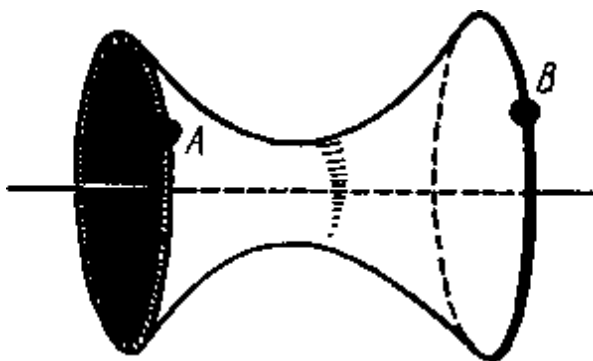


Рис. 13.8

Итак, катеноид — минимальная поверхность. Если рассмотреть только ту часть катеноида, которая заключена между двумя окружностями, образованными вращением точек A и B вокруг оси Ox , то получим пример минимальной поверхности, натянутой на контур Γ , состоящий из этих двух граничных окружностей. Здесь нам предоставляется случай продемонстрировать, что решение задачи на отыскание минимальной пленки с заданным контуром в качестве границы *неединственно*.

В самом деле, кроме уже предъявленного нами решения (рис. 13.8), существует еще одна минимальная пленка с тем же граничным контуром — это два диска, затягивающие граничные окружности (рис. 13.9). Эта минимальная пленка существует для любой пары точек A и B , в то время как катеноид далеко не всегда натягивается на граничные окружности. Ясно, что если точки A и B расположены достаточно далеко друг от друга, то катеноид построить нельзя (рис. 13.10).

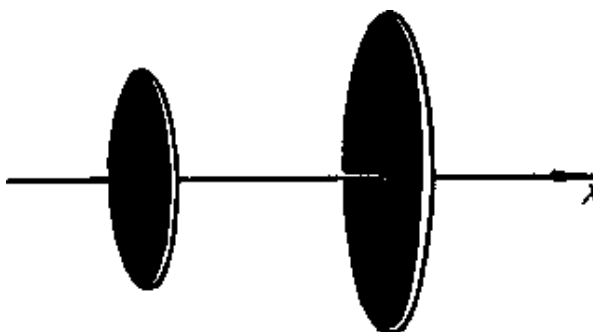


Рис. 13.9

Препятствие к его построению особенно наглядно проявляется, когда мы начинаем раздвигать граничные окружности, тем самым растягивая катеноид, первоначально построенный для достаточно близко расположенных точек A и B . Процесс растяжения схематично показан на рисунке 13.11. Из рисунка 13.11 видно, что при растяжении «тяжелая цепь» начинает провисать, а горловина катеноида уменьшается, и в момент ее касания с осью Ox гауссова кривизна поверхности в точке касания обращается в бесконечность. Иначе говоря, наша мыльная пленка разрывается.

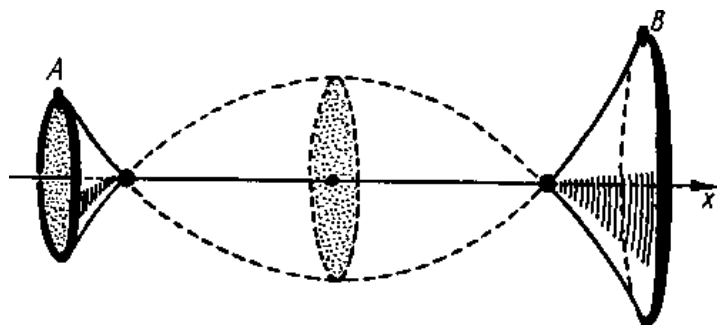


Рис. 13.10



Рис. 13.11

Еще один пример контура, для которого существуют два решения уравнения $H = 0$, показан на рис. 13.12. Здесь обе минимальные пленки гомеоморфны друг другу.

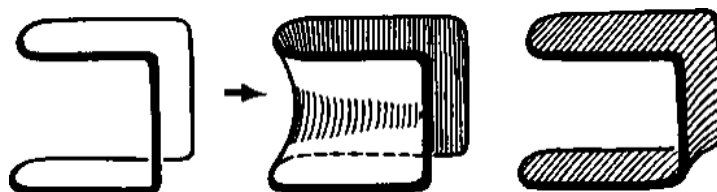


Рис. 13.12

Минимальные и гармонические поверхности

С минимальными поверхностями тесно связаны так называемые *гармонические поверхности* $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть поверхность V^2 задана так: $r = r(u, v)$, где u, v — криволинейные координаты на V^2 .

Определение 57. Радиус-вектор $r(u, v)$ называется *гармоническим* относительно координат u, v , если

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = 0,$$

т.е. $\Delta r = 0$, где Δ — оператор Лапласа в координатах u, v .

Замечание 10. Радиус-вектор $r(u, v)$, гармонический в координатах (u, v) , не обязан быть гармоническим в других координатах (u', v') .

Определение 58. Поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется *гармонической*, если она может быть задана с помощью некоторого гармонического радиус–вектора $r(u, v)$ в некоторых криволинейных координатах (u, v) .

Определение 59. Будем говорить, что радиус–вектор $r(u, v)$ *минимален*, если средняя кривизна заметаемой им поверхности тождественно равна нулю.

Замечание 11. Так как функция $H = \lambda_1 + \lambda_2$ — скаляр и, в частности, не меняется при регулярных заменах координат на поверхности, то если радиус–вектор является минимальным относительно одной системы координат, он будет минимальным и относительно любой другой регулярной системы координат.

Итак, понятие минимальной пленки не зависит от введенных на ней координат. Для гармонических поверхностей это уже не так, а потому говорят о гармонических отображениях

$$r : D(u, v) \longrightarrow \mathbb{R}^3(x, y, z),$$

где $D(u, v)$ — область на плоскости (u, v) , а $r(u, v)$ — отображение, определяющее поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Отображение r , гармоническое в одних координатах, уже не будет, вообще говоря, гармоническим в других координатах (приведите пример!).

Пример гармонической поверхности: зададим $r(x, y)$ формулой

$$r(x, y) = (x, y, x^2 - y^2),$$

где x, y — декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , т.е. поверхность V^2 задается графиком

$$z = x^2 - y^2,$$

отнесенным к декартовой системе координат. Ясно, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) r = 0,$$

т.е. поверхность $z = x^2 - y^2$ — гармоническая. В то же время она не минимальна: $H = 0$ только в точке $(0, 0)$, а в других точках $H \neq 0$.

Определение 60. Напомним, что криволинейные координаты (u, v) на поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называются *конформными*, если в них метрика $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$, индуцированная на V^2 объемлющей евклидовой метрикой, является скалярной, т.е. $E = G, F = 0$.

Замечание 12. Рассмотрим двумерное гладкое риманово многообразие, на котором задана риманова метрика ds^2 , не обязательно индуцированная каким–либо вложением M^2 в \mathbb{R}^3 , с вещественно–аналитическими коэффициентами E, F, G , рассматриваемыми как функции от локальных криволинейных координат u, v . Тогда, оказывается, для любой точки $P \in M^2$ существует такая окрестность $U = U(P)$, что в U можно ввести координаты p, q (являющиеся вещественно–аналитическими функциями от исходных координат u, v), в которых ds^2 имеет вид

$$\lambda(p, q)(dp^2 + dq^2),$$

т.е. координаты p, q будут конформными. Доказательство несложно, однако требует ссылки на теорему существования решения специального уравнения в частных производных (уравнения Бельтрами–Лапласа), что выходит за рамки нашего курса.

Как связаны гармонические и минимальные векторы в \mathbb{R}^3 ? Пример гармонического, но не минимального вектора мы привели. Верно ли обратное, т.е. любой ли минимальный вектор гармонический? Это тоже неверно (приведите пример!). Тем не менее имеет место следующее

Утверждение 6. *Минимальный вектор, записанный в конформных координатах, является гармоническим. То есть если задана $V^2 \subset \mathbb{R}^2$ — двумерная минимальная поверхность ($H = 0$), на которой заданы локальные конформные координаты, тогда ее радиус-вектор будет гармоническим:*

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = r_{uu} + r_{vv} = 0.$$

Доказательство. Пусть (u, v) — конформные координаты, а $r(u, v)$ — вектор, описывающий минимальную пленку.

Напомним, что

$$E = G = \langle r_v, r_v \rangle = \langle r_u, r_u \rangle; \quad F = \langle r_u, r_v \rangle = 0.$$

Требуется доказать, что $r_{uu} + r_{vv} = 0$. Положим $\alpha = r_{uu} + r_{vv}$. Так как $H = 0$, то

$$GL - 2MF + EN = 0,$$

т.е. $L + N = 0$. Отсюда

$$\langle \alpha, n \rangle = \langle r_{uu}, n \rangle + \langle r_{vv}, n \rangle = L + N = 0,$$

где n — нормаль к V^2 , и, как было отмечено ранее, $L = \langle r_{uu}, n \rangle$, $N = \langle r_{vv}, n \rangle$. Осталось доказать, что

$$\langle \alpha, r_u \rangle = \langle \alpha, r_v \rangle = 0,$$

так как тогда α будет иметь нулевые скалярные произведения с ортогональными векторами r_u , r_v и n , т.е. α должен быть нулевым вектором. Дифференцируя тождества $E = G$, $F = 0$, получаем

$$\begin{cases} \langle r_{uu}, r_u \rangle + \langle r_u, r_{uu} \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle + \langle r_v, r_{uv} \rangle; \\ \langle r_{uv}, r_u \rangle + \langle r_u, r_{uv} \rangle = \langle r_{vv}, r_v \rangle + \langle r_v, r_{vv} \rangle; \\ \langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{uv} \rangle = 0; \\ \langle r_{vu}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{vv} \rangle = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эти равенства, используя то, что

$$\langle r_{uu}, r_u \rangle + \langle r_u, r_{uu} \rangle = 2\langle r_{uu}, r_u \rangle$$

и т.д. Получаем:

$$\begin{cases} \langle r_{uu}, r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle; \\ \langle r_{uv}, r_u \rangle = \langle r_{vv}, r_v \rangle; \\ \langle r_{uu}, r_v \rangle = -\langle r_u, r_{uv} \rangle; \\ \langle r_{vu}, r_v \rangle = -\langle r_u, r_{vv} \rangle. \end{cases}$$

Отсюда

$$\langle \alpha, r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle - \langle r_{vu}, r_v \rangle = 0.$$

Аналогично,

$$\langle \alpha, r_v \rangle = -\langle r_u, r_{uv} \rangle + \langle r_{uv}, r_u \rangle = 0,$$

что и требовалось. □

Замечание 13. Выше мы сообщили (без доказательства), что в окрестности любой точки двумерной вещественно–аналитической поверхности можно ввести конформные координаты. Можно доказать (этот факт нетривиален), что любая минимальная пленка может быть задана вещественно–аналитическим радиус–вектором, а следовательно, в окрестности любой точки минимальной поверхности всегда можно ввести конформные координаты.

Лекция 14

14. Алгебраические функции. Римановы поверхности алгебраических функций. Топология римановых поверхностей

Сведения из геометрии комплексной плоскости

Рассмотрим комплексную прямую $\mathbb{C}^1 \simeq \mathbb{R}^2(x, y)$. Введем комплексные координаты.

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Тогда можно выразить x и y .

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Пусть функция $f(z) = a + ib$ — комплексно-аналитическая, где $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (a + ib) = a_x + ib_x + ia_y - b_y = 0.$$

Условия Коши–Римана:

$$\begin{cases} a_x = b_y, \\ a_y = -b_x. \end{cases}$$

Комплексный вариант теоремы о неявных функциях

Рассмотрим двумерное комплексное пространство $\mathbb{C}^2(z, w) \simeq \mathbb{R}^4$. Рассмотрим уравнение на функцию $f(z, w) = 0$. Оно задает замкнутое подмножество \mathbb{C}^2 — линию уровня Γ . Какими свойствами обладает Γ ?

Теорема 33 (см. рис. 14.1). Пусть $P \in \Gamma$, $P = f(z_0, w_0)$, $f(z_0, w_0) = 0$. Имеем

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w} \right).$$

Пусть $\text{grad } f|_P \neq 0$, например, $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$.

Тогда

- 1) Локально уравнение $f(z, w) = 0$ относительно переменной w имеет решение, т.е. существует окрестность $U(P) \subset \mathbb{C}^2$, в которой существует решение уравнения $f(z, w) = 0$, т.е. существует функция $w = g(z)$: $f(z, g(z)) = 0$.

- 2) Уравнение $f(z, w) = 0$ локально, т.е. в окрестности $U(P) \subset \mathbb{C}^2$ единственно.
 3) Функция $w = g(z)$ — комплексно-аналитическая.

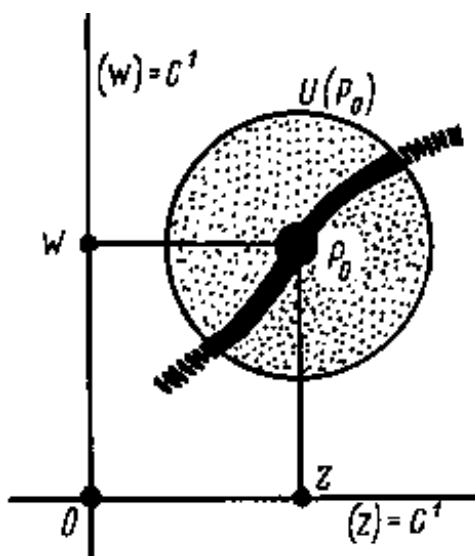


Рис. 114

Рис. 14.1

Определение 61. Уравнение $f(z, w) = 0$ называется *алгебраическим*, если функция f полиномиальна:

$$\sum_{p,q} a_{pq} z^p w^q$$

Определение 62. Функция называется *алгебраической*, если она является решением полиномиального уравнения, т.е. существует полином $f(z, w)$: $f(z, g(z)) = 0$.

Определение 63. Пусть $f(z, w)$ — полином. Рассмотрим поверхность уровня $\Gamma = \{f(z, w) = 0\}$. Пусть $w = g(z)$ — алгебраическая функция: $f(z, g(z)) = 0$. Тогда множество Γ называется *римановой поверхностью* данной алгебраической функции.

Уравнение $f(z, w) = a(x, y, u, v) + ib(x, y, u, v) = 0$ эквивалентно следующим двум уравнениями: $Re f = a = 0$, $Im f = b = 0$. их совместная линия уровня $(a = 0, b = 0) = \Gamma^2$ — двумерная вещественная поверхность (если a и b функционально независимы).

Риманова поверхность в \mathbb{R}^4

Теорема 34. Пусть полином $f(z, w)$ имеет вид $f = w^q - P_n(z)$ пусть полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Тогда уравнение $f(z, w) = 0$ определяет гладкое двумерное (над \mathbb{R}) подмногообразие в $\mathbb{C}^2(z, w) \simeq \mathbb{R}^4$.

Доказательство. Пусть точка P_0 принадлежит множеству $\{f = 0\}$ и имеет координаты (z_0, w_0) , где $w_0 \neq 0$. Тогда

$$\left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{P_0} = qw_0^{q-1} \neq 0$$

в точке P_0 , т.е. по теореме о неявной функции поверхность $\{f = 0\}$ является в некоторой окрестности точки P_0 гладким двумерным подмногообразием — графиком алгебраической функции $w = g(z)$. Решение $w = g(z)$ в нашем случае имеет вид

$$w = \sqrt[q]{P_n(z)}.$$

Осталось рассмотреть точки $P_0 = (z_0, 0)$.

Утверждение:

$$\text{grad } f(P_0) = \left(-\frac{dP_n(z_0)}{dz} \right) \neq 0.$$

Если бы $\frac{d}{dz}P_n(z_0) = 0$, то в точке $(z_0, 0)$ имели бы $P_n(z_0) = 0$ и $\frac{d}{dz}P_n(z_0) = 0$. Отсюда z_0 — кратный корень $P_n(z)$, что противоречит условию. Итак, $\text{grad } f(P_0) \neq 0$, и в некоторой открытой окрестности V точки $(z_0, 0)$ поверхность $\{f = 0\}$ задается гладким графиком $w = g(z)$, где $g(x)$ — аналитическая функция. \square

Основные свойства алгебраических функций

- 1) Алгебраические функции обычно являются *многозначными*, т.е. некоторым значениям аргумента z отвечает несколько значений функции $w = g(z)$.

Пример: $w = \sqrt[q]{z^n}$, где q и n взаимно просты. То есть получаем q различных корней по переменной z :

$$z \longrightarrow \{w_1(z), \dots, w_q(z)\}.$$

Простейший случай: $w = \sqrt{z^n}$, когда каждому z_0 отвечает ровно два значения $w = \pm\sqrt{z_0}$, если $z_0 \neq 0$. Аналогично, многозначной может быть и функция $z = \alpha(w)$. Линейная функция $w = az + b$ однозначна.

Многозначность $w = g(z)$ можно прокомментировать так. Рассмотрим ортогональную проекцию

$$\pi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^1(z); \quad \pi(z, w) = (z, 0);$$

при этом прообразом любой точки $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ является комплексная прямая $H(z_0)$, параллельная $\mathbb{C}^1(w)$; риманова поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$, рассматриваемая как график $w = g(z)$, также проектируется на $\mathbb{C}^1(z)$; при этом прообразом любой точки $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ при проекции $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^1(z)$ являются в точности все значения функции $w = g(z)$ в точке z_0 (рис. 14.2).

Поскольку функция $w = g(z)$ — алгебраическая (т.е. f — полином), то образом поверхности Γ при проекции $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^1(z)$ является вся плоскость

$\mathbb{C}^1(z)$, т.е. для любого $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ существует по крайней мере одно решение полиномиального уравнения $f(z_0, w) = 0$.

Сделаем замену переменной: запишем $w = g(z)$ в виде $w = \rho(P)$, где $P \in \Gamma$ — переменная точка на поверхности Γ (рис. 14.4). Ясно, что $w = \rho(P)$ — однозначная функция, так как каждому значению аргумента $P \in \Gamma$ отвечает в точности одно значение функции $w = \rho(P)$. Мы добились того, что алгебраическая функция (в новых переменных) стала однозначной, но за это пришлось «заплатить» значительным усложнением области изменения аргумента функции: вместо $\mathbb{C}^1(z)$, где менялась переменная z , мы вынуждены теперь менять аргумент P на поверхности Γ — двумерном многообразии.

Итак, риманова поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ алгебраической функции $w = g(z)$ является областью однозначности этой функции. Это свойство иногда кладется в основу другого определения римановой поверхности, эквивалентного нашему.

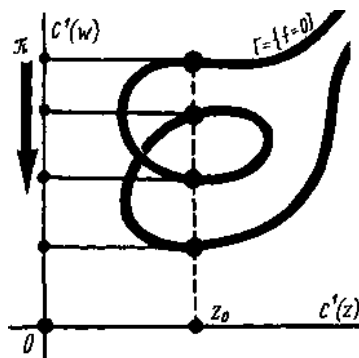


Рис. 14.2

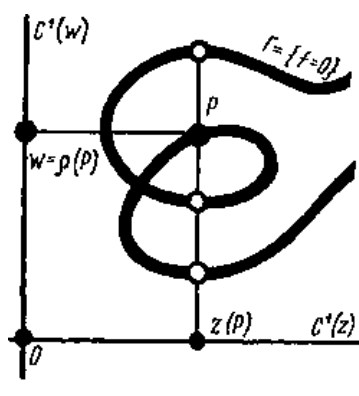


Рис. 14.3

- 2) Так как для каждого $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ существует, вообще говоря, много значений $w_i = g(z_0)$ (их число равно числу разных корней полиномиального уравнения $f(z_0, w) = 0$), то в открытой окрестности каждого $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ можно определить набор непрерывных (даже гладких) функций $w = \{\varphi_i(z)\}$, $1 \leq i \leq k$, где

k — степень полинома

$$a_0(z)w^k + a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z) = f(z, w)$$

по переменной w . Каждая из них описывает изменение какого-то одного корня уравнения $f(z, w) = 0$ при изменении z . Функции $\varphi_i(z)$, можно продолжать на все значения переменной z ; при этом в некоторых точках эти продолженные функции могут совпадать и, более того, меняться местами. Функции $\varphi_i(z)$ называются *ветвями* алгебраической функции $w = g(z)$.

Каждая ветвь описывает поведение какого-то корня уравнения $f(z, w) = 0$; мы считаем z параметром в уравнении $f(z, w) = 0$, а w — искомой величиной.

Над каждым $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ «висят» значения функции $w = g(z)$, являющиеся корнями уравнения

$$f(z_0, w) = a_0(z_0)w^k + a_1(z_0)w^{k-1} + \dots + a_k(z_0).$$

Из теоремы о неявной функции следует, что каждая ветвь определяет (почти во всех точках) гладкое, даже комплексно-аналитическое подмногообразие в \mathbb{C}^2 , так как $\varphi_i(z)$ — (локально) комплексно-аналитическая функция.

- 3) Сопоставим каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ число $k(z_0)$, равное числу различных корней уравнения $f(z_0, w) = 0$. Ясно, что $k(z_0) \leq k$. Если все корни уравнения $f(z_0, w) = 0$ простые, то $k(z_0) = k$; если же есть кратные корни, то $k(z_0) < k$. Число $k(z_0)$ равно числу различных значений $w = g(z)$ в точке z_0 . Точки z_0 , где $k(z_0) < k$, характеризуются также тем, что в них некоторые ветви $\varphi_i(z)$ функции $w = g(z)$ сливаются вместе, уменьшая число различных значений $\{\varphi_i(z)\}$ над z_0 (рис. 14.4).

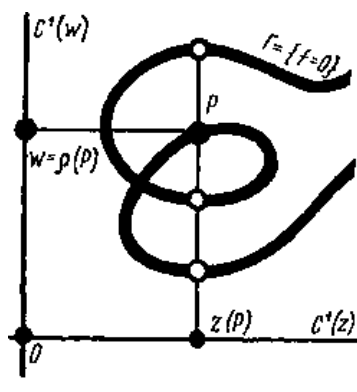


Рис. 14.4

Будем считать, что $f(z, w) = w^q - P_n(z)$, и полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. В силу теоремы 34 поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ — комплексно-аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^2(z)$. Точки $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$, для которых $k(z_0) < k$, назовем *точками ветвления алгебраической функции* $w = g(z)$ (об этом термине см. ниже).

В случае $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$ точками ветвления (в конечной части $\mathbb{C}^1(z)$, т.е. в плоскости $\mathbb{C}^1(z)$, не пополненной «бесконечностью») являются корни полинома $P_n(z)$; причем если z_1, \dots, z_n — корни $P_n(z)$ (все они простые), то

$$k(z_\alpha) < k = q = \deg_w(w^q - P_n(z)),$$

так как $k(z_\alpha) = 1$, $1 \leq \alpha \leq n$. Точку «бесконечность» пока не рассматриваем. Итак, все точки ветвления функции $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$ изолированы.

- 4) 4) Точки ветвления (в конечной части $\mathbb{C}^1(z)$) обладают таким свойством: в них сливаются несколько ветвей функции $w = g(z)$. Так как точка ветвления изолирована, то можно считать ее центром достаточно малого диска D^2 , в котором нет других точек ветвления, а потому $k(z_0) = k$ при $z \in D^2$, $z \neq z_0$. Рассмотрим окружность с центром в z_0 расположенную в D^2 ; совершим обход по ней вокруг z_0 . Тогда ветви функции $g(z)$, вообще говоря, меняются местами и, обходя нужное число раз вокруг z_0 , можно перейти с ветви на ветвь.

Пример 18. Разберем пример. Пусть $f = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ не имеет кратных корней; пусть $n = 1$, т.е. $f = w^2 - z$. Тогда $w = g(z) = \sqrt{z}$. Ясно, что $k = 2$, $w = \{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$, где

$$\varphi_1(z_0) = +\sqrt{z_0}; \quad \varphi_2(z_0) = -\sqrt{z_0};$$

если $z = re^{i\varphi}$, то

$$\varphi_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}; \quad \varphi_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}; \quad \varphi_1(z) \neq \varphi_2(z) \quad (z \neq 0);$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0.$$

Точка $0 \in \mathbb{C}^1(z)$ — единственная точка ветвления в конечной части плоскости. Обе ветви — гладкие функции. При обходе вокруг 0 (r постоянно, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) ветви φ_1 и φ_2 меняются местами:

$$\varphi_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \rightarrow \sqrt{r}e^{i(\varphi+2\pi)/2} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2} = \varphi_2(z).$$

Топология пополненной римановой поверхности

Рассмотрим наш стандартный пример $f = w^2 - P_n(z)$. Положим для простоты $q = 2$, $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$. Рассмотрим индукцию по степени полинома n .

Пусть $n = 1$: $w^2 - z = 0$, $w = \pm\sqrt{z}$. Рассмотрим область определения этой функции — $S^2(z) = \mathbb{C}^1(z) \cup \infty$. Ищем точки ветвления этой алгебраической функции. Это точки $z = 0$ и $z = \infty$ (можно сделать замену $\tau = 1/z$).

Следует пояснить, что мы будем понимать под «бесконечностью». Имеется несколько разных способов придать этому содержательный смысл. Эта задача называется задачей компактификации и связана с более общим вопросом: как можно делать из некомпактных открытых многообразий компактные многообразия, «присоединяя край». В общем случае, эта задача не имеет универсального решения, так как понятие компактификации зависит от нужд данной задачи — одно и то же открытое

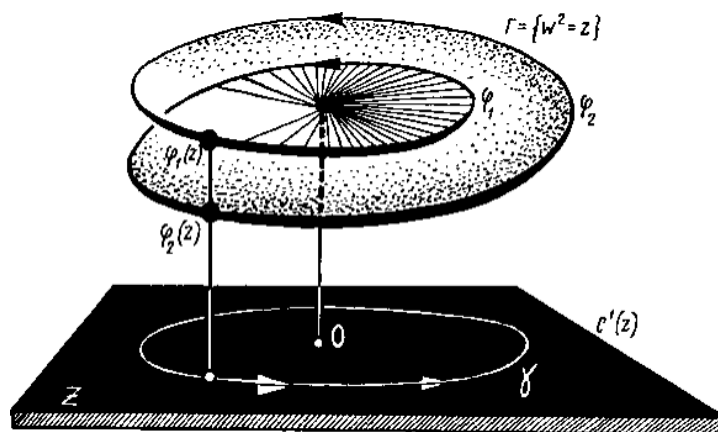


Рис. 14.5

многообразие можно компактифицировать различными способами (если оно вообще допускает компактификацию).

Рассмотрим поверхность $\Gamma^* = \cup \Gamma_\alpha^*$, где Γ_α^* — график однозначной ветви $w = g(z)$. Лист Γ_α^* диффеоморфен области определения однозначной ветви $w_\alpha(z)$.

Найдем область определения однозначной ветви. Сделаем разрез $\gamma: 0 - \infty$ на $S^2(z)$ и запретим обходы вокруг этих точек. Утверждается, что на S^2/γ функция однозначна. Итак,

$$\Gamma_1^* \simeq S^2/\gamma, \quad \Gamma_2^* \simeq S^2/\gamma.$$

Следовательно,

$$\Gamma^* = \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^* = (S^2/\gamma) \cup (S^2/\gamma) = S^2.$$

Склеим: см. рис. 14.6 и 14.7.

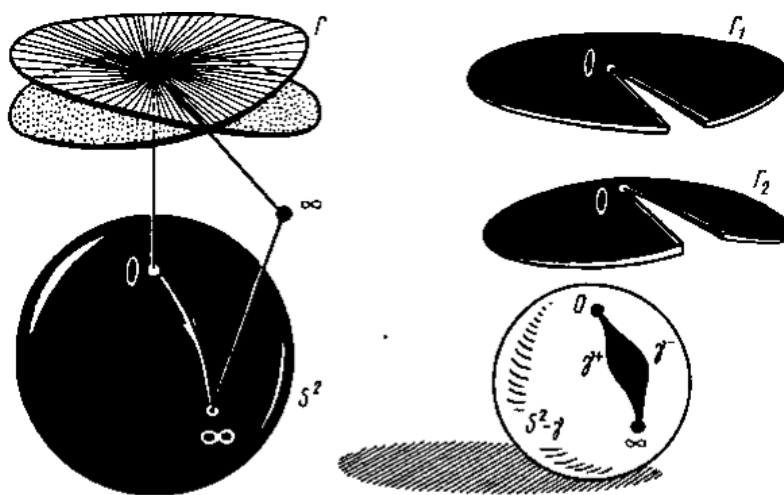


Рис. 14.6

Пусть теперь $n = 2$. Имеем $w^2 - P_n(z) = 0$,

$$w = \pm \sqrt{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b.$$

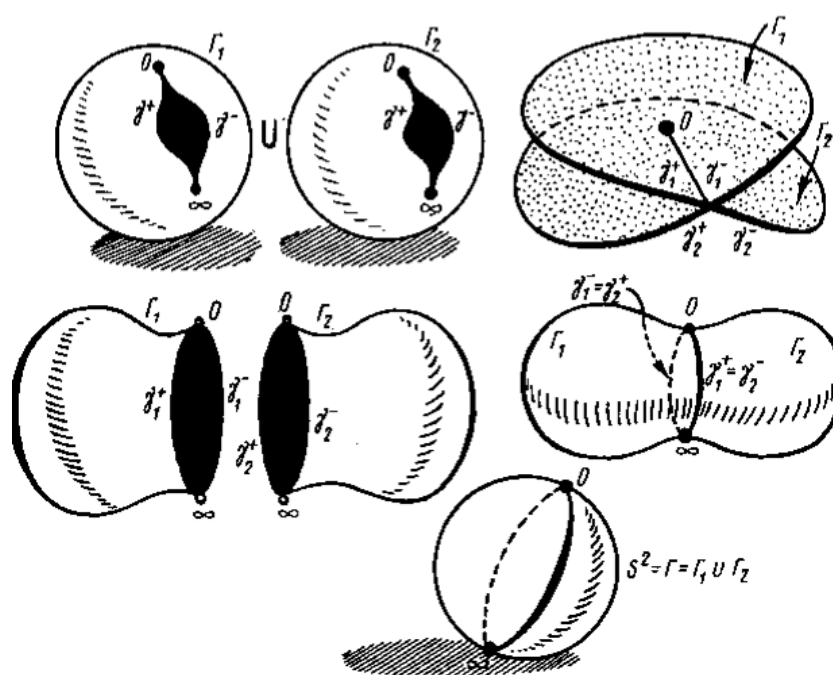


Рис. 14.7

Рассмотрим область определения этой функции — $S^2(z) = \mathbb{C}^1(z) \cup \infty$. Ищем точки ветвления этой алгебраической функции. Это точки $z = a$ и $z = b$.

Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления:

$$z = \frac{1}{\tau} : w = \pm \sqrt{(1/\tau - a)(1/\tau - b)} = \frac{\pm \sqrt{(1 - a\tau)(1 - b\tau)}}{\tau}.$$

При обходе вокруг точки $\tau = 0$ ветвления не происходит.

Найдем область определения однозначной ветви. Сделаем разрез $\gamma: a - b$ на $S^2(z)$ и запретим обходы вокруг этих точек. Утверждается, что на S^2/γ функция однозначна. Итак,

$$\Gamma_1^* \simeq S^2/\gamma, \quad \Gamma_2^* \simeq S^2/\gamma.$$

Следовательно,

$$\Gamma^* = \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^* = (S^2/\gamma) \cup (S^2/\gamma) = S^2.$$

Склеим: см. рис. 14.6 и 14.7.

Итак, при $n = 1$ и $n = 2$ $\Gamma^* = S^2$.

Рассмотрим произвольное n . Имеет место

Теорема 35. *Рассмотрим $w^2 - P_n(z) = 0$, где полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Тогда компактифицированная риманова поверхность Γ^* (с «расклеенной бесконечностью») алгебраической функции*

$$w = \pm \sqrt{P_n(z)} = \sqrt{\prod_{k=1}^n (z - a_k)}$$

гомеоморфна сфере с $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ручками (через $\lfloor \rfloor$ обозначена целая часть), т.е. многообразию типа M_g^2 рода $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Доказательство. Для случаев $n = 1$ и $n = 2$ теорема доказана.

Пусть $n = 2k$,

$$w = \pm \sqrt{P_n(z)} = \sqrt{\prod_{i=1}^{2k} (z - a_i)}.$$

Точками ветвления все корни a_i и только они.

Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления:

$$z = \frac{1}{\tau} : w = \pm \sqrt{(1/\tau - a_1) \dots (1/\tau - a_{2k})} = \frac{\pm \sqrt{\prod (1 - a_i \tau)}}{\tau^k}.$$

При обходе вокруг точки $\tau = 0$ ветвления не происходит.

Разбиваем корни на пары, соединяем точки внутри пары гладким отрезком, нумеруем берега разрезов и, разрезая Γ^* вдоль прообразов этих путей, получаем два листа. Сделаем склейку: см. рис. 14.8. Получили двумерную поверхность M_g^2 , $g = k - 1$.

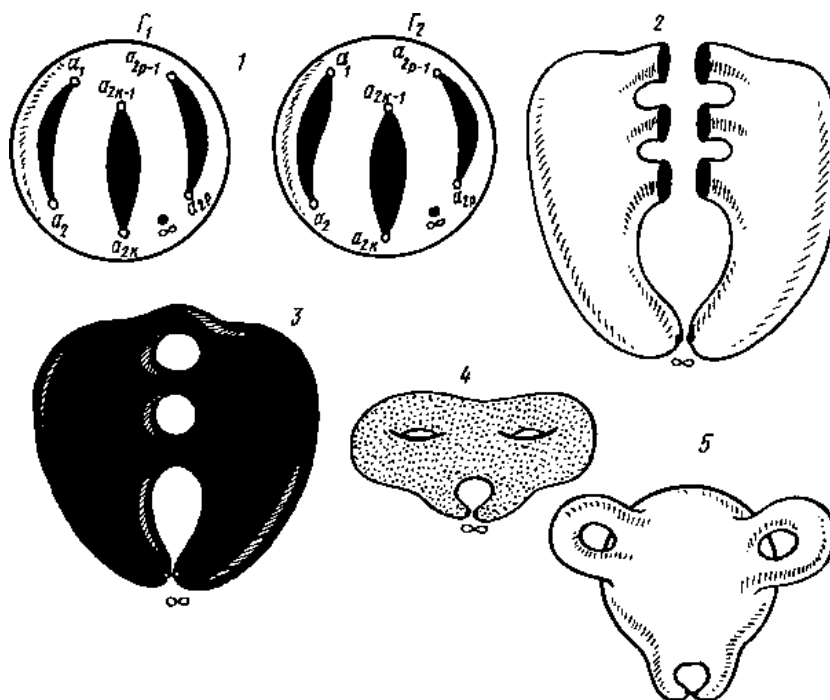


Рис. 14.8

Пусть теперь $n = 2k + 1$,

$$w = \pm \sqrt{P_n(z)} = \sqrt{\prod_{i=1}^{2k+1} (z - a_i)}.$$

Точками ветвления все корни a_i и ∞ .

Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления:

$$z = \frac{1}{\tau} : w = \pm \sqrt{(1/\tau - a_1) \dots (1/\tau - a_{2k+1})} = \frac{\pm \sqrt{\Pi(1 - a_\alpha \tau)}}{\tau^k \sqrt{\tau}}.$$

При обходе вокруг точки $\tau = 0$ происходит ветвление.

Разбиваем корни на пары, где последняя пара (a_{2k+1}, a_{2k+2}) , $a_{2k+2} = \infty$, соединяем точки внутри пары гладким отрезком, нумеруем берега разрезов и, разрезая Γ^* вдоль прообразов этих путей, получаем два листа. Сделаем склейку: см. рис. 14.9, 14.10, 14.11. Получили двумерную поверхность M_g^2 , $g = k$:

$$\left[\frac{2k + 1 - 1}{2} \right] = k.$$

□

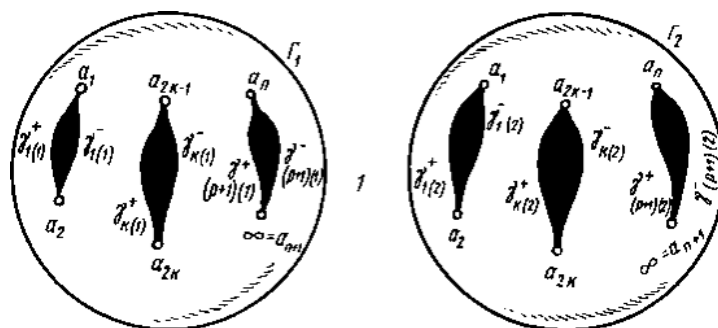


Рис. 14.9

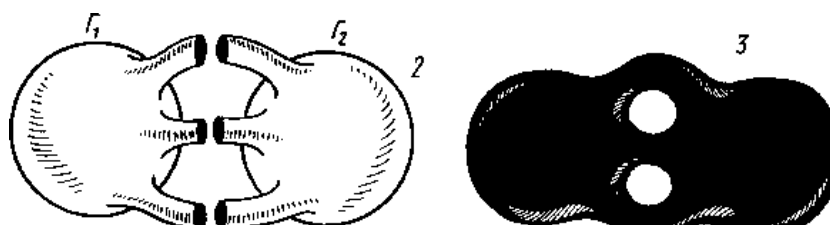


Рис. 14.10

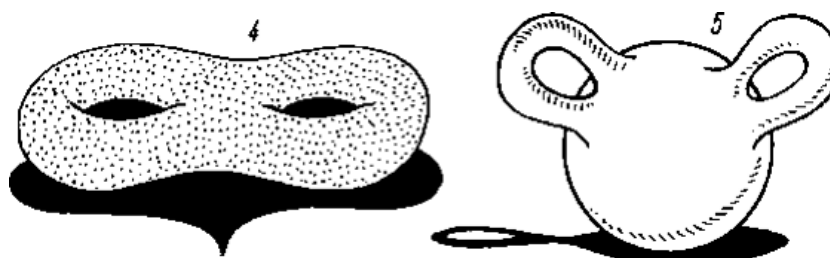


Рис. 14.11

Итак, двумерные поверхности возникают естественным путем — как римановы поверхности некоторых алгебраических функций.

Кроме того, на Γ^* есть риманова метрика, индуцированная из объемлющей.

Теорема 36. Пусть $w = g(z)$ — алгебраическая функция в \mathbb{C}^2 . Тогда римановы поверхности Γ, Γ^* — римановы многообразия с конформно-евклидовой римановой метрикой.

Доказательство. Метрика называется конформной, если существуют локальные координаты, в которых она имеет вид: $g_{ij} = \alpha \delta_{ij}$. Комплексная координата z обслуживает все Γ , кроме точки 0, в окрестности которой нужно ввести координату w , связанную с z комплексно-аналитическим преобразованием $z = \omega(w)$. Введем в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ метрику

$$ds^2 = dzd\bar{z} + dw d\bar{w} = \sum_{k=1}^4 (dx^k)^2;$$

рассмотрим ее ограничение на $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$. Имеем

$$ds^2(\Gamma) = dzd\bar{z} + dg(z)d\bar{g}(z) = dzd\bar{z} + g'(z)\bar{g}'(z)dzd\bar{z} = (1 + |g'(z)|^2)dzd\bar{z}.$$

Или

$$ds^2(\Gamma) = (1 + u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2), \quad z = x + iy, \quad g = u + iv.$$

Здесь

$$\frac{d}{dz}g(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = u_x + iv_x = y_y + iv_x,$$

т.к. $u_x = v_y, u_y = -v_x$. □

Лекция 15

15. Элементы теории Морса

Определение функции Морса

Пусть задано гладкое многообразие M^n и на нем функция $f(x) \in C^\infty$.

Определение 64. Точка $x \in M^n$ называется *критической* для функции $f(x)$, если $\text{grad } f(x) = 0$, что эквивалентно

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Понятие критической точки корректно определено в том смысле, что не зависит от выбора локальных регулярных координат на многообразии. Действительно, сделаем замену координат

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = 0.$$

Рассмотрим матрицу вторых частных производных $d^2 f$ в точке x . Она называется гессианом функции f .

Определение 65. Критическая точка x функции f называется *невырожденной*, если $\det f_{x^i x^j} \neq 0$.

Проверим корректность определения: сделаем замену координат.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j},$$

так как точка x — критическая. Получили $H' = AHA^T$, где A — матрица Якоби. Так как H по предположению была невырождена, то и H' тоже невырождена. Корректность определения доказана.

Определение 66. Пусть x — критическая точка функции f . Рассмотрим матрицу $d^2 f$. Она симметрична и невырождена, следовательно, ее можно привести к диагональному виду $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и не равны нулю. Пусть λ — количество отрицательных собственных чисел матрицы $d^2 f$. Оно называется *индексом* критической точки, $0 \leq \lambda \leq n$.

Определение 67. Критическая точка называется точкой Морса, если она невырождена. Гладкая функция называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены.

Функции Морса на многообразии

Пример 19. Рассмотрим пример. Пусть $n = 2$. Введем локальные координаты x, y . Индекс может равняться $\lambda = 0, 1, 2$.

Теорема 37 (лемма Морса). Пусть x — невырожденная критическая точка индекса λ . Тогда в некоторой малой окрестности этой точки $U(0)$ можно выбрать локальные регулярные координаты x^1, \dots, x^n такие, что функция в них запишется так:

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

По лемме Морса имеем

$$\begin{cases} \lambda = 0, & x^2 + y^2 \\ \lambda = 1, & -x^2 + y^2 \\ \lambda = 2, & -x^2 - y^2 \end{cases}$$

В случае $\lambda = 0$ — это минимум, в случае $\lambda = 1$ — седло, в случае $\lambda = 2$ — это максимум (рис. 15.1).

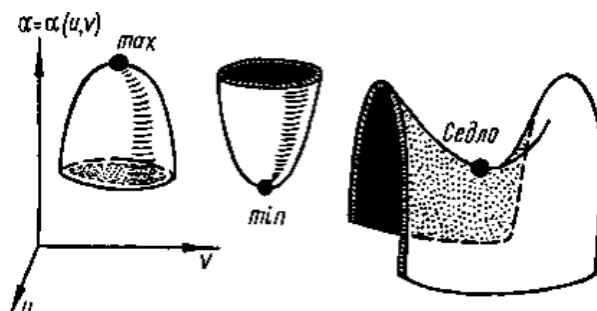


Рис. 15.1

Пример 20. Рассмотрим пример функции, у которой есть вырожденные точки. Пусть $f = x^3$. Точка 0 очевидно является вырожденной. Однако путем сколь угодно малого возмущения можно вырожденную точку превратить в набор невырожденных. Действительно, пусть $y = x^3 - \varepsilon x$. У этой функции две критических невырожденных точки $x = \pm\sqrt{\varepsilon/3}$.

Теорема 38. Пусть M^n гладкое многообразие. Рассмотрим пространство гладких функций на многообразии $C^\infty(M^n)$. Функции Морса образуют в нем всюду плотное подмножество (т.е. функции Морса — это типичные функции, и путем малого возмущения можно любую функцию привести к морсовской).

Теорема 39. Пусть M^n — гладкое многообразие с функцией $f(x)$. Найдём критические точки индекса λ и подсчитаем их количество. Это число обозначим μ_λ . Имеет место равенство

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \mu_\lambda(f) = \chi(M^n).$$

Пример 21. Рассмотрим сферу S^2 и функцию высоты на ней. Критических точек 2 — точка минимума ($\lambda = 0$) и точка максимума ($\lambda = 2$). Альтернированная сумма равна $1+1=2=\chi(S^2)$.

Пример 22. Рассмотрим тор T^2 и функцию высоты на нем. Критических точек 4 — точка минимума ($\lambda = 0$), точка максимума ($\lambda = 2$) и 2 седла ($\lambda = 1$). Альтернированная сумма равна $1-2+1=0=\chi(T^2)$.

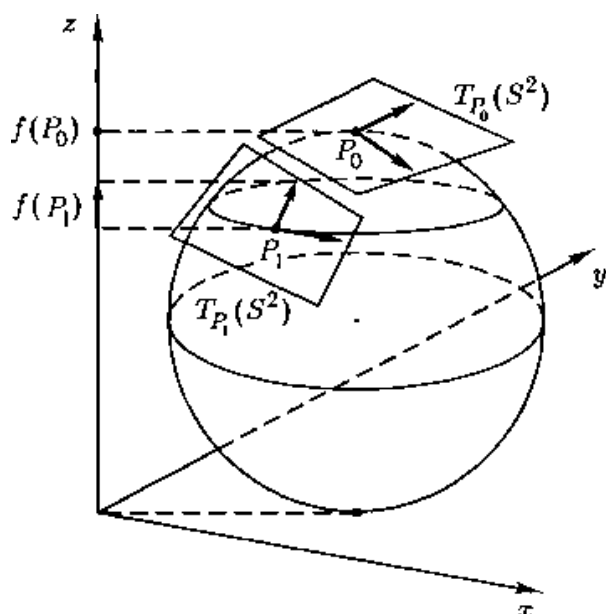


Рис. 15.2

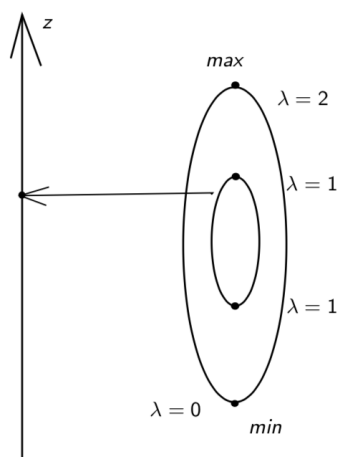


Рис. 15.3

Теорема существования функции Морса

Теорема 40. Пусть M^n — гладкое связное многообразие. Тогда на нем всегда существует функция Морса $f(x)$.

Докажем теорему только для случая компактных гиперповерхностей $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Почти для всех прямых l функция $f_l(x)$ является функцией Морса.

Доказательство. Рассмотрим произвольную прямую l . Рассмотрим функцию высоты, т.е. спроектируем многообразие M^{n-1} на прямую l . Опишем критические точки, т.е. те, для которых $\text{grad } f|_l = 0$.

Лемма 21. Пусть $M^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, на \mathbb{R}^n задана функция $f(x) \in C^\infty$. Пусть $g(x) =$

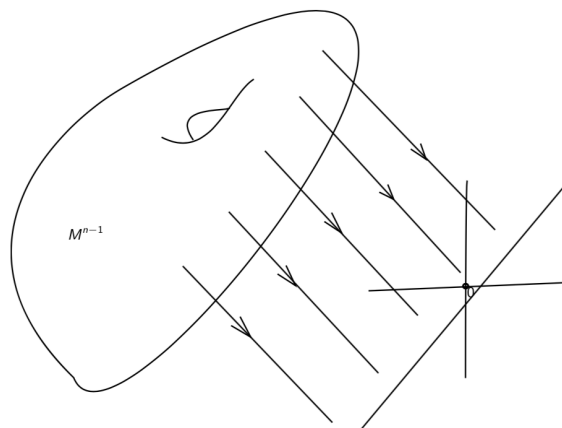


Рис. 15.4

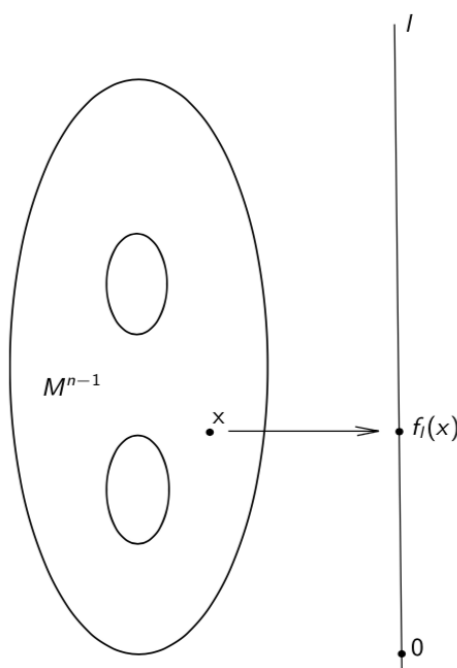


Рис. 15.5

$f(x)|_{M^{n-1}}$. Тогда вектор $\text{grad } g|_{M^{n-1}}$ получается из вектора $\text{grad } f|_{\mathbb{R}^n}$ ортогональной проекцией на M^{n-1} :

$$\text{grad } g|_{M^{n-1}} = \pi(\text{grad } f|_{\mathbb{R}^n}),$$

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M^{n-1}.$$

Доказательство. Для простоты докажем для $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим поверхности уровня $f = \text{const}$. Знаем, что $\text{grad } f \perp (f = \text{const})$. Рассмотрим ограничение на M^2 : $g(x) = f(x)|_{M^2}$. Линии уровня функции f совпадает с линиями уровня функции g ,

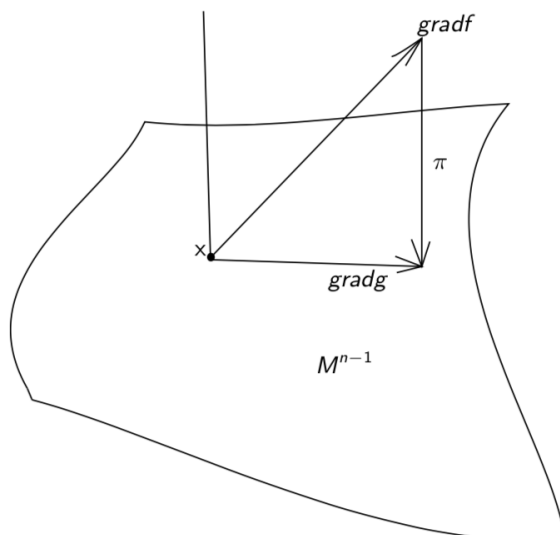


Рис. 15.6

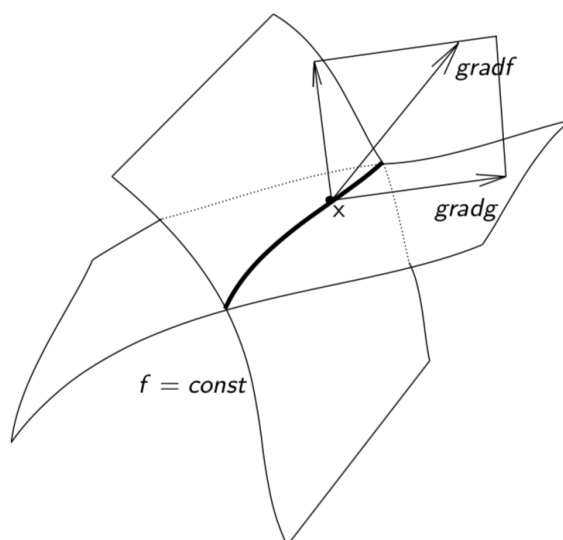


Рис. 15.7

следовательно, $\text{grad } g \perp M^2 \cap (f = \text{const})$, $\text{grad } g \in T_x M^2$. Отсюда все три вектора: нормаль к поверхности n , $\text{grad } g$, $\text{grad } f$ лежат в одной плоскости.

По новой параметризации

$$\text{grad } f = (f_x, f_y),$$

$$\gamma = \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$$

получаем, что $g = f(\gamma) = f(x, y(x))$,

$$\text{grad } g = f_x + f_y y'_x = \langle \text{grad } f, \gamma' \rangle, \quad \gamma' = (1, y'),$$

следовательно, $\text{grad } g$ — проекция вектора $\text{grad } f$. □

Утверждение 7. Критические точки функции высоты на многообразии — это те и только те точки, в которых касательная плоскость к многообразию ортогональна прямой $l: x \in M$ такие, что $T_x M \perp l$.

Доказательство. Будем считать, что функция $f_l(x)$ задана на всем пространстве \mathbb{R}^n (направим ось x^n вдоль выбранной прямой l):

$$f_l(x) = f_l(x^1, \dots, x^n) = x^n$$

— линейная функция. Векторное поле $v = \text{grad } f_l$ на \mathbb{R}^n — это постоянное векторное поле, направленное вдоль оси x^n .

Рассмотрим функцию $g = f_l|_{M^{n-1}}$. По лемме $\text{grad } g|_{M^{n-1}} = \pi(\text{grad } f|_{\mathbb{R}^n})$. Хотим найти точки, для которых этот градиент равен нулю. Очевидно, что это те и только те точки, где вектор $\text{grad } f|_{\mathbb{R}^n}$ ортогонален касательной плоскости (ортогональная проекция будет равна 0). Эти точки и будут критическими. \square

Теперь выберем «хорошее» направление. Рассмотрим гауссово отображение. А именно, пусть дано многообразие $M^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ и сферу радиуса единица S^{n-1} . Построим отображение следующего вида: на многообразии рассмотрим произвольную точку x и единичную нормаль n , выходящую из нее. Перенесем эту нормаль параллельно в точку 0 сферы. Таким образом, получим точку на сфере $\gamma(x)$. Построенное отображение $\gamma: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ называется *гауссовым отображением* (рис. 15.8).

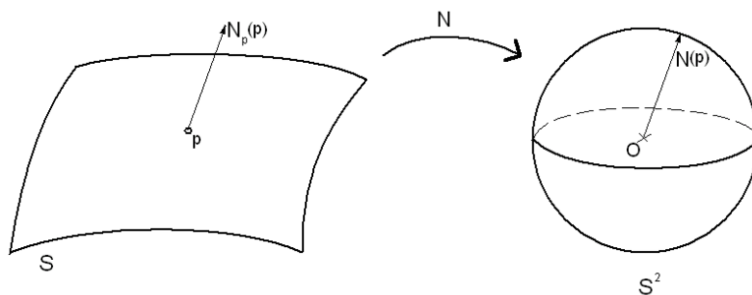


Рис. 15.8

Рассмотрим это отображение в окрестности критической точки $P: df_l|_P = 0$. Рассмотрим близкую к P точку x и касательное пространство $T_x M$ с координатами x^1, \dots, x^{n-1} , по оси n направим координату x^n . Тогда $x^n = f_l(x^1, \dots, x^{n-1})$, $(f_l)_{x_i}|_P = 0$.

Запишем в координатах отображение Гаусса. Найдем нормаль n в явном виде, для этого зададим поверхность с помощью уравнения

$$F(x^1, \dots, x^n) = f_l(x^1, \dots, x^{n-1}) - x^n,$$

$$M^{n-1} = \{F(x) = 0\},$$

$$n(x) = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{(f_{x^1}, \dots, f_{x^{n-1}}, -1)}{\sqrt{1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{x^\alpha}^2}}.$$

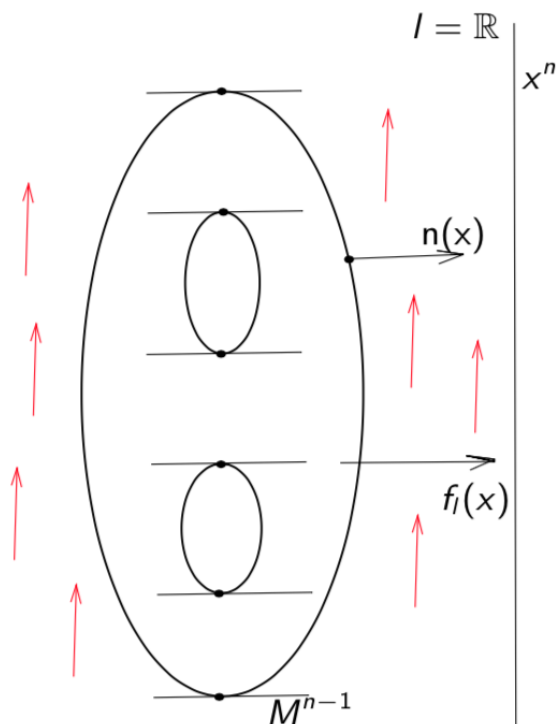


Рис. 15.9

Окончательно имеем

$$\gamma : (x^1, \dots, x^{n-1}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{x^\alpha}^2}} (f_{x^1}, \dots, f_{x^{n-1}}).$$

Утверждение 8. *Имеет место равенство*

$$d\gamma = \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial x^i \partial x^j} \right).$$

Доказательство. Проверяется непосредственно по формулам выше. □

Итак,

$$\det(d\gamma) = \det(d^2 f_l).$$

Следовательно, точка P является регулярной точкой для дифференциала отображения Гаусса, если и только если она является невырожденной критической точкой для функции высоты f_l , т.е. точкой Морса.

Так как любая прямая l протыкает сферу в двух точках, то мы можем продолжить отображение

$$\gamma : M^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}.$$

По доказанному выше все критические точки для функции f_l на M^{n-1} — это в точности все прообразы $\gamma^{-1}(l)$, $l \in \mathbb{R}P^{n-1}$.

Теорема 41 (Сард). *Рассмотрим гладкое отображение гладких многообразий $h : M \rightarrow Q$. Тогда рассмотрим подмножество в Q , составленное из всех регулярных значений h , т.е. таких, что все точки прообраза являются регулярными точками многообразия M , т.е. ранг dh максимален. Множество регулярных значений в многообразии Q всюду плотно.*

Применим теорему Сарда для нашего случая. Имеем: почти все точки $\mathbb{R}P^{n-1}$ (т.е. прямые) являются «хорошими», т.е. все точки в прообразе при отображении γ будут регулярны для $d\gamma$. Но тогда по предыдущему утверждению они будут невырожденными для функции высоты. Следовательно, для почти всех прямых l функция f_l является функцией Морса. Теорема доказана. \square



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ