МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ КАТЕГОРИЙ

ГОРДИЕНКО
АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Категория. Функтор

Курс читает Гордиенко Алексей Сергеевич, кафедра высшей алгебры. Email для связи: alexey.gordienko@math.msu.ru.

Темы и упражнения по темам курса будут выкладываться на сайте кафедры `https://halgebra.math.msu.su`, раздел «спецкурсы», подраздел «теория категорий».

Аналогичную информацию можно найти на странице `https://sites.google.com/view/alexey-sergeevich`, раздел «учебные материалы», подраздел «теория категорий».

На указанных выше ресурсах перечислены книги, на которые можно ориентироваться. Пока основной книгой для слушателей будет Маклейн С. «Категории для работающего математика».

Категория

Поговорим о том, что будет изучаться в рамках курса. При изучении абстрактной алгебры мы отвлекаемся от природы элементов. Например, у группы есть аксиомы и элементы, но природа элементов, когда мы изучаем группу с алгебраической точки зрения, нам неважна.

Теорию категорий можно рассматривать как следующий уровень абстракции по сравнению с абстрактной алгеброй.

Позднее мы увидим, что *категория* является алгебраической структурой со своими аксиомами.

Обсудим один теоретико-множественный вопрос. На границе XIX и XX веков математики обнаружили парадоксы теории множеств (парадокс Рассела, например) и были сформулированы строгие системы аксиом (есть 2 известные системы аксиом). Стандартный подход, позволяющий избежать теоретико-множественных парадоксов, заключается в следующем. Рассматриваются *классы* и *множества* (те классы, которые являются элементами других классов). Тогда все известные парадоксы сводятся к тому, что некоторые классы не являются множествами.

Такой подход, в принципе, можно использовать и в теории категорий, но удобнее говорить о *больших* и *малых* множества. Такая необходимость возникает, например, в следующей ситуации: класс всех групп и класс множеств мы не можем положить в какой-то другой класс (иначе столкнемся с парадоксами). Поэтому мы вводим некоторое ограничение и рассматриваем класс не всех групп, а класс так называемых *малых* групп.

В этом случае рассматривается некое большое множество U (большой мощности или, может быть, даже класс с точки зрения терминологии выше), которое называется *универсумом*[1]. Множества, которые являются элементами универсума, мы называем *малыми*. Остальные множества называются *большими*.

Если взять в качестве универсума множество всех множеств:

$$U = \{x \mid \exists\, y\ x \in y\}\,, \tag{1}$$

[1] Аксиомы универсума будут сформулированы в лекции 15.

тогда малые множества – это множества (в том смысле, в котором мы привыкли говорить в математике), а большие множества – это классы, которые не являются множествами.

Разумеется, универсум не всегда имеет вид (1). В общем случае мы будем считать, что фиксирован некий универсум, какие-то множества будем считать малыми, какие-то – большими. Как правило, для работы нам будет этого хватать. Это позволит нам рассматривать класс малых групп, класс малых множеств, и, увеличив универсум, мы сможем рассматривать класс, в котором будет большое множество, элементами которого будут класс малых групп и класс малых множеств. Здесь мы предполагаем, что можно увеличить универсум, но, вообще говоря, это не следует из аксиом теории множеств.

Для простоты в начале можно использовать использовать пример (1) и считать, что малые множества – это множества в привычном понимании, а большие множества – это классы. В дальнейшем при рассмотрении больших категорий там, где это требуется, мы будем считать, что мы увеличили или уменьшили универсум.

Определение. Говорят, что задана *категория* C, если задано (вообще говоря, большое) множество объектов[2] $\mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$, для любых $a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$ задано множество (как правило, малое) морфизмов[3] $a \to b$. Множество морфизмов обозначается $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ или $C(a,b)$.

Скажем про обозначения. Просто категорию (необязательно является множеством) мы будем обозначать заглавной латинской буквой (например, C), а ее объекты – маленькими латинскими буквами (например, a и b). Когда объекты будут множествами, их мы будем обозначать большими латинскими буквами (например, A и B), их элементы маленькими буквами (a и b), а категории – каллиграфическими буквами (например, $\mathcal{C}$).

Если есть два морфизма

$$f:\ a \to b$$

и

$$g:\ b \to c,$$

то определена композиция

$$gf:\ a \to c,$$

причем

1. композиция ассоциативна. Если даны морфизмы

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

то

$$(hg)f = h(gf).$$

[2]Здесь нам неважно, чем являются объекты.
[3]Вообще говоря, любой природы.

2. $\forall\ a \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}\ \exists$ «*тождественный морфизм*» $\mathrm{id}_a \in C(a,a)$, что $\forall\ a,b \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}\ \forall$ $f \in C(a,b)$

$$f\,\mathrm{id}_a = \mathrm{id}_b\,f = f$$

$$a \overset{\mathrm{id}_a}{=} a \xrightarrow{f} b \overset{\mathrm{id}_b}{=} b$$

Поговорим теперь о примерах категорий и их обозначениях.

Примеры. 1. *Категория множеств* Sets. Объектами здесь являются множества, морфизмами – отображения между ними. Если X, Y – множества, то множество морфизмов здесь

$$\mathrm{Sets}(X,Y) = \{f:\ X\ \to\ Y\}\,.$$

2. *Категория групп* Grp. Здесь объекты – это группы, а морфизмы гомоморфизмы групп.

3. *Категория абелевых групп* Ab. По аналогии с пунктом 2, объектами здесь являются абелевы группы, а морфизмами – гомоморфизмы абелевых групп.

4. Категория топологических пространств Top. Объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения между ними.

5. Пусть G – группа. Тогда G – категория, объект – единственный 1. Морфизмы

$$G(1,1) = G,$$

Композиция элементов здесь это просто их перемножение

$$\text{композиция } hg := hg \text{ (в группе)},$$

где g и h – морфизмы:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "g"] \arrow[loop right, "h"] \end{tikzcd} \tag{2}$$

6. Категория $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ векторных пространств над полем $\mathbb{K}$. Объекты здесь – векторные пространства, а морфизмы – линейные отображения.

7. Множество M с бинарным отношением $\le$ называется *предпорядком*, если

   1) $m \ge m$ (рефлексивность)

   2) если $m \le n$, $n \le t$, то $m \le t$ (транзитивность)

   Множество M тоже является категорией. Объекты здесь – это элементы множества M, а $\mathrm{Hom}_M(m,n)$ состоит не более чем из одного элемента и

$$\exists\, m \to\ n\ \iff\ m \le n.$$

Здесь мы поступаем следующим образом. Элементы предпорядка – это рассматриваемые объекты категории. Между ними есть стрелка от меньшего либо равного к большему либо равному. Из рефлексивности следует, что существует тождественный морфизм. Из транзитивности следует, что определена композиция

$$\begin{tikzcd} m \arrow[rr] \arrow[dr] & & n \arrow[dl] \\ & t & \end{tikzcd}$$

Аксиому ассоциативности композиции и равенства в определении тождественного морфизма можно не проверять, так как всегда $\exists$ не более одной стрелки между любыми двумя объектами.

8. Категория над ассоциативным кольцом с единицей R. Объекты – натуральный числа,
$$\mathrm{Hom}(m,n) = M_{n\times m}(R)$$
– матрицы размера $n \times m$ над кольцом R. Пусть
$$n \xrightarrow{B} k \xrightarrow{A} m$$
тогда композиция морфизмов – это произведение соответствующих матриц
$$A_{m\times k}\, B_{k\times n}.$$
Тождественный морфизм id_n – это единичная матрица размера $n \times n$.

Категория как алгебраическая структура

Пусть C_0 – множество объектов, C_1 – множество всех морфизмов. Справедливо

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & C_1 \arrow[l, bend right, "\mathrm{cod}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{dom}"] \end{tikzcd}$$

Напомним, если
$$f: a \to b,$$
то
$$\mathrm{dom}\, f := a, \quad \mathrm{cod}\, f := b.$$
Определим
$$C_1 \times_{C_0} C_1 = \{(f,g) \mid f, g \in C_1, \quad \mathrm{cod} g = \mathrm{dom} f\}.$$
Задано отображение композиция
$$\circ: C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1.$$

Аксиомы. 1. $\mathrm{cod}(\mathrm{id}_a) = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_a)$;

2. $\mathrm{dom}(fg) = \mathrm{dom} g$;

3. $\mathrm{cod}(fg) = \mathrm{cod} f$;

   Замечание. Иллюстрация к 2 и 3 аксиомам:
$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c.$$

4. $f(gh) = (fg)h$;

5. $\mathrm{id}_b f = f \,\mathrm{id}_a = f \ \forall \ f : \ a \ \to \ b$.

Категория C называется *малой*, если $\mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$ *малое* (и *большой* иначе).

Заметим, что категории малых групп и малых множеств сами уже являются большими.

Двойственная категория

Хочется ввести категорию (малых) категорий. Для этого нам требуются морфизмы между категориями, так называемые функторы. Прежде, чем перейти к рассмотрению функторов, обсудим двойственную категорию.

Рассматриваемый нами подход теории категорий, когда мы перестаем требовать, чтобы морфизмы были отображениями, а объекты – какими-то множествами, как правило, усложняет доказательство утверждений. Но у такого подхода, когда мы абстрагируемся от природы объектов и морфизмов, есть свое неоспоримое преимущество. Мы можем направить стрелки в противоположную сторону. Это так называемая *двойственная (opposite) категория*. С отображением, если отображение не является обратимым, так, очевидно, поступить нельзя.

Определение. Пусть дана категория C. *Двойственной к C* называется категория C^{op}, в которой
$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}\,\mathrm{C},$$
$$C^{\mathrm{op}}(a,b) \coloneqq C(b,a) \ \forall \ a,b \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}.$$

Если
$$f \in C^{\mathrm{op}}(a,b) = C(b,a),$$
$$g \in C^{\mathrm{op}}(b,c) = C(c,b),$$
то композиция
$$\text{в } C^{\mathrm{op}} \ gf = fg \text{ в } C.$$
Тождественные морфизмы id_a те же.

Замечание. В категории, двойственной к категории матриц, матрицы транспонируются.

Функторы

Перейдем к обсуждению функторов.

Определение. Пусть C и D – категории. Говорят, что задан *функтор*

$$F:\ C\ \to\ D,$$

если

1. задано отображение
$$\mathrm{Ob\,C} \to \mathrm{Ob\,D}$$
$$c \mapsto Fc;$$

2. $\forall\ a, b \in C$ задано отображение
$$C(a,b)\ \to\ D\,(Fa, Fb)$$
$$f \mapsto Ff,$$
при этом
$$F\mathrm{id}_a = F\mathrm{id}_{Fa}\ \forall\ a \in \mathrm{Ob\,C}$$
и
$$F\,(fg) = (Ff)(Fg)$$
для $\forall$ морфизмов
$$f:\ a \to b$$
$$g:\ b\ \to\ c.$$

Замечание. Такие функторы $C \to D$ называются *ковариантными*, они не меняют направление стрелок.

Контрвариантные функторы – это функторы $C \to D^{\mathrm{op}}$ или $C^{\mathrm{op}} \to D$ (стрелки в таком случае идут в другую сторону).

Примеры.

1. Забывающие функторы. Например,
$$\mathrm{Grp}\ \to\ \mathrm{Sets}$$
– «забываем» умножение,
$$\mathrm{Top}\ \to\ \mathrm{Sets}$$
– «забываем» топологию и так далее. Важно отметить, что понятие забывающего функтора – не категорное.

2. Функторы вложения. Например,
$$\mathrm{Ab} \subset \mathrm{Grp}. \tag{3}$$

3. Линейное представление группы[4] G:

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V),$$

– гомоморфизм, где V – векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Таким образом мы абстрактную группу представляем в виде конкретных линейных операторов. Заметим, что если V – конечномерное пространство, то элементы группы представляются в виде матриц.

Оказывается, что ρ – функтор из категории G в категорию $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. Единственный объект 1 из категории G переходит в векторное пространство:

$$1 \mapsto V$$

при этом все морфизмы (2)

$$g \mapsto \text{ линейное отображение } V \to V. \tag{4}$$

Так как у элементов g есть обратные элементы, у линейных отображений из правой части (4) также будут обратные, соответствующие обратным элементам группы. Поэтому линейные операторы будут обратимыми. Композиция для (4) сохраняется. Таким образом, ρ действительно является гомоморфизмом.

Итак, любой гомоморфизм является неким функтором из группы как категории в категорию векторных пространств, и наоборот, любой функтор – это некое представление группы.

4. Рассмотрим функторы, которые есть в каждой категории – Hom-функторы. Пусть C – категория, $c \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$. Тогда мы можем каждому (другому) объекту сопоставлять множество морфизмов из c в этот объект: функтор

$$\mathrm{Hom}(c,-) = C(c,-) : C \to \mathrm{Sets},$$

$$d \mapsto \mathrm{Hom}(c,d).$$

Если

$$f : a \to b,$$

то

$$\mathrm{Hom}(c,g) : \mathrm{Hom}(c,a) \to \mathrm{Hom}(c,b)$$

где

$$g \mapsto fg \quad \forall\, g : c \to a.$$

Это пример ковариантного Hom-функтора.

Если фиксировать, наоборот, объект, в который мы приходим, а менять объект, откуда мы идем, получится контрвариантный Hom-функтор $\mathrm{Hom}(-,c)$, где $c \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$. Здесь каждому объекту d сопоставляется

$$d \mapsto \mathrm{Hom}(d,c).$$

[4]Изучается в третьем семестре курса алгебры.

Если
$$f:\ a\ \to\ b,$$
то
$$\operatorname{Hom}(f,c):\ \operatorname{Hom}(b,c)\ \to\ \operatorname{Hom}(a,c),$$
$$g\ \mapsto\ gf\ \forall\ g:\ b\ \to\ c.$$

5. Функтор степени:
$$\mathcal{P}:\ \mathrm{Sets}\ \to\ \mathrm{Sets}.$$
Если M – множество, то $\mathcal{P}$ – множество подмножество множества M.
Если
$$f:\ M\ \to\ N$$
– отображение, то
$$\mathcal{P}f:\ \mathcal{P}\ \to\ \mathcal{P}N.$$
Если $S\subseteq M$, то
$$(\mathcal{P})\,(S)=\{f(s)\mid s\in S\}\,.$$

6. Функтор абелианизации[5]
$$\mathrm{Grp}\ \to\ \mathrm{Ab}$$
сопоставляет каждой группе ее факторгруппу по коммутанту:
$$G\ \mapsto\ G/[G,G].$$
Напомним, $[G,G]$ – коммутант, то есть подгруппа, порождённая элементами вида $ghg^{-1}h^{-1}$, где $g,h\in G$.

Упражнение 1.1. *Показать, что взятие группы $U(R)$ обратимых элементов ассоциативного кольца R с 1 – то функтор из категории ассоциативных колец с 1 в категорию Grp.*

Дадим еще два определения, связанных с функторами. Когда мы говорим про отображения, у нас бывают сюръективные и инъективные отображения. Можно так же говорить о функторах на множествах морфизмах.

Определение. Функтор
$$F:\ C\ \to\ D$$
называется *полным* (*full*), если для $\forall\ a,b\in\operatorname{Ob}\mathrm{C}$ отображение
$$C(a,b)\ \to\ D\,(Fa,Fb)$$
сюръективно, и *унивалентным* (*faithful*) , если это отображение инъективно.

Определение. D – *подкатегория* категории C, если D – подмножество объектов и морфизмов из C, замкнутое относительно композиции, id, cod и dom.

[5] Чуть позднее в курсе мы обсудим, как этот функтор и функтор (3) связаны.

Лекция 2. Изоморфизм в категориях. Естественные преобразования функторов. Эквивалентность категорий. Лемма Йонеды

Изоморфизм в категориях

Прежде всего сформулируем одно несложное упражнение.

Упражнение 2.1. *Пусть G – группа, рассматриваемая как категория. Что за категория G^{op}?*

В любой категории есть понятие изоморфизма между объектами. Мы знаем, например, про изоморфизм групп, векторных пространств, колец и так далее.

Определение. Пусть C – категория. Говорят, что морфизм

$$f : c \to d$$

– *изоморфзим*, если $\exists$ морфизм

$$g : d \to c$$

такой, что

$$fg = \mathrm{id}_d, \quad gf = \mathrm{id}_c.$$

Таким образом,

$$\text{изоморфизмы} = \text{обратимые стрелки.}$$

Определение. Объекты, между которыми $\exists$ изоморфизмы, называются *изоморфными*.

Как обычно, рассматривая примеры категорий, мы здесь открываем для себя уже знакомые нам понятия.

Примеры.

1. В Sets изоморфизмы – это биекции;
2. В Grp изоморфизмы – это изоморфизмы групп;
3. Пусть G – группа, рассматриваемая как категория. Тогда все элементы группы являются изоморфизмами.
4. В категории Top изоморфизмы – гомеоморфизмы.

Можно рассматривать и функторы – изоморфизмы категорий. Это, получается, обратимый функтор, который при рассмотрении его композиции вместе с ым дает тождественный функтор. На самом деле, это достаточно сильное условие, и позднее мы обсудим более слабое условие.

Естественные преобразования функторов

Рассмотрим категории C и D и два разных функтора F и G между ними:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & D \end{tikzcd}$$

Оказывается, что между функторами тоже могут быть морфизмы, которые называются *естественными преобразованиями функторов.*

Корректнее говоря, функторы между двумя категориями сами образуют категорию, в которой объектами являются функторы $C \to D$, а морфизмами – естественные преобразования между ними.

Определение. Говорят, что задано *естественное преобразование*[6]

$$\alpha : F \Rightarrow G, \tag{5}$$

если для $\forall\ c \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}$ задан морфизм объектов[7]

$$\alpha_c : Fc \to Gc$$

так, что для $\forall\ c_1, c_2 \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}$ и $f \in C(c_1, c_2) = \operatorname{Hom}_C(c_1, c_2)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} Fc_1 \arrow[r, "\alpha_{c_1}"] \arrow[d, "Ff"] & Gc_1 \arrow[d, "Gf"] \\ Fc_2 \arrow[r, "\alpha_{c_2}"] & Gc_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть

$$(Gf)\alpha_{c_1} = \alpha_{c_2} Ff.$$

Морфизмы α_c называются *компонентами естественного преобразования α.*

Хотя (5) и называется естественным преобразованием, для тех, кто только знакомится с теорией категорий, это совсем не естественное определение. У нас были категории и были функторы, которые играли роль морфизмов. Но, оказывается, внутри есть еще одна структура и «сидит» еще одна категория. Как мы узнаем позднее, это пример 2-*категории*, когда у нас есть 0-клетки (объекты), 1-клетки (морфизмы между 0-клетками) и 2-клетки (морфизмы между 1-клетками).

Примеры. 1. Пусть G – группа как категория с одним объектом $*$. Мы говорили, что функуторы из G в категорию векторных пространств – это линейное представление

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "\rho_1"] \arrow[r, bend right, "\rho_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

[6] В книге Маклейна вместо $\Rightarrow$ используется $\dot{\to}$.

[7] Иногда используют обозначение αc в один уровень, а не обозначение с помощью индекса α_c, которым пользуемся мы.

Тогда естественные преобразования

$$\rho_1 \Rightarrow \rho_2$$

– это гомоморфизмы представлений.

Объект здесь только один: $*$, то есть есть одна компонента

$$f: V_1 \to V_2,$$

где

$$V_i = \rho_i(*)$$

– образы единственного объекта $*$ категории G. Напомним,

$$\rho_i: G \to \mathrm{GL}(V_i).$$

Тогда справедлива диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

$\forall\ g \in G$, то есть

$$f\left(\rho_1(g)v\right) = \rho_2(g)f(v)\ \forall\ v \in V_1,\quad g \in G.$$

Такое отображение и называется гомоморфизмом представлений.

2. Рассмотрим гомоморфизм

$$\pi_G: G \to G/[G,G].$$

Оказывается, что это компонента естественного преобразования

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Grp}} \Rightarrow \text{функтор абелианизации},$$

так как $\forall$ гомоморфизма

$$f: G \to H$$

диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi_G"] \arrow[d, "f"] & G/[G,G] \arrow[d, "\overline{f}"] \\ H \arrow[r, "\pi_H"'] & H/[H,H] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обратим внимание, что функтор абиелинизации был из категории групп в категорию абелевых групп. Здесь мы применили функтор вложения, чтобы получить функтор из категории групп в категорию групп:

$$\mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Ab} \xrightarrow[\text{вложение}]{} \mathrm{Grp}.$$

Естественные преобразования такого типа будут часто встречаться, когда мы будем говорить про сопряженные функторы.

Эквивалентность категорий. Категория стрелок. Категории запятой

Дадим теперь определение более слабой схожести между категориями, чем изоморфизм категорий.

Определение. Говорят, что

$$F: C \to D$$

эквивалентность категорий, если $\exists$ функтор

$$G: D \to C$$

такой, что

$$FG \cong \mathrm{id}_D \text{ и } GF \cong \mathrm{id}_C.$$

Упражнение 2.2. *Показать, что*

$$\alpha: F \Rightarrow G$$

– изоморфизм функторов $\iff$ *все его компоненты* α_c *– изоморфизмы (объектов).*

Категория стрелок. Категории запятой

При помощи категорий можно строить другие категории.

Категория стрелок. Рассмотрим категорию Y:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_1"] \arrow[r, "r"] & 2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_2"] \end{tikzcd}$$

Категория функторов из Y в произвольную категорию C называется *категорией стрелок в C* и обозначается $\mathrm{Arr}(C)$:

$$\begin{array}{r} 1 \mapsto a \\ r \mapsto f \big\downarrow \\ 2 \mapsto b \end{array}$$

Обсудим теперь естественные преобразования функторов здесь:

$$\begin{tikzcd} 1 \mapsto a \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "r \mapsto f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ 2 \mapsto b \arrow[r, "\alpha_2"] & d \end{tikzcd} \tag{6}$$

Таким образом, объекты – это морфизмы

$$a \xrightarrow{f} b,$$

а морфизмы между ними – это пары стрелок (α_1, α_2).

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & \text{и} & c \arrow[d, "g"] \\ b & & d \end{tikzcd}$$

теперь рассматриваются как объекты, α_i – морфизмы между ними, диаграмма (6) коммутативна.

Заметим, что, хотя выше это показано не было, легко проверить, что сами естественные преобразования являются морфизмами в категории.

Категории запятой. (comma category) Пусть

$$F : C \to D$$

– функтор, $d \in \mathrm{Ob\,D}$ – некоторый фиксированный объект. Категория запятой[8] $(F \downarrow d)$ задается следующим образом: объекты – морфизмы вида

$$Fc \xrightarrow{f} d,$$

где c – произвольный объект $\in \mathrm{Ob\,C}$. Морфизм из f_1 в f_2, где

$$f_i : Fc_i \to d,$$

– это морфизм

$$\varphi : c_1 \to c_2$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} FC_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F\varphi"'] & d \\ Fc_2 \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Категория запятой, рассмотренная выше, не является единственной. Можно рассматривать и двойственную категорию $(d \downarrow F)$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & Fc_1 \\ fC_2 \arrow[ur, "F\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "f_2"'] \\ Fc_2 \end{tikzcd} \quad \text{и } d \xrightarrow{f_1} Fc_1$$

являются объектами.

Заметим, что такие категории будут активно возникать при обсуждении, например, сопряженных функторов.

[8] Иногда встречается альтернативное обозначение F/d.

Изначально использовалось обозначение (F, d), откуда и пошло название категории, но такое обозначение часто используется для пары объектов.

Лемма Йонеды

Как уже говорилось ранее, объекты в категориях имеют абстрактную природу и иногда хочется их вложить внутрь чего-то, с чем проще работать. Такую возможность дают Hom-функторы.

Определение. Функтор
$$F:\ C\ \to\ \mathrm{Sets}$$
называется *представимым*, если

$$F \cong C(c,-)$$

для некоторого $c \in ObC$.

Оказывается, любую категорию C можно вложить в категорию функторов из C в категорию Sets.

Обозначение. Если C, D – категории, то через D^C будем обозначать *категорию функуторов* $C \to D$.

Вложение Йонеды. Рассмотрим произвольную категорию C. Вложение Йонеды

$$C\ \to\ (\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}})^C$$

будет строиться следующим образом. Каждому объекту $c \in C$ будет ставиться в соответствие Hom-функтор
$$c \mapsto C(c,-).$$
Если дан морфизм объектов
$$f:\ c\ \to\ d,$$
то ему соответствует морфизм функторов

$$C(c,-)\ \xrightarrow{C(f,-)}\ C(d,-).$$

Если $x \in \mathrm{Ob\,C}$, то
$$\underset{h:c\to x}{C(d,x)}\ \xrightarrow{C(f,x)}\ \underset{hf:c\to x}{C(c,x)}$$

Теорема 2.1. *«Вложение» Йонеды – полный и унивалентный функтор (то есть биекция на Hom-множествах).*

Лемма 2.1. *(Йонеда) Рассмотрим отображение*[9]

$$\Theta : \underbrace{Nat(C(c,-),K)}_{=Sets^k(C(c,-),K)}\ \to\ Kc, \tag{7}$$

[9]Здесь $\mathrm{Nat}(C(c,-),K)$ – множество всех естественных преобразований из функтора $C(c,-)$ в некий функтор K.

где

$$K : C \to Sets$$

– произвольный функтор. Пусть $\alpha \in Nat(C(c,-),K)$. Отображение (7) задано следующим образом:

$$\Theta(\alpha) := \alpha_c(id_c).$$

Тогда Θ – биекция.

Доказательство. Так как α – естественное преобразование,

$$\forall\ f : c \to d$$

следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} C(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "C(c,f)"'] & Kc \arrow[d, "Kf"] \\ C(c,d) \arrow[r, "\alpha_d"] & Kd \end{tikzcd}$$

Таким образом, если мы возьмем тождественный морфизм $\mathrm{id}_c \in C(c,c)$, то

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \Theta(\alpha) \arrow[d, mapsto, "Kf"] \\ f \arrow[r, mapsto] & \alpha_d(f) \end{tikzcd} \tag{8}$$

То есть

$$\alpha_d(f) = (Kf)(\Theta(\alpha)).$$

Определим Ψ следующим образом:

$$\Psi : Kc \to \mathrm{Nat}(C(c,-),K),$$

$$\Psi(\underbrace{x}_{\in Kc})(d)(f) := (Kf)(x).$$

Проверим, что

$$\Psi(x) \in \mathrm{Nat}(C(c,-),K) \tag{9}$$

и что

$$\Theta\Psi = \mathrm{id}_{KC}, \tag{10}$$

$$\Psi\Theta = \mathrm{id}_{\mathrm{Nat}(C(c,-),K)}. \tag{11}$$

Покажем (9). Рассмотрим морфизм

$$g : d_1 \to d_2.$$

Получим

$$\begin{tikzcd} C(c,d_1) \arrow[r, "\Psi(x)(d_1)"] \arrow[d, "C(c,g)"'] & Kd_1 \arrow[d, "Kg"] \\ C(c,d_2) \arrow[r, "\Psi(x)(d_2)"'] & Kd_2 \end{tikzcd}$$

$$(Kg)\Psi(x)(d_1)f = (Kg)(Kf)(x) = K(gf)(x) = \Psi(x)(d_2)(gf),$$

то есть естественное преобразование.

Проверим теперь (10) и (11):

$$\Psi(x) = \Psi(x)(c)(\mathrm{id}_c) = (K\mathrm{id}_C)(x) = x,$$

то есть

$$\Theta\Psi = \mathrm{id}_{KC}.$$

$$\Psi\left(\Theta(\alpha)\right)(d)(f) = (Kf)\left(\Theta(\alpha)\right) = (Kf)\alpha_c(\mathrm{id}_C), \tag{12}$$

где

$$f:\ c\ \to\ d.$$

Из (8) следует, что

$$(12) = \alpha_d f.$$

Таким образом,

$$\Psi\Theta = \mathrm{id}_{\mathrm{Nat}(C(c,-),K)}.$$

□

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 2.1, рассмотрим связанный с ней пример.

Пример. Пусть $C = G$ (группа). Единственному объекту $*$ мы ставим в соответствие

$$*\ \mapsto\ G(*,-):\ G\ \to\ \mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}.$$

Функтор $G(*,-)$ ставит в соответствие

$$*\ \mapsto\ G = G(*,*).$$

В другую сторону элементу g будет соответствовать отображение

$$G\ \to\ G$$

$$h\ \to\ hg,$$

то есть сдвиги.

В категорных обозначениях

$$g\ \mapsto\ G(*,g).$$

Таким образом, группу мы отображаем в множество сдвигов этой группы справа. Это буду биекции. Мы построили гомоморфизм в группу биекций[10] $G \to G$.

Вложение Йонеды можно рассматривать как обобщение теоремы Кэли.

[10]На самом не в саму группу, а группу биекций с противоположным умножением, то есть двойственную группу.

Доказательство. (Теорема 2.1) Для того, чтобы доказать, что вложение Йонеды – полный унивалентный функтор, достаточно показать, что на морфизмах оно совпадает с Ψ при $K = C(d, -)$.

$$\Psi(x)(d)(f) = C(d, f)(x) = fx \in C(d, d).$$

Здесь
$$x \in C(d, c), \quad f : c \to d.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\Psi(x)(d) = C(x, -).$$

Здесь
$$x : d \to c$$

сопоставляется отображение

$$C(c, -) \xrightarrow{C(x,-)} C(d, -)$$

Действительно, пусть
$$d \xrightarrow{x} c \xrightarrow{g} f.$$

тогда
$$C(x, -)(g) = gx.$$

□

Лекция 3. Произведения и копроизведения

Произведение

Сегодня мы начнем наш разговор о произведениях и копроизведениях. Нашей дальнейшей целью являются пределы и копределы.

Определение. Пусть C – категория, c_α, $\alpha \in \Lambda$ – объекты.

Произведением $\prod_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha$ объектов c_α называется объект c вместе с морфизмами

$$p_\alpha : c \to c_\alpha$$

такой, что $\forall$ объекта d вместе с морфизмами

$$f_\alpha : d \to c_\alpha$$

$\exists$ единственный морфизм

$$\varphi : d \to c$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна $\forall\ \alpha \in \Lambda$:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & c \arrow[dl, "p_\alpha"] \\
& c_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Морфизмы p_α называются *проекциями.*

Примеры. 1. Пусть C = Sets. Если X_α – множества, то их декартово произведение $\prod_\alpha X_\alpha$ вместе с проекциями на α-ю компоненту – это их (категорное) произведение в Sets.

Простыми словами, декартово произведение $\prod_\alpha X_\alpha$ можно понимать как большие наборы, где элементы проиндексированы из множества Λ, такие, что на месте α у нас стоит элемент из X_α. По-другому элементы декартова произведения можно понимать как функции из множества Λ, где значение функции на элемента α принимает значение в $\prod_\alpha X_\alpha$.

Действительно, если

$$Y \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha$$

– отображения, то

$$(f_\alpha(y))_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha.$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \prod_\alpha X_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\
& X_\alpha &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

Диаграмма (13) коммутативна.

2. Если C = Top, то как множество произведение – это тоже декартово произведение.

   Так как p_α непрерывны, множества

   $$(\ldots \times X_\alpha \times \ldots \times U \times \ldots \times X_\alpha \times \ldots) = p_\beta^{-1}(U)$$

   должны быть открыты. Здесь $U \subseteq X_\beta$ – открытое подмножество X_β, все X_α берутся полностью.

   Топология произведения порождается множествами вида

   $$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_k),$$

   где

   $$U_j \subseteq X_{\alpha_j}$$

   – открытые, $k \in \mathbb{Z}_+$.

   Можно показать, что отображение f из диаграммы, аналогичной (13), также будет непрерывным.

3. Пусть C = Grp – прямое произведение групп. В курсе алгебры оно характеризуется соответствующим образом, но как множество получается, что это снова декартово произведение с покомпонентной операцией.

4. Рассмотрим $C = (P, \leq)$ – предпорядок.

   Пусть $a_\alpha \in P$, $\alpha \in \Lambda$. Обсудим, что такое $\prod_\alpha a_\alpha$.

   По условию, у нас есть a_α. Если у нас есть произведение, то

   $$\prod_\alpha a_\alpha \longrightarrow a_\alpha,$$

   в предпорядке. Напомним, в предпорядке между объектами существует единственная стрелка. Далее, пусть есть другой объект b такой

   $$\begin{tikzcd} \prod_\alpha a_\alpha \arrow[r] & a_\alpha \\ & b \arrow[u] \end{tikzcd}$$

   Иными словами, выполнены соотношения

   $$\prod_\alpha a_\alpha \leq a_\alpha, \quad b \leq a_\alpha \ \forall \ \alpha \in \Lambda.$$

   Тогда должна существовать следующая стрелка:

   $$\begin{tikzcd} \prod_\alpha a_\alpha \arrow[r] & a_\alpha \\ & b \arrow[u] \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

   то есть

   $$b \leq \prod_\alpha a_\alpha.$$

   Получается, что

   $$\prod_\alpha a_\alpha = \inf \{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}.$$

Сделаем отступление и обсудим **бинарное произведение**. Пусть даны два объекта a и b. Рассмотрим их произведение $a \times b$ и некоторый объект c:

$$\begin{tikzcd} & a \times b \arrow[dl, "p_a"'] \arrow[dr, "p_b"] & \\ a \arrow[dr, "f_a"'] & & b \arrow[dl, "f_b"] \\ & c \arrow[uu, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{14}$$

Тогда $\exists!$ морфизм

$$f:\ c\ \to\ a \times b$$

такой, что диаграмма (14) коммутативна, то есть

$$p_a f = f_a, \quad p_b f = f_b.$$

Примеры. 5. Если $G \neq \{e\}$ – (нетривиальная) группа, то в ней не существует бинарного произведения $* \times *$.

Действительно, так как в G существует только один объект, то есть бы $* \times *$ существовало бы, то было бы

$$* \times * = *$$

и $\exists$ морфизмы $s, t \in S$ такие, что $\forall\ g, h \in G\ \exists!\ f \in G$ такой, что

$$tf = h, \quad sf = g$$

(см. диаграмму (15).

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ * \arrow[dr, "g"'] & & * \arrow[dl, "h"] \\ & * \arrow[uu, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{15}$$

Возьмем сперва $g = h = e$ (единичному элементу в группе). Тогда

$$s = t = f^{-1}.$$

Теперь возьмем $g \neq e$, $h = e$. Тогда $\exists\ \widetilde{f} \in G$ такое, что

$$t\widetilde{f} = e, \quad s\widetilde{f} = g,$$

то есть $g = e$, получаем противоречие.

Итак, в рассматриваемой категории не существует бинарного произведения.

Замечание 3.1. Вернемся еще раз к произведению. Пусть G_α – группы. Тогда несчетные наборы (последовательности), получаемые в результате произведения, можно представлять в виде функций следующего вида:

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = \left\{ f:\ \Lambda\ \to\ \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha | f(\alpha) \in G_\alpha\ \forall\ \alpha \in \Lambda \right\},$$

покомпонентные операции

$$(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$$

и другие аксиомы групп сохраняются. Это замечание относится к произведению в категории групп (в отличие от предыдущего примера, когда группа всего одна).

Замечание 3.2. Произведение единственно с точностью до изоморфизма, согласованного с p_α.

Доказательство. Пусть c и d – произведения.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p_\alpha"] & c_\alpha \\
& d \arrow[u, "\pi_\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Изобразим на диаграмме еще раз c и d.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p_\alpha"] & c_\alpha & d \arrow[l, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\theta"] \\
d \arrow[u, dashed, "\theta"] \arrow[ru, "\pi_\alpha"] & & c \arrow[lu, "p_\alpha"] \arrow[ll, dashed, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

Так как c и d произведения, существуют морфизмы

$$\theta :\ d \to c$$

и

$$\psi :\ d \to c$$

такие, что диаграмма выше коммутативна. Для тождественного морфизма диаграмма имеет вид

$$\begin{tikzcd}
& c_\alpha & \\
c \arrow[ru, "c_\alpha"] \arrow[rr, "id_c"'] & & c \arrow[lu, "c_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

С одной стороны, в силу коммутативности диаграммы

$$p_\alpha \theta \psi = p_\alpha = p_\alpha \mathrm{id}_c,$$

$$\pi_\alpha \psi \theta = \pi_\alpha = \pi_\alpha \mathrm{id}_d.$$

В силу единственности получаем, что

$$\theta\psi = \mathrm{id}_c,$$

$$\psi\theta = \mathrm{id}_d,$$

то есть

$$c \cong d$$

и их проекции согласованы. ☐

Универсальный притягивающий объект

Рассмотрим важный частный случай произведения.

Произведение по пустому множеству $\varnothing$ – *универсальный притягивающий объект* (*terminal object*).

Определение. c – *универсальный притягивающий объект*, если $\forall$ объекта d $\exists$ единственная стрелка

$$c \overset{!}{\dashleftarrow} d$$

Примеры. (Универсальные притягивающие объекты)

1. В Sets это одноэлементное множество $\{*\}$.
2. В Top аналогично.
3. В Grp это тривиальная группа $\{e\}$.

Копроизведение в категории C

Копроизведение в категории C – это произведение в категории C^{op}.

Определение. Говорят, что объект c вместе с морфизмами

$$i_\alpha : c_\alpha \to c$$

является *копроизведением* объектов c_α, если $\forall$ объекта d и морфизмов

$$f_\alpha : c_\alpha : \to d$$

$\exists$ единственный морфизм

$$f : c \to d$$

такой, что $\forall$ $\alpha \in \Lambda$ диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
c_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & c \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

Написанное выше, очевидно, единственно с точностью до изоморфизма.

Замечание 3.3. Заметим, что многие вещи в теории категорий – это попытка описать на языке стрелок и диаграмм какие-то уже известные вещи. Благодаря этому можно, например, увидеть, что будет, если то же самое на языке стрелок и диаграмм написать в других категориях. Так, как мы видели выше, понятие произведение в разных категориях охватывает многие понятия: декартово произведение множеств, прямое произведение групп, произведение топологических пространств.

Примеры. 1. Рассмотрим категорию Sets. Мы отображаем[11]

$$X_\alpha \to \bigsqcup_\alpha X_\alpha$$

– дизъюнктное объединение. Если все X_α мы отображаем в некоторое множество Y при помощи отображений f_α, значит, мы единственным образом f можем отобразить в Y и их дизъюнктное объединение:

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \bigsqcup\limits_\alpha X_\alpha \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Здесь i_α – вложения.

2. Top – то же. Множество

$$U \subseteq \bigsqcup_\alpha X_\alpha$$

открыто $\iff$ все $U \cap X_\alpha$ открыты.

Свободная группа. Свободное произведение групп

Вспомним некоторые конструкции из курса алгебры.

Определение. Пусть X – множество, группа $\mathcal{F}(X)$ вместе с отображением

$$i\colon\ X \to \mathcal{F}(X).$$

Говорят, что группа $\mathcal{F}(X)$ *свободная*, если $\forall$ отображения

$$f\colon\ X \to G,$$

где G – группы, $\exists!$ гомоморфизм группа

$$\widetilde{f}\colon\ \mathcal{F}(X) \to G,$$

что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{F}(X) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{16}$$

Можно записать просто

$$\widetilde{f}i = f.$$

Заметим, что морфизмы в диаграмме (16) разного рода. f и i являются отображениями множеств, а $\widetilde{f}$ – это гомоморфизм групп. На самом деле на диаграмме не обозначен забывающий функтор из категории групп в категорию множеств, который применен к $\mathcal{F}(X)$, G и $\widetilde{f}$. Поэтому коммутативная диаграмма (16), конечно, является диаграммой категории множеств.

[11] Знак $\bigsqcup$ используется для копроизведения.

Замечание 3.4. Определение выше – это так называемое определение через универсальные свойства. Существует также комбинаторное определение, которое выходит за рамки курса и поэтому не будет нами здесь рассмотрено. Напомним тем не менее комбинаторное описание. Элементы в $\mathcal{F}(X)$ – это несократимые слова в алфавите $X \sqcup X^{-1}$. Несократимость означает, что нет XX^{-1} и $X^{-1}X$. Умножение здесь – это приписывание и последующее сокращение.

Группу, если у нее заданы порождающие, можно задать при помощи порождающих и определяющих соотношений.

Если элементы $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ порождают группу G, то рассмотрим

$$X = (X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi: \mathcal{F}(X) \to G,$$

$$\varphi(x_\alpha) = g_\alpha.$$

Пусть $\mathcal{N} = \ker\varphi$. $\mathcal{N}$ порождается как нормальная подгруппа в $\mathcal{F}(X)$ элементами w_θ, $\theta \in \Theta$. Тогда по теореме о гомоморфизме групп

$$G \cong \mathcal{F}(X)/\mathcal{N} \underset{\text{тогда пишут}}{=} \langle X_\alpha, \quad \alpha \in \Lambda \mid w_\theta = 1 \ \forall\ \theta \in \Theta\rangle.$$

Говорят, что G задана порождающими X_α, $\alpha \in \Lambda$, и определяющими соотношениями w_θ, $\theta \in \Theta$.

Группа диэдра.

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, \quad bab = a^{-1}\rangle.$$

Копроизведение в категории групп

Пусть G_α, $\alpha \in \Lambda$ – группы. Зададим их порождающими и определяющими соотношениями:

$$G_\alpha \cong \langle X_\alpha \mid w = 1 \ \forall\ x \in W_\alpha\rangle.$$

Здесь X_α – множество порождающих, а W_α – множество определяющих соотношений.

Тогда их *свободным произведением* называется

$$\underset{\alpha\in\Lambda}{\ast} G_\alpha = G = \left\langle \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \mid w = 1 \ \forall\ w \in \bigsqcup_{\alpha} \in \Lambda W_\alpha \right\rangle.$$

Оказывается, что свободное произведение – это копроизведение в категории групп.

Поймем, почему это так. G_α можно отобразить

$$G_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \underset{\alpha\in\Lambda}{\ast} G_\alpha$$

Пусть теперь G_α отображаются в некоторую группу H:

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \mathop{\ast}\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \\
& H
\end{tikzcd}$$

Нам требуется

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \mathop{\ast}\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& H &
\end{tikzcd} \tag{17}$$

где

$$f\left(i_\alpha(g_{\alpha\beta})\right) = f_\alpha(g_{\alpha\beta})$$

для $\forall$ порождающего $g_{\alpha\beta}$ группы G_α.

Диаграмма (17) задается единственным образом.

Модуль над ассоциативным кольцом с 1

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1. Множество M с операциями

$$+: \ M \times M \ \to \ M,$$

$$\cdot: \ R \times M \ \to \ M$$

называется *левым модулем над* R, если выполнены следующие условия:

1. Ассоциативность:
$$(a+b)+c = a+(b+c) \ \forall \ a,b,c \in M;$$

2. Существование нулевого элемента:
$$\exists \ 0 \in M: \ a+0 = 0+a = a \ \forall \ a \in M;$$

3. Существование противоположного элемента:
$$\forall \ a \in M \ \exists \ -a \in M$$
такой, что
$$a+(-a) = (-a)+a = 0;$$

4. Коммутативность:
$$a+b = b+a \ \forall \ a,b \in M;$$

5. Дистрибутивность:
$$r(a+b) = ra+rb \ \forall \ a,b \in M, \quad \forall \ r \in R;$$

6. Дистрибутивность:

$$(r+s)a = ra + sa \ \forall \ a \in M, \quad \forall \ r,s \in R;$$

7. Ассоциативность:

$$r(sa) = (rs)a \ \forall \ a \in M, \quad \forall \ r,s \in R;$$

8. Существование 1:

$$1 \cdot a = a \ \forall \ a \in M.$$

Примеры. 1. Векторные пространства над полями – это модули над ними.

2. $\mathbb{Z}$-модули – абелевы группы.

Произведение и копроизведение в R-Mod

Пусть R-Mod – категория левых R-модулей.

Морфизмы – это гомоморфизмы модулей, то есть гомоморфизмы абелевых групп

$$f: \ M \ \to \ N$$

такие, что

$$f(rm) = rf(m) \ \forall \ r \in R.$$

Произведением в R-Mod будет

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$$

– декартово произведение с покомпонентными операциями.

Копроизведением в R-Mod будет то, что называется прямой суммой этих модулей как абелевых групп:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$$

– прямая сумма. Это можно рассматривать как

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha \tag{18}$$

– формальные суммы, где все $m_\alpha = 0$, кроме, может быть, конечного числа.

Действительно, можно вложить все M_α в прямую сумму:

$$M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$$

Теперь, пусть M_α отображаются в другой модуль N:

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \\ & N \end{tikzcd}$$

Тогда мы можем однозначно отобразить формальные суммы (18):

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

$$f\left(\sum_\alpha m_\alpha\right) = \sum_\alpha f(m_\alpha).$$

Замечание 3.5. Если Λ конечно, то

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha.$$

Копроизведение в категории предпорядке

В категории предпорядке $(P, \leq)$ копроизведение

$$\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha = \sup\left\{a_\alpha \,|\, \alpha\in\Lambda\right\}.$$

$$\begin{tikzcd} a_\alpha \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bigsqcup\limits_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha \arrow[dl, dashed] \\ & b & \end{tikzcd}$$

Универсальный отталкивающий объект. Нулевой объект

Закончим лекцию частным случаем копроизведения – копроизведением по пустому множеству $\varnothing$. Это называется *универсальным отталкивающим объектом* (*initial object*).

$\forall$ объекта d $\exists$ единственный морфизм из c в d:

$$d \dashrightarrow c$$

Примеры.

1. В категории Sets – пустое множество $\varnothing$.
2. В категории Top аналогично.
3. В категории Grp – тривиальная группа $\{e\}$.
4. В R-Mod – нулевой модуль $\{0\}$.

Определение. Если универсальный притягивающий объект совпадает с универсальным отталкивающим объектом, он называется *нулевым объектом* и обозначается 0.

В примерах выше нулевой объект есть в Grp и R-Mod.

Лекция 4. Нулевой морфизм. Тензорное произведение. (Ко)уравнители. Предел. Пулбэк

Нулевой морфизм

Определение. Пусть объект 0 – одновременно универсальный притягивающий и универсальный отталкивающий (то есть нулевой) в некоторой категории C. Тогда $\forall\ a, b \in C\ \exists!$ морфизм $a \to b$, проходящий через 0:

$$a \longrightarrow 0 \longrightarrow b.$$

Этот морфизм обозначается через 0 и называется *нулевым.*

Например, в категории групп нулевой морфизм – это морфизм, отражающий все в 1.

Тензорное произведение как копроизведение для ассоциативных коммутативных алгебр с 1

Рассмотрим еще один важный пример копроизведений. Для этого вспомним следующее понятие.

Пусть A и B – алгебры над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим их тензорное произведение $A \otimes B$ как векторное пространство с базисом

$$(a_\alpha \otimes b_\beta),$$

где $(a_\alpha)_\alpha$ – базис в A, $(b_\beta)_\beta$ – базис в B.

Тогда $A \otimes B$ – алгебра, где умножение определяется следующим образом:

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2. \tag{19}$$

В категории $\mathrm{CommAlg}_{\mathbb{K}}$ коммутативных ассоциативных алгебр с 1 над $\mathbb{K}$ копроизведением алгебр A и B является $A \times B$.

Для $\forall$ гомоморфизмов

$$\begin{aligned} f:\ A &\to D \\ g:\ B &\to D \end{aligned}$$

$\exists$ единственный гомоморфизм

$$\varphi:\ A \otimes B \to D$$

такой, что

$$\varphi_{i_A} = f, \quad \varphi_{i_B} = g.$$

Соответствующая диаграмма имеет вид

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "f"] & A \otimes B \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ D & B \arrow[l, "g"] \arrow[u, "i_B"'] \end{tikzcd} \tag{20}$$

Здесь

$$\begin{matrix} i_A(a) = a \otimes 1_B \\ i_B(b) = 1_A \otimes b \end{matrix} \quad \forall\ a \in A, \quad b \in B.$$

Чтобы диаграмма (20) была коммутативна, мы должны определить φ как

$$\varphi\,(a \otimes b) = f(a)g(b).$$

φ – единственный, так как образы i_A и i_B порождают A и B.

Итак, в категории коммутативных алгебр копроизведение – это просто тензорное произведение. В категории некоммутативных алгебр такого смысла у тензорного произведения нет, хотя само тензорное произведение активно используется. Копроизведение (или свободное произведение) в категории некоммутативных алгебр строится примерно так же, как для категории групп Grp.

Уравнители

Еще один частный случай приделов – это уравнители и коуравнители.

Определение. Пусть

$$f, g\colon\ a \rightrightarrows b.$$

Их *уравнителем*

$$m = \mathrm{eq}(f, g)$$

называется такой морфизм

$$m\colon\ c\ \to\ a,$$

$$fm = gm,$$

где c – некий объект, что для любого морфизма

$$h\colon\ d\ \to\ a$$

такого, что

$$fh = gh,$$

$\exists$ единственный морфизм

$$t\colon\ d\ \to\ c,$$

что

$$h = mt.$$

Нарисуем соответствующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "m"] & & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& d \arrow[ul, dashed, "t"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Примеры. 1. В Sets, Top, Grp, R-Mod, если

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

– соответствующие морфизмы, то их уравнитель $\mathrm{eq}(f,g)$ – вложение подмножества

$$\{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$$

(в Top это топология подмножества).

2. Если $f = g$, то

$$\mathrm{eq}(f,g) = \mathrm{id}_a.$$

Коуравнители

Коуравнители в категории C – это уравнители в C^{op}.

Определение. Пусть

$$f,g\colon\ a \rightrightarrows b$$

– морфизмы. Их *коуравнитель* $\mathrm{coeq}(f,g)$ – такой морфизм

$$p\colon\ f\ \to\ c,$$

где c – некоторый объект, что

$$pf = pg$$

и для $\forall$

$$h\colon\ b\ \to\ d,$$

что

$$hf = hg,$$

$\exists$ единственный морфизм

$$t\colon\ c\ \to\ d,$$

что

$$h = tp.$$

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "h"] & & c \arrow[dl, dashed, "t"] \\
& & d &
\end{tikzcd}$$

Примеры. 1. В R-Mod рассмотрим гомоморфизмы модулей

$$f,g\colon\ A \rightrightarrows B.$$

Коуравнитель здесь – это естественный сюръективный гомоморфизм

$$p\colon B \to C,$$

где

$$C = B/\langle f(a) - g(a)\,|a \in A\rangle_R\,,$$

где $\langle f(a) - g(a)\,|a \in A\rangle_R$ – подмодуль, порожденный разностями $f(a) - g(a)$.

2. В Grp коуравнитель – это естественный сюръективный гомоморфизм

$$B \to B/N,$$

где N – нормальное замыкание элементов $f(a)g(a)^{-1}$, где $a \in A$.

3. В Sets и Top коуравнитель – это

$$B \to B/\sim,$$

где $\sim$ – наименьшее отношение эквивалентности на множестве B такое, что

$$f(a) \sim g(a) \;\forall\; a \in A.$$

$B/\sim$ – это множество классов эквивалентности.

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d] & D \\
& B/\sim \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd} \tag{21}$$

Если

$$f\colon A \to B$$

– отображение множеств, то при помощи него можно переносить топологию с одного множества на другое.

Если B – топологическое пространство, то назовем *открытыми в* A прообразы открытых подмножеств в B. Это задает на A наименьшую топологию, в которой f непрерывна.

Если A – топологическое пространство, то назовем назовем *открытыми в* B подмножества, прообразы которых открыт. Это наибольшая топология на B, в которой f непрерывно.

В рассматриваемом примере в Top мы индуцируем на фактормножестве $B/\sim$ фактортопологию. Отображение из $B/\sim$ в D на (21) автоматически будет непрерывным.

Предел

Пусть

$$T: J \to C$$

– функтор.

Определение. Функтор T называется *константным*, если для $\forall$ объекта j из J

$$Tj = a,$$

где a – фиксированный объект в C.

$$Tf = \mathrm{id}_a$$

для $\forall$ морфизма f. Такой функтор будем обозначать a (объектом).

Определение. *Конусом* α с вершиной a и основанием T называется естественное преобразование

$$a \Rightarrow T.$$

Естественное преобразование означает, что каждому объекту соответствует некий морфизм из образа объекта j под действием функтора a в образ Tj объекта j под действием функтора T. Соответствующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "\alpha_j"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\ Tj & & Ti \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd} \tag{22}$$

Здесь

$$f: i \to j$$

– морфизм. Простыми словами, конус – это набор морфизмов из a в T, согласованных следующим образом (22).

Определение. *Предельный конус* – это универсальный притягивающий объект функтора T в категории запятой $(\mathrm{const} \downarrow C^J)$, где

$$\mathrm{const}: C \to C^J$$

сопоставляет объекту его константный функтор, C^J – функторы $J \to C$.

Рассмотрим два конуса с основанием T (уже введенный ранее конус с вершиной a и еще один с вершиной b):

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & b \arrow[dl, "\beta_i"] \\ & Tj & \end{tikzcd}$$

Конус

$$\alpha: a \Rightarrow T$$

предельный, если $\forall$ конуса

$$\beta:\ b\ \Rightarrow\ T$$

$\exists$ единственный морфизм φ такой, что

$$\beta_i = \alpha_i\varphi$$

$\forall$ объектов i из J:

$$\begin{tikzcd}
a & & b \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\beta_i"] \\
& Tj \arrow[from=ul, "\alpha_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Определение. Если $\exists$ предельный конус, описанный выше, то пишут, что

$$a = \lim T$$

– *предел* функтора T.

Определение. Категория называется *дискретной*, если в ней есть только объекты и тождественные морфизмы.

Примеры. 1. Пусть J – малая дискретная категория, функтор

$$T:\ J\ \to\ C$$

задает каждому $j\in J$ объект Tj. Конус $a\Rightarrow T$ – просто семейство морфизмов

$$\alpha_j : a\ \to\ Tj$$

то есть

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "\alpha_j"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\
Tj & & Ti
\end{tikzcd}$$

Предел здесь – это произведение объектов Tj.

2. Рассмотрим случай, когда J состоит из двух объектов 1 и 2 и стрелок между ними:

$$J:\ \mathrm{id}_1 \circlearrowright 1 \underset{\gamma_2}{\overset{\gamma_1}{\rightrightarrows}} 2 \circlearrowleft \mathrm{id}_2$$

Функтор

$$T:\ J\ \to\ C$$

$$T_1 \underset{T\gamma_2}{\overset{T\gamma_1}{\rightrightarrows}} T_2$$

Итак, получается, дано 2 объекта и 2 морфизма. Забегая вперед, скажем, что предел здесь – уравнитель. Конус $a\Rightarrow T$ имеет вид

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[rr, shift left, "T\gamma_1"] \arrow[rr, shift right, "T\gamma_2"'] & & T_2 \\
& a \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{23}$$

Заметим, что у уравнителей всегда фигурировал один морфизм, а (23) их два: α_1 и α_2. Противоречия здесь нет. Условия, при которых (23) является конусом:

$$\alpha_2 = (T\gamma_1)\alpha_1$$
$$\alpha_2 = (T\gamma_2)\alpha_1$$

Отсюда

$$(T\gamma_1)\alpha_1 = (T\gamma_2)\alpha_1.$$

Итак, α_2 всегда есть и определено однозначно. То есть такой предел соответствует уравнителю. Вообще говоря, так говорить не совсем корректно. Предел мы определили как объект, а уравнитель – это соответствующий морфизм. Предел здесь – это область определения уравнителя.

3. *Pullback* (*коуниверсальный квадрат*).

Категория J имеет вид

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "\gamma_2"] \\ 1 \arrow[r, "\gamma_1"'] & 3 \end{tikzcd}$$

Конус здесь – это

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\alpha_3"] & T_2 \arrow[d, "T\gamma_2"] \\ T_1 \arrow[r, "T\gamma_1"'] & T_3 \end{tikzcd}$$

α_3 определено однозначно:

$$\alpha_3 = (T\gamma_2)\alpha_2 = (T\gamma_1)\alpha_1.$$

Про него мы далее говорить не будем.

Расшифровывая определение предела, получаем следующее. Пусть

$$f: a \to c,$$
$$g: b :\to c$$

– морфизмы. Квадрат, составленный из морфизмов f, g, h, t где

$$h: d \to a,$$
$$t: d :\to b,$$

называется *коуниверсальным* (или *пулбэком*), если

1) $gt = fh$;
2) $\forall$ других морфизмов

$$\alpha: p :\to a,$$
$$\beta: p \to b$$

таких, что

$$f\alpha = g\beta,$$

$\exists$ единственный морфизм

$$\varphi\colon\ p \to d,$$

что диаграмма (24) коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& d \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"] & c
\end{tikzcd} \tag{24}$$

В этом случае предел d обозначается следующим образом:

$$d = a \times_c b.$$

Рассмотрим **примеры пулбэка**.

a. Пусть

$$f\colon\ A \to C,$$
$$g\colon\ B \to C$$

– гомоморфизмы групп. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r, "-"] \arrow[d, "-"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Здесь пулбэк

$$A \times_C B = \{(a,b) \mid a \in A,\quad b \in B,\quad f(a) = g(b)\} \subseteq A \times B \tag{25}$$

– так называемое *расслоенное произведение*. Если $C = \{1\}$, то

$$A \times_C B = A \times B.$$

Поймем, почему это так. Рассмотрим D – объект в категории групп и гомоморфизмы

$$D \to A,\quad D \to B,$$

что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, bend right] & A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd} \tag{26}$$

коммутативна. Тогда, действительно, все пропускается через подгруппу (25). На самом деле в диаграмме (26) морфизмы

$$A \times_C B \to A \text{ и } A \times_C B \to B$$

– это проекции π_A и π_B соответственно. Напомним,

$$\pi_A(a,b) = a,\quad \pi_B(a,b) = b.$$

b. Если $f = g$, то пулбэк называется *ядерной парой* (в любой категории).

Рассмотрим пример в Sets:

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Здесь

$$A \times_C = \{(a,b) \mid a, b \in A, \quad f(a) = f(b)\} \tag{27}$$

– отношение эквивалентности

$$a \sim b, \text{ если } f(a) = f(b). \tag{28}$$

Замечание 4.1. В категории групп такое отношение, когда есть гомоморфизм групп, определяется ядром – два элемента эквивалентны (переходят в один и тот же) $\iff$ они отличаются на элемент из ядра. Если не задано никакой операции на множестве или операция «не очень хорошая» (например, необязательно есть необратимые элементы), приходится работать с отношениями эквивалентности. Отношение эквивалентности (28) и заменяет собой ядро, поэтому (27) и называется *ядерной парой.*

4. Рассмотрим счетную диаграмму в категории коммутативных колец с 1:

$$\mathbb{Z}_p \longleftarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longleftarrow \mathbb{Z}_{p^3} \longleftarrow \ldots \longleftarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longleftarrow \ldots$$

Все гоморфизмы здесь определяются следующим образом:

$$\overline{1} \mapsto \overline{1}$$

– класс единицы (порождающего элемента) отображается в класс единицы.

Ее предел – *целые p-адические числа* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Каждый элемент можно рассматривать как бесконечную последовательность цифр в p-ичной системе счисления

$$\ldots m_n \ldots m_2 m_1 m_0.$$

Лекция 5. Направленности. Ядро морфизма. Свойства коуниверсальных квадратов. Полнота в малом

Направленность. Обратный (проективный) предел

Определение. Частично упорядоченное множество Λ называется *направленностью*, если $\forall\ \alpha, \beta \in \Lambda\ \exists\ \gamma \in \Lambda$ такой, что

$$\gamma \geq \alpha, \quad \gamma \geq \beta.$$

Если рассматривать Λ как категорию и рассмотреть функтор

$$\alpha \ \mapsto \ A_\alpha,$$

где A_α – объект в категории. Пусть также для $\forall\ \alpha \leq \beta,\ \alpha, \beta \in \Lambda\ \exists$ морфизм

$$f_{\alpha\beta}:\ A_\alpha \to A_\beta.$$

Тогда предел этого функтора называется *обратным* или *проективным пределом* и обозначается

$$\varprojlim_{\alpha} \text{ или } \lim_{\alpha} \text{proj}.$$

Ядро морфизма

Когда мы ранее говорили о уравнителях и коуравнителях, мы не рассмотрели один важный частный случай – ядра и коядра.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ – категория с нулевым объектом. Тогда *ядром* морфизма

$$f:\ a\ \to\ b$$

называется его уравнитель с нулевым морфизмом

$$\ker f\ :=\ \mathrm{eq}\,(f, 0)\,.$$

Изобразим ядро морфизма f на диаграмме:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\ker f"] & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & b \\ & & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{29}$$

В случае, когда рассматриваемая категория – это категория групп, это будет ядро морфизма в обычно понимании. Если точнее, это будет гомоморфизм, который вкладывает ядро морфиза в обычном понимании в подгруппу на диаграмме (29).

Если $\ker' f$ – другое ядро морфизма f, то $\exists!$ изоморфизм φ такой, что

$$\ker f = (\ker' f)\,\varphi.$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & b \\
c \arrow[ur, "\ker' f"'] & & 0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Введем обозначение

$$\mathrm{Ker} f \coloneqq c.$$

Итак, сам объект мы можем назвать ядром.

Свойства пулбэков

Обсудим некоторые свойства пулбэков.

Свойство пары коуниверсальных квадратов с общей стороной

Теорема 5.1. *Пусть в диаграмме (30) правый квадрат коуниверсален. Тогда внешний прямоугольник коуниверсален $\iff$ коуниверсален левый квадрат.*

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {} \arrow[d] \\
{} \arrow[r] & {} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} \tag{30}$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Обозначим на диаграмме (30) некоторым образом объекты. Пусть также дан другой прямоугольник с таким же нижним и правым морфизмом (обозначим объект в его левой верхней вершине как r):

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[rrr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\lambda"'] & a \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & b \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & p \arrow[d, "\beta"] \\
& c \arrow[r, "\mu"'] & d \arrow[r, "\gamma"'] & q
\end{tikzcd} \tag{31}$$

По диаграмме (31) получается, что

$$\gamma(\mu\lambda) = \beta\alpha.$$

Отсюда $\exists!$

$$\varphi\colon\ r\ \to\ b$$

такой, что

$$\upsilon\varphi = \alpha, \tag{32}$$

$$u\varphi = \mu\gamma. \tag{33}$$

Обозначим φ на диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[rrr, bend left, "\alpha"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "\lambda"'] & a \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & b \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & p \arrow[d, "\beta"] \\
 & c \arrow[r, "\mu"'] & d \arrow[r, "\gamma"'] & q
\end{tikzcd}$$

Из (32) следует, что $\exists!$ морфизм ψ такой, что

$$\lambda = w\psi, \tag{34}$$

$$\varphi = \chi\psi \tag{35}$$

Обозначим ψ на диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[rrr, bend left, "\alpha"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\varphi"] \arrow[r, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[dr, bend right, "\lambda"'] & a \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & b \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & p \arrow[d, "\beta"] \\
 & c \arrow[r, "\mu"'] & d \arrow[r, "\gamma"'] & q
\end{tikzcd}$$

Из (32) и (35) получаем

$$\upsilon\chi\psi = \upsilon\varphi = \alpha. \tag{36}$$

Единственность ψ, удовлетворяющего условиям (34) и (36), следует из соображений ниже.

Пусть морфизм

$$\psi_0 : r \to a$$

таков, что

$$\begin{cases} \upsilon\chi\psi_0 = \alpha \\ \lambda = w\psi_0 \end{cases}$$

Тогда

$$\upsilon\chi\psi_0 = \alpha.$$

С другой стороны,

$$u\chi\psi_0 = \mu w\psi_0 = \mu\lambda,$$

откуда с учетом (33) и (33)

$$\chi\psi_0 = \varphi.$$

Таким образом, ψ удовлетворяет условиям (34) и (35), откуда

$$\psi = \psi_0.$$

$\Rightarrow$ Докажем, что из того, что внешний прямоугольник коуниверсален, следует, что левый квадрат коуниверсален. Обозначим каким-то образом морфизмы на нашей диаграмме:[12]

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, bend left, "\lambda"] \arrow[dr, bend right, "\beta"'] & {} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {} \arrow[d, "\gamma"] \\
& {} \arrow[r, "h"'] & {} \arrow[r, "g"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Пусть
$$f\lambda = h\beta.$$

Тогда
$$\gamma\alpha\lambda = gf\lambda = gh\beta.$$

В силу коуниверсальности внешнего прямоугольника $\exists!\ \psi$ такое, что
$$\alpha u\psi = \alpha\lambda, \tag{37}$$
$$v\psi = \beta. \tag{38}$$

На диграмме обозначим ψ:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, bend left, "\lambda"] \arrow[r, dashed, bend left, "\psi"'] \arrow[dr, bend right, "\beta"'] & {} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {} \arrow[d, "\gamma"] \\
& {} \arrow[r, "h"'] & {} \arrow[r, "g"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Тогда
$$fu\psi = hv\psi = h\beta = f\lambda. \tag{39}$$

В силу единственности морфизма для коуниверсального квадрата справа (37) и (39) влекут
$$\lambda = u\psi.$$

$\square$

Коуниверсальный квадрат как функтор между категориями запятой

Фиксируем морфизм
$$f:\ a\ \to\ b.$$
Пусть в категории C $\exists$ все коуниверсальные квадраты.

Для каждого морфизма
$$g:\ c\ \to\ b,$$

[12] Здесь левый из знаков коуниверсальности относится к внешнему прямоугольнику.

где c – некоторый объект, определим морфизм $f^*(g)$ следующим образом:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f^*(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & c \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

Это задает функтор

$$f^* : (C \downarrow b) \to (C \downarrow a).$$

Заметим, что пределы определены не однозначно, а с точностью до изоморфизма, согласованного с соответствующими морфизмами. Здесь мы для каждого морфизма g фиксируем свой коуниверсальный квадрат. Пусть

$$\varphi : g_1 \to g_2 \text{ в } (C \downarrow b).$$

Вспомним, что такое морфизм между стрелками в категории запятой:

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g_1"'] & & c_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & b & \end{tikzcd}$$

Добавим на диаграмму пулбэки вдоль f, которые мы рассматриваем:

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[rr] \arrow[ddl, "f^*(g_2)"] & & \\ \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f^*(g_1)"'] \arrow[ur, dashed, bend left, "f^*(\varphi)"] & c_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g_1"] & & c_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ a \arrow[rr, "f"] & & b & \end{tikzcd}$$

По определению, $f^*(\varphi)$ – единственный сравнивающий морфизм, для которого диаграмма выше коммутативна.

Описанное выше свойство применяется, например, при рассмотрении различных расширений групп (которые являются, по сути, сюръективным гомоморфизмом). Возможно, во второй части курса (весенний семестр) удастся дойти до категорной теории Галуа. Это свойство будет активно там применяться.

Полная в малом категория

Определение. Говорят, что категория *полна в малом*, если в ней $\exists$ все малые пределы (пределы из малых категорий).

Теорема 5.2. *Категория C полна в малом $\iff$ в ней $\exists$ малые произведения и уравнители.*

Напомним, что здесь в малые произведения (произведения по малым множествам) включаем и $\varnothing$. Произведение по пустому множеству – это универсальный притягивающий объект.

Упражнение 5.1. *Категория полна в малом* $\iff$ *в ней* $\exists$ *малые произведения и пулбэки.*

Упражнение 5.2. *Чему равно* $a \times t$*, где* a *– произвольный объект, а* t *– универсальный притягивающий объект?*

Доказательство. (Теорема 5.2)

- $\Rightarrow$ Очевидно, так как уравнители и произведения – это пределы.
- $\Leftarrow$ Пусть дан функтор

$$T:\ J \to C,$$

где J – малая категория. Докажем, что $\exists \lim T$.

Построим диаграмму

$$\prod_{j\in \mathrm{Ob\,J}} Tj \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{f:\,i\to j} Tj$$

Произведение в правой части диаграммы берется по множеству всех морфизмов (оно также малое). φ_1 задается при помощи следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
& Tj
\end{tikzcd} \tag{40}$$

φ_2 определим через следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_i"] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
Ti \arrow[r, "Tf"] & Tj
\end{tikzcd} \tag{41}$$

Пусть

$$g = \mathrm{eq}\,(\varphi_1, \varphi_2)$$

– уравнитель,

$$g:\ a \to \prod_j Tj$$

Добавим g на диаграммы (40) и (41):

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & \prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
& & Tj
\end{tikzcd} \tag{42}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & \prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_i"] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & Ti \arrow[r, "Tf"] & Tj
\end{tikzcd} \tag{43}$$

Утверждается, что

$$\pi_i g : a \to Ti \tag{44}$$

– предельный конус, то есть $a = \lim T$.

Проверим, что (44) – конус, то есть что

$$(Tf)\pi_i g = \pi_j g$$

для $\forall$

$$f : i \to j \text{ в } J.$$

Опираясь на диаграмму (42), можем записать

$$\pi_j g = \pi_f \varphi_1 g.$$

Так как g – уравнитель,

$$\pi_j g = \pi_f \varphi_2 g.$$

В силу диаграммы (43),

$$\pi_f \varphi_2 g = (Tf)\pi_i g.$$

Это и требовалось показать.

Докажем теперь универсальность. Пусть

$$\beta_j : b \to Tj$$

– другой конус. $\exists$ единственный

$$\beta : b \to \prod_j Tj$$

такой, что

$$\pi_j \beta = \beta_j.$$

Изобразим это на диаграммах (42) и (43):

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & \prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\pi_j"] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
b \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\beta_j"] & & Tj
\end{tikzcd} \tag{45}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & \prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_i"] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
b \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\beta_i"] & Ti \arrow[r, "Tf"] & Tj
\end{tikzcd} \tag{46}$$

Покажем, что
$$\varphi_1\beta = \varphi_2\beta.$$
Достаточно показать, что
$$\pi_f\varphi_1\beta = \pi_f\varphi_2\beta$$
для $\forall$
$$f : i \to j.$$
Воспользуемся коммутативностью диаграмм (45) и (46). Из (45) получаем
$$\pi_g\varphi_1\beta = \pi_j\beta = \beta_j.$$
Так как β_i – конус,
$$\beta_j = (Tf)\beta_i.$$
Из диаграммы (46) получаем
$$(Tf)\beta_i = \pi_f\varphi_2\beta.$$
Таким образом,
$$\varphi_1\beta = \varphi_2\beta.$$
Так как g – уравнитель, $\exists!$ морфизм
$$\psi : b \to a$$
такой, что
$$\beta = g\psi. \tag{47}$$
Изобразим ψ на диаграмме (45):
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & \prod\limits_j Tj \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\pi_j"] & \prod\limits_f Tj \arrow[d, "\pi_f"] \\
b \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\beta_j"] & & Tj
\end{tikzcd}$$
(47) выполнено $\iff$
$$\pi_i\beta = (\pi_i g)\psi. \tag{48}$$
В правой части (48) записаны части нашего конуса, а левая равна β_i $\forall$ i.

$\square$

Сохраняющие, отражающие и создающие пределы функторы

Дадим некоторые определения, которые часто возникают в теории категорий.

Определение. Говорят, что функтор
$$F: C \to D$$
сохраняет предел $\lim T$, где
$$T: J \to C,$$
если для предельного конуса[13]
$$\alpha_j: a \to Tj, \quad a = \lim T$$
конус
$$F\alpha_j: Fa \to FTj$$
является предельным для функтора
$$FT: J \to D.$$

Определение. Говорят, что функтор
$$F: C \to D$$
отражает предел $\lim T$, где
$$T: J \to C,$$
если $\forall$ конуса
$$\alpha_j: a \to Tj$$
такого, что
$$F\alpha_j: Fa \to FTj$$
– предельный конус для FT, конус α_j – предельный для T.

Определение. Говорят, что функтор
$$F: C \to D$$
создает предел $\lim T$, где
$$T: J \to C,$$
если $\exists$ предел $\lim FT$ и для предельного конуса
$$\beta_j: b \to FTj$$
$\exists!$ конус
$$\alpha_j: a \to Tj,$$
где a – некоторый объект, такой, что
$$F\alpha_j = \beta_j$$
и конус α_j – предельный для T.

Как правило, введенная выше терминология применяется для описания поведения функторов по отношению к *малым* пределам (функтор сохраняет малые пределы, отражает все малые пределы или создает малые пределы). Обычно речь идет категориях, в которых уже известно, что соответствующие пределы существуют.

[13] Как мы знаем, два предельных конуса отличаются на изоморфизм. Их образы тоже будут отличаться на изоморфизм, так как функтор изоморфизмы переводит в изоморфизмы. Поэтому достаточно, чтобы для какого-то одного предельного конуса выполнялось условие определения.

Пределы в категории Sets

Пусть J – малая категория.

Пусть

$$T:\ J\ \to\ \mathrm{Sets}$$

– функтор. Тогда $\lim T$ – это подмножество в $\prod\limits_i Ti$, состоящее из наборов $(x_i)_i$ таких, что

$$(Tf)(x_i) = x_j$$

для $\forall$

$$f:\ i\ \to\ j \text{ в } J.$$

В книге С. Маклейна «Категории для работающего математика»

$$\lim T = \mathrm{Cone}\left(\{*\}, T\right).$$

Здесь через Cone обозначены конусы. Действительно, для каждого конуса мы выбираем один элемент в каждом Ti:

$$\begin{tikzcd} & Ti \\ \{*\} \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & \\ & Tj \end{tikzcd} \tag{49}$$

В соответствии, которое мы писали до этого,

$$x_i \coloneqq \alpha_i(*).$$

Все Ti в (49) должны быть согласованы:

$$\begin{tikzcd} & Ti \arrow[d, "Tf"] \\ \{*\} \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & \\ & Tj \end{tikzcd}$$

Лекция 6. Пределы в категориях Top, R-Mod. Непрерывность функтора Hom. Пределы, зависящие от параметра

Пределы в категориях Top и R-Mod

Напомним, что если

$$T:\ J\ \to\ \mathrm{Sets}$$

– функтор, то $\lim T$ – подмножество в $\prod\limits_{j} \in \mathrm{Ob\,J} Tj$ наборов

$$(a_j)_{j\in \mathrm{Ob\,J}}\,,\quad a_j\in Tj$$

таких, что

$$(Tf)(a_i)=a_j$$

для $\forall$

$$f:\ i\ \to\ j \text{ в } J.$$

В категории Top то же самое:

$$\lim T\subseteq \prod_{j\in \mathrm{Ob\,J}} Tj,$$

где $\lim T$ – такой же, как в категории Sets, $\prod\limits_{j\in \mathrm{Ob\,J}} Tj$ – топология произведения, которая индуцируется в $\lim T$.

Нарисуем диаграмму, чтобы понять, почему все морфизмы, участвующие в описании выше, непрерывны. Все отображения ниже непрерывны:

$$\begin{tikzcd}
\lim T \arrow[r, hook] & \prod\limits_{i\in \mathrm{Ob\,J}} Tj \arrow[d, "\pi_i"] \\
b \arrow[r, "\beta_i", "\text{конус}"'] & Tj
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$\begin{tikzcd}
\lim T \arrow[r, hook] & \prod\limits_{i\in \mathrm{Ob\,J}} Tj \arrow[d, "\pi_i"] \\
b \arrow[u, dashed, "\text{в силу согласованности}"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\beta_i", "\text{конус}"'] & Tj
\end{tikzcd}$$

В категории R-Mod, где R – ассоциативное кольцо с 1, аналогично.

Таким образом, забывающие функторы

$$\begin{gathered}\mathrm{Top}\ \to\ \mathrm{Sets}\\ \text{R-Mod}\ \to\ \mathrm{Sets}\ \to\ \mathrm{Sets}\end{gathered}$$

создают малые пределы.

Непрерывность функторов

Определение. Говорят, что функтор *непрерывный*, если он сохраняет малые пределы.

Теорема 6.1. *Пусть C – категория, c – фиксированный объект в C. Тогда функтор*

$$Hom(c,-) = C(c,-) \tag{50}$$

непрерывен.

Доказательство. Распишем (50):

$$C(c,-):\ C\ \to\ \text{Sets},$$

Hom-функтор, примененный к объекту d, по определению

$$C(c,-)d\ :=\ C(c,d).$$

Пусть

$$f:\ a\ \to\ b$$

– морфизм. Тогда

$$\begin{aligned}&C(c,f):\ C(c,a)\ \to\ C(c,b)\\ &g\ \mapsto\ fg,\end{aligned}$$

где

$$g:\ c\ \to\ b.$$

Пусть

$$T:\ J\ \to\ C$$

– функтор,

$$\alpha_j:\ a\ \to\ Tj$$

– предельный конус. Докажем, что

$$C(c,\alpha_j):\ C(c,a)\ \to\ C(c,Tj)$$

– предельный конус функтора

$$C\left(c,T(-)\right):\ J\ \to\ \text{Sets}.$$

Пусть

$$\beta_j:\ X\ \to\ C(c,Tj)$$

– другой конус над функтором $C\left(c,T(-)\right)$. X – множество. При фиксированном $x \in X$ получим

$$\beta_j(x) \in C(c,Tj),$$

то есть

$$\beta_j(x):\ c\ \to\ Tj$$

– конус над T в C.

Тогда $\exists$ единственный морфизм

$$\gamma(x)\colon\ c\ \to\ a$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\beta_j(x)"] \arrow[dr, "\gamma(x)"'] & & Tj \\
& a \arrow[ur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Мы получаем отображение

$$\gamma\colon\ X\ \to\ C(c,a)$$

такое, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & C(c,Tj) \\
& C(c,a) \arrow[ur, "C(c{,}\alpha_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

Единственность отображения γ следует из того, что подставив $x \in X$, получим диаграмму уже в C. $\square$

Пределы, зависящие от параметра. Пределы в категориях функторов

Произведение малых категорий. Бифунктор

Определение. Пусть I и J – малые категории. Их *произведение* в Cats – это $I \times J$, где объекты – это пары

$$(i,j),\quad i \in \mathrm{Ob\,I},\quad j \in \mathrm{Ob\,J}.$$

Если i_1, $i_2 \in \mathrm{Ob\,I}$, j_1, $j_2 \in \mathrm{Ob\,J}$, то

$$(I \times J)\left((i_1,j_1),(i_2,j_2)\right) = \left\{(f,g),\ \text{где}\ \begin{matrix} f:\ i_1,\ \to\ i_2\ \text{в}\ I \\ g:\ j_1\ \to\ j_2\ \text{в}\ J \end{matrix}\right\}$$

Определение. Функтор

$$T\colon\ I \times J\ \to\ C$$

называется бифунктором (так как по сути у него два аргумента).

Соответствие между бифункторами и функторами в категорию функторов

Построим соответствие между бифункторами и функторами в категорию функторов.

Забегая вперед, скажем, что $\exists$ естественные биекции

$$\mathrm{Sets}\,(A\times B, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sets}\,(A, \mathrm{Sets}(B,C))\,,$$

где A, B, C – множества.

Аналогично получаем, что $\exists$ естественная биекция

$$\mathrm{CAT}\,(I\times J, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CAT}\,(I, \mathrm{CAT}(J,C))\,.$$

Здесь CAT – категория больших категорий, $\mathrm{CAT}(J,C) = C^J$.

Мы ставим в соответствие функторы

$$T:\ I\times J\ \to\ C\ \mapsto\ \widetilde{T}:\ I\ \to\ C^J.$$

$$\widetilde{T}(i)(j) \coloneqq T(i,j)$$
$$\widetilde{T}(i)(g) \coloneqq T(\mathrm{id}_i, g)$$

для $\forall$ морфизмов g в J.

$$\widetilde{T}(f)(j) = T(f, \mathrm{id}_j)$$

– естественное преобразование. Действительно, пусть

$$f:\ i_1\ \to\ i_2,$$
$$g:\ j_1\ \to\ j_2.$$

Тогда

$$\begin{tikzcd} T(i_1,j_1) \arrow[r, "T(f{,}\mathrm{id}_{j_1})"] \arrow[d, "T(\mathrm{id}_{i_1}{,}g)"'] & T(i_2,j_1) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_{i_2}{,}g)"] \\ T(i_1,j_2) \arrow[r, "T(f{,}\mathrm{id}_{j_2})"'] & T(i_2,j_2) \end{tikzcd} \tag{51}$$

Здесь

$$\begin{tikzcd} T(i_1,j_1) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_{i_1}{,}g)"'] \\ T(i_1,j_2) \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} T(i_2,j_1) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_{i_2}{,}g)"] \\ T(i_2,j_2) \end{tikzcd}$$

– – функторы $\widetilde{T}(i_1)$ и $\widetilde{T}(i_2)$ соответственно.

Обе композиции (51) равны $T(f,g)$, так как это T – бифунктор, то есть $\widetilde{T}(f)$ – естественное преобразование.

Обратно, $\widetilde{T}$ однозначно задает T. Надо доопределить

$$T(f,g) \coloneqq T(\mathrm{id}_{i_2}, g)T(f, \mathrm{id}_{j_1}).$$

Определение превращает T в бифунктор в силу коммутативности диаграммы (51).

Покомпонентное вычисление пределов в категориях функторов

Теорема 6.2. *Пусть дан функтор*

$$T:\ I \times J \ \to \ C,$$

C *– категория. Пусть* $\forall\ j \in J$

$$\exists \lim_{j \in Ob\, J} T(i,j).$$

Тогда $\exists$ *предел*

$$\lim \widetilde{T}:\ J \ \to \ C,$$

причем

$$\left(\lim \widetilde{T}\right)(j) = \lim_{i \in Ob\, I} T(i,j),$$

то есть пределы в категории C^J *функторов* $J \to C$ *вычисляются покомпонентно.*

Доказательство. Фиксируем морфизм

$$f:\ j_1 \ \to \ j_2 \text{ в } J.$$

Рассмотрим предельные конусы:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_i T(i,j_1) \arrow[r] & T(i,j_1) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_i, g)"'] \\
\lim\limits_i T(i,j_2) \arrow[r] & T(i,j_2)
\end{tikzcd}$$

Заметим, что

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_i T(i,j_1) \arrow[r] & T(i,j_1) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_i, g)"'] \\
 & T(i,j_2)
\end{tikzcd}$$

– конус над $T(-,j_2)$.

Тогда

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_i T(i,j_1) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_i T(i,g)"'] & T(i,j_1) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_i, g)"'] \\
\lim\limits_i T(i,j_2) \arrow[r] & T(i,j_2)
\end{tikzcd}$$

Определим морфизм $\lim\limits_i T(i,g)$ через коммутативность диаграммы выше.

В силу единственности это превращает $\lim\limits_i T(i,-)$ в функтор.

Осталось понять, что

$$\lim_i T(i,-) = \lim_i \widetilde{T}.$$

Предельный конус

$$\lim_i T(i,-) \longrightarrow T(i,-)$$

из естественных преобразований. Конусом это будет в силу коммутативности

$$\begin{tikzcd}
\lim_i T(i,j) \arrow[r] \arrow[dr] & T(i_1,j) \arrow[d, "T(f,\mathrm{id}_j)"] \\
& T(i_2,j)
\end{tikzcd}$$

$$\forall\ f:\ i_1\ \to\ i_2 \text{ в } I \text{ и } \forall\ j \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{J}.$$

Пусть

$$F\ \Rightarrow\ T(i,-)$$

другой конус в C^J, то есть $\forall\ j$

$$\begin{tikzcd}
\lim_i T(i,j) \arrow[dr] & \\
Fj \arrow[u, dashed, "\alpha_j"] \arrow[r] & T(i,j)
\end{tikzcd} \tag{52}$$

Обозначим компоненты через α_j. Тогда получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\lim_i T(i,-) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
F \arrow[u, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[r, Rightarrow] & T(i,-)
\end{tikzcd} \tag{53}$$

α единственно, так как всякое α_j единственно. Диаграмма с α (53) коммутативна, так как коммутативна диаграмма с α_j (52).

Естественность α следует из того, что $\lim_i T(i,j)$ – предел, и коммутативности диаграммы ниже. Пусть

$$g:\ j_1\ \to\ j_2.$$

Диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\lim_i T(i,j_1) \arrow[rr] \arrow[dd, "\lim_i T(i,g)"'] & & T(i,j_1) \arrow[dd, "T(\mathrm{id}_i,g)"] \\
& Fj_1 \arrow[ul, "\alpha_{j_1}"] \arrow[ur] \arrow[dd, "Fg"] & \\
\lim_i T(i,j_2) \arrow[rr] & & T(i,j_2) \\
& Fj_2 \arrow[ul, "\alpha_{j_2}"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Правая грань коммутирует, так как $F \Rightarrow T(i,-)$ – конус. Задняя грань коммутирует по определению $\lim\limits_i T(i,g)$. $\left(\lim\limits_i T(i,g)\right)\alpha_{j_1}$ и $\alpha_{j_2}Fg$ становятся равными после композиции с

$$\lim_i T(i,j_2) \to T(i,j_2) \ \forall\ i.$$

То есть это два морфизма, по которым конус

$$Fj_1 \to T(i,j_2)$$

пропускается через предельный конус, то есть

$$\left(\lim_i T(i,g)\right)\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2}Fg,$$

и α – естественное преобразование. □

Замечание 6.1. Мы не раз будем пользоваться трюком из доказательства выше, чтобы доказывать равенство двух морфизмов между одинаковыми объектами. Предположим, хотим доказать

$$a \rightrightarrows b$$

Мы рассмотрим предельный конус Tj:

$$a \rightrightarrows b \xrightarrow{\alpha_j} Tj$$

и покажем, что композиции конуса со всеми компонентами совпадают для $\forall\ j$. В силу единственности сравнивающего морфизма для предельного конуса в определении предела исходные морфизмы будут равны.

Равенство повторного предела двойному

Теорема 6.3. *Пусть*

$$T:\ I \times J \to C$$

– функтор. Пусть

$$\forall\ i\ \exists\ \lim_j T(i,j)\ \text{и}\ \exists\ \lim_i \lim_j T(i,j).$$

Тогда

$$\exists\ \lim_{i,j} T(i,j) = \lim_i \lim_j T(i,j).$$

Доказательство. Пусть

$$\beta_{ij}:\ b \to T(i,j) \tag{54}$$

– некий конус. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \lim\limits_i \lim\limits_j T(i,j) \arrow[r] & \lim\limits_j T(i,j) \arrow[d] \\ & b \arrow[r, "\beta_{ij}"] & T(i,j) \end{tikzcd}$$

Так как (54) – конус, для $\forall\ i$ это тоже конус. Поэтому существует следующее отображение γ_i:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_i \lim\limits_j T(i,j) \arrow[r] & \lim\limits_j T(i,j) \arrow[d] \\
b \arrow[ur, dashed, "\gamma_i"] \arrow[r, "\beta_{ij}"] & T(i,j)
\end{tikzcd} \tag{55}$$

Можно рассмотреть диаграмму для i_1 и i_2. Получим, что

$$\begin{tikzcd}
& \lim\limits_j T(i,j) \\
b \arrow[ur, dashed, "\gamma_i"] &
\end{tikzcd}$$

тоже конус по i над функтором $\lim\limits_j T(i,j)$. Поэтому $\exists$ единственный морфизм h, делающий диаграмму (55) коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_i \lim\limits_j T(i,j) \arrow[r] & \lim\limits_j T(i,j) \arrow[d] \\
b \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, dashed, "\gamma_i"] \arrow[r, "\beta_{ij}"] & T(i,j)
\end{tikzcd}$$

$\square$

Лекция 7. Сопряженные функторы. Гомоморфизм графов. Пределы диаграмм как пределы функторов. Копредел. Универсальный квадрат

Следствия

Напомним, на прошлой лекции мы доказали, что если дан функтор

$$T:\ I\ \to\ C^J,$$

то $\lim T$ вычисляется покомпонентно.

Следствие. Если категория C полна в малом, то есть в C $\exists$ все малые пределы, то $\forall$ категории J категория C^J функторов $J \to C$ также полна.

Следствие. В прошлый раз мы доказали, что

$$\lim_{i,j} T(i,j) = \lim_i \lim_j T(i,j).$$

Отсюда следует, что можно менять знаки пределов местами:

$$\lim_i \lim_j T(i,j) = \lim_j \lim_i T(i,j).$$

Здесь

$$T:\ I \times J\ \to\ C.$$

Сопряженные функторы

Итак, мы говорили про предел функтора. Часто рассматривают не функтор, а какую-то диаграмму и ищут предел диаграммы, то есть универсальный конус над ней.

Прежде, чем перейти к обсуждению графов и диаграмм, дадим определение сопряженных функторов. Подробно сопряженные функторы будут рассматриваться немного позднее в курсе.

Определение. Пусть

$$F:\ X\ \to\ A, G\ A\ \to\ X$$

– функторы, X, A – категории. Рассмотрим бифункторы

$$A(F-,-) \text{ и } X(-,G-):\ X^{\mathrm{op}} \times A\ \to\ \mathrm{Sets}.$$

Если эти бифункторы изоморфны, то говорят, что F – *левый сопряженный для* G, а G – *правый сопряженный для* F. Пишут: $F \dashv G$.

Расшифруем требование изоморфности бифункторов из определения . Это значит, что $\exists$ естественная по $a \in \operatorname{Ob} \mathrm{A}$ и $x \in \operatorname{Ob} \mathrm{X}$ биекция

$$\alpha_{x,a} : \mathrm{A}(Fx, a) \to \mathrm{X}(x, Ga).$$

Естественность означает, что $\forall$ пары морфизмов

$$f : x' \to x,$$
$$g : a \to a'$$

диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}(Fx, a) \arrow[r, "\alpha_{x,a}"] \arrow[d, "\mathrm{A}(Ff,g)"] & \mathrm{X}(x, Ga) \arrow[d, "\mathrm{X}(f,Gg)"] \\
\mathrm{A}(Fx', a') \arrow[r, "\alpha_{x',a'}"] & \mathrm{X}(x', Ga')
\end{tikzcd}$$

Здесь для $\forall$

$$h : Fx \to a$$

$$\mathrm{A}(Ff, g)h = gh(Ff).$$

Определение. Левый сопряженный к забывающему функтору называется *свободным.*

Примеры. 1. Пусть функтор

$$\mathcal{F} : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Grp}$$

определен как $\mathcal{F}(X)$ – свободная группа со свободными порождающими из множества X.

Пусть

$$f : X \to Y$$

– отображение. Тогда

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[d, dashed, "\exists! \mathcal{F}(f)"'] & X \arrow[l] \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{F}(Y) & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Забывающий функтор

$$U : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}.$$

Тогда $\mathcal{F} \dashv U$. Это означает, что

$$\mathrm{Grp}\,(\mathcal{F}(X), G) \cong \mathrm{Sets}(X, UG)$$

– естественная биекция по X и G.

Замечание 7.1. Подчеркнем, что понятие забывающего функтора не является категорным.

2. Сопряжение с прошлой лекции

$$\mathrm{CAT}\,(I \times J, X) \cong \mathrm{CAT}\left(I, C^J\right).$$

   Здесь

$$(-) \times J \dashv (-)^J.$$

3. Сопряжение из пункта 2 – это обобщение следующего сопряжения:

$$\mathrm{Sets}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Sets}\,(X, \mathrm{Sets}(Y, Z))\,.$$

4. Рассмотрим еще пример из линейной алгебры. Пусть $\mathbb{K}$ – поле. Тогда

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\,(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\,(U, \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(V, W))\,.$$

   «Функтор $\otimes$ сопряжен с функтором Hom».

Пределы диаграмм как пределы функторов

Начнем с базовых определений.

Определение. *Ориентированный граф* – это пара (возможно, больших) множеств (V, E) (V мы называем «множество вершин», а E – «множество ребер») и отображений

$$s\colon\ E \to V$$

(«начало ребра») и

$$t\colon\ E \to V$$

(«конец ребра»):

$$\begin{tikzcd} s(e) \arrow[r, bend left, "e"] & t(e) \end{tikzcd}$$

Определение. Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma &= (V, E, s, t) \\ \Gamma' &= (V', E', s', t') \end{aligned}$$

– графы. Тогда пара (f_0, f_1), где

$$\begin{aligned} f_0\colon\ V &\to V', \\ f_1\colon\ E &\to E', \end{aligned}$$

называется *гомоморфизмом графов* $\Gamma \to \Gamma'$, если

$$\begin{aligned} s'\,(f_1(e)) &= f_0\,(s(e)) \\ t'\,(f_1(e)) &= f_0\,(t(e)) \end{aligned} \quad \forall\ e \in E.$$

Пример. Категории – графы, функторы – их гомоморфизмы.

Пусть Graphs – категория малых[14] графов. У нас есть забывающий функтор[15]

$$U\colon \mathrm{Cats} \to \mathrm{Graphs}.$$

У этого функтора есть левый сопряженный[16]:

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Graphs} \to \mathrm{Cats}.$$

Надо, чтобы $\exists$ естественная биекция

$$\mathrm{Cats}\,(\mathcal{F}(\Gamma), C) \cong \mathrm{Graphs}\,(\Gamma, UC)\,. \tag{56}$$

$$\begin{tikzcd}
 & U\mathcal{F}(\Gamma) \arrow[d, dashed, "UM"] \\
\Gamma \arrow[ur] \arrow[r] & UC
\end{tikzcd}$$

$\exists!$ функтор

$$M\colon \mathcal{F}(\Gamma) \to C.$$

Объекты в $\mathcal{F}(\Gamma)$ – это вершины в Γ. Морфизмы в $\mathcal{F}(\Gamma)$ – это пути в Γ.

Упражнение 7.1. *Проверить естественность (56) по* Γ *и* C.

Рассмотрим произвольную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[dl, "g"] \\
c &
\end{tikzcd} \tag{57}$$

Диаграмму можно определить как гомоморфизм некоторого графа в категорию.

Точно так же, как мы определяли конус над функтором, можно определить конус над диаграммой. Опустим формальное определение. Для (57) конус над диаграммой, например, будет иметь вид

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] \arrow[dd, bend right] & \\
a \arrow[rr, "f"] & & b \arrow[dl, "g"] \\
 & c &
\end{tikzcd} \tag{58}$$

Аналогично конусу над функтором определяется *конус над диаграммой*, а аналогично пределу функтора определяется *предел диаграммы*. Предельный конус над диаграммой доопределяется до конуса над функтором из соответствующей свободной категории. Пусть

$$T\colon \Gamma \to C$$

[14]Для определенности будем работать с малыми графами и малыми категориями.
[15]Напомним, Cats – категория малых категорий.
[16]Левый сопряженный к забывающему, то есть свободный.

– диаграмма, ее можно доопределить до функтора

$$\widetilde{T} : \mathcal{F}(\Gamma) \to C.$$

Тогда

$$\lim T = \lim \widetilde{T}.$$

Здесь добавление новых стрелок, например, на диаграмме (58) стрелки $a \to c$ сохраняет коммутативность:

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] \arrow[dd, bend right] & \\
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & b \arrow[dl, "g"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

Копредел

Прежде, чем перейти к обсуждению копредела, скажем про функтор сопоставления каждой категории категории, двойственной к ней.

Сопоставление каждой категории категории, двойственной к ней $(-)^{\text{op}}$ – ковариантный функтор, определенный на категориях.

Пусть задан функтор

$$F : X \to A. \tag{59}$$

Рассмотрим теперь соответствие

$$X^{\text{op}} \to A^{\text{op}}. \tag{60}$$

Справедливо следующее:

$$x \xrightarrow{f} y \ \in X^{\text{op}}(y, x) \quad \longmapsto \quad Fx \xrightarrow{Ff} Fy \ \in A^{\text{op}}(Fy, Fx)$$

Поэтому функтор (60) и обозначается F^{op}:

$$F^{\text{op}} : X^{\text{op}} \to A^{\text{op}}.$$

Замечание 7.2. Как уже говорилось ранее, одно из преимуществ рассмотрения категорий – это то, что морфизмы (необязательно отображения) можно направить в другую сторону, то есть рассмотреть двойственную категорию.

Однако просто отображения мы не можем так просто направить в другую сторону. Функтор (59) состоит из двух отображений (на множестве объектов и на множестве морфизмов). Просто направить их в противоположную сторону не выйдет. Иногда в таком случае рассматривается внутренние категории, когда вместо множества объектов и множества морфизмов рассматриваются два объекта в какой-то категории (а не множества объектов). Между ними есть сопоставление, композиция, морфизмы. Тогда мы можем действительно повернуть функтор в другую сторону. Это будет функтор между внутренними категориями в двойственной категории.

Определение. Пусть

$$T : J \to C$$

– функтор. Его *копредел* – это предел функтора

$$T^{\text{op}} : J^{\text{op}} \to C^{\text{op}}.$$

Распишем определение подробно. *Коконус над T с вершиной в a* – это естественное преобразование из функтора T в константный функтор a:

$$\alpha_j : Tj \to a.$$

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} Ti \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dr, "Tf"'] & & a \\ & Tj \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна для $\forall$

$$\forall\ f : i \to j \text{ в } J.$$

Коконус α называется *предельным*, если $\forall$ коконуса

$$\beta_j : Tj \to b$$

$\exists$ единственный морфизм

$$\gamma : a \to a$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна для $\forall\ j \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{J}$:

$$\begin{tikzcd} Tj \arrow[rr, "\alpha_j"] \arrow[dr, "\beta_j"'] & & a \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & b & \end{tikzcd}$$

Обозначение копредела:

$$\operatorname{colim} T := a.$$

Применяя то, что мы говорили о пределах, к двойственным категориям, получим аналогичные результаты для копределов.

Замечание 7.3. Другие названия копредела:

- прямой предел $\varinjlim$;
- индуктивный предел liminj.

Эти варианты названия используются реже и считаются устаревшими для теории категорий, но могут встречаться в других областях, например, топологии или функциональном анализе.

Рассмотрим примеры копределов.

Примеры. 1. Рассмотрим систему подмножеств

$$\{U_i\}, \quad U_i \subseteq U, \quad i \in J.$$

Если $U_i \subseteq U_j$, то $\exists!$ стрелка $i \to j$. Иными словами, мы рассматриваем частично упорядоченное множество подмножеств U по включению.

$$i \leq j \iff U_i \subseteq U_j.$$

Дополнительно потребуем, чтобы $\forall\ x \in U_i \cap U_j\ \exists\ k$ такое, что

$$x \in U_k \subseteq U_i \cap U_j.$$

Функтор

$$T:\ i \mapsto U_i,$$

$T(i \to j)$ – вложение $U_i \hookrightarrow U_j$. Копредел здесь – это некоторое множество V, в которое вкладываются все U_i, вложения согласованные, и диаграмма универсальна (то есть аналоично для другого конуса):

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[rr] \arrow[dr, leftrightarrow] & & V \\
& U_j \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Таким образом,

$$\operatorname{colim} T = \bigcup_i U_i.$$

2. Копроизведение – копредел функтора из дискретной категории.

3. Коуравнитель

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & b \arrow[dr, "\mathrm{coeq}(f,g)"] & \\
& & c
\end{tikzcd}$$

– это копредел из категории $\cdot \rightrightarrows \cdot$

4. (Универсальный квадрат, pushout) Пусть заданы морфизмы

$$\begin{aligned} f:\ a &\to b \\ g:\ a &\to c \end{aligned}$$

Универсальным квадратом называется пара морфизмов

$$\begin{aligned} u:\ b &\to d, \\ v:\ c &\to d, \end{aligned}$$

где d – некий объект, такая, что

1) $uf = vq$;

2) Для $\forall$
$$p: b \to x,$$
$$q: c \to x,$$
где $x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$ (из рассматриваемой категории), таких, что
$$pf = qg,$$
$\exists!$ морфизм
$$r: d \to, x$$
такой, что
$$ru = p,$$
$$rv = q.$$

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & c \arrow[d, "v"] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\
b \arrow[r, "u"] \arrow[drr, bend right, "p"] & d \arrow[dr, dashed, "\exists! r"] & \\
& & x
\end{tikzcd}$$

Пример. (Пример универсального квадрата) Пусть есть вложения групп $A \hookrightarrow G$, $A \hookrightarrow H$. Рассмотрим универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
H \arrow[r] & H *_A G
\end{tikzcd}$$

$H *_A G$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

Лекция 8. Копределы в категориях Sets, Top, R-Mod. Мономорфизмы и эпиморфизмы. Моно- и эпиморфизмы в категориях Sets, Top, Metr, R-Mod, Grp

Копределы в категориях Sets, Top, R-Mod

Напомним определение копредела. Пусть

$$T : J :\to C$$

– функтор. Говорят, что

$$\alpha_j : Tj \to c$$

– *коконус*, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} Ti \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dr, "Tf"'] & & c \\ & Tj \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна для всех морфизмов

$$f : i \to j \text{ в } J.$$

Говорят, что коконус

$$\alpha_j : Tj \to c$$

копредельный и пишут

$$c = \operatorname{colim} T,$$

если $\forall$ коконуса

$$\beta_j : Tj \to b$$

$\exists!$ морфизм

$$\varphi : c \to b$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \\ Tj \arrow[ur, "\alpha_j"] \arrow[dr, "\beta_j"'] & \\ & b \end{tikzcd} \tag{61}$$

коммутативна $\forall\ j \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{J}$.

Поговорим о копределах в категориях Sets, Top, R-Mod.

1. Пусть
$$T:\ J\ \to\ \mathrm{Sets}.$$
Тогда
$$\operatorname{colim} T = \bigsqcup_j Tj/\sim,$$
где $\sim$ – минимальное отношение эквивалентности такое, что
$$(Tf)(x) \sim x$$
для
$$\forall\ f:\ i\ \to\ j \text{ в } J,\quad \forall\ x \in Ti.$$

2. Забывающий функтор Top $\to$ Sets создает копределы. Введем на $\bigsqcup_j Tj/\sim = \operatorname{colim} T$ наибольшую топологию такую, что все α_j непрерывны[17]
$$\begin{tikzcd} & \bigsqcup_j Tj/\sim \arrow[d, dashed] \\ Tj \arrow[ur, "\alpha_j"] \arrow[r, "\beta_j"'] & B \end{tikzcd}$$
То есть $U \subseteq \operatorname{colim} T$ открыто $\iff$ $\forall\ j\ \alpha_j^{-1}$ открыты.

3. В категории R-Mod левых модулей над ассоциативным кольцом R с 1 копределы другие, так как там копроизведение – прямая сумма.
Пусть
$$T:\ J\ \to\ \text{R-Mod}$$
– функтор. Тогда
$$\operatorname{colim} T = \bigoplus_j Tj/N,$$
где N – R-подмодуль, порожденный элементами
$$(Tf)(a) - a\ \forall\ a \in Ti,$$
где
$$f:\ i\ \to\ j$$
– морфизм в J.

[17] На диаграмме ниже мы используем B, а не b, как на (61), так как речь здесь идет о множествах.

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Существует целый раздел алгебры, который называется *категорная алгебра* и который занимается тем, что характеризует алгебраические свойства на языке стрелок и диаграмм. Понятия мономорфизма и эпиморфизма можно считать попыткой охарактеризовать сюръективные и инъективные отображения на языке стрелок и диаграмм. Как мы увидим ниже, для некоторых категорий (например, Grp или Sets) это действительно дает нужный результат. Для других категорий эти понятия приходится немного «подкручивать».

Пусть

$$f:\ a\ \to\ b$$

– морфизм в некоторой категории C.

Определение. Говорят, что f – *мономорфизм*, если из того, что

$$f\alpha = f\beta$$

для некоторых морфизмов

$$\alpha, \beta:\ c\ \to\ a,$$

где c – некий объект, следует, что

$$\alpha = \beta.$$

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

Определение. Говорят, что f – *эпиморфизм*, если f – мономорфизм в C^{op}, то есть из

$$\alpha f = \beta f$$

следует, что

$$\alpha = \beta.$$

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & c \end{tikzcd}$$

Если объекты в C – некоторые множества, а морфизмы – некоторые отображения, то, очевидно, инъективные отображения – мономорфизмы, а сюръективные – эпиморфизмы.

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Sets

Теорема 8.1. *В категории множеств Sets все мономорфизмы инъективны, а эпиморфизмы сюръективны.*

Доказательство. 1. Пусть
$$f : A \to B$$
неинъективно, то есть
$$f(a_1) = f(a_2)$$
для $a_1 \neq a_2$, a_1, $a_2 \in A$.

Рассмотрим множество из одной точки $\{*\}$ и отобразим его следующим образом:
$$\{*\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$$
$$\alpha(*) = a_1$$
$$\beta(*) = a_2$$
Тогда
$$\alpha \neq \beta,$$
но
$$f\alpha = f\beta.$$
Таким образом, f – не мономорфизм.

2. Если f не сюръективно, то выберем $x \in B \setminus f(A)$. Положим
$$B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \{0,1\}$$
$$\alpha(b) = 0 \ \forall \ b \in B,$$
$$\beta(b) = \begin{cases} 0, & b \neq x \\ 1, & b = x \end{cases}$$
Тогда
$$\alpha f = \beta f,$$
но
$$\alpha \neq \beta,$$
то есть f – не эпиморфизм.

□

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Top

В категории Top ответ такой же, так как на $\{1,2\}$ можно ввести топологию $\{\varnothing, \{1,2\}\}$ и α и β будут непрерывны.

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Metr

Пусть Metr – категория метрических пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов. Опять мономорфизмы = инъекции (доказательство аналогично).

Теорема 8.2.

$$f: A \to B$$

– эпиморфизм в Metr $\iff$ $f(A)$ *плотен в* B.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $f(A)$ плотен в B. Проверим, что f – эпиморфизм.

Пусть

$$\alpha, \beta: B \rightrightarrows C$$

– непрерывные,

$$\alpha f = \beta f.$$

Пусть $x \in B$. Так как $f(A)$ плотно в B, то $\exists$ последовательность $(a_n) \subseteq A$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = x.$$

В силу непрерывности α и β

$$\alpha(x) = \alpha\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty} (\alpha f)(a_n) = \lim_{n\to\infty} (\beta f)(a_n) = \beta\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right) = \beta(x),$$

то есть

$$\alpha = \beta,$$

так как на всех точках значения совпадают.

$\Rightarrow$ Пусть f – эпиморфизм. Рассмотрим случай $A = \varnothing$. Пусть $B \neq \varnothing$. Фиксируем $b_0 \in B$ и рассмотрим

$$\alpha, \beta: B \to \mathbb{R},$$

$$\begin{matrix} \alpha(b) := \rho(b, b_0) \\ \beta(b) := \rho(b, b_0) + 1 \end{matrix} \quad \forall\ b \in B,$$

где ρ – метрика в B. Они непрерывны,

$$\alpha f = \beta f,$$

то есть получаем противоречие.

Если $B = \varnothing$, то f, очевидно, является эпиморфизмом.

Пусть теперь $A \neq \varnothing$. Положим

$$\begin{aligned} \alpha(b) &= 0, \\ \beta(b) &= \inf_{a\in A} \rho(b, f(a)). \end{aligned}$$

Проверим непрерывность β. Пусть $\varepsilon > 0$, $b_0 \in B$. Пусть $b \in B$таково, что

$$\rho(b, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall\ a \in A$

$$|\rho(b, f(a)) - \rho(b_0, f(a))| \le \rho(b, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{62}$$

в силу неравенства треугольника. Переходя в (62) к inf, получим

$$|\beta(b) - \beta(b_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Распишем переход к inf более подробно. Раскрывая модуль в (62), получим

$$\rho(b_0, f(a)) - \frac{\varepsilon}{2} < \rho(b, f(a)) < \rho(b_0, f(a)) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{63}$$

Для левой части (63) справедливо

$$\beta(b_0) - \frac{\varepsilon}{2} < \rho(b, f(a)\ \forall\ a \in A.$$

Переходя к inf, получим

$$\beta(b_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le \beta(b).$$

Для правой части (63) справедливо

$$\beta(b) < \rho(b_0, f(a)) + \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ a \in A.$$

Переходя к inf, получаем

$$\beta(b) \le \beta(b_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, непрерывность β доказана.

Далее,

$$\beta(f(a)) = 0\ \forall\ a \in A,$$

то есть

$$\beta f = \alpha f.$$

Отсюда

$$\alpha = \beta,$$

то есть $\forall\ b \in B$

$$\inf_{a \in A} \rho(b, f(a)) = 0,$$

а значит, $\exists$ последовательность $(a_n)_n$, что

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b.$$

Получили, что любая точка $b \in B$ является предельной для $f(A)$, а значит, $f(A)$ плотно в B.

$\square$

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории R-Mod

Теорема 8.3. *В категории R-Mod, где R – ассоциативное кольцо с 1, эпиморфизмы сюръективны, а мономорфизмы инъективны.*

Доказательство. 1. Пусть

$$f:\ A\ \to\ B$$

– гомоморфизм модулей, $\mathrm{Ker} f \neq 0$. Выберем

$$a \in \mathrm{Ker} f, \quad a \neq 0.$$

Рассмотрим

$$\alpha, \beta:\ R\ \rightrightarrows\ A,$$

$$\begin{matrix} \alpha(r) = 0 \\ \beta(r) = ra \end{matrix} \quad \forall\ r \in R.$$

Тогда

$$f\alpha = f\beta = 0,$$

но $\alpha \neq \beta$, то есть f – не мономорфизм.

2. Пусть $f(A) \neq B$. Рассмотрим

$$\alpha, \beta:\ B\ \rightrightarrows B/f(A),$$

где $\alpha = 0$, β – естественный сюръективный гомоморфизм. Тогда

$$\alpha f = \beta f = 0,$$

но $\alpha \neq \beta$, то есть f – не эпиморфизм.

□

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Grp

Теорема 8.4. *В категории групп Grp мономорфизмы = инъективные гомоморфизмы.*

Доказательство. Пусть

$$f:\ G\ \to\ H$$

– гомоморфизм групп, $\mathrm{Ker} f \neq 0$. Выберем $g \in \mathrm{Ker} f$ и определим

$$\alpha, \beta:\ \mathbb{Z}\ \rightrightarrows\ G,$$

$$\begin{matrix} \alpha(n) = 1 \\ \beta(n) = g^n \end{matrix} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$f\alpha = f\beta,$$

но $\alpha \neq \beta$, а значит, f – не мономорфизм. □

Лекция 9. Подобъекты и факторобъекты. Пересечение подобъектов. Пулбэк с участием мономорфизма. Иерархия моно- и эпиморфизмов

Эпиморфизмы в категории Grp (продолжение)

Теорема 9.1. *Эпиморфизмы в Grp – сюръективные гомоморфизмы групп.*

Доказательство. Рассмотрим несюръективный гомоморфизм

$$f\colon G \to H.$$

Возможны два случая.

1. Если[18] $f(G) \triangleleft H$, то достаточно рассмотреть гомоморфизмы

$$\alpha, \beta\colon H \to H/f(G),$$

$$\alpha(h) \coloneqq 1_{H/f(G)}$$
$$\beta(h) \coloneqq hf(G)$$

Здесь $hf(G)$ – соответствующий смежный класс. Понятно, что $\alpha \neq \beta$, но

$$\alpha f = \beta f,$$

то есть f – не эпиморфизм.

2. Пусть $f(G) \ntriangleleft H$. Тогда, так как подгруппы индекса 2 нормальные, по $f(G)$ $\exists$ как минимум 3 различных правых смежных классов:

$$f(G), f(G)u, f(G)v, \quad u, v \in H.$$

Рассмотрим гомоморфизмы

$$\alpha, \beta\colon H \to S(H),$$

где $S(H)$ – группа биекций $H \to H$,

$$\alpha(h)(t) \coloneqq ht \ \forall\ h, t \in H$$

– действие левыми сдвигами.

Рассмотрим $\sigma \in S(H)$

$$\sigma(hu) \coloneqq hv, \quad \forall\ h \in f(G),$$
$$\sigma(hv) \coloneqq hu$$
$$\sigma(t) \coloneqq t, \quad \forall\ t \in f(G)u \cup f(G)v.$$

[18] $f(G)$ нормально в H.

Положим теперь

$$\beta(h) := \sigma\alpha(h)\sigma^{-1} \ \forall \ h \in H.$$

Тогда

$$\alpha f = \beta f,$$

но

$$\alpha \neq \beta,$$

так как

$$\alpha(u)(1) = u \cdot 1 = u,$$

$$\beta(u)(1) = \left(\sigma\alpha(u)\sigma^{-1}\right)(1) = \sigma\left(\alpha(u) \cdot 1\right) = \sigma(u) = v \neq u.$$

Таким образом, f – не эпиморфизм.

□

Вложение целых чисел в рациональные как эпиморфизм

Теорема 9.2. *Вложение*

$$i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

является эпиморфзимом в категории коммутативных колец с 1.

Доказательство. Докажем, что для $\forall$ коммутативного кольца с 1 R $\exists$ не более одного гомоморфизма

$$f : \mathbb{Q} \to R.$$

Единица в этом случае переходит в 1:

$$f(1) = 1_R,$$

поэтому

$$f(m) = m := \underbrace{1_R + \ldots 1_R}_{m \text{ раз}} \ \forall \ m \in \mathbb{Z}.$$

$$f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{(1_R + \ldots + 1_R)}_{n \text{ раз}} f\left(\frac{1}{n}\right) \ \forall \ \mathbb{N}.$$

Отсюда $n \in R$ обратим,

$$\frac{1}{n} = n^{-1} = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \ \forall \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

то есть f определен однозначно.

Если

$$\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i} \mathbb{Q} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} R \ ,$$

то $\alpha = \beta$, то есть i – эпиморфизм. □

Замечание 9.1. i – моно- и эпиморфизм, но не изоморфизм.

Замечание 9.2. Везде далее будем использовать следующие обозначения: $\rightarrowtail$ для мономорфизма и $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизма.

Подобъекты и факторобъекты. Пересечение подобъектов

Замечание 9.3. Отталкиваясь от понятия подгруппы и подмножества, для того чтобы ввести понятие подобъекта (это будет сделано ниже), естественно использовать мономорфизмы

$$f:\ a \rightarrowtail b$$

Однако подобъект зависит не только от a, но и от f, так как

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S_3$$

можно вложить тремя способами.

Введем на мономорфизмах упорядочение:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "\alpha"] & b \\
c \arrow[ur, tail, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

Говорят, что $\alpha \le \gamma$ (или $a \le c$), если $\exists$ морфизм

$$\beta:\ a \to c$$

такой, что

$$\alpha = \gamma\beta$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, tail, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & & b \\
& c \arrow[ur, tail, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Замечания. 1. β – мономорфизм, так как если

$$\beta f = \beta g$$

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \arrow[rr, tail, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & & b \\
& & c \arrow[ur, tail, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

то

$$\gamma\beta f = \gamma\beta g,$$

откуда

$$\alpha f = \alpha g,$$

то есть $f = g$, так как α – мономорфизм.

2. β – единственный, так как γ – мономорфизм.

Если для моноформизмов α и γ верно $\alpha \ge \gamma$, $\gamma \ge \alpha$, то $\alpha \sim \gamma$ по определению.

Определение. Подобъекты – классы эквивалентности по ~ мономорфизмов. Аналогично, факторобъекты – классы эквивалентности по ~ эпиморфизмов.

Определение. Пусть

$$\alpha_\lambda : a_\lambda \to b, \quad \lambda \in \Lambda$$

– семейство подобъектов. Рассмотрим диаграмму

$$a_\lambda \overset{\alpha_\lambda}{\rightarrowtail} b, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Пусть a – предел этой диаграммы. Тогда a называется *пересечением подобъектов* a_λ.

Предложение. Пересечение подобъектов α_λ можно представить в виде

$$a = \inf_\lambda a_\lambda,$$

то есть $a \le a_\lambda \ \forall \ \lambda \in \Lambda$ и если $c \le a_\lambda \ \forall \ \lambda \in \Lambda$, то $c \le a$.

Рассмотрим предельный конус

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, tail, "\alpha_\lambda"] & & b \\
& a \arrow[ul, "\beta_\lambda"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Докажем, что γ – мономорфизм. Пусть

$$f, g : u \rightrightarrows a$$

такие, что

$$\gamma f = \gamma g$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, tail, "\alpha_\lambda"] & & b & \\
& a \arrow[ul, "\beta_\lambda"] \arrow[ur, "\gamma"'] & & u \arrow[ll, shift right, "g"'] \arrow[ll, shift left, "f"]
\end{tikzcd}$$

Для $\forall \ \lambda \in \Lambda$ получаем

$$\alpha_\lambda \beta_\lambda f = \alpha_\lambda \beta_\lambda g,$$

$$\beta_\lambda f = \beta_\lambda g,$$

так как α_λ – мономорфизм.

У нас есть конус с вершиной в u, который выражается через предельный через f и через g, то есть $f = g$.

Замечание 9.4. Рассмотренное свойство, когда композиции двух морфизмов из некоторого объекта со всеми морфизмами предельного конуса оказываются равны, и из этого следует, что и эти два морфизма сами равны, в английской литературе называется «*mono-source*».

Отсюда $a \leq a_\lambda \ \forall \ \lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, tail, "\alpha_\lambda"] & b \\
c \arrow[ur, bend left, "\mu_\lambda"] \arrow[urr, tail, "\varphi"'] & & a \arrow[ul, "\beta_\lambda"'] \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Пусть

$$\varphi\colon\ c \rightarrowtail \quad \text{в подобъект,}$$

причем $c \leq a_\lambda \ \forall \ \lambda \in \Lambda$. Он образует конус, который пропускается через a

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, tail, "\alpha_\lambda"] & b \\
c \arrow[ur, bend left, "\mu_\lambda"] \arrow[urr, tail, "\varphi"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "\psi"'] & & a \arrow[ul, "\beta_\lambda"'] \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

то есть $c \leq a$.

Замечание 9.5. Мы искали пересечение как предел диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & b & \\
a_\lambda \arrow[ur, tail, "\alpha_\lambda"] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & a_\mu \arrow[ul, tail, "\alpha_\mu"'] \\
 & a \arrow[ul, tail, "\beta_\lambda"] \arrow[ur, tail, "\beta_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Мы не рассматривали, как соотносятся между собой a_λ и a_μ: стрелки τ не было в диаграмме даже в случае $a_\lambda \leq a_\mu$.

Проверим, что

$$\beta_\mu = \tau\beta_\lambda.$$

Мы знаем, что

$$\alpha_\lambda\beta_\lambda = \alpha_\mu\beta_\mu.$$

Тогда

$$\alpha_\mu\tau\beta_\alpha = \alpha_\mu\beta_\mu,$$

и, наконец,

$$\tau\beta_\lambda = \beta_\mu,$$

так как α_μ – мономорфизм.

В категориях Sets, Grp, R-Mod, коммутативных колец пересечение совпадает с пересечением в обычном смысле.

В категории Top

$$X \overset{f}{\rightarrowtail} Y$$

топология в X может быть богаче, чем в $f(X)$.

Коуниверсальный квадрат с участием мономорфизма

Теорема 9.3. *Пусть в коуниверсальном квадрате*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f^*(m)"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m"] & \cdot \end{tikzcd} \tag{64}$$

m – мономорфизм. Тогда $f^*(m)$ – тоже мономорфизм.

Доказательство. Перерисуем диаграмму (64), добавив два морфизма:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \cdot \arrow[r, "f^*(m)"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & \cdot \arrow[r, tail, "m"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Пусть

$$f^*(m)\alpha = f^*(m)\beta. \tag{65}$$

Тогда

$$ff^*(m)\alpha = ff^*(m)\beta.$$

В силу коммутативности коуниверсального квадрата это то же самое, что

$$mg\alpha = mg\beta.$$

Это, в свою очередь, можно сократить до

$$g\alpha = g\beta, \tag{66}$$

так как m – мономорфизм. Из (65) и (66) в силу коуниверсальности квадрата следует, что $\alpha = \beta$. ☐

Иерархия моно- и эпиморфизмов

Регулярные, сильные и экстремальные моно- и эпиморфизмы

Хочется, чтобы любой морфизм можно было бы разложить в следующую композицию эпи- и мономорфизма (или что-то, что будет нам заменять обычные эпи- и мономорфизм). И, если таких разложений 2, чтобы существовал такой изоморфизм η, что диаграмма ниже была бы коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \cdot \arrow[d, tail] \arrow[dl, dashed, "\exists\eta"'] \\ \cdot \arrow[r, tail] & \cdot \end{tikzcd}$$

То есть, другими словами, разложение на эпи- и мономорфизм было бы единственным.

Возникает две проблемы. Во-первых, просто моно- и эпиморфизмы могут быть плохими в категориях. Это не то, с чем мы хотим работать, получив разложение. Во-вторых, если просто раскладывать в композицию эпи- и мономорфизма, существование эпиморфизма η не будет гарантировано. Чтобы этого избежать, сужают либо класс мономорфизмов, либо класс эпиморфизмов.

Иерархию моно- и эпиморфизмов мы будем изучать на примере мономорфизмов.

Определение. Мономорфизм

$$m\colon a \rightarrowtail l$$

называется

1. *регулярным* (*regular*), если m – уравнитель:

   $$m = \mathrm{eq}(\alpha, \beta)$$

   для некоторых морфизмов α и β:[19]

   $$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "m"] & b \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & c \end{tikzcd}$$

2. *сильным* (*strong*), если из равенства

   $$ge = mf,$$

   где e – эпиморфизм, g, f – морфизмы:

   $$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m"] & \cdot \end{tikzcd}$$

   следует существование морфизма d такого, что

   $$g = md$$
   $$f = de$$

   $$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m"] & \cdot \end{tikzcd}$$

   Единственность «диагонали» d следует из любого из равенств выше, так как m – моно-, а e – эпиморфизм.

3. *экстремальным* (*extremal*), если из равенства

   $$m = ge,$$

   где e – эпиморфизм, а g – морфизм, следует, что e – изоморфизм.

[19] В определении в записи соответствующей лекции допущена ошибка, которую лектор исправляет в начале следующей лекции. Здесь приведен уже исправленный вариант.

Замечание 9.6. Условие экстремальности отбрасывает, например, случай вложения кольца целых чисел в поле рациональных чисел. Мы говорили, что это одновременно эпи- и мономорфизм. Тогда он не может быть экстремальным мономорфизмом.

Упражнение 9.1. *Рассмотрим коуниверсальный квадрат в категории групп Grp, где e – эпиморфизм:*

$$\begin{tikzcd}
B \times_A C \arrow[r, "f^*(e)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, two heads, "e"] & A
\end{tikzcd}$$

Тогда $f^*(e)$ – тоже эпиморфизм.

Лекция 10. Связь между мономорфизмами в иерархии. Регулярные эпиморфизмы в категориях. Факторизационные структуры

Иерархия моно- и эпиморфизмов

Регулярные, сильные и экстремальные мономорфизмы (повторение)

Вспомним определения, которые мы дали в конце прошлой лекции. Пусть

$$f : a \to b$$

– мономорфизм. Говорят, что

1. f – *регулярный*, если f – уравнитель некой пары морфизмов

$$g, h : b \to c$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c. \end{tikzcd}$$

2. f – сильный, если из того, что

$$fh = ge$$

для эпиморфизма e и морфизмов g и h следует, что $\exists$ морфизм d такой, что

$$g = fd,$$
$$h = de.$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

3. f – *экстремальный*, если из равенства

$$f = ge$$

для эпиморфизма e следует, что e – изоморфизм[20].

Введем следующие обозначения: Mono – множество всех мономорфизмов, RegMono – множество всех регулярных мономорфизмов, StrongMono – множество всех сильных мономорфизмов, ExtrMono – множество всех экстремальных мономорфизмов.

[20]Напомним, что изоморфизм в категории – это просто обратимый морфизм.

Связь между мономорфизмами в иерархии

Предложение. Любой уравнитель – сильный мономорфизм, то есть

$$\mathrm{RegMono} \subseteq \mathrm{StrongMono}.$$

Доказательство. Пусть

$$f = \mathrm{eq}(g, h)$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c. \end{tikzcd}$$

Пусть также даны

$$\alpha, \beta \colon u \rightrightarrows a$$

– морфизмы такие, что

$$f\alpha = f\beta.$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

Тогда α и β – сравнивающие морфизмы между конусом

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\ u \arrow[ur, "f\alpha=f\beta"] \arrow[urr, bend right, "gf\alpha=hf\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

и предельным конусом

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, bend right, "gf=hf"'] & & \end{tikzcd}$$

То есть по определению предела $\alpha = \beta$.

Докажем, что f – сильный. Рассмотрим квадрат

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Пусть

$$f = \mathrm{eq}(\alpha, \beta),$$

e – эпиморфизм.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] & \\ \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Итак,

$$\alpha f = \beta f.$$

Тогда

$$\alpha f h = \beta f h,$$

$$\alpha g e = \beta g e,$$

откуда

$$\alpha g = \beta g.$$

так как e – эпиморфизм. Отсюда, так как f – уравнитель, $\exists\ d$ такое, что

$$f = fd.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"'] & \\
\cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Покажем, что и второй треугольник в диаграмме коммутирует. Известно, что

$$fh = ge.$$

С другой стороны,

$$ge = fde.$$

Мономорфизмы можно сокращать слева, поэтому, так как f – мономорфизм, получаем

$$h = de.$$

□

Предложение.

$$\mathrm{StrongMono} \subseteq \mathrm{ExtrMono}.$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathrm{StrongMono}$,

$$m = ge,$$

где $e \in \mathrm{Epi}$ (эпиморфизм). Тогда у нас коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\
\cdot \arrow[r, tail, "m"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Тогда $\exists\ d$ такое, что

$$de = \mathrm{id}. \tag{67}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"] \\
\cdot \arrow[r, tail, "m"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Домножим слева (67) на e. Получим

$$ede = e,$$

откуда, сокращая e справа, получим

$$ed = \mathrm{id}.$$

Это возможно, так как $e \in \mathrm{Epi}$. Тогда d – обратный к e, а значит, $e \in \mathrm{Iso}$ – (возможно, большому) множеству всех изоморфизмов. $\square$

Предложение. Если в категории C $\exists$ универсальные квадраты (пушауты), то

$$\mathrm{StrongMono}(C) = \mathrm{ExtrMono}(C).$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathrm{ExtrMono}(C)$ и

$$mf = ge,$$

где $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ – категории всех морфизмов, $e \in \mathrm{Epi}(C)$. Нарисуем соответствующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
\cdot \arrow[drr, tail, bend right, "m"'] & & \\
& & \cdot
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим пушаут e и f:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "\widetilde{f}"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
\cdot \arrow[r, "\widetilde{e}"] \arrow[drr, tail, bend right, "m"'] & \cdot \arrow[dr, dashed, "\widetilde{d}"] & \\
& & \cdot
\end{tikzcd}$$

Тогда $\exists!\ \widetilde{d}$. $\widetilde{e} \in \mathrm{Epi}$, так как это пушаут эпиморфизма (ранее было утверждение о том, что пулбэк мономорфизма является мономорфизмом – его применим к C^{op}). То есть

$$m = \widetilde{d}\widetilde{e},$$

то есть $\widetilde{e} \in \mathrm{Iso}$, так как $m \in \mathrm{ExtrMono}$.

Положим

$$d := \widetilde{e}^{-1}\widetilde{f}.$$

Тогда

$$md = m\widetilde{e}^{-1}\widetilde{f} = \widetilde{d}\widetilde{f} = g,$$
$$de = \widetilde{e}^{-1}\widetilde{f}e = \widetilde{e}^{-1}\widetilde{e}f = f.$$

$\square$

Конгруэнция на моноиде

Вспомним понятие *ядерной пары* морфизма. Пусть

$$f:\ a\ \to\ b$$

– морфизм. Его *ядерная пара* – это морфизмы g и h из коуниверсального квадрата

$$\begin{tikzcd} a \times_b a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

Рассмотрим ядерную пару отображения

$$f:\ A\ \to\ B \text{ в Sets.}$$

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Здесь

$$A \times_B A = \{(a_1, a_2)\,|\, a_1,\, a_2 \in A,\quad f(a_1) = f(a_2)\} \subseteq A \times A$$

$A \times_B A$ – отношение эквивалентности на A, порожденное отображением f.

Если A и B – моноиды, f – гомоморфизм то $A \times_B A$ является *конгруэнцией*, то есть если

$$(a_1, a_2),\ (a_3, a_4) \in A \times_B A,$$

то

$$(a_1a_3, a_2a_4) \in A \times_B A.$$

$$f(a_1) = f(a_2),\quad f(a_3) = f(a_4),$$

то

$$f(a_1a_3) = f(a_1)f(a_3) = f(a_2)f(a_4) = f(a_2a_4).$$

Обратно, если $\sim$ – конгруэнция на моноиде A, то на $A/\sim$ естественным образом определяется структура моноида так, что отображение

$$a \mapsto \text{ его класс эквивалентности в } A/\sim$$

задает сюръективный гомоморфизм моноидов $A \to A/\sim$.

Упражнение 10.1. *Доказать основную теорему о гомоморфизме моноидов: пусть*

$$f:\ A\ \to\ B$$

– гомоморфизм моноидов, $\sim$ – конгруэнция на A. Тогда $\exists$

$$\overline{f}:\ A/\sim\ \to\ B$$

такой, что

$$\overline{f}\pi = f \iff \sim \subseteq \underbrace{A \times_B A}_{\text{построена по } f}.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\
& A/\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Расшифруем:

$$a_1 \sim a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) = f(a_2) \;\forall\; a_1, a_2 \in A.$$

Регулярные эпиморфизмы в категориях множеств, колец и моноидов

Теорема 10.1. *В категориях Sets, Mon, Rings (с 1 и без), CommRings и т.д. регулярные эпиморфизмы – это в точности сюрхективные гомоморфизмы (сюръективные отображения в случае Sets).*

Доказательство. проведем для определенности в случае Mon. Пусть

$$e = \mathrm{coeq}(f, g)$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "e"] & C
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$C = B/\sim,$$

где $\sim$ – минимальная конгруэнция такая, что

$$f(a) \sim g(a) \;\forall\; a \in A$$

(по основной теореме о гомоморфизме моноидов). В частности, e сюръективен.

Пусть теперь

$$e : \; B \to C$$

– сюръективный гомоморфизм моноидов. Рассмотрим ядерную пару

$$f, g : \; B \times_C B \;\rightrightarrows\; B$$

$$\begin{tikzcd}
B \times_C B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "e"] \\
B \arrow[r, "e"] & C
\end{tikzcd}$$

Докажем, что

$$e = \mathrm{coeq}(f, g).$$

Пусть $\sim$ – конгруэнция, по которой мы строим коуравнитель. Пусть есть некая пара

$$(b_1, b_2) \in B \times_C B.$$

Тогда

$$f(b_1, b_2) = b_1$$
$$g(b_1, b_2) = b_2$$

Конгруэнция $\sim$ минимальна и такова, что все b_1 и b_2 были эквивалентны. Это выполнено $\iff$

$$e(b_1) = e(b_2).$$

То есть $\sim$ – ядерная конгруэнция для e. Но

$$B/\sim \cong C$$

(другая формулировка теоремы о гомоморфизме). Теорема доказана.

Еще раз проговорим доказательство. Нам нужно построить изоморфизм

$$\varphi : B/\sim \to C$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
B \times_C B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\pi"] & & C \\
& & B/\sim \arrow[ur, dashed, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Здесь

$$\pi = \operatorname{coeq}(f, g).$$

Пусть $\overline{b}$ – класс эквивалентности $b \in B$ в $B/\sim$. Тогда

$$\varphi\left(\overline{b}\right) := e(b).$$

□

Факторизационные структуры (системы)

Определение. Пусть C – категория,

$$E, M \subseteq \operatorname{Mor}(C)$$

– фиксированые подмножества (возможно, большого) множества морфизмов.

Говорят, что $C - (E, M)$ – *структурирована* или что (E, M) – *факторизафионная структура (система)*[21] в C, если выполнены следующие условия:

1. (возможно, большие) множества E и M замкнуты относительно композиции с изоморфизмами;

[21] Мы будем пользоваться термином *структура*.

2. выполнено условие (E, M)-*факторизации*: $\forall\ f \in \mathrm{Mor}(C)\ \exists\ e \in E,\ m \in M$ такие, что
$$f = me;$$

3. выполнено условие *однозначной* (E, M)-*диагонализации*: если
$$ge = mf,$$
где $e \in E$, $m \in M$, $f, g \in \mathrm{Mor}$, то $\exists!\ d \in \mathrm{Mor}$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, "m"'] & \cdot \end{tikzcd}$$
то есть такой, что
$$g = md,$$
$$f = de.$$

Предложение. Если в C выполнено условие однозначной (E, M)-диагонализации и
$$m_1 e_1 = m_2 e_2, \quad m_1, m_2 \in M,\ e_1, e_2 \in E,$$
то $\exists!$ изоморфизм d такой, что
$$m_2 d = m_1$$
$$d e_1 = e_2$$
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_2"'] & \cdot \arrow[d, "m_1"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, "m_2"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Доказательство. d существует в силу свойства диагонализации. В силу этого свойства $\exists\ \widetilde{d}$ такое, что
$$\widetilde{d} e_2 = e_1,$$
$$m_1 \widetilde{d} = m_2$$

Отметим еще раз на диаграмме элемент в верхнем правом углу и связанные с ним морфизмы:
$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_2"'] \arrow[dl, bend right, "e_1"'] & \circ \arrow[d, "m_1"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ & \cdot \arrow[r, "m_2"'] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{d}"'] & \cdot \\ \circ \arrow[urr, bend right, "m_1"'] & & \end{tikzcd}$$

Подставляя одно в другое, получим
$$\widetilde{d} d e_1 = e_1,$$
$$m_1 \widetilde{d} d = m_1$$

Таким образом,
$$\widetilde{d} d = \mathrm{id}$$

в силу единственности. Аналогично

$$d\widetilde{d} = \mathrm{id},$$

то есть d – изоморфизм. □

Лекция 11. Замкнутость StrongMono относительно композиции. Факторизационная структура. Факторизационная лемма. Первое достаточное условие (ExtrEpi, Mono)-структурированности

Замкнутость Mono (Epi, StrongMono) относительно композиции

Предложение. Пусть $m_1, m_2 \in \mathrm{Mono}(C)$. Тогда $m_1 m_2 \in \mathrm{Mono}(C)$.

Доказательство. Рассмотрим морфизмы m_1, m_2, f и g такие, что

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \arrow[r, "m_2"] & b \arrow[r, "m_1"] & c \end{tikzcd}$$

$$m_1 m_2 f = m_1 m_2 g$$

Так как $m_1 \in \mathrm{Mono}(C)$,

$$m_2 f = m_2 g.$$

Отсюда

$$f = g,$$

так как $m_2 \in \mathrm{Mono}(C)$. □

Аналогично для эпиморфизмов (достаточно применить результат предложения выше для двойственной категории).

Предложение. Пусть $m_1, m_2 \in \mathrm{StrongMono}(C)$. Тогда $m_1 m_2 \in \mathrm{StrongMono}(C)$.

Доказательство. Пусть

$$m_1 m_2 f = ge, \text{ где } f, g \in \mathrm{Mor},\ e \in \mathrm{Epi}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "e"] \arrow[d, "f"] & & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "m_2"'] & \cdot \arrow[r, "m_1"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Так как $m_1 \in \mathrm{StrongMono}$, $\exists\ d_1$:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "e"] \arrow[d, "f"] & & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d_1"] \\ \cdot \arrow[r, "m_2"'] & \cdot \arrow[r, "m_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Так как $m_2 \in \mathrm{StrongMono}$, $\exists\ d_2$ такой, что

$$d_2 e = f, \quad m_2 d_2 = d_1. \tag{68}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "e"] \arrow[d, "f"'] & & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dll, dashed, "d_2"'] \arrow[dl, dashed, "d_1"] \\
\cdot \arrow[r, "m_2"'] & \cdot \arrow[r, "m_1"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Умножая второе из (68) слева на m_1, получим

$$m_1 m_2 d_2 = m_1 d_1 = g,$$

то есть d_2 – искомая диагональ. $\square$

Факторизационная структура

Напомним определение факторизационной структуры.

Определение. Пусть E и M – возможно, большие множества морфизмов в категории C. Говорят, что (E, M) – *факторизационная структура (система) в C* или что C – (E, M)-*структурирована*, если выполнены следующие условия:

1. E и M замкнуты относительно композиции с изоморфизмами;
2. в C есть (E, M)-*разложения*, то есть $\forall\ f \in \mathrm{Mor}(C)\ \exists\ e \in E,\ m \in M$ такие, что
$$f = me;$$
3. в C выполнено свойство *(E,M)-диагонализации*: если
$$mf = ge, \text{ где} e \in E,\ m \in M,\ f, g \in \mathrm{Mor}(C),$$
то $\exists$ единственная диагональ d, делающая квадрат ниже коммутативным:
$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\
\cdot \arrow[r, "m"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Примеры. 1. $(\mathrm{Iso}, \mathrm{Mor})$ и $(\mathrm{Mor}, \mathrm{Iso})$ в любой категории:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "\beta", "\sim"'] \arrow[dl, "\alpha^{-1}\beta"'] \\
\cdot \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

$$\beta f = \alpha g \iff \alpha^{-1}\beta f = g.$$

2. $(\mathrm{Epi}, \mathrm{Mono})$ – факторизационная структура в Sets, так как Epi – сюръективные, Mono – инъективные отображения.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "y"] \arrow[dl, dashed, "d"] \\
Z \arrow[r, tail, "m"'] & T
\end{tikzcd}$$

Пусть $x_1, x_2 \in X$,
$$e(x_1) = e(x_2).$$
Применяя g, получим
$$ge(x_1) = ge(x_2),$$
откуда
$$mf(x_1) = mf(x_2),$$
и, наконец,
$$f(x_1) = f(x_2).$$
Здесь $x_1 \sim x_2$, если $e(x_1) = e(x_2)$.

Положим
$$d(y) \coloneqq f(x), \text{ где } y = e(x).$$

3. «Патологическая» факторизационная структура на Sets. Положим
$$\begin{aligned} E &= \{f : X \to Y \mid \text{ если } X = \varnothing, \text{ то } Y = \varnothing\} \\ M &= \{f : X \to Y \mid f - \text{биекция или } X = \varnothing\} \end{aligned}$$
Если $x \neq \varnothing$, то
$$f = \mathrm{id}_Y f.$$
Если $X = \varnothing$, то
$$f = f\mathrm{id}_\varnothing.$$
Возможны два случая для диагонали:
$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \arrow[dl, "\mathrm{id}_\varnothing"] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \arrow[dl] \\ \varnothing \arrow[r] & Y & Z \arrow[r, "\sim"] & Y \end{tikzcd}$$
В обоих случаях диагональ единственна.

Теорема о категории с $(\mathsf{Epi}, \mathsf{RegMono})$-факторизациями

Теорема 11.1. [22] *Если в категории C есть $(Epi, RegMono)$-факторизации, то*
$$RegMono(C) = StrongMono(C) = ExtrMono(C)$$
и C – $(Epi, RegMono)$-структурирована.

Доказательство. Пусть $m \in \mathrm{ExtrMono}(C)$. Тогда
$$m = m_0 e, \text{ где } m_0 \in \mathrm{RegMono}, \quad e \in \mathrm{Epi}.$$

[22] В формулировке сначала лектор использует обозначение (RegMono, Epi)-факторизация, которое позже заменяет на (Epi, RegMono)-факторизации. Здесь приведен сразу второй вариант.

В силу экстремальности m, $e \in \mathrm{Iso}$. Отсюда $m \in \mathrm{RegMono}$.

$$\cdot \xrightarrow{\sim} \cdot \longrightarrow \cdot \rightrightarrows \cdot$$

Диагональное свойство следует из того, что

$$\mathrm{RegMono} \subseteq \mathrm{StrongMono},$$

а для сильных диагонализуемость – это определение. □

Следствие.

$$\mathrm{RegEpi}(\mathrm{Mon}) = \mathrm{StrongEpi}(\mathrm{Mon}) = \mathrm{ExtrEpi}(\mathrm{Mon})$$

и Mon – $(\mathrm{RegEpi}, \mathrm{Mono})$-структурирована.

Факторизационная лемма

Факторизационная лемма. [23] Пусть в категории C $\exists$ все уравнители и пересечения всех подобъектов,

$$f : a \to b,$$

$M \subseteq \mathrm{Mono}(C)$ и

1. пересечения M-подобъектов объекта b принадлежат M;
2. если
$$f = \hat{m}gt, \text{ где } \hat{m} \in M, \quad g \in \mathrm{RegMono}(C),$$
то
$$\hat{m}g \in M.$$

Тогда

1. $f = me$, где $m \in M$, $e \in \mathrm{Epi}(C)$;
2. если $f = \overline{m}g$, где $\overline{m} \in M$, то $\exists$ диагональ d
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, "\overline{m}"'] & \cdot \end{tikzcd}$$
3. если $e = \overline{m}g$, где $m\overline{m} \in M$, $g \in \mathrm{Mor}$, то $\overline{m} \in \mathrm{Iso}$.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные разложения

$$f = m_\alpha f_\alpha, \quad m_\alpha \in M.$$

[23] В соответствующей лекции лектор сначала исправлет формулировку леммы в ходе доказательства. Здесь приведена сразу исправленная версия леммы.

Рассмотрим предел (пересечение) подобъектов m_α

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "e"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed] \\
\cdot \arrow[r, "m_\alpha"'] & b
\end{tikzcd}$$

Так как f_α образует конус, то $\exists$ отображение e (см. диаграмму выше).

Проверим условие диагонализации (второе утверждение леммы). Если $f = \overline{m}g$, то $\overline{m} = m_\alpha$, $g = f_\alpha$ для некоторого индекса α, то есть условие выполнено.

Докажем третье утверждение леммы. Пусть $e = \overline{m}g$, где $m\overline{m} \in M$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \\
\cdot \arrow[r, "m\overline{m}"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Тогда $\exists$ диагональ d:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, d"'] \\
\cdot \arrow[r, "m\overline{m}"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Получается, что

$$m\overline{m}d = m.$$

Так как m – мономорфизм, получаем

$$\overline{m}d = \mathrm{id}.$$

Домножим справа на $\overline{m}$:

$$\overline{m}d\overline{m} = \overline{m},$$

откуда

$$d\overline{m} = \mathrm{id},$$

так как $\overline{m} \in \mathrm{Mono}(C)$. Таким образом, $\overline{m}$ – изоморфизм.

Обсудим, почему в рассуждении выше $\overline{m} \in \mathrm{Mono}(C)$. Если

$$\overline{m}\gamma_1 = \overline{m}\gamma_2,$$

то

$$m\overline{m}\gamma_1 = m\overline{m}\gamma_2,$$

откуда

$$\gamma_1 = \gamma_2,$$

так как $M \subseteq \mathrm{Mono}$.

Докажем первое утверждение леммы. $m \in M$ по условию 1 леммы. Осталось доказать, что e – эпиморфизм.

Как обычно, предположим, что есть два морфизма α и β, которые выходят из области значений e и такие, что их композиции с e совпадают:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "e"] & \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "m"] & \cdot \\
& b &
\end{tikzcd}$$

По предположению,

$$\alpha e = \beta e.$$

Пусть

$$g = \mathrm{eq}(\alpha, \beta).$$

Тогда $\exists\ t$:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, dashed, "t"] & & \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "m"] & \cdot \\
& \cdot \arrow[ur, "g"] \arrow[r, bend right, "mg"'] & b &
\end{tikzcd}$$

По условию 2 леммы, $mg \in M$.

Получаем, что $m \geq mg$. В то же время $mg \geq m$, так как m – пересечение. Отсюда mg и m изоморфны (эквивалентны).

Таким образом, g – изоморфизм и $\alpha = \beta$, то есть e – эпиморфизм. $\square$

Достаточные условия $(\mathsf{ExtrEpi}, \mathsf{Mono})$-структурированности

Теорема 11.2. *Если в категории C $\exists$ конечные пределы и пересечения любых семейств подобъектов, то C – $(ExtrEpi, Mono)$-структурирована.*

Доказательство. Применяем факторизационную лемму для $M = \mathrm{Mono}(C)$. Получаем разложение

$$f = me\ \forall\ f \in \mathrm{Mor}.$$

e – экстремальный, так как если

$$e = mg,\ \text{где}\ \overline{m} \in \mathrm{Mono},$$

то $m\overline{m} \in \mathrm{Mono}$. По факторизационной лемме $\overline{m} \in \mathrm{Iso}$.

Докажем диагонализируемость. Пусть

$$ge = mf, \quad m \in \mathrm{Mono},$$

$e \in \mathrm{ExtrEpi}$. Рассмотрим соответствующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, bend left, two heads, "e"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \cdot \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, "g_1"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\
& \cdot \arrow[r, tail, "m"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

По свойству коуниверсального квадрата,

$$m_1 \in \mathrm{Mono}.$$

В силу коуниверальности $\exists\ h$:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[rr, bend left, two heads, "e"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \cdot \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, "g_1"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\
& \cdot \arrow[r, tail, "m"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

e – экстремальный, поэтому $m_1 \in \mathrm{Iso}$. Тогда $g_1 m_1^{-1}$ – диагональ. $\square$

Лекция 12. Малые в смысле подобъектов и факторобъектов категории. Достаточные условия (Epi, ExtrMono)-структурированности. Сопряженные функторы

Малые в смысле подобъектов и факторобъектов категории

Напомним терминологию. Мы рассматриваем мономорфизмы. Пусть

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, tail, "f"] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "g"] & \end{tikzcd}$$

Если $\exists$

$$h\colon a \to c$$

такое, что

$$gh = f,$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "g"'] & \end{tikzcd}$$

то говорят, что $g \geq f$.

Если $g \geq f$, $f \geq g$, то $f \sim g$ по определению.

Подобъекты – классы эквивалентности по $\sim$. Пересечение подобъектов

$$a_\alpha \overset{f_\alpha}{\rightarrowtail} b$$

– это морфизм, соответствующий пределу диаграммы

$$\begin{tikzcd} & a_\alpha \arrow[r, tail, "f_\alpha"] & b \\ a \arrow[ur, tail] \arrow[r, tail] \arrow[urr, bend right=60, "f"'] & a_\beta \arrow[ur, tail, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$$f = \inf_\alpha f_\alpha.$$

Достаточно присутствия в диаграмме одного представителя каждого участвующего подобъекта. Остальные представители можно добавить и предел от этого не поменяется.

Подобъект в англоязычной литературе называется «subobject», факторобъект – «quotient object». Факторгруппу можно переводить двумя способами: «factor group» и «quotient group».

Определение. Категория C называется *малой в смысле подобъектов*, если подобъекты каждого объекта образуют малое множество («well powered»).

Двойственным понятием является *малая в смысле факторобъектов* категория («well copowered»).

Поэтому если категория мала в смысле подобъектов и полна (= существуют конечные пределы), то в ней есть пересечения всех подобъектов.

Достаточные условия (Epi, ExtrMono)-структурированности

Запишем формулировку факторизационной леммы, доказанной на прошлой лекции.

Факторизационная лемма. Пусть в категории C $\exists$ пересечения подобъектов и уравнители, $M \subseteq \mathrm{Mono}(C)$,

$$f : a \to b$$

– морфизм. Пусть

1. пересечение M-подобъектов объекта b – M-подобъект;
2. если[24]
$$f = \overline{m}gh, \text{ где } \overline{m} \in M, \quad g \in \mathrm{RegMono}, \quad h \in \mathrm{Mor},$$
то
$$\overline{m}g \in M.$$

Тогда

1. $\exists$ $m \in M$, $e \in \mathrm{Epi}(C)$ такие, что
$$f = me;$$
2. если есть разложение
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \\ \cdot \arrow[r, "\hat{m}"'] & \cdot \end{tikzcd}$$
где $\hat{m} \in M$, то $\exists$ диагональ d:
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, "\hat{m}"'] & \cdot \end{tikzcd}$$
3. если
$$e = \hat{m}g,$$
где $m\hat{m} \in M$, то $\hat{m} \in \mathrm{Iso}(C)$.

[24]Здесь лектор сначала пишет $h \in M$ и исправляет это на $h \in \mathrm{Mor}$ при доказательстве достаточных условий (Epi, ExtrMono)-структурированности.

Предложение. Пусть в категории C выполнено свойство $(\mathrm{Epi}, \mathrm{ExtrMono})$-диагонализуемости.

Тогда композиция экстремальных мономорфизмов – экстремальный мономорфизм, пересечение экстремальных подобъектов – экстремальный подобъект.

Доказательство. Из диагонализуемости

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "d"] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

$$m \in \mathrm{ExtrMono}$$

следует, что
$$\mathrm{ExtrMono} = \mathrm{StrongMono}.$$

Композиция сильных – сильный мономорфизм (доказывали ранее).

Докажем, что пересечение экстремальных подобъектов – экстремальный подобъект. Рассмотрим

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] \arrow[drr, tail, "m"] & & \\ & \cdot \arrow[r, tail, "m_\alpha"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

$$m_\alpha \in \mathrm{ExtrMono},$$

m – пересечение m_α.

Пусть $e \in \mathrm{Epi}$,
$$ge = m,$$

выполнено свойство диагонализуемости, то есть $\exists$ диагонали d_α

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, tail, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, tail, bend left=80, "m"] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d_\alpha"] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m_\alpha"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Вместе с f диагонали d_α образуют конус над m_α:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, tail, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, tail, bend left=80, "m"] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d_\alpha"] \arrow[l, dashed, bend right, "h"'] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m_\alpha"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Отсюда $\exists$ h такое, что
$$d_\alpha = \varphi_\alpha h.$$

Мы знаем, что
$$\varphi_\alpha = d_\alpha e,$$

откуда

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha he.$$

Так как конус предельный, получаем, что

$$he = id.$$

Домножив это равенство слева на e, получаем

$$ehe = e,$$

откуда

$$eh = \mathrm{id},$$

так как $e \in \mathrm{Epi}$. Отсюда $e \in \mathrm{Iso}$. □

Теорема 12.1. *Если в категории C $\exists$ уравнители и пересечения всех подобъектов, то она $(Epi, ExtrMono)$-структурирована.*

Доказательство. В силу факторизационной леммы, примененной к $M = \mathrm{ExtrMono}$ и предложения выше, достаточно доказать только $(\mathrm{Epi}, \mathrm{ExtrMono})$-диагонализуемость.

Пусть

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, "c"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "h"] \\
\cdot \arrow[r, tail, "f"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

$$hc = fg$$

для $f \in \mathrm{ExtrMono}$, $c \in \mathrm{Epi}$.

Пусть M – множество всех $m_\alpha \in \mathrm{Mono}$, для которых $\exists$ f_α и h_α такие, что

$$h = m_\alpha h_\alpha$$
$$f = m_\alpha f_\alpha$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, two heads, "c"] \arrow[dd, "g"'] & & \cdot \arrow[dl, "h_\alpha"'] \arrow[dd, "h"] \\
& \cdot \arrow[dr, tail, "m_\alpha"] & \\
\cdot \arrow[ur, "f_\alpha"] \arrow[rr, tail, "f"'] & & \cdot
\end{tikzcd}$$

(так как $m_\alpha \in \mathrm{Mono}$, f_α и h_α определены однозначно).

Пусть φ_α – предельный конус для пересечения (некоторых из) m_α. Так как h_α и f_α – конусы, $\exists$ $\hat{f}$ и $\hat{h}$ такие, что

$$f_\alpha = \varphi_\alpha \hat{f}$$
$$h_\alpha = \varphi_\alpha \hat{h}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rrrr, two heads, "c"] \arrow[ddd, "g"'] & & & & \cdot \arrow[dlll, dashed, "\hat{h}"'] \arrow[ddll, "h_\alpha"] \arrow[ddd, "h"] \\
& \cdot \arrow[dr, tail, "\varphi_\alpha"] & & & \\
& & \cdot \arrow[drr, tail, "m_\alpha"] & & \\
\cdot \arrow[uur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[urr, "f_\alpha"] \arrow[rrrr, tail, "f"'] & & & & \cdot
\end{tikzcd}$$

Таким образом, пересечение

$$m = m_\alpha \varphi_\alpha \in M.$$

Далее, условие 1 для факторизационной леммы выполнено. Докажем условие 2. Пусть

$$f = m_\alpha m_0 t,$$

где $m_\alpha \in M$, $m_0 \in \mathrm{RegMono}$, $t \in \mathrm{Mor}$.

Но $m_0 \in \mathrm{StrongMono}$, поэтому $\exists\ r$ такое, что

$$m_0 r = h_\alpha.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rrrr, two heads, "c"] \arrow[ddd, "g"'] & & & & \cdot \arrow[dlll, dashed, "r"'] \arrow[ddll, "h_\alpha"] \arrow[ddd, "h"] \\
& \cdot \arrow[dr, tail, "\varphi_\alpha"] & & & \\
& & \cdot \arrow[drr, tail, "m_0"] & & \\
\cdot \arrow[uur, "t"] \arrow[urr, "f_\alpha"] \arrow[rrrr, tail, "f"'] & & & & \cdot
\end{tikzcd}$$

Значит, $m_\alpha m_0 \in M$.

Применяем факторизационную лемму к f.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, two heads, "c"] \arrow[dd, "g"'] & & \cdot \arrow[dl, "\overline{h}"'] \arrow[dd, "h"] \\
& \cdot \arrow[dr, tail, "m"] & \\
\cdot \arrow[ur, two heads, "e"] \arrow[rr, tail, "f"'] & & \cdot
\end{tikzcd}$$

$$f = me, \quad m \in M, \quad e \in \mathrm{Epi},$$

то есть $\exists\ \overline{h}$ такой, что

$$h = m\overline{h}.$$

$e \in \mathrm{Iso}$, так как $f \in \mathrm{ExtrMono}$.

Тогда

$$d = e^{-1}\overline{h}$$

– искомая диагональ. □

Упражнение 12.1. *Привести пример не экстремального эпиморфизма в Top. Является ли категория Top $(Epi, Mono)$-структурированной? $(RegEpi, Mono)$-структурированной?*

Сопряженные функторы

Определение. Пусть
$$F: X \to A$$
$$G: A \to X$$
– функторы. Говорят, что F – *левый сопряженный* для G, а G – *правый сопряженный* для F, и пишут $F \dashv G$, если $\exists$ биекция
$$\varphi: A(Fx, a) \to X(x, Ga),$$
естественная по $x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{X}$, $a \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{A}$.

Таким образом, $A\,(F(-),-)$ и $X\,(-,G(-))$ изоморфны как функторы
$$X^{\mathrm{op}} \times A \to \mathrm{Sets}.$$

Упражнение 12.2. *При фиксированном G функтор F определен однозначно с точностью до изоморфизма.*

Если рассмотреть
$$F^{\mathrm{op}}: X^{\mathrm{op}} \to A^{\mathrm{op}},$$
$$G^{\mathrm{op}}: A^{\mathrm{op}} \to X^{\mathrm{op}},$$
то $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$.

Примеры. 1.
$$\mathrm{Grp}\,(\mathcal{F}(X), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sets}\,(X, UG)\,,$$
$$U: \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}$$
– забывающий, $\mathcal{F}(X)$ – свободная группа с базисом X.

2.
$$\mathrm{Ab}\,(G/[G,G], A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grp}(G, UA),$$
$$U: \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$$
– вложение,
$$G \mapsto G/[G,G]$$
– функтор абелианизации.

3. Пусть R – коммутативное кольцо с 1.
$$\text{R-Mod}\,(M \otimes N, K) \xrightarrow{\sim} \text{R-Mod}\,(M, \mathrm{Hom}_R(N,K))\,,$$
где M, N, K –R-модули.

Лекция 13. Единица и коединица сопряжения. Треугольные тождества. Достаточные условия сопряжённости. Функтор с разными левым и правым сопряженными

Единица и коединица сопряжения

На прошлой лекции мы начали знакомиться с понятием *сопряженных функторов.*

Определение. Пусть

$$F\colon X \to A$$

и

$$G\colon A \to X$$

– функторы. Говорят, что F – *левый сопряженный для* G, а G – правый сопряженный для F, и обозначают $F \dashv G$, если $\exists$ естественная биекция

$$\varphi_{x,a}\colon A(Fx,a) \to X(x,Ga).$$

Положим

$$\eta_x := \varphi_{x,Fx}(\mathrm{id}_{Fx})\colon x \to GFx$$
$$\varepsilon_a := \varphi^{-1}_{Ga,a}(\mathrm{id}_{Ga})\colon FGa \to a$$

η называется *единицей сопряжения*, а φ – *коединицей сопряжения.* Они обладают рядом важный свойств.

Пусть $F \dashv G$. Докажем что η – естественное преобразование

$$\mathrm{id}_X \Rightarrow GF$$

Необходимо доказать для любого

$$f\colon x \to y \text{ в X}$$

коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_x"] & y \arrow[d, "\eta_y"] \\ GFx \arrow[r, "GFf"] & GFy \end{tikzcd} \qquad (69)$$

В силу естественности φ диаграммы ниже коммутативны:

$$\begin{tikzcd} A(Fy,Fy) \arrow[r, "\varphi_{y,Fy}"] \arrow[d, "A(Ff,Fy)"'] & X(y,GFy) \arrow[d, "X(f,GFy)"] \\ A(Fx,Fy) \arrow[r, "\varphi_{x,Fy}"] & X(x,GFy) \\ A(Fx,Fx) \arrow[r, "\varphi_{x,Fx}"] \arrow[u, "A(Fx,Ff)"] & X(x,GFx) \arrow[u, "X(x,GFf)"'] \end{tikzcd} \qquad (70)$$

Подставим в левый верхний и в правый нижний угол (70) тождественное отображение. Получим

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fy} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_y \arrow[d, mapsto] \\
Ff \arrow[r, mapsto, "\text{в одно и то же}"] & \eta y f = (GFf)\eta_x \\
\mathrm{id}_{Fx} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \eta_x \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Равенство

$$\eta y f = (GFf)\eta_x$$

означает в точности коммутативность диаграммы (69).

Применяя рассуждения выше к $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$, получаем, что

$$\varepsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_A$$

– естественное преобразование.

Предложение.

$$\varphi_{x,a} : A(Fx, a) \to X(x, Ga)$$

задается формулой

$$\varphi_{x,a}(f) = (Gf)\eta x$$

для $\forall\ f \in A(Fx, a)$.

$$x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} Ga$$

Аналогично

$$\varphi^{-1}_{x,a}(g) = \varepsilon F g$$

для $\forall\ g \in X(x, Ga)$.

$$Fx \xrightarrow{Fg} FGa \xrightarrow{\varepsilon_a} a$$

Доказательство. Воспользуемся коммутативностью нижней части диаграммы (70):

$$\begin{tikzcd}
A(Fx, Fx) \arrow[r, "\varphi_{x,Fx}"] \arrow[d, "A(Fx,f)"] & X(x, GFx) \arrow[d, "X(x,Gf)"'] \\
A(Fx, a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"'] & X(x, Ga)
\end{tikzcd}$$

Подставляя тождественный морфизм, получим

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fx} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_x \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & (Gf)\eta_x = \varphi_{x,a}(f)
\end{tikzcd}$$

Вторая часть предложения справедлива в силу двойственности. $\square$

Предложение. η_x – универсальный отталкивающий объект в категории запятой $(x \downarrow G)$ $\forall$ $x \in \operatorname{Ob} \mathrm{X}$.

ε_a – универсальный притягивающий объект в категории $(F \downarrow a)$ $\forall$ $a \in \operatorname{Ob} \mathrm{A}$.

Доказательство.

$$
\begin{tikzcd}
& GFx \arrow[dd, dashed, "Gf"] \\
x \arrow[ur, "\eta_x"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& Ga
\end{tikzcd}
$$

На диаграмме выше изображены два объекта в категори запятой $(x \downarrow G)$. Морфизмы между ними $(x \downarrow G)(\eta_x, g)$ – это морфизмы

$$f : \; Fx \; \to \; a,$$

для которых диаграмма выше коммутативна.

Таким образом,

$$\varphi_{x,a}(f) = g.$$

Таких f ровно 1, так как $\varphi_{x,a}$ – биекция. □

Треугольные тождества

Теорема 13.1. *(Треугольные тождества) Пусть $F \dashv G$, η и ε – единица и коединица сопряжения.*

Тогда справедливы треугольные тождества

$$
\begin{tikzcd}
& GFGa \arrow[dr, "G\varepsilon_a"] & \\
Ga \arrow[ur, "\eta_{Ga}"] \arrow[rr, equal, "id_{Ga}"'] & & Ga
\end{tikzcd}
$$

и

$$
\begin{tikzcd}
& FGFx \arrow[dr, "\varepsilon_{Fx}"] & \\
Fx \arrow[ur, "F\eta_x"] \arrow[rr, equal, "id_{Fx}"'] & & Fx
\end{tikzcd}
\tag{71}
$$

Доказательство. В силу двойственности достаточно доказать только одно из них. Докажем (71):

$$\mathrm{id}_{Fx} = \varphi^{-1}_{x,Fx}\left(\varphi_{x,Fx}\left(\mathrm{id}_{Fx}\right)\right) = \varphi^{-1}_{x,Fx}\left(\eta_x\right)$$

– это верхняя композиция в (71). □

Достаточные условия сопряженности

Теорема 13.2. *Пусть*

$$F\colon X \to A$$

и

$$G\colon A \to X$$

– функторы,

$$\eta\colon id_X \Rightarrow GF$$

– естественное преобразование, причем η_x – универсальный отталкивающий объект в $(x \downarrow G)$ $\forall$ $x \in Ob\, X$.

Тогда $F \dashv G$, а η – единица сопряжения.

Доказательство. Нам понадобится диаграмма из доказательства прошлой теоремы:

$$\begin{tikzcd} & GFx \arrow[dd, dashed, no head, "GF"] \\ x \arrow[ur, "\eta_x"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & Ga \end{tikzcd} \tag{72}$$

Определим

$$\varphi_{x,a}\colon A(Fx, a) \to X(x, Ga)$$

как

$$\varphi_{x,a}(f) := (Gf)\eta_x.$$

Из того, что η_x – универсальный отталкивающий объект, следует, что $\varphi_{x,a}$ – биекция.

Докажем естественность. Пусть

$$\alpha\colon a \to a_1$$
$$\xi\colon x_1 \to x$$

Нам нужно доказать коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A(Fx, a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "A(F\xi,\alpha)"'] & X(x, Ga) \arrow[d, "X(\xi, G\alpha)"] \\ A(Fx_1, a_1) \arrow[r, "\varphi_{x_1,a_1}"'] & X(x_1, Ga_1) \end{tikzcd} \tag{73}$$

Пусть $f \in A(Fx, a)$. Тогда по диаграмме (72) получаем цепочку

$$x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} Ga$$

Далее, дописываем

$$x_1 \xrightarrow{\xi} x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} Ga \xrightarrow{G\alpha} Ga_1 \tag{74}$$

Это путь вправо и вниз на диаграмме (73). Добавим (74) путь, соответствующий пути вниз, а затем вправо на (73) (нижний путь на диаграмме ниже):

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\eta_{x_1}"'] & x \arrow[r, "\eta_x"] & GFx \arrow[r, "Gf"] & Ga \arrow[r, "G\alpha"] & Ga_1 \\ & GFx_1 \arrow[ur, "GF\xi"'] & & & \end{tikzcd} \tag{75}$$

Квадрат на (75) коммутативен в силу естественности η.

Таким образом, $\varphi_{x,a}$ – естественная биекция и $F \dashv G$ сопряжены.

$$\varphi_{x,Fx}(\mathrm{id}_{Fx}) = \eta_x,$$

то есть η_x – единица сопряжения. $\square$

Теорема 13.3. *Пусть*

$$G: A \to X$$

– функтор, причем $\forall\ x \in Ob\,X$ *в* $(x \downarrow G)$ $\exists$ *универсальный отталкивающий объект, который мы обозначим через*[25]

$$\eta_x: X \to GF_0x,$$

Тогда отображение

$$F_0: Ob\,X \to Ob\,A$$

однозначно продолжается до функтора

$$F: X \to A$$

так, что η_x *становится естественным преобразованием. При этом* F *– левый сопряженный к* G.

Доказательство. Пусть

$$f: x \to y \text{ в } X.$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "f"] & GF_0x \\ y \arrow[r, "\eta_y"] & GF_0y \end{tikzcd} \tag{76}$$

На диаграмме (76) мы видим два объекта в категории запятой:

$$x \xrightarrow{\eta_x} GF_0x$$

[25]Здесь F_0x – просто соответствующий объект, а не функтор.

и

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"] & \\ y \arrow[r, "\eta_y"] & GF_0y \end{tikzcd}$$

причем первый из объектов, по условию, является универсальным отталкивающим объектом.

Тогда $\exists$ единственный морфизм

$$g\colon\ F_0x\ \to\ F_0y$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "f"] & GF_0x \arrow[d, dashed, "Gg"'] \\ y \arrow[r, "\eta_y"] & GF_0y \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Положим

$$Fx \coloneqq F_0x$$
$$Ff \coloneqq g$$

Тогда F – функтор, а η – естественное преобразование.

Если

$$f\colon\ x\ \to\ y$$
$$h\colon\ y\ \to\ z$$

то

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "f"] & GFx \arrow[d, "GFf"] \arrow[dd, bend left=60, "G(F(gf))"] \\ y \arrow[r, "\eta_y"] \arrow[d, "h"] & GFy \arrow[d, "GFh"] \\ z \arrow[r, "\eta_z"] & GFz \end{tikzcd}$$

(F сохраняет композицию).

$F \dashv G$ по теореме 13.2. $\square$

Теоремой 13.3 мы неявно пользовались, когда определяли свободную группу $\mathcal{F}(X)$:

$$X \xrightarrow{\quad i \quad} U\mathcal{F}(X)$$

Здесь

$$U\colon\ \mathrm{Grp}\ \to\ \mathrm{Sets}$$

– забывающий функтор. Если у нас есть отображение

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\varphi"] & & U\mathcal{F}(X) \\ & UG & \end{tikzcd}$$

то $\exists!$

$$\overline{\varphi}\colon\ \mathcal{F}(X)\ \to\ G$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & U\mathcal{F}(X) \arrow[dl, dashed, "U\overline{\varphi}"] \\
& UG &
\end{tikzcd} \tag{77}$$

коммутативна. Таким образом, i – универсальный отталкивающий объект в $(X\downarrow U)$.

Коединица

$$\epsilon_G\colon\ \mathcal{F}(UG)\ \to\ G$$

Это вычисление выражения

$$g_1^{\gamma_1}\dots g_s^{\gamma_s}\ \text{в}\ G,$$

где $\gamma_i\in\{\pm1\}$, а g_i – символы элементов из G.

Выпишем явно[26]

$$\varphi_{X,G}\colon\ \mathrm{Grp}\left(\mathcal{F}(X),G\right)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sets}(X,UG).$$

Пусть

$$f\colon\ \mathcal{F}(X)\ \to\ G$$

– гомоморфизм групп. Тогда

$$\varphi_{X,G}(f)=(Uf)i_X.$$

Тогда

$$\varepsilon_G=\varphi^{-1}_{UG,G}\left(\mathrm{id}_{UG}\right)$$

определяется через

$$\begin{tikzcd}
UG \arrow[rr, "i_{UG}"] \arrow[dr, equal] & & U\mathcal{F}(UG) \arrow[dl, "U\varepsilon_G"] \\
& UG &
\end{tikzcd}$$

Теорема 13.4. *Пусть*

$$F\colon\ X\ \to\ A$$

и

$$G\colon\ A\ \to\ X$$

– функторы,

$$\varepsilon\colon\ GF\ \Rightarrow\ id_A$$

и

$$\eta\colon\ id_X\ \Rightarrow\ GF$$

[26]Здесь φ связано с сопряжением, а не из диаграммы (77).

– естественные преобразования, причем

$$\begin{aligned}(\varepsilon F)(F\eta) = id_F\\ (G\varepsilon)(\eta G) = id_G\end{aligned} \tag{78}$$

(то есть выполнены треугольные тождества). Тогда $F \dashv G$, а ε и η – коединица и единица сопряжения.

Доказательство. Положим
$$\varphi_{x,a}(f) \coloneqq (Gf)\,\eta_x$$
для $\forall\ f \in A(Fx,a)$,
$$\psi_{x,a}(g) \coloneqq \varepsilon_a\,(Fg)$$
для $\forall\ g \in X(x,Ga)$.

Изобразим треугольные тождества (78):

$$\begin{tikzcd} & FGFx \arrow[dr, "\varepsilon_{Fx}"] & \\ Fx \arrow[ur, "F\eta_x"] \arrow[rr, equal] & & Fx \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & GFGa \arrow[dr, "G\varepsilon_a"] & \\ Ga \arrow[ur, "\eta_{Ga}"] \arrow[rr, equal] & & Ga \end{tikzcd}$$

Применим к

$$\begin{tikzcd} & a \\ x \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd}$$

φ. Получаем

$$\begin{tikzcd} & & Ga \\ x \arrow[r, "\eta_x"] & GFx \arrow[ur, "Gf"] & \end{tikzcd}$$

Применим к выражению выше ψ. Получим

$$\begin{tikzcd} & & FGa \arrow[dr, "\varepsilon_a"] & \\ Fx \arrow[r, "F\eta_x"] & FGFx \arrow[ur, "FGf"] & & a \end{tikzcd}$$

Итого

$$\begin{tikzcd} & & FGa \arrow[dr, "\varepsilon_a"] & \\ Fx \arrow[r, "F\eta_x"] \arrow[rrr, bend right, "\psi_{x,a}(\varphi_{x,a}(f))"'] & FGFx \arrow[ur, "FGf"] & & a \end{tikzcd} \tag{79}$$

Здесь нижний путь – это все примененные выше преобразования.

Допишем на диаграмме (79) следующий путь:

$$
\begin{tikzcd}
 & & FGa \arrow[dr, "\varepsilon_a"] & \\
Fx \arrow[r, "F\eta_x"] \arrow[rrr, bend right, "\psi_{x,a}(\varphi_{x,a}(f))"'] & FGFx \arrow[ur, "FGf"] \arrow[r, "\varepsilon_{Fx}"] & Fx \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}
$$

Кроме того, обозначим на диаграмме треугольнео тождество:

$$
\begin{tikzcd}
 & & FGa \arrow[dr, "\varepsilon_a"] & \\
Fx \arrow[r, "F\eta_x"] \arrow[rr, bend right, equal, "\text{треуг. т-во}"'] \arrow[rrr, bend right=60, "\psi_{x,a}(\varphi_{x,a}(f))"'] & FGFx \arrow[ur, "FGf"] \arrow[r, "\varepsilon_{Fx}"] & Fx \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}
$$

Таким образом, $\forall\ f \in A(Fx, a)$ выполнено

$$\psi_{x,a}\left(\varphi_{x,a}(f)\right) = f.$$

Аналогично,

$$\varphi_{x,a}\psi_{x,a} = \mathrm{id}_{X(x,Ga)}.$$

То есть $\varphi_{x,a}$ – биекция.

Естественность $\varphi_{x,a}$ с таким определением проверели в теореме 13.2. Таким образом, $F \dashv G$. □

Функтор с разными левым и правым сопряженными

Забывающий функтор

$$U:\ \mathrm{Top}\ \mathrm{Sets}$$

имеет разные левый F и правый G сопряженные:

$$
\begin{tikzcd}
 & UFX \arrow[dd, dashed, "Uf"] \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & UT
\end{tikzcd}
$$

$\exists$ единственное непрерывное отображение

$$f:\ FX\ \to\ T,$$

где T – некоторое топологическое пространство. Здесь FX – это X с дискретной топологией.

В обратную сторону, правый сопряженный

$$\mathrm{Sets}\,(UT, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}\,(T, GX)$$

$$\begin{tikzcd} UT \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & UGX \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\exists!$ отображение

$$f: T \to GX.$$

GX – это X с топологией $\{\varnothing, X\}$ (все точки склеены).

Лекция 14. Критерий эквивалентности категорий. (Ко)рефлексивные подкатегории, (ко)рефлекторы. Сохранение правыми сопряжёнными функторами пределов и мономорфизмов

Критерий эквивалентности категорий

Определение. Говорят, что категории X и A *эквивалентны*, если $\exists$ функторы

$$F\colon X \to A$$

и

$$G\colon A \to X$$

такие, что

$$FG \cong \mathrm{id}_A, \quad GF \cong \mathrm{id}_X. \tag{80}$$

Обсудим, чем понятие эквивалентности категорий отличается от понятия изоморфизма категорий. В изоморфизме категорий в требовании (80) стоят неравенства. Другими словами, изоморфизм категорий – это обычный категорный изоморфизм в категории категорий (например, малых категорий). Как уже было сказано, в категории категорий есть дополнительная структура, то есть между морфизмами есть свои морфизмы (естественные преобразования). Поэтому неравенства мы можем ослабить до изоморфизма (80).

Определение. Говорят, что функтор G – *полный* (*full*), если он сюръективен на hom-множествах, то есть $\forall\ a,b \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{A}$, $\forall\ g \in X(Ga,Gb)$ $\exists\ f \in A(a,b)$ такое, что

$$Gf = g.$$

Определение. Говорят, что функтор G – *унивалентный* (*faithful*), если он инъективен на hom-множествах (= разные морфизмы переводит в разные).

В начале семестра мы формулировали следующий критерий.

Теорема 14.1. *(Критерий эквивалентности) Функтор*

$$G\colon A \to X$$

задает эквивалентность категорий A и X (к нему $\exists$ соответствующий функтор $F\colon X \to A$) $\iff$ G полный, унивалентный и $\forall\ x \in Ob\,X$ $\exists\ a \in Ob\,A$ такое, что

$$Ga \cong x.$$

Определение. Говорят, что функторы

$$X \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} A$$

задают *сопряжение-эквивалентность* категорий X и A, если $F \dashv G$ и единица

$$\eta\colon \mathrm{id}_X \Rightarrow GF$$

и коединица

$$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_A$$

являются изоморфизмами соответствующих функторов.

Докажем следующий критерий.

Теорема 14.2. *Пусть*

$$G\colon A \to X$$

– функтор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *G можно включить в сопряжение-эквивалентность $F \dashv G$, где*
$$F\colon X \to A;$$
2. *G создает эквивалентность категорий;*
3. *G – полный, унивалентный и $\forall\ x \in Ob\,X\ \exists\ a \in Ob\,A$ такое, что*
$$Ga \cong x.$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ очевидно.

$2 \Rightarrow 3$ Известно, что

$$FG \cong \mathrm{id}_A.$$

Пусть даны два морфизма

$$a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} FGa \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, shift right, "FGg"'] \arrow[d, shift left, "FGf"] & a \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ FGb \arrow[r, "\sim"'] & b \end{tikzcd} \tag{81}$$

Эта диаграмма коммутативна в силу естественности. Стрелки, соответствующие на (81) изоморфизмам, мы можем направить в другую сторону. Дадим названия этим стрелкам на (81):

$$\begin{tikzcd} FGa \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, shift right, "FGg"'] \arrow[d, shift left, "FGf"] & a \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ FGb \arrow[r, "\varepsilon_b"'] & b \end{tikzcd}$$

Тогда

$$f = \varepsilon_b(FGf)\varepsilon_a^{-1},$$
$$g = \varepsilon_b(FGf)\varepsilon_a^{-1}$$

Если

$$Gf = Gg,$$

то и

$$f = g.$$

Таким образом, G унивалентен. Аналогично получаем, что F унивалентен.

Докажем, что G – полный. Пусть

$$h\colon\ Ga \ \to\ Gb.$$

Определим

$$f = \varepsilon_b(Fh)\varepsilon_a^{-1}.$$

Получаем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} FGa \arrow[r, "\varepsilon_a", "\sim"'] \arrow[d, "Fh"] & a \arrow[d, "f"'] \\ FGb \arrow[r, "\varepsilon_b", "\sim"'] & b \end{tikzcd}$$

коммутативна. С другой стороны, диаграмма естественности для f

$$\begin{tikzcd} FG \arrow[r, "\varepsilon_a", "\sim"'] \arrow[d, "FGf"] & a \arrow[d, "f"'] \\ FGb \arrow[r, "\varepsilon_b", "\sim"'] & b \end{tikzcd}$$

Отсюда

$$FGf = Fh$$

и

$$Gf = h,$$

так как F – унивалентен. Таким образом, G – полный.

Так как

$$x \cong GFx,$$

то любой объект из X изоморфен некоему объекту вида Ga, где $a \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{A}$.

$3 \Rightarrow 1$ Обозначим через F_0x такой объект, что

$$GF_0x \cong x,$$

а через

$$\eta_x\colon\ x \xrightarrow{\ \sim\ } GF_0x$$

соответствующий изоморфизм.

Докажем, что η_x – универсальный отталкивающий объект в категории запятой $(x \downarrow G)$. Кроме того, в этой категории запятой есть морфизмы

$$g\colon\ x\ \mapsto\ Ga$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "\eta_x"] \arrow[dr, "Ga"'] & & GF_0x \arrow[dl, dashed, "Gf"] \\ & Ga & \end{tikzcd}$$

Заметим, что η_x – изоморфизм, а G – биекция на hom-множествах. Поэтому диаграма выше задает биекцию между $g \in X(x, Ga)$ и $f \in A(F_0x, a)$.

Отсюда для любого объекта $g \in (x \downarrow G)$ $\exists$ единственный морфизм

$$f : \eta_x \to g.$$

По теореме из прошлой лекции, $\exists$ левый сопряженный функтор

$$F : X \to A$$

такой, что

$$Fx = F_0x \ \forall\ x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{X},$$

и η_x – единица этого сопряжения.

Рассмотрим треугольное тождество. Применим к коединице функтор G:

$$\begin{tikzcd} & GFGa \arrow[dr, "G\varepsilon_a"] & \\ Ga \arrow[ur, "\eta_{Ga}"] \arrow[rr, equal] & & Ga \end{tikzcd}$$

Здесь η_{Ga} – изоморфизм, нижний морфизм – тождественный. Тогда все $G\varepsilon_a$ – изоморфизмы.

Покажем, что ε_a – тоже изоморфизм. Пусть

$$g = (G\varepsilon_a)^{-1}$$

$$g : Ga \to GFGa.$$

G – полный, поэтому $\exists$ f такое, что

$$Gf = g.$$

Применим G к $\varepsilon_a f$:

$$G(\varepsilon_a f) = (G\varepsilon_a)Ga = (G\varepsilon_a)g = \mathrm{id}_{Ga}.$$

Аналогичным образом в другую сторону получаем, что

$$G(f\varepsilon_a) = \mathrm{id}_{GFGa}.$$

Так как G унивалентен, то

$$\varepsilon_a f = \mathrm{id}_a,$$

$$f\varepsilon_a = \mathrm{id}_{FGa}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_A$$

– изоморфизм. $\square$

Пусть $F \dashv G$ – сопряжение-эквивалентность. Тогда $G \dashv F$, где ε^{-1} – единица, а η^{-1} – коединица этого сопряжения. Для доказательства этого факта воспользуемся треугольными тождествами:

$$\begin{tikzcd} & FGFx \arrow[dr, "\varepsilon_{Fx}"] & \\ Fx \arrow[ur, "F\eta_x"] \arrow[rr, equal] & & Fx \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & GFGa \arrow[dr, "G\varepsilon_a"] & \\ Ga \arrow[ur, "\eta_{Ga}"] \arrow[rr, equal] & & Ga \end{tikzcd}$$

откуда, направляя в обратную сторону, получаем

$$\begin{tikzcd} & GFGa \arrow[dr, "\eta^{-1}_{Ga}"] & \\ Ga \arrow[ur, "G\varepsilon^{-1}_a"] \arrow[rr, equal] & & Ga \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & FGFx \arrow[dr, "F\eta^{-1}_x"] & \\ Fx \arrow[ur, "\varepsilon^{-1}_{Fx}"] \arrow[rr, equal] & & Fx \end{tikzcd}$$

Это треугольный тождества для $G \dashv F$.

(Ко)рефлективная подкатегория, (ко)рефлектор

Определение. Подкатегория C в категории D называется *рефлективной* (соответственно, *корефлективной*), если функтор вложения

$$C \to D$$

имеет левый (соответственно, правый) сопряженный, называемый *рефлектором* (*корефлектором*).

Пример. $\mathrm{Ab} \subset \mathrm{Grp}$. Рефлектор

$$G \mapsto G/[G,G].$$

Единица сопряжения

$$G \twoheadrightarrow G/[G,G] \tag{82}$$

Сопряженный функтор здесь есть, так как если есть абелева группа A, то любой гомоморфизм в A однозначно пропускается через фактор-группу по коммутанту:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & G/[G,G] \arrow[dl, dashed] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(82) – универсальный отталкивающий объект в категории $(G \downarrow U)$, где $G \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Grp}$,

$$U : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$$

– функтор вложения.

Теорема 14.2 позволяет выделить класс категорий, которые автоматически являются рефлективными.

Следствие. (Из критерия эквивалентности) Если C – полная подкатегория в D и $\forall\ d \in \mathrm{Ob\,D}\ \exists\ c \in \mathrm{Ob\,C}$ такой, что
$$d \cong c,$$
то C рефлективна и эквивалентна D.

Доказательство. Функтор вложения $C \subseteq D$ полный и унивалентный и $d \cong c$. □

Определение. *Скелет категории C* – полная подкатегория в C, состоящая из представителей всех классов изоморфных объектов.

Скелет категории эквивалентен всей категории C.

Правые сопряженные функторы сохраняют пределы и мономорфизмы

Теорема 14.3. *Пусть у функтора*
$$G:\ A\ \to\ X$$
$\exists$ левый сопряженный. Тогда G сохраняет все пределы, который $\exists$ в A, и переводит мономорфизмы в мономорфизмы.

Доказательство. Пусть
$$T:\ J\ \to\ A$$
– функтор,
$$\alpha_j:\ a\ \to\ a_j$$
– предельный конус. Докажем, что
$$G\alpha_j:\ Ga\ \to\ Ga_j$$
– предельный конус функтора
$$GT:\ J\ \to\ X.$$
Естественная биекция задает биекцию между конусами
$$x\ \to\ Ga_j$$
и
$$Fx\ \to\ a_j.$$
$$\begin{tikzcd} A(Fx,a_j) \arrow[r, "\sim"] & X(x,Ga_j) \\ A(Fx,a) \arrow[u, "A(Fx,\alpha_j)"] \arrow[r, "\sim"] & X(x,Ga) \arrow[u, "X(x,G\alpha_j)"'] \end{tikzcd} \tag{83}$$
Если
$$\beta_j:\ x\ \to\ Ga_j$$

– конус, то ему соответствует конус

$$\gamma_j\colon\ Fx \to a_j.$$

$\exists$ единственное

$$f\colon\ Fx \to a$$

такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[rr, "\gamma_j"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & & a_j \\ & a \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd} \tag{84}$$

коммутативна.

Поэтому $\exists!$

$$g\colon\ x \to Ga$$

такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr, "g"'] & & Ga_j \\ & Ga \arrow[ur, "G\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Действительно, отметим, что во что переходит на диаграмме (83):

$$\begin{tikzcd} \gamma_j \arrow[r, mapsto] & \beta_j \\ f \arrow[u] \arrow[r, mapsto] & g \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Если бы у нас было 2 g, то им бы соответствовало 2 f, и на (84) их бы тоже было два (а там естественная биекция).

Таким образом, G сохраняет пределы. Пусть теперь

$$m\colon\ a \to b$$

– мономорфизм в A. Пусть у нас есть морфизмы f и g

$$x \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Ga \xrightarrow{Gm} Gb \tag{85}$$

такие, что

$$(Gm)f = (Gm)g.$$

Применяя к (85) функтор F, получим

$$Fx \overset{Ff}{\underset{Fg}{\rightrightarrows}} FGa \xrightarrow{FGm} FGb$$

Применим к диаграмме коединицу:

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & FGa \arrow[r, "FGm"] \arrow[d, "\varepsilon_a"] & FGb \arrow[d, "\varepsilon_b"] \\ & a \arrow[r, "m"] & b \end{tikzcd}$$

Тогда

$$\varepsilon_b (FGm) (Ff) = \varepsilon_b (FGm) (Fg),$$

откуда

$$m\varepsilon_a(Ff) = m\varepsilon_a(Fg),$$

и в силу того, что m – мономорфизм, получаем

$$\varepsilon_a(Ff) = \varepsilon_a(Fg).$$

ε_a – универсальный притягивающий объект в категории запятой $(F \downarrow a)$, то есть

$$f = g.$$

По-другому,

$$\varphi^{-1}_{x,a}(f) = \varphi^{-1}_{x,a}(g),$$

откуда

$$f = g.$$

$\square$

Лекция 15. Универсум. Теорема Фрейда о сопряженном функторе. (Ко)порождающие множества объектов. Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте

Универсум Гротендика

В начале курса мы сказали, что множества могут быть большими и малыми. Малые множества – это множества, которые принадлежат универсуму, набору малых множеств. Ранее мы не накладывали никаких условий на то, что считать универсумом.

Определение. *Универсумом Гротендика* называется множество U со следующими свойствами:

1. из $x \in u \in U$ следует, что $x \in U$;
2. из $u, v \in U$ следует, что $\{u, v\} \in U$;
3. из $x \in U$ следует, что множество всех подмножеств x
$$2^x = \mathcal{P}x \in U,$$
и объединение
$$\bigcup_{y \in x} y \in U.$$

Иногда в определение выше добавляют также следующие требования:

4. из того, что $u \in U$, $v \in U$, следует, что
$$(u, v) \in U,$$
$$u \times v = \{(a, b) \,|\, a \in u,\, b \in v\} \in U;$$
5. $\{0, 1, 2, \ldots\} \in U$;
6. если
$$f : a \to b$$
сюръективно, причем $a \in U$, $b \subseteq U$, то $b \in U$.

Теорема об универсальном отталкивающем объекте

Теорема 15.1. *(Об универсальном отталкивающем объекте) Пусть в категории D малые* hom*-множества и $\exists$ все малые пределы.*

Тогда в D $\exists$ универсальный отталкивающий объект $\iff$ в D $\exists$ малое <u>*разрешающее*</u> *множество объектов Q: $\forall\ d \in Ob\, D$ $\exists$ $q \in Q$ и морфизм $q \to d$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно, так как если c – универсальный отталкивающий объект, то

$$Q = \{c\}$$

– разрешающее множество.

$\Leftarrow$ Рассмотрим

$$u := \prod_{q \in Q} q.$$

Тогда $\forall\ d \in \operatorname{Ob} \mathrm{D}$

$$\exists \prod_{q \in Q} q \xrightarrow{\pi_q} q \longrightarrow d,$$

то есть $\exists$ стрелки $u \to d$.

Рассмотрим уравнитель всех стрелок из $D(u,u)$. Пусть c – объект, соответствующий этому уравнителю:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] & u \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=5, "\vdots"'] & u \end{tikzcd}$$

α – мономорфизм, так как уравнитель. Получается, из c тоже есть стрелка в любой объект. Надо понять, что она одна. Предположим, что это не так:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

Пусть

$$h = \operatorname{eq}(f,g).$$

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "h"] & c \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

h – также мономорфизм. Отсюда есть стрелка $u \to w$:

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[r, "h"] & c \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\alpha"] & d \\ c \arrow[r, "\alpha"] & u \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, equal] & u & \end{tikzcd}$$

Получаем, что

$$\alpha h \beta \alpha = \alpha,$$

так как α – уравнитель таких стрелок. Отсюда

$$h(\beta\alpha) = \mathrm{id}_c.$$

Тогда

$$h(\beta\alpha)h = h,$$

откуда

$$(\beta\alpha)h = \mathrm{id}_w.$$

Таким образом, h – изоморфизм. Из того, что

$$fh = gh,$$

следует, что

$$f = g.$$

И c действительно универсальный отталкивающий объект.

□

Достаточные условия существования пределов в категории запятой

Лемма 15.1. *Пусть*

$$G : A \to X$$

– функтор, $x \in Ob\, X$. Тогда забывающий функтор

$$U : (x \downarrow G) \to A,$$

$$x \to Ga \mapsto a$$

создает все те пределы, которые функтор G сохраняет, то есть если

$$T : Y \to (x \downarrow G)$$

– функтор, причем у UT есть предел, который сохраняет G, то предельный конус

$$\alpha_j : a \to UT_j$$

однозначно подымается до конуса

$$\beta_j : \gamma \to T_j,$$

где

$$U\beta_j = \alpha_j,$$

причем β_j – предельный конус.

Следствие. (Лемма 15.1) Если в A $\exists$ малые пределы, а G непрерывен (= сохраняет малые пределы), то $(x \downarrow G)$ полна в малом.

Доказательство. (Лемма 15.1) Пусть

$$T : Y \to (x \downarrow G).$$

$$x \xrightarrow{T_j} GUT_j$$

Пусть

$$\alpha_j : a \to UT_j$$

– предельный конус,

$$Ga \overset{G\alpha_j}{\to} GUT_j$$

– тоже предельный конус. В нижней части диаграммы

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[rr, "G\alpha_j"] & & GUT_j \\
& {} \arrow[ur, "T_j"] &
\end{tikzcd}$$

изображен конус, так как T – функтор в категорию запятой. Тогда $\exists$ единственный морфизм

$$\gamma :\ x \ \to \ Ga$$

такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[rr, "G\alpha_j"] & & GUT_j \\
& x \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "T_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Тогда α_j становятся компонентами конуса

$$\gamma \ \to \ T_j.$$

Докажем, что это предельный конус в $(x \downarrow G)$. Пусть

$$\psi_j :\ \varphi \ \to \ T_j$$

– другой конус:

$$\begin{tikzcd}
Gb \arrow[drrr, bend left, "G\psi_j"] & & & \\
& Ga \arrow[rr, "G\alpha_j"] & & GUT_j \\
& & x \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "T_j"'] \arrow[uull, bend left] &
\end{tikzcd}$$

$\exists$ единственный морфизм

$$\theta :\ b \ \to \ G$$

такой, что следующий треугольник коммутативен $\forall \ j \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{J}$:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\psi_j"] \arrow[dr, dashed, "\theta"] & & UT_j \\
& a \arrow[ur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd} \tag{86}$$

$$\begin{tikzcd}
Gb \arrow[drrr, bend left, "G\psi_j"] \arrow[dr, dashed, "G\theta"] & & & \\
& Ga \arrow[rr, "G\alpha_j"] & & GUT_j \\
& & x \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "T_j"'] \arrow[uull, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$(G\alpha_j)(G\theta)\varphi = (G\alpha_j)\gamma \ \forall \ j,$$

и, так как $G\alpha_j$ – предельный конус, то

$$(G\theta)\varphi = \gamma.$$

Таким образом,

$$\theta : \varphi \to \gamma$$

– единственный морфизм такой, что диаграмма (86) коммутативна. Соответствующая диаграмма в категории $(x \downarrow G)$:

$$\begin{tikzcd} \varphi \arrow[rr, dashed, "\theta"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & \gamma \arrow[dl, "\alpha_j"] \\ & T_j & \end{tikzcd}$$

□

Теорема Фрейда о сопряженном функторе

Теорема 15.2. *(Фрейда о сопряженном функторе) Пусть в категории A малые* hom*-множества, A – полна в малом, а*

$$G : A \to X$$

– функтор. Тогда у G $\exists$ левый сопряженный $\iff$ G сохраняет малые пределы и $\forall \ x \in Ob\, X$ $\exists$ малое множество индексов I и стрелок

$$Q = \{h_i : x \to Gq_i \,|\, i \in I\},$$

где $q_i \in A$, такое, что $\forall$ морфизма

$$g : x \to Ga$$

$\exists$ морфизм

$$f : q \to a$$

для некоторой стрелки $h_i \in Q$ такой, что

$$g = (Gf)h_i,$$

то есть что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & Ga \\ x \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & Gq_i \arrow[uu, dashed, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Для каждой категории запятой $(x \downarrow G)$ проверим условия теоремы 15.1 об универсальном отталкивающем объекте.

В силу следствия из леммы 15.1 $(x \downarrow G)$ полна в малом. Hom-множества малые, так как это стрелки из A. Разрешающее множество $\exists$ по условию.

$\Rightarrow$ G как правый сопряженный функтор сохраняет пределы, положим

$$Q = \{\eta_x\}.$$

□

(Ко)порождающие множества объектов

Определение. Говорят, что множество Q *порождает* категорию C, если

$$\forall\ f, g :\ a \rightrightarrows b, \quad f \neq g$$

$\exists$ объект $q \in Q$ и морфизм

$$h :\ q \ \to\ a$$

такой, что

$$fh \neq gh.$$

Пример. $\{\{*\}\}$ – порождающее множество для Sets. Если

$$f, g :\ A \rightrightarrows B\ ,$$

$$f(x) \neq g(x)$$

для некоторого $x \in A$, то положим

$$h :\ \{*\}\ \to\ A$$

$$h(*) = x.$$

Определение. Говорят, что Q *копорождает* категорию C, если

$$\forall\ f, g :\ a \rightrightarrows b, \quad f \neq g$$

$\exists$ $q \in Q$ и стрелка

$$h :\ b \ \to\ q$$

такие, что

$$hf \neq fg.$$

Пример. Множество, состоящее из произвольного двухэлементного множества, копрождает Sets.

Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте

Теорема 15.3. *(Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте) Пусть D – категория с малыми hom-множествами, полная в малом, в которой $\exists$ пересечения всех семейств подобъектов и $\exists$ малое копорождающее множество Q. Тогда в D $\exists$ универсальный отталкивающий объект.*

Доказательство. Пусть r – пересечения всех подобъектов в $\prod\limits_{q\in Q} q$. Если $d \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{D}$, то $\exists$ не более одного морфизма

$$r \to d.$$

Действительно, пусть существуют два морфизма

$$f, g\colon\ r \rightrightarrows d$$

Рассмотрим их уравнитель ψ:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\psi"] & r \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

Заметим, что $\psi \in \mathrm{Mono}(D)$. Рассмотрим композицию

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\psi"] & r \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "i"] & d \\ & \prod\limits_{q\in Q} q & \end{tikzcd}$$

$i\psi$ также задает подобъект в $\prod\limits_{q\in Q} q$. То есть $i \geq i\psi$, но r – пересечение, тогда $i\psi \geq i$, то есть i и ψ эквивалентны, и ψ – изоморфизм. Тогда из

$$f\psi = g\psi$$

следует, что

$$f = g.$$

То есть существует не более одного морфизма из r.

Пусть $d \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{D}$ – произвольный. Рассмотрим множество

$$\{h\colon\ d \to q_h \,|\, q_h \in Q\}.$$

Рассмотрим

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{q} q \arrow[d, "\varphi"] \\ d \arrow[r, "\gamma"] & \prod\limits_{h} q_h \end{tikzcd} \tag{87}$$

Здесь γ – единственный морфизм такой, что проекция π_h на q_h равна h:

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_h q_h \arrow[d, dashed, "\pi_h"] \\
d \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "h"'] & q_h
\end{tikzcd}$$

γ – мономорфизм, так как Q копорождающее, и если

$$a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} d \ , \quad f \neq g,$$

то $\exists$

$$h\colon d \to q_h$$

такое, что

$$hf \neq hg.$$

Но

$$h = \pi_h \gamma,$$

то есть

$$\gamma f \neq \gamma g.$$

Далее, φ задается следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
\prod_q q \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[dd, "\pi_{q_h}"] & \\
 & \prod_h q_h \arrow[dl] \\
g_h &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим пулбэк на (87):

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \prod_q q \arrow[d, "\varphi"] \\
d \arrow[r, "\gamma"] & \prod_h q_h
\end{tikzcd}$$

Тогда ζ – мономорфизм, а значит есть морфизм из r

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[r] & t \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \prod_q q \arrow[d, "\varphi"] \\
 & d \arrow[r, "\gamma"] & \prod_h q_h
\end{tikzcd}$$

Есть стрелка из r в d. $\square$

Лекция 16. Специальная теорема о сопряжённом функторе. Ab-категории. Нулевые морфизмы. Ядра, коядра

Замечание о функторе, создающем малые пределы

Напомним понятие копорождающего множества, введенное на прошлой лекции.

Определение. Говорят, что $Q \subseteq \mathrm{Ob\,A}$ – *копорождающее* множество для категории A, если

$$\forall\ a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

таких, что

$$f \neq g,$$

$\exists\ q \in Q$ и стрелка

$$h:\ b\ \to\ q$$

такая, что

$$hf \neq hg.$$

В прошлый раз мы доказали следующую теорему.

Теорема 15.3. *(специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте) Если в категории D есть малое копорождающее множество, пересечения всех семейств подобъектов, малые* hom-*множества и она полна в малом, то в D $\exists$ универсальный отталкивающий объект.*

Напомним еще одно определение.

Определение. Говорят, что функтор

$$F:\ A\ \to\ B$$

создает предел функтора

$$T:\ J\ \to\ A,$$

если из того, что у функтора

$$FT:\ J\ \to\ B$$

$\exists$ предел

$$b \xrightarrow{\beta_i} FT_j,$$

следует, что $\exists$ единственный конус

$$a \xrightarrow{\alpha_j} T_j$$

такой, что

$$Fa = b,$$

$$F\alpha_j = \beta_j,$$

причем конус α_j предельный.

Замечание 16.1. Если B полна в малом, F создает малые пределы, то F сохраняет малые пределы.

Доказательство. Пусть

$$T : J \to A$$

–функтор, J – малая категория,

$$\alpha_j : a \to T_j$$

– предельный конус.

Пусть

$$\beta_j : b \to FT_j$$

– предельный конус для FT. Так как F создает малые пределы, то $\exists!$ конус

$$\gamma_j : c \to T_j$$

такой, что

$$F\gamma_j = \beta_j,$$

$$Fc = b,$$

причем γ_j – предельный для T. Отсюда $\exists$

$$\theta : a \xrightarrow{\sim} c$$

такой, что

$$\alpha_j = \gamma_j \theta$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "\theta"'] \arrow[drr, "\alpha_j"] & & \\ & c \arrow[r, "\gamma_j"'] & T_j \end{tikzcd}$$

Тогда

$$F\alpha_j = (F\gamma_j)(F\theta) = \beta_j(F\theta)$$

– снова изоморфизм, то есть конус $F\alpha_j$ тоже предельный для FT. □

Специальная теорема о сопряженном функторе

Теорема 16.1. *(SAFT, специальная теорема о сопряженном функторе) Пусть*

$$G : A \to X,$$

причем в X и в A малые hom*-множества, в A $\exists$ пересечения всех семейств подобъектов, в A $\exists$ малое копорождающее множество, A полна в малом. Тогда у G $\exists$ левый сопряженный*

$$F : X \to A$$

$\iff$ *G сохраняет малые пределы и пересечения семейств подобъектов.*

Лемма 16.1. *(о подобъектах в категории $(x \downarrow G)$) Пусть G сохраняет*[27] *малые пределы,*

$$G\colon A \to X,$$

A полна в малом. Тогда забывающий функтор

$$(x \downarrow G) \to A,$$

$$x \to Ga \mapsto a$$

сохраняет и отражает мономорфизмы.

Доказательство. Очевидно, что отражает, так как все морфизмы в $(x \downarrow G)$ на самом деле живут в A:

$$\begin{tikzcd} & Ga \arrow[dd, "Gf"] \\ x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Gb \end{tikzcd}$$

$f \in \mathrm{Mono}(A)$, если и только если его ядерная пара – это пара тождественных морфизмов $(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a)$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

Пусть ядерная пара – это $(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a)$ и

$$fg = fh.$$

Тогда $\exists\ t$ такой, что

$$g = \mathrm{id}_a t$$
$$h = \mathrm{id}_a t$$

то есть

$$g = h = t.$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\ & a \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & a \arrow[d, "f"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

В обратную сторону аналогично.

У нас была лемма (лемма 15.1), что U создает те пределы, которые G сохраняет, то есть U сохраняет малые пределы и переводит мономорфизмы в мономорфизмы. □

[27] В ходе доказательства лектор немного исправляет формулировку леммы. Здесь приведен уже исправленный вариант.

Доказательство. (Теорема 16.1) $\forall\ x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{X}$ по уже доказанному в $(x \downarrow G)$ $\exists$ все малые пределы и пересечения всех семейств подобъектов.

Пусть Q – малое копорождающее множество в A. Рассмотрим множество

$$Q' = \{x \ \to \ Gq \,|\, q \in Q\}\,.$$

Тогда Q' – копорождающее множество в $(x \downarrow G)$. Пусть

$$f, g:\ \alpha \rightrightarrows \beta,$$

$$f \neq g,$$

– морфизмы из категории запятой такие, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
Ga \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

Так как f и g на самом деле «сидят» в категории A, их можно разделить при помощи некоторого морфизма, то есть $\exists\ q \in Q$ и

$$h:\ b \ \to \ q$$

такие, что

$$hf \neq hg$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & & \\
Ga \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] & Gb \arrow[r, "Gh"] & Gq
\end{tikzcd}$$

Положим

$$\gamma := (Gh)\beta$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] & & \\
Ga \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] & Gb \arrow[r, "Gh"] & Gq
\end{tikzcd}$$

Тогда $\gamma \in \mathrm{Ob}\,(x \downarrow G)$,

$$h:\ \beta \ \to \ \gamma.$$

Таким образом, Q' – копорождающее.

Так как

$$Q' = \bigcup_{q \in Q} X(x, Gq),$$

оно малое. Применяем специальную теорему 15.1 об универсальном отталкивающем объекте. $\square$

Ab-категории

Мы уже говорили, что часто так бывает, что hom-множества в какой-то категории являются объектами из другой категории. Это так называемые обогащенные категории (строгое определение будет дано позднее в курсе).

Примером обогащенной категории является, например, категория всех (малых[28]) категорий. Там множество морфизмов между объектами – это категория функторов между объектами, и существуют морфизмы между морфизмами – естественные преобразования над функторами. Получается, категория малых категорий обогащена над категорией малых категорий, то есть объекты сами являются малыми категориями. Другим примером обогащенной категории является категория абелевых групп или, более общо, категория модулей над кольцом. Здесь гомоморфизмы абелевых групп (модулей) можно складывать, то есть они обогащены над категорией абелевых групп.

Определение. Категория C называется *Ab-категорией*, если все Hom-множества $C(a,b)$ являются абелевыми группами, причем композиция

$$C(b,c)\times C(a,b) \ \to \ C(a,c),$$

$$(q,f) \ \mapsto \ gf,$$

$\mathbb{Z}$-линейна по каждому аргументу.

Сразу же видно, что из a в b всегда есть нулевая стрелка $0 \in C(a,b)$. Стандартная техника показывает, что

$$0f = 0$$

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "0"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "0"] & & c \end{tikzcd}$$

и

$$f0 = 0$$

$$\begin{tikzcd} & b \\ a \arrow[ur, "f"] & \\ & c \arrow[ul, "0"] \arrow[uu, "0"'] \end{tikzcd}$$

Например,

$$\underbrace{(0+0)f}_{=0\cdot f} = 0\cdot f + 0\cdot f,$$

откуда

$$0f = 0.$$

[28]Аналогично для больших.

Определение. Пусть C не обязательно Ab-категория, но с нулевым (универсальный отталкивающий объект + универсальный притягивающий объект) объектом O.

Тогда *нулевым морфизмом*

$$0:\ a\ \to\ b$$

называется единственный морфизм, проходящий через O.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "0"] \arrow[dr] & & b \\ & O \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Тогда тоже выполнено

$$0f = 0, \quad f0 = 0$$

$\forall$ морфизма f.

Теорема 16.2. *Пусть z – объект в Ab-категории C. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *z – универсальный отталкивающий объект;*
2. *z – универсальный притягивающий объект;*
3. *z – нулевой объект;*
4. *$0_z = id_z$, где 0_z – нулевой объект $z \to z$;*
5. *$|C(z,z)| = 1$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 5$ очевидно, так как $\forall\ a \in \operatorname{Ob} C\ \exists!\ z \to a$, в том числе и для $a = z$.

$2 \Rightarrow 5$ и $3 \Rightarrow 5$ аналогично.

$5 \Rightarrow 4$ очевидно.

$3 \Rightarrow 1$ и $3 \Rightarrow 2$ очевидно.

Докажем $4 \Rightarrow 3$. Пусть

$$f:\ z\ \to\ a,$$

где $a \in \operatorname{Ob} C$. Тогда

$$f = f\mathrm{id}_z = f0_z = 0,$$

то есть $\exists$ и !. Получаем, что z – универсальный отталкивающий объект. Аналогично, z – универсальный притягивающий объект. □

Отсюда следует, что в Ab-категории с нулевым объектом понятия нулевого морфизма совпадают.

Ядро и коядро

Определение. Пусть C – Ab-категория или категория с нулевым объектом. Пусть

$$a \xrightarrow{f} b$$

– морфизм. Тогда *ядро* и *коядро* f определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ker f &:= \mathrm{eq}(f, 0) \\ \mathrm{coker}\, f &:= \mathrm{coeq}(f, 0) \end{aligned}$$

Условимся о следующих обозначениях:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & b \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & b \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] & \mathrm{Coker}\, f \end{tikzcd}$$

Определение. Понятия *образа* и *кообраза* f вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{im}\, f &= \ker(\mathrm{coker}\, f) \\ \mathrm{coim}\, f &= \mathrm{coker}(\ker f) \end{aligned}$$

Образ и кообраз устроены следующим образом:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker} f \arrow[r, tail] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coim}\, f"'] & b \arrow[r, two heads] & \mathrm{Coker}\, f \\ & \mathrm{Coim}\, f \arrow[r, dashed, "\bar f"'] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, tail, "\mathrm{im}\, f"'] & \end{tikzcd} \tag{88}$$

Предложение.

$$\ker(\mathrm{coker}(\ker f)) = \ker f,$$

$$\mathrm{coker}(\ker(\mathrm{coker}\, f)).$$

Доказательство. В силу двойственности достаточно доказать только первое утверждение.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, tail, "\ker f"] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coim}\, f"] & b \\ & d & \end{tikzcd}$$

Надо доказать, что

$$\ker(\mathrm{coim}\, f) = \ker f.$$

Так как

$$f(\ker f) = 0,$$

то $\exists\ h$ такое, что

$$f = h(\mathrm{coim}\, f)$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\ker f"] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{coim} f"] & b \\
& d \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Пусть

$$g:\ u\ \to\ a.$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\ker f"] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{coim} f"] & b \\
u \arrow[ur, "g"] & d \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Если

$$(\operatorname{coim} f)g = 0,$$

то

$$fg = h\,(\operatorname{coim} f)\,g = 0.$$

Обратно, если

$$fg = 0,$$

то

$$\exists\, t:\ u\ \to\ c$$

такое, что

$$g = (\ker f)\,t.$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\ker f"] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{coim} f"] & b \\
u \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[ur, "g"] & d \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$(\operatorname{coim} f)g = \operatorname{coker}(\ker f)(\ker f)t = 0\cdot t = 0.$$

Отсюда

$$(\operatorname{coim} f)\,g = 0 \iff fg = 0$$

и

$$\ker(\operatorname{coim} f) = \ker f.$$

□

Сформулируем утверждение, которое далее будет использоваться для доказательства того, что внизу диаграммы (88) стоит изоморфизм $\overline{f}$ и для доказательства свойств структурированности в абелевой категории.

Лемма 16.2. *Пусть C – либо категория с нулевым объектом, либо Ab-категория и в C существуют все ядра и коядра, f – морфизм.*

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "q"'] & \cdot \arrow[r, "coker\, f"] & \cdot \\
& \cdot \arrow[u, "m=im\, f"'] &
\end{tikzcd}$$

Если

$$f = m'q',$$

где m' – ядро, то $\exists$ единственный морфизм t, делающий диаграмму ниже коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed, "t"] \\
\cdot \arrow[r, "m'"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Если в C $\exists$ уравнители и все мономорфизмы являются ядрами, то q – эпиморфизм.

Лекция 17. Аддитивные категории. Аддитивные функторы. Абелевы категории. Точные последовательности. Точные функторы

Лемма

Лемма 16.2. *Пусть C – либо категория с нулевым объектом, либо Ab-категория и в C существуют все ядра и коядра, Пусть*

$$f = mg,$$

где

$$m = Ker(coker\, f).$$

Тогда $\forall$ разложения

$$f = m'q',$$

где m' – ядро, $\exists$ единственный морфизм t, делающий диаграмму ниже коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "t"] \\ \cdot \arrow[r, "m'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

$$m = m't,$$
$$q' = tq.$$

Более того, если в C $\exists$ уравнители, а все мономорфизмы являются ядрами, то q – эпиморфизм.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & \cdot \arrow[d, "m"] & \\ \cdot \arrow[r, "m'"'] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{Coker}\, m'"] \arrow[d, "\mathrm{Coker}\, m = \mathrm{Coker}\, f"] & \cdot \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

так как

$$\mathrm{coker}\,(\ker(\mathrm{coker}\, g)) = \mathrm{coker}\, g$$
$$\ker(\mathrm{coker}\,(\ker g)) = \ker g.$$

Далее,

$$(\mathrm{coker}\, m')\, f = (\mathrm{coker}\, m')\, m'q' = 0.$$

Таким образом, $\exists$ r такой, что

$$\mathrm{Coker}\, m' = r(\mathrm{coker}\, f)$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & \cdot \arrow[d, "m"] & \\
\cdot \arrow[r, "m'"'] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{Coker}\, m'"] \arrow[d, "\mathrm{Coker}\, m = \mathrm{Coker}\, f"] & \cdot \\
& \cdot \arrow[ur, dashed, bend right, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Далее, применим

$$(\mathrm{Coker}\, m')\, m = (\mathrm{Coker}\, m')\, \mathrm{Ker}\, (\mathrm{Coker}\, f) = r\, (\mathrm{coker}\, f)\, \mathrm{Ker}\, (\mathrm{coker}\, f) = 0.$$

Отсюда $\exists\ t$ такое, что

$$m = m't$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dashed, "t"'] & \\
\cdot \arrow[r, "m'"'] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{Coker}\, m'"] \arrow[d, "\mathrm{Coker}\, m = \mathrm{Coker}\, f"] & \cdot \\
& \cdot \arrow[ur, dashed, bend right, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Подставляя, получим

$$f = m'q' = mq = m'tq.$$

Отсюда

$$q' = tq,$$

так как m' – мономорфизм.

Так как m' – моноформизм, t единственно.

Далее, пусть α и β таковы, что

$$\alpha q = \beta q.$$

Пусть

$$e = \mathrm{eq}(\alpha, \beta)$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, bend left, "q"] & & \\
\cdot \arrow[r, "e"] & \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "m"] & \cdot \\
& \cdot &
\end{tikzcd}$$

Тогда $\exists\ \gamma$ такой, что

$$q = e\gamma$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, bend left, "q"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & & \\
\cdot \arrow[r, "e"] & \cdot \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "m"] & \cdot \\
& \cdot &
\end{tikzcd}$$

Отсюда

$$f = mq = me\gamma,$$

где me – мономорфизм, а значит, по условию, и ядро. Отсюда $\exists\ t$ такой, что

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \cdot \arrow[dl, bend right, "t"'] \arrow[dr, "m"] & \\
& \cdot \arrow[ur, "e"'] & & \cdot
\end{tikzcd}$$

С одной стороны,

$$\gamma = tq,$$

с другой,

$$met = m,$$

так как $m \in \mathrm{Mono}$. Тогда

$$et = \mathrm{id}.$$

Домножим на e с правой стороны:

$$ete = e,$$

откуда

$$et = \mathrm{id},$$

так как $e \in \mathrm{Mono}$. Значит, $e \in \mathrm{Iso}$. Из

$$\alpha e = \beta e$$

следует, что

$$\alpha = \beta,$$

то есть $q \in \mathrm{Epi}$. □

Прямая сумма (бипроизведение)

Определение. *Прямой суммой* или *бипроизведением* объектов a и b Ab-категории C называют объект c вместе с морфизмами

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, shift left, "p_2"] & c \arrow[l, shift left, "i_2"] \arrow[r, shift left, "p_1"] & a \arrow[l, shift left, "i_1"]
\end{tikzcd}$$

такими, что

$$i_1p_1 + i_2p_2 = \mathrm{id}_c \tag{89}$$

$$p_1i_1 = \mathrm{id}_a, \quad p_2i_2 = \mathrm{id}_b \tag{90}$$

Сразу видно, что

$$i_1, i_2 \in \mathrm{Mono}(C)$$
$$p_1, p_2 \in \mathrm{Epi}(C)$$

Умножим (89) слева на p_2:

$$p_2i_1p_1 + p_2i_2p_2 = p_2$$

$$p_2 i_1 p_1 + p_2 = p_2$$

$$p_2 i_1 p_1 = 0,$$

откуда получаем, что

$$0 = p_2 i_1 p_1 i_1 = p_2 i_1.$$

Аналогично,

$$p_2 i_2 = 0.$$

Теорема 17.1. *Пусть a, b – объекты в Ab-категории. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *∃ произведения a и b;*
2. *∃ копроизведения a и b;*
3. *∃ прямая сумма a и b.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 3$ определим при помощи универсального свойства i_1 и i_2:

$$\begin{tikzcd}
& a \times b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
a & & b \\
& a \arrow[ul, equal] \arrow[ur, "0"] \arrow[uu, dashed, "i_1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \times b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
a & & b \\
& b \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, equal] \arrow[uu, dashed, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Равенства (90) выполнены по определению.

Рассмотрим

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 = 0 \cdot p_2 = p_1 = p_1 \mathrm{id}_{a\times b}.$$

Аналогично,

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2 \mathrm{id}_{a\times b}.$$

В силу универсального свойства произведения

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = \mathrm{id}_{a\times b}.$$

$3 \Rightarrow 1$ Пусть дана диаграмма прямой суммы

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, shift left, "p_2"] & c \arrow[l, shift left, "i_2"] \arrow[r, shift left, "p_1"] & a \arrow[l, shift left, "i_1"]
\end{tikzcd}$$

Покажем, что тогда существует произведение a и b. Рассмотрим объект d с морфизмами

$$d \xrightarrow{f_1} a \qquad d \xrightarrow{f_2} b$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, shift left, "p_2"] & c \arrow[l, shift left, "i_2"] \arrow[r, shift left, "p_1"] & a \arrow[l, shift left, "i_1"] \\
& d \arrow[ul, "f_2"] \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Надо показать, что существует единственный морфизм f

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, shift left, "p_2"] & c \arrow[l, shift left, "i_2"] \arrow[r, shift left, "p_1"] & a \arrow[l, shift left, "i_1"] \\ & d \arrow[ul, "f_2"] \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

такой, что композиция с p_1 дает f_1, а композиция с p_2 дает f_2. Если f существует, то

$$f = (i_1p_1 + i_2p_2)f = i_1f_1 + i_2f_2,$$

то есть он единственный.

Положим для f_1 и f_2

$$f = i_1f_1 + i_2f_2.$$

Тогда

$$p_1f = f_1, \quad p_2f = f_2.$$

$2 \Rightarrow 3$ $3 \Rightarrow 2$ по двойственности. □

Замечание 17.1. Обозначение для прямой суммы:

$$a \oplus b = a \times b = a \sqcup b.$$

Аддитивная категория. Аддитивный функтор

Определение. *Аддитивная категория* – это Ab-категория, в которой ∃ нулевой объект и бинарные[29] прямые суммы.

Теорема 17.2. *Пусть C – аддитивная категория,*

$$a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

– морфизмы. Определим

$$\Delta: \ a \ \to \ a \times a$$

и

$$\delta: \ b \times b \ \to \ b$$

через диаграммы ниже:

$$\begin{tikzcd} & a & \\ a \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[r, dashed, "\Delta"] & a \oplus a \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & \\ & a & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "\widetilde{i_1}"'] \arrow[dr, equal] & \\ b \oplus b \arrow[r, dashed, "\delta"] & b \\ b \arrow[u, "\widetilde{i_2}"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

[29] То есть участвует два объекта.

Определим морфизм (f,g) следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \\
a \oplus a \arrow[u, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[r, dashed, "(f,g)"] & b \oplus b \arrow[u, "\widetilde{p_1}"'] \arrow[d, "\widetilde{p_2}"] \\
a \arrow[r, "g"] & b
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$f + g = \delta(f,g)\Delta.$$

Доказательство. Вычислим

$$\delta(f,g)\Delta = \delta(f,g)\,(i_1p_1 + i_2p_2)\,\Delta =$$
$$= \delta(f,g)\,(i_1\mathrm{id}_a + i_2\mathrm{id}_a) = \delta\left(\widetilde{i_1}\widetilde{p_1} + \widetilde{i_2}\widetilde{p_2}\right)(f,g)(i_1 + i_2) =$$
$$= (\mathrm{id}_b\widetilde{p_1} + \mathrm{id}_b\widetilde{p_2})\,(f,g)\,(i_1 + i_2) = (\widetilde{p_1} + \widetilde{p_2})\,(f,g)(i_1 + i_2) =$$
$$= (fp_1 + gp_2)\,(i_1 + i_2) = f + g.$$

□

Итак, при наличии нулевого объекта операция + на Hom-множествах определена однозначно.

Определение. Функтор

$$F\colon\ A \ \to\ B$$

между Ab-категориями A и B называется *аддитивным*, если он является гомоморфизмом на всех Hom-множествах.

Из теоремы 17.2 следует, что если A и B – аддитивные категории, то F – аддитивный функтор

$\Longleftrightarrow$ F переводит всякую диаграмму прямой суммы в диаграмму прямой суммы

$\Longleftrightarrow$ F сохраняет бинарные произведения и универсальный притягивающий объект

$\Longleftrightarrow$ F сохраняет копроизведения и универсальный отталкивающий объект.

Если $F \dashv G$ сопряженные,

$$F\colon\ X \ \to\ A,$$
$$F\colon\ A \ \to\ X,$$

где A и X – аддитивные категории, то F и G – аддитивные, так как F сохраняет все копределы, а G – все пределы.

$$A(Fx,a) \xrightarrow{\ \sim\ } X(x,Ga)$$

– изоморфизм абелевых групп, так как композиция единицы и применения аддитивного функтора G.

Абелева категория

Определение. Аддитивная категория называется *абелевой*, если выполнены следующие аксиомы:

1. (Ab1) в C $\exists$ все ядра и коядра;

2. Все мономорфизмы в C – ядра, все эпиморфизмы – коядра.

Исторически (например, в известной статье Гротендика) понятие абелевой категории определялось по-другому. Приведенный выше вариант более современный и используется, например, Маклейном.

Упражнение 17.1. *Показать, что если в Ab-категории выполняется аксиома $(Ab1)$, то условие 2 определения выше эквивалентно аксиоме $(Ab2)$ для $\forall$ морфизма f.*

$$\begin{tikzcd}
Ker f \arrow[r, tail] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & b \arrow[r, two heads] & Coker\, f \\
Coker(\ker f) = Coim\, f \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[urr, dashed] & & Im\, f = Ker(coker\, f) \arrow[u, tail] &
\end{tikzcd}$$

$(Ab2)$ $\overline{f}$ *– всегда изоморфизм.*

Из леммы 16.2 следует $(\mathrm{Epi}, \mathrm{Mono})$-структурированность любой абелевой категории. Кроме того, в силу пункта 2 определения абелевой категории

$$\mathrm{RegEpi} = \mathrm{Mono}, \quad \mathrm{RegMono} = \mathrm{Mono}.$$

Если брать определение абелевой категории из Маклейна, получается, что любой морфизм раскладывается в композицию регулярного эпиморфизма и регулярного мономорфизма. $\mathrm{Coker}\, f$ совпадает с $\mathrm{Coker}\, i$, $\mathrm{Ker} f$ совпадает с $\mathrm{Ker} p$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f \arrow[r] & . \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & . \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, f \\
& & . \arrow[ur, tail, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Отсюда

$$p = \mathrm{coim}\, f, \quad i = \mathrm{im}\, f.$$

Примеры. абелевых категорий: Ab, R-Mod, где R – ассоциативное кольцо с 1, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, где $\mathbb{K}$ – поле.

Теорема Фрейда – Митчелла

Начнем новую тему, чтобы можно было решить последнюю задачу из списка задач к экзамену.

Определение. Последовательность

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

точна в члене b, если

$$\mathrm{Ker} g = \mathrm{Im}\, f.$$

В частности,

$$gf = 0.$$

Рассмотрим

$$a \xrightarrow{0} b$$

Тогда

$$\ker 0 = \mathrm{id}_a,$$
$$\mathrm{coker}\, 0 = \mathrm{id}_b.$$

Рассмотрим

$$a \overset{\mathrm{id}_a}{=\!=\!=} a$$

Тогда

$$\ker \mathrm{id}_a = 0 \in C(a,a),$$
$$\mathrm{coker}\, \mathrm{id}_a = 0.$$

Последовательность

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b$$

точна $\iff$ f – мономорфизм. Действительно, вычислим

$$\mathrm{im}\, 0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, 0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_a) = 0_a.$$

То есть последовательность точна $\iff$ $\mathrm{Ker} f = 0$.

Замечание 17.2. Определение абелевой категории является двойственным. Двойственные к абелевым категории оказываются также абелевым, но они никогда не будут изоморфны, кроме тривиального случая.

Аналогично,

$$a \xrightarrow{f} b \longrightarrow 0$$

точна $\iff$ f – эпиморфизм.

Далее, последовательность

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0 \tag{91}$$

точна $\iff$

$$g = \mathrm{coker}\, f$$
$$f = \ker f$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Действительно, если последовательность (91), то

$$f \in \mathrm{Mono}, \quad g \in \mathrm{Epi}.$$

Тогда

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker} g$$

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f) = \ker g.$$

Применяя coker, получаем

$$\mathrm{coker}\, f = g.$$

Так как f – ядро,

$$f = \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f) = \ker g.$$

$\Leftarrow$ очевидно.

$\square$

Предложение. Из того, что

$$\mathrm{Ker} g = \mathrm{im}\, f,$$

следует, что

$$\mathrm{coker}\, f = \mathrm{coim}\, f.$$

Доказательство.

$$\ker g = \ker(\mathrm{coker}\, f)$$

$$\underbrace{\mathrm{coker}\,(\ker g)}_{=\mathrm{coim}\, g} = \mathrm{coker}\,(\ker(\mathrm{coker}\, f)) = \mathrm{coker}\, f.$$

$\square$

При переходе к двойственной категории точность сохраняется.

Определение. Пусть A и B – абелевы категории. Функтор

$$F:\ A \to B$$

называется *точным*, если он аддитивен и $\forall$ точной последовательности

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

последовательность

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \longrightarrow 0$$

точна.

Сформулируем теорему о вложении.

Теорема 17.3. *(Фрейд – Митчелл) $\forall$ абелевой малой[30] категории C $\exists$ ассоциативное кольцо R с 1 и полный точный унивалентный функтор*

$$F:\ C \to R\text{-}Mod$$

[30]В соответствующей лекции требование малости абелевой категории отсутствует, но это уточняется в примечаниях лектора к курсу.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ