МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 3

ШАПОШНИКОВ
СТАНИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Лекция 1 **7**
Числовые ряды . . . 7
Ряды с неотрицательными слагаемыми . . . 9

Лекция 2 **12**
Числовые ряды . . . 12
Ряды с неотрицательными слагаемыми . . . 12
Бесконечные произведения . . . 14
Разложение синуса в бесконечное произведение . . . 16

Лекция 3 **18**
Числовые ряды . . . 18
Разложение синуса в бесконечное произведение . . . 18
Признак Гаусса . . . 20
Формула Стирлинга . . . 21
Теорема Муавра-Лапласа . . . 22

Лекция 4 **24**
Числовые ряды . . . 24
Теорема Муавра-Лапласа . . . 24
Не знакопостоянные ряды . . . 24
Перестановки рядов . . . 27

Лекция 5 **30**
Числовые ряды . . . 30
Арифметические действия с рядами . . . 30
Несобственные интегралы . . . 33

Лекция 6 **35**
Несобственные интегралы . . . 35
Сходимость несобственных интегралов . . . 36

Лекция 7 **40**
Несобственные интегралы . . . 40
Сходимость несобственных интегралов . . . 40
Функции Эйлера . . . 41

Лекция 8 **46**
Несобственные интегралы . . . 46
Функции Эйлера . . . 46
Асимптотика интеграла Лапласа и метод перевала . . . 47

Лекция 9 **52**
Несобственные интегралы . . . 52
Асимптотика интеграла Лапласа и метод перевала . . . 52

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10 **57**
Равномерная сходимость . . . 57
Компактность . . . 60

Лекция 11 **62**
Равномерная сходимость . . . 62
Компактность . . . 62

Лекция 12 **66**
Равномерная сходимость . . . 66
Компактность . . . 66
Свойства равномерно сходящихся последовательностей . . . 68

Лекция 13 **73**
Равномерная сходимость . . . 73
Свойства равномерно сходящихся последовательностей . . . 73
Равномерная сходимость рядов . . . 76

Лекция 14 **79**
Равномерная сходимость . . . 79
Равномерная сходимость рядов . . . 79

Лекция 15 **84**
Степенные ряды . . . 84
Комплексная дифференцируемость . . . 84
Сходимость степенных рядов . . . 85
Дифференцирование степенных рядов . . . 88
Интегрирование степенных рядов . . . 90

Лекция 16 **91**
Степенные ряды . . . 91
Свойства степенных рядов . . . 91
Примеры вычислений с помощью степенных рядов . . . 94

Лекция 17 **95**
Суммирование расходящихся рядов . . . 95

Лекция 18 **101**
Производящие функции . . . 101

Лекция 19 **108**
Производящие функции . . . 108
Степенные ряды для решения дифференциальных уравнений . . . 110
Определение синуса и косинуса через ряды . . . 112

Лекция 20 **115**
Кратные ряды и степенные ряды нескольких переменных . . . 115

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Равномерная сходимость функций, зависящих от параметра 117

Лекция 21 **121**
Равномерная сходимость несобственного интеграла с параметром 121
Равномерная сходимость интеграла от произведения 123

Лекция 22 **127**
Свойства собственных интегралов с параметром 127
Непрерывность 127
Дифференцируемость 128
Интегрируемость 129
Решение неоднородных дифференциальных уравнений 129

Лекция 23 **133**
Свойства несобственных интегралов с параметром 133
Непрерывность 133
Дифференцируемость 135
Интегрируемость 137

Лекция 24 **140**
Свойства несобственных интегралов с параметром 140
Интегрируемость 140
Дробное интегрирование и дробное дифференцирование 142

Лекция 25 **146**
Дробное интегрирование и дробное дифференцирование 146
Задача Абеля 146
Свертка 147
Свойства свертки 150

Лекция 26 **155**
Свертка 155
Свойства свертки 155
Свертка периодических функций 157
Евклидовы пространства. Ряды Фурье 159
Евклидовы пространства 159

Лекция 27 **161**
Евклидовы пространства. Ряды Фурье 161
Евклидовы пространства 161
Ортонормированные системы 164
Тригонометрические ряды Фурье 166

Лекция 28 **168**
Евклидовы пространства. Ряды Фурье 168
Тригонометрические ряды Фурье 168
Поточечная сходимость тригонометрических рядов Фурье 169

Лекция 29 **174**
Евклидовы пространства. Ряды Фурье 174
Поточечная сходимость тригонометрических рядов Фурье 174
Суммирование по Чезаро и ядро Фейеро 174
Гладкость и сходимость 175
Метод Фурье 177
Рядов Фурье через комплексную экспоненту 178

Лекция 30 **180**
Преобразование Фурье 180

Лекция 1

Числовые ряды

Пусть $\{a_n\}$ - числовая последовательность. Формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

называется *рядом.*

$$S_N = a_1 + ... + a_N \tag{1.2}$$

называется *частичной суммой.*

Определение 1. Говорят, что *ряд сходится* и S *- его сумма*, если существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S \tag{1.3}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.4}$$

С рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ связана последовательность частичных сумм S_N со всякой пследовательностью x_n связан ряд

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1}),\ x_0 = 0$$

Утверждение 1 (необходимое условие сходимости)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$$

□

Утверждение 2. *Добавление, отбрасывание, изменение конечного набора слагаемых ряда не влияет на его сходимость (но может поменять сумму).*

Доказательство. Такое изменение при достаточно большом N просто добавляет к S_N фиксированное число. □

Теперь разберемся, можно ли расставлять скобки?

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n) + (...) + (...)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 3. *Пусть ряд* $\sum\limits_n a_n$ *сходится и* $n_1 < n_2 < ...$ *- возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n\right)$$

сходится к той же сумме ($n_0 = 0$).

Доказательство.

$$\widetilde{S}_K = \sum_{k=0}^{K}\left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n\right) = S_{n_K}$$

это подпоследовательность, сходящейся последовательности S_N. □

Утверждение 4. *Пусть* $a_n \to 0$ *и* $n_1 < n_2 < ...$ *- возрастающая последовательность натуральных чисел* $n_{k+1} - n_k \leqslant L$, $\forall k$. *Тогда из сходимости ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n\right)$$

следует сходимость исходного ряда $\sum\limits_n a_n$.

Доказательство.

$$S_N = a_1 + ... + a_N = a_1 + ... + a_{n_k} + a_{n_k+1} + ... + a_N \ \left(+ \text{ нет } ... + a_{n_{k+1}}\right)$$

Пусть

$$\widetilde{S}_K \to S.$$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon :\ \forall K \geqslant K_\varepsilon\ \left|S - \widetilde{S}_K\right| < \varepsilon$ и $\exists N_\varepsilon :\ \forall n > N_\varepsilon\ |a_n| < \varepsilon$.

$$|S_N - S| \leqslant |(a_1 + ...a_{n_k}) - S| + |a_{n_k+1}| + ... + |a_N|$$

$$n_k < N < n_{k+1}$$

Пусть $N > \max\{n_{K_\varepsilon}, n_{N_\varepsilon}\}$

$$|S_N - S| \leqslant \varepsilon + L\varepsilon = \varepsilon(1 + L).$$

□

Задача 1. Придумать ряд $\sum a_n :\ \forall A \in \mathbb{R}$ существует расстановка скобок такая, что сгруппированный ряд сходится к A.

Критерий Коши. $\sum\limits_n a_n$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n,\ m > N\ \ |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Если расписать при $n > m$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 2. Говорят, что ряд $\sum\limits_n a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum\limits_n |a_n|$.

Определение 3. Говорят, что ряд $\sum\limits_n a_n$ *сходится условно*, если $\sum\limits_n a_n$ сходится и $\sum\limits_n |a_n|$ расходится.

Утверждение 5. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство.

$$|a_{m+1} + ... + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + ... + |a_n|$$

Так как $\sum\limits_n |a_n|$ сходится то по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,\ m > N\ (n > m)$

$$|a_{m+1}| + ... + |a_n| < \varepsilon$$

следовательно

$$|a_{m+1} + ... + a_n| \leqslant \varepsilon$$

и для $\sum\limits_n a_n$ верно условие Коши. □

Ряды с неотрицательными слагаемыми

Пусть $a_n \geqslant 0$, тогда S_N не убывает. По теореме Вейерштрасса сходимость S_N равносильна их ограниченности.

Следствие. *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

1) *Тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_n b_n$ *следует сходимость* $\sum\limits_n a_n$

2) *из расходимости* $\sum\limits_n a_n$ *следует расходимость* $\sum\limits_n b_n$.

Следствие. *Пусть для всех* n $c_1 b_n \leqslant a_n \leqslant c_2 b_n$. *Тогда ряды* $\sum\limits_n a_n$ *и* $\sum\limits_n b_n$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Типичный пример. $a_n > 0,\ b_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

значит $\sum\limits_n a_n$ и $\sum\limits_n b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Пример 1.

1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \tag{1.5}$$

$|q| < 1$ - сходится, $|q| \geqslant 1$ - расходится.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1.6}$$
это гармонический ряд, он расходится, так как
$$\frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{2m} \geqslant \frac{1}{2},$$
значит частичные суммы не ограниченны.

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{1.7}$$
$p \leqslant 1$ - ряд расходится, так как
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^p}$$
$p > 1$. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} \right)$$
$$S_N = 1 - \frac{1}{(N+1)^q} \xrightarrow{q>0} 1$$
$$\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} = \frac{(n+1)^q - n^q}{n^q(n+1)^q} = \frac{1}{n^q} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q} =$$
$$= \frac{1}{n^q} \cdot \frac{1 + \frac{q}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q} = \frac{1}{n^{q+1}} \cdot \frac{q + \overline{o}(1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q}$$
Получаем
$$\frac{\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}}{\frac{1}{n^{q+1}}} \to q > 0$$
значит $\sum\limits_n \frac{1}{n^{q+1}}$ сходится, следовательно при $p > 1$ ряд $\sum\limits_n \frac{1}{n^p}$ сходится.

4) Ряд Лейбница
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \tag{1.8}$$

Теорема 1 (признак Лейбница)**.** *Пусть a_n не возрастает и $a_n \to 0$. Тогда $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ сходится.*

Доказательство.
$$S_{2k} = -a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{2k}$$
$$a_2 - a_3 \geqslant 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$a_4 - a_5 \geqslant 0$$

$$\dots$$

$$a_{2k} \geqslant 0$$

значит

$$S_{2k} \geqslant -a_1$$

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2}$$

$$-a_{2k+1} + a_{2k+2} \leqslant 0$$

то есть S_{2k} не возрастает и ограничена снизу, значит сходится к S.

$$S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1}$$

$$a_{2k+1} \to 0$$

следовательно S_{2k+1} сходится к S. $\square$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$

Можем оценить асимптотически

$$\sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

данный ряд сходится, но исходный ряд расходится, то есть асимптотика работает только для знакоопределенных рядов.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

Числовые ряды

Ряды с неотрицательными слагаемыми

Утверждение 6 (признак Даламбера)**.** *Пусть* $a_n > 0$.

1) *Если*
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1, \tag{2.1}$$
то ряд $\sum\limits_n a_n$ *сходится.*

2) *Если*
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1, \tag{2.2}$$
то ряд $\sum\limits_n a_n$ *расходится.*

Если $q = 1$*, то ничего сказать нельзя.*

Доказательство. Вспомним:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} c_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n>k} c_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} c_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n>k} c_n$$

1)
$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n>k} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$$

$\exists k_0 :\ \forall k > k_0$ последовательность окажется в любой заданной окрестности числа q. Возьмем окрестность (произвольное число, q_0), $q_0 < 1$. Для $k > k_0$

$$\sup_{n>k} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0 < 1$$

$\forall n > k_0 + 1$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0 < 1$$

Отбросим элементы $a_1, ...a_{k_0+1}$. Далее считаем, что $\forall n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0 < 1$$

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant a_1 q_0^{n-1}$$

$\sum\limits_n a_1 q_0^{n-1}$ сходится, значит $\sum\limits_n a_n$ сходится.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2)
$$\lim_{k\to\infty}\inf_{n>k}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$$
$\exists k_0:\ \forall k>k_0$
$$\inf_{n>k}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$
значит $\forall n>k_0+1$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$
следовательно
$$a_{n+1}>a_n$$
$$a_n\nrightarrow 0.$$

□

Утверждение 7 (признак Коши)**.** *Пусть* $a_n\geqslant 0$.

1) Если
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q<1, \tag{2.3}$$
то $\sum\limits_n a_n$ *сходится.*

2) Если
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q>1, \tag{2.4}$$
то $\sum\limits_n a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1)
$$\lim_{k\to\infty}\sup_{n>k}\sqrt[n]{a_n}=q<1$$
$\exists q_0<1$ и $k_0:\ \forall k>k_0$
$$\sup_{n>k}\sqrt[n]{a_n}<q_0$$
следовательно $\forall n>k_0+1$
$$\sqrt[n]{a_n}<q_0$$
$$a_n<q_0^n$$
следовательно $\sum\limits_n a_n$ сходится.

2) $\exists\{n_k\}:$
$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\to q>1$$
В частности $\exists K:\ \forall k>K$
$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}}>1$$
значит
$$a_{n_k}>1$$
следовательно
$$a_n\nrightarrow 0.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

□

Если ряд сходится по признаку Даламбера, то он сходитсяпо признаку Коши. Есть ряд, который по Даламберу не исследуется, а по Коши исследуются, например

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+...$$

Бесконечные произведения

Пусть $\{b_n\}$ - числовая последовательность. Выражение

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.5}$$

называется *бесконечным произведением.*

$$\Pi_N = \prod_{n=1}^{N} b_n \tag{2.6}$$

называется *частичное произведение.*

Если существует конечный, отличный от 0

$$\lim_{N\to\infty} \Pi_N,$$

то говорят, что *произведение сходится* и равно

$$\lim_{N\to\infty} \Pi_N.$$

Если

$$\lim_{N\to\infty} \Pi_N = 0,$$

то говорят, что произведение *расходится к 0.*

В остальных случаях произведение *расходится.*

Утверждение 8 (необходимое условие сходимости)**.** *Если* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то* $b_n \to 1$.

Доказательство. $\Pi_N \neq 0$

$$b_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \to \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k} = 1$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 2. *Пусть* $b_n > 0$. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится* $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln b_n$ *сходится.*

В случае сходимости имеют место следующие равенства

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln b_n} = \prod_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.7}$$

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n \tag{2.8}$$

Доказательство. e^x и $\ln x$ непрерывные функции.

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{N} \ln b_n} = \prod_{n=1}^{N} b_n$$

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{N} b_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln b_n$$

Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по определению

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} b_n = C > 0$$

Так как $\ln x$ непрерывна на луче $(0, +\infty)$, то

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{N} b_n\right) \to \ln C$$

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{N} b_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln b_n,$$

значит ряд $\sum\limits_n \ln b_n$ сходится. Для экспоненты аналогично. □

$$b_n \to 1$$

$$b_n = 1 + \beta_n > 0$$

$$\beta_n \to 0$$

То есть исследование сходимости произведения сводится к сходимости ряда

$$\sum_n \ln(1 + \beta_n). \tag{2.9}$$

Утверждение 9. $\sum\limits_n |\ln(1 + \beta_n)|$ *сходится* $\Leftrightarrow \sum\limits_n |\beta_n|$ *сходится. В частности, если* $\sum\limits_n |\beta_n|$ *сходится, то* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \beta_n)$ *сходится.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| \to 1 \text{ при } x \to 0$$

следовательно $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in (-\delta, \delta)$ выполняется

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}|x| \leqslant |\ln(1+x)| \leqslant \frac{3}{2}|x|$$

Рассматриваем случай $\beta_n \to 0$. $\exists n_0 : \ \forall n > n_0$

$$\frac{1}{2}|\beta_n| \leqslant |\ln(1+\beta_n)| \leqslant \frac{3}{2}|\beta_n|$$

□

Задача 2.

1) Доказать, что из сходимости $\sum\limits_n \beta_n$ и $\sum\limits_n \beta_n^2$ следует сходимость $\sum\limits_n \ln(1+\beta_n)$.

   Использовать
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ...$$

2) Привести пример, когда обратное неверно.

Разложение синуса в бесконечное произведение

Рассмотрим многочлен $P(x)$, $x_1, ...x_n$ - его корни.

$$P(x) = A(x - x_1)...(x - x_n)$$

если раскладывать по аналогии синус

$$\sin x = A \prod_n (x - \pi n),$$

но оно не сойдется.

Попробуем преобразовать

$$P(x) = (-1)^n A x_1 ... x_n \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) ... \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

аналогичными преобразованиями можно получить

Теорема 3 (Эйлера)**.** $x \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \tag{2.10}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$\sin(2N+1)t = \sin t \cdot P_N(\sin^2 t)$$

$P_N(x)$ - многочлен степени N.

Задача 3. Доказать это равенство по индукции, полезно рассмотреть

$$\sin(2N+3)t + \sin(2N-1)t$$

$$\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t} = P_N(\sin^2 t) = C_N \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{\pi k}{2N+1}}\right),\ k = 1, ...N$$

Устремим $t \to 0$

$$C_N = 2N+1$$

$$t = \frac{x}{2N+1}$$

$$\sin x = (2N+1)\sin\frac{x}{2N+1} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2N+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2N+1}}\right)$$

Устремляем $N \to \infty$

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

Но так мы делать нельзя, предельный переход не обоснован, строгое обоснование на следующей лекции. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3

Числовые ряды

Разложение синуса в бесконечное произведение

Продолжение доказательства теоремы Эйлера.

$$\sin(2N+1)t = (2N+1)\sin t \prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right) =$$

$$= \left[(2N+1)\sin t \prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right)\right] \cdot \prod_{n=J+1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right)$$

$$(2N+1)t = x$$

$$\sin x = \left[(2N+1)\sin\frac{x}{2N+1} \prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2N+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right)\right] \cdot \prod_{n=J+1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2N+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right)$$

Устремляем $N \to \infty$

$$(2N+1)\sin\frac{x}{2N+1} \to x$$

$$\prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2N+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right) = \prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$\prod_{n=J+1}^{N}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2N+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}}\right) \to R_j$$

существование предела второй части произведения следует из существования предела первой части произведения.

$\forall J$

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{J}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \cdot R_J$$

Хотим $J \to \infty$

$$\prod_{n=J+1}^{N}\left(1 - \frac{\sin \frac{x}{2N+1}}{\sin \frac{\pi n}{2N+1}}\right) \leqslant 1$$

При $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{2}{\pi}\phi \leqslant \sin\phi \leqslant \phi$$

Выбираем J такое, чтобы $\forall N > J$ $\frac{|x|}{2N+1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{2N+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}} \leqslant \frac{\frac{x^2}{(2N+1)^2}}{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{(2N+1)}} = \frac{x^2}{4n^2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получаем оценку снизу

$$\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{\sin\frac{x}{2N+1}}{\sin\frac{\pi n}{2N+1}}\right)\geqslant\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)$$

$N\to\infty$

$$\prod_{n=J+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\leqslant R_J\leqslant 1$$

$J\to\infty$

$$x\prod_{n=1}^{J}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)\to x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)$$

$$\prod_{n=J+1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\to 1\ \Rightarrow\ R_j\to 1.$$

□

Утверждение 10 (формула Валлиса)**.**

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{(2^N\cdot N!)^2}{(2N)!}\right)^2\frac{1}{2N+1}=\frac{\pi}{2}\tag{3.1}$$

Доказательство. Возьмем в формуле для синуса $x=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=1$$

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{(2N-1)(2N+1)}{(2n)^2}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2N!!}{(2N-1)!!}\right)^2\frac{1}{2N+1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{(2N!!)^2}{2N!}\right)^2\frac{1}{2N+1}=\frac{\pi}{2}$$

$$2N!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2N=2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2\cdot N=2^N\cdot N!$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{(2^N\cdot N!)^2}{(2N)!}\right)^2\frac{1}{2N+1}=\frac{\pi}{2}$$

□

Следствие (упражнение)

$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)\pi^2}\right)\tag{3.2}$$

Признак Гаусса

Лемма 1. *Пусть* $b_n > 0$,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n, \ \sum_n |\beta_n| < \infty.$$

Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Доказательство.

$$b_n = b_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\beta_k)} \to C \neq 0, \ \infty$$

так как бесконечное произведение сходится. □

Теорема 4 (признак Гаусса)**.** *Пусть* $a_n > 0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \alpha_n, \ \sum_n |\alpha_n| < \infty$$

(например $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$*). Тогда*

$$a_n \sim \frac{C}{n^p}, \ C > 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Хотим доказать, что

$$b_n = a_n \cdot n^p \to C$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{p}{n} + \alpha_n\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 + \frac{p}{n} + \alpha_n\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-p} =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{n} + \alpha_n\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ряд $\alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ сходится, то есть по лемме 1 у b_n есть предел. □

Следствие. $\sum\limits_n$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.

Пример 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$$

при каких p и q сходится? Пусть

$$a_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}$$

$$c_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n} = 1 + \frac{1-p}{p+n} = 1 + \frac{1-p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$a_n \sim \frac{C}{n^{1-p}}$$
$$c_n \sim \frac{C}{n^{1-p+q}}$$

Получаем, что если $1 - p + q > 1$, то сходится, иначе расходится.

Формула Стирлинга

Теорема 5 (формула Стирлинга)**.**

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n+\varepsilon_n},\ \varepsilon_n \to 0 \tag{3.4}$$
$$\left(\varepsilon_n = \frac{\theta_n}{12n},\ 0 < \theta_n < 1\right).$$

Доказательство. На самом деле тут заключено два утверждения.

1)
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = C$$

2)
$$C = \sqrt{2\pi}$$

1) Пусть
$$b_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n!e^n \cdot (n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot (n+1)!e^{n+1}} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$
$$= e^{-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^{O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

значит по лемме 1 предел существует.

2) Извлечем корень из формулы Валлиса
$$\frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

уже получено, что
$$n! \sim C \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

подставим
$$\frac{(2^n \cdot C \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^2}{C \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \cdot \sqrt{2n+1}} \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$C = \sqrt{2\pi}$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема Муавра-Лапласа

Бросаем n раз правильную монету

$$P(k - \text{орлов}) = \frac{C_n^k}{2^n}$$

Например, при $n = 4$ количество подходящих нам исходов изображено на Рис. 1. Также на Рис. 1. изображена аппроксимация.

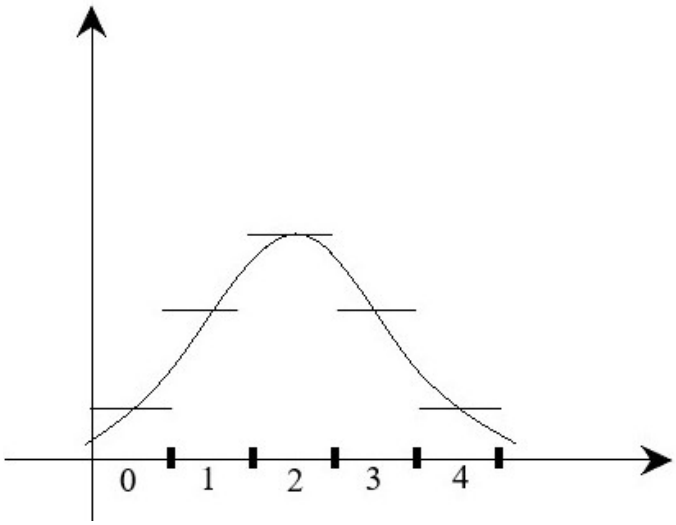

Рис. 1.

Теорема 6 (локальная теорема Муавра - Лапласа)**.** *Рассмотрим*

$$x_k = \frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}},\ a \leqslant x_k \leqslant b$$

Тогда

$$P(k - \textit{орлов}) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}\phi(x_k) \tag{3.5}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{3.6}$$

Доказательство.

$$P(k - \text{орлов}) = C_n^k \cdot 2^{-n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}2^{-n} = e^{-n\ln 2 + \ln n! - \ln k! - \ln(n-k)!}$$

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \overline{o}(1)$$

$$k = \frac{n}{2} + \frac{x_k\sqrt{n}}{2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$n-k=\frac{n}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}$$

$$\ln k!=\ln\sqrt{2\pi}+\left(\frac{n+1}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)-\frac{n}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}+\overline{o}(1)$$

$$\ln(n-k)!=\ln\sqrt{2\pi}+\left(\frac{n+1}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)-\frac{n}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}+\overline{o}(1)$$

$$\ln\left(\frac{n}{2}\pm\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)=\ln\frac{n}{2}+\ln\left(1\pm\frac{x_k}{\sqrt{n}}\right)=\ln\frac{n}{2}+\left(\pm\frac{x_k}{\sqrt{n}}-\frac{x_k^2}{2n}+\overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Обозначим

$$R_n=-n\ln 2+\ln n!-\ln k!-\ln(n-k)!$$

$$R_n=-n\ln 2+-\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-\left(\frac{n+1}{2}+\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\left(\ln\frac{n}{2}+\frac{x_k}{\sqrt{n}}-\frac{x_k^2}{2n}\right)-$$

$$-\left(\frac{n+1}{2}-\frac{x_k\sqrt{n}}{2}\right)\left(\ln\frac{n}{2}-\frac{x_k}{\sqrt{n}}-\frac{x_k^2}{2n}\right)+\overline{0}(1)=$$

$$=-n\ln 2-\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-(n+1)\ln\frac{n}{2}+\frac{x_k^2}{2}-x_k^2+\overline{o}(1)=$$

$$=-\ln\sqrt{2\pi}-\ln\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{x_k^2}{2}+\overline{o}(1)$$

□

Лекция 4

Числовые ряды

Теорема Муавра-Лапласа

Рассмотриваем n бросков монетки и доказали, что если рассматриваем

$$x_m = \frac{m - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}},\ a \leqslant x_m \leqslant b$$

$$P\left(S_n = m\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\phi(x_m)$$

$$P\left(a \leqslant \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leqslant b\right) = \sum_{m:a\leqslant x_m\leqslant b} P(S_n = m) \sim \sum_{a\leqslant x_m\leqslant b} \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\phi(x_m) \tag{4.1}$$

$$\sqrt{\frac{n}{4}} = x_m - x_{m-1}$$

Вывод: если мы хотим посмотреть количество успешных бросков в промежутке $\frac{n}{2} + a\sqrt{\frac{n}{4}} \leqslant S_n \leqslant \frac{n}{2} + b\sqrt{\frac{n}{4}}$, то это

$$\sim \int\limits_a^b \phi(x)dx$$

Мы применяли в доказательстве оценку

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n \cdot e^{-n+\overline{o}(1)}$$

а на самом деле

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

так мы можем доказать, что при больших n вероятность стремится к интегралу.

Отсюда можем угадать, что

$$P(-\infty < S_n < +\infty) = 1 \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{4.2}$$

Не знакопостоянные ряды

Пусть $\sum\limits_n b_n$ - сходится, для любого ли $\sum\limits_n a_n b_n$ сходится? Нет.

1) $a_n = \frac{1}{b_n}$ - расходится.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) $\{a_n\}$ - ограниченная. Расходимость будет, например, если

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n},\ a_n = (-1)^n$$

Если $\sum\limits_n |b_n| < \infty$, то сходится.

Утверждение 11 (преобразование Абеля)**.**

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_n B_{n-1} - \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \tag{4.3}$$

Доказательство.

$$B_N = b_1 + ... + b_N,\ B_0 = 0$$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= a_m B_m - a_n B_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

□

Преобразование Абеля является дискретным аналогогом формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b f g' dx = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f' g dx$$

в нашем случае $f = a_k,\ g = B_k$.

Следствие. *Пусть* $\exists \lim a_n B_n$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) B_n$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = B_n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

$$B_n a_n \to T$$

и из равенства получаем одновременную сходимость и расходимость рядов. □

Признак Дирихле-Абеля.

I. Пусть a_n *- монотонна и* $a_n \to 0,\ B_n$ *- ограничена.*

II. Пусть a_n *- монотонна и ограничена,* $\sum\limits_n b_n$ *- сходится.*

Тогда $\sum\limits_n a_n b_n$ *сходится.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

I.
$$a_n B_n \to 0$$

Без ограничения общности a_n убывет

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$$

$$a_{N+1} \to 0$$

то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится, то есть мы умножаем асболютно сходящуюся на ограниченную.

Следовательно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$ сходится и по следствию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

II.
$$a_n \to a$$

$a_n - a \to 0$ - монотонна, B_n -ограничены, тогда по I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(a_n - a)$ - сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

это сумма двух сходящихся.

□

Следствие(признак Лейбница). $a_n \to 0$ - *монотонная. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится.*

Доказательство. $b_n = (-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \leqslant 1$, значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится по признаку Дирихле. □

Пример 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \ x \neq \pi k$$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ - монотонная, $b_n = \sin nx$, домножим частичную сумму на $\sin \frac{x}{2}$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \sin nx \right) \cdot \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(N + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

То есть $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n$ - ограничены, значит исходный ряд сходится по признаку Дирихле (для косинуса аналогично).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

$$|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 nx}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos(n \cdot 2x)}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(n \cdot 2x)}{n}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot 2x)}{n}$ - сходится, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится, значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ расходится.

То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится условно.

Перестановки рядов

Пусть у нас есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ называется *перестановкой.*

Теорема 7 (Римана)**.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно (абсолютно не сходится), то* $\forall a \in [-\infty, +\infty]\ \exists \phi :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = a. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть p_n - все положительные a_k, а q_n все неположительные из a_k.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty$$

$$S_n^a = S_{n_1}^p + S_{n_2}^q$$

Если ряд из p_n сходится, то ряд из q_n тоже сходится и получаем абсолютную сходимость.

$$p_n \to 0,\ q_n \to 0$$

Зафиксируем $a > 0$

1) n_1 :

$$p_1 + ... + p_{n_1} > a$$

$$p_1 + ... + p_{n_1 - 1} \leqslant a$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) m_1 :

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1 + ... + q_{m_1} < a$$

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1 + ... + q_{m_1 - 1} \geqslant a$$

3) n_2 :

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1 + ... + q_{m_1} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_1+n_2} > a$$

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1 + ... + q_{m_1} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_1+n_2-1} \leqslant a$$

И так далее. Таким образом получается, что все члены ряда задействованы, так как на каждом шаге мы берем хотя бы одно слагаемое.

$$S_n^+ = p_1 + ...p_{n_1} + q_1 + ... + q_{m_1} + ... + q_{m_1+...+m_k+1} + ...q_{m_1+...+m_{k+1}-1} +$$

$$+ q_{m_1+...+m_{k+1}} + p_{n_1+...+n_{k+1}+1} + p_{n_1+...+n_{k+1}+j}$$

$$p_1 + ...p_{n_1} + q_1 + ... + q_{m_1} + ... + q_{m_1+...+m_k+1} + ...q_{m_1+...+m_{k+1}-1} \geqslant a$$

$$a + q_{m_1+...+m_{k+1}} \leqslant S_n^+ \leqslant a$$

То есть

$$\left|S_n^+ - a\right| < q_i$$

Аналогично, если остановимся на отрицательных будет

$$\left|S_n^- - a\right| < p_j$$

$$q_i \to 0,\ p_k \to 0$$

и получаем

$$\left|S_n^+ - a\right| < \varepsilon$$

$$\left|S_n^- - a\right| < \varepsilon$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = a$$

□

Задача 4. Доказать для $a = \infty$.

Действовать так

1)

$$p_1 + ... + p_{n_1} > 1$$

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1$$

2)

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1 + p_{n_1+1} + ... + p_{n_2} > 2$$

$$p_1 + ... + p_{n_1} + q_1 + p_{n_1+1} + ...p_{n_2} + q_2$$

и так далее.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Надо проверить, что, начиная с какого-то номера, получим сколь угодно большое число.

Теорема 8. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходящийся ряд, тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *абсолютно сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4.5}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\phi(n)}| \leqslant \sum_{k=1}^{\max\{\phi(1),...\phi(N)\}} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

получаем, что частичные суммы ограничены, значит ряд сходится.

Оценим

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{n=1}^{N} a_{\phi(n)} \right|$$

выберем N_1 такое, что

$$\{1, ...J\} \subset \{\phi(1), ...\phi(N_1)\}$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists J :$

$$\sum_{k=J+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

$\forall N > N_1$

$$\{1, ...J\} \subset \{\phi(1), ...\phi(N)\}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{n=1}^{N} a_{\phi(n)} \right| \leqslant \sum_{k=J+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5

Числовые ряды

Арифметические действия с рядами

Пусть у нас есть два сходящихся ряда $\sum\limits_n a_n$ и $\sum\limits_n b_n$, тогда мы можем

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$$\sum_n \alpha a_n = \alpha \sum_n a_n$$

2)
$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$$

3)
$$\left(\sum_n a_n\right) \cdot \left(\sum_n b_n\right) = ?$$

Теорема 9 (Коши)**.** *Если* $\sum\limits_n |a_n| < \infty$, $\sum\limits_n |b_n| < \infty$, *то ряд* $\sum\limits_k a_{i(k)} b_{j(k)}$ *- сумма попарных произведений с произвольной нумерацией (раскрываем скобки) сходится абсолютно и*
$$\sum_k a_{i(k)} b_{j(k)} = \left(\sum_n a_n\right) \cdot \left(\sum_n b_n\right) \tag{5.1}$$

Доказательство. Для удобства введем обозначения
$$A = \sum_n a_n$$
$$B = \sum_n b_n$$

Рассмотрим сумму
$$\sum_{k=1}^{N} |a_{i(k)} b_{j(k)}| \leqslant \left(\sum_{n \leqslant \max\{i(k),\, k \leqslant N\}} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n \leqslant \max\{j(k),\, k \leqslant N\}} |b_n|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_n |a_n|\right) \cdot \left(\sum_n |b_n|\right)$$
значит частичные суммы рассматриваемого ряда ограничены, значит ряд $\sum\limits_k |a_{i(k)} b_{j(k)}|$ сходится.

Можем нумеровать ряд любым, удобным для нас образом. Будем нумеровать так, что за N^2 шагов были пронумерованы все клетки квадрата $N \times N$
$$S_{N^2} = \sum_{i,j \leqslant N} a_i b_j = \left(\sum_{i \leqslant N} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j \leqslant N} b_j\right) \to A \cdot B$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

S_N сходятся, а поскольку $S_{N^2} \to A \cdot B$, то $S_N \to A \cdot B$, так как предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности. □

Теорема 10 (Мертенса). *Если* $\sum\limits_n a_n$ *сходится абсолютно, а* $\sum\limits_n b_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_n c_n$, *где*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1 \tag{5.2}$$

сходится к $A \cdot B$.

Доказательство. Нумерация у нас по неглавным диагоналям.

$$c_1+c_2+c_3+...+c_N = a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+...+a_1b_N+a_2b_{N-1}+...+a_Nb_1 =$$

$$= a_1(b_1+...b_N)+a_2(b_1+...+b_{N-1})+a_3(b_1+...+b_{N-2})+...+a_Nb_1 = a_1B_N+a_2B_{N-1}+...a_NB_1$$

$$B_k = b_1 + ... + b_k$$

$$B_n = B + \beta_n,\ \beta_n \to 0$$

$$a_1B_N + a_2B_{N-1} + ...a_NB_1 = B(a_1 + ... + a_N) + a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + ... + a_n\beta_1$$

$$B(a_1 + ... + a_N) \to A \cdot B$$

$$\sum_n |a_n| < \infty$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M :\ \sum\limits_{n \geqslant M} |a_n| < \varepsilon$

$$|a_{M+1}\beta_{N-M} + ...a_N\beta_1| \leqslant C \cdot \sum_{n \geqslant M} |a_n| < C\varepsilon$$

$$|\beta_n| \leqslant C$$

$\exists N_0 :\ \forall N > N_0\ |\beta_{N-M+1}| < \frac{\varepsilon}{M \max\limits_{k \leqslant M} |a_k| + 1}$

$$|a_1\beta_N + ... + a_M\beta_{N-M+1}| < \varepsilon$$

Получаем, что для $N > N_0$

$$|a_1\beta_N + ... + a_N\beta_1| < (C+1)\varepsilon$$

□

Пример 5. Рассмотрим два условно сходящихся ряда

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$a_1b_n + ... + a_nb_1 = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}\right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$k(n-k+1) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}$$
$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{2}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{2n}{n+1} \geqslant 1$$

то есть слагаемые не стремятся к 0 и ряд расходится, значит два условно сходящихся ряда вообще говоря так перемножать нельзя.

Теорема 11 (Абеля)**.** *Если* $\sum\limits_n a_n$ *сходится,* $\sum\limits_n b_n$ *сходится,* $\sum\limits_n c_n$ *сходится, где*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$$

то

$$\sum_n c_n = A \cdot B \tag{5.3}$$

Доказательство.

$$C_n = c_1 + ... + c_n = a_1 B_n + ... + a_n B_1$$
$$\frac{C_1 + ...C_n}{n} = \frac{A_1 B_n + ... + A_n B_1}{n}$$

Если последовательность сходится, то последовательность средних арифметических сходится к тому же числе, то есть

$$C_n \to C$$
$$\frac{A_1 B_n + ... + A_n B_1}{n} \to C$$
$$A_n \to A,\ B_n \to B$$
$$\frac{A_1 B_n + ... + A_n B_1 - nAB}{n} =$$
$$= \frac{A_1(B_n - B) + ... + A_n(B_1 - B) + B(A_1 + ... + A_n - nA)}{n} =$$
$$= \frac{A_1(B_n - B) + ... + A_n(B_1 - B)}{n} + B\left(\frac{A_1 + ... + A_n}{n} - A\right)$$
$$B\left(\frac{A_1 + ... + A_n}{n} - A\right) \to 0$$

$\exists N:\ \forall n > N\ |B_n - B| < \varepsilon$ тогда

$$\left|\frac{A_1(B_n - B) + ... + A_{n-N}(B_{N+1} - B)}{n}\right| \leqslant \varepsilon \frac{|A_1| + ... + |A_n|}{n} \leqslant \varepsilon C$$
$$\left|\frac{A_{n-N+1}(B_N - B) + ... + A_n(B_1 - B)}{n}\right| \leqslant \frac{NC}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Несобственные интегралы

Пусть f определена на $[a, b)$ и для всякого $c \in [a, b)$ функция f интегрируема по Риману на $[a, c]$. Определим функцию

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx \tag{5.4}$$

Определение 4. Если существует конечный предел

$$\lim_{c \to b-} F(c) \tag{5.5}$$

то этот предел называется *несобственным интегралом Римана по* $[a, b)$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{5.6}$$

Пример 6.

1)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

при $p > 0$ подынтегральная функция неограничена.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \to 0+} \begin{cases} -\ln c, & p = 1 \\ \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{c^{-p+1}}{-p+1}, & p \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & p = 1 \\ \text{предел конечен}, & -p+1 > 0 \\ \infty, & -p+1 < 0 \end{cases}$$

То есть интеграл сходится при $p < 1$.

2)

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \to +\infty} \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p}$$

интеграл сходится при $p > 1$.

Утверждение 12. *Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману в несобственном смысле на $[a, b)$ и интегралы совпадают.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. $F(c) = \int\limits_a^c f dx$ - непрерывна на $[a, b]$ и

$$F(c) \xrightarrow[c \to b-]{} F(b) = \int\limits_a^b f dx$$

□

Так несобстенный интеграл это предел, то все, что можно предельным переходом перенести, переносится с обычных интегралов на несобственные, напремер, докажем свойство линейности:
Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b)$ и

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int\limits_a^b f dx + \beta \int\limits_a^b g dx \tag{5.7}$$

Доказательство. $a < c < b$

$$\int\limits_a^c (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int\limits_a^c f dx + \beta \int\limits_a^c g dx$$

и переходим к пределу. □

Аналогично получается свойство монотонности, формула замены переменных, интегрирование по частям.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6

Несобственные интегралы

Свойства несобственных интегралов:

1) Линейность.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \tag{6.1}$$

2) Монотонность. Если f и g интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$ и $f \leqslant g$, то

$$\int_a^b f dx \leqslant \int_a^b g dx \tag{6.2}$$

Доказательство. $a < c < b$

$$\int_a^c f dx \leqslant \int_a^c g dx$$

и переходим к пределу при $c \to b-$ и получаем

$$\int_a^b f dx \leqslant \int_a^b g dx$$

□

3) Формула замены переменных. Пусть $\phi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ непрерывно дифференцируема $\phi' > 0$, $\phi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta-} \phi(t) = b$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ сходятся и расходятся одновременно и в случае сходимости они равны.

Доказательство. $\alpha < \gamma < \beta$

$$\int_\alpha^\gamma f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^{\phi(\gamma)=c} f(x)dx$$

В силу условий для любой c найдется γ такая, что $c = \phi(\gamma)$.

Устремляем $\gamma \to \beta$, значит $\phi(\gamma) \to b$, в случае сходимости получаем

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 5. $f \in C[a,b)$, ϕ - гладкая. Можно ли сделать замену?

4) Формула интегрирования по частям. Пусть f и g непрерывно дифференцируемые на $[a,b)$ и существует $\lim\limits_{c\to b-} f(c)g(c)$. Тогда $\int\limits_a^b fg'dx$ и $\int\limits_a^b f'gdx$ сходятся и расходятся одновременно и верна формула

$$\int\limits_a^b fg'dx = \lim_{c\to b-} f(c)g(c) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'gdx \tag{6.3}$$

Доказательство. $a < c < b$

$$\int\limits_a^c fg'dx = f(c)g(c) - f(a)g(a) - \int\limits_a^c f'gdx$$

и переходим к пределу. □

Сходимость несобственных интегралов

Пусть $f \geqslant 0$ на $[a,b)$, тогда $F(c) = \int\limits_a^c fdx$ не убывает, то по теореме Вейерштрасса предел существует тогда и только тогда, когда функция $F(c)$ ограничена.

Утверждение 13. *Пусть f и g определены на $[a,b)$ и для всякого $c \in [a,b)$ интегрируемы по Риману на $[a,c]$, причем $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a,b)$. Тогда из сходимости $\int\limits_a^b gdx$ следует сходимость $\int\limits_a^b fdx$, а из расходимости $\int\limits_a^b fdx$ следует расходимость $\int\limits_a^b gdx$.*

Доказательство.

$$\int\limits_a^c fdx \leqslant \int\limits_a^c gdx$$

□

Следствие. *Если $c_1 g \leqslant f \leqslant c_2 f$ $(f, g \geqslant 0)$. Тогда $\int\limits_a^b fdx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_a^b gdx$.*

Теорема 12 (интегральный признак сходимости ряда)**.** *Пусть f не возрастает на луче $(1, +\infty]$ и $f \geqslant 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 7.

$$\sum_n \frac{1}{n^p} \Leftrightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p > 1$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \Leftrightarrow \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^p x}$$

сходится при $p > 1$.

Доказательство.

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$$

так как f не возрастает.

Сложим неравенства при $k = 1, ...N$

$$f(2) + ... + f(N+1) \leqslant \int\limits_1^N f(x)dx \leqslant f(1) + f(2) + ... + f(N)$$

если ряд $\sum f(n)$ сходится, то $f(1) + ... + f(N)$ ограничены, значит и интегралы до c ограничены и интеграл сходится, если интеграл сходится, то все $\int\limits_1^N f dx$ ограничены, значит ограничены и все частичные суммы, значит ряд сходится. □

Утверждение 14 (формула Эйлера)**.** *Пусть $f \in C^1[1, +\infty)$. Тогда верно равенство*

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = f(M) + \int\limits_M^N f(x)dx + \int\limits_M^N \{x\} f'(x)dx. \tag{6.4}$$

$M, N \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

$$\int\limits_k^{k+1} \{x\} f'(x)dx = \int\limits_k^{k+1} (x-k) f'(x)dx = f(k+1) - \int\limits_k^{k+1} f(x)dx$$

$$f(k+1) = \int\limits_k^{k+1} f(x)dx + \int\limits_k^{k+1} \{x\} f'(x)dx$$

Складываем от $k = M$ до $N - 1$

$$\sum_{k=M}^{N} f(k) = f(M) + \int\limits_M^N f(x)dx + \int\limits_M^N \{x\} f'(x)dx$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 8. $0 < \alpha < 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n^\alpha) = \cos 1 + \int_1^N \cos(x^\alpha)dx - \alpha \int_1^N \{x\} \frac{\sin x^\alpha}{x^{1-\alpha}} dx$$

$$\left| \alpha \int_1^N \{x\} \frac{\sin x^\alpha}{x^{1-\alpha}} dx \right| \leqslant N^\alpha - 1 < N^\alpha$$

Чтобы оценить первый интеграл сделаем замену

$$t = x^\alpha$$

$$x = t^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt$$

$$\int_1^N \cos x^\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_1^{N^\alpha} (\cos t) \cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{\sin N^\alpha}{N^{\alpha-1}} - \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_1^{N^\alpha} \frac{\sin t}{t^{2-\frac{1}{\alpha}}} \leqslant CN^{1-\alpha}$$

Получили, что

$$\sum_{n=1}^{N} \cos N^\alpha \leqslant C\left(1 + N^{1-\alpha} + N^\alpha\right)$$

Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{N} \cos \sqrt{n} \leqslant C\sqrt{N}$$

Рассмотрим

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c\to\infty} -\int_1^c \frac{d\cos x}{x} = \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^c - \int_1^c \frac{\cos}{x^2} dx \right)$$

Так уже становится лучше.

Критерий Коши.

$$\int_a^b f dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b-} F(c)$$

Предел $\lim\limits_{c\to b-} F(c)$ *существует* $\Leftrightarrow$ *выполняется условие Коши :*

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall c_1,\ c_2 \in (b-\delta, b)\ \ |F(c_1) - F(c_2)| < \varepsilon$ *или* $\left| \int\limits_{c_1}^{c_2} f dx \right| < \varepsilon.$

Утверждение 15. *Пусть* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $\forall c \in [a, b)$ *интегрируема по Риману на* $[a, c]$. *Если* $\int\limits_a^b |f| dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^b f dx$ *сходится.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x)|dx$$

$\square$

Лекция 7

Несобственные интегралы

Сходимость несобственных интегралов

Исследуем

$$\int\limits_a^b fgdx$$

необходимо пользоваться интегрированием по частям, выделяем под интегралом функцию, которая отверчает за стремление к 0 и функцию, которая отвечает за знак, необходимо усилить стремление к 0, не испортив другую функцию.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot (-\cos x)' dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x^2}$ сходится и по признаку сравнения, интеграл сходится.

Лемма 2 (формула интегрирования по частям)**.** *Пусть g непрерывна на $[a, c]$, f непрерывно дифференцируема на $[a, c]$. Тогда*

$$\int\limits_a^c f(x)g(x)dx = \int\limits_a^c f(x) \cdot \left(\int\limits_a^x g(t)dx\right)' dx =$$

$$= f(c) \int\limits_a^c g(t)dt - \int\limits_a^c f'(x) \left(\int\limits_a^x g(t)dt\right) dt \tag{7.1}$$

Следствие. *Пусть f непрерывно дифференцируема, g непрерывна на $[a, b)$ и $\exists \lim\limits_{c \to b-} f(c) \int\limits_a^c g(t)dt$. Тогда $\int\limits_a^b fgdx$ и $\int\limits_a^b f'(x) \left(\int\limits_a^x g(t)dt\right) dx$ сходятся и расходятся одновремено.*

Теорема 13 (признаки Абеля - Дирихле)**.** *Пусть f непрерывно дифференцируема, g непрерывна на $[a, b)$, причем $f' \leqslant 0$. Тогда*

1) *Признак Дирихле. Если $f(x) \xrightarrow[x \to b-]{} 0$ и $\int\limits_a^x g(t)dt$ ограничена на $[a, b)$, то интеграл $\int\limits_a^b fgdx$ сходится.*

2) *Признак Абеля. Если f - ограничена, $\int\limits_a^b gdx$ сходится, то $\int\limits_a^b fgdx$*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

1)
$$\lim_{c\to b-} f(c)\int\limits_a^c g(t)dt = 0$$

следовательно достаточно исследовать сходимость $\int\limits_a^b f'(x)\int\limits_a^x g(t)dtdx$.

$$\int\limits_a^b |f'(x)|dx = -\int\limits_a^b f'(x) = -(f(b)-f(a)) = f(a)$$

$$\left|f'(x)\int\limits_a^x g(t)dt\right| \leqslant C|f'(x)|$$

следовательно по признаку сравнения $\int\limits_a^b \left|f'(x)\int\limits_a^x g(t)dt\right| dx$ сходится.

2) f - ограничена и монотонна, значит

$$\exists \lim_{x\to b-} f(x) = A$$

$$\int\limits_a^b fgdx = \int\limits_a^b (f-A)gdx + A\int\limits_a^b gdx$$

второй интеграл сходится по условию, значит первообразная g ограничена, значит первый интеграл сходится по признаку Дирихле.

□

Задача 6. Доказать признак Абеля напрямую из следствия.

Функции Эйлера

Гамма функция

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \tag{7.2}$$

Бета функция

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{7.3}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Исследуем $\Gamma(x)$ на сходимость. Если в интеграле несколько особенностей, то необходимо разбить его в сумму нескольких и только после этого исследовать каждый на сходимость.

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$t^{x-1} \leqslant Ce^{\frac{t}{2}},\ t \geqslant 1$$

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant Ce^{-\frac{t}{2}}$$

то есть интеграл сходится на бесконечности.

$$\frac{1}{10}t^{x-1} \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1},\ 0 < t < 1$$

значит интеграл сходится в 0, когда $x > 0$. Получили, что $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$.

Задача 7. Доказать, что $B(x, y)$ существует при $x > 0,\ y > 0$.

Свойства $B(x, y)$:

1) Формула понижения (будем ее выводить).

$$B(x, y+1) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)dt = B(x, y) - B(x+1, y)$$

$$B(x, y+1) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{1}{x}\int\limits_0^1 (t^x)'(1-t)^y dt = \frac{y}{x}\int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt =$$

$$= \frac{y}{x}B(x+1, y)$$

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x}\left(B(x, y) - B(x, y+1)\right)$$

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y}B(x, y) \tag{7.4}$$

получили формулу понижения. Теперь применим её.

$$B(x, 1) = \int\limits_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$$

$$B(x, n) = \frac{n-1}{x+(n-1)} \cdot \frac{n-2}{x+(n-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+(n-1))}$$

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots(m+(n-1))} = \frac{1}{n+m-1}\frac{1}{C_{n+m-2}^{n-1}} \tag{7.5}$$

$$B(x, y+n) = \frac{(y+(n-1))\ldots(y+1)y}{(x+y+(n-1))\ldots(x+y+1)(x+y)}B(x, y) \tag{7.6}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2)

$$B(x,y) = B(y,x) \tag{7.7}$$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \Big| s = 1-t \Big| = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$$

3)

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

Сделаем замену

$$t = \frac{t}{1-t}$$

$$t = \frac{s}{1+s}$$

$$dt = \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

$$1-t = \frac{1}{1+s}$$

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds \tag{7.8}$$

Свойства $\Gamma(x)$:

1)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -\int_0^{+\infty} t^x de^{-t} = x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{7.9}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{7.10}$$

2) Формула Эйлера-Гаусса.

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x B(x, y+n) \tag{7.11}$$

$y = 0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)...(x+(n+1))} \tag{7.11}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} n^x B(x, y+n) = \lim_{n\to\infty} n^x \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y+n-1}dt = \Big| nt = s \Big| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n s^{x-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds$$

$0 < s < n$

$$\left(1-\frac{s}{n}\right)^n \leqslant e^{-s}$$

так как

$$\left(1-\frac{s}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{s}{n}\right)}$$

$$\ln(1-x) \leqslant -x$$

Считаем, что $y > 2$

$$1-\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1} = 1-\left(1-\frac{(y-1)s}{n}+...\right) = O\left(\frac{s}{n}\right)$$

так как если рассмотрим $\frac{1-(1-t)^{y-1}}{t}$, то оказывается, что она ограничена.

$$\int\limits_0^n s^{x-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds = \int\limits_0^n s^{x-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds +$$

$$+\int\limits_0^n s^{x-1}\left(\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}-1\right)\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds$$

$$\left|\int\limits_0^n s^{x-1}\left(\left(1-\frac{s}{n}\right)^{y-1}-1\right)\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds\right| \leqslant \int\limits_0^n O\left(\frac{s}{n}\right)s^{x-1}e^{-s}ds =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_0^n O(1)s^x e^{-s}ds \to 0$$

$0 < s < n$

$$e^{-s}-\left(1-\frac{s}{n}\right)^n = e^{-s}\left(s-e^{1+n\ln\left(1-\frac{s}{n}\right)}\right) = e^{-s}O\left(\frac{s^2}{n}\right)$$

Необходимо доказать ограниченность следующей величины

$$\frac{e^{-s}-\left(1-\frac{s}{n}\right)^n}{e^{-s}\frac{s^2}{n}} = \frac{1-\left(1-\frac{s}{n}\right)^n e^s}{\frac{s^2}{n}} = \left|\frac{s}{n} = t,\ t\in(0,1)\right| = \frac{1-(1-t)^n e^{nt}}{nt^2}$$

$$0 \leqslant (1-t)^n e^{nt} \leqslant 1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < t < 1$$

$$\frac{1-(1-t)^n e^{nt}}{nt^2} < 1$$

$t < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{s}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

можем воспользоваться разоложением Тейлора и доказать ограниченность.

В итоге получаем, что

$$e^{-s} - \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n = O\left(\frac{s^2 e^{-s}}{n}\right)$$

$$\int\limits_0^n s^{x-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds = \int\limits_0^n s^{x-1}e^{-s}ds + \int\limits_0^n s^{x-1}\left(\left(1-\frac{s}{n}\right)^n - e^{-s}\right)ds$$

$$\int\limits_0^n s^{x-1}\left(\left(1-\frac{s}{n}\right)^n - e^{-s}\right)ds \leqslant \frac{const}{n}\int\limits_0^n s^{x+1}e^{-s}ds \to 0$$

$$\int\limits_0^n s^{x-1}e^{-s}ds \to \Gamma(x)$$

Доказали, что

$$n^x B(x,y) \to \Gamma(x) \text{ при } y > 2$$

теперь понизим степень

$$B(x, y+n) = \frac{y-1+n}{x+y-1+n} B(x, (y-1)+n)$$

$$\frac{y-1+n}{x+y-1+n} \to 1$$

поэтому всегда можем понизить или повысить y на конечное число шагов и это не повлияет на предел. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8

Несобственные интегралы

Функции Эйлера

Продолжаем изучать свойства $\Gamma(x)$:

3) Формула дополнения.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},\ x \in (0,1) \tag{8.1}$$

Доказательство.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to\infty} n^x B(x,n) \cdot n^{1-x} B(1-x,n)$$

$$n^x B(x,n) \cdot n^{1-x} B(1-x,n) =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)!}{x(x+1)...(x+(n-1))} \cdot \frac{(n-1)!}{(1-x)((1-x)+1)...(1-x+(n-1))} =$$

$$= \frac{n}{n-x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(1-x^2)(4-x^2)...\left((n-1)^2-x^2\right)} =$$

$$= \frac{n}{n-x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{((n-1)!)^2\,(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)...\left(1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right)}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-x}\cdot\frac{\pi}{\pi x}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

□

Пример 9 (интеграл Пуассона)**.**

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \left|x^2 = t\right| = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

По формуле дополнения

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{8.2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из теоремы Муавра-Лапласа получали плотность стандартного нормального распределения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$$

4)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{8.3}$$

Доказательство.

$$B(x,y) = \frac{(x+y)...(x+y+(n-1))}{y(y+1)...(y+(n-1))}B(x,y+n) =$$

$$= \frac{\frac{(x+y)...(x+y+(n-1))}{(n-1)!}n^y n^x}{n^{x+y}\frac{y(y+1)...(y+(n-1))}{(n-1)!}}B(x,y+n) =$$

$$= \frac{n^y B(y,n)\cdot n^x B(x,y+n)}{n^{x+y}B(x+y,n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\Gamma(y)\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}$$

□

Шутка: $m \leqslant n$

$$(x^n)^{(m)} = n(n-1)...(n-m+1)x^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}x^{n-m}$$

Теперь можем считать, что m не обязательно целое число и заменить его на α

$$(x^n)^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}x^{n-\alpha}$$

Задача 8. Найти

$$\left((x^n)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Асимптотика интеграла Лапласа и метод перевала

Интегралом Лапласа называется

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx \tag{8.4}$$

промежуток может быть и конечным, и бесконечным, интеграл может быть и собственным, и несобственным, будем писать отрезок $\{a,b\}$ так как мы не знаем есть ли включение концов. Нас интересует как себя ведет такой интеграл при $\lambda \to \infty$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

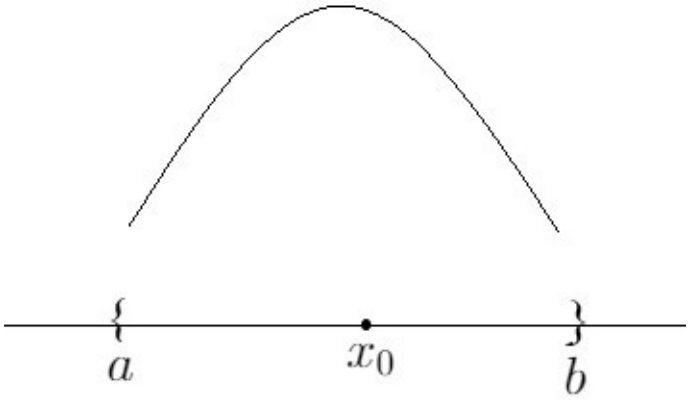

Рис. 2.

Пусть функция $S(x)$ имеет вид, изображенный на Рис. 2. x_0 точка экстремума.

$$e^{\lambda S(x)} = e^{\lambda S(x_0)} \cdot e^{\lambda(S(x)-S(x_0))}$$

Если мы возьмем окрестность x_0 и будем рассматривать x вне ее, то разность $S(x)-S(x_0)$ отделена от 0. То есть $e^{\lambda(S(x_0)-S(x))}$ ведет себя как $e^{-c\lambda}$. Если мы разобьем интеграл на сумму

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x_0)} \cdot e^{\lambda(S(x)-S(x_0))}dx = \int\limits_{|x-x_0|<\delta} f(x)e^{\lambda S(x_0)} \cdot e^{\lambda(S(x)-S(x_0))}dx +$$

$$+ \int\limits_{|x-x_0|>\delta} f(x)e^{\lambda S(x_0)} \cdot e^{\lambda(S(x)-S(x_0))}dx$$

второй интеграл экспоненциально мал относительно первого, значит про второй интеграл можно забыть. То есть нас интересует только поведение в окрестности точки экстремума. А в маленькой окрестности такие функции замену приводятся к виду $-y^2$. Значит нам предстоит изучать интеграл

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi(y)e^{-\lambda y^2}dy$$

Еще можем разложить $\phi(y)$ в ряд Тейлора в данной окрестности

$$\phi(y) = \phi(0) + \phi^{'}(0)y + ...$$

Посмотрим на следующий интеграл

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |y|e^{-\lambda y^2}dy$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

заменим его на интеграл по всей числовой прямой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|e^{-\lambda y^2}dy = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|e^{-y^2}dy$$

то есть мы видим, что когда мы начинаем отбрасывать члены разложения Тейлора y и выше, то появляется $\frac{1}{\lambda}$, в следующий раз появится $\frac{1}{\lambda^2}$. Значит $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi(y)e^{-\lambda y^2}dy$ ведет себя на бесконечности как $\phi(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda y^2}dy$.

$$\phi(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\phi(0)$$

и это первый член асимптотики.

Это был общий план действий, теперь попробуем его строго объяснить.

Почему изучаем именно интеграл Лапласа? Так как он очень часто встречается, например, если решаем следующее дифференциальное уравнение

$$y'' + y = f$$

пусть $y(0) = y'(0) = 0$, домножим уравнение на $e^{-\lambda t}$ и проинтегрируем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} y''(t)e^{-\lambda t}dt = \lambda^2\int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-\lambda t}dt$$

Обозначим

$$z(\lambda) = \int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-\lambda t}dt$$

Если проинтегрируем и подставим в дифференциальное уравнение получим

$$(\lambda^2+1)z(\lambda) = F(\lambda)$$

$$z(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\lambda^2+1}$$

и по этому преобразованию можно востановить y.

Договоримся, что

$$f(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(\lambda)}{\lambda^{-k}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

например

$$e^{-\lambda} = O(\lambda^{-\infty})$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 16. *Пусть для некоторого* λ_0 *интеграл* $\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda_0 S(x)}dx$ *сходится абсолютно и*

$$\sup_{x\in\{a,b\}} S(x) = M < \infty.$$

Тогда $\forall\lambda > \lambda_0$ *интеграл Лапласа сходится и верна оценка*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx\right| \leqslant Ce^{\lambda M} \tag{8.5}$$

C *- константа, не зависящая от* λ.

Доказательство.

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda_0 S(x)}\cdot e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}dx$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 S(x)}\cdot e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 S(x)}dx\cdot e^{(\lambda-\lambda_0)M}$$

$$C = e^{-\lambda_0 M}\int\limits_a^b |f|e^{\lambda_0 S(x)}dx$$

□

Утверждение 17. *Пусть для некоторого* λ_0 *интеграл* $\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda_0 S(x)}dx$ *сходится абсолютно и*

$$\sup_{x\in\{a,b\}} S(x) = M < \infty,$$

f, S *непрерывны в* x_0 *(точка максимума) и* $f(x_0) \neq 0$. *Тогда* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_0 > 0$: $\forall\delta < \delta_0$

$$\left|\int\limits_{|x-x_0|<\delta} f(x)e^{\lambda S(x)}dx\right| \geqslant C_1 e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)},\ \lambda > \lambda_0 \tag{8.6}$$

Доказательство. Можно считать, что $f(x_0) > 0,\ \lambda > 0$. $\exists\delta > 0$: в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$$

и если надо уменьшим δ, чтобы считать, что в этой окрестности

$$S(x) \geqslant S(x_0) - \varepsilon$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

такое δ_0 искомое.

$$\int\limits_{|x-x_0|<\delta} f(x)e^{\lambda S(x)} \geqslant \frac{f(x_0)}{2} e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)} \cdot (2\delta)$$

$$C_1 = f(x_0) \cdot \delta.$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9

Несобственные интегралы

Асимптотика интеграла Лапласа и метод перевала

Теорема 14 (принцип локализации)**.** *Пусть $S(x) \leqslant M$ $\forall x \in \{a, b\}$, интеграл сходится при λ_0. Предположим, что x_0 точка строгого максимума S на $\{a, b\}$, причем $\forall U(x_0)$*

$$\sup_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0).$$

Предположим, что f, S непререрывны в x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда для всякой окрестности $U(x_0)$

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx = \int_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \cdot \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right) \tag{9.1}$$

Замечание 1.

$$1 + O(\lambda^{-\infty}) = \frac{1}{1 + O(\lambda^{-\infty})}$$

это разные O.

Доказательство. Достаточно доказать для какой-то одной окрестности $U(x_0)$. $f(x_0) \neq 0$, считаем, что $f(x_0) > 0$. Тогда выберем окрестность $U(x_0)$, в которой $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx = \int_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx + \int_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx =$$

$$= \int_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \left(1 + \frac{\int\limits_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx}{\int\limits_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx}\right)$$

$$\frac{\int\limits_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx}{\int\limits_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx} \leqslant \frac{\int\limits_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)}dx}{\int\limits_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$:

$$\tilde{M} = \sup_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} S < S(x_0) - \varepsilon$$

Из утверждения 16

$$\int_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)}dx \leqslant Ce^{\lambda \tilde{M}}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из утверждения 17 $\exists\delta > 0,\ U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U(x_0)$:

$$\int\limits_{U_\delta(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \geqslant \tilde{C}e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}$$

значит

$$\frac{\int\limits_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)}dx}{\int\limits_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx} \leqslant \frac{C}{\tilde{C}}e^{\lambda(\tilde{M}-(S(x_0)-\varepsilon))}$$

$$\tilde{M} - (S(x_0) - \varepsilon) < 0$$

Получили, что

$$\frac{\int\limits_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx}{\int\limits_{U(x_0)\cap\{a,b\}} f(x)e^{\lambda S(x)}dx} = O(\lambda^{-\infty})$$

□

Утверждение 18. *Пусть S гладкая (три раза непрерывно дифференцируема) функция в окрестности x_0 и $S^{'}(x_0) = 0,\ S^{''}(x_0) < 0$. Тогда $\exists U(x_0),\ V(0)$, диффеоморфизм $\phi : V(0) \to U(x_0)$ такие, что $\phi(0) = x_0,\ \phi^{'}(0) = \sqrt{-\frac{2}{S^{''}(x_0)}}$ и*

$$S(\phi(y)) = S(x_0) - y^2 \tag{9.2}$$

Доказательство. Можно считать, что $x_0 = 0$ и $S(x_0) = 0$. То есть имеем, что $S(0) = 0,\ S^{'}(0) = 0,\ S^{''}(0) < 0$ Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$S(x) = S(0) + S^{'}(0)x + x^2g(x) = x^2g(x)$$

$$g(0) = \frac{S^{''}(0)}{2} < 0$$

g непрерывно дифференцируема, в некоторой окрестности нуля $g(x) < 0$.

$$S(x) = -(x\sqrt{-g(x)})^2$$

Замена:

$$y(x) = x\sqrt{-g(x)}$$

Чтобы проверить, что у нас локально диффеоморфизм, нужно проверить, что производная в 0 не 0.

$$y^{'}(0) = \sqrt{-g(x)}\Big|_{x=0} + x\left(\sqrt{-g(x)}\right)^{'}\Big|_{x=0} = \sqrt{-g(0)} = \sqrt{-\frac{S^{''}(0)}{2}} > 0$$

значит локально эта замена является диффеомофизмом. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Далее считаем, что x_0 - внутренняя точка $\{a, b\}$. Выбираем $U(x_0)$ - окрестность точки x_0, которая целиком лежит в $\{a, b\}$. Пусть S - трижды непрерывно дифференцируема в $U(x_0)$, $S^{'}(x_0) = 0$, $S^{''}(x_0) < 0$. Пусть кроме того $S(x) \leqslant M$, $\exists \lambda_0$ - интеграл сходится абсолютно, f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$.

Можно считать, что $U(x_0)$ такова, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U(x_0)$ - диффеоморфна, $\phi(0) = x_0$, $\phi^{'}(0) = \sqrt{-\frac{2}{S^{''}(x_0)}}$ и $S(\phi(y)) = S(x_0) - y^2$.

По принципу локализации

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx = \int\limits_{U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \cdot \left(1 + O(\lambda^{-\infty})\right)$$

Рассматриваем

$$\int\limits_{U(x_0)} fe^{\lambda S}dx \overset{x=\phi(y)}{=} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\phi(y))\phi^{'}(y)e^{\lambda(S(x_0)-y^2)}dy$$

Обозначим

$$h(y) = f(\phi(y))\phi^{'}(y)$$

Получаем

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\phi(y))\phi^{'}(y)e^{\lambda(S(x_0)-y^2)}dy = e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(y)e^{-\lambda y^2}dy$$

Пусть $h(y) = h(0) + yH(y)$, где $H(y)$ - ограниченная функция на $(-\varepsilon, \varepsilon)$, это будет выполнено, например, если h - непрерывно дифференцируемая функция.

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(y)e^{-\lambda y^2}dy = h(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda y^2}dy + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy \overset{\text{пр. лок.}}{=}$$

$$\overset{\text{пр. лок.}}{=} h(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}dy \cdot (1 + O(\lambda^{-\infty})) + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy\right| \leqslant C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-\lambda y^2}dy = \frac{C}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-y^2}dy$$

то есть

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} yH(y)e^{-\lambda y^2}dy = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Итак

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(y)e^{-\lambda y^2}dy = h(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),\ h(0)\neq 0$$

Пусть f - непрерывно дифференцируема, S - четыре раза дифференцируема, значит

$$h(y) = f(\phi(y))\phi^{'}(y) = f(x_0)\cdot\sqrt{-\frac{2}{S^{''}(x_0)}} + y\cdot H(y)$$

Получили, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)e^{\lambda S(x)}dx = f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda(-S^{''}(x_0))}}e^{\lambda S(x_0)}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \tag{9.3}$$

Условия: $S(x)\leqslant M$, интеграл сходится абсолютно при λ_0, $S\in C^4$(в окрестности x_0), f - непрерывно дифференцируема в окрестности x_0, $f(x_0)\neq 0,\ S^{'}(x_0)=0,\ S^{''}(x_0)<0,\ \sup\limits_{\{a,b\}\setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$ Мы получили главный член асимптотики, но на самом деле мы можем данным способом получить и следующие члены, раскладывая $h(y)$ по Тейлору дальше.

Пример 10.

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda}e^{-t}dt \overset{t=\lambda x}{=} \lambda^{\lambda+1}\int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda}e^{-\lambda x}dx$$

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda}e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda(\ln x - x)}dx$$

то есть у нас

$$f\equiv 1$$

$$S(x) = \ln x - x$$

$$S^{'}(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$S^{''}(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$S^{''}(1) = -1$$

Получаем асимптотику

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}e^{-\lambda}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \sqrt{2\pi\lambda}\cdot\lambda^{\lambda}e^{-\lambda}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \tag{9.4}$$

А если x_0 окажется на краю промежутка, то мы сможем сделать замену на интервал $(0,\varepsilon)$ и полученная оценка умножится на $\frac{1}{2}$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 9. Найти асимптотику по λ при $\lambda \to \infty$

$$\int\limits_0^{\pi} (\sin x)^{\lambda} dx$$

Лекция 10

Равномерная сходимость

X - непустое множество, $f_n,\ f : X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.

Задача 10. Нарисовать и пролистать (как мультик в детстве)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

Определение 5. f_n сходится к f *поточечно* на X, если $\forall x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к числу $f(x)$. Или $\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Для функции

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

При $x = \frac{1}{1000}$ все $f_n = 1$ до 999ого, а дальше 0, при $x = \frac{1}{1000000}$ все $f_n = 1$ до 999999ого, а дальше 0, то есть последовательность поточечно сходится к 0.

Определение 6. f_n сходится к f *равномерно* на X, если

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{10.1}$$

Обозначение

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$$

Эквивалентная формулировка: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Посмотрим есть ли равномерная сходимость для

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 1$$

а для

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 19. *Если* $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, *то* $f_n \to f$ *поточечно. Обратное неверно.*

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 20. *Пусть* $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ *и* $g_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$. *Тогда*

1)
$$f_n + g_n \overset{X}{\rightrightarrows} f + g$$

2) если f, g *ограничены на* X
$$f_n \cdot g_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \cdot g$$

Замечание 2. Без дополнительных условий на f, g второе неверно. Контрпример: $X = \mathbb{R}$
$$f_n(x) \equiv f(x) = x$$
$$g_n(x) = \frac{1}{n} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$$
$\frac{x}{n}$ равномерно не сходится к 0 на $\mathbb{R}$.

Ограниченность последовательности и её предела эквивалентны для равномерной сходимости, так как
$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$$
$$|f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$$
Если $\exists C > 0 : \ |f(x)| \leqslant C \ \forall x$, то
$$|f_n(x)| \leqslant C + 1 \ \forall n > n_0; \forall x$$
Если $\exists C > 0 : \ |f_n(x)| \leqslant C \ \forall n > n_0 \ \forall x$, то
$$|f(x)| \leqslant C + 1 \ \forall x$$

Доказательство.

1)
$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_X |f_n(x) - f(x)| + \sup_X |g_n(x) - g(x)|$$
$$\sup_X |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leqslant \sup_X |f_n(x) - f(x)| + \sup_X |g_n(x) - g(x)| \to 0$$

2)
$$|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| =$$
$$= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x) + f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)| \cdot |f(x)|$$
$\exists n_0, \ C > 0 : \ \forall n > n_0$
$$|g_n(x)| \leqslant C$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$|f(x)| \leqslant C$$
$$|f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)| \cdot |f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C\left(|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\sup_X |f_n(x) - f(x)| + \sup_X |g_n(x) - g(x)|\right)$$
$$\sup_X |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leqslant C\left(\sup_X |f_n(x) - f(x)| + \sup_X |g_n(x) - g(x)|\right)$$

□

Утверждение 21. *Пусть* $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, g_n *равномерно ограничены* ($\exists C > 0 : \ \forall x, \ \forall n, \ |g_n(x)| \leqslant C$). *Тогда*

$$f_n(x) \cdot g_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Задача 11. Доказать утвержидение 21.

Теорема 15 (Критерий Коши)**.** f_n *сходится равномерно на* X *тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n, m > N$

$$\sup_X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n, m > N \ \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

следовательно последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна, значит по критерию Коши для числовых последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n, m > N \ \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Фиксируем x и фиксируем n, а m устремляем к бесконечности, получаем, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ \forall n > N \ \forall x$$

следовательно

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

□

Что с Больцано? Его нет.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

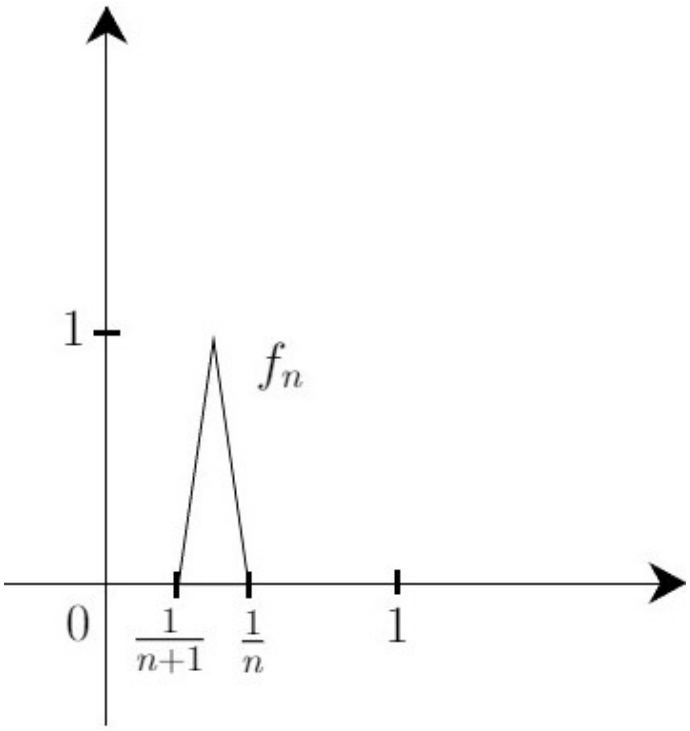

Рис. 3.

Пример 11.

$$f_n(x) = \sin nx$$
$$|f_n(x)| \leqslant 1 \ \forall n \ \forall x$$

нельзя выбрать даже поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Пример 12. На Рис. 3. изображена последовательность

$$\sup_X |f_n - f_m| = 1$$

очевидно, что невозможно выделить сходящуюся равномерно подпоследовательность.

Причина, что так произошло, это то, что ограниченное и замкнутое множество может не быть компактом.

Компактность

Теперь нас будут интересовать функции из

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \ \sup_X |f| < \infty\} \tag{10.2}$$

это метрическое пространство с метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_X |f - g| \tag{10.3}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \;\Leftrightarrow\; \rho(f_n, f) \to 0 \tag{10.4}$$

Как устроены компакты в $B(X)$?

Определение 7. Множество K в метрическом пространстве (X, ρ) *компактно*, если всякое его покрытие открытыми множествами имеет конечное подпокрытие.

Утверждение 22. *Пусть K - компакт. Тогда (в неметрическом пространстве это неверно)*

1) *K - ограниченное.*

2) *K - замкнутое.*

3) *Замкнутое подмножество компакта - компакт.*

4) *Всякое бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть A - подмножество в метрическом пространстве (X, ρ). Множество B называется *ε - сетью для множества A*, если $\forall a \in A\ \exists b \in B$:

$$\rho(a, b) < \varepsilon$$

Определение 8. Если множество B из определения ε - сети конечное, то говорят, что A имеет *конечную ε - сеть.*

Утверждение 23. *Если у множества A есть конечная ε - сеть, то у A есть конечная 2ε - сеть из элементов A.*

Доказательство. Пусть ε - сеть для A. Возьмем $b \in B$, если $B(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, то выбираем $\tilde{a} \in B(b, \varepsilon) \cap A$ и берем все такие $\tilde{a}$ для всех b. Получаем $\tilde{A} = \{\tilde{a}\}$, утверждается, что это 2ε - сеть. Возьмем $c \in A$, $\exists b$:

$$\rho(b, c) < \varepsilon$$

для этого b был выбран $\tilde{a}$:

$$\rho(\tilde{a}, b) < \varepsilon$$

следовательно

$$\rho(c, \tilde{a}) < 2\varepsilon$$

□

Утверждение 24. *Если K - компакт, то у него для всякого ε существует конечная ε - сеть.*

Доказательство. $\forall b \in K$ возьмем $B(b, \varepsilon)$, тогда $K \subset \bigcup\limits_b B(b, \varepsilon)$, так как K - компакт, то существует конечное подпокрытие $B(b_1, \varepsilon), ...B(b_N, \varepsilon)$, значит $B = \{b_1, ...b_N\}$ - конечная ε - сеть. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Равномерная сходимость

Компактность

Утверждение 25 (Обобщение теоремы Больцано)**.** *Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство. Множество $A \in X$ для всякого конечного $\varepsilon > 0$ имеет конечную ε-сеть тогда и только тогда, когда из любой последовательности элементов A можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Возьмем $\varepsilon = 1$, по условию конечная 1-сеть, то есть $A \subset B_1^1 \cup ... \cup B_1^{N_1}$ - конечный набор шаров радиуса 1, поскольку шаров конечное число, то хотя бы один в пересечени с A содержит бесконечное число элементов последовательности. Пусть B_1 такой шар, $V_1 = A \cap B_1$ содержит бесконечное число элементов x_n.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, найдется для множества A $\frac{1}{2}$-сеть, значит и для любой части множества A найдется $\frac{1}{2}$-сеть, то есть существует конечная $\frac{1}{2}$-сеть для множества V_1, то есть $V_1 \subset B_{\frac{1}{2}}^1 \cup ... \cup B_{\frac{1}{2}}^{N_2}$ - шары радиуса $\frac{1}{2}$, хотя бы один из этих шаров содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ из V_1. Пусть $B_{\frac{1}{2}}$ такой шар, значит $V_2 = A \cap B_1 \cap B_{\frac{1}{2}}$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

И так далее. Получаем набор множеств $V_k = A \cap B_1 \cap B_{\frac{1}{2}} \cap ... \cap B_{\frac{1}{k}}$ - содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, кроме того по построению $V_k \supset V_{k+1}$. Для каждого k строим n_k такие что $n_1 < n_2 < ...$ и $x_{n_k} \in V_k$.

Возьмем x_{n_k} и x_{n_j}, $k,\ j > N$, значит $x_{n_k},\ x_{n_j} \in V_N \subset B_{\frac{1}{N}}$, следовательно

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) \leqslant \frac{2}{N},$$

получаем, что $\{x_{n_k}\}$ - фундаментальная последовательность, X - полное, значит x_{n_k} сходится.

$\Leftarrow$ От противного. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ нет конечной ε-сети.

Берем любую $x_1 \in A$, она не образует конечную ε-сеть, значит $\exists x_2$:

$$\rho(x_1, x_2) > \varepsilon,$$

$x_1,\ x_2$ не образуют конечную ε-сеть, значит $\exists x_3$:

$$\rho(x_1, x_3) > \varepsilon,\ \rho(x_2, x_3) > \varepsilon,$$

$x_1,\ x_2,\ x_3$ не образуют конечную ε-сеть, значит $\exists x_4$:

$$\rho(x_1, x_4) > \varepsilon,\ \rho(x_2, x_4) > \varepsilon,\ \rho(x_3, x_4) > \varepsilon$$

и так далее, то есть мы построили последовательность x_n :

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon\ \forall n \neq m,$$

а из неё нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

□

Если $\forall \varepsilon > 0$ множество имеет конечную ε - сеть, то такое множество называется *вполне ограниченным.*

Теорема 16 (критерий компактности Хаусдорфа)**.** *Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство. Множество $K \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда K замкнуто и вполне ограничено.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Уже доказали.

$\Leftarrow$ Предположим противное. Пусть $\{U_\alpha\}_\alpha$ - покрытие, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.

Возьмем $\varepsilon = 1$, $K \subset B_1^1 \cup ... \cup B_1^{N_1}$ - шары радиуса 1, хотя бы одно из множеств $K \cap B_1^j$ не имеет конечного подпокрытия. Пусть B_1 такой шар, то есть $V_1 = K \cap B_1$ не имеет конечного подпокрытия.

Берем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $K \subset B_{\frac{1}{2}}^1 \cup ... \cup B_{\frac{1}{2}}^{N_2}$, хотя бы одно из множеств $V_1 \cap B_{\frac{1}{2}}^j$ не имеет конечного подпокрытия. Пусть $B_{\frac{1}{2}}$ такой шар, полагаем $V_2 = K \cap B_1 \cap B_{\frac{1}{2}}$ не имеет конечного подпокрытия. И так далее.

Получаем $V_m = K \cap B_1 \cap B_{\frac{1}{2}} \cap ... \cap B_{\frac{1}{m}}$ не имеет конечного подпокрытия. $V_1 \supset V_2 \supset ... \supset V_m$. Выберем в $x_m \in V_m$ - последовательность точек K, по утверждению 25 $\exists x_{m_j} \to x_0$, $x_0 \in K$, так как K замкнуто, $\exists U_\alpha \ni x_0$ на самом деле $\exists \delta > 0 : \quad B(x_0, \delta) \subset U_\alpha$. Подождем пока $\rho(x_0, x_{m_j}) < \frac{\delta}{10}$ и $\frac{1}{m_j} < \frac{\delta}{10}$, $x_{m_j} \in V_{m_j} \subset B_{\frac{1}{m_j}}$. Утверждается, что $B_{\frac{1}{m_j}} \subset B(x_0, \delta)$, возьмем $a \in B_{\frac{1}{m_j}}$,

$$\rho(a, x_0) \leqslant \rho(a, x_{m_j}) + \rho(x_{m_j}, x_0) < \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{10} < \delta,$$

получаем, что $V_{m_j} \subset U_\alpha$, значит получили противоречие.

□

Следствие. *K в метрическом пространстве компактно тогда и только тогда, когда из всякой последовательности его элементов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к элементу из K.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Уже доказано.

$\Leftarrow$ Достаточно доказать, что K компакт в (K, ρ).

1) K - замкнуто (по определению замкнутого множества).
2) K - полное метрическое пространство. Действительно, пусть x_n - фундаментальная последовательность, по условию $\exists x_{n_k} \to x_0$, тогда $x_n \to x_0$.
3) K - вполне ограничено по утверждению 25.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Значит по критерию Хаусдорфа K - компакт.

□

Замечание 3. В критерии Хаусдорфа полнота очень важна, легко придумать пример множества в неполном пространсве, которое будет замкнуто и вполне ограничено, но не будет компактом. Например, интервал на прямой с обычной метрикой.

Теорема 17 (критерий компактности в $B(X)$)**.** *Множество $K \subset B(X)$ компактно тогда и только тогда, когда*

1) *K - замкнуто*

2) *K - ограничено*

3) *$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиение X на конечное число множеств $X_1, ...X_N$ такое, что $\forall f \in K$ $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall y,\ z \in X_i$ $\forall i$.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, пусть она состоит из $f_1, ...f_M$. Рассмотрим отображение $F(y) = (f_1(y), f_M(y))$, $F : X \to \mathbb{R}^M$, каждая из функций ограничена, значит X отображется внутрь некоторого куба, разрежем куб на кубики, диаметр каждого из которых меньше ε и берем те из них, которые задевают образ F, их конечный набор I_j, причем берем их так, чтобы они попарно не пересекались, то есть их грани распределены между ними. То есть $I_j \cap F(X) \neq \emptyset$, тогда берем $X_j = F^{-1}(I_j)$ эти множества искомые для 3ε. Возьмем $f \in K$ и $y, z \in X_j$, найдется f_k - элемент ε-сети такой, что

$$\sup |f_k - f| < \varepsilon$$

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(z)| + |f_k(z) - f(z)| < 3\varepsilon$$

$\Leftarrow$ Необходимо построить конечную ε-сеть. Поскольку множество ограничено, то все значения функций лежат в некотором фиксированном отрезке, пусть у нас это отрезок $[-c, c]$, разобьем данный отрезок с шагом ε и в качестве 2ε-сети возьмем все возможные функции, принимающие значения c_i (части нашего разбиения) на множествах X_j, то есть это все возможные функции $g :\ g(x) \equiv c_i$ на X_j, ясно, что таких функций конечное число. Это 2ε-сеть, так как если возьмем произвольную f и возьмем $\omega_j \in X_j,\ f(\omega_j) \in \{c_s, c_{s+1}\}$, тогда берем $g(x) \equiv c_s$ на X_j, идем по всем X_j и получаем кусочно-постоянную функцию

$$|f(\omega) - g(\omega)| < 2\varepsilon$$

□

Замечание 4. Этот критерий компактности можно воспринимать как критерий вполне ограниченности, если выкинуть из него замкнутость множества.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следствие(Арцела-Асколи) *Множество $K \in C[a,b]$ компактно тогда и только тогда когда оно*

1) *K - замкнуто*

2) *K - равномерно ограничено*

3) *K - равностепенно непрерывно.*

То есть

2) $\exists C > 0 : \ \|f\| \leqslant C \ \forall f \in K$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ \forall f \in K \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12

Равномерная сходимость

Компактность

Доказательство теормы Арцела-Асколи.

$\Rightarrow$ 1) очевидно

2) очевидно

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечная ε - сеть, состоящая из $f_1, ...f_N \in K$, значит $\forall f \in K\ \exists k \in \{1, ...N\}$:

$$\|f - f_k\| < \varepsilon.$$

Для функции $f_k\ \exists \delta_k > 0$:

$$|x - y| < \delta_k \ \Rightarrow\ |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon,$$

так как функций конечное число, то возьмем $\delta = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\delta_k\}$, тогда если $|x - y| < \delta$, то

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon\ \forall k = 1, ...N$$

Возьмем произвольную $f \in K$ и $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$$

$\Leftarrow$ $C[a, b] \subset B[a, b]$ с той же самой метрикой, поэтому если построим конечную ε-сеть в $B[a, b]\ \forall \varepsilon$, то построим конечную 2ε-сеть в $C[a, b]\ \forall \varepsilon$.

Напоминание: чтобы построить конечную ε-сеть в $K \subset B(X)$ надо, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{X_1, ...X_N\}$ - разбиение X:

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon\ \forall y,\ z \in X_i\ \forall i\ \forall f \in K$$

Условие равностепенной непрерывности дает разбиение отрезка на такие множества. Возьмем $\varepsilon > 0$ найдем δ из условия равностепенной непрерывности, берем отрезок $[a, b]$ и проходим его шагом меньше δ, это и будут те самые X_i, так как получим, что $\forall y, z \in X_i\ \forall f \in K$

$$|y - z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

$\square$

Пример 13. Типичный пример компакта в пространстве непрерывных функций:

$$K_{R,L} = \{f \in C[a, b] | \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \leqslant R,\ |f(t) - f(s)| \leqslant L|t - s|\}$$

Проверим замкнутость: возьмем $f_n \in K_{R,L}$ - последовательность функций, $f_n \to f$, следовательно

$$\max |f - f_n| \to 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

значит $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \;\Rightarrow\; f_n(t) \to f(t)\ \forall t$, следовательно

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t)| \leqslant R$$

для фиксированных $t,\ s$ из поточечной сходимости при переходе к пределу получаем

$$|f(t) - f(s)| \leqslant L|t-s|$$

значит $f \in K_{R,L}$, следовательно $K_{R,L}$ - замкнуто. Также K является выпуклым множеством, то есть два элемента лежат во множестве с отрезком, соединяющим их.

$$[f,g] = \{\alpha f + (1-\alpha)g | \alpha \in [0,1]\}$$

Теорема 18 (Шаудер)**.** *Пусть K - выпуклый компакт в нормированном пространстве и $F : K \to K$ - непрерывное отображение. Тогда $\exists x \in K :\ F(x) = x$.*

Рассматриваем задачу: пусть $b \in C(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$

$$\begin{cases} \dot{x} = b(t,x),\ t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{12.1}$$

Задача 12. Пусть b произвольная функция, построить пример задачи, когда решений нет.

Рассматриваем ситуацию, когда $|b| \leqslant M$, будем доказывать существование решения.

Постановка задачи (12.1) равносильна следующей (из дифференциальных уравнений)

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t b(s, x(s))ds \tag{12.2}$$

$$F(x)(t) = x_0 + \int\limits_0^t b(s, x(s))ds \tag{12.3}$$

Утверждение 26. *x - решение задачи* (12.1) *тогда и только тогда, когда $F(x) = x$.*

Будем искать L и R, для которых $F : K_{R,L} \to K_{R,L}$.

Пусть $x \in C[0,T]$

$$|F(x)(t)| \leqslant |x_0| + MT = R$$

$$|F(x)(t) - F(x)(s)| \leqslant M|t-s|$$

Итак, $F : K_{R,M} \to K_{R,M}$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь проверим непрерывность F. Возьмем $x_n,\ x \in K_{R,M}:\ x_n \overset{[0,T]}{\rightrightarrows} x$, хотим проверить, что $F(x_n) \overset{?}{\rightrightarrows} F(x)$

$$F(x_n)(t) - F(x)(t) = \int\limits_0^s (b(s, x_n(s)) - b(s, x(s)))ds$$

$(s, x_n(s)),\ (s, x(s)) \in [0,T] \times [-R,R]$, b - непрерывная на $[0,T] \times [-R,R]$, а это компакт, значит b - равномерно непрерывная, следовательно $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$

$$|x_n(s) - x(s)| < \delta \ \Rightarrow\ |b(s, x_n(s)) - b(s, x(s))| < \varepsilon$$

Но $x_n \rightrightarrows x$, следовательно $\exists N:\ \forall n > N\ \forall s\ |x_n(s) - x(s)| < \delta$, тогда

$$\forall s; |b(s, x_n(s)) - b(s, x(s))| < \varepsilon$$

значит

$$F(x_n)(t) - F(x)(t)| \leqslant T\varepsilon$$

Из теоремы Шаудера у отображения F существует неподвижная точка.

Таким образом, мы доказали следующую теорему

Теорема 19. *Пусть $b \in C(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$ и $|b| \leqslant M$. Тогда $\forall T > 0$, $\forall x_0$ существует решение задачи*

$$\begin{cases} \dot{x} = b(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{на } [0,T]$$

Свойства равномерно сходящихся последовательностей

Теорема 20 (о перестановке пределов)**.** *Пусть X - метрическое пространство, a - предельная точка X и $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$. Если $\forall n\ \exists \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{x\to a} f(x). \tag{12.4}$$

То есть

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right). \tag{12.5}$$

Доказательство.

1) Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, следовательно выполняется условие Коши, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N\ \forall x$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Устремляем $x \to a$, получаем, что

$$|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon$$

Значит $\{A_n\}$ - фундаментальная и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2)
$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$$

$\exists n:$
$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
$$|A_n - A| < \varepsilon$$

Фиксируем n $\exists \delta > 0: \ \forall x \in B'(a, \delta)$
$$|f_n(x) - A_n| < \varepsilon$$

Получили, что
$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < 3\varepsilon$$

□

Следствие. *X - метрическое пространство, $a \in X$. Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, f_n - непрерывны в точке a, то f - непрерывна в точке a.*

Доказательство. Если a - изолированная точка, то уже все доказано.
Пусть a - предельная точка X, тогда
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$$

□

Следствие. *Пусть X - метрическое пространство. Тогда $C_B(X)$ - пространство ограниченных непрерывных функций является полным с метрикой*
$$\rho(f, g) = \sup_X |f(x) - g(x)|. \tag{12.6}$$

Теорема 21. *Пусть $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ и f_n - интегрируемы по Риману на $[a, b]$. Тогда f - интегрируема по Риману на $[a, b]$ и*
$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx \tag{12.7}$$

Доказательство.

1)
$$I_n = \int_a^b f_n dx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

$$|I_n - I_m| \leqslant \int\limits_a^b |f_n - f_m| dx \leqslant |b-a| \sup_{[a,b]} |f_n - f_m|$$

так как $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, значит выполняется условие Коши, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n,\ m > N$

$$\sup_{[a,b]} |f_n - f_m| < \varepsilon$$

следовательно

$$\sup_{[a,b]} |I_n - I_m| < |b-a|\varepsilon$$

значит $\{I_n\}$ - фундаментальна и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$.

2)

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_j f(\xi_j)|\Delta_j|$$

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| \leqslant |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - I_n| + |I_n - I|$$

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f|$$

выбираем n такое, что

$$\sup_{[a,b]} |f_n - f| < \varepsilon$$

Далее выбираем n такое, чтобы при этом

$$|I_n - I| < \varepsilon$$

Фиксируем n, f_n - интегрируема, выбираем масштаб разбиения такой, что

$$|\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - I_n| < \varepsilon$$

□

Пример 14. Почему нельзя заменить равномерную сходимость на поточечную. Последовательность функций изображена на Рис. 4. Поточечно она сходится,

$$f_n \to 0$$

при этом

$$\int\limits_0^1 f_n dx = 1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

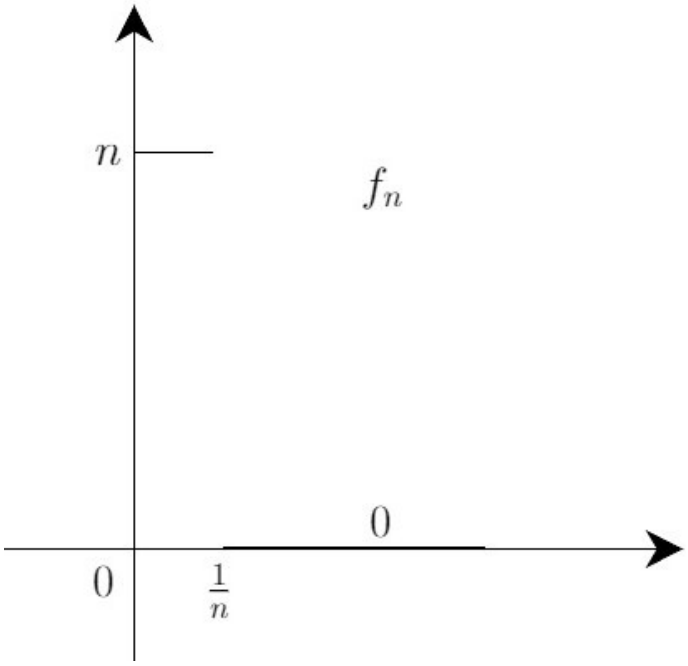

Рис. 4.

Теорема 22 (Арцела)**.** *Если f_n, f - интегрируемы по Риману на $[a, b]$, $|f_n| \leqslant C\ \forall n$, x и $f_n \to f$ поточечно, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx \tag{12.8}$$

Замечание 5. Где можно прочитать доказательство, если будет непонятно? Фихтенгольц, 1 или 2 том.

$$F = \bigcup_n \Delta_n \tag{12.9}$$

Δ_n - отрезок, причем

$$\Delta_n \cap \Delta_m = \begin{cases} \emptyset \\ \text{по концам} \end{cases}, \ n \neq m$$

Такое можество имеет длину

$$\lambda(F) = \sum_n |\Delta_n| \tag{12.10}$$

Утверждение 27. *Если $F \subset \bigcup\limits_n F_n$, то*

$$\lambda(F) \leqslant \sum_n \lambda(F_n) \tag{12.11}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 28. *Пусть* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ *и* $\lambda(F_n) \geqslant \delta > 0\ \forall n$. *Тогда*

$$\bigcap_n F_n \neq \emptyset \tag{12.12}$$

Задача 13. Подумать над доказательствами утверждений 27 и 28.

Лекция 13

Равномерная сходимость

Свойства равномерно сходящихся последовательностей

Далее считаем, что когда у нас задано множество F, то оно задано вместе со своим разбиением, то есть Δ_n заданы, они заданы на отрезке $[a, b]$.

Доказательство утверждения 27.

$$F = \bigcup_k \Delta_k$$

$$F_n = \bigcup_j \Delta_j^n$$

$$\Delta_k \subset \bigcup_{j,n} \Delta_j^n$$

В прошлом семестре обсуждали, что тогда

$$|\Delta_k| \leqslant \sum_{j,n} |\Delta_j^n \cap \Delta_k| \qquad (*)$$

так же из прошлого семестра знаем, что поскольку $\overset{\circ}{\Delta}_k \cap \overset{\circ}{\Delta}_l = \emptyset$ при $k \neq l$

$$\sum_k |\Delta_j^n \cap \Delta_k| \leqslant |\Delta_j^n| \qquad (**)$$

из $(*)$ и $(**)$ получаем, что

$$\sum_k |\Delta_k| \leqslant \sum_k \sum_{j,n} |\Delta_j^n \cap \Delta_k| = \sum_{j,n} \sum_k |\Delta_j^n \cap \Delta_k| \leqslant \sum_{j,n} |\Delta_{j,n}| = \sum_n \lambda(F_n)$$

□

Доказательство утверждения 28. $F_n = \bigcup\limits_j \Delta_j^n$, поскольку $\sum\limits_j |\Delta_j^n| < \infty$ найдем номер N_n начиная с которого

$$\sum_{j=N_n+1}^{\infty} |\Delta_j^n| < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

и обозначим

$$K_n = \bigcup_{j=1}^{N_n} \Delta_j^n$$

K_n - компакт,

$$\widetilde{F_n \setminus K_n} = \sum_{j=N_n+1}^{\infty} \Delta_j^n = F_n \setminus K_n \cup \{\text{выкинутые концы, которые нужны}\}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\lambda(\widetilde{F_n \setminus K_n}) < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

$$K^M = \bigcap_{n=1}^{M} K_n - \text{ компакт}$$

Если

$$\bigcap_M K^M \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \bigcap_n K_n \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \bigcap_n F_n \neq \emptyset$$

тогда все доказано.

Пусть теперь $\bigcap\limits_M K^M = \emptyset$. Тогда $\exists M: \ K^M = \emptyset$, так как K^M вложеная система компактов, если взять в каждом из из $x_M \in K^M$ из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{K_j} \to x_0 \in K^M \ \forall M$. Возьмем

$$F_M = F_M \setminus K^m = F_M \setminus \bigcap_{n=1}^{M} K_n = \bigcup_{n=1}^{M}(F_M \setminus K_n) \subset \bigcup_{n=1}^{M}(F_n \setminus K_n) \subset \bigcup_{n=1}^{M}(\widetilde{F_n \setminus K_n})$$

Из утверждения 27

$$\delta \leqslant \lambda(F_M) \leqslant \sum_{n=1}^{M} \lambda(\widetilde{F_n \setminus K_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{n+1}} = \frac{\delta}{2}$$

получили противоречие. Значит невозможно, что $\bigcap\limits_M K^M = \emptyset$. □

Доказательство теоремы Арцела. Достаточно доказать только в следующем частном случае: $C \geqslant f_n \geqslant 0, \ f_n \to 0 \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b f_n dx \xrightarrow{?} 0$, так как

$$\left| \int\limits_a^b f_n dx - \int\limits_a^b f dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n - f| dx \xrightarrow{?} 0$$

$$|f_n - f| \geqslant 0$$

$$|f_n - f| \to 0$$

$\forall n \ \exists \mathbb{T}_n$ - разбиение отрезка $[a, b]$:

$$\int\limits_a^b f_n dx - s(f_n, \mathbb{T}_n) < \frac{1}{n} \qquad (***)$$

где $s(f_n, \mathbb{T}_n)$ - нижняя сумма Дарбу, $\mathbb{T}_n = \{\Delta_j^n\}$

$$s(f_n, \mathbb{T}_n) = \sum_j \inf_{\Delta_j^n} f_n |\Delta_j^n|$$

Достаточно считать, что $\mathbb{T}_n \subset \mathbb{T}_{n+1} \ \forall n$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 29. *Пусть* $\varepsilon > 0,\ \delta > 0.$ *Тогда* $\exists N:\ \forall n > N$

$$\sum_{j:\ \inf\limits_{\Delta_j^n} f_n \geqslant \varepsilon} \Delta_j^n < \delta \tag{13.1}$$

Доказательство утверждения 29. Предположим противное, значит $\exists n_j$

$$\sum_{k:\ \inf\limits_{\Delta_k^{n_j}} f_{n_j} \geqslant \varepsilon} |\Delta_k^{n_j}| > \delta$$

$$F_m = \bigcup_{j \geqslant m} \left\{ \Delta_k^{n_j},\ \text{где } k:\ \inf_{\Delta_k^{n_j}} f_{n_j} \geqslant \varepsilon \right\}$$

Так как $\mathbb{T}_{n_j} \subset \mathbb{T}_{n_{j+1}}$, то каждый раз отрезки, появляющиеся на следующем шаге, либо содержатся внутри уже имеющихся, либо добавляются к ним, вычеркиваем, которые лежат в уже учтенных.

$$\lambda(F_m) > \delta$$

По определению этих множеств очевидно, что $F_1 \supset ... \supset F_m \supset F_{m+1} \supset ...$, значит по утверждению 28

$$\bigcap_m F_m \neq \emptyset$$

Возьмем $x_0 \in \bigcap_m F_m$, утверждается, что в x_0 $f_n(x_0)$ не сходится к 0. Из-за того, что мы брали n_j сколь угодно большими, то у нас есть подпоследовательность функций, которая в точке x_0 отделена от 0, значит нет сходимости к 0, получили противоречие. □

Пусть $n > N$, тогда

$$s(f_n, \mathbb{T}_n) = \sum_{j:\ \inf\limits_{\Delta_j^n} f_n < \varepsilon} \inf_{\Delta_j^n} f_n |\Delta_j^n| + \sum_{j:\ \inf\limits_{\Delta_j^n} f_n \geqslant \varepsilon} \inf_{\Delta_j^n} f_n |\Delta_j^n| \leqslant \varepsilon(b-a) + C\delta$$

Поскольку ε и δ выбираются произвольно, можно взять их достаточно маленькими. Вместе с $(***)$ это дает, что

$$\int_a^b f_n dx \to 0$$

□

Теорема 23. *Пусть* f_n *дифференцируемы на* (a,b), $f_n' \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} g$ *и* $\exists x_0 \in (a,b):$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. *Тогда* $f_n \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$ *и* f *- дифференцируема на* (a,b), *причем*

$$f' = g \tag{13.2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + (f_n(x_0) - f_m(x_0)) \overset{\text{т-ма Лагранжа}}{=}$$

$$\overset{\text{т-ма Лагранжа}}{=} (f_n^{'}(c) - f_m^{'}(c))(x - x_0) + (f_n(x_0) - f_m(x_0))$$

$$\sup_{(a,b)} |f_n - f_m| \leqslant (b-a) \sup_{(a,b)} |f_n^{'} - f_m^{'}| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

то есть для f_n выполняется условие Коши равномерной сходимости, значит $f_n \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$.

$$h_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} h_n(x) = f_n^{'}(x_0)$$

Проверим, что h_n равномерно сходится к h и применим теорему о перестановке пределов. При $x \neq x_0$ $h_n(x) \to h(x)$ поточечно.

$$h_n(x) - h_m(x) = \frac{f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{т-ма Лагранжа}}{=}$$

$$\overset{\text{т-ма Лагранжа}}{=} \frac{(f_n^{'}(c) - f_m^{'}(c))(x - x_0)}{x - x_0} = f_n^{'}(c) - f_m^{'}(c)$$

$$\sup_{(a,b)} |h_n - h_m| \leqslant \sup_{(a,b)} |f_n^{'} - f_m^{'}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

значит $h_n \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} h$. Значит можем переставить пределы

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} h_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x_0) = g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = f^{'}(x_0)$$

□

Равномерная сходимость рядов

Определение 9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится поточечно на* X тогда и только тогда, когда $\forall x \in X$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X, если последовательность его частичных сумм $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ сходится равномерно на X.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $\sum\limits_n f_n(x)$ сходится поточечно. Что означает его равномерная сходимость?

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) = S(x) - S_N(x)$$

$$\sup_X |S(x) - S_N(x)| \to 0$$

$$\sup_X \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Утверждение 30 (необходимое условие равномерной сходимости ряда)**.** *Если* $\sum\limits_n f_n(x)$ *равномерно сходится на* X*, то*

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0. \tag{13.3}$$

Доказательство.

$$f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$$

так как

$$S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S$$

$$S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S$$

□

Критерий Коши равномерной сходимости ряда. *Ряд* $\sum\limits_n f_n(x)$ *сходится на* X *равномерно тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N$

$$\sup_X \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \tag{13.4}$$

Теорема 24 (признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *и* $\exists a_n \geqslant 0 :$ $|f_n(x)| \leqslant a_n\ \forall x \in X$*. Тогда из сходимости* $\sum\limits_n a_n$ *следует равномерная сходимость* $\sum\limits_n f_n(x)$*.*

Доказательство.

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Так как a_k не зависит от X, получаем

$$\sup_X \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 6. Признак Вейерштрасса можно использовать не только для рядов, но и для последовательностей, записав f_n как частичную сумму ряда.

$$f_n = f_1 + f_2 - f_1 + ... + f_n - f_{n-1}$$

То есть будет досточно иметь оценку

$$|f_n - f_{n-1}| \leqslant a_n$$

и если ряд $\sum\limits_n a_n$ сойдется, то сойдется равномерно и последовательность $f_n(x)$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14

Равномерная сходимость

Равномерная сходимость рядов

Обобщение признака Вейерштрасса. *Пусть у нас есть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *- сходится равномерно на* X, $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ *на* X. *Тогда* $\sum\limits_{n} f_n(x)$ *сходится равномерно.*

Доказательство.

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} g_k(x)$$

□

Теорема 25 (признак Дини)**.** *Пусть* K *- компакт в метрическом пространстве,* $f_n, f \in C(K)$, $|f_n(x) - f(x)|$ *не возрастает по* n *и стремится к нулю* $\forall x \in K$. *Тогда*

$$f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f.$$

Пример 15. Типичный пример:

$$\sum_{n} g_n(x) = S(x)$$

$g_n, S \in C(K),\ g_n(x) \geqslant 0$, тогда

$$\sum_{n} g_n \overset{K}{\rightrightarrows} S$$

Доказательство. Введем функции

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$$

Тогда надо доказать, что $h_n(x) \overset{K}{\rightrightarrows} 0$. Дано, что $\forall x \in K$ $h_n(x)$ не возрастает к 0 и $h_n(x) \geqslant 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $x \in K$, $\exists N_x :\ h_{N_x}(x) < \varepsilon$. Так как h_{N_x} непрерывно в x, $\exists U(x) :\ \forall y \in U(x)$

$$h_{N_x}(y) < 2\varepsilon.$$

Из-за монотонности $\forall n \geqslant N_x$ $\forall y \in U(x)$

$$h_n(y) < 2\varepsilon.$$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} U(X)$$

Из-а компактности K существует конечное подпокрытие $U(x_1), ...U(x_M)$, на каждой из этих окрестностей есть свой номер $N_{x_1}, ...N_{x_M}$, начиная с которого все функции стали меньше 2ε. Возьмем $N = \max\{N_{x_1}, ...N_{x_M}\}$, $\forall n > N$ $\forall y \in K$

$$h_n(y) < 2\varepsilon$$

так как $y \in U(x_j)$ и $N \geqslant N_{x_j}$. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь будем исследовать равномерную сходимость рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

Утверждение 31. *Если* $\sum\limits_n |a_n(x)|$ *сходится равномерно на* X *и* $b_n(x)$ *- равномерно ограничены на* X $(|b_n(x)| \leqslant C\ \forall n\ \forall x)$. *Тогда* $\sum\limits_n a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно.*

Доказательство.

$$|a_n(x)b_n(x)| \leqslant C|a_n(x)|$$

значит по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно. □

Утверждение 32. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n(x)|$ *- равномерно ограничены на* X, $b_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. *Тогда* $\sum\limits_n a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно.*

Доказательство. Проверяем критерий Коши

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \sup_{x\in X,\ m+1\leqslant k\leqslant n} |b_k(x)| \cdot \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(x)|$$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall m > N$

$$\sup_X |b_m(x)| < \varepsilon$$

Тогда при $m, n > N$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \varepsilon C$$

□

Преобразование Абеля.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_1B_1 - a_1B_0 + a_2B_2 - a_2B_1 + ...a_NB_N - a_NB_{N-1}) =$$

$$= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + ...(a_{N_1} - a_N)B_{N_1} - a_1B_0 + a_NB_N =$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})B_n - a_1B_0 + a_NB_N$$

$$B_n = b_1 + ... + b_n$$

$$B_0 = 0$$

Возьмем B, добавим его и вычтем из B_n, получим

$$\sum_{n=1}^{N} a_n((B_n - B) - (B_{n-1} - B)) = \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})(B_n - B) - a_1(B_0 - B) + a_N(B_N - B)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То есть верно следующее равенство

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1}(a_n(x)-a_{n+1}(x))(B_n(x)-B(x))+a_1(x)B(x)+a_N(x)(B_N(x)-B(x))$$

Теорема 26. *Пусть функций a_n, b_n определены на X и существует такая функция B на X, что $a_N(x)(B_N(x) - B(x))$ равномерно сходится на X. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_{n+1}(x))(B_n(x) - B(x))$ одновременно сходятся или расходятся равномерно на X.*

Доказательство. Из преобразования Абеля. □

Следствие(признаки Абеля - Дирихле).

1) Признак Дирихле. Если $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$ и $\forall x \in X$ последовательность $a_n(x)$ - монотонна и $B_n(x) = b_1(x) + b_n(x)$ равномерно ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится на X равномерно.

2) Признак Абеля. Если $a_n(x)$ - равномерно ограничены и $\forall x \in X$ последовательность $a_n(x)$ монотонна и $\sum\limits_{n} b_n(x)$ сходится равномерно на X, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится на X равномерно.

Доказательство.

1) Применяем теорему 26 с $B \equiv 0$.

$$a_N(x)B_N(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$$

Тогда по теореме 26 сходимости следующих рядов равносильны

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_{n+1}(x))B_n(x)$$

Расмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|$.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| = \pm\left(a_1(x) - a_2(x) + a_2(x) - a_3(x) + ... + a_N - a_{N+1}(x)\right) =$$

$$= |a_1(x) - a_{N+1}(x)| \overset{X}{\rightrightarrows} |a_1(x)|$$

так как

$$||a_1(x)| - |a_1(x) - a_{N+1}(x)|| \leqslant \sup_X |a_{N+1}(x)| \to 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|$ сходится равномерно, так как B_n - равномерно ограничены, то по утверждению 31 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_{n+1}(x))B_n(x)$ сходится равномерно на X.

2) Применяем теорему 26 с $B(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$.

$$a_N(x)(B_N(x) - B(x)) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$$

так как $a_N(x)$ - равномерно ограничены, а $B_N(x) - B(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. Тогда по теореме 26 сходимости следующих рядов равносильны

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_{n+1}(x))(B_n(x) - B(x))$$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| = |a_1(x) - a_{N+1}(x)| \leqslant C \;\forall n,\; \forall x$$

$$|B_N(x) - B(x)| \overset{X}{\rightrightarrows} 0$$

значит по утверждению 32 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_{n+1}(x))(B_n(x) - B(x))$.

□

Пример 16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Раберем две ситуации:

1) $0 < \delta < x < 2\pi - \delta$

$$a_n(x) = \frac{1}{n} \;\searrow \rightrightarrows 0$$

$$b_n(x) = \sin nx$$

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N} \sin nx = \sum_{n=1}^{N} \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$\frac{\delta}{2} < \frac{x}{2} < \pi - \frac{\delta}{2}$, значит

$$\sin\frac{x}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

Значит по признаку Дирихле ряд сходится равномерно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) $0 < x < 2\pi$ Используем критерий Коши. Расмотрим

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{\sin nx}{n}$$

возьмем $x = \frac{1}{2m}$, тогда

$$\frac{1}{2} \leqslant nx < 1$$

$$\sin nx \geqslant \sin \frac{1}{2}$$

значит

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{\sin nx}{n} \geqslant \frac{\sin \frac{1}{2}}{2}$$

То есть условие Коши не выполнено и ряд не сходится равномерно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15

Степенные ряды

Задача: у нас есть функция f и есть базис $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, хотим разложить функцию f по простым функциям ϕ

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

И появляется вопрос: какие есть разумные ϕ_n?

Возьмем систему $\{1, x, x^2, ...x^n, ...\}$, вместо неё можно рассматривать систему со сдвигами $\{x_0, x - x_0, (x - x_0)^2, ...(x - x_0)^n, ...\}$, в системе со сдвигами можно сделать обратный сдвиг и рассматривать системы с центром в 0.

Пример 17.

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ...$$

$\frac{1}{1+x^2} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, а ряд сходится только при $|x| < 1$. Почему это так? У данной функции на комплексной плоскости есть особенности $x = \pm i$, $|i| = 1$, получается, что в комплексной плоскости особенность на границе.

Из примера видно, что разумно рассматривать степенные ряды в комплексной плоскости.

Комплексная дифференцируемость

$$z = x + iy \tag{15.1}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{15.2}$$

то есть сходимость наследуется из $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

Определение 10. *f - $\mathbb{C}$-дифференцируема в z_0*, если

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \tag{15.3}$$

Теорема 27. *Если $f = u + iv$ – $\mathbb{C}$-дифференцируема тогда и только тогда, когда*

1) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *- дифференцируема*

2) *Условия Коши - Римана*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \tag{15.4}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f^{'}(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|)$$

$$u(z_0+\Delta z)-u(z_0)-i(v(z_0+\Delta z)-v(z_0))=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$u(z_0+\Delta z)+u(z_0)=a\Delta x-b\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$v(z_0+\Delta z)+v(z_0)=b\Delta x+a\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

Значит $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ - дифференцируема и матрица производных равна

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

□

Пример 18.

1) $f(z)=z^n$

$$f^{'}(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}(z+\Delta z)^k z^{n-1-k}\right)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(z+\Delta z)^k z^{n-1-k}=nz^{n-1}$$

2) $f(z)=\overline{z}$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Предела не существует, так как по разным направлениям, разный предел. При $\Delta z=\Delta x$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=1$$

При $\Delta z=i\Delta y$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=-1$$

Сходимость степенных рядов

Рассматриваем $\sum\limits_n c_n z^n$. Хотим понять, где такие ряды сходятся.

$$q=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n||z|^n}=z\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$$

по признаку Коши если $q<1$, то ряд абсолютно сходится, $q>1$ - слагаемое не стремится к нулю, тогда исходный ряд расходится. Обозначим

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}\in[0,\infty] \tag{15.5}$$

Утверждается, что нами доказана следующая теорема.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 28 (Коши-Адамара)**.** *Пусть у нас есть ряд* $\sum\limits_n c_n z^n$*. Тогда, если* $|z| < R$*, то ряд сходится, если* $|z| > R$*, то ряд расходится.*

Определение 11. R называется *радиус сходимости*, а круг $\{|z| < R\}$ - *круг сходимости.*

Пример 19.

1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
$$c_n = 1$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1} = 1$$
$$R = 1$$

Значит при $|z| < 1$ - сходится, при $|z| > 1$ - расходится, при $|z| = 1 \Rightarrow |z^n| = 1$ - расходится, так как слагаемое не стремится к нулю.

2)
$$\sum_n \frac{z^n}{n}$$
$$c_n = \frac{1}{n}$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$
$$R = 1$$

Значит при $|z| < 1$ - сходится, при $|z| > 1$ - расходится.

Рассматриваем при $|z| = 1$

$$z = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

Получаем
$$\sum_n \frac{z^n}{n} = \sum_n \frac{\cos n\phi}{n} + i\sum_n \frac{\sin n\phi}{n}$$

Получаем, что по признаку Дирихле сходится при $z \neq 1$.

3)
$$\sum_n \frac{z^n}{n^2}$$
$$R = 1$$

Значит при $|z| < 1$ - сходится, при $|z| > 1$ - расходится.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассматриваем при $|z| = 1$

$$\frac{|z|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

ряд сходится, так как мажорируется сходящимся.

4)

$$\sum_n \frac{z^n}{n!}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right)^{-\frac{1}{n}} = 0$$

$$R = \infty.$$

5)

$$\sum_n n! z^n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \infty$$

$$R = 0.$$

Теорема 29 (Абель)**.** *Пусть у нас есть степенной ряд* $\sum\limits_n c_n z^n$*,* R *- радиус сходимости,* $R_1 < R$*. Тогда в круге* $\{|z| \leqslant R_1\}$ *- равномерная сходимость.*

Доказательство.

$$|c_n z^n| \leqslant |c_n| R_1^n$$

Значит по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_n c_n z^n$ - сходится равномерно. □

Теорема 30 (Абель)**.** *Пусть* $\sum\limits_n c_n z_0^n$ *- сходится. Тогда* $\sum\limits_n c_n z^n$ *- сходится равномерно на* $[0, z_0]$*.*

Доказательство. Отрезок можно задать следующим образом

$$\{tz_0\},\ t \in [0, 1]$$

подставим параметризацию

$$\sum_n t^n c_n z_0^n$$

t^n - монотонная, равномерно ограниченная, а $\sum\limits_n c_n z_0^n$ - сходится равномерно (по t), значит ряд сходится равномерно по признаку Абеля. □

Поняли, что если $f(x) = \sum\limits_n c_n x^n$, то $f \in C$(на области сходимости) (верно для вещественных, для комплексных это спорное утверждение).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференцирование степенных рядов

Теорема 31. *Пусть у нас есть* $\sum\limits_n c_n z^n$ (I), $\sum\limits_n nc_n z^{n-1}$ (II). *Тогда радиус сходимости ряда* (I) *равен радиусу сходимости ряда* (II) *и*

$$\left(\sum_n c_n z^n\right)' = \sum_n nc_n z^{n-1},\ |z| < R \tag{15.6}$$

где R *- радиус сходимости.*

Доказательство.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n-1]{n|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}$$

значит радиусы сходимости равны.

Рассматриваем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \Delta z \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $|z| < R_1 < R,\ |z+\Delta z| < R_1 < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R_1^n < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n R_1^{n-1} < \infty$$

$\exists N$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} nc_n R_1^{n-1} < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \Delta z \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N-1} c_n\left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z n z^{n-1}\right)\right| +$$

$$+|\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n||z^{n-1}| + \sum_{n=N}^{\infty} |c_n|\,|(z+\Delta z)^n - z^n|$$

Оценим последнюю сумму отдельно

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n|\,|(z+\Delta z)^n - z^n| \leqslant |\Delta z| \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z+\Delta z|^k |z|^{n-1-k} \leqslant$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\leqslant |\Delta z| \cdot \sum_{n=N}^{\infty} n|c_n|R_1^{n-1} \leqslant |\Delta z|\varepsilon$$

Получаем, что

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \Delta z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N-1} c_n \left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z n z^{n-1}\right)\right| + 2\varepsilon|\Delta z|$$

Поделим на $|\Delta z|$

$$\frac{1}{|\Delta z|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \Delta z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n \left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z n z^{n-1}\right)}{\Delta z}\right| + 2\varepsilon$$

$\exists\delta:$ при $|\Delta z| < \delta$

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n \left((z+\Delta z)^n - z^n - \Delta z n z^{n-1}\right)}{\Delta z}\right| < \varepsilon$$

Значит

$$\frac{1}{|\Delta z|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \Delta z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right| < 3\varepsilon$$

□

Пусть $f(z) = \sum\limits_n c_n z^n,\ R > 0$, тогда $f \in C^\infty(\{|z| < R\})$.

$$f^{(n)}(0) = n! c_n$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{15.7}$$

Получили, что степенной ряд - это ряд Тейлора своей суммы.

Рассмотрим

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}.$$

Это бесконечно дифференцируемая функция, в вещественной области она не раскладывается в ряд Тейлора, так как все производные в нуле равны нулю. Пусть $z = iy$

$$\lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{y^2}} = \infty$$

поэтому комплексно она не дифференцируема, она не непрерывна и не может разлагаться в степенной ряд.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Интегрирование степенных рядов

Пусть $R > 0$, тогда *первообразная* функции

$$\int f(z)dz = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} \tag{15.8}$$

Теорема 32. *Пусть* $z(t) : [0,1] \to \{|z| \leqslant R_1\}$, $R_1 < R$, $f(z(t)) = \sum\limits_n c_n z(t)^n$, ρ - *непрерывная и ограниченная. Тогда*

$$\int\limits_0^1 f(z(t))\rho(t)dt = \sum_n c_n \int\limits_0^1 z(t)^n \rho(t)dt \tag{15.9}$$

Для вещественных: если $[a,b] \subset \{|z| < R\} \cap \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_n c_n \int\limits_a^b x^n dx \tag{15.10}$$

Теорема 32 верна, так как ряд сходится равномерно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 16

Степенные ряды

Свойства степенных рядов

Рассматриваем степенные ряды в комплексной плоскости, так как, если функция $\mathbb{C}$-дифференцируема, то она и дифференцируема бесконечное число раз и раскладывается в ряд.

Перечислим свойства степенных рядов (большая часть была на прошлой лекции):

(I) Сходимость

1) **Первая теорема Абеля.** Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в z_1, то $\forall 0 < q < 1$ в круге $|z| \leqslant q|z_1|$ ряд сходится абсолютно и равномерно.

   Это верно, так как

$$|c_n z^n| = |c_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqslant C \cdot q^n$$

2) **Вторая теорема Абеля.** Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в $z_1 \neq 0$, то на отрезке $[0, z_1]$ он сходится равномерно.

   Это верно, так как, если параметризовать отрезок как $tz_1,\ t \in [0,1]$ и подставить параметризацию в ряд, то получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n t^n$, который сходится по признаку Абеля.

3) **Формула Коши-Адамара.**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \tag{16.1}$$

   $|z| < R$ - сходится, $|z| > R$ - расходится. (Доказывается через признак Коши).

Полезные примеры были разобраны на прошлой лекции (пример 19).

(II) Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость. Пусть у нас есть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ |z| < R,\ R \neq 0$, нас интересуют свойства функции $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Было доказано, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|c_n|} \tag{16.2}$$

Это вычисление круга сходимости для формально продифференцированного ряда. Также было доказано, что при $|z| < R$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Как следствие $S(z)$ - дифференцируема бесконечное число раз на $|z| < R$. Это доказывается следующим образом, фактически надо доказать, что в следущей сумме можно переставить сумму и предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\Delta z \to 0} c_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$$

Для этого необходимо, чтобы ряд сходился равномерно по Δz, пусть $0 < |\Delta z| < \delta$, $|z| + \delta = R_1 < R$

$$\left| \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \right| \leqslant |z+\Delta z|^{n-1} + |z+\Delta z|^{n-2} \cdot |z| + ...|z|^{n-1} \leqslant nR_1^{n-1}$$

$$\left| c_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \right| \leqslant |c_n| n R_1^{n-1}$$

То есть мы оценили ряд равномерно сходящимся, так как мы находимся внутри круга сходимости формально продифференцированного ряда, значит исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса по таким Δz.

Следствие. Внутри круга сходимости у степенного ряда есть первообразная

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + const \tag{16.3}$$

Также мы сформулировали следующую теорему (Теорема 32) (была сформулирована несколько иначе): Пусть $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет положительный радиус сходимости R и $\phi : [a,b] \to \{z : |z| < R\}$ - непрерывное отображние, $\rho \in C[a,b]$. Тогда $S(\phi(t))$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b S(\phi(t))\rho(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_a^b \phi^n(t)\rho(t)dt \tag{16.4}$$

Доказательство теоремы 32. $\phi([a,b])$ - компакт в круге $\{z : |z| < R\}$, значит $\exists 0 < R_1 < R : \ \phi([a,b]) \subset \{z : |z| \leqslant R_1\}$. На $\{z : |z| \leqslant R_1\}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится равномерно. Следовательно $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (\phi(t))^n \rho(t)$ равномерно на отрезке $[a,b]$ сходится к $S(\phi(t))\rho(t)$, значит по теореме о перестановке равномерного предела и интеграла, получаем,что

$$\int\limits_a^b S(\phi(t))\rho(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_a^b \phi^n(t)\rho(t)dt$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(III) Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы.

Теорема 33. *Пусть ряд* $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *имеет* $R > 0$. *Тогда*

$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \tag{16.5}$$

Доказательство. Продифференцировать n раз и подставить. □

Теорема 34. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ *совпадают на* $z_k \to 0,\ z_k \neq 0$. *Тогда*

$$c_n = d_n.$$

Доказательство. Можно считать, что у рядов есть общий круг, на котором они сходятся, берем последовательность из этого круга. Более того, можно считать, немного уменьшив круг, что в нем ряды сходятся равномерно вместе со всеми своими производными.

Обозначим

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

Знаем, что

$$C(z_k) = D(z_k)$$

Устремив $k \to \infty$ получаем

$$c_0 = d_0$$

$$\frac{C(z_k) - c_0}{z_k} = \frac{D(z_k) - c_0}{z_k}$$

$$\frac{C(z_k) - c_0}{z_k} = c_1 + c_2 z_k + ...$$

$$\frac{D(z_k) - c_0}{z_k} = d_1 + d_2 z_k + ...$$

и проделываем все тоже самое $k \to \infty$

$$c_1 = d_1$$

Далее вычитаем $c_1 z_k$ и так далее. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Примеры вычислений с помощью степенных рядов

Пример 20.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \ |x| < 1$$

Знаем, что это степенной ряд сходится при $x = 1$, значит по второй теореме Абеля этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Возьмем предел при $x \to 1$ получим

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Но это долгий способ вычисления $\ln 2$.

Рассмотрим

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\ln 2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} \frac{1}{2k+1}$$

И у этого ряда сходимость лучше.

Пример 21.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^2 n dt$$

Считаем, что $0 < x < 1$, тогда на отрезке $[0, x]$ ряд сходится равномерно и мы можем поменять интеграл и сумму местами. Получаем

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Этот ряд сходится в 1. Значит можем менять предел и сумму местами

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Но этот ряд медленно сходится.

Задача 14. Улучшить сходимость в примере 21, используя, что для разумных углов

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

$$x = \frac{1}{2}, \ y = \frac{1}{3}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 17

Суммирование расходящихся рядов

Например, если расммотреть

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Если подставить $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ “}=\text{ ”} \frac{1}{2}$$

Ряд в левой части расходится, то есть выражение не существует при $x = -1$, при этом то, чему в остальных x оно равно, непрерывно продолжается на эту точку. Рассмотрим два способа суммирования.

(I) Суммирование Пуассона-Абеля.

Число A называется *суммой по методу Пуассона-Абеля ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *(не предполагается сходящимся)*, если $\forall x \in (0,1)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится и

$$A = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{17.1}$$

Если предел существует, то говорят, что *ряд суммируем по Пуассону-Абелю.*

Требования к способу суммирования:

1) Линейность. Если $\sum\limits_n a_n$ суммируемо к A, $\sum\limits_n b_n$ суммируемо к B, то $\sum\limits_n (\alpha a_n + \beta b_n)$ суммируемо к $\alpha A + \beta B$.
2) Регулярность. Если ряд сходится и его сумма A, то этот ряд суммируем к A.

Утверждение 33. *Метод суммирования Пуассона-Абеля линеен и регулярен.*

Доказательство. Возьмем $\sum\limits_n a_n$ и $\sum\limits_n b_n$, по ним составляем ряды $\sum\limits_n a_n x^n$ и $\sum\limits_n b_n x^n$, они сходятся на $(0,1)$, тогда $\sum\limits_n (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$ сходится на $(0,1)$.

$$\lim_{x \to 1-} \sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) x^n = \lim_{x \to 1-} \alpha \sum_n a_n x^n + \lim_{x \to 1-} \beta \sum_n b_n x^n = \alpha A + \beta B$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $\sum\limits_n a_n x^n$, то есть $\sum\limits_n a_n x^n$ сходится в 1, тогда по второй теореме Абеля этот ряд сходится равномерно на $[0,1]$, тогд аможно переставлять местами предел и сумму, значит

$$\lim_{x\to 1-}\sum_n a_n x^n = \sum_n \lim_{x\to 1-} a_n x^n = \sum_n a_n = A$$

□

Пример 22.

1) Таким способом мы уже получили, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$$

так как

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1-]{} \frac{1}{2}$$

2) Рассмотрим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' =$$

$$= x\left(\frac{-x}{1+x}\right)' = -\frac{x}{(1+x)^2} \xrightarrow[x\to 1-]{} -\frac{1}{4}$$

Значит

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot n = -\frac{1}{4}$$

(II) Суммирование по Чезаро. Пусть у нас есть ряд $\sum\limits_n a_n$ (не обязательно сходится), S_N - его частичные суммы. Говорят, что ряд *суммируем по Чезаро к* A, если

$$\frac{S_1 + ... + S_N}{N} \to A \tag{17.2}$$

Утверждение 34. *Метод Чезаро линеен и регулярен.*

Доказательство. Возьмем ряды $\sum\limits_n a_n$ и $\sum\limits_n b_n$ с частичными суммами S_N^a и S_N^b соответственно. У ряда $\sum\limits_n(\alpha a_n + \beta b_n)$ будут частичные суммы $\alpha S_N^a + \beta S_N^b$, тогда если выписать средние арифметические, то получим

$$\alpha\frac{S_1^a + ... + S_N^b}{N} + \beta\frac{S_1^b + ... + S_N^b}{N} \to \alpha A + \beta B$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $\sum\limits_n a_n = A$, то есть $S_N \to A$, пусть

$$\widetilde{S}_N = S_N - A \to 0$$

$$\frac{S_1 + S_N}{N} - A = \frac{\widetilde{S}_1 + ... + \widetilde{S}_N}{N}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M:\ \forall N > M:$

$$|\widetilde{S}_N| < \varepsilon$$

Рассмотрим

$$\frac{\widetilde{S}_1 + ... + \widetilde{S}_N}{N} = \frac{\widetilde{S}_1 + ... + \widetilde{S}_M}{N} + \frac{\widetilde{S}_{M+1} + ... + \widetilde{S}_N}{N}$$

$$\left|\frac{\widetilde{S}_{M+1} + ... + \widetilde{S}_N}{N}\right| < \varepsilon$$

А устремляя N к бесконечности можем добиться, что

$$\left|\frac{\widetilde{S}_1 + ... + \widetilde{S}_M}{N}\right| < \varepsilon$$

□

Пример 23. Расмматриваем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

$$S_N = \begin{cases} 1, & N = 2k \\ 0, & N = 2k+1 \end{cases}$$

$$\frac{S_0 + S_N}{N+1} = \begin{cases} \frac{m+1}{2m+2} & N = 2m+1 \\ \frac{m+1}{2m+1} & N = 2m \end{cases} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Утверждение 35. *Если ряд $\sum\limits_n a_n$ суммируем по Чезаро, то*

$$a_n = o(n)$$

Доказательство. Пусть

$$A_N = \frac{S_1 + ... + S_N}{N}$$

тогда

$$S_N = NA_N - (N-1)A_{N-1} = N\left(A_N - \left(1 - \frac{1}{N}\right)A_{N-1}\right) = o(N)$$

так как

$$A_N - \left(1 - \frac{1}{N}\right)A_{N-1} \to 0$$

$$a_N = S_N - S_{N-1} = 0(N)$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 35 (Фробениус)**.** *Если ряд суммируем по Чезаро к A, то этот ряд суммируем по Пуассону-Абелю к A.*

Доказательство. Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, так как $a_n = o(n)$, то ряд сходится при $0 < x < 1$. Считаем, что

$$S_0 = 0, S_{-1} = 0, ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^{m+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x^n - x^{n+1}) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n =$$

$$= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(nA_n - (n-1)A_{n-1})x^n = (1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Получаем, что

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nAx^n = Ax$$

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n = (1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N$

$$|A_n - A| < \varepsilon$$

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax = (1-x)^2\sum_{n=1}^{N} n(A_n - A)x^n +$$

$$+(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax$$

$$\left|(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty} n(A_n - A)x^n\right| \leqslant \varepsilon x$$

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{N} n(A_n - A)x^n \xrightarrow[x\to 1-]{} 0$$

Получаем, что

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(A_n - A)x^n + Ax \to A$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по Пуассону-Абелю к A и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируем по Пуассону-Абелю к B. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0)$ суммируем по Пуассону-Абелю к $A\cdot B$. Это происходит, так как если взять $\sum\limits_n a_nx^n$ и $\sum\limits_n b_nx^n$, когда $0<x<1$, то эти ряды сходятся абсолютно, поэтому

$$\left(\sum_n a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_n b_nx^n\right)=\sum_n(a_nb_0+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0)x^n$$

И устремляем $x\to 1$.

Пример 24. Рассматриваем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow[x\to 1]{}\infty$$

То есть по Абелю-Пуассону мы просуммировать не можем.

Попробуем сделать это при помощи ζ - регуляризации.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Формула Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n)=\int\limits_1^N f(x)dx+\int\limits_1^N\{x\}f'(x)dx$$

Если все сходится, то можем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\int\limits_1^\infty f(x)dx+\int\limits_1^\infty\{x\}f'(x)dx$$

У этой формулы есть обобщение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\int\limits_1^\infty f(x)dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_1^\infty+(-1)^{m+1}\int\limits_1^\infty\frac{B_m(\{x\})f^{(m)}(x)}{m!}dx$$

где B_k - числа Бернулли.

$$0^m+1^m+...+(n-1)^m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^kB_kn^{m+1-k}$$

числа Бернулли удовлетворяют следующему соотношению

$$\sum_{j=0}^{m}C_m^jB_j=0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$B_0 = 1$$

Найдем B_1 при $m = 1$

$$C_2^0 B_0 + C_2^1 B_1 = 0$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

Аналогично можно находить остальные числа Бернулли, например

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_3 = 0$$

$B_m(t)$ - многочлены Бернулли

$$B_m(t) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j B_j t^{m-j}$$

Хотим применить формулу к функции $f(x) = \frac{1}{x^s},\ s > 1,\ m = 3$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$$

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} s(s+1)...(s+k-2)}{x^{s+k-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{B_1}{1!} \cdot (-1) + \frac{B_2}{2!} s + (\text{в остальных слагаемых будет s + 1}) +$$

$$+(-1)^m \int\limits_1^\infty \frac{B_m(\{x\}) s(s+1)...}{x^{s+m}} dx$$

Интеграл будет сходится при $s + m > 1$. Возьмем $s = -1$, то получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

$\zeta(s)$ единственным образом продолжается со значений $s > 1$ на остальные, то есть мы находим это значение, используя единственное возможное продолжение.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 18

Производящие функции

Пусть у нас есть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогда этой последовательности можно сопоставить следующую формальную сумму $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, не предполагается, что ряд сходится.

Если у нас есть $A(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ и $B(z) = \sum\limits_n b_n z^n$, то мы можем выполнять с ними следующие формальные операции

$+$

$$\alpha A(z) + \beta B(z) = \sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) z^n \tag{18.1}$$

$\cdot$

$$A(z)B(z) = \sum_n (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0) z^n \tag{18.2}$$

$(\ )'$

$$A^{'}(z) = \sum_n a_n n z^{n-1} \tag{18.3}$$

$\int$

$$\int A(z)dz = \sum_n \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{18.4}$$

На общем круге сходимости эти операции - честные операции. На круге сходимости определена функция $A(z)$, если $R > 0$, то

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$$

Такие объекты называют *производящими функциями.*

Пример 25. Числа Фибоначчи.

$$f_0 = f_1 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

$$F(z) = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) z^n = 1 + z + z\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{n-1}\right) + z^2\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2}\right) =$$

$$= 1 + z + z(F(z) - 1) + z^2 F(z)$$

Получаем

$$(1 - z - z^2)F(z) = 1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$
$$z^2 + z - 1 = 0$$
$$z_1,\ z_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = -\frac{1}{(z_1 - z)(z_2 - z)} = -\frac{1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z}\right) =$$
$$= -\frac{1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} - \frac{1}{z_2}\frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}}\right) = -\frac{1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_1^n} - \frac{1}{z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^n}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{z_2^{n+1}} + \frac{1}{z_1^{n+1}}\right)\right) z^n$$

Утверждение 36.

1) *Пусть у нас $\{a_n\}$ такая, что*

$$a_{n+1} = c_1 a_n + c_2 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k+1}$$

Тогда

$$A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ \deg Q = k,\ \deg P \leqslant k - 1$$

2) *Если*

$$A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$
$$Q(z) = 1 + c_1 z + ...$$

то начиная с некоторого номера a_n удовлетворяет линейному рекурентному соотношению.

Доказательство.

1) Рассмотрим $(c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_k z^k)A(z)$, вычислим коэффициент при z^n для $n \geqslant k$

$$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... c_k a_{n-k} = a_n$$

$P(z)$ - многочлен степени меньше или равной $k-1$, он поправляет первые $k-1$ слагаемых, получаем

$$(c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_k z^k)A(z) = A(z) + P(z)$$

2) Самостоятельно доказать (необходимо умножить на $Q(z)$).

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 26. Задача, когда появляются производящие функции: Пусть у вас в кармане есть только рубли и пятаки. Сколькими способами можно разменять n рублей?

Рассмотрим следующее произведение

$$(1+z+z^2+z^3+...)(1+z^5+z^{10}+z^{15}+...)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

Как раз получается, что когда мы приводим подобные, то мы набираем n рублями и пятаками, значит a_n - число способов размена.

$$(1+z+z^2+z^3+...)(1+z^5+z^{10}+z^{15}+...)=\frac{1}{(1-z)(1-z^5)}$$

$$A(z)=\frac{1}{1-z-z^5+z^6}$$

По утверждению 36, умножив на знаменатель, мы получим рекурентную формулу для последовательности a_n

$$(1-z-z^5+z^6)A(z)=1$$

$$z^n: a_n-a_{n-1}-a_{n-5}+a_{n-6}=0,\ n\geqslant 6$$

то есть

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-5}-a_{n-6}$$

,

Задача 15. Вычислить

$$(C_n^0)^2+...+(C_n^n)^2$$

Пример 27. Числа Каталана.

К примеру, рассмотрим выражение

$$((1\cdot 2)+(3\cdot(1+2)))\,,$$

в нем расставлены скобки, которые указывают последовательность действий, если убрать числа и знаки, то мы получим объект, называемый скобочной структурой

$$((\ )\ \ (\ ))\,.$$

Скобочные структуры бывают правильными или неправильными. Условия правильной скобочной структуры: число левых в любом начальном участке должно быть не меньше чем правых, а по всей формуле число левых и правых должно совпадать.

Пусть у нас n - пар скобок, c_n - число правильных скобочных структур. Чему равно c_1?

Например, $c_1=1,\ c_2=2$.

Считаем $c_0=1$. Возьмем $n+1$ пару скобок и посмотрим как устроена скобочная структура, рассмотрим первую скобку и посмотрим, где она заканчивается, может

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

оказаться, что снаружи этих скобок ничего нет, может оказаться, что внутри k пар скобок и снаружи $n-k$ пар скобок. Для каждого фиксированного k возникает $c_k \cdot c_{n-k}$ скобочных структур. Получаем

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot c_{n-k}$$

получаем, что количество скобочных структур задается рекурентным соотношением, но уже не линейным.

Найдем производящую функцию

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$C(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(c_0c_n + ... + c_nc_0)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}z^n == \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}z^{n+1} = \frac{C(z)-1}{z}$$

Значит

$$zC^2(z) - C(z) + 1 = 0$$

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Выбираем знак минус, так как иначе в 0 все плохо, а степенной ряд в 0 хорошая функция.

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z}\left(1-(1-4z)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2z}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4)^n z^n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)4^n}{n!} z^{n-1}$$

получаем

$$c_{n-1} = \frac{4^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^{n+1}n!} = \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3) \cdot (n-1)!}{n!(n-1)!} =$$

$$= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

то есть

$$c_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$$

Числа Каталана позволяют решать не только эту задачу. Например, числа Каталана еще решают задачу на количество треангуляций: берем $(n+2)$-угольник и начинаем диагоналями рабивать на треугольники, диагоналям нельзя пересекаться (только в вершинах). Найти число треангуляций c_n. Для треугольника $c_1 = 1$,

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

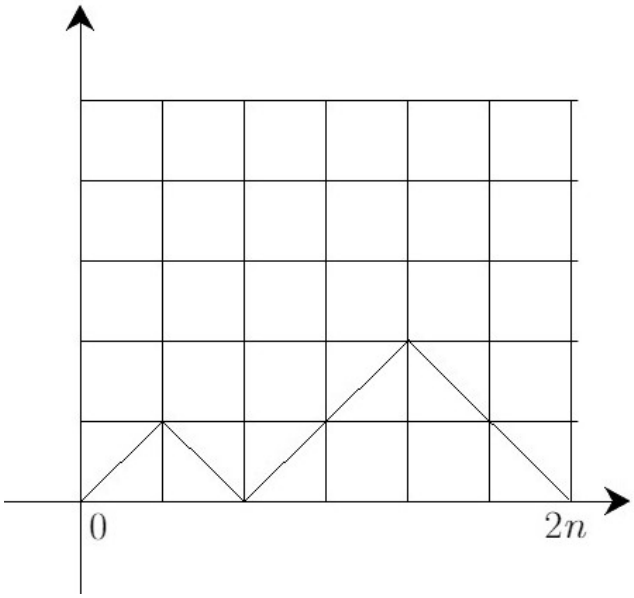

Рис. 5.

у четырехугольника $c_2 = 2$. Считаем, что $c_0 = 1$. Можно попробовать посчитать аналогичным образом.

Пути Дика. У нас есть целочисленная решетка с шагом 1, разрешается проводить ломаные под углом 45° вверх и вниз, которые не опускаются ниже оси (Рис. 5). Найти число путей от 0 до $2n$. Эта задача однозначно сопоставляется с задачей про скобки. Когда идете наверх скобочка открывается, когда идете вниз скобочка закрывается.

Замечание 8. Если интересно про производящие функции, то можно почитать книгу Ландо "Производящие функции".

Пример 28. Многочлены Лежандра.

Есть матетериальная точка x_0 с массой m и другая материальная точка x с массой m. С какой силой притягивается x к x_0?

$$F = -\frac{\gamma m m_0 (x - x_0)}{|x - x_0|^3}$$

Потенциал

$$U = \frac{\gamma m m_0}{|x - x_0|}$$

$$F = \bigtriangledown U$$

Пусть теперь у нас много точек x_j с массой m_j и все они притягивают x с массой m.

$$U = \sum_j \frac{\gamma m m_j}{|x - x_j|}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

но физики решили, что можно взять центр масс x_0 с массой $\sum m_j$. То есть мы хотим заменить

$$\sum_j \frac{\gamma m m_j}{|x - x_j|} \sim \frac{\gamma m \sum m_j}{|x - x_0|}$$

Возникает вопрос, какова погрешность таких замен? x_0 фиксировано, возьмем y (Рис. 6.) Пусть $\sin\theta = t$, тогда

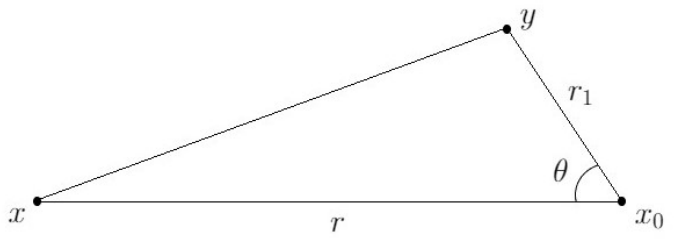

Рис. 6.

$$|x - y| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 t}$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{r_1}{r}$$

поскольку мы считаем, что x летает далеко от x_0 и y, то $\alpha < 1$, тогда

$$|x - y| = r\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}$$

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\alpha^n$$

$$P_0(t) = 1$$

$$U = \sum_j \frac{\gamma m m_j}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r_j^n}{r^n} P_n(t_j) = \frac{\gamma m \sum m_j}{r} + \frac{\gamma m}{r^2} \sum_j m_j r_j P_1(t_j) + ...$$

$P_n(t)$ - многочлен по t, такие мночлены называются *многочлены Лежандра.*

Продифференцируем производящую функцию

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}}\right)' = \sum_n n P_n(t)\alpha^{n-1}$$

$$\frac{-\alpha + t}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha t)\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}} = \sum_n n P_n(t)\alpha^{n-1}$$

Домножим на $(1 + \alpha^2 - 2\alpha t)$ и получим

$$(-\alpha + t)\sum_n P_n \alpha^n = (1 + \alpha^2 - 2\alpha t)\sum_n n P_n \alpha^{n-1}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь приравниваем коэффициенты

$$\alpha^n: \ tP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} + (n-1)P_{n-1} - 2ntP_n$$

$$(n+1)P_{n+1} = (1+2n)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

Видно, что если первые два - многочлены, то и остальные тоже многочлены.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 19

Производящие функции

Пример 29. Игра Пенни.

Бросается правильная монета, представляем "орёл"как 1, а "решку"как 0, то есть если бросить монету n результат бросков представляется в виде последовательности нулей и единиц. Вероятность получить конкретную последовательность $\frac{1}{2^n}$.

Хотим получить комбинацию 110, бросаем монетку и ждет, когда получится такая комбинация. То есть мы бросаем n раз монету и хотим узнать, какова вероятность, что на n - том бросании впервые возникла необходимая комбинация, обозначим такую вероятность p_n,

$$p_0 = 0,\ p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = \frac{1}{8}, ...$$

Рассмотрим производящую функцию

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

и рассмотрим

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

где q_n - вероятность того, что в первых n бросаниях комбинация 110 не появилась.

$$q_0 = 1,\ q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ q_3 = \frac{7}{8}, ...$$

Рассмотрим, ситуацию, изображенную на Рис. 7. (на первых n шагах нет нужной комбинации) и получаем

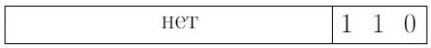

Рис. 7.

$$q_n \cdot \frac{1}{8} = p_{n+3}$$

Тогда

$$\frac{1}{8} z^3 Q(z) = P(z)$$

Ещё одно соотношение на $P(z)$ можем получить из Рис. 8.

Рис. 8.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$1 + \frac{1}{2}zQ(z) + \frac{1}{2}zQ(z) = Q(z) + P(z)$$

Получили два уравнения

$$\frac{1}{8}z^3Q(z) = P(z)$$

$$(z-1)Q(z) = P(z) - 1$$

Выразим $Q(z)$ из первого и подставим во второе, получим

$$\frac{8(z-1)}{z^3}P = P - 1$$

$$z^3 = P(z^3 - 8(z-1))$$

Получили

$$P(z) = \frac{z^3}{z^3 - 8(z-1)}$$

это рациональная дробь, значит последовательность будет удовлетворять рекурентному соотношению.

$$P(1) = p_0 + p_1 + ... + p_n + ... = 1$$

то есть мы видим, что такая комбинация появится с вероятностью 1.

Пусть теперь Алиса загадала комбинацию 110, а Боб загадал комбинацию 100 и выигрывает тот, чья комбинация появится первой. На самом деле для любой комбинации длины три можно указать комбинацию, которая выигрывает у неё с большей вероятностью, этот факт называется парадокс Пенни.

Обозначим S_A - сумма вероятностей p_n^A (это другие p_n) тех комбинаций, когда выигрывает Алиса, S_B - сумма вероятностей p_n^B тех комбинаций, когда выигрывает Боб. Пусть Q - сумма вероятностей q_n, когда никто не выиграл на шаге n.

Рассматриваем ситуацию, изображенную на Рис. 9. Получаем

Рис. 9.

$$1 + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q = Q + S_A + S_B$$

Значит

$$S_A + S_B = 1$$

то есть игра не безнадежна.

Рассматриваем ситуацию, изображенную на Рис. 10.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рис. 10.

Получаем

$$\frac{1}{8}Q = \frac{1}{2}S_A + S_B$$

Рассматриваем ситуацию, изображенную на Рис. 11. Получаем

Рис. 11.

$$\frac{1}{8}Q = S_A$$

Тогда

$$S_A = 2S_B$$
$$S_A = \frac{2}{3},\ S_B = \frac{1}{3}$$

Замечание 9. В книге авторов Кнут, Поташник и Грекхем "Конкретная математика"есть очень много красивых наблюдений и красивых методов, которые используются и в комбинаторике и в программировании.

Степенные ряды для решения дифференциальных уравнений

Пример 30.

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$\sum_n n c_n x^{n-1} = \sum_n c_n x^n$$
$$y(0) = c_0 = 1$$
$$c_1 = c_0 = 1$$
$$x^n : (n+1)c_{n+1} = c_n$$
$$c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} = \frac{c_{n-1}}{(n+1)n} = ... = \frac{1}{(n+1)!}$$

Получили

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 31. Рассмотрим

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

для многих задач важно знать решение такого уравнения, например, если решается задача о том как распределена температура в аудитории, если она устоялась. Есть другой пример, взяли и надули мыльный пузырь или натянули мыльную пленку, как будет устроен профиль этой пленки, если она не сильно изгибается, очень хорошим приближением будет решение данного уравнения.

Такое уравнение называется *уравнение Лапласа*, а функция, удовлетворяющая ему называется *гармоническая функция*.

Пусть нас это интересует в цилиндре и мы хотим это записать в координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + u_{zz}$$

Будем искать решение в виде

$$u(r,\phi,z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$$

за этой догадкой стоит, то что физики уверены, что все сложные процессы распадаются в линейные комбинации простых и чтобы научиться любую ситуацию моделировать надо иметь большой запас решений, то есть не надо искать все, надо просто иметь большой класс, а дальше с помощью линейных комбинаций, возможно бесконечных, выразить то, что нужно. Это принцип суперпозиции.

$$R''\Phi Z + \frac{1}{r}R'\Phi Z + \frac{1}{r^2}R\Phi'' Z + R\Phi Z'' = 0$$

разделим на $R\Phi Z$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$Z'' = \lambda^2 Z$$

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{r} - \frac{n^2}{r^2} + \lambda^2 = 0$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2r^2 - n^2)R(r) = 0$$

Будем рассматривать случай, когда $\lambda = 1$.

Перепишем уравнение в координатах x, y, его методами, которые используются на лекциях и семинарах по дифференциальным уравнениям не решить

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$y(0) = \frac{1}{2^n n!}$$

$y(x)$ - решение данного уравнения называется *функцией Бесселя порядка* n.

Будем решать при $n = 0$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$x^2 \sum_n n(n-1)c_n x^{n-2} + x \sum_n n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_n c_n x^n = 0$$

$$x^n : \ n(n-1)c_n + n c_n + c_{n-2} = 0$$

Получаем соотношение

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2}$$

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{c_{2k-4}}{(2k(2k-2))^2} = ... = \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} x^{2k}$$

Определение синуса и косинуса через ряды

Знаем, что такое e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

причем не только для вещественного аргумента, но и для комплексного.

Задача 16.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

Задача 17. Проверить, что

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Определим синус как

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{19.1}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{19.2}$$

Какие свойства синуса и косинуса мы знаем из школы?

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

- $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
- $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
- $$\sin(x+y) = \cos x \sin y - \sin x \cos y$$
- $$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$$

Эти свойства легко проверяются подстановкой.

Утверждение 37. *Существует наименьший положительный корень уравнения*

$$\cos x = 0.$$

Этот корень обозначаем $\frac{p}{2}$.

Более того, $\sin x$ *на* $[0, \frac{p}{2}]$ *возрастает,* $\cos x$ *на* $[0, \frac{p}{2}]$ *убывает и*

$$\sin \frac{p}{2} = 1.$$

Доказательство. Докажем, что $\cos 2 < 0$, значит по теорме о промежуточных значениях корень на отрезке точно будет, у корней есть точная нижняя грань, а поскольку множество корней замкнуто, то точная нижняя грань обязательно ему принадлежит, это и будет наименьший положительный конень.

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + ... = -\frac{1}{3} - \left(\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) + \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) + ...\right)$$

$$\frac{2^n}{n!} \vee \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$(n+2)(n+1) \vee 4$$

Так как у нас $n > 6$, получаем

$$(n+2)(n+1) > 4$$

$$\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$$

Значит

$$\cos 2 < 1.$$

Можем вычислить производные

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На $\left[0, \frac{p}{2}\right)$ $\cos x > 0$, значит $(\sin x)' > 0$ и значит синус возрастает, а производная косинуса отрицательная, значит он будет убывать.

Так как синус возрастает на $\left[0, \frac{p}{2}\right)$, то

$$\sin \frac{p}{2} > 0$$

$$\cos^2 \frac{p}{2} + \sin^2 \frac{p}{2} = 1$$

$$\sin \frac{p}{2} = 1$$

□

Теперь видим, что верно следующее равенство

$$\sin\left(x + \frac{p}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{p}{2}\right) = -\sin x$$

то есть теперь все соображения о положительности, строгой монотонности можно перенести с отрезка $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ на отрезок $\left[\frac{p}{2}, p\right]$, на отрезок $\left[p, \frac{3p}{2}\right]$, на отрезок $\left[\frac{3p}{2}, 2p\right]$.

Знаем, что отображение $t : [0, 2p) \to \{x^2 + y^2 = 1\}$ устроено так, что

$$x = \cos t,\ y = \sin t$$

Оно пробегает всю окружность и бывает в каждой точке один раз. Можем посчитать длину окружности

$$\int\limits_0^{2p} \sqrt{\dot{x} + \dot{y}} dt = 2p = 2\pi$$

$$p = \pi$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 20

Кратные ряды и степенные ряды нескольких переменных

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n,m} a_{nm}$, такие ряды можно определить несколькими способами

1) Повторный ряд.

$$\sum_n \left(\sum_m a_{nm} \right)$$

$$\sum_m \left(\sum_n a_{nm} \right)$$

это разные способы, они могут приводить к разным ответам, вплоть до того, что в одном случае будет сходимость, а в другом нет.

2) Двойной ряд.

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = A$$

значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n,\ m > N$

$$|S_{nm} - A| < \varepsilon$$

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

3) Можно занумеровать элементы ряда биекцией, пересчтывающей все элементы таблицы $k \to (n(k)m(k))$, это биекция $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда получится простой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k$$

Можно построить примеры, когда все эти ряды ведут себя по-разному.

В повторных рядах мы берем повторные пределы

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} S_{nm}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} S_{nm}$$

а в двойных двойной предел

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} S_{nm}$$

Уже обсуждалось ранее, что такие пределы могут вести себя по-разному. (Такие примеры были при изучении функций двух переменных).

Большинство утверждений тут будет без доказательств.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 36. *Если хотя бы один из указанных рядов сходится абсолютно. То они все сходятся абсолютно и их суммы равны.*

Замечание 10. Доказательство можно найти в книге Фихтенгольца (второй том). Это применимо и для большего набора параметров.

Рассмотрим

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm}(x-x_0)^n(y-y_0)^m, \qquad (*)$$

считаем, что это понимается в смысле двойного ряда. Можно считать, что $x_0 = 0,\ y_0 = 0$.

Утверждение 38. *Если ряд* $(*)$ *сходится в точке* (x_1, y_1), $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$. *То* $(*)$ *сходится абсолютно на прямоугольнике* $|x| < |x_1|,\ |y| < |y_1|$.

Более того, если $|x| \leqslant q|x_1|,\ |y| \leqslant q|y_1|,\ 0 < q < 1$, *то сходимость равномерная.*

Доказательство. Из сходимости исходного ряда

$$|c_{nm}x_1^n y_1^m| \leqslant C$$

$$\sum_n |c_{nm}x_1^n y_1^m| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \cdot \left|\frac{y}{y_1}\right|^n \leqslant \sum_{n,m} Cq^{n+m},\ q < 1$$

□

Пример 32.

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n+m}^n x^n y^m$$

Будем искать область, где этот ряд сходится абсолютно.

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n+m}^n |x|^n|y|^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n,m:n+m=k} C_{n+m}^n |x|^n|y|^m = \sum_{k=0}^{\infty}(|x|+|y|)^k = \frac{1}{1-|x|-|y|}$$

Сходится при $|x| + |y| < 1$.

Утверждение 39. *В условиях предыдущего утверждения сумма* $S(x,y) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}x^n y^m$ *бесконечное число раз дифференцируема внутри прямоугольника сходимости и*

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} S(0,0) = n!m!c_{nm}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Равномерная сходимость функций, зависящих от параметра

Пусть X - непустое множество, Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка Y. Пусть $f : X \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Если $\forall x \in X$ $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \phi(x)$, то говорят, что f *сходится к ϕ поточечно при $y \to y_0$.*

Это означает, что (Коши) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ 0 < \rho(y, y_0) < \delta$

$$|f(x,y) - \phi(x)| < \varepsilon \tag{20.1}$$

Также работает определение и по Гейне $\forall y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0,\ f(x, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(x)$.

Говорят, что $f(x,y)$ *сходится к $\phi(x)$ при $y \to y_0$ равномерно на X*, если

$$\sup_{x\in X} |f(x,y) - \phi(x)| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0 \tag{20.2}$$

Подробно: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x\ \forall y\ 0 < \rho(y, y_0) < \delta$ следует, что

$$|f(x,y) - \phi(x)| < \varepsilon$$

Фактически утверждается, что

$$\lim_{y\to y_0} h(y) = 0$$

$$h(y) = \sup_X |f(x,y) - \phi(x)|$$

Обозначение

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$$

Утверждение 40. $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\forall y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0,\ f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$.

Доказательство. Определение Коши $\Leftrightarrow$ определению по Гейне (для функции $h(y)$). □

Теорема 37 (критерий Коши)**.** *$f(x,y)$ сходится равномерно на X при $y \to y_0$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall y_1,\ y_2\ 0 < \rho(y_1, y_0) < \delta,\ 0 < \rho(y_2, y_0) < \delta$*

$$\sup_X |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Очевидно, доказать самостоятельно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Leftarrow$ Возьмем $y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N\ \forall n > N\ \rho(y_n, y) < \delta$, где δ из условия Коши, значит $\forall n,\ m > N\ 0 < \rho(y_n, y_0) < \delta,\ 0 < \rho(y_m, y_0) < \delta$, следовательно имеет место оценка

$$\sup_X |f(x, y_n) - f(x, y_m)| < \varepsilon$$

Следовательно $f(x, y_n)$ удовлетворяет условию Коши для последовательностей функций, значит $f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$

Пусть $z_n \to y_0,\ z_n \neq 0$, рассматриваем последовательность $z_1,\ y_1, ...z_n,\ y_n... \to y_0$, следовательно $f(x, z_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$

□

Задача 18. Переформулировать арифметические свойства на общее определение равномерной сходимости с определения равномерно сходящейся последовательности.

Теорема 38. *Пусть X - метрическое пространство и x_0 его предельная точка, Y - метрическое пространство и y_0 его предельная точка, $f(x, y) : X \times Y \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $\phi : X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Предположим, что $\forall y \neq y_0\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = h(y)$ и $f(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$. Тогда*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \phi(x) = \lim_{y\to y_0} h(y). \tag{20.3}$$

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) \tag{20.4}$$

Доказательство. Пусть $y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0$, тогда $f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x)$.

$$\lim_{x\to x_0} \phi(x) = \lim_{n\to\infty} h(y_n)$$

Для $h(y)$ выполнено определение Гейне. □

Следствие. *Пусть X, Y - метрические пространства, $x_0 \in X$, y_0 - предельная точка в Y, $f(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$. Если $\forall y \neq y_0\ f(x, y)$ непререрывна в точке x_0, то ϕ непрерывна в точке x_0.*

Теорема 39. *Пусть $X = (\alpha, \beta)$, Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка Y. Предположим, что $f(x, y)$ дифференцируем по x на (α, β), $f(x_0, y)$ имеет предел при $y \to y_0$ для некоторого $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} h(x)$. Тогда*

$f(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, ϕ дифференцируема на X и

$$\phi' = h.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Пусть $y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0$, тогда применяем теорему для последовательности $f(x, y_n)$, значит $f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, $\phi' = h$. Это верно так как это будет одна и та же функция и производная совпадает. □

Теорема 40. *Пусть $X = [\alpha, \beta]$, Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка. Если $\forall y \neq y_0$ $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\alpha, \beta]$ относительно x и $f(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, то ϕ - интегрируема по Риману на $[\alpha, \beta]$ и*

$$\lim_{y\to y_0} \int_\alpha^\beta f(x, y)dx = \int_\alpha^\beta \phi(x)dx \tag{20.5}$$

Теорема 41 (Арцела)**.** *Пусть $X = [\alpha, \beta]$, Y - метрическое пространство, y_0 - предельная точка, $f(x, y)$ по x интегрируема на $[\alpha, \beta]$, ϕ интегрируема на $[\alpha, \beta]$. Если $\forall x \in [\alpha, \beta],\ f(x, y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \phi(x)$ и $|f(x, y)| \leqslant C$, то*

$$\lim_{y\to y_0} \int_\alpha^\beta f(x, y)dx = \int_\alpha^\beta \phi(x)dx$$

Пример 33. Пусть $f \in C([a, b] \times [c, d])$.

Утверждение 41. $\forall y_0 \in [c, d]$

$$f(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x, y_0)$$

Доказательство. f - непрерывна на компакте, по теореме Кантора f - равномерно непрерывна на нем, значит $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :\ \sqrt{|((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Берем $x_1 = x_2 = x,\ y_1 = y,\ y_2 = y_0$, получаем

$$|y - y_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon\ \forall x \in [a, b]$$

□

Утверждение 42. *Если $f(x, y)$ на $[a, b] \times [c, d]$ непрерывна по каждой переменной в отдельности и $\forall y_0 \in [c, d]$ $f(x, y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x, y_0)$, то $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных на этом прямоугольнике.*

Доказательство. Пусть $(x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)| + |f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)|$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ $\exists\delta$: $|y_2 - y_1| < \delta$ (чтобы δ не зависела от x_2 нам нужна равномерная сходимость $f(x,y) \underset{y\to y_1}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x,y_1)$)

$$|f(x_2,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

$|x_1 - x_2| < \delta$ (тут y_1 фиксировано, значит просто пользуемся непрерывностью по x)

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1)| < \varepsilon$$

$\square$

Лекция 21

Равномерная сходимость несобственного интеграла

Пусть X - некотрое непустое множество, $f : X \times [a, b) \to \mathbb{R}$, $\forall c \in [a, b)$ $f(x, t)$ интегрируема по t на $[a, c]$.

Если $\forall x \in X \ \exists \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x, t)dt$, то такой предел называется *несобственным интегралом (с параметром x)*, обозначается

$$\int\limits_a^b f(x, t)dt$$

и говорят, что этот несобственный интеграл с параметром *сходится поточечно на X*.

Пусть

$$F(x, c) = \int\limits_a^c f(x, t)dt \tag{21.1}$$

Определение 12. Если $F(x, c) \underset{c \to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, то

$$\phi(x) = \int\limits_a^b f(x, t)dt \tag{21.2}$$

и говорят, что *несобственный интеграл сходится равномерно на X*.

Можно переформулировать. Если уже известно, $\forall x \ \exists \int\limits_a^b f(x, t)dt$, то равномерная сходимость этого интеграла равносильна

$$\sup_x \left| \int\limits_a^b f(x, t)dt \right| \xrightarrow[c \to b-]{} 0 \tag{21.3}$$

или, что эквивалентно

$$\int\limits_c^b f(x, t)dt \underset{c \to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0 \tag{21.4}$$

Действительно

$$F(x, c) - \phi(x) = \int\limits_a^c f(x, t)dt - \int\limits_a^b f(x, t)dt = -\int\limits_c^b f(x, t)dt$$

$$\sup_X |F(x, c) - \phi(x)| \xrightarrow[c \to b-]{} 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sup_X |F(x,c) - \phi(x)| = \sup_X \left| \int_c^b f(x,t)dt \right|$$

Теорема 42 (критерий Коши)**.** *$F(x,c)$ равномерно сходится на X при $c \to b-$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall c_1,\ c_2 \in (b-\delta, b)$ $(b = +\infty,\ c_1,\ c_2 > A)$*

$$\sup_X |F(x,c_1) - F(x,c_2)| < \varepsilon$$

То есть $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0:\ \forall c_1,\ c_2 \in (b-\delta, \delta)$

$$\sup_X \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt \right| < \varepsilon$$

Следствие. *Пусть $X \subset Y$ - метрическое пространство, x_0 - предельная точка $x \notin X$ и $\forall c \in [a,b)$ $|f(x,t)| \leqslant C$, $f(x_0,t)$ интегрируема на $[a,c]$ и $f(x,t) \to f(x_0,t)$ при $x \to x_0$. Если $\int\limits_a^b f(x_0,t)dt$ не сходится, то $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ не сходится равномерно на X.*

Доказательство. Предположим, что $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ сходится на X равномерно, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall c_1,\ c_2 \in (b-\delta, b)$

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt \right| < \varepsilon\ \forall x \in X$$

Устремляя $x \to x_0$ выводим, что

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x_0,t)dt \right| \leqslant \varepsilon$$

значит $\int\limits_a^b f(x_0,t)dt$ сходится, получили противоречие. □

Теорема 43 (признак Вейерштрасса)**.** *Пусть $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ и $\int\limits_a^b g(t)dt$ сходится. Тогда $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ сходится равномерно на X.*

Доказательство. Применяем критерий Коши и получаем

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x,t)dt \right| \leqslant \int_{c_1}^{c_2} g(t)dt < \varepsilon$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 11. Признак Вейерштрасса можно обобщить следующим образом: $f(x,t) \leqslant g(x,t)$ и $\int\limits_a^b g(x,t)dt$ сходится равномерно. Тогда $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ сходится равномерно.

Пример 34. Исследовать на сходимость

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin(x^2+tx+t^2)}{x^2+t^2}dt$$

Этот интеграл будет сходиться, так как

$$\left|\frac{\sin(x^2+tx+t^2)}{x^2+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Равномерная сходимость интеграла от произведения

Рассматриваем

$$\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$$

Утверждение 43. *Пусть* $\int\limits_a^b |f(x,t)|dt$ *- сходится равномерно и* $|g(x,t)| \leqslant C\ \forall x\ \forall t$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ *сходится равномерно.*

Доказательство. Применяем признак Вейерштрасса

$$|f \cdot g| \leqslant C|f|$$

□

Утверждение 44. *Пусть* $\int\limits_a^c |f(x,t)|dt \leqslant M$ *- равномерно ограничен и* $g(x,t) \underset{t\to b-}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ *сходится равномерно.*

Доказательство. Проверяем критерий Коши.

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x,t)g(x,t)|dt \leqslant \sup_{t\in[c_1,c_2]} |g(x,t)| \cdot M$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall c_1,\ c_2 \in (b-\delta, b)\ \forall x$

$$|g(x,t)| < \varepsilon$$

Получаем, что когда $c_1,\ c_2 \in (b-\delta, b)$

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} |f(x,t)g(x,t)|dt \leqslant M\varepsilon$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Интегрирование по частям.
Пусть f непрерывна по t на $[a,b]$, g непрерывно дифференцируема на $[a,b]$

$$\int\limits_a^c f(x,t)g(x,t)dt = \int\limits_a^c \left(\int\limits_a^t f(x,s)ds\right)' g(x,t)dt =$$

$$= \int\limits_a^c \left(\int\limits_a^t f(x,s)ds - h(x)\right)' g(x,t)dt = \left(\int\limits_a^c f(x,t)dt - h(x)\right) g(x,c) + h(x)g(x,a) -$$

$$- \int\limits_a^c \left(\int\limits_a^t f(x,s)ds - h(x)\right) g_t'(x,t)dt$$

Теорема 44. *Если* $\left(\int\limits_a^c f(x,t)dt - h(x)\right)$ *сходится равномерно при* $c \to b-$ *на* X, *то интегралы* $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ *и* $\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^t f(x,s)ds - h(x)\right) g'(x,t)dt$ *или оба равномерно сходятся или оба не сходятся равномерно.*

Доказательство. Очевидно. □

Следствие(признаки Абеля-Дирихле).

1) *Признак Дирихле. Пусть* $\int\limits_a^c f(x,t)dt$ *- равномерно ограничен,*

   $g_t'(x,t) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *и* $g(x,t) \underset{t\to b-}{\rightrightarrows} 0$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ *сходится равномерно.*

2) *Признак Абеля. Пусть* $\int\limits_a^b f(x,t)dt$ *сходится равномерно,* $g_t' \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $g(x,t)$ *равномерно ограничена. Тогда* $\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ *сходится равномерно.*

Доказательство.

1) Проверяем теорему 44 с $h \equiv 0$.

$$g(x,c)\int\limits_a^c f(x,t)dt \rightrightarrows 0$$

   так как $g(x,c) \rightrightarrows 0$ и $\int\limits_a^c f(x,t)$ равномерно ограничена. Значит равномерная сходимость следующих интегралов равносильна

$$\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt \Leftrightarrow \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^t f(x,s)ds\right) g'(x,t)dt$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\int\limits_a^t f(x,s)ds$ равномерно ограничен. Рассматриваем

$$\int\limits_c^b |g^{'}(x,t)|dt = \left|\int\limits_c^b g^{'}(x,t)dt\right|$$

$$g(x,b) = \lim_{t\to b} g(x,t)$$

значит

$$\int\limits_c^b |g^{'}(x,t)|dt = |g(x,c)|$$

Тогда

$$\sup_X \int\limits_c^b |g^{'}(x,t)|dt = \sup_X |g(x,c)| \to 0$$

значит $\int\limits_a^b |g^{'}(x,t)|dt$ сходится равномерно, значит требуемое утверждения следует из утверждения 43.

2) Пусть

$$h(x) = \int\limits_a^b f(x,t)dt$$

$$g(x,c)\left(\int\limits_a^c f(x,t)dt - h(x)\right) \rightrightarrows 0$$

так как $g(x,c)$ равномерно ограничена, $\int\limits_a^c f(x,t)dt - h(x) \rightrightarrows 0$. Значит равномерная сходимость следующих интегралов равносильна

$$\int\limits_a^b f(x,t)g(x,t)dt \;\Leftrightarrow\; \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^t f(x,s)ds\right) g^{'}(x,t)dt$$

$$\int\limits_a^c |g^{'}(x,t)|dt = \left|\int\limits_a^c g^{'}(x,t)dt\right| = |g(x,c) - g(x,a)|$$

получили, что этот интеграл равномерно ограничен. Получили, что требуемое нам следует из утверждения 44.

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 35.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt,\ x > 0$$

Утверждается, что он сходится равномерно. Действительно, он сходится равномерно по признаку Абеля.

Пример 36.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt,\ x > 0$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{xt} d(xt) \overset{u=xt}{=} \int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

Теперь интеграл не зависит от параметра, но отсюда не следует, что интеграл сходится равномерно, так как не безопасно делать замены, зависящие от параметра, что продемонстрирует следующий пример.

Пример 37.

$$\int\limits_0^\infty xe^{-xt} dt,\ x > 0$$

$$\int\limits_0^\infty xe^{-xt} dt \overset{u=xt}{=} \int\limits_0^\infty e^{-u} du$$

Теперь попробуем исследовать честно.

$$\int\limits_c^\infty xe^{-xt} dt \overset{u=xt}{=} \int\limits_{xc}^\infty e^{-u} du$$

Если взять $x = \frac{1}{c}$, получим

$$\int\limits_1^\infty e^{-u} du = \frac{1}{e}$$

Это не приближается к 0, то есть равномерной сзходимости нет.

Задача 19. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 22

Свойства собственных интегралов с параметром

Пусть $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Пусть $\alpha : [c,d] \to [a,b]$, $\beta : [c,d] \to [a,b]$.
Интеграл с параметром $y \in [c,d]$

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{22.1}$$

Непрерывность

Теорема 45. *Если* $f \in C([a,b] \times [c,d])$, $\alpha,\ \beta \in C[c,d]$. *Тогда* F *непрерывна на* $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

$$F(y) = \Phi(\beta(y),y) - \Phi(\alpha(y),y)$$

Теперь достаточно будет показать непрерывность Φ по совокупности переменных (u,y).

Зафиксируем y, тогда получим функцию $u \mapsto \int\limits_a^u f(x,y)dx$, про которую уже доказано, что она непрерывна.

Теперь зафиксируем u, получаем функцию $y \mapsto \int\limits_a^u f(x,y)dx$. Возьмем $y_0 \in [c,d]$ и рассмотрим

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^u f(x,y)dx \overset{?}{=} \int\limits_a^u f(x,y_0)$$

$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$ следовательно равенство верно и функцию непрерывна.

$f \in C([a,b] \times [c,d])$, следовательно $|f| \leqslant M$.

$$|\Phi(u,y) - \Phi(v,y)| = \left| \int\limits_u^v f(x,y)dx \right| \leqslant M|u-v|$$

следовательно $\Phi(u,y) \underset{u\to u_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \Phi(u_0,y)$, значит $\Phi(u,y)$ непрерывна. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференцируемость

Теорема 46. *Пусть f дифференцируема по y и f, $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$. Пусть $\alpha,\ \beta \in C^1[c,d]$. Тогда $f \in C^1[c,d]$ и*

$$F'(y) = f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y) + \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \tag{22.2}$$

Доказательство.

$$F(y) = \Phi(\beta(y),y) - \Phi(\alpha(y),y)$$

$$\Phi(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

Предположим, что мы доказали, что Φ дифференцируема

$$F'(y) = \frac{\partial\Phi}{\partial u}(\beta,y)\beta'(y) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\beta,y)\cdot 1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u}(\alpha,y)\alpha'(y) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot 1 =$$

$$= f(\beta(y),y)\beta(y) + \int\limits_a^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - f(\alpha(y),y)\alpha'(y) - \int\limits_a^{\alpha(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx =$$

$$= f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y) + \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Теперь обоснуем.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,y) = \frac{\partial}{\partial u}\int\limits_a^u f(x,y)dx = f(u,y) \in C$$

это дифференцирование по переменному верхнему пределу.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(u,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Phi(u,y+\Delta y) - \Phi(u,y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\int\limits_a^u \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}dx \overset{?}{=} \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \overset{\text{т-ма Лагранжа}}{=}$$

$$\overset{\text{т-ма Лагранжа}}{=} \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \xrightarrow[\Delta y\to 0]{} 0,\ t\in[y,y+\Delta y]$$

Так как по условию $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$, значит $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$ из этого супремум стремится к 0. Значит равенство доказано (гораздо проще по теореме Арцела).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Значит

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(u,y) = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

По доказательству предыдущей теоремы это непрерывная функция по совокупности аргументов. Получаем, что $\Phi \in C^1$, тогда исходный интеграл непрерывно дифференцируем как композиция непрерывно дифференцируемых. □

Интегрируемость

Теорема 47. *Пусть* $f \in C([a,b] \times [c,d])$. *Тогда* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *интегрируема на* $[c,d]$ *и*

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b f(x,y)dy \right) dx \tag{22.3}$$

Доказательство. Существование интегралов следует из непрерывности функций.
Рассмотрим

$$\phi(t) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^t f(x,y)dx \right) dy - \int\limits_a^t \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$\phi^{'}(t) = \int\limits_c^d f(t,y)dy - \int\limits_c^d f(t,y)dy = 0$$

$$\phi(a) = 0 \ \Rightarrow \ \phi \equiv 0$$

□

Задача 20. Пусть $f \in C([a,b] \times [a,b])$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^x f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_y^b f(x,y)dx \right) dy$$

Решение неоднородных дифференциальных уравнений

Будем искать решение уравнений вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f, \ a_k \in \mathbb{R} \tag{22.4}$$

Утверждение 45. *Пусть* u *- решение следующей задачи Коши*

$$\begin{cases} u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_0 u = 0 \\ u(0) = u^{'}(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0 \\ u^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда

$$y(x) = \int\limits_0^x u(x-t)f(t)dt \tag{22.5}$$

будет решением уравнения (22.4).

Доказательство.

$$y(x) = \int\limits_0^x u(x-t)f(t)dt$$

$$y^{'}(x) = u(x-x)f(x)\cdot(x)^{'} - u(x-0)f(0)\cdot(0)^{'} + \int\limits_0^x u^{'}(x-t)f(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^x u^{'}(x-t)f(t)dt$$

$$y^{''}(x) = u^{'}(x-x)f(x)\cdot(x)^{'} - u^{'}(x-0)f(0)\cdot(0)^{'} + \int\limits_0^x u^{''}(x-t)f(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^x u^{''}(x-t)f(t)dt$$

$$...$$

$$y^{(n-1)}(x) = u^{(n-2)}(x-x)f(x)\cdot(x)^{'} - u^{(n-2)}(x-0)f(0)\cdot(0)^{'} + \int\limits_0^x u^{(n-1)}(x-t)f(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^x u^{(n-1)}(x-t)f(t)dt$$

$$y^{(n)}(x) = u^{(n-1)}(x-x)f(x)\cdot(x)^{'} - u^{(n-1)}(x-0)f(0)\cdot(0)^{'} + \int\limits_0^x u^{(n)}(x-t)f(t)dt =$$

$$= f(x) + \int\limits_0^x u^{(n)}(x-t)f(t)dt$$

Домножаем на соответствующие коэффициенты и складываем, получаем

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(x) + \int\limits_0^x \left(u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_0 u\right) f(t)dt = f(x)$$

□

Пример 38.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1)
$$y'' + y = f$$

Решаем задачу Коши
$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$
$$u(x) = \sin x$$
$$y(x) = \int\limits_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

2)
$$y^{(n)} = f$$

Если бы решали обычным способом, нам было бы необходимо брать интеграл n раз.

Решаем задачу Коши

$$\begin{cases} u^{(n)} = 0 \\ u(0) = u'(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0 \\ u^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$
$$u(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

После появления Г-функции перестает быть важным, что n - целое.
При $\alpha > 0$
$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \tag{22.6}$$
называется *оператором дробного интегрирования Римана-Лиувилля.*

Задача 21. Доказать, что
$$J^\alpha J^\beta f = I^{\alpha+\beta} f$$

Задача 22. Доказать, что при $n \in \mathbb{N}$

а)
$$\frac{d^n}{dx^n} J^n f = f$$

б) $m > n$
$$\frac{d^n}{dx^n} J^m f = J^{m-n} f$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При $0 < \alpha < 1$

$$D^\alpha f = D^1 \left(J^{1-\alpha} f \right) \tag{22.7}$$

называется *оператором дробного дифференцирования Римана - Лиувилля.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 23

Свойства несобственных интегралов с параметром

Пусть у нас есть $f(x,y),\ x \in [a,b),\ y \in Y$. Рассмотрим

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{23.1}$$

$F(y)$ называется несобствееным интегралом, зависящим от параметра.

Непрерывность

Теорема 48. *Пусть Y - подмножество метрического пространства, y_0 - предельная точка, предположим, что $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится на Y равномерно и $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,u]}{\rightrightarrows}} \phi(x)\ \forall u \in [a,b)$. Тогда ϕ интегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$ и*

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx \tag{23.2}$$

Доказательство. ϕ интегрируема на $[a,u]$, из равномерной сходимости следует, что

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^u f(x,y)dx = \int\limits_a^u \phi(x)dx$$

$$\lim_{u\to b} \int\limits_a^u \phi(x)dx = \lim_{u\to b} \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^u f(x,y)dx \overset{?}{=} \lim_{y\to y_0} \lim_{u\to b} \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

Рассмотрим

$$F(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

1) $F(u,y) \underset{u\to b}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx$

2) $\forall u\ \exists \lim\limits_{y\to y_0} F(u,y) = \int\limits_a^u \phi(x)dx$

Следовательно

$$\exists \lim_{u\to b} \int\limits_a^u \phi(x)dx = \lim_{y\to y_0} \lim_{u\to b} \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

значит равенство доказано. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 49. *Пусть Y - подмножество метрического пространства, y_0 - предельная точка, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно. Пусть ϕ интегрируема по Риману на $[a,u]$, $\forall u \in [a,b)$ и $|f(x,y)| \leqslant C(u)$, $\forall x \in [a,u]$, $y \in Y$ и $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \phi(x)$ $\forall x \in [a,b)$. Тогда ϕ интегрируема на $[a,b)$ и*

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx$$

Доказательство. По теореме Арцела

$$\int\limits_a^u f(x,y)dx \xrightarrow[y\to y_0]{} \int\limits_a^u \phi(x)dx$$

далее как в предыдущей теореме. □

Замечание 12. Пусть $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \phi(x)$, $\phi(x)$ интегрируема по Риману на $[a,u]$, $\forall u \in [a,b)$ и $|f(x,y)| \leqslant \Phi(x)$, где $\int\limits_a^b \Phi(x)dx < \infty$. Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx$$

Почему это частный случай предыдущей теоремы?

- интеграл сходится равномерно по теореме Вейерштрасса
- ограниченность $f(x,y)$ выполнена, так как она ограничена $\Phi(x)$, которая интегрируема, а значит ограничена.

Пример 39.

$$\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx,\ y > 0$$

этот интеграл не сходится равномерно, поэтому не можем переходить к пределу при $y \to 0$.

Следствие. *Пусть $f \in C([a,b] \times [c,d])$ и $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ является непрерывной функцией на $[c,d]$.*

Доказательство. Из теоремы 48, так как $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,u]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$ из непрерывности. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференцируемость

Теорема 50. *Пусть $f \in C([a,b] \times [c,d])$, дифференцируема по y и $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b] \times [c,d])$. Предположим, что*

1) $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ *сходится равномерно,*

2) $\int\limits_a^b f(x,y_0)dx$ *сходится в некоторой точке $y_0 \in [c,d]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ и является непрерывно дифференцируемой функцией, причем*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \tag{23.3}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

$a \leqslant u < b$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(u,y) = \int\limits_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

1) $\frac{\partial F}{\partial y}(u,y) \underset{u\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

2) $\exists y_0 \in [c,d] : F(u,y_0)$ сходится при $u \to b$.

Значит

$$F(u,y) \underset{u\to b}{\rightrightarrows} \widetilde{F}(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Значит $\widetilde{F}(y)$ дифференцируема и

$$\widetilde{F}'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

□

Пример 40. Интеграл Дирихле. Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим

$$F(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx,\ y \geqslant 0$$

Интеграл сходится равномерно по признакку Абеля.

1) Так как подынтегральная функция непрерывна по y и интеграл сходится равномерно, то F непрерывная функция.

2) Пусть $y > 0$.

$$F^{'}(y) = \int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy}$$

равномерной сходимости на всем промежутке нет, но нам достаточно сходимости на отрезке $[c, d] \ni y_0$, там

$$|\sin x| \cdot |e^{-xy}| \leqslant e^{-cx}$$

значит интеграл сходится равномерно на $[c, d]$.

$$F^{'}(y) = \int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy} dx$$

Чтобы найти первообразную решим следующее уравнение

$$u^{'} = e^{-xy} \sin x$$

$$u = e^{-xy}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

$$u^{'} = -ye^{-xy}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{-xy}(C_1 \cos x - C_2 \sin x)$$

$$\begin{cases} -yC_1 - C_2 = 1 \\ -yC_2 + C_1 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = yC_2$$

$$-y^2 C_2 - C_2 = 1$$

$$C_2 = -\frac{1}{1+y^2}$$

$$C_1 = -\frac{y}{1+y^2}$$

$$F^{'}(y) = -e^{-xy}\left(-\frac{y}{1+y^2}\sin x - \frac{1}{1+y^2}\cos x\right)\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{1+y^2}$$

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$$

Чтобы вычислить константу устремим y к бесконечности. Рассмотрим

$$\int\limits_0^u \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\sin x}{x}e^{-xy} \xrightarrow[y\to\infty]{} \begin{cases} 0, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases} = g(x)$$

По теореме Арцела можем перейти к пределу

$$\int\limits_0^u \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx \to \int\limits_0^u g(x)dx = 0$$

$$-\operatorname{arctg} y \to -\frac{\pi}{2}$$

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C$$

$$C = \frac{\pi}{2}$$

Получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Интегрируемость

Теорема 51. *Пусть* $f \in C([a,b]\times[c,d])$, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$. *Тогда* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *интегрируема на* $[c,d]$ *и*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{23.4}$$

Доказательство. Из-за непрерывности вопроса интегрируемости на конечном отрезке не возникает.

Пусть $a \leqslant u < b$, уже знаем, что

$$\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx\right)dy$$

Обозначим

$$G(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

$$G(u,y) \underset{u\to b}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно

$$\lim_{u\to b}\int\limits_c^d G(u,y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

□

Теорема 52. *Пусть* $f \in ([a,b]\times[c,d])$, $y \mapsto \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *и* $y \mapsto \int\limits_a^b |f(x,y)|dx$ *интегрируемы на* $[c,d]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Доказательство. $a \leqslant u < b$

$$\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx\right)dy$$

$\forall y$

$$\exists \lim_{u\to b}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Из интегрируемости можем оценить

$$\left|\int\limits_a^u f(x,y)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y)|dx \leqslant C$$

Значит по теореме Арцела

$$\lim_{u\to b}\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

□

Замечание 13. Если $f \leqslant 0$, то все совсем просто и условие про модуль можно убрать.

Пример 41.

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Вычислим

$$\int\limits_A^\infty \left(\int\limits_A^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\int\limits_A^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_A^\infty = \frac{A}{A^2+y^2} < \frac{1}{A}$$

значит сходимость равномерная.

$$\int\limits_A^\infty \frac{A}{A^2+y^2}dy = \operatorname{arctg}\frac{y}{A}\bigg|_A^\infty = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int\limits_A^\infty \left(\int\limits_A^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = -\frac{\pi}{4}$$

Поэтому получаем, что предыдущие утверждения на два несобственных интеграл не действуют.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 24

Свойства несобственных интегралов с параметром

Интегрируемость

Теорема 53. *Пусть* $f \in C([a,b) \times [c,d))$

1) $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,v]$, $\forall c < v < d$,

2) $\int\limits_c^d f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[a,u]$, $\forall a < u < b$,

3) $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b |f(x,y)|dx\right) dy$ *сходится.*

Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx \tag{24.1}$$

Доказательство. $a < u < b$ по теореме 51

$$\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx\right) dy \tag{$*$}$$

Будем устремлять $u \to b$, но мы пока не знаем можем ли мы поменять предел и интеграл местами. Обозначим

$$F(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

Что мы знаем про $F(u,y)$?

а)

$$|F(u,y)| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y)|dx = \Phi(y)$$

$$\int\limits_c^d \Phi(y)dy < \infty$$

значит по признаку Вейерштрасса $\int\limits_c^d F(u,y)dy$ сходится равномерно по $u \in [a,b)$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

б) $\forall v \in [c,d)\ F(u,y) \underset{u\to b}{\overset{[c,v]}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^b f(x,y)dx$

Значит по теореме 48

$$\lim_{u\to b} \int\limits_c^d F(u,y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

то есть в $(*)$ можно положить $u = b$. □

Теорема 54. *Пусть* $f \in C\left([a,b) \times [c,d)\right)$ *и*

1) $y \mapsto \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *и* $y \mapsto \int\limits_a^b |f(x,y)|dx$ *- интегрируемы на* $[c,v]\ \forall c < v < d$,

2) $x \mapsto \int\limits_c^d f(x,y)dy$ *и* $x \mapsto \int\limits_c^d |f(x,y)|dy$ *- интегрируемы на* $[a,u]\ \forall a < u < b$,

3) $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b |f(x,y)|dx \right) dy$ *сходится Тогда*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Доказательство. $a < u < b$ по теореме 52

$$\int\limits_a^u \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x,y)dx \right) dx$$

Будем устремлять $u \to b$. Обозначим

$$F(u,y) = \int\limits_a^u f(x,y)dx$$

Что мы знаем про $F(u,y)$?

а)

$$|F(u,y)| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y)|dx = \Phi(y)$$

$$\int\limits_c^d \Phi(y)dy < \infty$$

б) $\forall y\ F(u,y) \xrightarrow[u\to b]{} \int\limits_a^b f(x,y)dx$ - интегрируема на $[c,v]$ как функция от $y\ \forall c < v < d$

Значит по теореме 49 можем менять местами предел и интеграл, доказательство завершается аналогично предыдущему. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дробное интегрирование и дробное дифференцирование

Рассматривали уравнение

$$y^{(n)} = f$$

и его решение будет

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

Считаем, что $f \in C[0,1]$

$$(n-1)! = \Gamma(n)$$

Мы дали определение, что

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,\ \alpha > 0 \tag{24.2}$$

это *оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля.* Считаем, что

$$J^0 f(x) = f(x)$$

Утверждение 46.

$$J^\alpha\left(J^\beta f\right) = J^{\alpha+\beta} f\ \forall\alpha,\ \beta > 0 \tag{24.3}$$

Доказательство.

$$J^\alpha\left(J^\beta f\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right)dt$$

$$J^{\alpha+\beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt$$

Сначала для простоты считаем, что $\alpha \geqslant 1,\ \beta \geqslant 1$, тогда эти интегралы являются собственными. Было упражнение

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^x f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_y^b f(x,y)dx\right)dy$$

применим это равенство

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\left(\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} f(s)dt\right)ds =$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x f(s) \left(\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt \right) ds$$

Сделаем во втором интеграле замену $u = \frac{x-t}{x-s}$, получаем

$$\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt = (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int\limits_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du = (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x f(s) \left(\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt \right) ds = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int\limits_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds = J^{\alpha+\beta} f$$

Теперь надо доказать при $\alpha > 0,\ \beta > 0$, введем дополнительный параметр, чтобы у интегралов больше не было особенностей

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x (x-t+\varepsilon)^{\alpha-1} \left(\int\limits_0^t (t-s+\varepsilon)^{\beta-1} f(s) ds \right) dt$$

Теперь можем менять интегралы местами и устремлять $\varepsilon \to 0$.

Задача 23. Обосновать предельный переход.

□

Пусть $\alpha > 0$, $n = [\alpha]$

$$D^\alpha f(x) = D^n \left(J^{n-\alpha} f(x) \right) \tag{24.4}$$

это *оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля*. При целых α это обычная производная.

$$D^\alpha = D^m J^{m-\alpha} \tag{24.5}$$

так как

$$D^m J^m f(x) = f(x)$$
$$J^{m-\alpha} = J^{m-n} J^{n-\alpha}$$
$$D^m = D^n D^{m-n}$$

Пусть $f \in C^1[0,1]$, $0 < \alpha < 1$

$$D^\alpha f(x) = D^1 J^{1-\alpha} f = \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \overset{x-t=u}{=}$$

$$\overset{x-t=u}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \cdot \int\limits_0^x u^{-\alpha} f(x-u) du =$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^{x_1} u^{-\alpha} f(x-u)du + \int\limits_{x_1}^{x} u^{-\alpha} f(x-u)du\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^{x_1} u^{-\alpha} f^{'}(x-u)du + \frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \int\limits_{x_1}^{x} u^{-\alpha} f^{'}(x-u)du\right) =$$

$$= \frac{f(0)}{x^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{x} u^{-\alpha} f^{'}(x-u)du$$

При дифференцировании по параметру можно делать замену, зависящую от параметра, в отличии от случая исследования на сходимость.

Возьмем $f(x) = x,\ \alpha = \frac{1}{2}$

$$D^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{x} u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2\sqrt{x}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$$

Задача 24. Найти дробную производную x^m и e^x.

Вообще-то неверно, что

$$D^{\alpha}(D^{\beta}) \neq D^{\alpha+\beta}$$
$$D^{\alpha}D^{\beta} \neq D^{\beta}D^{\alpha}$$

Задача 25. Используя x^{β} подобрать примеры.

Но иногда эти равенства все-таки выполняются.

Задача 26. Если $f = J^{\alpha+\beta}\phi$, то

$$D^{\alpha}(D^{\beta}f) = D^{\alpha+\beta}f$$

Пусть $0 < \alpha < 1$, рассмотрим

$$D^{\alpha}y = F(x,y)$$

Сначала рассмотрим

$$D^{\alpha}y = f(x)$$
$$J^{\alpha}D^{\alpha}y = J^{\alpha}D^{1}J^{1-\alpha}y$$

Обозначим

$$g = J^{1-\alpha}y$$

$$J^{\alpha}D^{1}g = \frac{1}{\Gamma}\int\limits_0^{x}(x-t)^{\alpha-1}g^{'}(t)dt \overset{x-t=u}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{x} u^{\alpha-1}g^{'}(x-u)du = D^{1}J^{\alpha}g - \frac{g(0)}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}$$

$$J^{\alpha}f = J^{\alpha}D^{\alpha}y = J^{\alpha}D^{1}J^{1-\alpha}y =$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= D^1 J^\alpha J^{1-\alpha} y - \frac{J^{1-\alpha} y(0)}{\Gamma(\alpha) x^{1-\alpha}}$$

Получаем

$$D^\alpha u = f \;\Leftrightarrow\; y = \frac{J^{1-\alpha} y(0)}{\Gamma(\alpha) x^{1-\alpha}} + J^\alpha f$$

То есть задача Коши в дробных производных будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} D^\alpha y = F(x, y) \\ J^{1-\alpha} y(0) = b \end{cases}$$

а ее решением будет

$$y = \frac{b}{\Gamma(\alpha) x^{1-\alpha}} + J^\alpha F(x, y)$$

Задача 27. Решить следующие уравнения

$$y^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$y^{\frac{1}{2}} = x$$

$$y^{\frac{1}{2}} = y \text{ (попробовать найти в виде степенного ряда)}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 25

Дробное интегрирование и дробное дифференцирование

Задача Абеля

Рассмотрим функцию $\phi(h)$, хотим найти форму кривой со свойством, что если отпустить материальную точку с высоты h так, чтобы она спускалась под действием силы тяжести без трения, то она бы спускалась в начало координат за время $T = \phi(h)$. Найти вид кривой.

Возьмем материальную точку массы m на высоте h, пусть в какой-то момент времени она оказалась на высоте y, по закону сохранения энергии, если в этот момент времени ее скорость v, то

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-y)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

Пусть наша горка задается уравнением $x = g(y)$, тогда

$$v^2 = (|g^{'}(y)|^2 + 1)\dot{y}$$

Обозначим

$$u^2(y) = |g^{'}(y)|^2 + 1$$

Подставим в закон сохранения энергии

$$-u(y)\dot{y} = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$\frac{-u(y)\dot{y}}{\sqrt{2g(h-y)}} = 1$$

$$y(0) = h,\ y(T) = 0$$

Интегрируем, делаем замену и получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^h \frac{u(y)}{\sqrt{h-y}}dy = T = \phi(h)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^h \frac{u(y)}{\sqrt{h-y}}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2g}}J^{\frac{1}{2}}u = \phi$$

$$D^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}u = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}D^{\frac{1}{2}}\phi$$

$$u = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}D^{\frac{1}{2}}\phi = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^y \frac{\phi(t)}{\sqrt{y-t}}dt$$

$$g^{'}(y) = \sqrt{u^2(y) - 1}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 28. Разобрать случай $\phi \equiv 1$.

$\phi \equiv 1$.

$$\int\limits_0^y \frac{dt}{\sqrt{y-t}} = 2\sqrt{y}$$

$$u(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$g^{'}(y) = \sqrt{\frac{a}{y} - 1}$$

Задача 29. Доказать, что

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

на $x,\ y > 0$ непрерывно дифференцируемы.

Свертка

Сначала посмотрим, откуда это берется. Пусть у нас есть прибор A, выходной сигнал это $f(t)$, на выходе тоже получается функция $Af(t)$, при этом этот прибор обладает следующими свойствами

1) Линейность.

$$A(f+g) = Af + Ag$$
$$A(\alpha f) = \alpha Af$$

2) Свойство прибора не зависит от времени.

$$f(t+T) \to (Af)(t+T)$$

То есть если обозначить S_T оператор сдвига на T, то получаем

$$AS_T = S_TA$$

Какой прибор с точки зрения этим свойствам удовлетворяет? Прибор, описывающий решение дифференциальных уравнений.

$$A:\ Ly = f$$

$$f \to y$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия:

$$y(0) = y^{'}(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$$

Линейность очевидна

$$f_1 + f_2 \to y_1 + y_2$$

$$\alpha f \to \alpha y$$

Со временем решение не изменяется так как

$$f(t+T) \to y(t+T)$$

Будем подавать на вход функции ϕ_n, изображенные на Рис. 12.

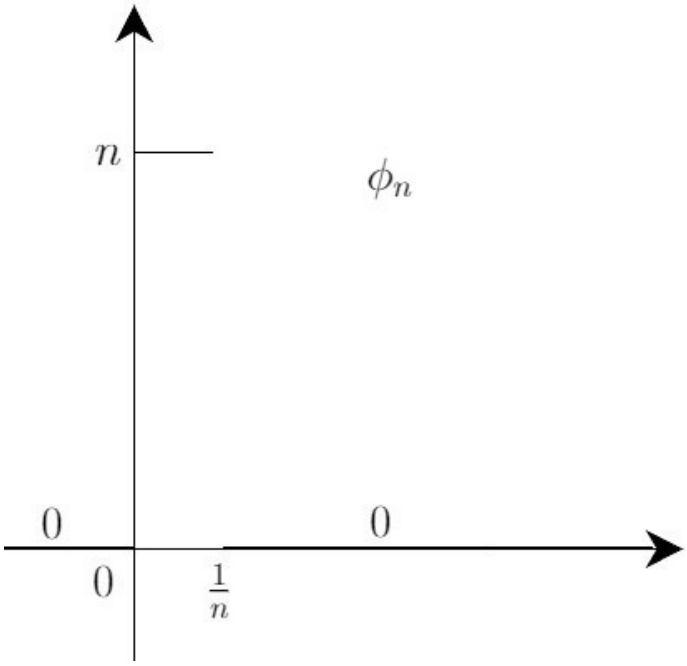

Рис. 12.

Пусть следующий предел существует

$$\lim_{n\to\infty} A\phi_n(t) = E(t) \tag{25.1}$$

эта функция называется *аппаратной функцией.*

Оказывается, что это единственное, что надо знать про устройство A, чтобы объяснить как оно воздействует на любой входящий сигнал.

Возьмем функцию f, изображенную на Рис. 13., она непрерывна и вне некоторого отрезка равна нулю. Пусть это отрезок $[t_0, t_n]$, приблизим функцию суммой, разобьем отрезок с шагом $\frac{1}{n}$ и на каждом из отрезков возьмем значение в левом конце.

$$f \sim \sum_i \frac{1}{n} f(t_{i-1})\phi_n(t - t_{i-1})$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

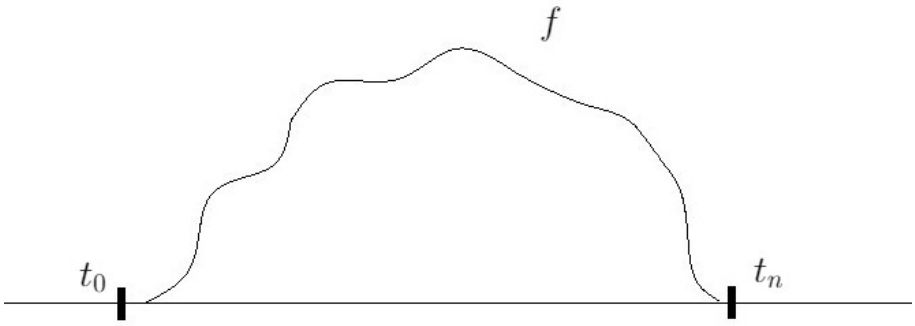

Рис. 13.

$$Af = \lim_{n\to\infty} A\sum_i \frac{1}{n} f(t_{i-1})\phi_n(t-t_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_i \frac{1}{n} f(t_{i-1})E(t-t_{i-1}) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_n} f(s)E(t-s)ds$$

то есть

$$Af(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)E(t-s)ds \tag{25.2}$$

этот интеграл и называется *свертка f и E*.

Доказывали, что при решении уравнения

$$Ly = f$$

получаем

$$y(t) = \int\limits_0^t u(t-s)f(s)ds + \int\limits_{-\infty}^0 u(t-s)f(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u\chi)(t-s)f(s)ds$$

где $\int\limits_{-\infty}^0 u(t-s)f(s)ds$ - решение однородного, χ - *функция Хевисайда.*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{25.3}$$

Значит для этой задачи аппаратная функция

$$E = u\chi$$

Определение 13. Выражение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt \tag{25.4}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

называется *сверткой функций* u *и* v и обозначается через

$$u * v(x) \tag{25.5}$$

Когда свертка определена? Пусть u, v интегрируема по Риману на $[a, b]$ $\forall a < b$

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|dt < \infty$, v - ограничена.

б) u - интегрируема на всяком отрезке, $v \equiv 0$ вне некоторого отрезка (несобственного интеграла нет).

Свойства свертки

Утверждение 47. *Если существует* $u * v(x)$, *то существует* $v * u(x)$ *и*

$$u * v(x) = v * u(x) \tag{25.6}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt \overset{x-t=s}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x-s)v(s)ds$$

□

Утверждение 48. *Пусть* $u \in C(\mathbb{R})$, $v \in C^1(\mathbb{R})$ *и* $v \equiv 0$ *вне некоторого отрезка (*v *имеет компактный носитель). Тогда* $u * v$ *непрерывно дифференцируема и*

$$(u * v)' = u * (v') \tag{25.7}$$

Доказательство. Считаем, что $v \equiv 0$ вне $[-c, c]$, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt = \int\limits_{x-c}^{x+c} u(t)v(x-t)dt$$

Знаем, что это дифференцируемо по x и умеем вычислять производную. □

Определение 14. Последовательность функций ω_n называется *дельта-образной последовательнстью*, если

1) $\omega_n \geqslant 0$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_n(t)dt = 1 \tag{25.8}$$

2) $\forall \delta > 0$

$$\int\limits_{|t| \geqslant \delta} \omega_n(t)dt \xrightarrow[n \to 0]{} 0 \tag{25.9}$$

Пример 42.

1) Последовательность ω_n изображена на Рис. 14.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

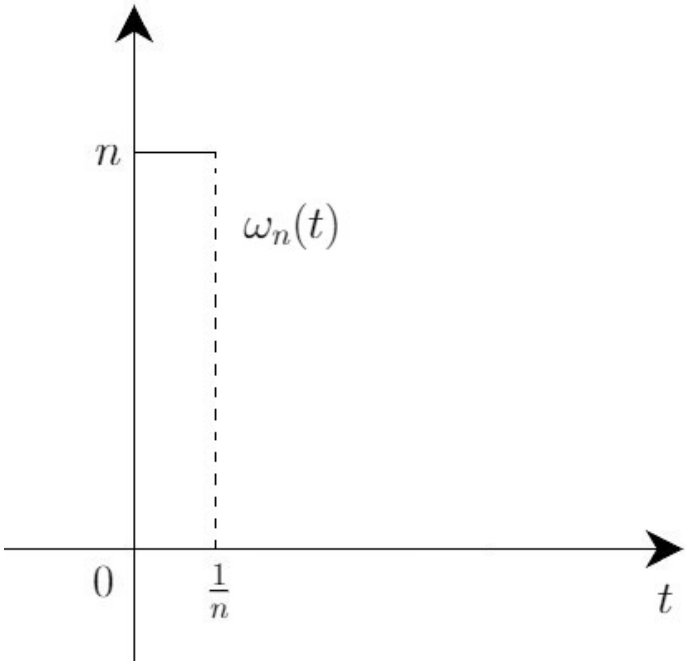

Рис. 14.

$$\int\limits_{|t|\geqslant\delta} \omega_n(t)dt \overset{\text{при } \frac{1}{n}<\delta}{=} 0$$

2) Возьмем $\psi(t):\ \psi \geqslant 0$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 1$$

Рассмотрим

$$\omega_n(t) = n\psi(nt)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} n\psi(nt)dt \overset{nt=s}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)ds = 1$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant\delta} n\psi(nt)dt \overset{s=nt}{=} \int\limits_{|s|\geqslant n\delta} \psi(s)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Графики $\psi(t)$ и $n\psi(nt)$ изображены на Рис. 15.

Мы здесь не обсуждаем обобщенные функции, но у физиков есть обобщенная функция δ- функция Дирака, которую физики определяют так

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

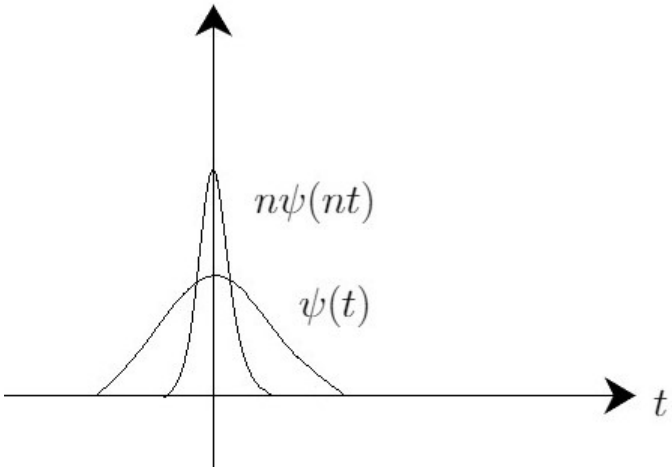

Рис. 15.

В математике такая функция может появиться только как обобщенная функция, но можно то же самое смоделировать приближенно, то есть сказать, что вообще говоря такой функции нет, но есть последовательность, которая себя в пределе ведет таким способом и эта последовательность - это дельта-образная последовательность.

Утверждение 49. *Пусть $f \in C_b(\mathbb{R})$ (непрерывна и ограничена) и ω_n - δ-образная последовательность. Тогда*

$$f * \omega_n \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f \ \ \forall [a,b] \tag{25.10}$$

Доказательство. $|f| \leqslant M$, фиксируем $[a,b]$

$$f(x)*\omega_n(x)-f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\omega_n(t)dt - f(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_n(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f(x-t)-f(x))\omega_n(t)dt =$$

$$= \int\limits_{|t|<\delta}(f(x-t)-f(x))\omega_n(t)dt + \int\limits_{|t|\geqslant\delta}(f(x-t)-f(x))\omega_n(t)dt$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Далее выбираем $\delta \in (0,1)$, тогда $a-\delta \leqslant x-t \leqslant b+\delta$, то есть самый большой отрезок, который может содержать $x-t$ это $[a-1, b+1]$. f - непрерывна на $[a-1, b+1]$, по теореме Кантора f - равномерно непрерывна, значит $\exists \delta \in (0,1)$: $|x_1 - x_2| < \delta$ $x_1,\ x_2 \in [a-1, b+1]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Фиксируем такое δ.

Для любого $x \in [a,b]$

$$|f*\omega_n(x) - f(x)| \leqslant \int\limits_{|t|<\delta}|f(x-t)-f(x)|\omega_n(t)dt + 2M\int\limits_{|t|\geqslant\delta}\omega_n(t)dt \leqslant \varepsilon + 2M\int\limits_{|t|\geqslant\delta}\omega_n(t)dt$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\exists N: \ \forall n > N$

$$2M \int\limits_{|t| \geqslant \delta} \omega_n(t)dt < \varepsilon$$

Получаем

$$|f * \omega_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

□

Следствие. *Если $f \in C_b(\mathbb{R})$, то $\exists$ последовательность гладких функций $f_n: \ f_n \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f \ \ \forall [a,b]$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\omega_n = n\psi(nt)$, где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\psi \equiv 0$ вне некоторого отрезка. □

Теорема 55 (Вейерштрасс)**.** *Если $f \in C[a,b]$, то существует последовательность многочленов P_N :*

$$P_N \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \tag{25.11}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда f устроена следующим образом (Рис. 16.).

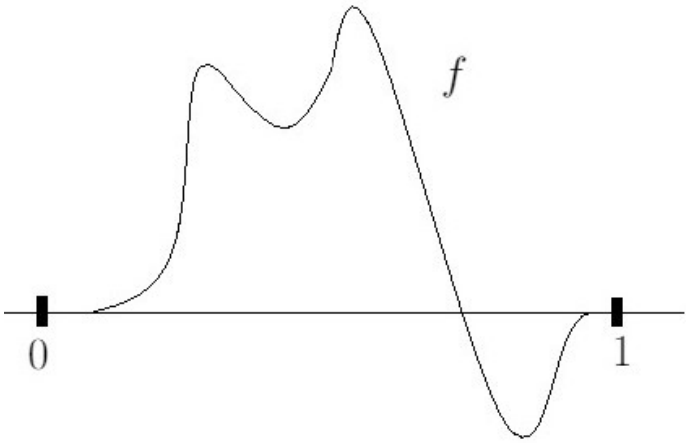

Рис. 16.

То есть $[a,b] = [0,1], \ f \equiv 0$ вне $[0,1]$.

Возьмем

$$\omega_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt} I_{|t|<1}$$

где $I_{|t|<1}$ индикатор отрезка $[-1,1]$.

$\omega_n(t)$ - δ-образная последовательность, а $f * \omega_n$ - многочлен. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 30. Доказать, что

$$\omega_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt} I_{|t|<1}$$

δ - образная последовательность и доказать, что $f * \omega_n$ - многочлен.

Лекция 26

Свертка

Свойства свертки

Доказательство задачи 30. Рассматриваем

$$\omega_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt} I_{|t|<1}$$

Обозначим

$$C_n = \frac{1}{\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt}$$

Покажем, что это δ-образная последовательность

1) $\omega_n \geqslant 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_n dt = c_n \int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = 1$$

2)

$$\int\limits_{|t|\geqslant\delta} \omega_n(t) dt \xrightarrow{?} 0$$

$\omega_n(t)$ - четная, значит достаточно рассмотреть при $t > 0$.

$$C_n \int\limits_{\delta}^{1}(1-t^2)^n dt \leqslant C_n(1-\delta^2)^n$$

Оценим

$$\frac{1}{C_n} = \int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = 2\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt \geqslant 2\int\limits_{0}^{1}(1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}$$

Значит

$$C_n \int\limits_{\delta}^{1}(1-t^2)^n dt \leqslant (1-\delta^2)^n \cdot \frac{n+1}{2} \to 0$$

По утверждению 49

$$f * \omega_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$x \in [0,1]$.

$$f * \omega_n(x) = C_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(1-(x-t)^2)^n I_{|x-t|<1} dt = C_n \int\limits_{x-1}^{x+1} f(t)(1-(x-t)^2)^n dt$$

$[x-1, x+1] \supset [0,1]$, следовательно

$$f * \omega_n(x) = C_n \int\limits_{0}^{1} f(t)(1-(x-t)^2)^n dt$$

а это многочлен. $\square$

Доказательство теоремы Вейерштрасса другим способом. Возьмем δ-образную последовательность

$$\omega_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2t^2} = n\psi(nt)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$$

Делаем с f следующие преобразования: линейно продолжаем до 0, а дальше нулем, считаем, что $f \equiv 0$ вне $[-c, c]$, на нем и будем приближать.

$$f * \omega_n \overset{[-c,c]}{\rightrightarrows} f$$

Значит достаточно научиться приближать многочленами $f * \omega_n$ на $[-c, c]$.

Фиксируем n

$$f * \omega_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-n^2t^2} dt = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-2c}^{2c} f(x-t) e^{-n^2t^2} dt$$

так как $x \in [-c, c]$, $f \equiv 0$ вне $[-c, c]$ и $f(x-t) \equiv 0$ при $|t| > 2c$.

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-2c}^{2c} f(x-t) e^{-n^2t^2} dt = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-2c}^{2c} f(x-t) \frac{(-1)^j n^{2j} t^{2j}}{j!} dt$$

Сумма сходится равномерно при $x \in [-c, c]$.

$$\int\limits_{-2c}^{2c} f(x-t) t^{2j} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) t^{2j} dt \overset{s=x-t}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)(x-s)^{2j} ds$$

а это и есть многочлен. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свертка периодических функций

Пусть f и g T-периодические функции и они интегрируемы на отрезке $[0, T]$. *Сверткой* называется

$$f * g(x) = \int\limits_0^T f(t)g(x-t)dt \tag{26.1}$$

Проверим верны ли свойства свертки для T-периодических функций.

1)

$$f * g(x) = g * f(x) \tag{26.2}$$

$$\int\limits_0^T f(t)g(x-t)dt \overset{x-t=s}{=} \int\limits_{x-T}^T f(x-s)g(s)ds = \int\limits_0^T f(x-s)g(s)ds$$

Задача 31. Доказать, что для периодических функций

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$

Задача 32. Пусть f такова, что $\forall a$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$

Верно ли, что f - T-периодическая.

2) $f \in C(\mathbb{R}),\ g \in C^1(\mathbb{R})$, тогда $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$(f * g)' = f * (g') \tag{26.3}$$

$$f * g(x) = \int\limits_0^T f(t)g(x-t)dt$$

выполняются все условия для дифференцирования по параметру.

$f * g(x)$ также является T-периодической функцией.

Определение 15. Последовательность T-периодических функций ω_n называется δ-образной последовательностью, если

1) $\omega_n \geqslant 0$ и

$$\int\limits_0^T \omega_n(t)dt = 1 \tag{26.4}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2)
$$\int\limits_{\delta}^{T-\delta} \omega_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall \delta > 0 \tag{26.5}$$

Утверждение 50. *Если $f \in C(\mathbb{R})$ и T-периодическая, ω_n - δ-образная последовательность T-периодических функций, то*

$$\omega_n * f \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f \tag{26.6}$$

Доказательство. Доделать самостоятельно.

$$f * \omega_n(x) - f(x) = \int\limits_{\delta}^{T-\delta} (f(x-t) - f(x))\omega_n(t)dt + \int\limits_{0}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\omega_n(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{T-\delta}^{T} (f(x-t) - f(x))\omega_n(t)dt$$

В последнем интеграле надо прибавить T к аргументу и воспользоваться равномерной непрерывностью. □

Теорема 56 (Вейерштрасс)**.** *Если f - 2π-периодическая, непрерывная функция, то существует последовательность тригонометрических многочленов T_N:*

$$T_N \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f \tag{26.7}$$

Определение 16. *Тригонометрическим многочленом* называется

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{26.8}$$

Пример 43.

1) $1 + \cos x$

2) $\cos^n x$
$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(2k-n)x}$$

3) $\sin^n x$

Задача 33. Вывести эту теорему из обычной теоремы Вейерштрасса.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство теоремы 56. Возьмем

$$\omega_n(t) = \frac{\cos^{2n}\frac{t}{2}}{\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}dt}$$

То, что $\omega_n(t)$ - δ-образная последовательность, доказывается аналогично доказательству для обычных многочленов.

$$f * \omega_n(x) = C_n \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{x-t}{2}dt$$

$$\cos^2\frac{x-t}{2} = \frac{\cos(x-t)+1}{2}$$

тогда

$$C_n \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{x-t}{2}dt = C_n \int\limits_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\cos(x-t)+1}{2}\right)^n dt$$

это тригонометрический многочлен. □

Евклидовы пространства. Ряды Фурье

Евклидовы пространства

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$, скалярное произведение в нем

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Ортонормированная система векторов:

$$e_1 = (1,0,0)$$

$$e_2 = (0,1,0)$$

$$e_3 = (0,0,1)$$

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Рядом Фурье называется

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

коэффициенты Фурье:

$$x_i = \langle x, e_i\rangle$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 57 (Пифагор)**.**

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$$

в нашем случае она называется равенство Парсеваля(Ляпунова).

Если взять не все e_j, а только два или один или вообще ни одного, то не всякий x разложится в ряд Фурье. Нужна полнота.

Определение 17. Линейное пространство E (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *евклидовым*, если задана функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$:

1) $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R},\ \langle x, x \rangle \geqslant 0$

$$\langle x, x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \tag{26.9}$$

2)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \tag{26.10}$$

3)

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \tag{26.11}$$

Теорема 58 (Коши-Буняковский-Шварц-Гёльдер-...)**.**

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \tag{26.12}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда x, y линейно зависимые.

Лекция 27

Евклидовы пространства. Ряды Фурье

Евклидовы пространства

Доказательство неравенства Коши-Буняковского. Рассмотрим

$$f(t) = \langle x - ty, x - ty\rangle \geqslant 0,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$$

1) $y = 0$ все выполняется.

2) $y \neq 0$, тогда $\langle y, y\rangle \neq 0$.

$$f(t) = \langle y, y\rangle t^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle t + \langle x, x\rangle \geqslant 0$$

значит $D \leqslant 0$, получаем

$$|\mathrm{Re}\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Возьмем $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1$

$$x \to \lambda x$$

$$|\mathrm{Re}(\lambda\langle x, y\rangle)| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$$\langle x, y\rangle \neq 0$$

Возьмем $\lambda = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$

$$\lambda\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$$

Теперь, когда равенство достигается.

Если скалярное произведение вещественное, то $\exists t:\ x = ty$.

Пусть оно не вещественное, тогда умножаем на λ и равенство достигается, когда $\lambda(x - ty) = 0$. □

Скалярное произведение определяет норму

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{27.1}$$

Задача 34. Доказать, что $\|x\|$ - норма.

Задача 35. Доказать, что

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{27.2}$$

это называется равенство параллелограмма.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим для простоты $\mathbb{R}$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

Равенства параллелограмма достаточно и необходимо для того, чтобы это оказалось скалярным произведением. То есть далеко не всегда норма отвечает какому-то скалярному произведению.

Задача 36. Проверить, что на $\mathbb{R}^2$

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

не является нормой, порожденной скалярным произведением.

Далее считаем, что у нас норма порождается скалярным произведением.

Говорим, что $x_n \to x$ тогда и только тогда, когда

$$\|x_n - x\| \to 0 \tag{27.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \tag{27.4}$$

Утверждение 51. *Если $x_n \to x,\ y_n \to y$, то*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle \tag{27.5}$$

Доказательство.

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leqslant |\langle x - x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y - y_n\rangle| \overset{\text{К-Б}}{\leqslant} \|x_n - x\|\cdot\|y\| + \|x_n\|\cdot\|y - y_n\| \to 0$$

так как x_n сходится, то $\|x_n\|$ ограничена. □

$$x \perp y \ \Leftrightarrow\ \langle x, y\rangle = 0 \tag{27.6}$$

Теорема 59 (Пифагор)**.**

а) $x \perp y$. Тогда

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{27.7}$$

б) $x_1, ...x_n,\ x_i \perp x_j,\ i \neq j$. Тогда

$$\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \tag{27.8}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

в) $x_1, ...x_n, ...,\ x_i \perp x_j,\ i \neq j$. *Тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 \tag{27.9}$$

если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *сходится.*

Доказательство.

а) очевидно.

б) очевидно.

в) почти очевидно.

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i \right\| \overset{\text{п. б)}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2$$

□

Вопрос: верно ли в пункте а) $\overset{?}{\Leftarrow}$?

Пример 44. Рассмотрим несколько евклидовых пространств.

1) $\mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

2) $\mathbb{C}^n$.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$$

3) $C[a, b]$.

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b fg dx$$

3') $R[a, b]$ - функции, интегрируемые по Риману на $[a, b]$. Берем

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b fg dx$$

$$\int\limits_a^b f^2 dx = 0 \ \Rightarrow\ f = 0 \text{ п.в.}$$

Далее считаем, что $f = g$, если $f = g$ почти всюду. Тут формально мы работаем с классами эквивалентности.

Ортонормированные системы

Конечный или счетный набор векторов $\{e_k\}$ называется *ортонормированной системой*, если

$$\|e_k\| = 1 \text{ и } e_k \perp e_m,\ k \neq m \tag{27.10}$$

Утверждение 52 (Грамма-Шмидта)**.** *Если есть векторы $f_1, ...f_N, ...$ (линейно независимые), то существует набор ортонормированных векторов e_k:*

$$\operatorname{span}\{f_1, ...f_N, ...\} = \operatorname{span}\{e_1, ...e_k, ...\} \tag{27.11}$$

где $\operatorname{span}\{...\}$ *- линейная оболочка.*

Доказательство.

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

$$e_2 = \frac{f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1}{\|f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1\|}$$

$$.....$$

$$e_{k+1} = \frac{f_{k+1} - \langle f_{k+1}, e_1\rangle e_1 - ... - \langle f_{k+1}, e_k\rangle e_k}{\|f_{k+1} - \langle f_{k+1}, e_1\rangle e_1 - ... - \langle f_{k+1}, e_k\rangle e_k\|}$$

□

Замечание 14. Линейные оболочки совпадают на каждом шаге.

Задача 37. В пространстве $C[-1, 1]$ проделать ортогонализацию для $1,\ x,\ x^2, ...x^n, ...$
.

Утверждение 53. *Пусть Π - линейная оболочка $\{e_1, ...e_n\}$, где $e_1, ...e_n$ - ортонормированная система. Тогда для каждого x верно*

$$x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \perp \Pi \tag{27.12}$$

Доказательство.

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \langle e_k, e_j\rangle = 0$$

□

Далее используем обозначение

$$\langle x, e_k\rangle = \widehat{x_k} \tag{27.13}$$

$\widehat{x_k}$ называются *коэффициенты Фурье.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 54 (экстремальное свойство коэффициентов Фурье)**.** *Пусть Π - линейная оболочка $\{e_1, ...e_n\}$, $e_1, ...e_n$ - ортонормированная система, $x \in E$. Тогда $\min \|x - y\|$ по $y \in \Pi$ достигается на единственном векторе $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k$.*

Доказательство.

$$\|x - y\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k + \left(\sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k - y \right) \right\|^2 \overset{\text{т. Пифагора}}{=}$$

$$\overset{\text{т. Пифагора}}{=} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k - y \right\|^2 \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k \right\|^2$$

□

Неравенство Бесселя.

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x_k}|^2 \tag{27.14}$$

в доказательстве предыдущего утверждения взять $y = 0$.
Если задана счетная ортонормированная система, то

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x_k}|^2 \tag{27.15}$$

Утверждение 55 (равенство Парсеваля)**.**

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x_k} e_k \;\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x_k}|^2$$

Доказательство. В доказательстве утверждения 54 берем $y = 0$

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x_k}|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} e_k \right\|^2$$

□

Теорема 60. *Пусть E - евклидово пространство, $\{e_k\}$ - ортонормированная система. Следующие утверждения равносильны*

1) $\forall x \; x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{x_k} e_k$

2) *Если взять линейную оболочку $\{e_1, ...e_k, ...\}$ и замкнуть, то это совпадает с E, то есть система $\{e_k\}$ полна.*

3) $\forall x \; \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{x_k}|^2$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} e_k$ *называется рядом Фурье вектора* x.

В конечномерном случае пункт 2) значит, что линейная оболочка совпала с E.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 3) знаем.

1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Взяли x и зафиксируем $\varepsilon > 0$ $\exists c_{i_1}, ...c_{i_M}$:

$$\|x - (c_{i_1} e_{i_1} + ... + c_{i_M} e_{i_M})\| < \varepsilon$$

Пусть $N = \max\{i_1, ...i_M\}$, $n > N$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где лишние $c_k = 0$. По экстремальному свойству

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} e_k \right\| < \varepsilon$$

Значит $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} e_k$

□

Тригонометрические ряды Фурье

Рассматриваем пространство $R[0, 2\pi]$ и ортонормированную систему

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

Задача 38. Проверить ортонормированность.

Утверждение 56. *Это полная система в* $R[0, 2\pi]$.

Доказательство. Знаем, что если f - 2π-периодическая непрерывная функция, то $\exists T_N$:

$$T_N \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$$

Хотим всякую интегрируемую функцию приближать тригонометрическим многочленом по норме

$$\|f - T\|^2 = \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx$$

Теперь задача сводится к тому, чтобы научиться приближать f непрерывной 2π периодической функцией. Мы можем непрерывную функцию приблизить

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

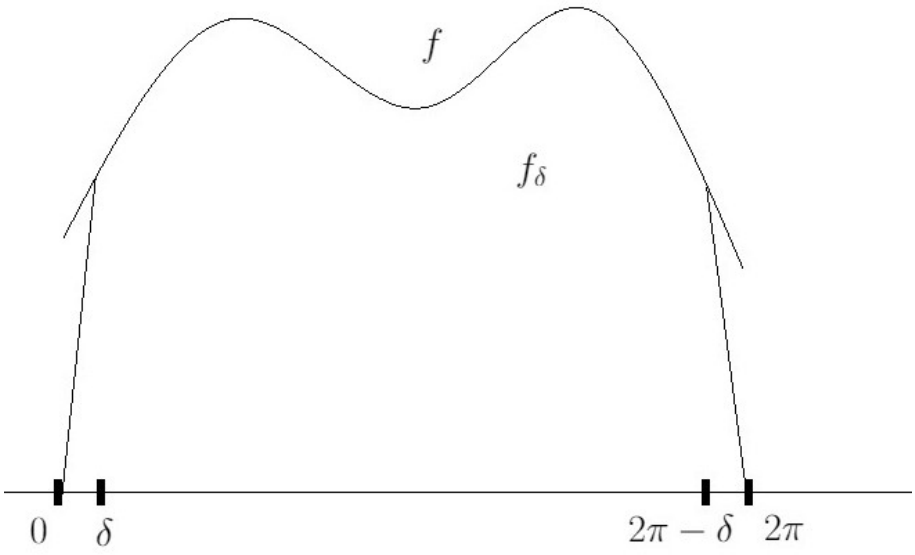

Рис. 17.

непрерывной 2π- периодической. Как мы можем это сделать изображено на Рис. 17. Функцию f_δ уже можно сделать непрерывной и 2π-периодической.

$$\int\limits_0^{2\pi} |f - f_\delta|^2 dx \leqslant 2\delta(2\max|f|)^2$$

Теперь нужно научиться приближать непрерывными. Продолжение доказательства в следующей лекции.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 28

Евклидовы пространства. Ряды Фурье

Тригонометрические ряды Фурье

Продолжение доказательства утверждения 56. Хотим, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists g_\varepsilon$ - тригонометрический многочлен:

$$\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$$

Итак, покажем как интегрируемую функцию приблизить непрерывной. f - интегрируемая функция.

1) f - ступенька. Приближаем как изображено на Рис. 18. f_δ - непрерывная.

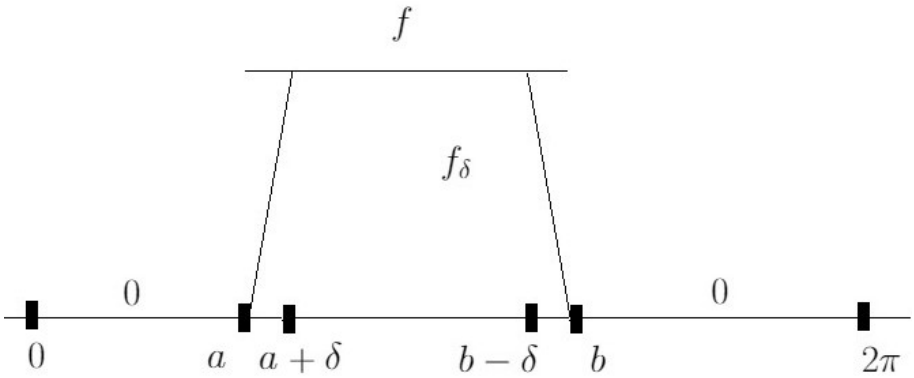

Рис. 18.

$$\int\limits_0^{2\pi} |f - f_\delta|^2 dx = \int\limits_a^{a+\delta} |f - f_\delta|^2 dx + \int\limits_{b-\delta}^{b} |f - f_\delta|^2 dx \leqslant 2\delta$$

2) $f = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j I_{\Delta_j}$, I_{Δ_j} - индикатор. $\forall j\ f_j$ - непрерывна

$$\sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |I_{\Delta_j} - f_j|^2} < \varepsilon$$

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{N} c_j f_j \right\| \overset{\text{н-во } \triangle}{\leqslant} \sum_{j=1}^{N} |c_j| \|I_{\Delta_j} - f_j\| < \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| \right) \varepsilon$$

То есть достаточно научиться приближать функцию линейной комбинацией ступенек.

$$|f| \leqslant M$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Возьмем разбиение отркзка t_i и в каждом из них выберем, например, левую точку $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$. Рассмотрим

$$g(t) = \sum_{i=1}^{N} f(t_{i-1}) I_{\Delta_i}(t)$$

$$|g| \leqslant 2M$$

$$\int_0^{2\pi} |f-g|^2 dx \leqslant 3M \int_0^{2\pi} |f-g| dx = 3M \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f-g| dx =$$

$$= 3M \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f - f(t_{i-1})| dx \leqslant 3M \sum_{i=1}^{N} \omega(f, \Delta_i) \cdot |\Delta_i| \xrightarrow[\lambda(\mathbb{T})\to 0]{} 0$$

□

Следствие. *Всякая интегрируемая функция f на $[0, 2\pi]$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{28.1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \tag{28.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \tag{28.3}$$

То есть

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{28.4}$$

где S_N - частичная сумма ряда.

Поточечная сходимость тригонометрических рядов Фурье

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) dt =$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \cos(x-t) + ... + \cos N(x-t)\right)dt$$

Введем функцию

$$D_N(u) = \frac{1}{2} + \cos u + ... + \cos Nu \tag{28.5}$$

назовем ее *ядро Дирихле.*

Получили

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt \tag{28.6}$$

Найдем вид D_N

$$2\sin\frac{u}{2}D_N(u) = \sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} + ... + \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(N-\frac{1}{2}\right)u =$$

$$= \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u$$

$$D_N(u) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$D_N(0) = N + \frac{1}{2}$$

Свойства ядра Дирихле:

1) $D_N(u)$ - 2π-периодическая, гладкая, четная функция.

2)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_N(u)du = 1$$

3) Позже будет доказано, что

$$\int\limits_\delta^{2\pi-\delta} D_N(u)du = \int\limits_\delta^{2\pi-\delta} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du \to 0$$

D_N не является δ-образной последовательностью, так как нет неотрицательности.

Далее считаем, что f - 2π-периодическая.

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x+t) - f(x-t))D_N(t)dt$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма 3 (Риман)**.** *Если f - интегрируема на $[a,b]$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty} f(x)\sin nx dx = 0 \tag{28.7}$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^b f\sin\lambda x dx - \int\limits_a^b f\sin\lambda x dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f-g| dx$$

Возьмем

$$g = \sum_{j=1}^N c_j I_{\Delta_j}$$

Пусть $\Delta = [c,d]$

$$\int\limits_a^b I_\Delta(x)\sin\lambda x dx = \int\limits_c^d \sin\lambda x dx = -\frac{\cos\lambda x\Big|_c^d}{\lambda} \to 0$$

$$\int\limits_a^b g\sin\lambda x dx \to 0$$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists g_\varepsilon$:

$$\int\limits_a^b |f-g_\varepsilon| dx < \varepsilon$$

$\exists\lambda_0:\ \forall\lambda > \lambda_0$

$$\left|\int\limits_a^b g_\varepsilon\sin\lambda x dx\right| < \varepsilon$$

Следовательно

$$\int\limits_a^b f\sin\lambda x dx < \varepsilon$$

□

Следствие.(принцип локализации). *Пусть f и g интегрируемы на $[0,2\pi]$, 2π-периодические. Если в некоторой окрестности точки $x_0\in[0,2\pi]$ функции f и g совпадают, то их ряды Фурье сходятся и расходятся в точке x_0 одновременно, а если сходятся, то суммы в точке x_0 равны.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$S_N^f - S_N^g = \int\limits_0^\pi (f(x_0+t) - g(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0-t)) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

$f = g$ в окрестности x_0, значит

$$f(x_0+t) - g(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0-t) = 0,\ t \in [0, \delta]$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi (f(x_0+t) - g(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0-t)) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_\delta^\pi \frac{f(x_0+t) - g(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) t dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

по лемме Римана, так как $\frac{(f(x_0+t)-g(x_0+t)+f(x_0-t)-g(x_0)-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ интегрируема. □

Следствие (условие Дини). *Предположим, что*

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2A|}{t} dt$$

сходится для некоторого $\delta > 0$ и A. Тогда ряд Фурье сходится в точке x к A.

Доказательство.

$$|S_N(x) - A| \overset{2\text{ св-во } D_N}{=} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2A) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2A}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) dt \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2A}{t} \cdot \frac{t\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2A}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) dt \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left| C \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2A}{t} dt \right|$$

так как функция

$$\left|\frac{t\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| \leqslant C$$

Выберем δ, можем сделать

$$\frac{1}{\pi}\left|C\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{t}dt\right| < \varepsilon$$

фиксируем δ. Функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}}$ интегрируема, значит пользуемся леммой Римана. $\exists N_0:\ \forall N > N_0$

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)dt\right| < \varepsilon$$

Получаем

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)dt\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|C\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{t}dt\right| < 2\varepsilon$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 29

Евклидовы пространства. Ряды Фурье

Поточечная сходимость тригонометрических рядов Фурье

Следствие. *Если f - липшецева функция, то есть*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$$

Тогда условие Дини выполняется в $A = f(x)$.
Действительно

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2C|t|$$
$$\frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} \leqslant C$$

Следствие. *Пусть*

$$f(x+0) = \lim_{t\to 0+} f(x+t)$$
$$f(x-0) = \lim_{t\to 0-} f(x-t)$$

, эти пределы существуют и также

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leqslant C_1 t,\ t > 0$$
$$|f(x-t) - f(x-0)| \leqslant C_2 t,\ t > 0$$

(например f $C^1[x-\delta, x]$ и $C^1[x, x+\delta]$). Тогда

$$S_N(x) \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \tag{29.1}$$

Доказательство. Возьмем

$$A = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

$|f(x+t) + f(x-t) - 2A| \leqslant |f(x+t) - f(x+0)| + |f(x-t) - f(x-0)| \leqslant (C_1 + C_2)t$
значит условие Дини выполнено. □

Суммирование по Чезаро и ядро Фейеро

Рассмотрим

$$\sigma_N(x) = \frac{S_0(x) + ... + S_N(x)}{N+1} = \frac{1}{\pi(N+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)(D_0(t) + ... + D_N(t))dt$$

Обозначим

$$F_N(t) = \frac{D_0(t) + ... + D_N(t)}{\pi(N+1)} \tag{29.2}$$

эта функция называется *ядро Фейера.*

$$\sigma_N(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)dt \tag{29.3}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 57. *F_N - δ-образная последовательность.*

Доказательство.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(t)dt \stackrel{?}{=} 1$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(t)dt = \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_0(t)dt + ... + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt\right) = `1$$

$$\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} F_N(t)dt = \frac{\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} D_0(t)dt + ... + \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} D_N(t)dt}{\pi(N+1)} \to 0$$

так как

$$\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} D_N(t)dt \to 0$$

$F_N(t) \geqslant 0$ - доказать самостоятельно. Необходимо рассмотреть

$$F_N(t) = \frac{1}{\pi(N+1)}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Вычислить

$$\sum_{n=0}^{N}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = ?$$

□

Следствие. *Если f - 2π-периодическая непрерывная функция, то*

$$\sigma_N \stackrel{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f \tag{29.4}$$

Замечание 15. Тем самым доказана теорема Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами.

Гладкость и сходимость

Лемма 4. *Пусть f - 2π-периодическая, C^1 функция (тут в концах все хорошо). Тогда*

$$a_n(f') = nb_n(f) \tag{29.5}$$

$$b_n(f') = -na_n(f) \tag{29.6}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}(f(x)\cos nx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = nb_n(f)$$

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}(f(x)\sin nx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{n}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= -\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = na_n(f)$$

□

Пусть $f' \in C$

$$\sum\Big(|a_n(f')|^2 + |b_n(f')|\Big) < \infty$$

$$|a_n(f)| = \frac{|b_n(f')|}{n}$$

$$|b_n(f)| = \frac{|a_n(f')|}{n}$$

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx) = f(x)$$

сходится поточечно.

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{|a_n(f')|}{n} + \frac{|b_n(f')|}{n}\right) \overset{\text{К/Б}}{\leqslant}$$

$$\overset{\text{К/Б}}{\leqslant} \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}|a_n(f')|^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}|b_n(f')|^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{o(1)}\cdot\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}} = o(1)\cdot\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$$

Если $f \in C^1$, то ряд сходится равномерно.

Пусть теперь $f - 2\pi$-периодическая класса C^k.

$$|a_n(f)| = \frac{|b_n(f')|}{n} = \frac{|a_n(f'')|}{n^2} = ... = \frac{\alpha_n}{n^k}$$

$$|b_n(f)| = \frac{\beta_n}{n^k}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sum_n (\alpha_n^2 + \beta_n^2) < \infty$$

следовательно

$$|\text{хвост ряда Фурье}| \leqslant \frac{o(1)}{N^{k-\frac{1}{2}}}$$

Теорема 61. *Если f - 2π-периодическая функция, k раз непрерывно дифференцируемая, то*

1) коэффициенты Фурье функции f равны $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

2)

$$\sup_X |f(x) - S_N(x)| = \frac{o(1)}{N^{k-\frac{1}{2}}} \tag{29.7}$$

Утверждение 58. *Пусть f - 2π-периодическая функция и ее коэффициенты Фурье*

$$a_n = \frac{\alpha_n}{n^k},\ b_n = \frac{\beta_n}{n^k},\ \sum \alpha_n^2 < \infty,\ \sum \beta_n^2 < \infty$$

Тогда сумма ряда Фурье является C^{k-1} функцией.

Доказательство. Достаточно проверить для $k = 1$.

$$\left|\sum_{n=N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right| \leqslant \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n} \to 0$$

Для $k > 1$ повторяем, заменяя f на f'. □

Метод Фурье

Рассмотрим задачу: найдем функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\Big|_{t=\phi} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases} \tag{29.8}$$

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

называется *уравнением теплопроводности.*

Эта задача описывает как меняется температура стержня с начальным нагревом ϕ, и на концах которого поддерживается нулевая температура.

Будем искать решения в виде

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -k^2$$

$$X(x) = \sin kx$$

$$T' = -k^2 T$$

$$T(t) = Ce^{-k^2 t}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

Подставим $t = 0$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$$

значит

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x) \sin kx dx$$

Рядов Фурье через комплексную экспоненту

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

$k = 1,\ 2, ...$

$$c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$k = -1,\ -2, ...$

$$c_k = \frac{a_{-k}}{2} + \frac{ib_k}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{29.9}$$

Если мы хотим раскладывать функцию на отрезке $[0, l]$, то делаем замену e^{-ikx} на $e^{\frac{ikx \cdot 2\pi}{l}}$, получаем

$$c_k = \frac{1}{l} \int_0^{l} f(x) e^{-\frac{2\pi ikx}{l}} dx \tag{29.10}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Для отрезка $[-l, l]$ ряд переписывается в виде

$$\sum_k c_k e^{-\frac{ikx\pi}{l}} \tag{29.11}$$

$$c_k = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{ikx\pi}{l}} dx$$

Для функции вида как изображено на Рис. 19.

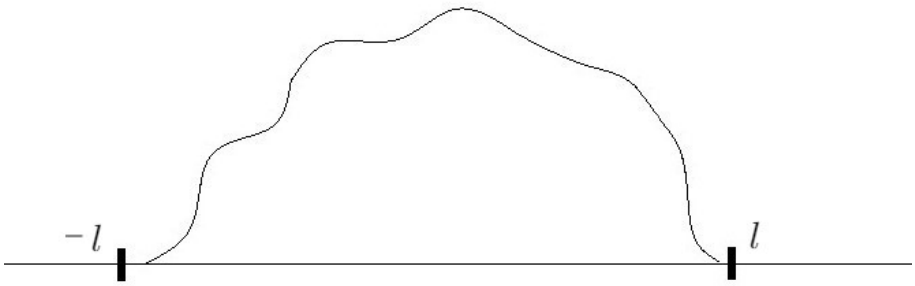

Рис. 19.

можем перписать интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{ikx\pi}{l}} dx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 30

Преобразование Фурье

Преобразованием Фурье функции f называется

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \tag{30.1}$$

Это выражение имеет смысл для f таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f| dx < \infty$$

Будем рассматривать функции из пространства

$$S = \{f |\ 1) f\ -\ \text{бесконечно гладкая},\ 2) \sup_X (1 + |x|^m)|f^{(k)}(x)| < \infty\ \forall m,\ k \geqslant 0\}$$

S - *пространство быстро убывающих функций.* В этом пространчтве лежат все функции с компактным носителем, ещё, например, e^{-x^2}.

Свойства преобразования Фурье:

1) Пусть $a \neq 0$.

$$\widehat{f(ax+b)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b) e^{-ixy} dx \overset{ax+b=t}{=}$$

$$\overset{ax+b=t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|a|} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{i(t-b)y}{a}} dt = \frac{e^{\frac{iby}{a}}}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{y}{a}\right) \tag{30.2}$$

2)

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (\cos xy + i \sin xy) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos xy dx = I(y)$$

$$I'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin xy dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' \sin xy dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{x^2}{2}} \cos xy dx = yI(y)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{cases} I'(y) = yI(y) \\ I(0) = 1 \end{cases}$$

$$I(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{30.3}$$

3)

$$\widehat{f'}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx \overset{\text{по частям}}{=} iy\widehat{f}(y) \tag{30.3}$$

$$\widehat{f^{(k)}}(y) = (iy)^k \widehat{f}(y) \tag{30.4}$$

3')

$$\left(\widehat{f}(y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-ixy} dx = -\widehat{ixf(x)}(y) \tag{30.5}$$

так делать можно из-за равномерной сходимости.

$$\left(\widehat{f}(y)\right)^{(k)} = (-\widehat{ix)^k f}(x)(y) \tag{30.6}$$

Из 3) и 3') следует, что $\widehat{f}$ - гладкая функция.

$$\left|iy\widehat{f}(y)\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

значит

$$\sup_y |y|^k \widehat{f}(y) < \infty \tag{30.7}$$

Следствием этих двух пунктов является следующее утверждение

Утверждение 59. *Преобразование Фурье - отображение S в S.*

С помощью преобразования Фурье можно определять и дробные производные, так как тут мы заменяем дифференцирование на умножение.

4)

Лемма 5. *Пусть $f,\ g \in S$. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\widehat{f}(x)e^{ixy} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x) f(x+y) dx \tag{30.8}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\widehat{f}(x)e^{ixy}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt\right)e^{ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x)e^{-ix(t-y)}dt\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x)e^{-ix(t-y)}dx\right)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{g}(t-y)dt \overset{t-y=s}{=}$$

$$\overset{t-y=s}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s+y)\widehat{g}(s)ds$$

интегралы сходятся, так как $f,\ g \in S$. □

Следствтие 1. Подставим $y = 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\widehat{f}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x)f(x)dx \tag{30.9}$$

Следствие 2. Рассмотрим

$$g(x) = e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{2}},\ \varepsilon > 0$$

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{2}}\widehat{f}(x)e^{ixy}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}f(x+y)dx \overset{\frac{x}{\varepsilon}=t}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}f(t\varepsilon+y)dt$$

устремим $\varepsilon \to 0$ (интегралы сходятся по ε, так как функции из S)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(x)e^{ixy}dx = f(y)\sqrt{2\pi}$$

Формула обращения

$$f(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(x)e^{ixy}dx \tag{30.10}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 18. *Обратным преобразованием Фурье* называется

$$\overset{\vee}{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx \tag{30.11}$$

$$\overset{\vee}{\widehat{f}} = f \tag{30.12}$$

$$\overset{\vee}{f}(y) = \widehat{f}(-y) \tag{30.13}$$

$$\overset{\vee}{f}(y) \overline{\overline{\widehat{f}}}(y) \tag{30.14}$$

Утверждение 60. *Преобразование Фурье - линейный изоморфизм S.*

Определим скалярное произведение на S

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f \overline{g} dx \tag{30.15}$$

Утверждение 61. *Преобразование Фурье - изометрия $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, то есть выполнено равенство Парсеваля*

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle \tag{30.16}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f} g dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f \widehat{g} dx$$

$$\langle \widehat{f}, \overline{g} \rangle = \langle f, \overline{\widehat{g}} \rangle$$

Возьмем $g = \overline{\widehat{h}}$

$$\langle \widehat{f}, \widehat{h} \rangle = \langle f, \overline{\overline{\widehat{\widehat{h}}}} \rangle = \langle f, \overset{\vee}{\widehat{h}} \rangle = \langle f, h \rangle$$

□

Пример 45. Хотим решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y = f, \ f \in S$$

$$\widehat{y'' - y} = \widehat{f}$$

$$-x^2 \widehat{y}(x) - \widehat{y}(x) = \widehat{f}(x)$$

$$\widehat{y}(x) = -\frac{\widehat{f}(x)}{1 + x^2}$$

$$y(x) = \overset{\vee}{\left(-\frac{\widehat{f}(x)}{1 + x^2} \right)}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5) Пусть $f,\ g \in S$. Тогда
$$\widehat{f * g}(y) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(y) \cdot \widehat{g}(y)$$

Доказательство.

$$\widehat{f * g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \right) e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)e^{-ixy}dx \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)e^{-i(x-t)y}dx \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-isy}ds \right) dt = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(y) \cdot \widehat{g}(y)$$

$\square$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ