



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ КАТЕГОРИЙ

ГОРДИЕНКО
АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ



Содержание

Лекция 1. Категория. Функтор	6
Категория	6
Категория как алгебраическая структура	9
Двойственная категория	10
Функторы	11
Лекция 2. Изоморфизм в категориях. Естественные преобразования функторов. Эквивалентность категорий. Лемма Йонеды	14
Изоморфизм в категориях	14
Естественные преобразования функторов	15
Эквивалентность категорий. Категория стрелок. Категории запятой	17
Категория стрелок. Категории запятой	17
Лемма Йонеды	19
Лекция 3. Произведения и копроизведения	23
Произведение	23
Универсальный притягивающий объект	27
Копроизведение в категории \mathcal{C}	27
Свободная группа. Свободное произведение групп	28
Копроизведение в категории групп	29
Модуль над ассоциативным кольцом с 1	30
Произведение и копроизведение в $R\text{-Mod}$	31
Копроизведение в категории предпорядке	32
Универсальный отталкивающий объект. Нулевой объект	32
Лекция 4. Нулевой морфизм. Тензорное произведение. (Ко)уравнители. Предел. Пулбэк	33
Нулевой морфизм	33
Тензорное произведение как копроизведение для ассоциативных коммута- тивных алгебр с 1	33
Уравнители	34
Коуравнители	35
Предел	37
Лекция 5. Направленности. Ядро морфизма. Свойства коуниверсаль- ных квадратов. Полнота в малом	42
Направленность. Обратный (проективный) предел	42
Ядро морфизма	42
Свойства пулбэков (коуниверсальных квадратов)	43
Свойство пары коуниверсальных квадратов с общей стороной	43
Коуниверсальный квадрат как функтор между категориями запятой	45
Полная в малом категория	46
Сохраняющие, отражающие и создающие пределы функторы	49
Пределы в категории Sets	51

Лекция 6. Пределы в категориях Top, R-Mod. Непрерывность функтора	
Нот. Пределы, зависящие от параметра	52
Пределы в категориях Top и R-Mod	52
Непрерывность функторов	53
Пределы, зависящие от параметра. Пределы в категориях функторов . . .	54
Произведение малых категорий. Бифунктор	54
Соответствие между бифункторами и функторами в категорию функторов	54
Покомпонентное вычисление пределов в категориях функторов	56
Равенство повторного предела двойному	58
Лекция 7. Сопряженные функторы. Гомоморфизм графов. Пределы диаграмм как пределы функторов. Копредел. Универсальный квадрат	60
Следствия	60
Сопряженные функторы	60
Пределы диаграмм как пределы функторов	62
Копредел	64
Лекция 8. Копределы в категориях Sets, Top, R-Mod. Мономорфизмы и эпиморфизмы. Моно- и эпиморфизмы в категориях Sets, Top, Metr, R-Mod, Grp	68
Копределы в категориях Sets, Top, R-Mod	68
Мономорфизмы и эпиморфизмы	70
Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Sets	70
Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Top	71
Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Metr	72
Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории R-Mod	74
Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Grp	74
Лекция 9. Подобъекты и факторобъекты. Пересечение подобъектов. Пулбэк с участием мономорфизма. Иерархия моно- и эпиморфизмов	75
Эпиморфизмы в категории Grp (продолжение)	75
Вложение целых чисел в рациональные как эпиморфизм	76
Подобъекты и факторобъекты. Пересечение подобъектов	77
Коуниверсальный квадрат с участием мономорфизма	80
Иерархия моно- и эпиморфизмов	80
Регулярные, сильные и экстремальные моно- и эпиморфизмы	80
Лекция 10. Связь между мономорфизмами в иерархии. Регулярные эпиморфизмы в категориях. Факторизационные структуры	83
Иерархия моно- и эпиморфизмов	83
Регулярные, сильные и экстремальные мономорфизмы (повторение)	83
Связь между мономорфизмами в иерархии	84
Конгруэнция на моноиде	87
Регулярные эпиморфизмы в категориях множеств, колец и моноидов . . .	88
Факторизационные структуры (системы)	89

Лекция 11. Замкнутость StrongMono относительно композиции. Факторизационная структура. Факторизационная лемма. Первое достаточное условие (ExtrEpi, Mono)-структурированности	92
Замкнутость Mono (Epi, StrongMono) относительно композиции	92
Факторизационная структура	93
Теорема о категории с (Epi, RegMono)-факторизациями	94
Факторизационная лемма	95
Достаточные условия (ExtrEpi, Mono)-структурированности	97
Лекция 12. Малые в смысле подобъектов и факторобъектов категории. Достаточные условия (Epi, ExtrMono)-структурированности. Сопряженные функторы	99
Малые в смысле подобъектов и факторобъектов категории	99
Достаточные условия (Epi, ExtrMono)-структурированности	100
Сопряженные функторы	104
Лекция 13. Единица и коединица сопряжения. Треугольные тождества. Достаточные условия сопряженности. Функтор с разными левым и правым сопряженными	105
Единица и коединица сопряжения	105
Треугольные тождества	107
Достаточные условия сопряженности	108
Функтор с разными левым и правым сопряженными	113
Лекция 14. Критерий эквивалентности категорий. (Ко)рефлексивные подкатегории, (ко)рефлекторы. Сохранение правыми сопряженными функторами пределов и мономорфизмов	115
Критерий эквивалентности категорий	115
(Ко)рефлексивная подкатегория, (ко)рефлектор	119
Правые сопряженные функторы сохраняют пределы и мономорфизмы . .	120
Лекция 15. Универсум. Теорема Фрейда о сопряженном функторе. (Ко)порождающие множества объектов. Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте	123
Универсум Гротендика	123
Теорема об универсальном отталкивающем объекте	123
Достаточные условия существования пределов в категории запятой	125
Теорема Фрейда о сопряженном функторе	127
(Ко)порождающие множества объектов	128
Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте	129
Лекция 16. Специальная теорема о сопряженном функторе. Ab-категории. Нулевые морфизмы. Ядра, коядра	131
Замечание о функторе, создающем малые пределы	131
Специальная теорема о сопряженном функторе	132
Ab-категории	135

Ядро и коядро	137
Лекция 17. Аддитивные категории. Аддитивные функторы. Абелевы категории. Точные последовательности. Точные функторы	140
Лемма	140
Прямая сумма (бипроизведение)	142
Аддитивная категория. Аддитивный функтор	144
Абелева категория	146
Теорема Фрейда – Митчелла	146

Лекция 1. Категория. Функтор

Курс читает Гордиенко Алексей Сергеевич, кафедра высшей алгебры. Email для связи: alexey.gordienko@math.msu.ru.

Темы и упражнения по темам курса будут выкладываться на сайте кафедры <https://halgebra.math.msu.su>, раздел «спецкурсы», подраздел «теория категорий».

Аналогичную информацию можно найти на странице <https://sites.google.com/view/alexey-sergeevich>, раздел «учебные материалы», подраздел «теория категорий».

На указанных выше ресурсах перечислены книги, на которые можно ориентироваться. Пока основной книгой для слушателей будет Маклейн С. «Категории для работающего математика».

Категория

Поговорим о том, что будет изучаться в рамках курса. При изучении абстрактной алгебры мы отвлекаемся от природы элементов. Например, у группы есть аксиомы и элементы, но природа элементов, когда мы изучаем группу с алгебраической точки зрения, нам неважна.

Теорию категорий можно рассматривать как следующий уровень абстракции по сравнению с абстрактной алгеброй.

Позднее мы увидим, что *категория* является алгебраической структурой со своими аксиомами.

Обсудим один теоретико-множественный вопрос. На границе XIX и XX веков математики обнаружили парадоксы теории множеств (парадокс Рассела, например) и были сформулированы строгие системы аксиом (есть 2 известные системы аксиом). Стандартный подход, позволяющий избежать теоретико-множественных парадоксов, заключается в следующем. Рассматриваются *классы* и *множества* (те классы, которые являются элементами других классов). Тогда все известные парадоксы сводятся к тому, что некоторые классы не являются множествами.

Такой подход, в принципе, можно использовать и в теории категорий, но удобнее говорить о *больших* и *малых* множества. Такая необходимость возникает, например, в следующей ситуации: класс всех групп и класс множеств мы не можем положить в какой-то другой класс (иначе столкнемся с парадоксами). Поэтому мы вводим некоторое ограничение и рассматриваем класс не всех групп, а класс так называемых *малых* групп.

В этом случае рассматривается некое большое множество U (большой мощности или, может быть, даже класс с точки зрения терминологии выше), которое называется *универсумом*¹. Множества, которые являются элементами универсума, мы называем *малыми*. Остальные множества называются *большими*.

Если взять в качестве универсума множество всех множеств:

$$U = \{x \mid \exists y \ x \in y\}, \quad (1)$$

¹ Аксиомы универсума будут сформулированы в лекции 15.

тогда малые множества – это множества (в том смысле, в котором мы привыкли говорить в математике), а большие множества – это классы, которые не являются множествами.

Разумеется, универсум не всегда имеет вид (1). В общем случае мы будем считать, что фиксирован некий универсум, какие-то множества будем считать малыми, какие-то – большими. Как правило, для работы нам будет этого хватать. Это позволит нам рассматривать класс малых групп, класс малых множеств, и, увеличив универсум, мы сможем рассматривать класс, в котором будет большое множество, элементами которого будут класс малых групп и класс малых множеств. Здесь мы предполагаем, что можно увеличить универсум, но, вообще говоря, это не следует из аксиом теории множеств.

Для простоты в начале можно использовать использовать пример (1) и считать, что малые множества – это множества в привычном понимании, а большие множества – это классы. В дальнейшем при рассмотрении больших категорий там, где это требуется, мы будем считать, что мы увеличили или уменьшили универсум.

Определение. Говорят, что задана *категория* C , если задано (вообще говоря, большое) множество объектов² $\text{Ob } C$, для любых $a, b \in \text{Ob } C$ задано множество (как правило, малое) морфизмов³ $a \rightarrow b$. Множество морфизмов обозначается $\text{Hom}_C(a, b)$ или $C(a, b)$.

Скажем про обозначения. Просто категорию (необязательно является множеством) мы будем обозначать заглавной латинской буквой (например, C), а ее объекты – маленькими латинскими буквами (например, a и b). Когда объекты будут множествами, их мы будем обозначать большими латинскими буквами (например, A и B), их элементы маленькими буквами (a и b), а категории – каллиграфическими буквами (например, C).

Если есть два морфизма

$$f : a \rightarrow b$$

и

$$g : b \rightarrow c,$$

то определена композиция

$$gf : a \rightarrow c,$$

причем

1. композиция ассоциативна. Если даны морфизмы

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

то

$$(hg)f = h(gf).$$

²Здесь нам неважно, чем являются объекты.

³Вообще говоря, любой природы.

2. $\forall a \in \text{Ob } C \exists$ «тождественный морфизм» $\text{id}_a \in C(a, a)$, что $\forall a, b \in \text{Ob } C \forall f \in C(a, b)$

$$f \text{id}_a = \text{id}_b f = f$$

$$a \stackrel{\text{id}_a}{=} a \xrightarrow{f} b \stackrel{\text{id}_b}{=} b$$

Поговорим теперь о примерах категорий и их обозначениях.

Примеры. 1. *Категория множеств* Sets. Объектами здесь являются множества, морфизмами – отображения между ними. Если X, Y – множества, то множество морфизмов здесь

$$\text{Sets}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}.$$

2. *Категория групп* Grp. Здесь объекты – это группы, а морфизмы гомоморфизмы групп.
3. *Категория абелевых групп* Ab. По аналогии с пунктом 2, объектами здесь являются абелевы группы, а морфизмами – гомоморфизмы абелевых групп.
4. Категория топологических пространств Top. Объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения между ними.
5. Пусть G – группа. Тогда G – категория, объект – единственный 1. Морфизмы

$$G(1, 1) = G,$$

Композиция элементов здесь это просто их перемножение

$$\text{композиция } hg := hg \text{ (в группе),}$$

где g и h – морфизмы:

$$g \circlearrowleft 1 \circlearrowright h \tag{2}$$

6. Категория $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ векторных пространств над полем \mathbb{K} . Объекты здесь – векторные пространства, а морфизмы – линейные отображения.
7. Множество M с бинарным отношением \leq называется *предпорядком*, если
- 1) $m \geq m$ (рефлексивность)
 - 2) если $m \leq n, n \leq t$, то $m \leq t$ (транзитивность)

Множество M тоже является категорией. Объекты здесь – это элементы множества M , а $\text{Hom}_M(m, n)$ состоит не более чем из одного элемента и

$$\exists m \rightarrow n \iff m \leq n.$$

Здесь мы поступаем следующим образом. Элементы предпорядка – это рассматриваемые объекты категории. Между ними есть стрелка от меньшего либо равного к большему либо равному. Из рефлексивности следует, что существует тождественный морфизм. Из транзитивности следует, что определена композиция

$$\begin{array}{ccc} m & \longrightarrow & n \\ & \searrow & \swarrow \\ & & t \end{array}$$

Аксиому ассоциативности композиции и равенства в определении тождественного морфизма можно не проверять, так как всегда \exists не более одной стрелки между любыми двумя объектами.

8. Категория над ассоциативным кольцом с единицей R . Объекты – натуральные числа,

$$\text{Hom}(m, n) = M_{n \times m}(R)$$

– матрицы размера $n \times m$ над кольцом R . Пусть

$$n \xrightarrow{B} k \xrightarrow{A} m$$

тогда композиция морфизмов – это произведение соответствующих матриц

$$A_{m \times k} B_{k \times n}.$$

Тождественный морфизм id_n – это единичная матрица размера $n \times n$.

Категория как алгебраическая структура

Пусть C_0 – множество объектов, C_1 – множество всех морфизмов. Справедливо

$$C_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{cod}} \\ \xrightarrow{\text{id}} \\ \xleftarrow{\text{dom}} \end{array} C_1$$

Напомним, если

$$f: a \rightarrow b,$$

то

$$\text{dom } f := a, \quad \text{cod } f := b.$$

Определим

$$C_1 \times_{C_0} C_1 = \{(f, g) \mid f, g \in C_1, \text{cod } g = \text{dom } f\}.$$

Задано отображение композиция

$$\circ: C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1.$$

Аксиомы. 1. $\text{cod}(\text{id}_a) = \text{dom}(\text{id}_a)$;

2. $\text{dom}(fg) = \text{dom}g$;

3. $\text{cod}(fg) = \text{cod}f$;

Замечание. Иллюстрация к 2 и 3 аксиомам:

$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c.$$

4. $f(gh) = (fg)h$;

5. $\text{id}_b f = f \text{id}_a = f \forall f: a \rightarrow b$.

Категория C называется *малой*, если $\text{Ob } C$ *малое* (и *большой* иначе).

Заметим, что категории малых групп и малых множеств сами уже являются большими.

Двойственная категория

Хочется ввести категорию (малых) категорий. Для этого нам требуются морфизмы между категориями, так называемые функторы. Прежде, чем перейти к рассмотрению функторов, обсудим двойственную категорию.

Рассматриваемый нами подход теории категорий, когда мы перестаем требовать, чтобы морфизмы были отображениями, а объекты – какими-то множествами, как правило, усложняет доказательство утверждений. Но у такого подхода, когда мы абстрагируемся от природы объектов и морфизмов, есть свое неоспоримое преимущество. Мы можем направить стрелки в противоположную сторону. Это так называемая *двойственная (opposite) категория*. С отображением, если отображение не является обратимым, так, очевидно, поступить нельзя.

Определение. Пусть дана категория C . *Двойственной к C* называется категория C^{op} , в которой

$$\text{Ob } C^{\text{op}} = \text{Ob } C,$$

$$C^{\text{op}}(a, b) := C(b, a) \forall a, b \in \text{Ob } C.$$

Если

$$f \in C^{\text{op}}(a, b) = C(b, a),$$

$$g \in C^{\text{op}}(b, c) = C(c, b),$$

то композиция

$$\text{в } C^{\text{op}} \quad gf = fg \text{ в } C.$$

Тождественные морфизмы id_a те же.

Замечание. В категории, двойственной к категории матриц, матрицы транспонируются.

Функторы

Перейдем к обсуждению функторов.

Определение. Пусть C и D – категории. Говорят, что задан *функтор*

$$F: C \rightarrow D,$$

если

1. задано отображение

$$\text{Ob } C \rightarrow \text{Ob } D$$

$$c \mapsto Fc;$$

2. $\forall a, b \in C$ задано отображение

$$C(a, b) \rightarrow D(Fa, Fb)$$

$$f \mapsto Ff,$$

при этом

$$F\text{id}_a = \text{id}_{Fa} \quad \forall a \in \text{Ob } C$$

и

$$F(fg) = (Ff)(Fg)$$

для \forall морфизмов

$$f: a \rightarrow b$$

$$g: b \rightarrow c.$$

Замечание. Такие функторы $C \rightarrow D$ называются *ковариантными*, они не меняют направление стрелок.

Контрвариантные функторы – это функторы $C \rightarrow D^{\text{op}}$ или $C^{\text{op}} \rightarrow D$ (стрелки в таком случае идут в другую сторону).

Примеры. 1. Забывающие функторы. Например,

$$\text{Grp} \rightarrow \text{Sets}$$

– «забываем» умножение,

$$\text{Top} \rightarrow \text{Sets}$$

– «забываем» топологию и так далее. Важно отметить, что понятие забывающего функтора – не категорное.

2. Функторы вложения. Например,

$$\text{Ab} \subset \text{Grp}. \quad (3)$$

3. Линейное представление группы⁴ G :

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V),$$

– гомоморфизм, где V – векторное пространство над полем \mathbb{K} . Таким образом мы абстрактную группу представляем в виде конкретных линейных операторов. Заметим, что если V – конечномерное пространство, то элементы группы представляются в виде матриц.

Оказывается, что ρ – функтор из категории G в категорию $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$. Единственный объект 1 из категории G переходит в векторное пространство:

$$1 \mapsto V$$

при этом все морфизмы (2)

$$g \mapsto \text{линейное отображение } V \rightarrow V. \quad (4)$$

Так как у элементов g есть обратные элементы, у линейных отображений из правой части (4) также будут обратные, соответствующие обратным элементам группы. Поэтому линейные операторы будут обратимыми. Композиция для (4) сохраняется. Таким образом, ρ действительно является гомоморфизмом.

Итак, любой гомоморфизм является неким функтором из группы как категории в категорию векторных пространств, и наоборот, любой функтор – это некое представление группы.

4. Рассмотрим функторы, которые есть в каждой категории – Ном-функторы. Пусть C – категория, $c \in \text{Ob } C$. Тогда мы можем каждому (другому) объекту сопоставлять множество морфизмов из c в этот объект: функтор

$$\text{Hom}(c, -) = C(c, -) : C \rightarrow \text{Sets},$$

$$d \mapsto \text{Hom}(c, d).$$

Если

$$f: a \rightarrow b,$$

то

$$\text{Hom}(c, g) : \text{Hom}(c, a) \rightarrow \text{Hom}(c, b)$$

где

$$g \mapsto fg \quad \forall g: c \rightarrow a.$$

Это пример ковариантного Ном-функтора.

Если фиксировать, наоборот, объект, в который мы приходим, а менять объект, откуда мы идем, получится контрвариантный Ном-функтор $\text{Hom}(-, c)$, где $c \in \text{Ob } C$. Здесь каждому объекту d сопоставляется

$$d \mapsto \text{Hom}(d, c).$$

⁴Изучается в третьем семестре курса алгебры.

Если

$$f: a \rightarrow b,$$

то

$$\text{Hom}(f, c): \text{Hom}(b, c) \rightarrow \text{Hom}(a, c),$$

$$g \mapsto gf \quad \forall g: b \rightarrow c.$$

5. Функтор степени:

$$\mathcal{P}: \text{Sets} \rightarrow \text{Sets}.$$

Если M – множество, то \mathcal{P} – множество подмножеств множества M .

Если

$$f: M \rightarrow N$$

– отображение, то

$$\mathcal{P}f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}N.$$

Если $S \subseteq M$, то

$$(\mathcal{P})(S) = \{f(s) \mid s \in S\}.$$

6. Функтор абелианизации⁵

$$\text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$$

сопоставляет каждой группе ее факторгруппу по коммутанту:

$$G \mapsto G/[G, G].$$

Напомним, $[G, G]$ – коммутант, то есть подгруппа, порождённая элементами вида $ghg^{-1}h^{-1}$, где $g, h \in G$.

Упражнение 1.1. Показать, что взятие группы $U(R)$ обратимых элементов ассоциативного кольца R с 1 – то функтор из категории ассоциативных колец с 1 в категорию Grp .

Дадим еще два определения, связанных с функторами. Когда мы говорим про отображения, у нас бывают сюръективные и инъективные отображения. Можно так же говорить о функторах на множествах морфизмах.

Определение. Функтор

$$F: C \rightarrow D$$

называется *полным* (*full*), если для $\forall a, b \in \text{Ob } C$ отображение

$$C(a, b) \rightarrow D(Fa, Fb)$$

сюръективно, и *унивалентным* (*faithful*), если это отображение инъективно.

Определение. D – *подкатегория* категории C , если D – подмножество объектов и морфизмов из C , замкнутое относительно композиции, id , cod и dom .

⁵Чуть позднее в курсе мы обсудим, как этот функтор и функтор (3) связаны.

Лекция 2. Изоморфизм в категориях. Естественные преобразования функторов. Эквивалентность категорий. Лемма Йонеды

Изоморфизм в категориях

Прежде всего сформулируем одно несложное упражнение.

Упражнение 2.1. Пусть G – группа, рассматриваемая как категория. Что за категория G^{op} ?

В любой категории есть понятие изоморфизма между объектами. Мы знаем, например, про изоморфизм групп, векторных пространств, колец и так далее.

Определение. Пусть C – категория. Говорят, что морфизм

$$f: c \rightarrow d$$

– *изоморфизм*, если \exists морфизм

$$g: d \rightarrow c$$

такой, что

$$fg = \text{id}_d, \quad gf = \text{id}_c.$$

Таким образом,

изоморфизмы = обратимые стрелки.

Определение. Объекты, между которыми \exists изоморфизмы, называются *изоморфными*.

Как обычно, рассматривая примеры категорий, мы здесь открываем для себя уже знакомые нам понятия.

Примеры. 1. В Sets изоморфизмы – это биекции;

2. В Grp изоморфизмы – это изоморфизмы групп;

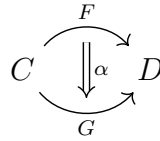
3. Пусть G – группа, рассматриваемая как категория. Тогда все элементы группы являются изоморфизмами.

4. В категории Top изоморфизмы – гомеоморфизмы.

Можно рассматривать и функторы – изоморфизмы категорий. Это, получается, обратимый функтор, который при рассмотрении его композиции вместе с id дает тождественный функтор. На самом деле, это достаточно сильное условие, и позднее мы обсудим более слабое условие.

Естественные преобразования функторов

Рассмотрим категории C и D и два разных функтора F и G между ними:



Оказывается, что между функторами тоже могут быть морфизмы, которые называются *естественными преобразованиями функторов*.

Корректнее говоря, функторы между двумя категориями сами образуют категорию, в которой объектами являются функторы $C \rightarrow D$, а морфизмами – естественные преобразования между ними.

Определение. Говорят, что задано *естественное преобразование*⁶

$$\alpha: F \Rightarrow G, \quad (5)$$

если для $\forall c \in \text{Ob } C$ задан морфизм объектов⁷

$$\alpha_c: Fc \rightarrow Gc$$

так, что для $\forall c_1, c_2 \in \text{Ob } C$ и $f \in C(c_1, c_2) = \text{Hom}_C(c_1, c_2)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Fc_1 & \xrightarrow{\alpha_{c_1}} & Gc_1 \\ \downarrow Ff & & \downarrow Gf \\ Fc_2 & \xrightarrow{\alpha_{c_2}} & Gc_2 \end{array}$$

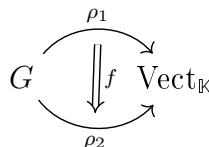
коммутативна, то есть

$$(Gf)\alpha_{c_1} = \alpha_{c_2}Ff.$$

Морфизмы α_c называются *компонентами естественного преобразования α* .

Хотя (5) и называется естественным преобразованием, для тех, кто только знакомится с теорией категорий, это совсем не естественное определение. У нас были категории и были функторы, которые играли роль морфизмов. Но, оказывается, внутри есть еще одна структура и «сидит» еще одна категория. Как мы узнаем позднее, это пример *2-категории*, когда у нас есть 0-клетки (объекты), 1-клетки (морфизмы между 0-клетками) и 2-клетки (морфизмы между 1-клетками).

Примеры. 1. Пусть G – группа как категория с одним объектом $*$. Мы говорили, что функторы из G в категорию векторных пространств – это линейное представление



⁶В книге Маклейна вместо \Rightarrow используется $\dot{\rightarrow}$.

⁷Иногда используют обозначение αc в один уровень, а не обозначение с помощью индекса α_c , которым пользуемся мы.

Тогда естественные преобразования

$$\rho_1 \Rightarrow \rho_2$$

– это гомоморфизмы представлений.

Объект здесь только один: $*$, то есть есть одна компонента

$$f: V_1 \rightarrow V_2,$$

где

$$V_i = \rho_i(*)$$

– образы единственного объекта $*$ категории G . Напомним,

$$\rho_i: G \rightarrow \text{GL}(V_i).$$

Тогда справедлива диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

$\forall g \in G$, то есть

$$f(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)f(v) \quad \forall v \in V_1, \quad g \in G.$$

Такое отображение и называется гомоморфизмом представлений.

2. Рассмотрим гомоморфизм

$$\pi_G: G \rightarrow G/[G, G].$$

Оказывается, что это компонента естественного преобразования

$$\text{id}_{\text{Grp}} \Rightarrow \text{функтор абелианизации},$$

так как \forall гомоморфизма

$$f: G \rightarrow H$$

диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_G} & G/[G, G] \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ H & \xrightarrow{\pi_H} & H/[H, H] \end{array}$$

коммутативна.

Обратим внимание, что функтор абелианизации был из категории групп в категорию абелевых групп. Здесь мы применили функтор вложения, чтобы получить функтор из категории групп в категорию групп:

$$\text{Grp} \longrightarrow \text{Ab} \xrightarrow{\text{вложение}} \text{Grp}.$$

Естественные преобразования такого типа будут часто встречаться, когда мы будем говорить про сопряженные функторы.

Эквивалентность категорий. Категория стрелок. Категории запятой

Дадим теперь определение более слабой схожести между категориями, чем изоморфизм категорий.

Определение. Говорят, что

$$F : C \rightarrow D$$

эквивалентность категорий, если \exists функтор

$$G : D \rightarrow C$$

такой, что

$$FG \cong \text{id}_D \text{ и } GF \cong \text{id}_C.$$

Упражнение 2.2. Показать, что

$$\alpha : F \Rightarrow G$$

– изоморфизм функторов \iff все его компоненты α_c – изоморфизмы (объектов).

Категория стрелок. Категории запятой

При помощи категорий можно строить другие категории.

Категория стрелок. Рассмотрим категорию Y :

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_1 & & \text{id}_2 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ 1 & \xrightarrow{r} & 2 \end{array}$$

Категория функторов из Y в произвольную категорию C называется *категорией стрелок в C* и обозначается $\text{Arr}(C)$:

$$\begin{array}{ccc} 1 \mapsto a & & \\ r \mapsto f \downarrow & & \\ 2 \mapsto b & & \end{array}$$

Обсудим теперь естественные преобразования функторов здесь:

$$\begin{array}{ccccc} 1 \mapsto a & \xrightarrow{\alpha_1} & c & & \\ r \mapsto f \downarrow & & \downarrow g & & \\ 2 \mapsto b & \xrightarrow{\alpha_2} & d & & \end{array} \quad (6)$$

Таким образом, объекты – это морфизмы

$$a \xrightarrow{f} b,$$

а морфизмы между ними – это пары стрелок (α_1, α_2) .

$$\begin{array}{ccc} a & & c \\ f \downarrow & \text{и} & \downarrow g \\ b & & d \end{array}$$

теперь рассматриваются как объекты, α_i – морфизмы между ними, диаграмма (6) коммутативна.

Заметим, что, хотя выше это показано не было, легко проверить, что сами естественные преобразования являются морфизмами в категории.

Категории запятой. (comma category) Пусть

$$F : C \rightarrow D$$

– функтор, $d \in \text{Ob } D$ – некоторый фиксированный объект. Категория запятой⁸ $(F \downarrow d)$ задается следующим образом: объекты – морфизмы вида

$$Fc \xrightarrow{f} d,$$

где c – произвольный объект $\in \text{Ob } C$. Морфизм из f_1 в f_2 , где

$$f_i : Fc_i \rightarrow d,$$

– это морфизм

$$\varphi : c_1 \rightarrow c_2$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} FC_1 & \xrightarrow{f_1} & d \\ F\varphi \downarrow & \nearrow f_2 & \\ FC_2 & & \end{array}$$

коммутативна.

Категория запятой, рассмотренная выше, не является единственной. Можно рассматривать и двойственную категорию $(d \downarrow F)$

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{f_1} & FC_1 \\ f_2 \downarrow & \nearrow F\varphi & \\ fC_2 & & \end{array}$$

Здесь

$$\begin{array}{ccc} d & & \\ f_2 \downarrow & \text{и} & d \xrightarrow{f_1} FC_1 \\ FC_2 & & \end{array}$$

являются объектами.

Заметим, что такие категории будут активно возникать при обсуждении, например, сопряженных функторов.

⁸Иногда встречается альтернативное обозначение F/d .

Изначально использовалось обозначение (F, d) , откуда и пошло название категории, но такое обозначение часто используется для пары объектов.

Лемма Йонеды

Как уже говорилось ранее, объекты в категориях имеют абстрактную природу и иногда хочется их вложить внутрь чего-то, с чем проще работать. Такую возможность дают Ном-функторы.

Определение. Функтор

$$F : C \rightarrow \text{Sets}$$

называется *представимым*, если

$$F \cong C(c, -)$$

для некоторого $c \in \text{Ob}C$.

Оказывается, любую категорию C можно вложить в категорию функторов из C в категорию Sets.

Обозначение. Если C, D – категории, то через D^C будем обозначать *категорию функторов $C \rightarrow D$* .

Вложение Йонеды. Рассмотрим произвольную категорию C . Вложение Йонеды

$$C \rightarrow (\text{Sets}^{\text{op}})^C$$

будет строиться следующим образом. Каждому объекту $c \in C$ будет ставиться в соответствие Ном-функтор

$$c \mapsto C(c, -).$$

Если дан морфизм объектов

$$f : c \rightarrow d,$$

то ему соответствует морфизм функторов

$$C(c, -) \xrightarrow{C(f, -)} C(d, -).$$

Если $x \in \text{Ob}C$, то

$$C(d, x) \xrightarrow[h:c \rightarrow x]{C(f, x)} C(c, x)$$

Теорема 2.1. «Вложение» Йонеды – полный и унивалентный функтор (то есть биекция на Ном-множествах).

Лемма 2.1. (Йонедата) Рассмотрим отображение⁹

$$\Theta : \underbrace{\text{Nat}(C(c, -), K)}_{=\text{Sets}^k(C(c, -), K)} \rightarrow Kc, \quad (7)$$

⁹Здесь $\text{Nat}(C(c, -), K)$ – множество всех естественных преобразований из функтора $C(c, -)$ в некий функтор K .

где

$$K : C \rightarrow Sets$$

– произвольный функтор. Пусть $\alpha \in \text{Nat}(C(c, -), K)$. Отображение (7) задано следующим образом:

$$\Theta(\alpha) := \alpha_c(id_c).$$

Тогда Θ – биекция.

Доказательство. Так как α – естественное преобразование,

$$\forall f : c \rightarrow d$$

следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & Kc \\ C(c, f) \downarrow & & \downarrow Kf \\ C(c, d) & \xrightarrow{\alpha_d} & Kd \end{array}$$

Таким образом, если мы возьмем тождественный морфизм $id_c \in C(c, c)$, то

$$\begin{array}{ccc} id_c & \longmapsto & \Theta(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow Kf \\ f & \longmapsto & \alpha_d(f) \end{array} \quad (8)$$

То есть

$$\alpha_d(f) = (Kf)(\Theta(\alpha)).$$

Определим Ψ следующим образом:

$$\Psi : Kc \rightarrow \text{Nat}(C(c, -), K),$$

$$\Psi(\underbrace{x}_{\in Kc})(d)(f) := (Kf)(x).$$

Проверим, что

$$\Psi(x) \in \text{Nat}(C(c, -), K) \quad (9)$$

и что

$$\Theta\Psi = id_{Kc}, \quad (10)$$

$$\Psi\Theta = id_{\text{Nat}(C(c, -), K)}. \quad (11)$$

Покажем (9). Рассмотрим морфизм

$$g : d_1 \rightarrow d_2.$$

Получим

$$\begin{array}{ccc} C(c, d_1) & \xrightarrow{\Psi(x)(d_1)} & Kd_1 \\ C(c, g) \downarrow & & \downarrow Kg \\ C(c, d_2) & \xrightarrow{\Psi(x)(d_2)} & Kd_2 \end{array}$$

$$(Kg)\Psi(x)(d_1)f = (Kg)(Kf)(x) = K(gf)(x) = \Psi(x)(d_2)(gf),$$

то есть естественное преобразование.

Проверим теперь (10) и (11):

$$\Psi(x) = \Psi(x)(c)(\text{id}_c) = (K\text{id}_C)(x) = x,$$

то есть

$$\Theta\Psi = \text{id}_{KC}.$$

$$\Psi(\Theta(\alpha))(d)(f) = (Kf)(\Theta(\alpha)) = (Kf)\alpha_c(\text{id}_C), \quad (12)$$

где

$$f: c \rightarrow d.$$

Из (8) следует, что

$$(12) = \alpha_d f.$$

Таким образом,

$$\Psi\Theta = \text{id}_{\text{Nat}(C(c,-),K)}.$$

□

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 2.1, рассмотрим связанный с ней пример.

Пример. Пусть $C = G$ (группа). Единственному объекту $*$ мы ставим в соответствие

$$* \mapsto G(*, -): G \rightarrow \text{Sets}^{\text{op}}.$$

Функтор $G(*, -)$ ставит в соответствие

$$* \mapsto G = G(*, *).$$

В другую сторону элементу g будет соответствовать отображение

$$G \rightarrow G$$

$$h \rightarrow hg,$$

то есть сдвиги.

В категорных обозначениях

$$g \mapsto G(*, g).$$

Таким образом, группу мы отображаем в множество сдвигов этой группы справа. Это будет биекция. Мы построили гомоморфизм в группу биекций¹⁰ $G \rightarrow G$.

Вложение Йонеды можно рассматривать как обобщение теоремы Кэли.

¹⁰На самом не в саму группу, а группу биекций с противоположным умножением, то есть двойственную группу.

Доказательство. (Теорема 2.1) Для того, чтобы доказать, что вложение Йонеды – полный унивалентный функтор, достаточно показать, что на морфизмах оно совпадает с Ψ при $K = C(d, -)$.

$$\Psi(x)(d)(f) = C(d, f)(x) = fx \in C(d, d).$$

Здесь

$$x \in C(d, c), \quad f: c \rightarrow d.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\Psi(x)(d) = C(x, -).$$

Здесь

$$x: d \rightarrow c$$

сопоставляется отображение

$$C(c, -) \xrightarrow{C(x, -)} C(d, -)$$

Действительно, пусть

$$d \xrightarrow{x} c \xrightarrow{g} f.$$

тогда

$$C(x, -)(g) = gx.$$

□

Лекция 3. Произведения и копроизведения

Произведение

Сегодня мы начнем наш разговор о произведениях и копроизведениях. Нашей дальнейшей целью являются пределы и копределы.

Определение. Пусть C – категория, $c_\alpha, \alpha \in \Lambda$ – объекты.

Произведением $\prod_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha$ объектов c_α называется объект c вместе с морфизмами

$$p_\alpha: c \rightarrow c_\alpha$$

такой, что \forall объекта d вместе с морфизмами

$$f_\alpha: d \rightarrow c_\alpha$$

\exists единственный морфизм

$$\varphi: d \rightarrow c$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна $\forall \alpha \in \Lambda$:

$$\begin{array}{ccc} d & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & c \\ & \searrow f_\alpha & \swarrow p_\alpha \\ & & c_\alpha \end{array}$$

Морфизмы p_α называются *проекциями*.

Примеры. 1. Пусть $C = \text{Sets}$. Если X_α – множества, то их декартово произведение $\prod_\alpha X_\alpha$ вместе с проекциями на α -ю компоненту – это их (категорное) произведение в Sets .

Простыми словами, декартово произведение $\prod_\alpha X_\alpha$ можно понимать как большие наборы, где элементы проиндексированы из множества Λ , такие, что на месте α у нас стоит элемент из X_α . По-другому элементы декартова произведения можно понимать как функции из множества Λ , где значение функции на элементе α принимает значение в X_α .

Действительно, если

$$Y \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha$$

– отображения, то

$$(f_\alpha(y))_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{f}{\dashrightarrow} & \prod_\alpha X_\alpha \\ & \searrow f_\alpha & \swarrow p_\alpha \\ & & X_\alpha \end{array} \quad (13)$$

Диаграмма (13) коммутативна.

2. Если $C = \text{Top}$, то как множество произведение – это тоже декартово произведение.

Так как p_α непрерывны, множества

$$(\dots \times X_\alpha \times \dots \times U \times \dots \times X_\alpha \times \dots) = p_\beta^{-1}(U)$$

должны быть открыты. Здесь $U \subseteq X_\beta$ – открытое подмножество X_β , все X_α берутся полностью.

Топология произведения порождается множествами вида

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_k),$$

где

$$U_j \subseteq X_{\alpha_j}$$

– открытые, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Можно показать, что отображение f из диаграммы, аналогичной (13), также будет непрерывным.

3. Пусть $C = \text{Grp}$ – прямое произведение групп. В курсе алгебры оно характеризуется соответствующим образом, но как множество получается, что это снова декартово произведение с покомпонентной операцией.
4. Рассмотрим $C = (P, \leq)$ – предпорядок.

Пусть $a_\alpha \in P$, $\alpha \in \Lambda$. Обсудим, что такое $\prod_\alpha a_\alpha$.

По условию, у нас есть a_α . Если у нас есть произведение, то

$$\prod_\alpha a_\alpha \longrightarrow a_\alpha,$$

в предпорядке. Напомним, в предпорядке между объектами существует единственная стрелка. Далее, пусть есть другой объект b такой

$$\begin{array}{ccc} \prod_\alpha a_\alpha & \longrightarrow & a_\alpha \\ & & \uparrow \\ & & b \end{array}$$

Иными словами, выполнены соотношения

$$\prod_\alpha a_\alpha \leq a_\alpha, \quad b \leq a_\alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda.$$

Тогда должна существовать следующая стрелка:

$$\begin{array}{ccc} \prod_\alpha a_\alpha & \longrightarrow & a_\alpha \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & b \end{array}$$

то есть

$$b \leq \prod_\alpha a_\alpha.$$

Получается, что

$$\prod_\alpha a_\alpha = \inf \{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}.$$

Сделаем отступление и обсудим **бинарное произведение**. Пусть даны два объекта a и b . Рассмотрим их произведение $a \times b$ и некоторый объект c :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a \times b & & \\
 & p_a \swarrow & & \searrow p_b & \\
 a & & & & b \\
 & f_a \searrow & & \swarrow f_b & \\
 & & c & &
 \end{array}
 \quad (14)$$

Тогда $\exists!$ морфизм

$$f: c \rightarrow a \times b$$

такой, что диаграмма (14) коммутативна, то есть

$$p_a f = f_a, \quad p_b f = f_b.$$

Примеры. 5. Если $G \neq \{e\}$ – (нетривиальная) группа, то в ней не существует бинарного произведения $* \times *$.

Действительно, так как в G существует только один объект, то есть бы $* \times *$ существовало бы, то было бы

$$* \times * = *$$

и \exists морфизмы $s, t \in S$ такие, что $\forall g, h \in G \exists! f \in G$ такой, что

$$t f = h, \quad s f = g$$

(см. диаграмму (15)).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & & \\
 & s \swarrow & & \searrow t & \\
 * & & & & * \\
 & g \searrow & & \swarrow h & \\
 & & * & &
 \end{array}
 \quad (15)$$

Возьмем сперва $g = h = e$ (единичному элементу в группе). Тогда

$$s = t = f^{-1}.$$

Теперь возьмем $g \neq e, h = e$. Тогда $\exists \tilde{f} \in G$ такое, что

$$t \tilde{f} = e, \quad s \tilde{f} = g,$$

то есть $g = e$, получаем противоречие.

Итак, в рассматриваемой категории не существует бинарного произведения.

Замечание 3.1. Вернемся еще раз к произведению. Пусть G_α – группы. Тогда несчетные наборы (последовательности), получаемые в результате произведения, можно представлять в виде функций следующего вида:

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = \left\{ f: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \mid f(\alpha) \in G_\alpha \forall \alpha \in \Lambda \right\},$$

покомпонентные операции

$$(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$$

и другие аксиомы групп сохраняются. Это замечание относится к произведению в категории групп (в отличие от предыдущего примера, когда группа всего одна).

Замечание 3.2. Произведение единственно с точностью до изоморфизма, согласованного с p_α .

Доказательство. Пусть c и d – произведения.

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{p_\alpha} & c_\alpha \\ & & \uparrow \pi_\alpha \\ & & d \end{array}$$

Изобразим на диаграмме еще раз c и d .

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{p_\alpha} & c_\alpha & \xleftarrow{\pi_\alpha} & d \\ \uparrow \theta & \nearrow \pi_\alpha & & \nwarrow p_\alpha & \downarrow \theta \\ d & \xleftarrow{\psi} & & \xrightarrow{\psi} & c \end{array}$$

Так как c и d произведения, существуют морфизмы

$$\theta: d \rightarrow c$$

и

$$\psi: d \rightarrow c$$

такие, что диаграмма выше коммутативна. Для тождественного морфизма диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & c_\alpha & \\ c_\alpha \nearrow & & \nwarrow c_\alpha \\ c & \xrightarrow{id_c} & c \end{array}$$

С одной стороны, в силу коммутативности диаграммы

$$p_\alpha \theta \psi = p_\alpha = p_\alpha id_c,$$

$$\pi_\alpha \psi \theta = \pi_\alpha = \pi_\alpha id_d.$$

В силу единственности получаем, что

$$\theta \psi = id_c,$$

$$\psi \theta = id_d,$$

то есть

$$c \cong d$$

и их проекции согласованы. □

Примеры. 1. Рассмотрим категорию Sets. Мы отображаем¹¹

$$X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_\alpha X_\alpha$$

– дизъюнктное объединение. Если все X_α мы отображаем в некоторое множество Y при помощи отображений f_α , значит, мы единственным образом f можем отобразить в Y и их дизъюнктное объединение:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \bigsqcup_\alpha X_\alpha \\ & \searrow f_\alpha & \swarrow f \\ & Y & \end{array}$$

Здесь i_α – вложения.

2. Тор – то же. Множество

$$U \subseteq \bigsqcup_\alpha X_\alpha$$

открыто \iff все $U \cap X_\alpha$ открыты.

Свободная группа. Свободное произведение групп

Вспомним некоторые конструкции из курса алгебры.

Определение. Пусть X – множество, группа $\mathcal{F}(X)$ вместе с отображением

$$i: X \rightarrow \mathcal{F}(X).$$

Говорят, что группа $\mathcal{F}(X)$ *свободная*, если \forall отображения

$$f: X \rightarrow G,$$

где G – группы, $\exists!$ гомоморфизм группа

$$\tilde{f}: \mathcal{F}(X) \rightarrow G,$$

что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}(X) \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & G & \end{array} \tag{16}$$

Можно записать просто

$$\tilde{f}i = f.$$

Заметим, что морфизмы в диаграмме (16) разного рода. f и i являются отображениями множеств, а \tilde{f} – это гомоморфизм групп. На самом деле на диаграмме не обозначен забывающий функтор из категории групп в категорию множеств, который применен к $\mathcal{F}(X)$, G и \tilde{f} . Поэтому коммутативная диаграмма (16), конечно, является диаграммой категории множеств.

¹¹Знак \sqcup используется для копроизведения.

Замечание 3.4. Определение выше – это так называемое определение через универсальные свойства. Существует также комбинаторное определение, которое выходит за рамки курса и поэтому не будет нами здесь рассмотрено. Напомним тем не менее комбинаторное описание. Элементы в $\mathcal{F}(X)$ – это несократимые слова в алфавите $X \sqcup X^{-1}$. Несократимость означает, что нет XX^{-1} и $X^{-1}X$. Умножение здесь – это приписывание и последующее сокращение.

Группу, если у нее заданы порождающие, можно задать при помощи порождающих и определяющих соотношений.

Если элементы $(g_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ порождают группу G , то рассмотрим

$$X = (X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}.$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi: \mathcal{F}(X) \rightarrow G,$$

$$\varphi(x_\alpha) = g_\alpha.$$

Пусть $\mathcal{N} = \ker \varphi$. \mathcal{N} порождается как нормальная подгруппа в $\mathcal{F}(X)$ элементами $w_\theta, \theta \in \Theta$. Тогда по теореме о гомоморфизме групп

$$G \cong \mathcal{F}(X)/\mathcal{N} \underset{\text{тогда пишут}}{=} \langle X_\alpha, \alpha \in \Lambda \mid w_\theta = 1 \forall \theta \in \Theta \rangle.$$

Говорят, что G задана порождающими $X_\alpha, \alpha \in \Lambda$, и определяющими соотношениями $w_\theta, \theta \in \Theta$.

Группа диэдра.

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle.$$

Копроизведение в категории групп

Пусть $G_\alpha, \alpha \in \Lambda$ – группы. Зададим их порождающими и определяющими соотношениями:

$$G_\alpha \cong \langle X_\alpha \mid w = 1 \forall x \in W_\alpha \rangle.$$

Здесь X_α – множество порождающих, а W_α – множество определяющих соотношений.

Тогда их *свободным произведением* называется

$$\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = G = \left\langle \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid w = 1 \forall w \in \bigsqcup_{\alpha} \in \Lambda W_\alpha \right\rangle.$$

Оказывается, что свободное произведение – это копроизведение в категории групп.

Поймем, почему это так. G_α можно отобразить

$$G_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

Пусть теперь G_α отображаются в некоторую группу H :

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \\ & \searrow f_\alpha & \\ & & H \end{array}$$

Нам требуется

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \\ & \searrow f_\alpha & \swarrow f \\ & & H \end{array} \quad (17)$$

где

$$f(i_\alpha(g_{\alpha\beta})) = f_\alpha(g_{\alpha\beta})$$

для \forall порождающего $g_{\alpha\beta}$ группы G_α .

Диаграмма (17) задается единственным образом.

Модуль над ассоциативным кольцом с 1

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1. Множество M с операциями

$$+ : M \times M \rightarrow M,$$

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

называется *левым модулем над R* , если выполнены следующие условия:

1. Ассоциативность:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in M;$$

2. Существование нулевого элемента:

$$\exists 0 \in M : a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in M;$$

3. Существование противоположного элемента:

$$\forall a \in M \exists -a \in M$$

такой, что

$$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$

4. Коммутативность:

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in M;$$

5. Дистрибутивность:

$$r(a + b) = ra + rb \quad \forall a, b \in M, \quad \forall r \in R;$$

6. Дистрибутивность:

$$(r + s)a = ra + sa \quad \forall a \in M, \quad \forall r, s \in R;$$

7. Ассоциативность:

$$r(sa) = (rs)a \quad \forall a \in M, \quad \forall r, s \in R;$$

8. Существование 1:

$$1 \cdot a = a \quad \forall a \in M.$$

Примеры. 1. Векторные пространства над полями – это модули над ними.

2. \mathbb{Z} -модули – абелевы группы.

Произведение и копроизведение в $R\text{-Mod}$

Пусть $R\text{-Mod}$ – категория левых R -модулей.

Морфизмы – это гомоморфизмы модулей, то есть гомоморфизмы абелевых групп

$$f: M \rightarrow N$$

такие, что

$$f(rm) = rf(m) \quad \forall r \in R.$$

Произведением в $R\text{-Mod}$ будет

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}$$

– декартово произведение с покомпонентными операциями.

Копроизведением в $R\text{-Mod}$ будет то, что называется прямой суммой этих модулей как абелевых групп:

$$\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}$$

– прямая сумма. Это можно рассматривать как

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} m_{\alpha} \tag{18}$$

– формальные суммы, где все $m_{\alpha} = 0$, кроме, может быть, конечного числа.

Действительно, можно вложить все M_{α} в прямую сумму:

$$M_{\alpha} \xrightarrow{i_{\alpha}} \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}$$

Теперь, пусть M_{α} отображаются в другой модуль N :

$$\begin{array}{ccc} M_{\alpha} & \xrightarrow{i_{\alpha}} & \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha} \\ & \searrow f_{\alpha} & \\ & & N \end{array}$$

Тогда мы можем однозначно отобразить формальные суммы (18):

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \\ & \searrow f_\alpha & \swarrow f \\ & & N \end{array}$$

$$f\left(\sum_{\alpha} m_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha} f(m_{\alpha}).$$

Замечание 3.5. Если Λ конечно, то

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}.$$

Копроизведение в категории предпорядке

В категории предпорядке (P, \leq) копроизведение

$$\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} a_{\alpha} = \sup \{a_{\alpha} \mid \alpha \in \Lambda\}.$$

$$\begin{array}{ccc} a_{\alpha} & \longrightarrow & \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} a_{\alpha} \\ & \searrow & \swarrow \\ & & b \end{array}$$

Универсальный отталкивающий объект. Нулевой объект

Закончим лекцию частным случаем копроизведения – копроизведением по пустому множеству \emptyset . Это называется *универсальным отталкивающим объектом* (*initial object*).

\forall объекта d \exists единственный морфизм из c в d :

$$d \dashrightarrow c$$

Примеры. 1. В категории Sets – пустое множество \emptyset .

2. В категории Top аналогично.

3. В категории Grp – тривиальная группа $\{e\}$.

4. В R-Mod – нулевой модуль $\{0\}$.

Определение. Если универсальный притягивающий объект совпадает с универсальным отталкивающим объектом, он называется *нулевым объектом* и обозначается 0 .

В примерах выше нулевой объект есть в Grp и R-Mod.

Лекция 4. Нулевой морфизм. Тензорное произведение. (Ко)уравнители. Предел. Пулбэк

Нулевой морфизм

Определение. Пусть объект 0 – одновременно универсальный притягивающий и универсальный отталкивающий (то есть нулевой) в некоторой категории \mathcal{C} . Тогда $\forall a, b \in \mathcal{C} \exists!$ морфизм $a \rightarrow b$, проходящий через 0 :

$$a \longrightarrow 0 \longrightarrow b.$$

Этот морфизм обозначается через 0 и называется *нулевым*.

Например, в категории групп нулевой морфизм – это морфизм, отражающий все в 1 .

Тензорное произведение как копроизведение для ассоциативных коммутативных алгебр с 1

Рассмотрим еще один важный пример копроизведений. Для этого вспомним следующее понятие.

Пусть A и B – алгебры над полем \mathbb{K} . Рассмотрим их тензорное произведение $A \otimes B$ как векторное пространство с базисом

$$(a_\alpha \otimes b_\beta),$$

где $(a_\alpha)_\alpha$ – базис в A , $(b_\beta)_\beta$ – базис в B .

Тогда $A \otimes B$ – алгебра, где умножение определяется следующим образом:

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2. \quad (19)$$

В категории $\text{CommAlg}_{\mathbb{K}}$ коммутативных ассоциативных алгебр с 1 над \mathbb{K} копроизведением алгебр A и B является $A \times B$.

Для \forall гомоморфизмов

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow D \\ g: B &\rightarrow D \end{aligned}$$

\exists единственный гомоморфизм

$$\varphi: A \otimes B \rightarrow D$$

такой, что

$$\varphi_{i_A} = f, \quad \varphi_{i_B} = g.$$

Соответствующая диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & A \otimes B \\ \downarrow f & \swarrow \varphi & \uparrow i_B \\ D & \xleftarrow{g} & B \end{array} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} i_A(a) &= a \otimes 1_B \\ i_B(b) &= 1_A \otimes b \end{aligned} \quad \forall a \in A, \quad b \in B.$$

Чтобы диаграмма (20) была коммутативна, мы должны определить φ как

$$\varphi(a \otimes b) = f(a)g(b).$$

φ – единственный, так как образы i_A и i_B порождают A и B .

Итак, в категории коммутативных алгебр копроизведение – это просто тензорное произведение. В категории некоммутативных алгебр такого смысла у тензорного произведения нет, хотя само тензорное произведение активно используется. Ко-произведение (или свободное произведение) в категории некоммутативных алгебр строится примерно так же, как для категории групп Grp.

Уравнители

Еще один частный случай пределов – это уравнители и коуравнители.

Определение. Пусть

$$f, g: a \rightrightarrows b.$$

Их *уравнителем*

$$m = \text{eq}(f, g)$$

называется такой морфизм

$$\begin{aligned} m: c &\rightarrow a, \\ fm &= gm, \end{aligned}$$

где c – некий объект, что для любого морфизма

$$h: d \rightarrow a$$

такого, что

$$fh = gh,$$

\exists единственный морфизм

$$t: d \rightarrow c,$$

что

$$h = mt.$$

Нарисуем соответствующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{m} & a & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & b \\ & \swarrow t & \nearrow h & & \\ & & d & & \end{array}$$

Примеры. 1. В Sets, Top, Grp, R-Mod, если

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

– соответствующие морфизмы, то их уравнитель $\text{eq}(f, g)$ – вложение подмножества

$$\{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$$

(в Top это топология подмножества).

2. Если $f = g$, то

$$\text{eq}(f, g) = \text{id}_A.$$

Коуравнители

Коуравнители в категории C – это уравнители в C^{op} .

Определение. Пусть

$$f, g: a \rightrightarrows b$$

– морфизмы. Их *коуравнитель* $\text{coeq}(f, g)$ – такой морфизм

$$p: f \rightarrow c,$$

где c – некоторый объект, что

$$pf = pg$$

и для \forall

$$h: b \rightarrow d,$$

что

$$hf = hg,$$

\exists единственный морфизм

$$t: c \rightarrow d,$$

что

$$h = tp.$$

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} a & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & b & \xrightarrow{p} & c \\ & & \searrow h & & \swarrow t \\ & & & & d \end{array}$$

Примеры. 1. В R-Mod рассмотрим гомоморфизмы модулей

$$f, g: A \rightrightarrows B.$$

Коуравнитель здесь – это естественный сюръективный гомоморфизм

$$p: B \rightarrow C,$$

где

$$C = B / \langle f(a) - g(a) \mid a \in A \rangle_R,$$

где $\langle f(a) - g(a) \mid a \in A \rangle_R$ – подмодуль, порожденный разностями $f(a) - g(a)$.

2. В Grp коуравнитель – это естественный сюръективный гомоморфизм

$$B \rightarrow B/N,$$

где N – нормальное замыкание элементов $f(a)g(a)^{-1}$, где $a \in A$.

3. В $Sets$ и Top коуравнитель – это

$$B \rightarrow B/\sim,$$

где \sim – наименьшее отношение эквивалентности на множестве B такое, что

$$f(a) \sim g(a) \quad \forall a \in A.$$

B/\sim – это множество классов эквивалентности.

Соответствующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{h} & D \\ & \xrightarrow{g} & \downarrow & \nearrow & \\ & & B/\sim & & \end{array} \quad (21)$$

Если

$$f: A \rightarrow B$$

– отображение множеств, то при помощи него можно переносить топологию с одного множества на другое.

Если B – топологическое пространство, то назовем *открытыми в A* прообразы открытых подмножеств в B . Это задает на A наименьшую топологию, в которой f непрерывна.

Если A – топологическое пространство, то назовем *открытыми в B* подмножества, прообразы которых открыты. Это наибольшая топология на B , в которой f непрерывно.

В рассматриваемом примере в Top мы индуцируем на фактормножестве B/\sim фактортопологию. Отображение из B/\sim в D на (21) автоматически будет непрерывным.

Предел

Пусть

$$T: J \rightarrow C$$

– функтор.

Определение. Функтор T называется *константным*, если для \forall объекта j из J

$$Tj = a,$$

где a – фиксированный объект в C .

$$Tf = \text{id}_a$$

для \forall морфизма f . Такой функтор будем обозначать a (объектом).

Определение. *Конусом* α с вершиной a и основанием T называется естественное преобразование

$$a \Rightarrow T.$$

Естественное преобразование означает, что каждому объекту соответствует некий морфизм из образа объекта j под действием функтора a в образ Tj объекта j под действием функтора T . Соответствующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ \alpha_j \swarrow & & \searrow \alpha_i \\ Tj & \xleftarrow{f} & Ti \end{array} \quad (22)$$

Здесь

$$f: i \rightarrow j$$

– морфизм. Простыми словами, конус – это набор морфизмов из a в T , согласованных следующим образом (22).

Определение. *Предельный конус* – это универсальный притягивающий объект функтора T в категории запятой $(\text{const} \downarrow C^J)$, где

$$\text{const}: C \rightarrow C^J$$

сопоставляет объекту его константный функтор, C^J – функторы $J \rightarrow C$.

Рассмотрим два конуса с основанием T (уже введенный ранее конус с вершиной a и еще один с вершиной b):

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow \beta_i \\ & Tj & \end{array}$$

Конус

$$\alpha: a \Rightarrow T$$

предельный, если \forall конуса

$$\beta: b \Rightarrow T$$

\exists единственный морфизм φ такой, что

$$\beta_i = \alpha_i \varphi$$

\forall объектов i из J :

$$\begin{array}{ccc} a & \xleftarrow{\varphi} & b \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow \beta_i \\ & T_j & \end{array}$$

Определение. Если \exists предельный конус, описанный выше, то пишут, что

$$a = \lim T$$

– предел функтора T .

Определение. Категория называется *дискретной*, если в ней есть только объекты и тождественные морфизмы.

Примеры. 1. Пусть J – малая дискретная категория, функтор

$$T: J \rightarrow \mathcal{C}$$

задает каждому $j \in J$ объект Tj . Конус $a \Rightarrow T$ – просто семейство морфизмов

$$\alpha_j: a \rightarrow Tj$$

то есть

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ \alpha_j \swarrow & & \searrow \alpha_i \\ T_j & & T_i \end{array}$$

Предел здесь – это произведение объектов Tj .

2. Рассмотрим случай, когда J состоит из двух объектов 1 и 2 и стрелок между ними:

$$J: \text{id}_1 \hookrightarrow 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma_1} \\ \xrightarrow{\gamma_2} \end{array} 2 \hookleftarrow \text{id}_2$$

Функтор

$$T: J \rightarrow \mathcal{C}$$

$$T_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{T\gamma_1} \\ \xrightarrow{T\gamma_2} \end{array} T_2$$

Итак, получается, дано 2 объекта и 2 морфизма. Забегая вперед, скажем, что предел здесь – уравниватель. Конус $a \Rightarrow T$ имеет вид

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{T\gamma_1} \\ \xrightarrow{T\gamma_2} \end{array} & T_2 \\ \alpha_1 \swarrow & & \searrow \alpha_2 \\ & a & \end{array} \quad (23)$$

Заметим, что у уравнителей всегда фигурировал один морфизм, а (23) их два: α_1 и α_2 . Противоречия здесь нет. Условия, при которых (23) является конусом:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= (T\gamma_1)\alpha_1 \\ \alpha_2 &= (T\gamma_2)\alpha_1\end{aligned}$$

Отсюда

$$(T\gamma_1)\alpha_1 = (T\gamma_2)\alpha_1.$$

Итак, α_2 всегда есть и определено однозначно. То есть такой предел соответствует уравнителю. Вообще говоря, так говорить не совсем корректно. Предел мы определили как объект, а уравнитель – это соответствующий морфизм. Предел здесь – это область определения уравнителя.

3. Pullback (коуниверсальный квадрат).

Категория J имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \downarrow \gamma_2 \\ 1 & \xrightarrow{\gamma_1} & 3\end{array}$$

Конус здесь – это

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha_2} & T_2 \\ \alpha_2 \downarrow & \searrow \alpha_3 & \downarrow T\gamma_2 \\ T_1 & \xrightarrow{T\gamma_1} & T_3\end{array}$$

α_3 определено однозначно:

$$\alpha_3 = (T\gamma_2)\alpha_2 = (T\gamma_1)\alpha_1.$$

Про него мы далее говорить не будем.

Расшифровывая определение предела, получаем следующее. Пусть

$$\begin{aligned}f &: a \rightarrow c, \\ g &: b \rightarrow c\end{aligned}$$

– морфизмы. Квадрат, составленный из морфизмов f, g, h, t где

$$\begin{aligned}h &: d \rightarrow a, \\ t &: d \rightarrow b,\end{aligned}$$

называется *коуниверсальным* (или *пулбэком*), если

- 1) $gt = fh$;
- 2) \forall других морфизмов

$$\begin{aligned}\alpha &: p \rightarrow a, \\ \beta &: p \rightarrow b\end{aligned}$$

таких, что

$$f\alpha = g\beta,$$

∃ единственный морфизм

$$\varphi: p \rightarrow d,$$

что диаграмма (24) коммутативна.

$$\begin{array}{ccccc}
 p & & & & \\
 \downarrow \alpha & \searrow \beta & & & \\
 & & d & \xrightarrow{t} & b \\
 & \searrow \varphi & \downarrow h & & \downarrow g \\
 & & a & \xrightarrow{f} & c
 \end{array} \tag{24}$$

В этом случае предел d обозначается следующим образом:

$$d = a \times_c b.$$

Рассмотрим **примеры пулбэка**.

а. Пусть

$$\begin{aligned}
 f: A &\rightarrow C, \\
 g: B &\rightarrow C
 \end{aligned}$$

– гомоморфизмы групп. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 A \times_C B & \xrightarrow{\quad} & B \\
 \downarrow \pi & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Здесь пулбэк

$$A \times_C B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\} \subseteq A \times B \tag{25}$$

– так называемое *расслоенное произведение*. Если $C = \{1\}$, то

$$A \times_C B = A \times B.$$

Поймем, почему это так. Рассмотрим D – объект в категории групп и гомоморфизмы

$$D \rightarrow A, \quad D \rightarrow B,$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\quad} & A \times_C B & \xrightarrow{\quad} & B \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\
 D & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array} \tag{26}$$

коммутативна. Тогда, действительно, все пропускается через подгруппу (25). На самом деле в диаграмме (26) морфизмы

$$A \times_C B \rightarrow A \text{ и } A \times_C B \rightarrow B$$

– это проекции π_A и π_B соответственно. Напомним,

$$\pi_A(a, b) = a, \quad \pi_B(a, b) = b.$$

б. Если $f = g$, то пулбэк называется *ядерной парой* (в любой категории).

Рассмотрим пример в Sets:

$$\begin{array}{ccc} A \times_B A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Здесь

$$A \times_C = \{(a, b) \mid a, b \in A, f(a) = f(b)\} \quad (27)$$

– отношение эквивалентности

$$a \sim b, \text{ если } f(a) = f(b). \quad (28)$$

Замечание 4.1. В категории групп такое отношение, когда есть гомоморфизм групп, определяется ядром – два элемента эквивалентны (переходят в один и тот же) \iff они отличаются на элемент из ядра. Если не задано никакой операции на множестве или операция «не очень хорошая» (например, необязательно есть необратимые элементы), приходится работать с отношениями эквивалентности. Отношение эквивалентности (28) и заменяет собой ядро, поэтому (27) и называется *ядерной парой*.

4. Рассмотрим счетную диаграмму в категории коммутативных колец с 1:

$$\mathbb{Z}_p \longleftarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longleftarrow \mathbb{Z}_{p^3} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longleftarrow \dots$$

Все гоморфизмы здесь определяются следующим образом:

$$\bar{1} \mapsto \bar{1}$$

– класс единицы (порождающего элемента) отображается в класс единицы.

Ее предел – *целые p -адические числа* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Каждый элемент можно рассматривать как бесконечную последовательность цифр в p -ичной системе счисления

$$\dots m_n \dots m_2 m_1 m_0.$$

Лекция 5. Направленности. Ядро морфизма. Свойства коуниверсальных квадратов. Полнота в малом

Направленность. Обратный (проективный) предел

Определение. Частично упорядоченное множество Λ называется *направленностью*, если $\forall \alpha, \beta \in \Lambda \exists \gamma \in \Lambda$ такой, что

$$\gamma \geq \alpha, \quad \gamma \geq \beta.$$

Если рассматривать Λ как категорию и рассмотреть функтор

$$\alpha \mapsto A_\alpha,$$

где A_α – объект в категории. Пусть также для $\forall \alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in \Lambda \exists$ морфизм

$$f_{\alpha\beta} : A_\alpha \rightarrow A_\beta.$$

Тогда предел этого функтора называется *обратным* или *проективным пределом* и обозначается

$$\lim_{\leftarrow \alpha} \text{ или } \lim_{\alpha} \text{proj.}$$

Ядро морфизма

Когда мы ранее говорили о уравнителях и коуравнителях, мы не рассмотрели один важный частный случай – ядра и коядра.

Определение. Пусть \mathcal{C} – категория с нулевым объектом. Тогда *ядром* морфизма

$$f : a \rightarrow b$$

называется его уравнитель с нулевым морфизмом

$$\ker f := \text{eq}(f, 0).$$

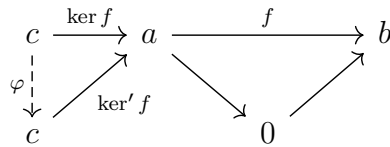
Изобразим ядро морфизма f на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{\ker f} & a & \xrightarrow{f} & b \\ & & & \searrow & \nearrow \\ & & & 0 & \end{array} \quad (29)$$

В случае, когда рассматриваемая категория – это категория групп, это будет ядро морфизма в обычном понимании. Если точнее, это будет гомоморфизм, который вкладывает ядро морфизма в обычном понимании в подгруппу на диаграмме (29).

Если $\ker' f$ – другое ядро морфизма f , то $\exists!$ изоморфизм φ такой, что

$$\ker f = (\ker' f) \varphi.$$



Введем обозначение

$$\text{Ker } f := c.$$

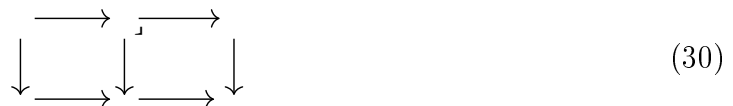
Итак, сам объект мы можем назвать ядром.

Свойства пулбэков

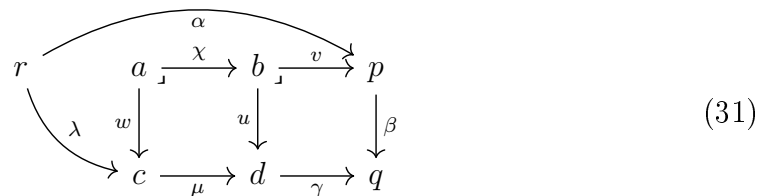
Обсудим некоторые свойства пулбэков.

Свойство пары коуниверсальных квадратов с общей стороной

Теорема 5.1. Пусть в диаграмме (30) правый квадрат коуниверсален. Тогда внешний прямоугольник коуниверсален \iff коуниверсален левый квадрат.



Доказательство. \Leftarrow Обозначим на диаграмме (30) некоторым образом объекты. Пусть также дан другой прямоугольник с таким же нижним и правым морфизмом (обозначим объект в его левой верхней вершине как r):



По диаграмме (31) получается, что

$$\gamma(\mu\lambda) = \beta\alpha.$$

Отсюда $\exists!$

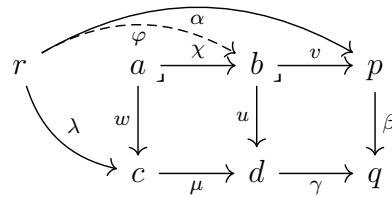
$$\varphi: r \rightarrow b$$

такой, что

$$v\varphi = \alpha, \tag{32}$$

$$u\varphi = \mu\gamma. \tag{33}$$

Обозначим φ на диаграмме:

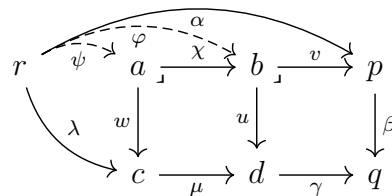


Из (32) следует, что $\exists!$ морфизм ψ такой, что

$$\lambda = w\psi, \quad (34)$$

$$\varphi = \chi\psi \quad (35)$$

Обозначим ψ на диаграмме:



Из (32) и (35) получаем

$$v\chi\psi = v\varphi = \alpha. \quad (36)$$

Единственность ψ , удовлетворяющего условиям (34) и (36), следует из соображений ниже.

Пусть морфизм

$$\psi_0 : r \rightarrow a$$

таков, что

$$\begin{cases} v\chi\psi_0 = \alpha \\ \lambda = w\psi_0 \end{cases}$$

Тогда

$$v\chi\psi_0 = \alpha.$$

С другой стороны,

$$u\chi\psi_0 = \mu w\psi_0 = \mu\lambda,$$

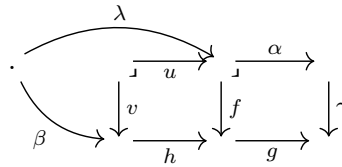
откуда с учетом (33) и (33)

$$\chi\psi_0 = \varphi.$$

Таким образом, ψ удовлетворяет условиям (34) и (35), откуда

$$\psi = \psi_0.$$

⇒ Докажем, что из того, что внешний прямоугольник коуниверсален, следует, что левый квадрат коуниверсален. Обозначим каким-то образом морфизмы на нашей диаграмме:¹²



Пусть

$$f\lambda = h\beta.$$

Тогда

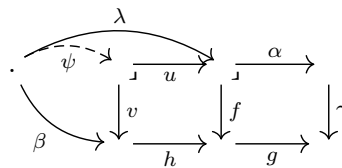
$$\gamma\alpha\lambda = gf\lambda = gh\beta.$$

В силу коуниверсальности внешнего прямоугольника $\exists!$ ψ такое, что

$$\alpha u\psi = \alpha\lambda, \quad (37)$$

$$v\psi = \beta. \quad (38)$$

На диграмме обозначим ψ :



Тогда

$$fu\psi = hv\psi = h\beta = f\lambda. \quad (39)$$

В силу единственности морфизма для коуниверсального квадрата справа (37) и (39) влекут

$$\lambda = u\psi.$$

□

Коуниверсальный квадрат как функтор между категориями запятой

Фиксируем морфизм

$$f: a \rightarrow b.$$

Пусть в категории \mathcal{C} \exists все коуниверсальные квадраты.

Для каждого морфизма

$$g: c \rightarrow b,$$

¹²Здесь левый из знаков коуниверсальности относится к внешнему прямоугольнику.

Упражнение 5.1. Категория полна в малом \iff в ней \exists малые произведения и нулбэжи.

Упражнение 5.2. Чему равно $a \times t$, где a – произвольный объект, а t – универсальный притягивающий объект?

Доказательство. (Теорема 5.2)

\Rightarrow Очевидно, так как уравнители и произведения – это пределы.

\Leftarrow Пусть дан функтор

$$T: J \rightarrow C,$$

где J – малая категория. Докажем, что $\exists \lim T$.

Построим диаграмму

$$\prod_{j \in \text{Ob } J} Tj \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_1} \\ \xrightarrow{\varphi_2} \end{array} \prod_{f: i \rightarrow j} Tj$$

Произведение в правой части диаграммы берется по множеству всех морфизмов (оно также малое). φ_1 задается при помощи следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_1} & \prod_f Tj \\ & \searrow \pi_j & \downarrow \pi_f \\ & & Tj \end{array} \quad (40)$$

φ_2 определим через следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_2} & \prod_f Tj \\ \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_f \\ Ti & \xrightarrow{Tf} & Tj \end{array} \quad (41)$$

Пусть

$$g = \text{eq}(\varphi_1, \varphi_2)$$

– уравнитель,

$$g: a \rightarrow \prod_j Tj$$

Добавим g на диаграммы (40) и (41):

$$\begin{array}{ccc} a \xrightarrow{g} \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_1} & \prod_f Tj \\ & \searrow \pi_j & \downarrow \pi_f \\ & & Tj \end{array} \quad (42)$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{g} & \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_2} & \prod_f Tj \\
 & & \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_f \\
 & & Ti & \xrightarrow{Tf} & Tj
 \end{array} \tag{43}$$

Утверждается, что

$$\pi_i g : a \rightarrow Ti \tag{44}$$

– предельный конус, то есть $a = \lim T$.

Проверим, что (44) – конус, то есть что

$$(Tf)\pi_i g = \pi_j g$$

для \forall

$$f : i \rightarrow j \text{ в } J.$$

Опираясь на диаграмму (42), можем записать

$$\pi_j g = \pi_f \varphi_1 g.$$

Так как g – уравниватель,

$$\pi_j g = \pi_f \varphi_2 g.$$

В силу диаграммы (43),

$$\pi_f \varphi_2 g = (Tf)\pi_i g.$$

Это и требовалось показать.

Докажем теперь универсальность. Пусть

$$\beta_j : b \rightarrow Tj$$

– другой конус. \exists единственный

$$\beta : b \rightarrow \prod_j Tj$$

такой, что

$$\pi_j \beta = \beta_j.$$

Изобразим это на диаграммах (42) и (43):

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{g} & \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_1} & \prod_f Tj \\
 & \nearrow \beta & & \searrow \pi_j & \downarrow \pi_f \\
 b & \xrightarrow{\beta_j} & Tj & &
 \end{array} \tag{45}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{g} & \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_2} & \prod_f Tj \\
 & \nearrow \beta & \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_f \\
 b & \xrightarrow{\beta_i} & Ti & \xrightarrow{Tf} & Tj
 \end{array} \tag{46}$$

Покажем, что

$$\varphi_1\beta = \varphi_2\beta.$$

Достаточно показать, что

$$\pi_f\varphi_1\beta = \pi_f\varphi_2\beta$$

для \forall

$$f: i \rightarrow j.$$

Воспользуемся коммутативностью диаграмм (45) и (46). Из (45) получаем

$$\pi_g\varphi_1\beta = \pi_j\beta = \beta_j.$$

Так как β_i – конус,

$$\beta_j = (Tf)\beta_i.$$

Из диаграммы (46) получаем

$$(Tf)\beta_i = \pi_f\varphi_2\beta.$$

Таким образом,

$$\varphi_1\beta = \varphi_2\beta.$$

Так как g – уравниватель, $\exists!$ морфизм

$$\psi: b \rightarrow a$$

такой, что

$$\beta = g\psi. \tag{47}$$

Изобразим ψ на диаграмме (45):

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{g} & \prod_j Tj & \xrightarrow{\varphi_1} & \prod_f Tj \\ \uparrow \psi & & \nearrow \beta & & \searrow \pi_j \\ b & & & & Tj \\ & & \xrightarrow{\beta_j} & & \downarrow \pi_f \end{array}$$

(47) выполнено \iff

$$\pi_i\beta = (\pi_i g)\psi. \tag{48}$$

В правой части (48) записаны части нашего конуса, а левая равна $\beta_i \forall i$.

□

Сохраняющие, отражающие и создающие пределы функторы

Дадим некоторые определения, которые часто возникают в теории категорий.

Определение. Говорят, что функтор

$$F : C \rightarrow D$$

сохраняет предел $\lim T$, где

$$T : J \rightarrow C,$$

если для предельного конуса¹³

$$\alpha_j : a \rightarrow Tj, \quad a = \lim T$$

конус

$$F\alpha_j : Fa \rightarrow FTj$$

является предельным для функтора

$$FT : J \rightarrow D.$$

Определение. Говорят, что функтор

$$F : C \rightarrow D$$

отражает предел $\lim T$, где

$$T : J \rightarrow C,$$

если \forall конуса

$$\alpha_j : a \rightarrow Tj$$

такого, что

$$F\alpha_j : Fa \rightarrow FTj$$

– предельный конус для FT , конус α_j – предельный для T .

Определение. Говорят, что функтор

$$F : C \rightarrow D$$

создает предел $\lim T$, где

$$T : J \rightarrow C,$$

если \exists предел $\lim FT$ и для предельного конуса

$$\beta_j : b \rightarrow FTj$$

$\exists!$ конус

$$\alpha_j : a \rightarrow Tj,$$

где a – некоторый объект, такой, что

$$F\alpha_j = \beta_j$$

и конус α_j – предельный для T .

Как правило, введенная выше терминология применяется для описания поведения функторов по отношению к *малым* пределам (функтор сохраняет малые пределы, отражает все малые пределы или создает малые пределы). Обычно речь идет категориях, в которых уже известно, что соответствующие пределы существуют.

¹³Как мы знаем, два предельных конуса отличаются на изоморфизм. Их образы тоже будут отличаться на изоморфизм, так как функтор изоморфизмы переводит в изоморфизмы. Поэтому достаточно, чтобы для какого-то одного предельного конуса выполнялось условие определения.

Пределы в категории Sets

Пусть J – малая категория.

Пусть

$$T : J \rightarrow \text{Sets}$$

– функтор. Тогда $\lim T$ – это подмножество в $\prod_i T_i$, состоящее из наборов $(x_i)_i$ таких, что

$$(Tf)(x_i) = x_j$$

для \forall

$$f : i \rightarrow j \text{ в } J.$$

В книге С. Маклейна «Категории для работающего математика»

$$\lim T = \text{Cone}(\{*\}, T).$$

Здесь через Cone обозначены конусы. Действительно, для каждого конуса мы выбираем один элемент в каждом T_i :

$$\begin{array}{ccc} & & T_i \\ & \nearrow^{\alpha_i} & \\ \{*\} & & \\ & \searrow_{\alpha_j} & \\ & & T_j \end{array} \quad (49)$$

В соответствии, которое мы писали до этого,

$$x_i := \alpha_i(*).$$

Все T_i в (49) должны быть согласованы:

$$\begin{array}{ccc} & & T_i \\ & \nearrow^{\alpha_i} & \downarrow Tf \\ \{*\} & & T_j \\ & \searrow_{\alpha_j} & \end{array}$$

Лекция 6. Пределы в категориях Top, R-Mod. Непрерывность функтора Hom. Пределы, зависящие от параметра

Пределы в категориях Top и R-Mod

Напомним, что если

$$T: J \rightarrow \text{Sets}$$

– функтор, то $\lim T$ – подмножество в $\prod_{j \in \text{Ob } J} Tj$ наборов

$$(a_j)_{j \in \text{Ob } J}, \quad a_j \in Tj$$

таких, что

$$(Tf)(a_i) = a_j$$

для \forall

$$f: i \rightarrow j \text{ в } J.$$

В категории Top то же самое:

$$\lim T \subseteq \prod_{j \in \text{Ob } J} Tj,$$

где $\lim T$ – такой же, как в категории Sets, $\prod_{j \in \text{Ob } J} Tj$ – топология произведения, которая индуцируется в $\lim T$.

Нарисуем диаграмму, чтобы понять, почему все морфизмы, участвующие в описании выше, непрерывны. Все отображения ниже непрерывны:

$$\begin{array}{ccc} \lim T & \hookrightarrow & \prod_{i \in \text{Ob } J} Tj \\ & & \downarrow \pi_i \\ b & \xrightarrow[\text{конус}]{\beta_i} & Tj \end{array}$$

Тогда

$$\begin{array}{ccc} \lim T & \hookrightarrow & \prod_{i \in \text{Ob } J} Tj \\ \uparrow \text{в силу} & \nearrow & \downarrow \pi_i \\ & & Tj \\ b & \xrightarrow[\text{конус}]{\beta_i} & Tj \end{array}$$

В категории R-Mod, где R – ассоциативное кольцо с 1, аналогично.

Таким образом, забывающие функторы

$$\begin{array}{l} \text{Top} \rightarrow \text{Sets} \\ \text{R-Mod} \rightarrow \text{Sets} \rightarrow \text{Sets} \end{array}$$

создают малые пределы.

Непрерывность функторов

Определение. Говорят, что функтор *непрерывный*, если он сохраняет малые пределы.

Теорема 6.1. Пусть C – категория, c – фиксированный объект в C . Тогда функтор

$$\text{Hom}(c, -) = C(c, -) \quad (50)$$

непрерывен.

Доказательство. Распишем (50):

$$C(c, -) : C \rightarrow \text{Sets},$$

Ном-функтор, примененный к объекту d , по определению

$$C(c, -)d := C(c, d).$$

Пусть

$$f : a \rightarrow b$$

– морфизм. Тогда

$$\begin{aligned} C(c, f) : C(c, a) &\rightarrow C(c, b) \\ g &\mapsto fg, \end{aligned}$$

где

$$g : c \rightarrow b.$$

Пусть

$$T : J \rightarrow C$$

– функтор,

$$\alpha_j : a \rightarrow Tj$$

– предельный конус. Докажем, что

$$C(c, \alpha_j) : C(c, a) \rightarrow C(c, Tj)$$

– предельный конус функтора

$$C(c, T(-)) : J \rightarrow \text{Sets}.$$

Пусть

$$\beta_j : X \rightarrow C(c, Tj)$$

– другой конус над функтором $C(c, T(-))$. X – множество. При фиксированном $x \in X$ получим

$$\beta_j(x) \in C(c, Tj),$$

то есть

$$\beta_j(x) : c \rightarrow Tj$$

– конус над T в C .

Тогда \exists единственный морфизм

$$\gamma(x) : c \rightarrow a$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\beta_j(x)} & Tj \\ \gamma(x) \searrow & & \nearrow \alpha_j \\ & a & \end{array}$$

Мы получаем отображение

$$\gamma : X \rightarrow C(c, a)$$

такое, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta_i} & C(c, Tj) \\ \gamma \searrow & & \nearrow C(c, \alpha_j) \\ & C(c, a) & \end{array}$$

Единственность отображения γ следует из того, что подставив $x \in X$, получим диаграмму уже в C . \square

Пределы, зависящие от параметра. Пределы в категориях функторов

Произведение малых категорий. Бифунктор

Определение. Пусть I и J – малые категории. Их *произведение* в Cats – это $I \times J$, где объекты – это пары

$$(i, j), \quad i \in \text{Ob } I, \quad j \in \text{Ob } J.$$

Если $i_1, i_2 \in \text{Ob } I, j_1, j_2 \in \text{Ob } J$, то

$$(I \times J)((i_1, j_1), (i_2, j_2)) = \left\{ (f, g), \text{ где } \begin{array}{l} f : i_1 \rightarrow i_2 \text{ в } I \\ g : j_1 \rightarrow j_2 \text{ в } J \end{array} \right\}$$

Определение. Функтор

$$T : I \times J \rightarrow C$$

называется бифунктором (так как по сути у него два аргумента).

Соответствие между бифункторами и функторами в категорию функторов

Построим соответствие между бифункторами и функторами в категорию функторов.

Забегая вперед, скажем, что \exists естественные биекции

$$\text{Sets}(A \times B, C) \cong \text{Sets}(A, \text{Sets}(B, C)),$$

где A, B, C – множества.

Аналогично получаем, что \exists естественная биекция

$$\text{CAT}(I \times J, C) \cong \text{CAT}(I, \text{CAT}(J, C)).$$

Здесь CAT – категория больших категорий, $\text{CAT}(J, C) = C^J$.

Мы ставим в соответствие функторы

$$T: I \times J \rightarrow C \mapsto \tilde{T}: I \rightarrow C^J.$$

$$\tilde{T}(i)(j) := T(i, j)$$

$$\tilde{T}(i)(g) := T(\text{id}_i, g)$$

для \forall морфизмов g в J .

$$\tilde{T}(f)(j) = T(f, \text{id}_j)$$

– естественное преобразование. Действительно, пусть

$$f: i_1 \rightarrow i_2,$$

$$g: j_1 \rightarrow j_2.$$

Тогда

$$\begin{array}{ccc} T(i_1, j_1) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_{j_1})} & T(i_2, j_1) \\ T(\text{id}_{i_1}, g) \downarrow & & \downarrow T(\text{id}_{i_2}, g) \\ T(i_1, j_2) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_{j_2})} & T(i_2, j_2) \end{array} \quad (51)$$

Здесь

$$\begin{array}{ccc} T(i_1, j_1) & & T(i_2, j_1) \\ T(\text{id}_{i_1}, g) \downarrow & \text{и} & \downarrow T(\text{id}_{i_2}, g) \\ T(i_1, j_2) & & T(i_2, j_2) \end{array}$$

– функторы $\tilde{T}(i_1)$ и $\tilde{T}(i_2)$ соответственно.

Обе композиции (51) равны $T(f, g)$, так как это T – бифунктор, то есть $\tilde{T}(f)$ – естественное преобразование.

Обратно, \tilde{T} однозначно задает T . Надо доопределить

$$T(f, g) := T(\text{id}_{i_2}, g)T(f, \text{id}_{j_1}).$$

Определение превращает T в бифунктор в силу коммутативности диаграммы (51).

Покомпонентное вычисление пределов в категориях функторов

Теорема 6.2. Пусть дан функтор

$$T: I \times J \rightarrow C,$$

C – категория. Пусть $\forall j \in J$

$$\exists \lim_{j \in \text{Ob } J} T(i, j).$$

Тогда \exists предел

$$\lim \tilde{T}: J \rightarrow C,$$

причем

$$(\lim \tilde{T})(j) = \lim_{i \in \text{Ob } I} T(i, j),$$

то есть пределы в категории C^J функторов $J \rightarrow C$ вычисляются покомпонентно.

Доказательство. Фиксируем морфизм

$$f: j_1 \rightarrow j_2 \text{ в } J.$$

Рассмотрим предельные конусы:

$$\begin{array}{ccc} \lim_i T(i, j_1) & \longrightarrow & T(i, j_1) \\ & & \downarrow T(\text{id}_i, g) \\ \lim_i T(i, j_2) & \longrightarrow & T(i, j_2) \end{array}$$

Заметим, что

$$\begin{array}{ccc} \lim_i T(i, j_1) & \longrightarrow & T(i, j_1) \\ & & \downarrow T(\text{id}_i, g) \\ & & T(i, j_2) \end{array}$$

– конус над $T(-, j_2)$.

Тогда

$$\begin{array}{ccc} \lim_i T(i, j_1) & \longrightarrow & T(i, j_1) \\ \lim_i T(i, g) \downarrow & & \downarrow T(\text{id}_i, g) \\ \lim_i T(i, j_2) & \longrightarrow & T(i, j_2) \end{array}$$

Определим морфизм $\lim_i T(i, g)$ через коммутативность диаграммы выше.

В силу единственности это превращает $\lim_i T(i, -)$ в функтор.

Осталось понять, что

$$\lim_i T(i, -) = \lim \tilde{T}.$$

Предельный конус

$$\lim_i T(i, -) \longrightarrow T(i, -)$$

из естественных преобразований. Конусом это будет в силу коммутативности

$$\begin{array}{ccc} \lim_i T(i, j) & \longrightarrow & T(i_1, j) \\ & \searrow & \downarrow T(f, \text{id}_j) \\ & & T(i_2, j) \end{array}$$

$$\forall f: i_1 \rightarrow i_2 \text{ в } I \text{ и } \forall j \in \text{Ob } J.$$

Пусть

$$F \Rightarrow T(i, -)$$

другой конус в C^J , то есть $\forall j$

$$\begin{array}{ccc} \lim_i T(i, j) & & \\ \alpha_j \uparrow & \searrow & \\ Fj & \longrightarrow & T(i, j) \end{array} \quad (52)$$

Обозначим компоненты через α_j . Тогда получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \lim_i T(i, -) & & \\ \alpha \uparrow & \searrow & \\ F & \Longrightarrow & T(i, -) \end{array} \quad (53)$$

α единственно, так как всякое α_j единственно. Диаграмма с α (53) коммутативна, так как коммутативна диаграмма с α_j (52).

Естественность α следует из того, что $\lim_i T(i, j)$ – предел, и коммутативности диаграммы ниже. Пусть

$$g: j_1 \rightarrow j_2.$$

Диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} \lim_i T(i, j_1) & \longrightarrow & T(i, j_1) & & \\ \downarrow \lim_i T(i, g) & \swarrow \alpha_{j_1} & \nearrow & \downarrow T(\text{id}_i, g) & \\ \lim_i T(i, j_2) & \longrightarrow & Fj_1 & \longrightarrow & T(i, j_2) \\ \downarrow \alpha_{j_2} & \swarrow & \downarrow Fg & \searrow & \\ & & Fj_2 & \longrightarrow & T(i, j_2) \end{array}$$

Правая грань коммутует, так как $F \Rightarrow T(i, -)$ – конус. Задняя грань коммутует по определению $\lim_i T(i, g)$. $\left(\lim_i T(i, g)\right) \alpha_{j_1}$ и $\alpha_{j_2} Fg$ становятся равными после композиции с

$$\lim_i T(i, j_2) \rightarrow T(i, j_2) \forall i.$$

То есть это два морфизма, по которым конус

$$Fj_1 \rightarrow T(i, j_2)$$

пропускается через предельный конус, то есть

$$\left(\lim_i T(i, g)\right) \alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} Fg,$$

и α – естественное преобразование. □

Замечание 6.1. Мы не раз будем пользоваться трюком из доказательства выше, чтобы доказывать равенство двух морфизмов между одинаковыми объектами. Предположим, хотим доказать

$$a \Longrightarrow b$$

Мы рассмотрим предельный конус Tj :

$$a \Longrightarrow b \xrightarrow{\alpha_j} Tj$$

и покажем, что композиции конуса со всеми компонентами совпадают для $\forall j$. В силу единственности сравнивающего морфизма для предельного конуса в определении предела исходные морфизмы будут равны.

Равенство повторного предела двойному

Теорема 6.3. Пусть

$$T: I \times J \rightarrow C$$

– функтор. Пусть

$$\forall i \exists \lim_j T(i, j) \text{ и } \exists \lim_i \lim_j T(i, j).$$

Тогда

$$\exists \lim_{i,j} T(i, j) = \lim_i \lim_j T(i, j).$$

Доказательство. Пусть

$$\beta_{ij}: b \rightarrow T(i, j) \tag{54}$$

– некий конус. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \lim_i \lim_j T(i, j) & \longrightarrow & \lim_j T(i, j) \\ & & \downarrow \\ b & \xrightarrow{\beta_{ij}} & T(i, j) \end{array}$$

Так как (54) – конус, для $\forall i$ это тоже конус. Поэтому существует следующее отображение γ_i :

$$\begin{array}{ccc} \lim_i \lim_j T(i, j) & \longrightarrow & \lim_j T(i, j) \\ & \nearrow \gamma_i & \downarrow \\ b & \xrightarrow{\beta_{ij}} & T(i, j) \end{array} \quad (55)$$

Можно рассмотреть диаграмму для i_1 и i_2 . Получим, что

$$\begin{array}{ccc} & & \lim_j T(i, j) \\ & \nearrow \gamma_i & \\ b & & \end{array}$$

тоже конус по i над функтором $\lim_j T(i, j)$. Поэтому \exists единственный морфизм h , делающий диаграмму (55) коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \lim_i \lim_j T(i, j) & \longrightarrow & \lim_j T(i, j) \\ \uparrow h & \nearrow \gamma_i & \downarrow \\ b & \xrightarrow{\beta_{ij}} & T(i, j) \end{array}$$

□

Лекция 7. Сопряженные функторы. Гомоморфизм графов. Пределы диаграмм как пределы функторов. Копредел. Универсальный квадрат

Следствия

Напомним, на прошлой лекции мы доказали, что если дан функтор

$$T: I \rightarrow C^J,$$

то $\lim T$ вычисляется покомпонентно.

Следствие. Если категория C полна в малом, то есть в C \exists все малые пределы, то \forall категории J категория C^J функторов $J \rightarrow C$ также полна.

Следствие. В прошлый раз мы доказали, что

$$\lim_{i,j} T(i, j) = \lim_i \lim_j T(i, j).$$

Отсюда следует, что можно менять знаки пределов местами:

$$\lim_i \lim_j T(i, j) = \lim_j \lim_i T(i, j).$$

Здесь

$$T: I \times J \rightarrow C.$$

Сопряженные функторы

Итак, мы говорили про предел функтора. Часто рассматривают не функтор, а какую-то диаграмму и ищут предел диаграммы, то есть универсальный конус над ней.

Прежде, чем перейти к обсуждению графов и диаграмм, дадим определение сопряженных функторов. Подробно сопряженные функторы будут рассматриваться немного позднее в курсе.

Определение. Пусть

$$F: X \rightarrow A, G: A \rightarrow X$$

– функторы, X, A – категории. Рассмотрим бифункторы

$$A(F-, -) \text{ и } X(-, G-): X^{\text{op}} \times A \rightarrow \text{Sets}.$$

Если эти бифункторы изоморфны, то говорят, что F – *левый сопряженный для G* , а G – *правый сопряженный для F* . Пишут: $F \dashv G$.

Расшифруем требование изоморфности бифункторов из определения . Это значит, что \exists естественная по $a \in \text{Ob } A$ и $x \in \text{Ob } X$ биекция

$$\alpha_{x,a} : A(Fx, a) \rightarrow X(x, Ga).$$

Естественность означает, что \forall пары морфизмов

$$\begin{aligned} f &: x' \rightarrow x, \\ g &: a \rightarrow a' \end{aligned}$$

диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\alpha_{x,a}} & X(x, Ga) \\ \downarrow A(Ff,g) & & \downarrow X(f,Gg) \\ A(Fx', a') & \xrightarrow{\alpha_{x',a'}} & X(x', Ga') \end{array}$$

Здесь для \forall

$$\begin{aligned} h &: Fx \rightarrow a \\ A(Ff, g)h &= gh(Ff). \end{aligned}$$

Определение. Левый сопряженный к забывающему функтору называется *свободным*.

Примеры. 1. Пусть функтор

$$\mathcal{F} : \text{Sets} \rightarrow \text{Grp}$$

определен как $\mathcal{F}(X)$ – свободная группа со свободными порождающими из множества X .

Пусть

$$f : X \rightarrow Y$$

– отображение. Тогда

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \longleftarrow & X \\ \exists! \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{F}(Y) & \longleftarrow & Y \end{array}$$

Забывающий функтор

$$U : \text{Grp} \rightarrow \text{Sets}.$$

Тогда $\mathcal{F} \dashv U$. Это означает, что

$$\text{Grp}(\mathcal{F}(X), G) \cong \text{Sets}(X, UG)$$

– естественная биекция по X и G .

Замечание 7.1. Подчеркнем, что понятие забывающего функтора не является категорным.

2. Сопряжение с прошлой лекции

$$\text{CAT}(I \times J, X) \cong \text{CAT}(I, C^J).$$

Здесь

$$(-) \times J \dashv (-)^J.$$

3. Сопряжение из пункта 2 – это обобщение следующего сопряжения:

$$\text{Sets}(X \times Y, Z) \cong \text{Sets}(X, \text{Sets}(Y, Z)).$$

4. Рассмотрим еще пример из линейной алгебры. Пусть \mathbb{K} – поле. Тогда

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}}(U \otimes V, W) \cong \text{Vect}_{\mathbb{K}}(U, \text{Vect}_{\mathbb{K}}(V, W)).$$

«Функтор \otimes сопряжен с функтором Hom ».

Пределы диаграмм как пределы функторов

Начнем с базовых определений.

Определение. *Ориентированный граф* – это пара (возможно, больших) множеств (V, E) (V мы называем «множество вершин», а E – «множество ребер») и отображений

$$s: E \rightarrow V$$

(«начало ребра») и

$$t: E \rightarrow V$$

(«конец ребра»):

$$s(e) \xrightarrow{e} t(e)$$

Определение. Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma &= (V, E, s, t) \\ \Gamma' &= (V', E', s', t') \end{aligned}$$

– графы. Тогда пара (f_0, f_1) , где

$$\begin{aligned} f_0: V &\rightarrow V', \\ f_1: E &\rightarrow E', \end{aligned}$$

называется *гомоморфизмом графов* $\Gamma \rightarrow \Gamma'$, если

$$\begin{aligned} s'(f_1(e)) &= f_0(s(e)) \\ t'(f_1(e)) &= f_0(t(e)) \end{aligned} \quad \forall e \in E.$$

Пример. Категории – графы, функторы – их гомоморфизмы.

Пусть \mathbf{Graphs} – категория малых¹⁴ графов. У нас есть забывающий функтор¹⁵

$$U: \mathbf{Cats} \rightarrow \mathbf{Graphs}.$$

У этого функтора есть левый сопряженный¹⁶:

$$\mathcal{F}: \mathbf{Graphs} \rightarrow \mathbf{Cats}.$$

Надо, чтобы \exists естественная биекция

$$\mathbf{Cats}(\mathcal{F}(\Gamma), C) \cong \mathbf{Graphs}(\Gamma, UC). \quad (56)$$

$$\begin{array}{ccc} & & U\mathcal{F}(\Gamma) \\ & \nearrow & \downarrow UM \\ \Gamma & \longrightarrow & UC \end{array}$$

$\exists!$ функтор

$$M: \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow C.$$

Объекты в $\mathcal{F}(\Gamma)$ – это вершины в Γ . Морфизмы в $\mathcal{F}(\Gamma)$ – это пути в Γ .

Упражнение 7.1. Проверить естественность (56) по Γ и C .

Рассмотрим произвольную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & & \searrow g \\ & & c \end{array} \quad (57)$$

Диаграмму можно определить как гомоморфизм некоторого графа в категорию.

Точно так же, как мы определяли конус над функтором, можно определить конус над диаграммой. Опустим формальное определение. Для (57) конус над диаграммой, например, будет иметь вид

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ a & \xrightarrow{f} & b \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ & c & \end{array} \quad (58)$$

Аналогично конусу над функтором определяется *конус над диаграммой*, а аналогично пределу функтора определяется *предел диаграммы*. Предельный конус над диаграммой доопределяется до конуса над функтором из соответствующей свободной категории. Пусть

$$T: \Gamma \rightarrow C$$

¹⁴Для определенности будем работать с малыми графами и малыми категориями.

¹⁵Напомним, \mathbf{Cats} – категория малых категорий.

¹⁶Левый сопряженный к забывающему, то есть свободный.

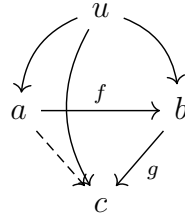
– диаграмма, ее можно доопределить до функтора

$$\tilde{T}: \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow C.$$

Тогда

$$\lim T = \lim \tilde{T}.$$

Здесь добавление новых стрелок, например, на диаграмме (58) стрелки $a \rightarrow c$ сохраняет коммутативность:



Копредел

Прежде, чем перейти к обсуждению копредела, скажем про функтор сопоставления каждой категории категории, двойственной к ней.

Сопоставление каждой категории категории, двойственной к ней $(-)^{\text{op}}$ – ковариантный функтор, определенный на категориях.

Пусть задан функтор

$$F: X \rightarrow A. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь соответствие

$$X^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}}. \quad (60)$$

Справедливо следующее:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & \in X^{\text{op}}(y, x) & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} & & Fy \\ & \xrightarrow{Ff} & \\ Fx & & \in A^{\text{op}}(Fy, Fx) \end{array}$$

Поэтому функтор (60) и обозначается F^{op} :

$$F^{\text{op}}: X^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}}.$$

Замечание 7.2. Как уже говорилось ранее, одно из преимуществ рассмотрения категорий – это то, что морфизмы (необязательно отображения) можно направить в другую сторону, то есть рассмотреть двойственную категорию.

Однако просто отображения мы не можем так просто направить в другую сторону. Функтор (59) состоит из двух отображений (на множестве объектов и на множестве морфизмов). Просто направить их в противоположную сторону не выйдет. Иногда в таком случае рассматриваются внутренние категории, когда вместо множества объектов и множества морфизмов рассматриваются два объекта в какой-то категории (а не множества объектов). Между ними есть сопоставление, композиция, морфизмы. Тогда мы можем действительно повернуть функтор в другую сторону. Это будет функтор между внутренними категориями в двойственной категории.

Определение. Пусть

$$T: J \rightarrow C$$

– функтор. Его *копредел* – это предел функтора

$$T^{\text{op}}: J^{\text{op}} \rightarrow C^{\text{op}}.$$

Распишем определение подробно. *Коконус над T с вершиной в a* – это естественное преобразование из функтора T в константный функтор a :

$$\alpha_j: Tj \rightarrow a.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Ti & \xrightarrow{\alpha_i} & a \\ Tf \searrow & & \nearrow \alpha_j \\ & Tj & \end{array}$$

коммутативна для \forall

$$\forall f: i \rightarrow j \text{ в } J.$$

Коконус α называется *предельным*, если \forall коконуса

$$\beta_j: Tj \rightarrow b$$

\exists единственный морфизм

$$\gamma: a \rightarrow b$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна для $\forall j \in \text{Ob } J$:

$$\begin{array}{ccc} Tj & \xrightarrow{\alpha_j} & a \\ \beta_j \searrow & & \swarrow \gamma \\ & b & \end{array}$$

Обозначение копредела:

$$\text{colim } T := a.$$

Применяя то, что мы говорили о пределах, к двойственным категориям, получим аналогичные результаты для копределов.

Замечание 7.3. Другие названия копредела:

- прямой предел \varinjlim ;
- индуктивный предел \varinjlim .

Эти варианты названия используются реже и считаются устаревшими для теории категорий, но могут встречаться в других областях, например, топологии или функциональном анализе.

Рассмотрим примеры копределов.

Примеры. 1. Рассмотрим систему подмножеств

$$\{U_i\}, \quad U_i \subseteq U, \quad i \in J.$$

Если $U_i \subseteq U_j$, то $\exists!$ стрелка $i \rightarrow j$. Иными словами, мы рассматриваем частично упорядоченное множество подмножеств U по включению.

$$i \leq j \iff U_i \subseteq U_j.$$

Дополнительно потребуем, чтобы $\forall x \in U_i \cap U_j \exists k$ такое, что

$$x \in U_k \subseteq U_i \cap U_j.$$

Функтор

$$T: i \mapsto U_i,$$

$T(i \rightarrow j)$ – вложение $U_i \hookrightarrow U_j$. Копредел здесь – это некоторое множество V , в которое вкладываются все U_i , вложения согласованные, и диаграмма универсальна (то есть аналогично для другого конуса):

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & V \\ & \searrow & \nearrow \\ & U_j & \end{array}$$

Таким образом,

$$\operatorname{colim} T = \bigcup_i U_i.$$

2. Копроизведение – копредел функтора из дискретной категории.
3. Коуравнитель

$$\begin{array}{ccc} a & \rightrightarrows & b \\ & & \searrow \operatorname{coeq}(f,g) \\ & & c \end{array}$$

– это копредел из категории $\cdot \rightrightarrows \cdot$.

4. (Универсальный квадрат, pushout) Пусть заданы морфизмы

$$\begin{array}{l} f: a \rightarrow b \\ g: a \rightarrow c \end{array}$$

Универсальным квадратом называется пара морфизмов

$$\begin{array}{l} u: b \rightarrow d, \\ v: c \rightarrow d, \end{array}$$

где d – некий объект, такая, что

$$1) \quad uf = vg;$$

2) Для \forall

$$\begin{aligned} p: b &\rightarrow x, \\ q: c &\rightarrow x, \end{aligned}$$

где $x \in \text{Ob } C$ (из рассматриваемой категории), таких, что

$$pf = qg,$$

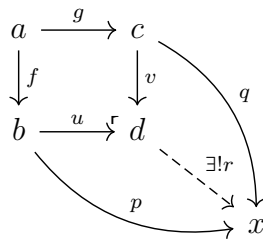
$\exists!$ морфизм

$$r: d \rightarrow x,$$

такой, что

$$\begin{aligned} ru &= p, \\ rv &= q. \end{aligned}$$

Соответствующая диаграмма:



Пример. (Пример универсального квадрата) Пусть есть вложения групп $A \hookrightarrow G$, $A \hookrightarrow H$. Рассмотрим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & H *_A G \end{array}$$

$H *_A G$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

1. Пусть

$$T: J \rightarrow \text{Sets}.$$

Тогда

$$\text{colim } T = \bigsqcup_j Tj / \sim,$$

где \sim – минимальное отношение эквивалентности такое, что

$$(Tf)(x) \sim x$$

для

$$\forall f: i \rightarrow j \text{ в } J, \quad \forall x \in Ti.$$

2. Забывающий функтор $\text{Top} \rightarrow \text{Sets}$ создает копределы. Введем на $\bigsqcup_j Tj / \sim = \text{colim } T$ наибольшую топологию такую, что все α_j непрерывны¹⁷

$$\begin{array}{ccc} & & \bigsqcup_j Tj / \sim \\ & \nearrow^{\alpha_j} & \vdots \\ Tj & & \\ & \searrow_{\beta_j} & B \end{array}$$

То есть $U \subseteq \text{colim } T$ открыто $\iff \forall j \alpha_j^{-1}$ открыты.

3. В категории $R\text{-Mod}$ левых модулей над ассоциативным кольцом R с 1 копределы другие, так как там копроизведение – прямая сумма.

Пусть

$$T: J \rightarrow R\text{-Mod}$$

– функтор. Тогда

$$\text{colim } T = \bigoplus_j Tj / N,$$

где N – R -подмодуль, порожденный элементами

$$(Tf)(a) - a \quad \forall a \in Ti,$$

где

$$f: i \rightarrow j$$

– морфизм в J .

¹⁷На диаграмме ниже мы используем B , а не b , как на (61), так как речь здесь идет о множествах.

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Существует целый раздел алгебры, который называется *категорная алгебра* и который занимается тем, что характеризует алгебраические свойства на языке стрелок и диаграмм. Понятия мономорфизма и эпиморфизма можно считать попыткой охарактеризовать сюръективные и инъективные отображения на языке стрелок и диаграмм. Как мы увидим ниже, для некоторых категорий (например, Grp или Sets) это действительно дает нужный результат. Для других категорий эти понятия приходится немного «подкручивать».

Пусть

$$f: a \rightarrow b$$

– морфизм в некоторой категории C .

Определение. Говорят, что f – *мономорфизм*, если из того, что

$$f\alpha = f\beta$$

для некоторых морфизмов

$$\alpha, \beta: c \rightarrow a,$$

где c – некий объект, следует, что

$$\alpha = \beta.$$

Соответствующая диаграмма:

$$c \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} a \xrightarrow{f} b$$

Определение. Говорят, что f – *эпиморфизм*, если f – мономорфизм в C^{op} , то есть из

$$\alpha f = \beta f$$

следует, что

$$\alpha = \beta.$$

Соответствующая диаграмма:

$$a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} c$$

Если объекты в C – некоторые множества, а морфизмы – некоторые отображения, то, очевидно, инъективные отображения – мономорфизмы, а сюръективные – эпиморфизмы.

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Sets

Теорема 8.1. В категории множеств Sets все мономорфизмы инъективны, а эпиморфизмы сюръективны.

Доказательство. 1. Пусть

$$f: A \rightarrow B$$

неинъективно, то есть

$$f(a_1) = f(a_2)$$

для $a_1 \neq a_2, a_1, a_2 \in A$.

Рассмотрим множество из одной точки $\{*\}$ и отображим его следующим образом:

$$\{*\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} A$$

$$\alpha(*) = a_1$$

$$\beta(*) = a_2$$

Тогда

$$\alpha \neq \beta,$$

но

$$f\alpha = f\beta.$$

Таким образом, f – не мономорфизм.

2. Если f не сюръективно, то выберем $x \in B \setminus f(A)$. Положим

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \{0, 1\}$$

$$\alpha(b) = 0 \quad \forall b \in B,$$

$$\beta(b) = \begin{cases} 0, & b \neq x \\ 1, & b = x \end{cases}$$

Тогда

$$\alpha f = \beta f,$$

но

$$\alpha \neq \beta,$$

то есть f – не эпиморфизм.

□

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Тор

В категории Тор ответ такой же, так как на $\{1, 2\}$ можно ввести топологию $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$ и α и β будут непрерывны.

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории \mathbf{Metr}

Пусть \mathbf{Metr} – категория метрических пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов. Опять мономорфизмы = инъекции (доказательство аналогично).

Теорема 8.2.

$$f: A \rightarrow B$$

– эпиморфизм в $\mathbf{Metr} \iff f(A)$ плотен в B .

Доказательство. \Leftarrow Пусть $f(A)$ плотен в B . Проверим, что f – эпиморфизм.

Пусть

$$\alpha, \beta: B \rightrightarrows C$$

– непрерывные,

$$\alpha f = \beta f.$$

Пусть $x \in B$. Так как $f(A)$ плотно в B , то \exists последовательность $(a_n) \subseteq A$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = x.$$

В силу непрерывности α и β

$$\alpha(x) = \alpha\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f)(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta f)(a_n) = \beta\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)\right) = \beta(x),$$

то есть

$$\alpha = \beta,$$

так как на всех точках значения совпадают.

\Rightarrow Пусть f – эпиморфизм. Рассмотрим случай $A = \emptyset$. Пусть $B \neq \emptyset$. Фиксируем $b_0 \in B$ и рассмотрим

$$\alpha, \beta: B \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \alpha(b) &:= \rho(b, b_0) \\ \beta(b) &:= \rho(b, b_0) + 1 \end{aligned} \quad \forall b \in B,$$

где ρ – метрика в B . Они непрерывны,

$$\alpha f = \beta f,$$

то есть получаем противоречие.

Если $B = \emptyset$, то f , очевидно, является эпиморфизмом.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Положим

$$\begin{aligned} \alpha(b) &= 0, \\ \beta(b) &= \inf_{a \in A} \rho(b, f(a)). \end{aligned}$$

Проверим непрерывность β . Пусть $\varepsilon > 0$, $b_0 \in B$. Пусть $b \in B$ таково, что

$$\rho(b, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall a \in A$

$$|\rho(b, f(a)) - \rho(b_0, f(a))| \leq \rho(b, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (62)$$

в силу неравенства треугольника. Переходя в (62) к \inf , получим

$$|\beta(b) - \beta(b_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Распишем переход к \inf более подробно. Раскрывая модуль в (62), получим

$$\rho(b_0, f(a)) - \frac{\varepsilon}{2} < \rho(b, f(a)) < \rho(b_0, f(a)) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (63)$$

Для левой части (63) справедливо

$$\beta(b_0) - \frac{\varepsilon}{2} < \rho(b, f(a)) \quad \forall a \in A.$$

Переходя к \inf , получим

$$\beta(b_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \beta(b).$$

Для правой части (63) справедливо

$$\rho(b, f(a)) < \rho(b_0, f(a)) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall a \in A.$$

Переходя к \inf , получаем

$$\beta(b) \leq \beta(b_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, непрерывность β доказана.

Далее,

$$\beta(f(a)) = 0 \quad \forall a \in A,$$

то есть

$$\beta f = \alpha f.$$

Отсюда

$$\alpha = \beta,$$

то есть $\forall b \in B$

$$\inf_{a \in A} \rho(b, f(a)) = 0,$$

а значит, \exists последовательность $(a_n)_n$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b.$$

Получили, что любая точка $b \in B$ является предельной для $f(A)$, а значит, $f(A)$ плотно в B . □

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории $R\text{-Mod}$

Теорема 8.3. В категории $R\text{-Mod}$, где R – ассоциативное кольцо с 1, эпиморфизмы сюръективны, а мономорфизмы инъективны.

Доказательство. 1. Пусть

$$f: A \rightarrow B$$

– гомоморфизм модулей, $\text{Ker } f \neq 0$. Выберем

$$a \in \text{Ker } f, \quad a \neq 0.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \alpha, \beta: R &\rightarrow A, \\ \alpha(r) &= 0 \\ \beta(r) &= ra \quad \forall r \in R. \end{aligned}$$

Тогда

$$f\alpha = f\beta = 0,$$

но $\alpha \neq \beta$, то есть f – не мономорфизм.

2. Пусть $f(A) \neq B$. Рассмотрим

$$\alpha, \beta: B \rightarrow B/f(A),$$

где $\alpha = 0$, β – естественный сюръективный гомоморфизм. Тогда

$$\alpha f = \beta f = 0,$$

но $\alpha \neq \beta$, то есть f – не эпиморфизм. □

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории Grp

Теорема 8.4. В категории групп Grp мономорфизмы = инъективные гомоморфизмы.

Доказательство. Пусть

$$f: G \rightarrow H$$

– гомоморфизм групп, $\text{Ker } f \neq 0$. Выберем $g \in \text{Ker } f$ и определим

$$\begin{aligned} \alpha, \beta: \mathbb{Z} &\rightarrow G, \\ \alpha(n) &= 1 \\ \beta(n) &= g^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Тогда

$$f\alpha = f\beta,$$

но $\alpha \neq \beta$, а значит, f – не мономорфизм. □

Лекция 9. Подобъекты и факторобъекты. Пересечение подобъектов. Пулбэк с участием мономорфизма. Иерархия моно- и эпиморфизмов

Эпиморфизмы в категории Grp (продолжение)

Теорема 9.1. Эпиморфизмы в Grp – сюръективные гомоморфизмы групп.

Доказательство. Рассмотрим несюръективный гомоморфизм

$$f: G \rightarrow H.$$

Возможны два случая.

1. Если¹⁸ $f(G) \triangleleft H$, то достаточно рассмотреть гомоморфизмы

$$\alpha, \beta: H \rightarrow H/f(G),$$

$$\begin{aligned}\alpha(h) &:= 1_{H/f(G)} \\ \beta(h) &:= hf(G)\end{aligned}$$

Здесь $hf(G)$ – соответствующий смежный класс. Понятно, что $\alpha \neq \beta$, но

$$\alpha f = \beta f,$$

то есть f – не эпиморфизм.

2. Пусть $f(G) \not\triangleleft H$. Тогда, так как подгруппы индекса 2 нормальные, по $f(G) \exists$ как минимум 3 различных правых смежных классов:

$$f(G), f(G)u, f(G)v, \quad u, v \in H.$$

Рассмотрим гомоморфизмы

$$\alpha, \beta: H \rightarrow S(H),$$

где $S(H)$ – группа биекций $H \rightarrow H$,

$$\alpha(h)(t) := ht \quad \forall h, t \in H$$

– действие левыми сдвигами.

Рассмотрим $\sigma \in S(H)$

$$\begin{aligned}\sigma(hu) &:= hv, \quad \forall h \in f(G), \\ \sigma(hv) &:= hu \\ \sigma(t) &:= t, \quad \forall t \in f(G)u \cup f(G)v.\end{aligned}$$

¹⁸ $f(G)$ нормально в H .

Положим теперь

$$\beta(h) := \sigma\alpha(h)\sigma^{-1} \forall h \in H.$$

Тогда

$$\alpha f = \beta f,$$

но

$$\alpha \neq \beta,$$

так как

$$\alpha(u)(1) = u \cdot 1 = u,$$

$$\beta(u)(1) = (\sigma\alpha(u)\sigma^{-1})(1) = \sigma(\alpha(u) \cdot 1) = \sigma(u) = v \neq u.$$

Таким образом, f – не эпиморфизм.

□

Вложение целых чисел в рациональные как эпиморфизм

Теорема 9.2. *Вложение*

$$i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

является эпиморфизмом в категории коммутативных колец с 1.

Доказательство. Докажем, что для \forall коммутативного кольца с 1 R \exists не более одного гомоморфизма

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow R.$$

Единица в этом случае переходит в 1:

$$f(1) = 1_R,$$

поэтому

$$f(m) = m := \underbrace{1_R + \dots + 1_R}_{m \text{ раз}} \forall m \in \mathbb{Z}.$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{(1_R + \dots + 1_R)}_{n \text{ раз}} f\left(\frac{1}{n}\right) \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $n \in R$ обратим,

$$\frac{1}{n} = n^{-1} = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

то есть f определен однозначно.

Если

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow[\beta]{\alpha} R,$$

то $\alpha = \beta$, то есть i – эпиморфизм.

□

Замечание 9.1. i – моно- и эпиморфизм, но не изоморфизм.

Замечание 9.2. Везде далее будем использовать следующие обозначения: \rightarrow для мономорфизма и \twoheadrightarrow для эпиморфизма.

Подобъекты и факторобъекты. Пересечение подобъектов

Замечание 9.3. Отталкиваясь от понятия подгруппы и подмножества, для того чтобы ввести понятие подобъекта (это будет сделано ниже), естественно использовать мономорфизмы

$$f: a \hookrightarrow b$$

Однако подобъект зависит не только от a , но и от f , так как

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S_3$$

можно вложить тремя способами.

Введем на мономорфизмах упорядочение:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & b \\ & \searrow \gamma & \\ c & & \end{array}$$

Говорят, что $\alpha \leq \gamma$ (или $a \leq c$), если \exists морфизм

$$\beta: a \rightarrow c$$

такой, что

$$\alpha = \gamma\beta$$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & b \\ \searrow \beta & & \nearrow \gamma \\ & c & \end{array}$$

Замечания. 1. β – мономорфизм, так как если

$$\beta f = \beta g$$

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow[f]{g} & a & \xrightarrow{\alpha} & b \\ & & \searrow \beta & & \nearrow \gamma \\ & & & c & \end{array}$$

то

$$\gamma\beta f = \gamma\beta g,$$

откуда

$$\alpha f = \alpha g,$$

то есть $f = g$, так как α – мономорфизм.

2. β – единственный, так как γ – мономорфизм.

Если для мономорфизмов α и γ верно $\alpha \geq \gamma$, $\gamma \geq \alpha$, то $\alpha \sim \gamma$ по определению.

Определение. Подобъекты – классы эквивалентности по \sim мономорфизмов. Аналогично, факторобъекты – классы эквивалентности по \sim эпиморфизмов.

Определение. Пусть

$$\alpha_\lambda : a_\lambda \rightarrow b, \quad \lambda \in \Lambda$$

– семейство подобъектов. Рассмотрим диаграмму

$$a_\lambda \xrightarrow{\alpha_\lambda} b, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Пусть a – предел этой диаграммы. Тогда a называется *пересечением подобъектов* a_λ .

Предложение. Пересечение подобъектов a_λ можно представить в виде

$$a = \inf_{\lambda} a_\lambda,$$

то есть $a \leq a_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$ и если $c \leq a_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$, то $c \leq a$.

Рассмотрим предельный конус

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha_\lambda} & b \\ & \swarrow \beta_\lambda & \nearrow \gamma \\ & a & \end{array}$$

Докажем, что γ – мономорфизм. Пусть

$$f, g : u \rightrightarrows a$$

такие, что

$$\begin{array}{ccc} & \gamma f = \gamma g & \\ & \alpha_\lambda & \\ a & \xrightarrow{\alpha_\lambda} & b \\ & \swarrow \beta_\lambda & \nearrow \gamma \\ & a & \\ & \xleftarrow{f} & u \\ & & \xleftarrow{g} \end{array}$$

Для $\forall \lambda \in \Lambda$ получаем

$$\alpha_\lambda \beta_\lambda f = \alpha_\lambda \beta_\lambda g,$$

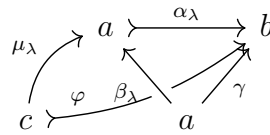
$$\beta_\lambda f = \beta_\lambda g,$$

так как α_λ – мономорфизм.

У нас есть конус с вершиной в u , который выражается через предельный через f и через g , то есть $f = g$.

Замечание 9.4. Рассмотренное свойство, когда композиции двух морфизмов из некоторого объекта со всеми морфизмами предельного конуса оказываются равны, и из этого следует, что и эти два морфизма сами равны, в английской литературе называется «*mono-source*».

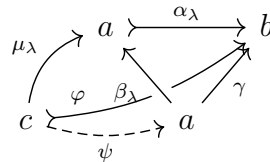
Отсюда $a \leq a_\lambda \forall \lambda \in \Lambda$.



Пусть

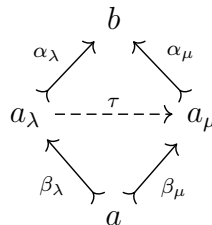
$\varphi: c \rightarrow a$ в подобъект,

причем $c \leq a_\lambda \forall \lambda \in \Lambda$. Он образует конус, который пропускается через a



то есть $c \leq a$.

Замечание 9.5. Мы искали пересечение как предел диаграммы



Мы не рассматривали, как соотносятся между собой a_λ и a_μ : стрелки τ не было в диаграмме даже в случае $a_\lambda \leq a_\mu$.

Проверим, что

$$\beta_\mu = \tau\beta_\lambda.$$

Мы знаем, что

$$\alpha_\lambda\beta_\lambda = \alpha_\mu\beta_\mu.$$

Тогда

$$\alpha_\mu\tau\beta_\lambda = \alpha_\mu\beta_\mu,$$

и, наконец,

$$\tau\beta_\lambda = \beta_\mu,$$

так как α_μ – мономорфизм.

В категориях Sets , Grp , R-Mod , коммутативных колец пересечение совпадает с пересечением в обычном смысле.

В категории Top

$$X \xrightarrow{f} Y$$

топология в X может быть богаче, чем в $f(X)$.

Коуниверсальный квадрат с участием мономорфизма

Теорема 9.3. Пусть в коуниверсальном квадрате

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f^*(m)} & \cdot \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array} \quad (64)$$

m – мономорфизм. Тогда $f^*(m)$ – тоже мономорфизм.

Доказательство. Перерисуем диаграмму (64), добавив два морфизма:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\alpha} & \cdot \\ \beta \searrow & & \xrightarrow{f^*(m)} & \cdot \\ & g \downarrow & & \downarrow f \\ & \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array}$$

Пусть

$$f^*(m)\alpha = f^*(m)\beta. \quad (65)$$

Тогда

$$ff^*(m)\alpha = ff^*(m)\beta.$$

В силу коммутативности коуниверсального квадрата это то же самое, что

$$mg\alpha = mg\beta.$$

Это, в свою очередь, можно сократить до

$$g\alpha = g\beta, \quad (66)$$

так как m – мономорфизм. Из (65) и (66) в силу коуниверсальности квадрата следует, что $\alpha = \beta$. \square

Иерархия моно- и эпиморфизмов

Регулярные, сильные и экстремальные моно- и эпиморфизмы

Хочется, чтобы любой морфизм можно было бы разложить в следующую композицию эпи- и мономорфизма (или что-то, что будет нам заменять обычные эпи- и мономорфизм). И, если таких разложений 2, чтобы существовал такой изоморфизм η , что диаграмма ниже была бы коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow & \exists \eta \nearrow & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \end{array}$$

То есть, другими словами, разложение на эпи- и мономорфизм было бы единственным.

Возникает две проблемы. Во-первых, просто моно- и эпиморфизмы могут быть плохими в категориях. Это не то, с чем мы хотим работать, получив разложение. Во-вторых, если просто раскладывает в композицию эпи- и мономорфизма, существование эпиморфизма η не будет гарантировано. Чтобы этого избежать, сужают либо класс мономорфизмов, либо класс эпиморфизмов.

Иерархию моно- и эпиморфизмов мы будем изучать на примере мономорфизмов.

Определение. Мономорфизм

$$m : a \twoheadrightarrow l$$

называется

1. *регулярным* (*regular*), если m – уравнитель:

$$m = \text{eq}(\alpha, \beta)$$

для некоторых морфизмов α и β :¹⁹

$$a \twoheadrightarrow m b \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} c$$

2. *сильным* (*strong*), если из равенства

$$ge = mf,$$

где e – эпиморфизм, g, f – морфизмы:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array}$$

следует существование морфизма d такого, что

$$\begin{aligned} g &= md \\ f &= de \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ f \downarrow & \begin{array}{c} \nearrow d \\ \xrightarrow{m} \end{array} & \downarrow g \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

Единственность «диагонали» d следует из любого из равенств выше, так как m – моно-, а e – эпиморфизм.

3. *экстремальным* (*extremal*), если из равенства

$$m = ge,$$

где e – эпиморфизм, а g – морфизм, следует, что e – изоморфизм.

¹⁹В определении в записи соответствующей лекции допущена ошибка, которую лектор исправляет в начале следующей лекции. Здесь приведен уже исправленный вариант.

Замечание 9.6. Условие экстремальности отбрасывает, например, случай вложения кольца целых чисел в поле рациональных чисел. Мы говорили, что это одновременно эпи- и мономорфизм. Тогда он не может быть экстремальным мономорфизмом.

Упражнение 9.1. Рассмотрим коуниверсальный квадрат в категории групп Grp , где e – эпиморфизм:

$$\begin{array}{ccc} B \times_A C & \xrightarrow{f^*(e)} & C \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{e} & A \end{array}$$

Тогда $f^*(e)$ – тоже эпиморфизм.

Лекция 10. Связь между мономорфизмами в иерархии. Регулярные эпиморфизмы в категориях. Факторизационные структуры

Иерархия моно- и эпиморфизмов

Регулярные, сильные и экстремальные мономорфизмы (повторение)

Вспомним определения, которые мы дали в конце прошлой лекции. Пусть

$$f: a \rightarrow b$$

– мономорфизм. Говорят, что

1. f – *регулярный*, если f – уравнитель некой пары морфизмов

$$g, h: b \rightarrow c$$

$$a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c.$$

2. f – *сильный*, если из того, что

$$fh = ge$$

для эпиморфизма e и морфизмов g и h следует, что \exists морфизм d такой, что

$$g = fd,$$

$$h = de.$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \downarrow h & \swarrow d & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

3. f – *экстремальный*, если из равенства

$$f = ge$$

для эпиморфизма e следует, что e – изоморфизм²⁰.

Введем следующие обозначения: Mono – множество всех мономорфизмов, RegMono – множество всех регулярных мономорфизмов, StrongMono – множество всех сильных мономорфизмов, ExtMono – множество всех экстремальных мономорфизмов.

²⁰Напомним, что изоморфизм в категории – это просто обратимый морфизм.

Связь между мономорфизмами в иерархии

Предложение. Любой уравниватель – сильный мономорфизм, то есть

$$\text{RegMono} \subseteq \text{StrongMono}.$$

Доказательство. Пусть

$$f = \text{eq}(g, h)$$

$$a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c.$$

Пусть также даны

$$\alpha, \beta: u \rightrightarrows a$$

– морфизмы такие, что

$$f\alpha = f\beta.$$

$$u \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c$$

Тогда α и β – сравнивающие морфизмы между конусом

$$\begin{array}{ccc} & b & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c \\ f\alpha = f\beta \nearrow & & \nearrow \\ u & & gf\alpha = hf\alpha \end{array}$$

и предельным конусом

$$\begin{array}{ccc} & b & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c \\ f \nearrow & & \nearrow \\ a & & gf = hf \end{array}$$

То есть по определению предела $\alpha = \beta$.

Докажем, что f – сильный. Рассмотрим квадрат

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \end{array}$$

Пусть

$$f = \text{eq}(\alpha, \beta),$$

e – эпиморфизм.

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \\ & & \xrightarrow{\beta} \cdot \end{array}$$

Итак,

$$\alpha f = \beta f.$$

Тогда

$$\alpha fh = \beta fh,$$

$$\alpha ge = \beta ge,$$

откуда

$$\alpha g = \beta g.$$

так как e – эпиморфизм. Отсюда, так как f – уравниватель, $\exists d$ такое, что

$$f = fd.$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \downarrow h & \swarrow d & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \end{array} \xrightarrow[\beta]{\alpha} \cdot$$

Покажем, что и второй треугольник в диаграмме коммутует. Известно, что

$$fh = ge.$$

С другой стороны,

$$ge = fde.$$

Мономорфизмы можно сокращать слева, поэтому, так как f – мономорфизм, получаем

$$h = de.$$

□

Предложение.

$$\text{StrongMono} \subseteq \text{ExtrMono}.$$

Доказательство. Пусть $m \in \text{StrongMono}$,

$$m = ge,$$

где $e \in \text{Epi}$ (эпиморфизм). Тогда у нас коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \text{id} \parallel & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array}$$

Тогда $\exists d$ такое, что

$$de = \text{id}. \tag{67}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \text{id} \parallel & \swarrow d & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array}$$

Домножим слева (67) на e . Получим

$$ede = e,$$

откуда, сокращая e справа, получим

$$ed = \text{id}.$$

Это возможно, так как $e \in \text{Epi}$. Тогда d – обратный к e , а значит, $e \in \text{Iso}$ – (возможно, большому) множеству всех изоморфизмов. \square

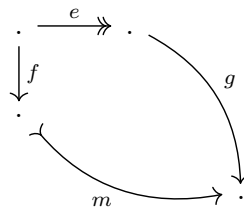
Предложение. Если в категории C \exists универсальные квадраты (пушауты), то

$$\text{StrongMono}(C) = \text{ExtrMono}(C).$$

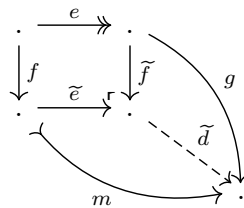
Доказательство. Пусть $m \in \text{ExtrMono}(C)$ и

$$mf = ge,$$

где $f, g \in \text{Mor}(C)$ – категории всех морфизмов, $e \in \text{Epi}(C)$. Нарисуем соответствующую диаграмму:



Рассмотрим пушаут e и f :



Тогда $\exists! \tilde{d}, \tilde{e} \in \text{Epi}$, так как это пушаут эпиморфизма (ранее было утверждение о том, что пулбэк мономорфизма является мономорфизмом – его применим к C^{op}). То есть

$$m = \tilde{d}\tilde{e},$$

то есть $\tilde{e} \in \text{Iso}$, так как $m \in \text{ExtrMono}$.

Положим

$$d := \tilde{e}^{-1}\tilde{f}.$$

Тогда

$$md = m\tilde{e}^{-1}\tilde{f} = \tilde{d}\tilde{f} = g,$$

$$de = \tilde{e}^{-1}\tilde{f}e = \tilde{e}^{-1}\tilde{e}f = f.$$

\square

Конгруэнция на моноиде

Вспомним понятие *ядерной пары* морфизма. Пусть

$$f: a \rightarrow b$$

– морфизм. Его *ядерная пара* – это морфизмы g и h из коуниверсального квадрата

$$\begin{array}{ccc} a \times_b a & \xrightarrow{h} & a \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

Рассмотрим ядерную пару отображения

$$f: A \rightarrow B \text{ в Sets.}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times_B A & \xrightarrow{h} & A \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Здесь

$$A \times_B A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2)\} \subseteq A \times A$$

$A \times_B A$ – отношение эквивалентности на A , порожденное отображением f .

Если A и B – моноиды, f – гомоморфизм то $A \times_B A$ является *конгруэнцией*, то есть если

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4) \in A \times_B A,$$

то

$$(a_1 a_3, a_2 a_4) \in A \times_B A.$$

$$f(a_1) = f(a_2), f(a_3) = f(a_4),$$

то

$$f(a_1 a_3) = f(a_1) f(a_3) = f(a_2) f(a_4) = f(a_2 a_4).$$

Обратно, если \sim – конгруэнция на моноиде A , то на A/\sim естественным образом определяется структура моноида так, что отображение

$$a \mapsto \text{его класс эквивалентности в } A/\sim$$

задает сюръективный гомоморфизм моноидов $A \rightarrow A/\sim$.

Упражнение 10.1. Доказать основную теорему о гомоморфизме моноидов: пусть

$$f: A \rightarrow B$$

– гомоморфизм моноидов, \sim – конгруэнция на A . Тогда \exists

$$\bar{f}: A/\sim \rightarrow B$$

такой, что

$$\bar{f}\pi = f \iff \sim \subseteq \underbrace{A \times_B A}_{\text{построена по } f}.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & A/\sim & \end{array}$$

Расшифруем:

$$a_1 \sim a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \forall a_1, a_2 \in A.$$

Регулярные эпиморфизмы в категориях множеств, колец и моноидов

Теорема 10.1. В категориях *Sets*, *Mon*, *Rings* (с 1 и без), *CommRings* и т.д. регулярные эпиморфизмы – это в точности сюръективные гомоморфизмы (сюръективные отображения в случае *Sets*).

Доказательство. проведем для определенности в случае *Mon*. Пусть

$$e = \text{coeq}(f, g)$$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{e} C$$

Тогда

$$C = B/\sim,$$

где \sim – минимальная конгруэнция такая, что

$$f(a) \sim g(a) \forall a \in A$$

(по основной теореме о гомоморфизме моноидов). В частности, e сюръективен.

Пусть теперь

$$e: B \rightarrow C$$

– сюръективный гомоморфизм моноидов. Рассмотрим ядерную пару

$$f, g: B \times_C B \rightrightarrows B$$

$$\begin{array}{ccc} B \times_C B & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow f & & \downarrow e \\ B & \xrightarrow{e} & C \end{array}$$

Докажем, что

$$e = \text{coeq}(f, g).$$

Пусть \sim – конгруэнция, по которой мы строим коуравнитель. Пусть есть некая пара

$$(b_1, b_2) \in B \times_C B.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(b_1, b_2) &= b_1 \\ g(b_1, b_2) &= b_2 \end{aligned}$$

Конгруэнция \sim минимальна и такова, что все b_1 и b_2 были эквивалентны. Это выполнено \iff

$$e(b_1) = e(b_2).$$

То есть \sim – ядерная конгруэнция для e . Но

$$B/\sim \cong C$$

(другая формулировка теоремы о гомоморфизме). Теорема доказана.

Еще раз проговорим доказательство. Нам нужно построить изоморфизм

$$\varphi: B/\sim \rightarrow C$$

такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} B \times_C B & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B & \xrightarrow{e} & C \\ & & \searrow \pi & & \nearrow \varphi \\ & & & & B/\sim \end{array}$$

Здесь

$$\pi = \text{coeq}(f, g).$$

Пусть \bar{b} – класс эквивалентности $b \in B$ в B/\sim . Тогда

$$\varphi(\bar{b}) := e(b).$$

□

Факторизационные структуры (системы)

Определение. Пусть C – категория,

$$E, M \subseteq \text{Mor}(C)$$

– фиксированные подмножества (возможно, большого) множества морфизмов.

Говорят, что $C - (E, M)$ – *структурирована* или что (E, M) – *факторизационная структура (система)*²¹ в C , если выполнены следующие условия:

1. (возможно, большие) множества E и M замкнуты относительно композиции с изоморфизмами;

²¹Мы будем пользоваться термином *структура*.

2. выполнено условие (E, M) -факторизации: $\forall f \in \text{Mor}(C) \exists e \in E, m \in M$ такие, что

$$f = me;$$

3. выполнено условие *однозначной* (E, M) -диагонализации: если

$$ge = mf,$$

где $e \in E, m \in M, f, g \in \text{Mor}$, то $\exists! d \in \text{Mor}$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ f \downarrow & \swarrow d & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array}$$

то есть такой, что

$$\begin{aligned} g &= md, \\ f &= de. \end{aligned}$$

Предложение. Если в C выполнено условие однозначной (E, M) -диагонализации и

$$m_1 e_1 = m_2 e_2, \quad m_1, m_2 \in M, e_1, e_2 \in E,$$

то $\exists!$ изоморфизм d такой, что

$$\begin{aligned} m_2 d &= m_1 \\ d e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e_1} & \cdot \\ e_2 \downarrow & \swarrow d & \downarrow m_1 \\ \cdot & \xrightarrow{m_2} & \cdot \end{array}$$

Доказательство. d существует в силу свойства диагонализации. В силу этого свойства $\exists \tilde{d}$ такое, что

$$\begin{aligned} \tilde{d} e_2 &= e_1, \\ m_1 \tilde{d} &= m_2 \end{aligned}$$

Отметим еще раз на диаграмме элемент в верхнем правом углу и связанные с ним морфизмы:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e_1} & \circ \\ e_2 \downarrow & \swarrow d & \downarrow m_1 \\ \cdot & \xrightarrow{m_2} & \cdot \\ \circ & \swarrow \tilde{d} & \nearrow m_1 \end{array}$$

Подставляя одно в другое, получим

$$\begin{aligned} \tilde{d} d e_1 &= e_1, \\ m_1 \tilde{d} d &= m_1 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{d} d = \text{id}$$

в силу единственности. Аналогично

$$d\tilde{d} = \text{id},$$

то есть d – изоморфизм.

□



Лекция 11. Замкнутость StrongMono относительно композиции. Факторизационная структура. Факторизационная лемма. Первое достаточное условие (ExtrEpi, Mono)-структурированности

Замкнутость Mono (Epi, StrongMono) относительно композиции

Предложение. Пусть $m_1, m_2 \in \text{Mono}(C)$. Тогда $m_1 m_2 \in \text{Mono}(C)$.

Доказательство. Рассмотрим морфизмы m_1, m_2, f и g такие, что

$$u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} a \xrightarrow{m_2} b \xrightarrow{m_1} c$$

$$m_1 m_2 f = m_1 m_2 g$$

Так как $m_1 \in \text{Mono}(C)$,

$$m_2 f = m_2 g.$$

Отсюда

$$f = g,$$

так как $m_2 \in \text{Mono}(C)$. □

Аналогично для эпиморфизмов (достаточно применить результат предложения выше для двойственной категории).

Предложение. Пусть $m_1, m_2 \in \text{StrongMono}(C)$. Тогда $m_1 m_2 \in \text{StrongMono}(C)$.

Доказательство. Пусть

$$m_1 m_2 f = g e, \text{ где } f, g \in \text{Mor}, e \in \text{Epi}$$

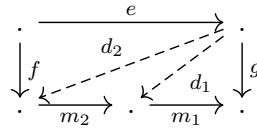
$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{m_2} & \cdot \xrightarrow{m_1} \cdot \end{array}$$

Так как $m_1 \in \text{StrongMono}$, $\exists d_1$:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{m_2} & \cdot \xrightarrow{m_1} \cdot \\ & & \swarrow d_1 \end{array}$$

Так как $m_2 \in \text{StrongMono}$, $\exists d_2$ такой, что

$$d_2 e = f, \quad m_2 d_2 = d_1. \tag{68}$$



Умножая второе из (68) слева на m_1 , получим

$$m_1 m_2 d_2 = m_1 d_1 = g,$$

то есть d_2 – искомая диагональ. □

Факторизационная структура

Напомним определение факторизационной структуры.

Определение. Пусть E и M – возможно, большие множества морфизмов в категории C . Говорят, что (E, M) – факторизационная структура (система) в C или что C – (E, M) -структурирована, если выполнены следующие условия:

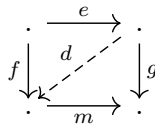
1. E и M замкнуты относительно композиции с изоморфизмами;
2. в C есть (E, M) -разложения, то есть $\forall f \in \text{Mor}(C) \exists e \in E, m \in M$ такие, что

$$f = me;$$

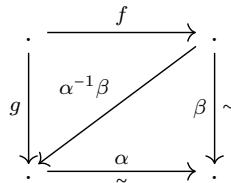
3. в C выполнено свойство (E, M) -диагонализации: если

$$mf = ge, \text{ где } e \in E, m \in M, f, g \in \text{Mor}(C),$$

то \exists единственная диагональ d , делающая квадрат ниже коммутативным:

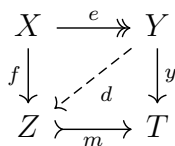


Примеры. 1. (Iso, Mor) и (Mor, Iso) в любой категории:



$$\beta f = \alpha g \iff \alpha^{-1}\beta f = g.$$

2. $(\text{Epi}, \text{Mono})$ – факторизационная структура в Sets , так как Epi – сюръективные, Mono – инъективные отображения.



Пусть $x_1, x_2 \in X$,

$$e(x_1) = e(x_2).$$

Применяя g , получим

$$ge(x_1) = ge(x_2),$$

откуда

$$mf(x_1) = mf(x_2),$$

и, наконец,

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Здесь $x_1 \sim x_2$, если $e(x_1) = e(x_2)$.

Положим

$$d(y) := f(x), \text{ где } y = e(x).$$

3. «Патологическая» факторизационная структура на Sets. Положим

$$E = \{f : X \rightarrow Y \mid \text{если } X = \emptyset, \text{ то } Y = \emptyset\}$$

$$M = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ — биекция или } X = \emptyset\}$$

Если $x \neq \emptyset$, то

$$f = \text{id}_Y f.$$

Если $X = \emptyset$, то

$$f = f \text{id}_\emptyset.$$

Возможны два случая для диагонали:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & \swarrow \text{id}_\emptyset & \downarrow \\ \emptyset & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & \swarrow \sim & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

В обоих случаях диагональ единственна.

Теорема о категории с $(\text{Epi}, \text{RegMono})$ -факторизациями

Теорема 11.1. ²² Если в категории C есть $(\text{Epi}, \text{RegMono})$ -факторизации, то

$$\text{RegMono}(C) = \text{StrongMono}(C) = \text{ExtrMono}(C)$$

и C — $(\text{Epi}, \text{RegMono})$ -структурирована.

Доказательство. Пусть $m \in \text{ExtrMono}(C)$. Тогда

$$m = m_0 e, \text{ где } m_0 \in \text{RegMono}, \quad e \in \text{Epi}.$$

²²В формулировке сначала лектор использует обозначение $(\text{RegMono}, \text{Epi})$ -факторизация, которое позже заменяет на $(\text{Epi}, \text{RegMono})$ -факторизации. Здесь приведен сразу второй вариант.

В силу экстремальности m , $e \in \text{Iso}$. Отсюда $m \in \text{RegMono}$.

$$\cdot \xrightarrow{\sim} \cdot \longrightarrow \cdot \rightrightarrows \cdot$$

Диагональное свойство следует из того, что

$$\text{RegMono} \subseteq \text{StrongMono},$$

а для сильных диагонализуемость – это определение. □

Следствие.

$$\text{RegEpi}(\text{Mon}) = \text{StrongEpi}(\text{Mon}) = \text{ExtrEpi}(\text{Mon})$$

и Mon – $(\text{RegEpi}, \text{Mono})$ -структурирована.

Факторизационная лемма

Факторизационная лемма. ²³ Пусть в категории C \exists все уравнители и пересечения всех подобъектов,

$$f : a \rightarrow b,$$

$M \subseteq \text{Mono}(C)$ и

1. пересечения M -подобъектов объекта b принадлежат M ;
2. если

$$f = \hat{m}gt, \text{ где } \hat{m} \in M, \quad g \in \text{RegMono}(C),$$

то

$$\hat{m}g \in M.$$

Тогда

1. $f = te$, где $t \in M$, $e \in \text{Epi}(C)$;
2. если $f = \bar{m}g$, где $\bar{m} \in M$, то \exists диагональ d

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ \downarrow g & \swarrow d & \downarrow m \\ \cdot & \xrightarrow{\bar{m}} & \cdot \end{array}$$

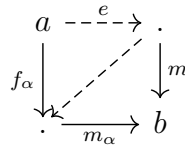
3. если $e = \bar{m}g$, где $t\bar{m} \in M$, $g \in \text{Mor}$, то $\bar{m} \in \text{Iso}$.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные разложения

$$f = m_\alpha f_\alpha, \quad m_\alpha \in M.$$

²³В соответствующей лекции лектор сначала исправляет формулировку леммы в ходе доказательства. Здесь приведена сразу исправленная версия леммы.

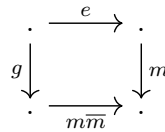
Рассмотрим предел (пересечение) подобъектов m_α



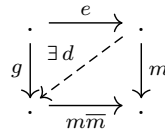
Так как f_α образует конус, то \exists отображение e (см. диаграмму выше).

Проверим условие диагонализации (второе утверждение леммы). Если $f = \bar{m}g$, то $\bar{m} = m_\alpha$, $g = f_\alpha$ для некоторого индекса α , то есть условие выполнено.

Докажем третье утверждение леммы. Пусть $e = \bar{m}g$, где $\bar{m} \in M$



Тогда \exists диагональ d :



Получается, что

$$\bar{m}d = m.$$

Так как m – мономорфизм, получаем

$$\bar{m}d = \text{id}.$$

Домножим справа на \bar{m} :

$$\bar{m}d\bar{m} = \bar{m},$$

откуда

$$d\bar{m} = \text{id},$$

так как $\bar{m} \in \text{Mono}(C)$. Таким образом, \bar{m} – изоморфизм.

Обсудим, почему в рассуждении выше $\bar{m} \in \text{Mono}(C)$. Если

$$\bar{m}\gamma_1 = \bar{m}\gamma_2,$$

то

$$m\bar{m}\gamma_1 = m\bar{m}\gamma_2,$$

откуда

$$\gamma_1 = \gamma_2,$$

так как $M \subseteq \text{Mono}$.

Докажем первое утверждение леммы. $t \in M$ по условию 1 леммы. Осталось доказать, что e – эпиморфизм.

Как обычно, предположим, что есть два морфизма α и β , которые выходят из области значений e и такие, что их композиции с e совпадают:

$$a \xrightarrow{e} \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \cdot \\ \downarrow m \\ b$$

По предположению,

$$\alpha e = \beta e.$$

Пусть

$$g = \text{eq}(\alpha, \beta).$$

Тогда $\exists t$:

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{e} \\ \dashrightarrow{t} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \cdot \\ \downarrow m \\ b \\ \uparrow g \\ \cdot \xrightarrow{mg} \cdot$$

По условию 2 леммы, $mg \in M$.

Получаем, что $m \geq mg$. В то же время $mg \geq m$, так как m – пересечение. Отсюда mg и m изоморфны (эквивалентны).

Таким образом, g – изоморфизм и $\alpha = \beta$, то есть e – эпиморфизм. \square

Достаточные условия (ExtrEpi, Mono)-структурированности

Теорема 11.2. Если в категории C \exists конечные пределы и пересечения любых семейств подобъектов, то C – (ExtrEpi, Mono)-структурирована.

Доказательство. Применяем факторизационную лемму для $M = \text{Mono}(C)$. Получаем разложение

$$f = te \quad \forall f \in \text{Mor}.$$

e – экстремальный, так как если

$$e = tg, \quad \text{где } \bar{m} \in \text{Mono},$$

то $t\bar{m} \in \text{Mono}$. По факторизационной лемме $\bar{m} \in \text{Iso}$.

Докажем диагонализированность. Пусть

$$ge = mf, \quad m \in \text{Mono},$$

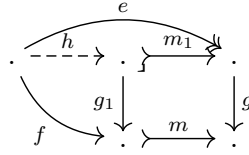
$e \in \text{ExtrEpi}$. Рассмотрим соответствующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & e & \\ & \curvearrowright & \\ \cdot & & \cdot \\ & \downarrow g_1 & \downarrow g \\ \cdot & & \cdot \\ f & \xrightarrow{m} & \cdot \end{array}$$

По свойству коуниверсального квадрата,

$$m_1 \in \text{Mono}.$$

В силу коуниверсальности $\exists h$:

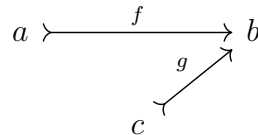


e – экстремальный, поэтому $m_1 \in \text{Iso}$. Тогда $g_1 m_1^{-1}$ – диагональ. □

Лекция 12. Малые в смысле подобъектов и факторобъектов категории. Достаточные условия (Epi, ExtrMono)-структурированности. Сопряженные функторы

Малые в смысле подобъектов и факторобъектов категории

Напомним терминологию. Мы рассматриваем морфизмы. Пусть

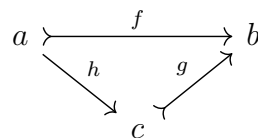


Если \exists

$$h: a \rightarrow c$$

такое, что

$$gh = f,$$



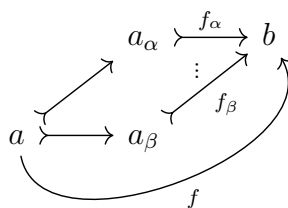
то говорят, что $g \geq f$.

Если $g \geq f$, $f \geq g$, то $f \sim g$ по определению.

Подобъекты – классы эквивалентности по \sim . Пересечение подобъектов

$$a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} b$$

– это морфизм, соответствующий пределу диаграммы



$$f = \inf_{\alpha} f_{\alpha}.$$

Достаточно присутствия в диаграмме одного представителя каждого участвующего подобъекта. Остальные представители можно добавить и предел от этого не поменяется.

Подобъект в англоязычной литературе называется «subobject», факторобъект – «quotient object». Факторгруппу можно переводить двумя способами: «factor group» и «quotient group».

Определение. Категория C называется *малой в смысле подобъектов*, если под-объекты каждого объекта образуют малое множество («well powered»).

Двойственным понятием является *малая в смысле факторобъектов* категория («well copowered»).

Поэтому если категория мала в смысле подобъектов и полна (= существуют конечные пределы), то в ней есть пересечения всех подобъектов.

Достаточные условия (Epi, ExtrMono)-структурированности

Запишем формулировку факторизационной леммы, доказанной на прошлой лекции.

Факторизационная лемма. Пусть в категории C \exists пересечения подобъектов и уравнители, $M \subseteq \text{Mono}(C)$,

$$f: a \rightarrow b$$

– морфизм. Пусть

1. пересечение M -подобъектов объекта b – M -подобъект;
2. если²⁴

$$f = \bar{m}gh, \text{ где } \bar{m} \in M, g \in \text{RegMono}, h \in \text{Mor},$$

то

$$\bar{m}g \in M.$$

Тогда

1. $\exists t \in M, e \in \text{Epi}(C)$ такие, что

$$f = te;$$

2. если есть разложение

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ h \downarrow & & \downarrow m \\ \cdot & \xrightarrow{\hat{m}} & \cdot \end{array}$$

где $\hat{m} \in M$, то \exists диагональ d :

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \\ h \downarrow & \swarrow d & \downarrow m \\ \cdot & \xrightarrow{\hat{m}} & \cdot \end{array}$$

3. если

$$e = \hat{m}g,$$

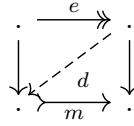
где $t\hat{m} \in M$, то $\hat{m} \in \text{Iso}(C)$.

²⁴Здесь лектор сначала пишет $h \in M$ и исправляет это на $h \in \text{Mor}$ при доказательстве достаточных условий (Epi, ExtrMono)-структурированности.

Предложение. Пусть в категории \mathcal{C} выполнено свойство $(\text{Epi}, \text{ExtrMono})$ -диагонализуемости.

Тогда композиция экстремальных мономорфизмов – экстремальный мономорфизм, пересечение экстремальных подобъектов – экстремальный подобъект.

Доказательство. Из диагонализуемости



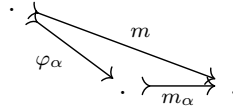
$$m \in \text{ExtrMono}$$

следует, что

$$\text{ExtrMono} = \text{StrongMono}.$$

Композиция сильных – сильный мономорфизм (доказывали ранее).

Докажем, что пересечение экстремальных подобъектов – экстремальный подобъект. Рассмотрим



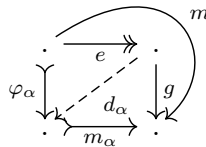
$$m_\alpha \in \text{ExtrMono},$$

m – пересечение m_α .

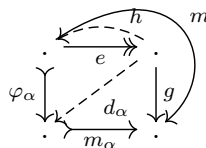
Пусть $e \in \text{Epi}$,

$$ge = m,$$

выполнено свойство диагонализуемости, то есть \exists диагонали d_α



Вместе с f диагонали d_α образуют конус над m_α :



Отсюда $\exists h$ такое, что

$$d_\alpha = \varphi_\alpha h.$$

Мы знаем, что

$$\varphi_\alpha = d_\alpha e,$$

откуда

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha h e.$$

Так как конус предельный, получаем, что

$$h e = id.$$

Домножив это равенство слева на e , получаем

$$e h e = e,$$

откуда

$$e h = id,$$

так как $e \in \text{Epi}$. Отсюда $e \in \text{Iso}$. □

Теорема 12.1. Если в категории \mathcal{C} \exists уравниатели и пересечения всех подобъектов, то она $(\text{Epi}, \text{ExtrMono})$ -структурирована.

Доказательство. В силу факторизационной леммы, примененной к $M = \text{ExtrMono}$ и предложения выше, достаточно доказать только $(\text{Epi}, \text{ExtrMono})$ -диагонализуемость.

Пусть

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{c} & \cdot \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \end{array}$$

$$h c = f g$$

для $f \in \text{ExtrMono}$, $c \in \text{Epi}$.

Пусть M – множество всех $m_\alpha \in \text{Mono}$, для которых $\exists f_\alpha$ и h_α такие, что

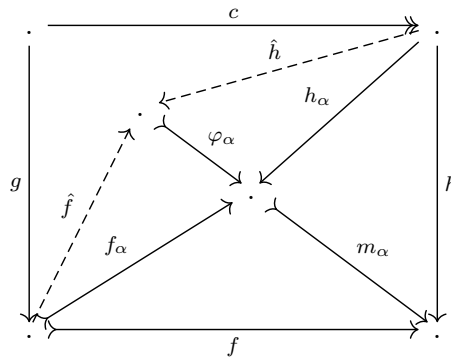
$$\begin{aligned} h &= m_\alpha h_\alpha \\ f &= m_\alpha f_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{c} & \cdot \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ & \nearrow f_\alpha & \searrow m_\alpha \end{array}$$

(так как $m_\alpha \in \text{Mono}$, f_α и h_α определены однозначно).

Пусть φ_α – предельный конус для пересечения (некоторых из) m_α . Так как h_α и f_α – конусы, $\exists \hat{f}$ и \hat{h} такие, что

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \varphi_\alpha \hat{f} \\ h_\alpha &= \varphi_\alpha \hat{h} \end{aligned}$$



Таким образом, пересечение

$$m = m_\alpha \varphi_\alpha \in M.$$

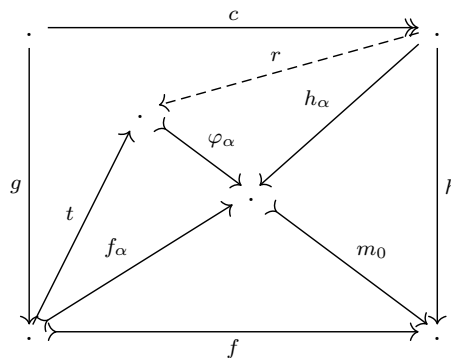
Далее, условие 1 для факторизационной леммы выполнено. Докажем условие 2. Пусть

$$f = m_\alpha m_0 t,$$

где $m_\alpha \in M$, $m_0 \in \text{RegMono}$, $t \in \text{Mor}$.

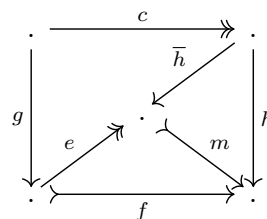
Но $m_0 \in \text{StrongMono}$, поэтому $\exists r$ такое, что

$$m_0 r = h_\alpha.$$



Значит, $m_\alpha m_0 \in M$.

Применяем факторизационную лемму к f .



$$f = m e, \quad m \in M, \quad e \in \text{Epi},$$

то есть $\exists \bar{h}$ такой, что

$$h = m \bar{h}.$$

$e \in \text{Iso}$, так как $f \in \text{ExtrMono}$.

Тогда

$$d = e^{-1} \bar{h}$$

– искомая диагональ. □

Упражнение 12.1. Привести пример не экстремального эпиморфизма в *Тор*. Является ли категория *Тор* (*Eri*, *Моно*)-структурированной? (*RegEri*, *Моно*)-структурированной?

Сопряженные функторы

Определение. Пусть

$$\begin{aligned} F &: X \rightarrow A \\ G &: A \rightarrow X \end{aligned}$$

– функторы. Говорят, что F – левый сопряженный для G , а G – правый сопряженный для F , и пишут $F \dashv G$, если \exists биекция

$$\varphi: A(Fx, a) \rightarrow X(x, Ga),$$

естественная по $x \in \text{Ob } X$, $a \in \text{Ob } A$.

Таким образом, $A(F(-), -)$ и $X(-, G(-))$ изоморфны как функторы

$$X^{\text{op}} \times A \rightarrow \text{Sets}.$$

Упражнение 12.2. При фиксированном G функтор F определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Если рассмотреть

$$\begin{aligned} F^{\text{op}} &: X^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}}, \\ G^{\text{op}} &: A^{\text{op}} \rightarrow X^{\text{op}}, \end{aligned}$$

то $G^{\text{op}} \dashv F^{\text{op}}$.

Примеры. 1.

$$\text{Grp}(\mathcal{F}(X), G) \xrightarrow{\sim} \text{Sets}(X, UG),$$

$$U: \text{Grp} \rightarrow \text{Sets}$$

– забывающий, $\mathcal{F}(X)$ – свободная группа с базисом X .

2.

$$\text{Ab}(G/[G, G], A) \xrightarrow{\sim} \text{Grp}(G, UA),$$

$$U: \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$$

– вложение,

$$G \mapsto G/[G, G]$$

– функтор абелианизации.

3. Пусть R – коммутативное кольцо с 1.

$$\text{R-Mod}(M \otimes N, K) \xrightarrow{\sim} \text{R-Mod}(M, \text{Hom}_R(N, K)),$$

где M, N, K – R -модули.

Лекция 13. Единица и коединица сопряжения. Треугольные тождества. Достаточные условия сопряжённости. Функтор с разными левым и правым сопряженными

Единица и коединица сопряжения

На прошлой лекции мы начали знакомиться с понятием *сопряженных функторов*.

Определение. Пусть

$$F: X \rightarrow A$$

и

$$G: A \rightarrow X$$

– функторы. Говорят, что F – *левый сопряженный для G* , а G – *правый сопряженный для F* , и обозначают $F \dashv G$, если \exists естественная биекция

$$\varphi_{x,a}: A(Fx, a) \rightarrow X(x, Ga).$$

Положим

$$\begin{aligned} \eta_x &:= \varphi_{x, Fx}(\text{id}_{Fx}): x \rightarrow GFx \\ \varepsilon_a &:= \varphi_{Ga, a}^{-1}(\text{id}_{Ga}): FGa \rightarrow a \end{aligned}$$

η называется *единицей сопряжения*, а φ – *коединицей сопряжения*. Они обладают рядом важных свойств.

Пусть $F \dashv G$. Докажем что η – естественное преобразование

$$\text{id}_X \Rightarrow GF$$

Необходимо доказать для любого

$$f: x \rightarrow y \text{ в } X$$

коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \downarrow \eta_x & & \downarrow \eta_y \\ GFx & \xrightarrow{GFf} & GFy \end{array} \quad (69)$$

В силу естественности φ диаграммы ниже коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A(Fy, Fy) & \xrightarrow{\varphi_{y, Fy}} & X(y, GFy) \\ A(Ff, Fy) \downarrow & & \downarrow X(f, GFy) \\ A(Fx, Fy) & \xrightarrow{\varphi_{x, Fy}} & X(x, GFy) \\ A(Fx, Ff) \uparrow & & \uparrow X(x, GFf) \\ A(Fx, Fx) & \xrightarrow{\varphi_{x, Fx}} & X(x, GFx) \end{array} \quad (70)$$

Подставим в левый верхний и в правый нижний угол (70) тождественное отображение. Получим

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}_{Fy} & \xrightarrow{\quad} & \eta_y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Ff & \xrightarrow{\text{в одно и то же}} & \eta_y f = (GFf)\eta_x \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{id}_{Fx} & \xrightarrow{\quad} & \eta_x
 \end{array}$$

Равенство

$$\eta_y f = (GFf)\eta_x$$

означает в точности коммутативность диаграммы (69).

Применяя рассуждения выше к $G^{\text{op}} \dashv F^{\text{op}}$, получаем, что

$$\varepsilon : FG \Rightarrow \text{id}_A$$

– естественное преобразование.

Предложение.

$$\varphi_{x,a} : A(Fx, a) \rightarrow X(x, Ga)$$

задается формулой

$$\varphi_{x,a}(f) = (Gf)\eta_x$$

для $\forall f \in A(Fx, a)$.

$$x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} Ga$$

Аналогично

$$\varphi_{x,a}^{-1}(g) = \varepsilon Fg$$

для $\forall g \in X(x, Ga)$.

$$Fx \xrightarrow{Fg} FGa \xrightarrow{\varepsilon_a} a$$

Доказательство. Воспользуемся коммутативностью нижней части диаграммы (70):

$$\begin{array}{ccc}
 A(Fx, Fx) & \xrightarrow{\varphi_{x, Fx}} & X(x, GFx) \\
 \downarrow A(Fx, f) & & \downarrow X(x, Gf) \\
 A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi_{x, a}} & X(x, Ga)
 \end{array}$$

Подставляя тождественный морфизм, получим

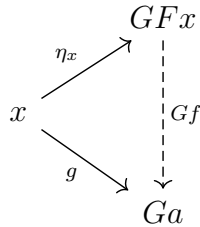
$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}_{Fx} & \xrightarrow{\quad} & \eta_x \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f & \xrightarrow{\quad} & (Gf)\eta_x = \varphi_{x,a}(f)
 \end{array}$$

Вторая часть предложения справедлива в силу двойственности. \square

Предложение. η_x – универсальный отталкивающий объект в категории запятой $(x \downarrow G) \forall x \in \text{Ob } X$.

ε_a – универсальный притягивающий объект в категории $(F \downarrow a) \forall a \in \text{Ob } A$.

Доказательство.



На диаграмме выше изображены два объекта в категории запятой $(x \downarrow G)$. Морфизмы между ними $(x \downarrow G)(\eta_x, g)$ – это морфизмы

$$f : Fx \rightarrow a,$$

для которых диаграмма выше коммутативна.

Таким образом,

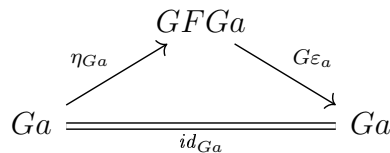
$$\varphi_{x,a}(f) = g.$$

Таких f ровно 1, так как $\varphi_{x,a}$ – биекция. □

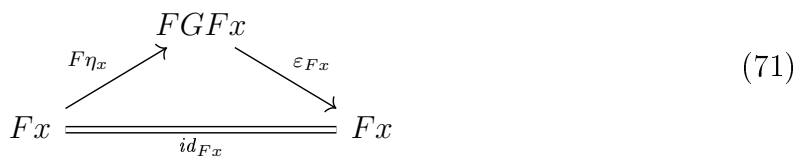
Треугольные тождества

Теорема 13.1. (Треугольные тождества) Пусть $F \dashv G$, η и ε – единица и коединица сопряжения.

Тогда справедливы треугольные тождества



и



Доказательство. В силу двойственности достаточно доказать только одно из них. Докажем (71):

$$\text{id}_{Fx} = \varphi_{x,Fx}^{-1}(\varphi_{x,Fx}(\text{id}_{Fx})) = \varphi_{x,Fx}^{-1}(\eta_x)$$

– это верхняя композиция в (71). □

Достаточные условия сопряженности

Теорема 13.2. Пусть

$$F: X \rightarrow A$$

и

$$G: A \rightarrow X$$

– функторы,

$$\eta: id_X \Rightarrow GF$$

– естественное преобразование, причем η_x – универсальный отталкивающий объект в $(x \downarrow G) \forall x \in Ob X$.

Тогда $F \dashv G$, а η – единица сопряжения.

Доказательство. Нам понадобится диаграмма из доказательства прошлой теоремы:

$$\begin{array}{ccc} & GFx & \\ \eta_x \nearrow & & \downarrow GF \\ x & & Ga \\ g \searrow & & \end{array} \quad (72)$$

Определим

$$\varphi_{x,a}: A(Fx, a) \rightarrow X(x, Ga)$$

как

$$\varphi_{x,a}(f) := (Gf)\eta_x.$$

Из того, что η_x – универсальный отталкивающий объект, следует, что $\varphi_{x,a}$ – биекция. Докажем естественность. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha: a &\rightarrow a_1 \\ \xi: x_1 &\rightarrow x \end{aligned}$$

Нам нужно доказать коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi_{x,a}} & X(x, Ga) \\ A(F\xi, \alpha) \downarrow & & \downarrow X(\xi, G\alpha) \\ A(Fx_1, a_1) & \xrightarrow{\varphi_{x_1, a_1}} & X(x_1, Ga_1) \end{array} \quad (73)$$

Пусть $f \in A(Fx, a)$. Тогда по диаграмме (72) получаем цепочку

$$x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} Ga$$

Далее, дописываем

$$x_1 \xrightarrow{\xi} x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} Ga \xrightarrow{G\alpha} Ga_1 \quad (74)$$

Это путь вправо и вниз на диаграмме (73). Добавим (74) путь, соответствующий пути вниз, а затем вправо на (73) (нижний путь на диаграмме ниже):

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & \xrightarrow{\xi} & x & \xrightarrow{\eta_x} & GFx & \xrightarrow{Gf} & Ga \xrightarrow{G\alpha} Ga_1 \\
 & \searrow \eta_{x_1} & & \nearrow GF\xi & & & \\
 & & GFx_1 & & & &
 \end{array} \tag{75}$$

Квадрат на (75) коммутативен в силу естественности η .

Таким образом, $\varphi_{x,a}$ – естественная биекция и $F \dashv G$ сопряжены.

$$\varphi_{x,GFx}(\text{id}_{Fx}) = \eta_x,$$

то есть η_x – единица сопряжения. □

Теорема 13.3. Пусть

$$G: A \rightarrow X$$

– функтор, причем $\forall x \in \text{Ob } X$ в $(x \downarrow G) \exists$ универсальный отталкивающий объект, который мы обозначим через²⁵

$$\eta_x: X \rightarrow GF_0x,$$

Тогда отображение

$$F_0: \text{Ob } X \rightarrow \text{Ob } A$$

однозначно продолжается до функтора

$$F: X \rightarrow A$$

так, что η_x становится естественным преобразованием. При этом F – левый сопряженный к G .

Доказательство. Пусть

$$f: x \rightarrow y \text{ в } X.$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\eta_x} & GF_0x \\
 \downarrow f & & \\
 y & \xrightarrow{\eta_y} & GF_0y
 \end{array} \tag{76}$$

На диаграмме (76) мы видим два объекта в категории запятой:

$$x \xrightarrow{\eta_x} GF_0x$$

²⁵Здесь F_0x – просто соответствующий объект, а не функтор.

и

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow f \\ y \end{array} \xrightarrow{\eta_y} GF_0y$$

причем первый из объектов, по условию, является универсальным отталкивающим объектом.

Тогда \exists единственный морфизм

$$g: F_0x \rightarrow F_0y$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\eta_x} & GF_0x \\ \downarrow f & & \downarrow Gg \\ y & \xrightarrow{\eta_y} & GF_0y \end{array}$$

коммутативна.

Положим

$$\begin{aligned} Fx &:= F_0x \\ Ff &:= g \end{aligned}$$

Тогда F – функтор, а η – естественное преобразование.

Если

$$\begin{aligned} f &: x \rightarrow y \\ h &: y \rightarrow z \end{aligned}$$

то

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\eta_x} & GFx \\ \downarrow f & & \downarrow GFf \\ y & \xrightarrow{\eta_y} & GFy \\ \downarrow h & & \downarrow GFh \\ z & \xrightarrow{\eta_z} & GFz \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right\} G(F(gf))$$

(F сохраняет композицию).

$F \dashv G$ по теореме 13.2. □

Теоремой 13.3 мы неявно пользовались, когда определяли свободную группу $\mathcal{F}(X)$:

$$X \xrightarrow{i} U\mathcal{F}(X)$$

Здесь

$$U: \text{Grp} \rightarrow \text{Sets}$$

– забывающий функтор. Если у нас есть отображение

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_x} & U\mathcal{F}(X) \\ & \searrow \varphi & \\ & & UG \end{array}$$

то $\exists!$

$$\bar{\varphi}: \mathcal{F}(X) \rightarrow G$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & U\mathcal{F}(X) \\ & \searrow \varphi & \swarrow U\bar{\varphi} \\ & & UG \end{array} \quad (77)$$

коммутативна. Таким образом, i – универсальный отталкивающий объект в $(X \downarrow U)$.

Коединица

$$\epsilon_G: \mathcal{F}(UG) \rightarrow G$$

Это вычисление выражения

$$g_1^{\gamma_1} \dots g_s^{\gamma_s} \text{ в } G,$$

где $\gamma_i \in \{\pm 1\}$, а g_i – символы элементов из G .

Выпишем явно²⁶

$$\varphi_{X,G}: \text{Grp}(\mathcal{F}(X), G) \xrightarrow{\sim} \text{Sets}(X, UG).$$

Пусть

$$f: \mathcal{F}(X) \rightarrow G$$

– гомоморфизм групп. Тогда

$$\varphi_{X,G}(f) = (Uf)i_X.$$

Тогда

$$\epsilon_G = \varphi_{UG,G}^{-1}(\text{id}_{UG})$$

определяется через

$$\begin{array}{ccc} UG & \xrightarrow{i_{UG}} & U\mathcal{F}(UG) \\ & \searrow \parallel & \swarrow U\epsilon_G \\ & & UG \end{array}$$

Теорема 13.4. Пусть

$$F: X \rightarrow A$$

и

$$G: A \rightarrow X$$

– функторы,

$$\epsilon: GF \Rightarrow \text{id}_A$$

и

$$\eta: \text{id}_X \Rightarrow GF$$

²⁶Здесь φ связано с сопряжением, а не из диаграммы (77).

– естественные преобразования, причем

$$\begin{aligned}(\varepsilon F)(F\eta) &= id_F \\ (G\varepsilon)(\eta G) &= id_G\end{aligned}\tag{78}$$

(то есть выполнены треугольные тождества). Тогда $F \dashv G$, а ε и η – коединица и единица сопряжения.

Доказательство. Положим

$$\varphi_{x,a}(f) := (Gf)\eta_x$$

для $\forall f \in A(Fx, a)$,

$$\psi_{x,a}(g) := \varepsilon_a(Fg)$$

для $\forall g \in X(x, Ga)$.

Изобразим треугольные тождества (78):

$$\begin{array}{ccc} & FGFx & \\ F\eta_x \nearrow & & \searrow \varepsilon_{Fx} \\ Fx & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Fx \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} & GFGa & \\ \eta_{Ga} \nearrow & & \searrow G\varepsilon_a \\ Ga & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Ga \end{array}$$

Применим к

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ & f \nearrow & \\ x & & \end{array}$$

φ . Получаем

$$\begin{array}{ccc} & Ga & \\ & Gf \nearrow & \\ x & \xrightarrow{\eta_x} GFx & \end{array}$$

Применим к выражению выше ψ . Получим

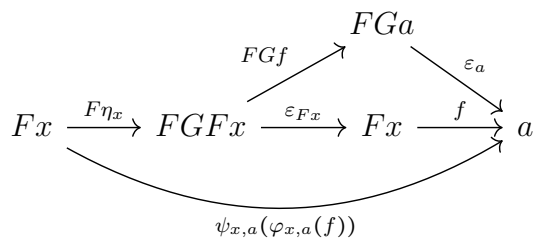
$$\begin{array}{ccc} & FGa & \\ & FGf \nearrow & \searrow \varepsilon_a \\ Fx & \xrightarrow{F\eta_x} FGFx & a \end{array}$$

Итого

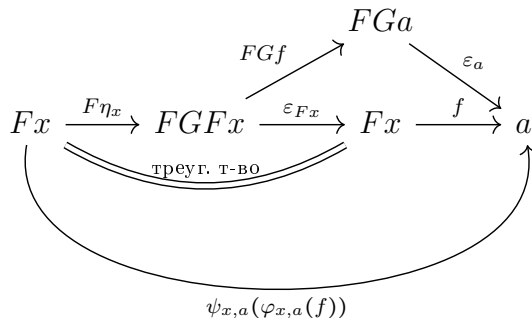
$$\begin{array}{ccc} & FGa & \\ & FGf \nearrow & \searrow \varepsilon_a \\ Fx & \xrightarrow{F\eta_x} FGFx & a \\ & \searrow \psi_{x,a}(\varphi_{x,a}(f)) & \nearrow \end{array}\tag{79}$$

Здесь нижний путь – это все примененные выше преобразования.

Допишем на диаграмме (79) следующий путь:



Кроме того, обозначим на диаграмме треугольное тождество:



Таким образом, $\forall f \in A(Fx, a)$ выполнено

$$\psi_{x,a}(\varphi_{x,a}(f)) = f.$$

Аналогично,

$$\varphi_{x,a}\psi_{x,a} = \text{id}_{X(x, Ga)}.$$

То есть $\varphi_{x,a}$ – биекция.

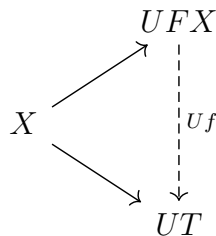
Естественность $\varphi_{x,a}$ с таким определением проверили в теореме 13.2. Таким образом, $F \dashv G$. □

Функтор с разными левым и правым сопряженными

Забывающий функтор

$$U : \text{Top Sets}$$

имеет разные левый F и правый G сопряженные:



\exists единственное непрерывное отображение

$$f : FX \rightarrow T,$$

где T – некоторое топологическое пространство. Здесь FX – это X с дискретной топологией.

В обратную сторону, правый сопряженный

$$\text{Sets}(UT, X) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(T, GX)$$

$$\begin{array}{ccc} UT & \overset{\text{-----}}{\longrightarrow} & UGX \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

$\exists!$ отображение

$$f: T \rightarrow GX.$$

GX – это X с топологией $\{\emptyset, X\}$ (все точки склеены).



Лекция 14. Критерий эквивалентности категорий. (Ко)рефлексивные подкатегории, (ко)рефлекторы. Сохранение правыми сопряжёнными функторами пределов и мономорфизмов

Критерий эквивалентности категорий

Определение. Говорят, что категории X и A *эквивалентны*, если \exists функторы

$$F: X \rightarrow A$$

и

$$G: A \rightarrow X$$

такие, что

$$FG \cong \text{id}_A, \quad GF \cong \text{id}_X. \quad (80)$$

Обсудим, чем понятие эквивалентности категорий отличается от понятия изоморфизма категорий. В изоморфизме категорий в требовании (80) стоят неравенства. Другими словами, изоморфизм категорий – это обычный категорный изоморфизм в категории категорий (например, малых категорий). Как уже было сказано, в категории категорий есть дополнительная структура, то есть между морфизмами есть свои морфизмы (естественные преобразования). Поэтому неравенства мы можем ослабить до изоморфизма (80).

Определение. Говорят, что функтор G – *полный* (*full*), если он сюръективен на hom -множествах, то есть $\forall a, b \in \text{Ob } A, \forall g \in X(Ga, Gb) \exists f \in A(a, b)$ такое, что

$$Gf = g.$$

Определение. Говорят, что функтор G – *унивалентный* (*faithful*), если он инъективен на hom -множествах (= разные морфизмы переводит в разные).

В начале семестра мы формулировали следующий критерий.

Теорема 14.1. (*Критерий эквивалентности*) *Функтор*

$$G: A \rightarrow X$$

задает эквивалентность категорий A и X (к нему \exists соответствующий функтор $F: X \rightarrow A$) $\iff G$ полный, унивалентный и $\forall x \in \text{Ob } X \exists a \in \text{Ob } A$ такое, что

$$Ga \cong x.$$

Определение. Говорят, что функторы

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} A$$

задают сопряжение-эквивалентность категорий X и A , если $F \dashv G$ и единица

$$\eta: \text{id}_X \Rightarrow GF$$

и коединица

$$\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_A$$

являются изоморфизмами соответствующих функторов.

Докажем следующий критерий.

Теорема 14.2. Пусть

$$G: A \rightarrow X$$

– функтор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. G можно включить в сопряжение-эквивалентность $F \dashv G$, где

$$F: X \rightarrow A;$$

2. G создает эквивалентность категорий;

3. G – полный, унивалентный и $\forall x \in \text{Ob } X \exists a \in \text{Ob } A$ такое, что

$$Ga \cong x.$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ очевидно.

$2 \Rightarrow 3$ Известно, что

$$FG \cong \text{id}_A.$$

Пусть даны два морфизма

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} FGa & \xrightarrow{\sim} & a \\ FGg \downarrow \Downarrow FGf & & g \downarrow \Downarrow f \\ FGb & \xrightarrow{\sim} & b \end{array} \quad (81)$$

Эта диаграмма коммутативна в силу естественности. Стрелки, соответствующие на (81) изоморфизмам, мы можем направить в другую сторону. Дадим названия этим стрелкам на (81):

$$\begin{array}{ccc} FGa & \xrightarrow{\varepsilon_a} & a \\ FGg \downarrow \Downarrow FGf & & g \downarrow \Downarrow f \\ FGb & \xrightarrow{\varepsilon_b} & b \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon_b(FGf)\varepsilon_a^{-1}, \\ g &= \varepsilon_b(FGg)\varepsilon_a^{-1} \end{aligned}$$

Если

$$Gf = Gg,$$

то и

$$f = g.$$

Таким образом, G унивалентен. Аналогично получаем, что F унивалентен.

Докажем, что G – полный. Пусть

$$h: Ga \rightarrow Gb.$$

Определим

$$f = \varepsilon_b(Fh)\varepsilon_a^{-1}.$$

Получаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} FGa & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_a} & a \\ \downarrow Fh & & \downarrow f \\ FGb & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_b} & b \end{array}$$

коммутативна. С другой стороны, диаграмма естественности для f

$$\begin{array}{ccc} FG & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_a} & a \\ \downarrow FGf & & \downarrow f \\ FGb & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_b} & b \end{array}$$

Отсюда

$$FGf = Fh$$

и

$$Gf = h,$$

так как F – унивалентен. Таким образом, G – полный.

Так как

$$x \cong GFx,$$

то любой объект из X изоморфен некоему объекту вида Ga , где $a \in \text{Ob } A$.

$\exists \Rightarrow 1$ Обозначим через F_0x такой объект, что

$$GF_0x \cong x,$$

а через

$$\eta_x: x \xrightarrow{\sim} GF_0x$$

соответствующий изоморфизм.

Докажем, что η_x – универсальный отталкивающий объект в категории запятой $(x \downarrow G)$. Кроме того, в этой категории запятой есть морфизмы

$$g: x \mapsto Ga$$

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\eta_x} & GF_0x \\
 & \searrow^{Ga} & \swarrow_{Gf} \\
 & & Ga
 \end{array}$$

Заметим, что η_x – изоморфизм, а G – биекция на hom-множествах. Поэтому диаграмма выше задает биекцию между $g \in X(x, Ga)$ и $f \in A(F_0x, a)$.

Отсюда для любого объекта $g \in (x \downarrow G) \exists$ единственный морфизм

$$f: \eta_x \rightarrow g.$$

По теореме из прошлой лекции, \exists левый сопряженный функтор

$$F: X \rightarrow A$$

такой, что

$$Fx = F_0x \quad \forall x \in \text{Ob } X,$$

и η_x – единица этого сопряжения.

Рассмотрим треугольное тождество. Применим к единице функтор G :

$$\begin{array}{ccc}
 & GFGa & \\
 \eta_{Ga} \nearrow & & \searrow G\varepsilon_a \\
 Ga & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Ga
 \end{array}$$

Здесь η_{Ga} – изоморфизм, нижний морфизм – тождественный. Тогда все $G\varepsilon_a$ – изоморфизмы.

Покажем, что ε_a – тоже изоморфизм. Пусть

$$g = (G\varepsilon_a)^{-1}$$

$$g: Ga \rightarrow GFGa.$$

G – полный, поэтому $\exists f$ такое, что

$$Gf = g.$$

Применим G к $\varepsilon_a f$:

$$G(\varepsilon_a f) = (G\varepsilon_a)Ga = (G\varepsilon_a)g = \text{id}_{Ga}.$$

Аналогичным образом в другую сторону получаем, что

$$G(f\varepsilon_a) = \text{id}_{FGa}.$$

Так как G унивалентен, то

$$\varepsilon_a f = \text{id}_a,$$

$$f\varepsilon_a = \text{id}_{FGa}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_A$$

– изоморфизм. □

Пусть $F \dashv G$ – сопряжение-эквивалентность. Тогда $G \dashv F$, где ε^{-1} – единица, а η^{-1} – коединица этого сопряжения. Для доказательства этого факта воспользуемся треугольными тождествами:

$$\begin{array}{ccc}
 & FGFx & \\
 F\eta_x \nearrow & & \searrow \varepsilon_{Fx} \\
 Fx & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Fx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & GFGa & \\
 \eta_{Ga} \nearrow & & \searrow G\varepsilon_a \\
 Ga & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Ga
 \end{array}$$

откуда, направляя в обратную сторону, получаем

$$\begin{array}{ccc}
 & GFGa & \\
 G\varepsilon_a^{-1} \nearrow & & \searrow \eta_{Ga}^{-1} \\
 Ga & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Ga
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & FGFx & \\
 \varepsilon_{Fx}^{-1} \nearrow & & \searrow F\eta_x^{-1} \\
 Fx & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Fx
 \end{array}$$

Это треугольные тождества для $G \dashv F$.

(Ко)рефлексивная подкатегория, (ко)рефлектор

Определение. Подкатегория C в категории D называется *рефлексивной* (соответственно, *кореклексивной*), если функтор вложения

$$C \rightarrow D$$

имеет левый (соответственно, правый) сопряженный, называемый *рефлектором* (*корекфлектором*).

Пример. $\text{Ab} \subset \text{Grp}$. Рефлектор

$$G \mapsto G/[G, G].$$

Единица сопряжения

$$G \twoheadrightarrow G/[G, G] \tag{82}$$

Сопряженный функтор здесь есть, так как если есть абелева группа A , то любой гомоморфизм в A однозначно пропускается через фактор-группу по коммутанту:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \twoheadrightarrow & G/[G, G] \\
 & \searrow & \swarrow \text{---} \\
 & A &
 \end{array}$$

(82) – универсальный отталкивающий объект в категории $(G \downarrow U)$, где $G \in \text{Ob Grp}$,

$$U : \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$$

– функтор вложения.

Теорема 14.2 позволяет выделить класс категорий, которые автоматически являются рефлексивными.

Следствие. (Из критерия эквивалентности) Если C – полная подкатегория в D и $\forall d \in \text{Ob} D \exists c \in \text{Ob} C$ такой, что

$$d \cong c,$$

то C рефлексивна и эквивалентна D .

Доказательство. Функтор вложения $C \subseteq D$ полный и унивалентный и $d \cong c$. \square

Определение. *Скелет категории C* – полная подкатегория в C , состоящая из представителей всех классов изоморфных объектов.

Скелет категории эквивалентен всей категории C .

Правые сопряженные функторы сохраняют пределы и мономорфизмы

Теорема 14.3. Пусть u функтора

$$G: A \rightarrow X$$

\exists левый сопряженный. Тогда G сохраняет все пределы, который \exists в A , и переводит мономорфизмы в мономорфизмы.

Доказательство. Пусть

$$T: J \rightarrow A$$

– функтор,

$$\alpha_j: a \rightarrow a_j$$

– предельный конус. Докажем, что

$$G\alpha_j: Ga \rightarrow Ga_j$$

– предельный конус функтора

$$GT: J \rightarrow X.$$

Естественная биекция задает биекцию между конусами

$$x \rightarrow Ga_j$$

и

$$Fx \rightarrow a_j.$$

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a_j) & \xrightarrow{\sim} & X(x, Ga_j) \\ A(Fx, \alpha_j) \uparrow & & \uparrow X(x, G\alpha_j) \\ A(Fx, a) & \xrightarrow{\sim} & X(x, Ga) \end{array} \quad (83)$$

Если

$$\beta_j: x \rightarrow Ga_j$$

– конус, то ему соответствует конус

$$\gamma_j : Fx \rightarrow a_j.$$

\exists единственное

$$f : Fx \rightarrow a$$

такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\gamma_j} & a_j \\ & \searrow f & \nearrow \alpha_j \\ & & a \end{array} \quad (84)$$

коммутативна.

Поэтому $\exists!$

$$g : x \rightarrow Ga$$

такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & Ga_j \\ & \searrow g & \nearrow G\alpha_j \\ & & Ga \end{array}$$

коммутативна.

Действительно, отметим, что во что переходит на диаграмме (83):

$$\begin{array}{ccc} \gamma_j & \xrightarrow{\quad} & \beta_j \\ \uparrow & & \uparrow \\ f & \xrightarrow{\quad} & g \end{array}$$

Если бы у нас было 2 g , то им бы соответствовало 2 f , и на (84) их бы тоже было два (а там естественная биекция).

Таким образом, G сохраняет пределы. Пусть теперь

$$m : a \rightarrow b$$

– морфизм в A . Пусть у нас есть морфизмы f и g

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Ga \xrightarrow{Gm} Gb \quad (85)$$

такие, что

$$(Gm)f = (Gm)g.$$

Применяя к (85) функтор F , получим

$$Fx \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff} \\ \xrightarrow{Fg} \end{array} FGa \xrightarrow{FGm} FGb$$

Применим к диаграмме коединицу:

$$\begin{array}{ccccc} Fx & \xrightarrow[Fg]{Ff} & FGa & \xrightarrow{FGm} & FGb \\ & & \downarrow \varepsilon_a & & \downarrow \varepsilon_b \\ & & a & \xrightarrow{m} & b \end{array}$$

Тогда

$$\varepsilon_b(FGm)(Ff) = \varepsilon_b(FGm)(Fg),$$

откуда

$$m\varepsilon_a(Ff) = m\varepsilon_a(Fg),$$

и в силу того, что m – мономорфизм, получаем

$$\varepsilon_a(Ff) = \varepsilon_a(Fg).$$

ε_a – универсальный притягивающий объект в категории запятой $(F \downarrow a)$, то есть

$$f = g.$$

По-другому,

$$\varphi_{x,a}^{-1}(f) = \varphi_{x,a}^{-1}(g),$$

откуда

$$f = g.$$

□

Лекция 15. Универсум. Теорема Фрейда о сопряженном функторе. (Ко)порождающие множества объектов. Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте

Универсум Гротендика

В начале курса мы сказали, что множества могут быть большими и малыми. Малые множества – это множества, которые принадлежат универсуму, набору малых множеств. Ранее мы не накладывали никаких условий на то, что считать универсумом.

Определение. *Универсумом Гротендика* называется множество U со следующими свойствами:

1. из $x \in u \in U$ следует, что $x \in U$;
2. из $u, v \in U$ следует, что $\{u, v\} \in U$;
3. из $x \in U$ следует, что множество всех подмножеств x

$$2^x = \mathcal{P}x \in U,$$

и объединение

$$\bigcup_{y \in x} y \in U.$$

Иногда в определение выше добавляют также следующие требования:

4. из того, что $u \in U, v \in U$, следует, что

$$(u, v) \in U,$$

$$u \times v = \{(a, b) \mid a \in u, b \in v\} \in U;$$

5. $\{0, 1, 2, \dots\} \in U$;

6. если

$$f: a \rightarrow b$$

сюръективно, причем $a \in U, b \subseteq U$, то $b \in U$.

Теорема об универсальном отталкивающем объекте

Теорема 15.1. *(Об универсальном отталкивающем объекте)* Пусть в категории D малые хот-множества и \exists все малые пределы.

Тогда в D \exists универсальный отталкивающий объект \iff в D \exists малое разрешающее множество объектов $Q: \forall d \in \text{Ob } D \exists q \in Q$ и морфизм $q \rightarrow d$.

Доказательство. \Rightarrow Очевидно, так как если c – универсальный отталкивающий объект, то

$$Q = \{c\}$$

– разрешающее множество.

\Leftarrow Рассмотрим

$$u := \prod_{q \in Q} q.$$

Тогда $\forall d \in \text{Ob } D$

$$\exists \prod_{q \in Q} q \xrightarrow{\pi_q} q \longrightarrow d,$$

то есть \exists стрелки $u \rightarrow d$.

Рассмотрим уравнитель всех стрелок из $D(u, u)$. Пусть c – объект, соответствующий этому уравнителю:

$$c \xrightarrow{\alpha} u \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} u$$

α – мономорфизм, так как уравнитель. Получается, из c тоже есть стрелка в любой объект. Надо понять, что она одна. Предположим, что это не так:

$$c \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} d$$

Пусть

$$h = \text{eq}(f, g).$$

$$w \xrightarrow{h} c \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} d$$

h – также мономорфизм. Отсюда есть стрелка $u \rightarrow w$:

$$\begin{array}{ccc} & w \xrightarrow{h} c \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} d & \\ & \uparrow \beta & \downarrow \alpha \\ c \xrightarrow{\alpha} u & \xrightarrow{\quad} & u \end{array}$$

Получаем, что

$$\alpha h \beta \alpha = \alpha,$$

так как α – уравнитель таких стрелок. Отсюда

$$h(\beta \alpha) = \text{id}_c.$$

Тогда

$$h(\beta \alpha)h = h,$$

откуда

$$(\beta \alpha)h = \text{id}_w.$$

Таким образом, h – изоморфизм. Из того, что

$$fh = gh,$$

следует, что

$$f = g.$$

И c действительно универсальный отталкивающий объект. □

Достаточные условия существования пределов в категории запятой

Лемма 15.1. Пусть

$$G: A \rightarrow X$$

– функтор, $x \in \text{Ob } X$. Тогда забывающий функтор

$$U: (x \downarrow G) \rightarrow A,$$

$$x \rightarrow Ga \mapsto a$$

создает все те пределы, которые функтор G сохраняет, то есть если

$$T: Y \rightarrow (x \downarrow G)$$

– функтор, причем $y \in UT$ есть предел, который сохраняет G , то предельный конус

$$\alpha_j: a \rightarrow UT_j$$

однозначно поднимается до конуса

$$\beta_j: \gamma \rightarrow T_j,$$

где

$$U\beta_j = \alpha_j,$$

причем β_j – предельный конус.

Следствие. (Лемма 15.1) Если в A \exists малые пределы, а G непрерывен (= сохраняет малые пределы), то $(x \downarrow G)$ полна в малом.

Доказательство. (Лемма 15.1) Пусть

$$T: Y \rightarrow (x \downarrow G).$$

$$x \xrightarrow{T_j} GUT_j$$

Пусть

$$\alpha_j: a \rightarrow UT_j$$



– предельный конус,

$$Ga \xrightarrow{G\alpha_j} GUT_j$$

– тоже предельный конус. В нижней части диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Ga & \xrightarrow{G\alpha_j} & GUT_j \\ & \nearrow T_j & \end{array}$$

изображен конус, так как T – функтор в категорию запятой. Тогда \exists единственный морфизм

$$\gamma: x \rightarrow Ga$$

такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} Ga & \xrightarrow{G\alpha_j} & GUT_j \\ \swarrow \gamma & & \nearrow T_j \\ & x & \end{array}$$

Тогда α_j становятся компонентами конуса

$$\gamma \rightarrow T_j.$$

Докажем, что это предельный конус в $(x \downarrow G)$. Пусть

$$\psi_j: \varphi \rightarrow T_j$$

– другой конус:

$$\begin{array}{ccc} Gb & \xrightarrow{G\psi_j} & GUT_j \\ \swarrow & & \nearrow \\ Ga & \xrightarrow{G\alpha_j} & GUT_j \\ \swarrow \gamma & & \nearrow T_j \\ & x & \end{array}$$

\exists единственный морфизм

$$\theta: b \rightarrow G$$

такой, что следующий треугольник коммутативен $\forall j \in \text{Ob } J$:

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\psi_j} & UT_j \\ \swarrow \theta & & \nearrow \alpha_j \\ & a & \end{array}$$

(86)

$$\begin{array}{ccc} Gb & \xrightarrow{G\psi_j} & GUT_j \\ \swarrow G\theta & & \nearrow \\ Ga & \xrightarrow{G\alpha_j} & GUT_j \\ \swarrow \gamma & & \nearrow T_j \\ & x & \end{array}$$

Тогда

$$(G\alpha_j)(G\theta)\varphi = (G\alpha_j)\gamma \quad \forall j,$$

и, так как $G\alpha_j$ – предельный конус, то

$$(G\theta)\varphi = \gamma.$$

Таким образом,

$$\theta: \varphi \rightarrow \gamma$$

– единственный морфизм такой, что диаграмма (86) коммутативна. Соответствующая диаграмма в категории $(x \downarrow G)$:

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \overset{\theta}{\dashrightarrow} & \gamma \\ & \searrow \psi_j & \swarrow \alpha_j \\ & T_j & \end{array}$$

□

Теорема Фрейда о сопряженном функторе

Теорема 15.2. (Фрейда о сопряженном функторе) Пусть в категории A малые hom-множества, A – полна в малом, а

$$G: A \rightarrow X$$

– функтор. Тогда у G \exists левый сопряженный $\iff G$ сохраняет малые пределы и $\forall x \in \text{Ob } X \exists$ малое множество индексов I и стрелок

$$Q = \{h_i: x \rightarrow Gq_i \mid i \in I\},$$

где $q_i \in A$, такое, что \forall морфизма

$$g: x \rightarrow Ga$$

\exists морфизм

$$f: q \rightarrow a$$

для некоторой стрелки $h_i \in Q$ такой, что

$$g = (Gf)h_i,$$

то есть что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & & Ga \\ & \nearrow g & \uparrow \\ x & & Gf \\ & \searrow h & \downarrow \\ & & Gq_i \end{array}$$

Доказательство. \Leftarrow Для каждой категории запятой $(x \downarrow G)$ проверим условия теоремы 15.1 об универсальном отгаликивающем объекте.

В силу следствия из леммы 15.1 $(x \downarrow G)$ полна в малом. Ном-множества малые, так как это стрелки из A . Разрешающее множество \exists по условию.

\Rightarrow G как правый сопряженный функтор сохраняет пределы, положим

$$Q = \{\eta_x\}.$$

□

(Ко)порождающие множества объектов

Определение. Говорят, что множество Q порождает категорию C , если

$$\forall f, g: a \rightrightarrows b, \quad f \neq g$$

\exists объект $q \in Q$ и морфизм

$$h: q \rightarrow a$$

такой, что

$$fh \neq gh.$$

Пример. $\{\{*\}\}$ – порождающее множество для Sets. Если

$$f, g: A \rightrightarrows B,$$

$$f(x) \neq g(x)$$

для некоторого $x \in A$, то положим

$$h: \{*\} \rightarrow A$$

$$h(*) = x.$$

Определение. Говорят, что Q копорождает категорию C , если

$$\forall f, g: a \rightrightarrows b, \quad f \neq g$$

$\exists q \in Q$ и стрелка

$$h: b \rightarrow q$$

такие, что

$$hf \neq fg.$$

Пример. Множество, состоящее из произвольного двухэлементного множества, копорождает Sets.

Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте

Теорема 15.3. (Специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте) Пусть D – категория с малыми hom-множествами, полная в малом, в которой \exists пересечения всех семейств подобъектов и \exists малое копорождающее множество Q . Тогда в D \exists универсальный отталкивающий объект.

Доказательство. Пусть r – пересечения всех подобъектов в $\prod_{q \in Q} q$. Если $d \in \text{Ob } D$, то \exists не более одного морфизма

$$r \rightarrow d.$$

Действительно, пусть существуют два морфизма

$$f, g: r \rightrightarrows d$$

Рассмотрим их уравнитель ψ :

$$u \xrightarrow{\psi} r \xrightleftharpoons[f]{f} d$$

Заметим, что $\psi \in \text{Mono}(D)$. Рассмотрим композицию

$$\begin{array}{ccc} u \xrightarrow{\psi} r \xrightleftharpoons[f]{f} d & & \\ & \downarrow i & \\ & \prod_{q \in Q} q & \end{array}$$

$i\psi$ также задает подобъект в $\prod_{q \in Q} q$. То есть $i \geq i\psi$, но r – пересечение, тогда $i\psi \geq i$, то есть i и ψ эквивалентны, и ψ – изоморфизм. Тогда из

$$f\psi = g\psi$$

следует, что

$$f = g.$$

То есть существует не более одного морфизма из r .

Пусть $d \in \text{Ob } D$ – произвольный. Рассмотрим множество

$$\{h: d \rightarrow q_h \mid q_h \in Q\}.$$

Рассмотрим

$$\begin{array}{ccc} & \prod_q q & \\ & \downarrow \varphi & \\ d \xrightarrow{\gamma} & \prod_h q_h & \end{array} \quad (87)$$

Здесь γ – единственный морфизм такой, что проекция π_h на q_h равна h :

$$\begin{array}{ccc} & & \prod_h q_h \\ & \nearrow \gamma & \downarrow \pi_h \\ d & & \\ & \searrow h & \\ & & q_h \end{array}$$

γ – мономорфизм, так как Q копорождающее, и если

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} d, \quad f \neq g,$$

то \exists

$$h: d \rightarrow q_h$$

такое, что

$$hf \neq hg.$$

Но

$$h = \pi_h \gamma,$$

то есть

$$\gamma f \neq \gamma g.$$

Далее, φ задается следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} \prod_q q & & \\ \downarrow \pi_{q_h} & \searrow \varphi & \\ & & \prod_h q_h \\ & \swarrow & \\ & & g_h \end{array}$$

Рассмотрим пулбэк на (87):

$$\begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{\zeta} & \prod_q q \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ d & \xrightarrow{\gamma} & \prod_h q_h \end{array}$$

Тогда ζ – мономорфизм, а значит есть морфизм из r

$$\begin{array}{ccccc} r & \longrightarrow & t & \xrightarrow{\zeta} & \prod_q q \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ & & d & \xrightarrow{\gamma} & \prod_h q_h \end{array}$$

Есть стрелка из r в d . □

Лекция 16. Специальная теорема о сопряжённом функторе. Аб-категории. Нулевые морфизмы. Ядра, коядра

Замечание о функторе, создающем малые пределы

Напомним понятие копорождающего множества, введенное на прошлой лекции.

Определение. Говорят, что $Q \subseteq \text{Ob } A$ – копорождающее множество для категории A , если

$$\forall a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

таких, что

$$f \neq g,$$

$\exists q \in Q$ и стрелка

$$h: b \rightarrow q$$

такая, что

$$hf \neq hg.$$

В прошлый раз мы доказали следующую теорему.

Теорема 15.3. (специальная теорема об универсальном отталкивающем объекте) Если в категории D есть малое копорождающее множество, пересечения всех семейств подобъектов, малые hom-множества и она полна в малом, то в D \exists универсальный отталкивающий объект.

Напомним еще одно определение.

Определение. Говорят, что функтор

$$F: A \rightarrow B$$

создает предел функтора

$$T: J \rightarrow A,$$

если из того, что у функтора

$$FT: J \rightarrow B$$

\exists предел

$$b \xrightarrow{\beta_i} FT_j,$$

следует, что \exists единственный конус

$$a \xrightarrow{\alpha_j} T_j$$

такой, что

$$Fa = b,$$

$$F\alpha_j = \beta_j,$$

причем конус α_j предельный.

Замечание 16.1. Если B полна в малом, F создает малые пределы, то F сохраняет малые пределы.

Доказательство. Пусть

$$T: J \rightarrow A$$

– функтор, J – малая категория,

$$\alpha_j: a \rightarrow T_j$$

– предельный конус.

Пусть

$$\beta_j: b \rightarrow FT_j$$

– предельный конус для FT . Так как F создает малые пределы, то $\exists!$ конус

$$\gamma_j: c \rightarrow T_j$$

такой, что

$$F\gamma_j = \beta_j,$$

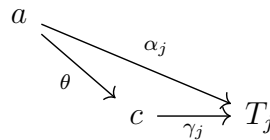
$$Fc = b,$$

причем γ_j – предельный для T . Отсюда \exists

$$\theta: a \xrightarrow{\sim} c$$

такой, что

$$\alpha_j = \gamma_j \theta$$



Тогда

$$F\alpha_j = (F\gamma_j)(F\theta) = \beta_j(F\theta)$$

– снова изоморфизм, то есть конус $F\alpha_j$ тоже предельный для FT . □

Специальная теорема о сопряженном функторе

Теорема 16.1. (*SAFT*, специальная теорема о сопряженном функторе) Пусть

$$G: A \rightarrow X,$$

причем в X и в A малые хот-множества, в A \exists пересечения всех семейств под-объектов, в A \exists малое копорождающее множество, A полна в малом. Тогда у G \exists левый сопряженный

$$F: X \rightarrow A$$

$\iff G$ сохраняет малые пределы и пересечения семейств подобъектов.

Лемма 16.1. (о подобъектах в категории $(x \downarrow G)$) Пусть G сохраняет²⁷ малые пределы,

$$G: A \rightarrow X,$$

A полна в малом. Тогда забывающий функтор

$$(x \downarrow G) \rightarrow A,$$

$$x \rightarrow Ga \mapsto a$$

сохраняет и отражает мономорфизмы.

Доказательство. Очевидно, что отражает, так как все морфизмы в $(x \downarrow G)$ на самом деле живут в A :

$$\begin{array}{ccc} & & Ga \\ & \nearrow & \downarrow Gf \\ x & & \\ & \searrow & \\ & & Gb \end{array}$$

$f \in \text{Mono}(A)$, если и только если его ядерная пара – это пара тождественных морфизмов $(\text{id}_a, \text{id}_a)$

$$\begin{array}{ccc} a & \xlongequal{\quad} & a \\ \parallel & & \downarrow f \\ a & \xrightarrow{\quad f} & b \end{array}$$

Пусть ядерная пара – это $(\text{id}_a, \text{id}_a)$ и

$$fg = fh.$$

Тогда $\exists t$ такой, что

$$\begin{aligned} g &= \text{id}_a t \\ h &= \text{id}_a t \end{aligned}$$

то есть

$$g = h = t.$$

$$\begin{array}{ccccc} c & & & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & a & \xlongequal{\quad} & a \\ & \searrow g & \parallel & & \downarrow f \\ & & a & \xrightarrow{\quad f} & b \end{array}$$

В обратную сторону аналогично.

У нас была лемма (лемма 15.1), что U создает те пределы, которые G сохраняет, то есть U сохраняет малые пределы и переводит мономорфизмы в мономорфизмы. \square

²⁷В ходе доказательства лектор немного исправляет формулировку леммы. Здесь приведен уже исправленный вариант.

Доказательство. (Теорема 16.1) $\forall x \in \text{Ob } X$ по уже доказанному в $(x \downarrow G)$ \exists все малые пределы и пересечения всех семейств подобъектов.

Пусть Q – малое копорождающее множество в A . Рассмотрим множество

$$Q' = \{x \rightarrow Gq \mid q \in Q\}.$$

Тогда Q' – копорождающее множество в $(x \downarrow G)$. Пусть

$$f, g: \alpha \rightrightarrows \beta,$$

$$f \neq g,$$

– морфизмы из категории запятой такие, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} x & & \\ \downarrow \alpha & \searrow \beta & \\ Ga & \xrightarrow[Gg]{Gf} & Gb \end{array}$$

Так как f и g на самом деле «сидят» в категории A , их можно разделить при помощи некоторого морфизма, то есть $\exists q \in Q$ и

$$h: b \rightarrow q$$

такие, что

$$hf \neq hg$$

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & \\ \downarrow \alpha & \searrow \beta & & & \\ Ga & \xrightarrow[Gg]{Gf} & Gb & \xrightarrow{Gh} & Gq \end{array}$$

Положим

$$\gamma := (Gh)\beta$$

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & \\ \downarrow \alpha & \searrow \beta & \xrightarrow{\gamma} & & \\ Ga & \xrightarrow[Gg]{Gf} & Gb & \xrightarrow{Gh} & Gq \end{array}$$

Тогда $\gamma \in \text{Ob}(x \downarrow G)$,

$$h: \beta \rightarrow \gamma.$$

Таким образом, Q' – копорождающее.

Так как

$$Q' = \bigcup_{q \in Q} X(x, Gq),$$

оно малое. Применяем специальную теорему 15.1 об универсальном отталкивающем объекте. \square

Ab-категории

Мы уже говорили, что часто так бывает, что *hom*-множества в какой-то категории являются объектами из другой категории. Это так называемые обогатенные категории (строгое определение будет дано позднее в курсе).

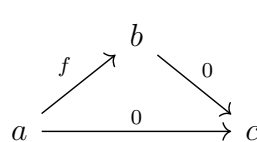
Примером обогатенной категории является, например, категория всех (малых²⁸) категорий. Там множество морфизмов между объектами – это категория функторов между объектами, и существуют морфизмы между морфизмами – естественные преобразования над функторами. Получается, категория малых категорий обогатена над категорией малых категорий, то есть объекты сами являются малыми категориями. Другим примером обогатенной категории является категория абелевых групп или, более общо, категория модулей над кольцом. Здесь гомоморфизмы абелевых групп (модулей) можно складывать, то есть они обогатены над категорией абелевых групп.

Определение. Категория C называется *Ab-категорией*, если все *Hom*-множества $C(a, b)$ являются абелевыми группами, причем композиция

$$C(b, c) \times C(a, b) \rightarrow C(a, c), \\ (g, f) \mapsto gf,$$

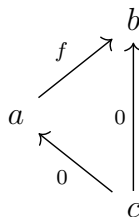
\mathbb{Z} -линейна по каждому аргументу.

Сразу же видно, что из a в b всегда есть нулевая стрелка $0 \in C(a, b)$. Стандартная техника показывает, что

$$0f = 0$$


и

$$f0 = 0$$



Например,

$$\underbrace{(0 + 0)}_{=0 \cdot f} f = 0 \cdot f + 0 \cdot f,$$

откуда

$$0f = 0.$$

²⁸ Аналогично для больших.

Определение. Пусть \mathcal{C} не обязательно Аб-категория, но с нулевым (универсальный отталкивающий объект + универсальный притягивающий объект) объектом O .

Тогда *нулевым морфизмом*

$$0: a \rightarrow b$$

называется единственный морфизм, проходящий через O .

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{0} & b \\ & \searrow & \\ & & O \end{array}$$

Тогда тоже выполнено

$$0f = 0, \quad f0 = 0$$

\forall морфизма f .

Теорема 16.2. Пусть z – объект в Аб-категории \mathcal{C} . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. z – универсальный отталкивающий объект;
2. z – универсальный притягивающий объект;
3. z – нулевой объект;
4. $0_z = id_z$, где 0_z – нулевой объект $z \rightarrow z$;
5. $|C(z, z)| = 1$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 5$ очевидно, так как $\forall a \in \text{Ob } \mathcal{C} \exists! z \rightarrow a$, в том числе и для $a = z$.

$2 \Rightarrow 5$ и $3 \Rightarrow 5$ аналогично.

$5 \Rightarrow 4$ очевидно.

$3 \Rightarrow 1$ и $3 \Rightarrow 2$ очевидно.

Докажем $4 \Rightarrow 3$. Пусть

$$f: z \rightarrow a,$$

где $a \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Тогда

$$f = fid_z = f0_z = 0,$$

то есть \exists и $!$. Получаем, что z – универсальный отталкивающий объект. Аналогично, z – универсальный притягивающий объект. \square

Отсюда следует, что в Аб-категории с нулевым объектом понятия нулевого морфизма совпадают.

Ядро и коядро

Определение. Пусть C – Аб-категория или категория с нулевым объектом. Пусть

$$a \xrightarrow{f} b$$

– морфизм. Тогда *ядро* и *коядро* f определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ker f &:= \text{eq}(f, 0) \\ \text{coker } f &:= \text{coeq}(f, 0) \end{aligned}$$

Условимся о следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &\xrightarrow{\ker f} a \xrightarrow{f} b \\ a &\xrightarrow[f]{0} b \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f \end{aligned}$$

Определение. Понятия *образа* и *кообраза* f вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{im } f &= \ker(\text{coker } f) \\ \text{coim } f &= \text{coker}(\ker f) \end{aligned}$$

Образ и кообраз устроены следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\quad} & a & \xrightarrow{f} & b & \twoheadrightarrow & \text{Coker } f \\ & & \text{coim } f \downarrow & \nearrow \text{im } f & & & \\ & & \text{Coim } f & \xrightarrow[\bar{f}]{} & \text{Im } f & & \end{array} \quad (88)$$

Предложение.

$$\begin{aligned} \ker(\text{coker}(\ker f)) &= \ker f, \\ \text{coker}(\ker(\text{coker } f)) &= \text{coim } f. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу двойственности достаточно доказать только первое утверждение.

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\ker f} & a & \xrightarrow{f} & b \\ & & \downarrow \text{coim } f & & \\ & & d & & \end{array}$$

Надо доказать, что

$$\ker(\text{coim } f) = \ker f.$$

Так как

$$f(\ker f) = 0,$$

то $\exists h$ такое, что

$$f = h(\text{coim } f)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 c & \xrightarrow{\ker f} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 & & \downarrow \text{coim } f & \nearrow h & \\
 & & d & &
 \end{array}$$

Пусть

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g: u \rightarrow a & & \\
 c & \xrightarrow{\ker f} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 & \nearrow g & \downarrow \text{coim } f & \nearrow h & \\
 u & & d & &
 \end{array}$$

Если

$$(\text{coim } f)g = 0,$$

то

$$fg = h(\text{coim } f)g = 0.$$

Обратно, если

$$fg = 0,$$

то

$$\exists t: u \rightarrow c$$

такое, что

$$g = (\ker f)t.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 c & \xrightarrow{\ker f} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 & \nearrow g & \downarrow \text{coim } f & \nearrow h & \\
 u & & d & & \\
 \uparrow t & & & & \\
 u & & & &
 \end{array}$$

Тогда

$$(\text{coim } f)g = \text{coker}(\ker f)(\ker f)t = 0 \cdot t = 0.$$

Отсюда

$$(\text{coim } f)g = 0 \iff fg = 0$$

и

$$\ker(\text{coim } f) = \ker f.$$

□

Сформулируем утверждение, которое далее будет использоваться для доказательства того, что внизу диаграммы (88) стоит изоморфизм \bar{f} и для доказательства свойств структурированности в абелевой категории.

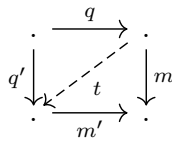
Лемма 16.2. Пусть \mathcal{C} – либо категория с нулевым объектом, либо Ab -категория и в \mathcal{C} существуют все ядра и коядра, f – морфизм.

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\
 \searrow q & & \uparrow m = \text{im } f \\
 \cdot & & \cdot
 \end{array}$$

Если

$$f = m'q',$$

где m' – ядро, то \exists единственный морфизм t , делающий диаграмму ниже коммутативной:



Если в \mathcal{C} \exists уравнители и все мономорфизмы являются ядрами, то q – эпиморфизм.

Лекция 17. Аддитивные категории. Аддитивные функторы. Абелевы категории. Точные последовательности. Точные функторы

Лемма

Лемма 16.2. Пусть \mathcal{C} – либо категория с нулевым объектом, либо Ab -категория и в \mathcal{C} существуют все ядра и коядра, Пусть

$$f = mg,$$

где

$$m = \text{Ker}(\text{coker } f).$$

Тогда \forall разложения

$$f = m'q',$$

где m' – ядро, \exists единственный морфизм t , делающий диаграмму ниже коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{q} & \cdot \\ q' \downarrow & \nearrow t & \downarrow m \\ \cdot & \xrightarrow{m'} & \cdot \end{array}$$

$$m = m't,$$

$$q' = tq.$$

Более того, если в \mathcal{C} \exists уравниатели, а все мономорфизмы являются ядрами, то q – эпиморфизм.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{q} & \cdot & & \cdot \\ q' \downarrow & & \downarrow m & \xrightarrow{\text{Coker } m'} & \cdot \\ \cdot & \xrightarrow{m'} & \cdot & & \cdot \\ & & \downarrow \text{Coker } m = \text{Coker } f & & \cdot \end{array}$$

так как

$$\text{coker}(\text{ker}(\text{coker } g)) = \text{coker } g$$

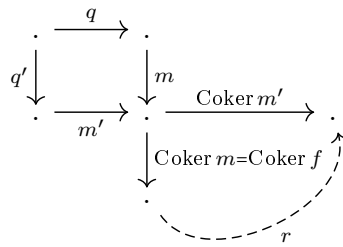
$$\text{ker}(\text{coker}(\text{ker } g)) = \text{ker } g.$$

Далее,

$$(\text{coker } m')f = (\text{coker } m')m'q' = 0.$$

Таким образом, $\exists r$ такой, что

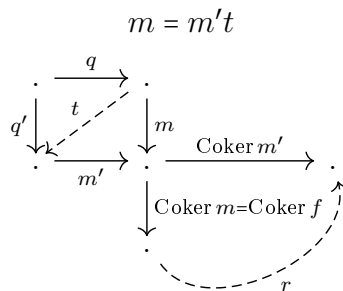
$$\text{Coker } m' = r(\text{coker } f)$$



Далее, применим

$$(\text{Coker } m') m = (\text{Coker } m') \text{Ker} (\text{Coker } f) = r (\text{coker } f) \text{Ker} (\text{coker } f) = 0.$$

Отсюда $\exists t$ такое, что



Подставляя, получим

$$f = m'q' = mq = m'tq.$$

Отсюда

$$q' = tq,$$

так как m' – мономорфизм.

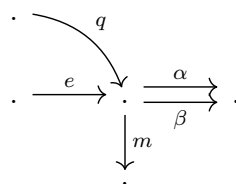
Так как m' – мономорфизм, t единственно.

Далее, пусть α и β таковы, что

$$\alpha q = \beta q.$$

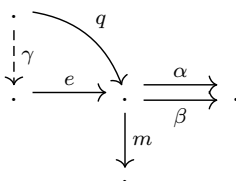
Пусть

$$e = \text{eq}(\alpha, \beta)$$



Тогда $\exists \gamma$ такой, что

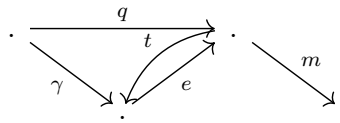
$$q = e\gamma$$



Отсюда

$$f = tq = te\gamma,$$

где te – мономорфизм, а значит, по условию, и ядро. Отсюда $\exists t$ такой, что



С одной стороны,

$$\gamma = tq,$$

с другой,

$$met = m,$$

так как $m \in \text{Mono}$. Тогда

$$et = \text{id}.$$

Домножим на e с правой стороны:

$$ete = e,$$

откуда

$$et = \text{id},$$

так как $e \in \text{Mono}$. Значит, $e \in \text{Iso}$. Из

$$\alpha e = \beta e$$

следует, что

$$\alpha = \beta,$$

то есть $q \in \text{Epi}$. □

Прямая сумма (бипроизведение)

Определение. *Прямой суммой* или *бипроизведением* объектов a и b Аб-категории C называют объект c вместе с морфизмами

$$b \begin{array}{c} \xrightarrow{p_2} \\ \xleftarrow{i_2} \end{array} c \begin{array}{c} \xleftarrow{p_1} \\ \xrightarrow{i_1} \end{array} a$$

такими, что

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = \text{id}_c \tag{89}$$

$$p_1 i_1 = \text{id}_a, \quad p_2 i_2 = \text{id}_b \tag{90}$$

Сразу видно, что

$$i_1, i_2 \in \text{Mono}(C)$$

$$p_1, p_2 \in \text{Epi}(C)$$

Умножим (89) слева на p_2 :

$$p_2 i_1 p_1 + p_2 i_2 p_2 = p_2$$

$$p_2 i_1 p_1 + p_2 = p_2$$

$$p_2 i_1 p_1 = 0,$$

откуда получаем, что

$$0 = p_2 i_1 p_1 i_1 = p_2 i_1.$$

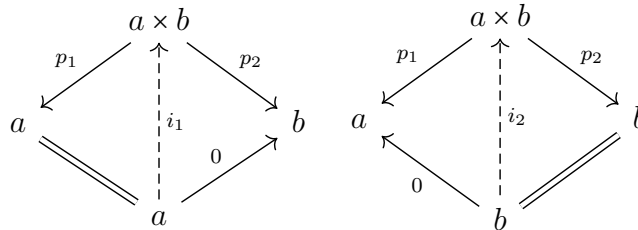
Аналогично,

$$p_2 i_2 = 0.$$

Теорема 17.1. Пусть a, b – объекты в Ab -категории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. \exists произведения a и b ;
2. \exists копроизведения a и b ;
3. \exists прямая сумма a и b .

Доказательство. $1 \Rightarrow 3$ определим при помощи универсального свойства i_1 и i_2 :



Равенства (90) выполнены по определению.

Рассмотрим

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 = 0 \cdot p_2 = p_1 = p_1 \text{id}_{a \times b}.$$

Аналогично,

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2 \text{id}_{a \times b}.$$

В силу универсального свойства произведения

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = \text{id}_{a \times b}.$$

$3 \Rightarrow 1$ Пусть дана диаграмма прямой суммы

$$b \begin{array}{c} \xrightarrow{p_2} \\ \xleftarrow{i_2} \end{array} c \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xleftarrow{i_1} \end{array} a$$

Покажем, что тогда существует произведение a и b . Рассмотрим объект d с морфизмами

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{f_1} & a \\ & & \downarrow p_1 \\ b & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_2} \\ \xleftarrow{i_2} \end{array} & c \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xleftarrow{i_1} \end{array} & a \\ & \downarrow f_2 & \downarrow f_1 & \\ & d & & \end{array}$$

Надо показать, что существует единственный морфизм f

$$\begin{array}{ccccc}
 & & p_2 & & p_1 \\
 & & \rightarrow & & \rightarrow \\
 b & \xleftarrow{i_2} & c & \xleftarrow{i_1} & a \\
 & \searrow f_2 & \uparrow f & \nearrow f_1 & \\
 & & d & &
 \end{array}$$

такой, что композиция с p_1 дает f_1 , а композиция с p_2 дает f_2 . Если f существует, то

$$f = (i_1 p_1 + i_2 p_2) f = i_1 f_1 + i_2 f_2,$$

то есть он единственный.

Положим для f_1 и f_2

$$f = i_1 f_1 + i_2 f_2.$$

Тогда

$$p_1 f = f_1, \quad p_2 f = f_2.$$

$2 \Rightarrow 3 \quad 3 \Rightarrow 2$ по двойственности. □

Замечание 17.1. Обозначение для прямой суммы:

$$a \oplus b = a \times b = a \sqcup b.$$

Аддитивная категория. Аддитивный функтор

Определение. Аддитивная категория – это Аб-категория, в которой \exists нулевой объект и бинарные²⁹ прямые суммы.

Теорема 17.2. Пусть \mathcal{C} – аддитивная категория,

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

– морфизмы. Определим

$$\Delta : a \rightarrow a \times a$$

и

$$\delta : b \times b \rightarrow b$$

через диаграммы ниже:

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 & \parallel & \\
 a & \xrightarrow{\Delta} & a \oplus a \\
 & \parallel & \\
 & a & \\
 & \uparrow p_1 & \\
 & a & \\
 & \downarrow p_2 & \\
 & a &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & b & \\
 & \parallel & \\
 b \oplus b & \xrightarrow{\delta} & b \\
 & \parallel & \\
 & b & \\
 & \uparrow \tilde{i}_2 & \\
 & b \oplus b & \\
 & \downarrow \tilde{i}_1 & \\
 & b &
 \end{array}$$

²⁹То есть участвует два объекта.

Определим морфизм (f, g) следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 p_1 \uparrow & & \uparrow \tilde{p}_1 \\
 a \oplus a & \xrightarrow{(f,g)} & b \oplus b \\
 p_2 \downarrow & & \downarrow \tilde{p}_2 \\
 a & \xrightarrow{g} & b
 \end{array}$$

Тогда

$$f + g = \delta(f, g)\Delta.$$

Доказательство. Вычислим

$$\begin{aligned}
 \delta(f, g)\Delta &= \delta(f, g)(i_1p_1 + i_2p_2)\Delta = \\
 &= \delta(f, g)(i_1\text{id}_a + i_2\text{id}_a) = \delta(\tilde{i}_1\tilde{p}_1 + \tilde{i}_2\tilde{p}_2)(f, g)(i_1 + i_2) = \\
 &= (\text{id}_b\tilde{p}_1 + \text{id}_b\tilde{p}_2)(f, g)(i_1 + i_2) = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)(f, g)(i_1 + i_2) = \\
 &= (fp_1 + gp_2)(i_1 + i_2) = f + g.
 \end{aligned}$$

□

Итак, при наличии нулевого объекта операция $+$ на Ном-множествах определена однозначно.

Определение. Функтор

$$F: A \rightarrow B$$

между Аб-категориями A и B называется *аддитивным*, если он является гомоморфизмом на всех Ном-множествах.

Из теоремы 17.2 следует, что если A и B – аддитивные категории, то F – аддитивный функтор

$\iff F$ переводит всякую диаграмму прямой суммы в диаграмму прямой суммы

$\iff F$ сохраняет бинарные произведения и универсальный притягивающий объект

$\iff F$ сохраняет копроизведения и универсальный отталкивающий объект.

Если $F \dashv G$ сопряженные,

$$\begin{aligned}
 F: X &\rightarrow A, \\
 G: A &\rightarrow X,
 \end{aligned}$$

где A и X – аддитивные категории, то F и G – аддитивные, так как F сохраняет все копределы, а G – все пределы.

$$A(Fx, a) \xrightarrow{\sim} X(x, Ga)$$

– изоморфизм абелевых групп, так как композиция единицы и применения аддитивного функтора G .

Абелева категория

Определение. Аддитивная категория называется *абелевой*, если выполнены следующие аксиомы:

1. (Ab1) в C \exists все ядра и коядра;
2. Все мономорфизмы в C – ядра, все эпиморфизмы – коядра.

Исторически (например, в известной статье Гротендика) понятие абелевой категории определялось по-другому. Приведенный выше вариант более современный и используется, например, Маклейном.

Упражнение 17.1. Показать, что если в Аб-категории выполняется аксиома (Ab1), то условие 2 определения выше эквивалентно аксиоме (Ab2) для \forall морфизма f .

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\quad} & a & \xrightarrow{f} & b & \twoheadrightarrow & \text{Coker } f \\ & & \downarrow & \nearrow \text{---} & \uparrow & & \\ & & \text{Coker}(\text{ker } f) = \text{Coim } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f = \text{Ker}(\text{coker } f) & & \end{array}$$

(Ab2) \bar{f} – всегда изоморфизм.

Из леммы 16.2 следует (Epi, Mono)-структурированность любой абелевой категории. Кроме того, в силу пункта 2 определения абелевой категории

$$\text{RegEpi} = \text{Mono}, \quad \text{RegMono} = \text{Mono}.$$

Если брать определение абелевой категории из Маклейна, получается, что любой морфизм раскладывается в композицию регулярного эпиморфизма и регулярного мономорфизма. $\text{Coker } f$ совпадает с $\text{Coker } i$, $\text{Ker } f$ совпадает с $\text{Ker } p$:

$$\text{Ker } f \longrightarrow \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \cdot \longrightarrow \text{Coker } f \\ \searrow p \quad \nearrow i \\ \cdot \end{array}$$

Отсюда

$$p = \text{coim } f, \quad i = \text{im } f.$$

Примеры. абелевых категорий: Ab , $R\text{-Mod}$, где R – ассоциативное кольцо с 1, $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, где \mathbb{K} – поле.

Теорема Фрейда – Митчелла

Начнем новую тему, чтобы можно было решить последнюю задачу из списка задач к экзамену.

Определение. Последовательность

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

точна в члене b , если

$$\text{Ker } g = \text{Im } f.$$

В частности,

$$gf = 0.$$

Рассмотрим

$$a \xrightarrow{0} b$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ker 0 &= \text{id}_a, \\ \text{coker } 0 &= \text{id}_b. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$a \xrightarrow{\text{id}_a} a$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ker \text{id}_a &= 0 \in C(a, a), \\ \text{coker } \text{id}_a &= 0. \end{aligned}$$

Последовательность

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b$$

точна $\iff f$ – мономорфизм. Действительно, вычислим

$$\text{im } 0 = \text{Ker}(\text{coker } 0) = \text{Ker}(\text{id}_a) = 0_a.$$

То есть последовательность точна $\iff \text{Ker } f = 0$.

Замечание 17.2. Определение абелевой категории является двойственным. Двойственные к абелевым категории оказываются также абелевыми, но они никогда не будут изоморфны, кроме тривиального случая.

Аналогично,

$$a \xrightarrow{f} b \longrightarrow 0$$

точна $\iff f$ – эпиморфизм.

Далее, последовательность

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0 \tag{91}$$

точна \iff

$$\begin{aligned} g &= \text{coker } f \\ f &= \text{ker } g \end{aligned}$$

Доказательство. \Rightarrow Действительно, если последовательность (91), то

$$f \in \text{Mono}, \quad g \in \text{Epi}.$$

Тогда

$$\text{Im } f = \text{Ker } g$$

$$\text{Ker}(\text{coker } f) = \text{ker } g.$$

Применяя coker , получаем

$$\text{coker } f = g.$$

Так как f – ядро,

$$f = \text{Ker}(\text{coker } f) = \text{ker } g.$$

\Leftarrow очевидно. □

Предложение. Из того, что

$$\text{Ker } g = \text{im } f,$$

следует, что

$$\text{coker } f = \text{coim } f.$$

Доказательство.

$$\text{ker } g = \text{ker}(\text{coker } f)$$

$$\text{coker}(\text{ker } g) = \text{coker}(\text{ker}(\text{coker } f)) = \text{coker } f.$$

$=\text{coim } g$

□

При переходе к двойственной категории точность сохраняется.

Определение. Пусть A и B – абелевы категории. Функтор

$$F: A \rightarrow B$$

называется *точным*, если он аддитивен и \forall точной последовательности

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

последовательность

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \longrightarrow 0$$

точна.

Сформулируем теорему о вложении.

Теорема 17.3. (Фрейд – Митчелл) \forall абелевой малой³⁰ категории $C \exists$ ассоциативное кольцо R с 1 и полный точный унивалентный функтор

$$F: C \rightarrow R\text{-Mod}$$

³⁰В соответствующей лекции требование малости абелевой категории отсутствует, но это уточняется в примечаниях лектора к курсу.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ