МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

ШАПОШНИКОВ
СТАНИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАСЛАКОВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Лекция 1 **6**
Неопределенный интеграл . . . 6
Определение и основные свойства . . . 6
Таблица интегралов . . . 8

Лекция 2 **10**
Неопределенный интеграл . . . 10
Интегрирование рациональных функций . . . 10
Замены, приводящие к интегрированию рациональных функций . . . 11

Лекция 3 **16**
Пространство $\mathbb{R}^n$ . . . 16
Евклидово пространство . . . 16
Нормированное пространство . . . 17
Метрическое пространство . . . 18

Лекция 4 **22**
Пространство $\mathbb{R}^n$ . . . 22
Метрическое пространство . . . 22
Сходимость в нормированном пространстве . . . 25

Лекция 5 **28**
Пространство $\mathbb{R}^n$ . . . 28
Сходимость в нормированном пространстве . . . 28
Пространство ограниченных функций . . . 31
Сходимости . . . 31

Лекция 6 **35**
Пространство ограниченных функций . . . 35
Сходимости . . . 35
Равномерная сходимость . . . 36

Лекция 7 **39**
Пространство ограниченных функций . . . 39
Равномерная сходимость . . . 39
Открытые и замкнутые множества . . . 40

Лекция 8 **45**
Открытые и замкнутые множества . . . 45
Компакты . . . 46

Лекция 9 **51**
Компакты . . . 51
Функции нескольких переменных . . . 52
Предел функций . . . 52

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Непрерывность 55

Лекция 10 **56**
Функции нескольких переменных 56
Непрерывность 56
Связные множества 59

Лекция 11 **61**
Функции нескольких переменных 61
Связные множества 61
Линейные функции 63

Лекция 12 **65**
Функции нескольких переменных 65
Линейные функции 65
Дифференцируемые отображения 66

Лекция 13 **70**
Функции нескольких переменных 70
Дифференцируемые отображения 70

Лекция 14 **76**
Функции нескольких переменных 76
Дифференцируемые отображения 76
Теорема об обратной функции 77

Лекция 15 **80**
Функции нескольких переменных 80
Теорема об обратной функции 80
Теорема о неявной функции 84

Лекция 16 **85**
Функции нескольких переменных 85
Теорема о неявной функции 85

Лекция 17 **90**
Функции нескольких переменных 90
Теорема о неявной функции 90
Теорема о функциональной зависимости 90

Лекция 18 **93**
Функции нескольких переменных 93
Теорема о функциональной зависимости 93
Производные высокого порядка 93

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 19 **97**
Функции нескольких переменных . . . 97
Производные высокого порядка . . . 97
Локальный экстремум . . . 98
Условный экстремум . . . 99

Лекция 20 **103**
Интеграл Римана . . . 103
Свойства интеграла Римана . . . 105

Лекция 21 **110**
Интеграл Римана . . . 110
Свойства интеграла Римана . . . 110
Первообразная непрерывной функции . . . 112

Лекция 22 **115**
Интеграл Римана . . . 115
Суммы Дарбу и интеграл Дарбу . . . 115
Критерий Лебега . . . 119

Лекция 23 **122**
Интеграл Римана . . . 122
Критерий Лебега . . . 122
Свойства интеграла с переменным верхним пределом для интегрируемых функций . . . 126

Лекция 24 **128**
Интеграл Римана . . . 128
Свойства интеграла с переменным верхним пределом для интегрируемых функций . . . 128

Лекция 25 **133**
Интеграл Римана . . . 133
Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме . . . 133

Лекция 1

Неопределенный интеграл

Определение и основные свойства

Пусть функция f - определена на интервале (a, b), дифференцируемая функция F на (a, b) называется *первообразной функции* f, если

$$F^{'}(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b) \tag{1.1}$$

Утверждение 1. $F^{'} \equiv 0$ *на* (a, b) $\Leftrightarrow$ $F = const$.

Доказательство.

$\Leftarrow$ Очевидно.

$\Rightarrow$ По теореме Лагранжа

$$F(x_1) - F(x_2) = F^{'}(c)(x_1 - x_2) = 0$$

□

Следствие. *Если* F_1 *и* F_2 *- первообразные* f *на* (a, b), *то*

$$F_1 - F_2 = const.$$

Доказательство.

$$(F_1 - F_2)^{'} = f - f = 0$$

□

Произвольную первообразную функции f на (a, b) обозначаем через

$$\int f(x)dx \tag{1.2}$$

Если $F^{'} = f$, то

$$\int f(x)dx = F + C \tag{1.3}$$

Почему именно такое обозначение? Если нам дано $f:\ F^{'} = f$ и нужно найти F

$$F(a + h) - F(a) = f(a) \cdot h + \underset{h \to 0}{\overline{o}(h)}$$

$$F(a + h) - F(a) \approx f(a) \cdot h,\ h - \text{малое}$$

Пусть $F(x_0) = 0$, если нужно найти $F(x)$, тогда мы разбиваем отрезок с шагом h и малыми шагами идем к x так, чтобы на каждом шаге

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx f(x_{k-1})h$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$h = dx(h)$$
$$F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx f(x_{k-1})dx(h)$$
$$F(x) = \sum_K (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_k f(x_{k-1})dx(h) \to \int f(x)dx$$

Значок придумали, когда при стремлении $h \to 0$ конечная сумма превращается в бесконечную.

Замечание 1.

1)
$$\int F^{'}(x)dx = \int dF = F + C$$

2)
$$d\left(\int f dx\right) = \left(\int f dx\right)^{'} dx = f(x)dx$$

Первообразную ещё называют *неопределенным интегралом*, а процедуру поиска первообразной называют *интегрированием*.

Свойства неопределенного интеграла:

Правила дифференцирования	Правила интегрирования
1) Линейность. $$(\alpha F + \beta G)^{'} = \alpha F^{'} + \beta G^{'}$$	1) Линейность. Пусть F и G первообразные для f и g на (a, b). Тогда $\alpha F + \beta G$ первообразная для $\alpha f + \beta g$ на (a, b), что записывается так $$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx =$$ $$= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C$$
2) Лейбниц. $$(FG)^{'} = F^{'}G + FG^{'}$$	2) Интегрирование по частям. I способ. Пусть f и g дифференцируемы на (a, b) и у $f^{'}g$ есть первообразная, то у $fg^{'}$ есть первообразная и верно равенство $$\int (fg)^{'}dx = fg + C =$$ $$= \int f^{'}gdx + \int fg^{'}dx + C$$ II способ. $$\int f^{'}gdx = fg - \int fg^{'}dx + C$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Первообразная $(fg)'$ равна fg. Следовательно существует первообразная функции (fg'), так как эта функция равна $(fg)' - f'g$ по правилу Лейбница. По линейности неопределенного интеграла

$$\int fg'dx = \int (fg)'dx - \int f'gdx + C =$$

$$= fg - \int f'gdx + C$$

□

3) Дифференцирование сложной функции.

$$(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

3) Замена переменной. Пусть F - первообразная f на (a, b) и $\phi: \ (\alpha, \beta) \to (a, b)$ - дифференцируема. Тогда $F(\phi(t))$ - первообразная функции $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)} + C$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t) = \int f(\phi)d\phi$$

Таблица интегралов

Производные	Интегралы
0) $$(const)' = 0$$	0) $$\int 0\ dx = const$$
1) $$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$	1) $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$$
2) $$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$$	2) $$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$$
3) $$(e^x)' = e^x$$	3) $$\int e^x dx = e^x$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4)

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

4)

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

5)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\operatorname{ctg} x)^x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

6)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

7)

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$
$$\left(\frac{1}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)' = \frac{1}{x^2 - 1}$$

7)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C$$

это называется *длинный логарифм.*

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

это называется *высокий логарифм.*

Все равенства верны только на промежутках, на каждом промежутке константа может быть своя.

Задача 1. Решить уравнение

$$t = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

Неопределенный интеграл

Интегрирование рациональных функций

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

$P,\ Q$ - многочлены.

$$P = Q \cdot q + r$$

$$\frac{P}{Q} = q + \frac{r}{Q},\ \deg r < \deg Q$$

В силу линейности можем записать интеграл как

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$$

Из алгебры известно, что если

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_m)^{k_m} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_2+q_2)^{l_n}$$

- неприводимые многочлены, то

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{u=1}^{k_j}\frac{\varkappa_{j,u}}{(x-\alpha_j)^i}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{l_j}\frac{\Delta_{j,v}x+\Theta_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}\right)$$

в силу линейности интегрирование $\frac{r(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию выражений

$$\frac{1}{(x-\alpha)^u} \text{ и } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^v}$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^u}dx = \begin{cases} \ln|x-\alpha|, & u=1 \\ -\frac{1}{u-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{u-1}}, & u\neq 1 \end{cases}$$

$$x^2+px+q = (x+\lambda)^2+\mu^2 = \mu^2\left(\left(\frac{x}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+1\right)$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^v}dx \overset{t=\frac{x}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}}{=} \int \frac{A(\mu t-\lambda)+B}{\mu^{2v}(t^2+1)^v}d(\mu t-\lambda)$$

Итак, надо научиться интегрировать функции

$$\frac{2t}{(t^2+1)^v} \text{ и } \frac{1}{(t^2+1)^v}$$

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^v} = \int \frac{dt^2}{(t^2+1)^v} \overset{t^2=s}{=} \int \frac{ds}{(s+1)^v} = \begin{cases} \ln|s+1|, & v=1 \\ -\frac{1}{v-1}\cdot\frac{1}{(s+1)^{v-1}}, & v\neq 1 \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^v}$$

$v = 1$

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C$$

$v > 1$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^v} = \int \frac{1}{(1+t^2)}(t)' dt \overset{\text{по частям}}{=} \frac{t}{(t^2+1)^v} - \int t \cdot \left(\frac{1}{(1+t^2)^v}\right)' dt =$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^v} + 2v \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{v+1}} dt + C$$

Получаем

$$2v \int \frac{dt}{(1+t^2)^{v+1}} = \frac{t}{(t^2+1)^v} + (2v-1) \int \frac{dt}{(1+t^2)^v} + C$$

При $v = 1$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C$$

Замены, приводящие к интегрированию рациональных функций

У нас есть интеграл

$$\int R(x, y(x)) dx$$

$$R(x,y) = \frac{\text{многочлен от x и y}}{\text{многочлен от x и y}}$$

Мы в качестве второй переменно йподоставляем функцию $y(x)$, например

$$y(x) = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

Идея: найти рациональную параметризацию графика функции $y = y(x)$, то есть найти рациональные функции $x(t)$ и $y(t)$:

$$y(t) = y(x(t))$$

Допустим, мы такие функции нашли. Тогда мы можем сделать замену

$$\int R(x, y(x)) dx \overset{x=x(t)}{=} \int R(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

Замена должна быть такой, чтобы на каком-то промежутке она была обратимой, чтобы существовало $t = t(x)$.

Пример 1.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(I)

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$$

x выражается через t рациональным образом.

(II)

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1}),\ \int R(x, \sqrt{x^2-1}),\ \int R(x, \sqrt{1-x^2})$$

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

$$y^2 - x^2 = 1$$

Необходимо найти рациональную параметризацию гиперболы. Будем ее искать с помощью построений, изображенных на Рис. 1., проводим прямые через точку $(0, -1)$, t - тангенс угла наклона прямой.

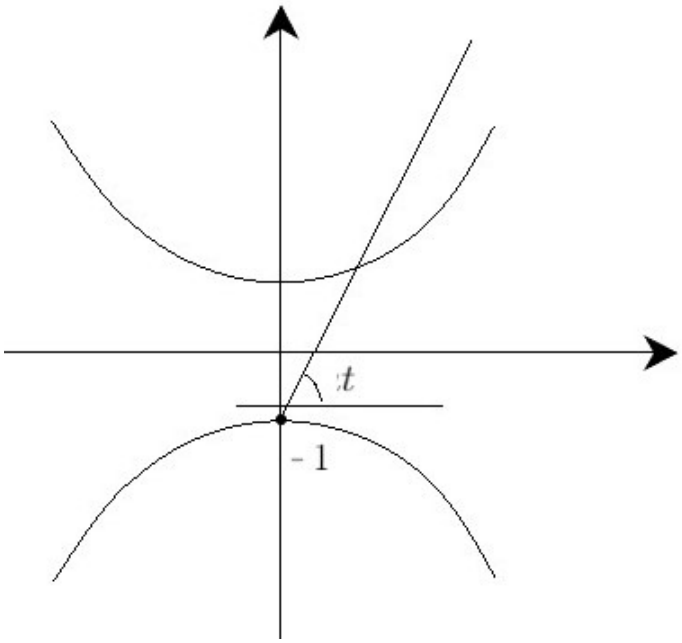

Рис. 1.

Будем искать точки пересечения прямой $y = tx - 1$ с гиперболой.

$$(tx-1)^2 - x^2 = 1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$t^2x^2 - 2tx + 1 - x^2 = 1$$
$$x((t^2-1)x - 2t) = 0$$

$x = 0$ отбрасываем, это точка $(0, -1)$

$$x(t) = \frac{2t}{t^2-1}$$
$$y(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$
$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$$
$$y = \sqrt{1-x^2}$$
$$y^2 + x^2 = 1$$

Необходимо найти рациональную параметризацию половины окружности. Будем ее искать с помощью построений, изображенных на Рис. 2., проводим прямые через точку $(-1, 0)$, t - тангенс угла наклона прямой.

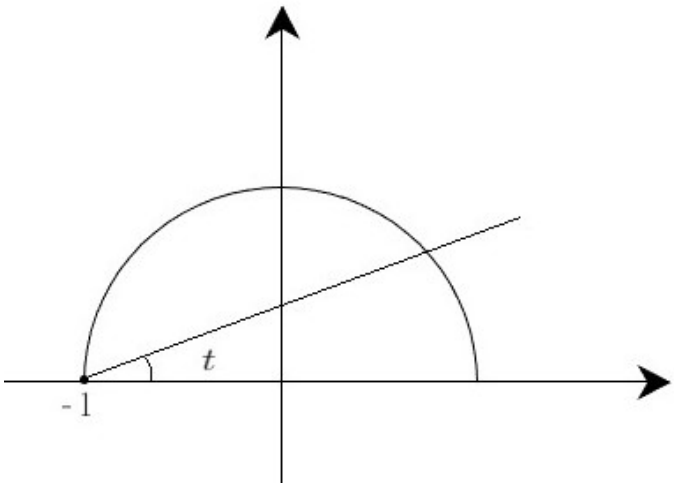

Рис. 2.

Будем искать точки пересечения прямой $y = t(x+1)$ с половиной окружности.

$$((x+1)t)^2 + x^2 = 1$$
$$(x+1)^2t^2 = (1-x)(1+x)$$
$$xt^2 + t^2 = 1 - x$$
$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Такие замены называют *заменами Эйлера.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача 2.

а) Доказать, что
$$x^3 + y^3 = 1$$
не имеет рациональной параметризации.

б) Обобщить это на случай
$$x^n + y^n = 1,\ n \geqslant 3$$

Задача 3. Найти рациональную параметризацию.
$$x^3 + y^3 = xy$$

Пример 2.
$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

Универсальная замена:
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t$$
$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Пример 3. Интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях.
$$\int e^{x^2}dx$$
$$\int \frac{\sin x}{x}dx$$
$$\int \frac{e^x}{x}dx$$

Есть общая наука, которая объясняет берется интеграл или нет, эта наука восходит к теореме Лиувилля.

Элементарные функции:
$$x^n,\ e^x,\ \ln x,\ \cos x,\ \sin x,\ \arcsin x,\ \arccos x, ...,\ \sqrt[m]{x}$$

еще арифметические операции $+,\ -,\ \cdot, ...$ и композиция.

Наблюдения, которые сделаны классиками:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Полезно перейти к комплексным числам $\mathbb{C}$. Тогда можно сократить этот список и оставить от него рациональные функции, экспоненту и логарифм, так как, например
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
Для того, чтобы найти арккосинус надо решить уравнение
$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = t$$
$$(e^{ix})^2 - 2e^{ix}t + 1 = 0$$
Получим, что арккосинус выразится через логарифмы.

2) Операцию композиции можно выразить алгебраически.
$$f = e^g \;\Leftrightarrow\; f^{'} = fg^{'}$$

Будем говорить, что функция является *элементарной*, если мы можем за конечное число шагов, решая алгебраические уравнения и беря композиции с экспонентой и логарифмом дойти до рациональной функции.

Замечание 2. Если кому-то интересно с этим разобраться, то в журнале "Математическое просвещение 2003"есть статья Прасолова про теорему Лиувилля.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3

Пространство $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ - линейное, Евклидово, нормированное и метрическое пространство.

Определение 1.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{(x_1, ...x_n) - \text{упорядоченный набор} |\ x_k \in \mathbb{R}\} \tag{3.1}$$

Операции:

- $+$
$$(x_1, ...x_n) + (y_1, ...y_n) = (x_1 + y_1, ...x_n + y_n) \tag{3.2}$$
- $\cdot\alpha \in \mathbb{R}$
$$\alpha(x_1, ...x_n) = (\alpha x_1, ...\alpha x_n) \tag{3.3}$$

С этими операциями $\mathbb{R}^n$ - *линейное, векторное пространство над* $\mathbb{R}$.

Вектора
$$e_k = (0, 0...\underset{k}{1}, 0...0) \tag{3.4}$$
образуют *базис в* $\mathbb{R}^n$, то есть всякий $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представляется в виде
$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \tag{3.5}$$
x_k называют *координатами вектора* x

Евклидово пространство

На $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определена функция:

$$x,\ y \to \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$$

$x = (x_1, x_2, ...x_n),\ y = (y_1, y_2, ...y_n)$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \tag{3.6}$$

Свойства этого отображения:

1)
$$\langle x, x\rangle \geqslant 0 \tag{3.7}$$
$$\langle x, x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \tag{3.8}$$

2)
$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \tag{3.9}$$

3)
$$\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle z, y\rangle \tag{3.10}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 2. Если на линейном пространстве (над $\mathbb{R}$) задана функция, удовлетворяющая свойствам 1), 2), 3), то такую функцию называют *скалярным произведением*, а линейное пространство со скалярным произведением называют *Евклидовым пространством.*

Теорема 1 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца-Гёльдера-...)**.**

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{3.11}$$

равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим функцию от $t \in \mathbb{R}$

$$p(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$$

1) $y = 0$ утверждение верно.

2) $y \neq 0$, значит $\langle y, y\rangle \neq 0$. $p(t) \geqslant 0\ \forall t$, значит $D \leqslant 0$

$$D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$$

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Если достигается равенство, то $D = 0$, значит существует t_0: $p(t_0) = 0$, следовательно $x + t_0 y = 0$.

□

Нормированное пространство

Длина или норма верктора $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{3.12}$$

Свойства:

0)
$$\|\cdot\| : \ \mathbb{R}^n \to [0, +\infty) \tag{3.13}$$

1)
$$\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \tag{3.14}$$

2)
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \tag{3.15}$$

3) Неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \tag{3.16}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

□

Определение 3. Линейное пространство, на котором задана функция, удовлетворяющая свойствам 0), 1), 2), 3), называется *нормированнным пространством*, а эта функция называется *нормой*.

Норма не всегда задается скалярным произведением.

Задача 4. Доказать равенство параллелограмма для $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{3.17}$$

Это равенство является достаточным условием того, что пространство Евклидово.

Метрическое пространство

Рассмотрим функцию

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{3.18}$$

обладающую следующими свойствами:

1) $\rho \geqslant 0$

$$\rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \tag{3.19}$$

2)

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \tag{3.20}$$

3) Неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \tag{3.21}$$

Доказательство.

$$\|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$$

□

Если на непустом множестве X определена функция $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая свойствам 1), 2), 3), то такая функция называется *метрикой*, а пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*.

Пример 4 (метрические пространства)**.**

1) $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$$

2) $X \neq \emptyset$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим неравенство треугольника

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

Если слева 1, то справа не может быть 0, так как справа 0 только в случае $x = y = z$.

Такая метрика называется *дискретной*.

3) $\mathbb{R}$

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

f - функция, неравенство треугольника выполняется, симметричность выполняется, $\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$, значит f должна быть инъекцией.

4) $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|$$

5) $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k - y_n|$$

$$|x_k - y_k| \leqslant |x_k - z_k| + |z_k - y_k|$$

$$|x_k - y_k| \leqslant \max_k |x_k - z_k| + \max_k |z_k - y_k|$$

так как теперь правая часть не зависит от k, то

$$\max_k |x_k - y_k| \leqslant \max_k |x_k - z_k| + \max_k |z_k - y_k|$$

6) $\{0,1\}^n = \{\underbrace{(001110....)}_{n}\}$

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7) $X \neq \emptyset$, $B(X) = \{f|\ f : X \to \mathbb{R}^n,\ f - \text{ограничена}\}$

$$\rho(f, g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - z(x)| + |z(x) - g(x)|$$
$$|f(x) - g(x)| \leqslant \sup_X |f(x) - z(x)| + \sup_X |z(x) - g(x)|$$
$$\sup_X |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_X |f(x) - z(x)| + \sup_X |z(x) - g(x)|$$

Определение 4. *Открытым шаром с центром в a и радиусом r* называется

$$B(a, r) = \{x|\ \rho(a, x) < r\} \tag{3.22}$$

Замкнутым шаром называется

$$\overline{B}(a, r) = \{x|\ \rho(a, x) \leqslant r\} \tag{3.23}$$

Пример 5.

- $\mathbb{R}^2$

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$B(0, 1) = \{(x_1, x_2)|\ |x_1| + |x_2| < 1\}$$

Получаем внутренность ромба (Рис. 3.).

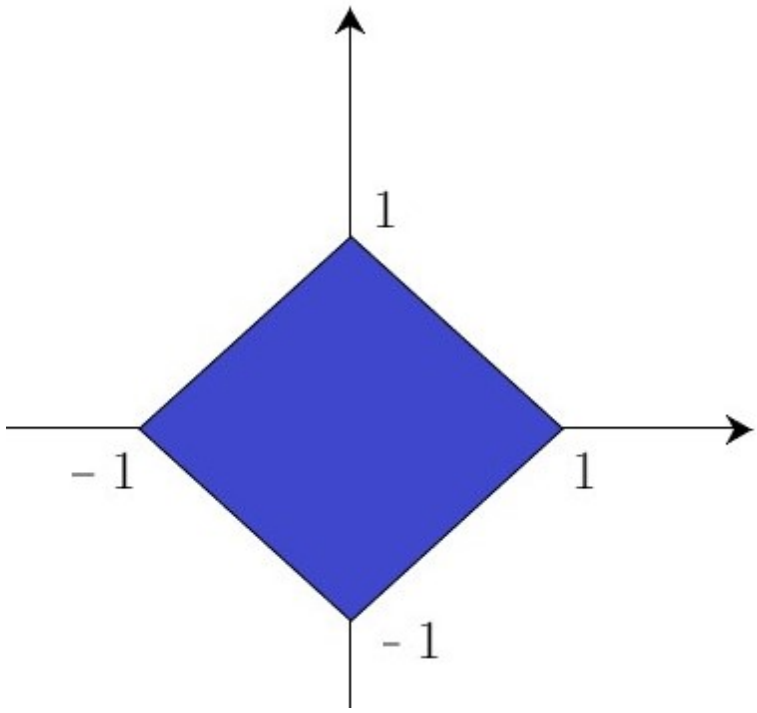

Рис. 3.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

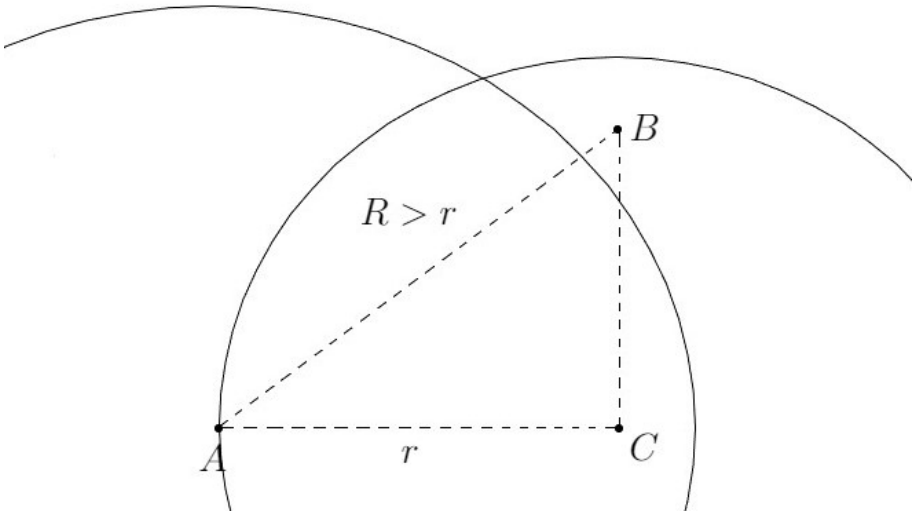

Рис. 4.

- Возьмем метрическое пространство из трех, точек и возьмем круги $B(C,r)$ и $B(A,R),\ R>r$ (Рис. 4.)

$$\{C,A,B\} = B(C,r) \supsetneqq B(A,R) = \{A,C\}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4

Пространство $\mathbb{R}^n$

Метрическое пространство

Пусть (X, ρ) - метрическое пространство.

Определение 5. $x_n \to x$, если
$$\rho(x_n, x) \to 0$$

Утверждение 2. *Предел определен единственным образом, то есть если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x = y$.*

Доказательство.
$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\rho(x, y) \leqslant 0 \;\Rightarrow\; \rho(x, y) = 0$$

□

Утверждение 3. *Если последовательность сходится, то она ограничена, то есть лежит в некотором шаре.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$, значит $\rho(x_n, x) \to 0$, следовательно $\exists N : \ \forall n > N$
$$\rho(x_n, x) < 1$$
Пусть
$$R = \max\{1,\ \rho(x_1, x),\ \rho(x_2, x), ...\rho(x_n, x)\}$$
Ясно, что $x \in \overline{B}(x, R)$. □

Утверждение 4 (непрерывность метрики)**.** *Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то*
$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$$

Доказательство. Полезное неравенство:
$$|\rho(x, u) - \rho(x, v)| \leqslant \rho(u, v)$$
$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y) + \rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(y_n, y) + \rho(x_n, x) \to 0$$

□

Теперь посмотрим, что происходит в $\mathbb{R}^n$ с метрикой
$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k^2)^2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма 1. *Верно неравенство*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leqslant \sqrt{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k| \tag{4.1}$$

Теорема 2. *Последовательность $x^m = (x_1^m, ...x_n^m)$ (индекс вверху для последовательностей в $\mathbb{R}^n$, чтобы не путать с координатами) сходится к x по метрике ρ тогда и только тогда, когда*

$$\forall k = 1, ...n \; x_k^m \to x_k$$

Доказательство.

1) Так как
$$|x_k^m - x_k| \overset{\text{I н-во леммы}}{\leqslant} \rho(x^m, x) \to 0$$
получаем
$$x_k^m \to x_k$$

2) Если $x_k^m \to x_k$, то
$$\max_k |x_k^m - x| \to 0$$
из второго неравенства леммы 1
$$\rho(x^m, x) \to 0$$

□

Теорема 3 (Больцано)**.** *Из ограниченной последовательности элементов $\mathbb{R}^n$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. $x^m \in B(x^0, R)$, значит

$$|x_k^m - x_k^0| \leqslant \rho(x^m, x^0) \leqslant R \; \forall k = 1, ...n$$

значит x_k^m - ограниченная последовательность. Рассмотрим при $n = 2$, для больших n аналогично. x_1^m - ограничена, значит по теореме Больцано существует сходящаяся подпоследовательность
$$x_1^{m_s} \to a_1$$
$x_2^{m_s}$ - ограничена, значит по теореме Больцано существует сходящаяся подпоследовательность
$$x_2^{m_{s_t}} \to a_2$$
Получаем
$$x^{m_{s_t}} = (x_1^{m_{s_t}}, x_2^{m_{s_t}}) \xrightarrow[t\to\infty]{} (a_1, a_2)$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 6. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем выполняется критерий Коши, то есть x_n - сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,\ m > N$

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Последовательности, для которых выполнено это условие, называются *фундаментальными* или *последовательностями Коши.*

Замечание 3. Из сходимости всегда следует фундаментальность. Если $x_n \to x$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N$

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon$$

значит $\forall n,\ m > N$

$$\rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < 2\varepsilon$$

Пример 6.

- $\mathbb{R}$

  $$\rho(x, y) = |x - y|$$

  это полное пространство.

- $\mathbb{Q}$

  $$\rho(x, y) = |x - y|$$

  это неполное пространство.

- $X \neq \emptyset$

  $$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

  $$x_n \to x \ \Leftrightarrow\ \rho(x_n, x) \to 0$$

  значит $\exists N:\ \forall n > N$

  $$\rho(x_n, x) < 1 \ \Rightarrow\ \rho(x_n, x) = 0$$

  Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists N:\ \forall n,\ m > N$

  $$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

  $$x_n = x_m$$

  $\forall n > N$

  $$x_n = x_{N+1}$$

  это полное пространство.

- $\mathbb{R}$

  $$\rho(x) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

  $x_n = n$ - фундаментальная последовательность, но не сходится, значит пространство не полное.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 4. $\mathbb{R}^n$ - *полное метрическое пространство.*

Доказательство. x^m - фундаментальная последовательность.

$$|x_k^m - x_k^l| \leqslant \rho(x^m, x^l)$$

следовательно $\forall k = 1, ...n$ x_k^m - фундаментальная, значит $x_k^m \to a_k$ □

Что означает пополнить пространство? Рассмотрим $X \subset Y$ - метрическое пространство, метрики должны совпадать. Чаще всего делают изометрическое вложение $f: \ X \to Y$:

$$\rho_y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_x(x_1, x_2)$$

Хотим, чтобы Y было полным и $\overline{X} = Y$, то есть добавляем все пределы последовательностей и тогда Y - пополнение X.

Например,

$$Y = \{\text{фундаментальные последовательности } \{x_n\}\}$$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \ \Leftrightarrow \ \rho(x_n, y_n) \to 0$$

Элементы Y - классы эквивалентности.

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

(Y, ρ)

$$x \in X \to \{x_n \equiv x\}$$

Осталось проверить, что (Y, ρ) - полное и то, что любой элемент Y приближается постоянной последовательностью и получившееся пространство - пополнение X.

Задача 5. Пополнить $\mathbb{Q}$ и получить $\mathbb{R}$ (Математический анализ Львовский).

Сходимость в нормированном пространстве

Определение 7. Линейное пространство (над $\mathbb{R}$) называется *нормированным*, если определена функция $\|\cdot\|: \ X \to [0, +\infty)$:

1)
$$\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \tag{4.2}$$

2)
$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \tag{4.3}$$

3)
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \tag{4.4}$$

$\|\cdot\|$ - *норма.*

Метрика:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{4.5}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

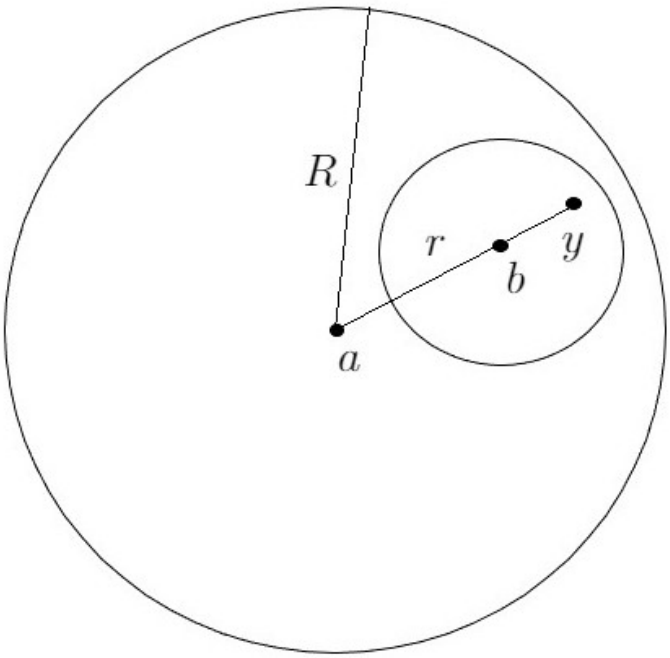

Рис. 5.

Утверждение 5. *В нормированном пространстве $B(a,R) \supset B(b,r)$, следовательно $R \geqslant r$.*

Доказательство. $b = a$ - самостоятельно. Возьмем точку y (как на Рис. 5.)
$0 < t < r$

$$\|y-a\| = \left\| t\frac{b-a}{\|b-a\|} + b - a \right\| \leqslant R$$

$$\left(\frac{t}{\|b-a\|} + 1\right)\|b-a\| \leqslant R$$

$$t + \|b-a\| \leqslant R \; \forall t < r$$

Устремим $t \to r$

$$r + \|b-a\| \leqslant R$$

□

Утверждение 6. *В нормированном пространстве если $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$, то*

$$x_n + y_n \to x + y \tag{4.6}$$

$$\alpha_n x_n \to \alpha x \tag{4.7}$$

Доказательство.

$$\|(x+y) - (x_n + y_n)\| = \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leqslant$$
$$\leqslant \underset{\substack{\uparrow \\ \text{огр.}}}{|\alpha_n|}\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|x_n - x\|} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|\alpha_n - \alpha|}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{число}}}{\|x\|} \to 0$$

□

Задача 6.

а)
$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

б)
$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \|x_n\| \to \|x\|$$

Какие могут быть нормы на $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Теорема 5. *Если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ - две произвольные нормы на $\mathbb{R}^n$, то существуют числа c_1 и $c_2 > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$*

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1 \tag{4.8}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5

Пространство $\mathbb{R}^n$

Сходимость в нормированном пространстве

Доказательство теоремы 5. Достаточно доказать для случая

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ есть базис

$$e_k = (0, ...0, \underset{k}{1}, 0, ...0)$$

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$

$$\|x\|_1 = \|x_1 e_1 + ... + x_n e_n\|_1 \leqslant \|x_1 e_1\|_1 + ... + \|x_n e_n\|_1 = |x_1|\|e_1\|_1 + ... + |x_n|\|e_n\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|_2 \left(\|e_1\|_1 + ... + \|e_n\|_1\right) = \|x\|_2 \cdot const$$

Итак, $\|x\|_1 \leqslant C_1 \|x\|_2$ и $x_n \overset{\|\cdot\|_2}{\to} x$, значит $x_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} x$, так как

$$\|x_n - x\|_1 \leqslant C\|x_n - x\|_2 \to 0$$

Предположим, что не существует $C > 0$:

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$$

$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists x_N \neq 0$:

$$\|x_N\|_2 > N\|x_N\|_1$$

Пусть $y_N = \frac{x_N}{\|x_N\|_2}$ неравенство останется

$$1 = \|y_N\|_2 > N\|y_N\|_1$$

Последовательность y_N

1)
$$\|y_N\|_2 = 1$$

2)
$$\|y_N\|_1 \to 0 \ \left(< \frac{1}{N}\right)$$

По теореме Больцано существует $y_{N_k} \to y$ по $\|\cdot\|_2$, тогда

$$1 = \|y_{N_K}\|_2 \to \|y\|_2 = 1$$

следовательно

$$y_{N_k} \overset{\|\cdot\|_1}{\to} y$$

но

$$y_{N_K} \overset{\|\cdot\|_1}{\to} 0$$

то есть $y = 0$, получили противоречие с $\|y\|_2 = 1$. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 8. Если нормированное пространство полно, то его называют *банаховым пространством.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \tag{5.1}$$

если ряд сходится, то

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \to 0$$

Утверждение 7. *Если нормированное пространство полно, то из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Доказательство.

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{M} x_n\right\| = \left\|\sum_{n=M+1}^{N} x_n\right\| \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\| \xrightarrow[M,N\to\infty]{} 0$$

□

Пример 7. Линейное пространство матриц $n \times n$ M_n (элементы из $\mathbb{R}$), это пространство эквивалентно $\mathbb{R}^{n^2}$. Норма

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

где $\|x\|$ - евклидова норма. $n = 1$

$$\|a\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|ax|}{|x|} = |a|$$

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2}}{\|x\|}$$

Вносим $\|x\|$ под корень и можем считать, что $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$a^2x_1^2 + b^2x_2^2 \to \max$$

$$a^2(1 - x_2^2) + b^2x_2^2 = a^2 + (b^2 - a^2)x_2$$

пусть $b^2 >\geqslant a^2$, тогда максимум достигается при $x_2 = 1$ и равен b^2

$$\|A\| = \max\{|a|, |b|\}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\|A\| < \infty$$

, так как можем считать $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

$$ax_1 + bx_2 \leqslant |a| + |b|$$

$$cx_2 + dx_2 \leqslant |c| + |d|$$

Утверждение 8.

1) $\|A\|$ *- норма.*

2)

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \tag{5.2}$$

Замечание 4. sup - наименьшее из чисел C :

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\|$$

Доказательство.

1) Проверим свойства нормы

   1.
   $$\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x\; Ax = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$

   2.
   $$\|\alpha A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\alpha A x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\alpha| \|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \cdot \|A\|$$

   3.
   $$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leqslant \|A\| + \|B\|$$
   следовательно
   $$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

   Получаем, что это норма.

2) Заметим, что $\forall x$

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{\|(A \cdot B)x\|}{\|x\|} = \frac{\|A(Bx)\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$$

□

Задача 7.

1) Привести пример

$$\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Найти норму матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Итак $(M_n, \|\cdot\|)$ - банахово пространство.

Определение 9.

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ... \tag{5.3}$$

Для сходимости достаточно сходимости следующего ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$$

Верно ли, что $e^{A+B} = e^A e^B$? Нет.

Задача 8. Доказать, что если

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

то

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Верно ли обратное?

Задача 9. Найти

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Пространство ограниченных функций

Сходимости

Пусть $X \neq \emptyset$

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\} \tag{5.4}$$

пространство ограниченных функций, это линейное пространство

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{5.5}$$

$(B(X), \|\cdot\|)$ - нормированное пространство.

$$f_n \to f \;\Leftrightarrow\; \|f_n - f\| \to 0 \;\Leftrightarrow\; \sup_X |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

То есть $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n > N$

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

это равномерная сходимость.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 8.

- $$f_n(x) = \frac{x}{n},\ x \in (0,1)$$

  Последовательность изображена на Рис. 6.

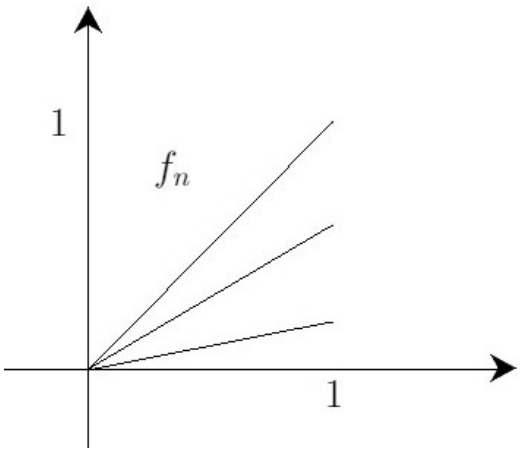

Рис. 6.

$$\sup_X |f_n| = \frac{1}{n} \to 0$$

получаем, что здесь равномерная сходимость.

- $$f_n(x) = x^n,\ x \in (0,1)$$

  Последовательность изображена на Рис. 7.

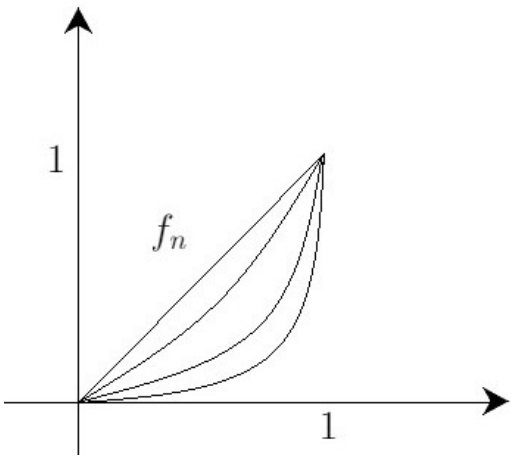

Рис. 7.

$$\sup_X |f_n| = 1 \nrightarrow 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

здесь поточечная сходимость.

Утверждение 9. *На $B([0,1])$ не существует метрики ρ такой, что*

$$\rho(f_n, f) \to 0 \;\Leftrightarrow\; f_n(x) \to f(x)\ \forall x \tag{5.5}$$

Доказательство. Доказываем от противного, пусть такая метрика существует. Будем строить последовательность f_n :

1)
$$\rho(f_n, 0) \to 0$$

2)
$$f_n \nrightarrow 0 \text{ поточечно}$$

Возьмем
$$B(0,1) = \{f|\ \rho(f,0) < 1\}$$
Существует отрезок $\Delta_1 \subset [0,1]$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Построим последовательность, изображенную на Рис. 8.

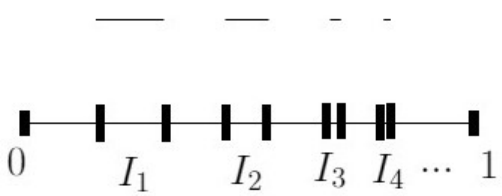

Рис. 8.

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } I_1 \\ 0 & \text{вне} \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } I_2 \\ 0 & \text{вне} \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } I_n \\ 0 & \text{вне} \end{cases}$$

$g_n \to 0$ поточечно, значит $\rho(g_n, 0) \to 0$, следовательно $\exists N :\ g_N \in B(0,1)$ Положим

$$f_1 = g_N$$

$$\Delta_1 = I_N$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Аналогичными построениями на отрезке Δ_1 и так далее, получаем $\exists \Delta_n \supset \Delta_{n-1}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Delta_n \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$f_n \in B\left(0, \frac{1}{n}\right) \bigcap\limits_n \Delta_n \ni c$

$$f_n(c) = 1$$

следовательно

1)
$$\rho(f_n, 0) < \frac{1}{n} \to 0$$

2)
$$f_n(c) = 1 \nrightarrow 0$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6

Пространство ограниченных функций

Сходимости

Теорема 6. *$B(X)$ - банахово пространство (в $B(X)$ выполняется критерий Коши).*

Доказательство. Пусть f_n - фундаментальная, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N$

$$\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$$

$$\sup_X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

то есть $\forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

следовательно числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ при фиксированном x фундаментальна, значит $\forall x\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ обозначим этот предел $f(x)$.

По условию $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N\ \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Устремим $m \to \infty$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$\exists N:\ \forall n > N\ \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

отсюда следует ограниченность и также следует

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

□

Если $(X, \|\cdot\|)$ - полное, то

$$\sum_n \|x_n\| \ - \ \text{сходится} \ \Rightarrow \ \sum_n x_n \ - \ \text{сходится}$$

Следствие.(признак Вейерштрасса) *Пусть $f_n \in B(X)$ и существует числовая последовательность a_n такая, что $|f_n(x)| \leqslant a_n\ \forall x,\ n$ и $\sum\limits_n a_n$ - сходится. Тогда $\sum\limits_n f_n(x)$ сходится в $B(X)$, то есть сходится равномерно.*

Доказательство.

$$\sup_X |f_n(x)| \leqslant a_n$$

$$\|f_n\| \leqslant a_n$$

следовательно

$$\sum_n \|f_n\| < \infty$$

значит $\sum\limits_n f_n$ - сходится. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

$$\sum \frac{1}{2^n} < \infty$$

значит ряд сходится.

Равномерная сходимость

Обозначим

$$f_n \overset{B(X)}{\to} f \ \Leftrightarrow\ \sup_X |f_n - f| \to 0$$

f_n называется равномерно сходящейся на множестве X и обозначается

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$$

Докажем в качестве напоминания теорему

Теорема 7. *Если f_n - непрерывна на $[a,b]$ и $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, то f - непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. $x_0 \in [a,b]$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$\forall \varepsilon > 0$ используем равномерную сходимость и получаем, что $\exists n$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in [a,b]$$

значит

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Фиксируем n $\exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

следовательно

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

□

Теорема 8. *$C[a,b]$ - пространство непрерывных функций с нормой*

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\ (\max) \tag{6.1}$$

банахово пространство.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. $C[a,b] \subset B([a,b])$, пусть $f_n \in C[a,b]$ - фундаментальна, значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,m > N$

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

$\exists f:\ f_n \to f$ в $B([a,b])$, так как норма одна и та же и $f \in C[a,b]$ по теореме 7. □

Равномерная сходимость не сохраняет дифференцируемость.

Пример 10.

- $$f_n(x) = x \cdot \operatorname{arctg} nx,\ x \in [-1,1]$$

  Докажем равномерную сходимость к $\frac{\pi}{2}|x|$. Сначала отойдем от 0 на ε, на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$

  $$\left| x \cdot \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|x| \right| \leqslant \pi\varepsilon$$

  На $[-1,-\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1]$, рассмотрим при $x > 0$

  $$\left| x \cdot \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|x| \right| \leqslant \left| \operatorname{arctg} \varepsilon n - \frac{\pi}{2} \right|$$

  Выбором n можем сделать

  $$\left| x \cdot \operatorname{arctg} n\varepsilon - \frac{\pi}{2} \right| < \pi\varepsilon$$

- $$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

  $$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

  получили равномерную сходимость.

- $$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n} \rightrightarrows 0$$

  $$f_n^{'}(x) = n \cos n^2 x$$

  $f_n^{'}(x)$ не сходится даже поточечно.

Теорема 9. *Если $f_n \in C^1[a,b]$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ и $f_n^{'} \rightrightarrows g$ на $[a,b]$. Тогда*

$$g = f^{'}$$

Доказательство. Зафиксируем y из $[a,b]$, рассмотрим

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x-y}, & x \neq y \\ f_n^{'}(y), & x = y \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$h_n(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция.

Пусть $x \in [a, b]$

$$h_n(x) \to h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x \neq y \\ g(y), & x = y \end{cases}$$

Если докажем, что $h(x)$ - непрерывна, то

$$\lim_{x \to y} h(x) = h(y), \text{ то есть } f^{'} = g$$

Достаточно доказать, что $h_n \rightrightarrows h$. Докажем, что h_n - фундаментальная последовательность, то есть

$$\sup_X |h_n(x) - h_m(x)| \xrightarrow[n,m \to \infty]{?} 0$$

$$h_n(x) - h_m(x)\Big|_{x=y} = f_n^{'}(y) - f_m^{'}(y) \to 0$$

$$h_n(x) - h_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - \frac{f_m(x) - f_m(y)}{x - y} =$$

$$= \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))}{x - y} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} (f_n^{'}(c) - f_m^{'}(c)) \leqslant \sup_X |f_n^{'} - f_m^{'}| \to 0$$

то есть

$$|h_n(x) - h_m(x)| \leqslant \sup_X |f_n^{'}(x) - f_m^{'}(x)| \to 0$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7

Пространство ограниченных функций

Равномерная сходимость

Замечание 5 (к теореме 9)**.**

1) $f \in C^1[a,b]$.

2) Условие $f_n \rightrightarrows f$ можно заменить на условие: $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0)$ сходится. Тогда $\exists f : \ f_n \rightrightarrows f$, f - дифференцируема и $f' = g$

$$(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} (f_n'(c) - f_m'(c))(x - x_0)$$

следовательно

$$\sup_{[a,b]} |f_n - f_m| \leqslant |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \sup_{[a,b]} |f_n' - f_m'|(b-a) \to 0$$

3) В доказательстве не использовалась непрерывность f_n'.

Следствие. *Линейное пространство $C^k[a,b]$ (k - раз непрерывно дифференцируемые) с нормой*

$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f| + \max_{[a,b]} |f'| + ... + \max_{[a,b]} |f^{(k)}| \tag{7.1}$$

банахово пространство.

Доказательство. Докажем для $k = 1$. Пусть f_n - фундаментальная последовательность, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n, m > N$

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

значит

$$\max_{[a,b]} |f_n - f_m| < \varepsilon$$

$$\max_{[a,b]} |f_n' - f_m'| < \varepsilon$$

значит f_n - фундаментальна в $C[a,b]$, следовательно $\exists f \in C[a,b] : \ f_n \rightrightarrows f$

$$\max_{[a,b]} |f_n - f| \to 0$$

f_n' - фундаментальна в $C[a,b]$, значит $\exists g \in C[a,b] : \ f_n' \rightrightarrows g$

$$\max_{[a,b]} |f_n' - g| \to 0$$

следовательно $f' = g$ по теореме 9 и $f \in C^1[a,b]$

$$\|f_n - f\| = \max_{[a,b]} |f_n - f| + \max_{[a,b]} |f_n' - f_m'| \to 0$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 11. Пространство $C^1[a,b]$

$$\|f\|_0 = \max_{[a,b]} |f|$$

$$\|f\|_1 = \max_{[a,b]} |f| + \max_{[a,b]} |f'|$$

эти нормы не являются эквивалентными.

Если бы выполнялось неравенство

$$\|\cdot\|_1 \leqslant C_2 \|\cdot\|_0$$

то $\max\limits_{[a,b]} |f'|$ оценивалось бы через $\max |f|$, но, например

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin n^2 x$$

$$\max_{[a,b]} |f_n| \to 0$$

$$f_n'(x) = n \cos n^2 x$$

$$\max_{[a,b]} |f_n'| \to \infty$$

Открытые и замкнутые множества

Пусть (X, ρ) - метрическое пространство

Определение 10. Множество $U \subset X$ называется *открытым*, если $\forall a\ \exists B(a,r)$: $B(a,r) \subset U$.

$F \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus F$ открыто.

Пример 12.

1) Открытый шар - открытое множество.

2) Замкнутый шар - замкнутое множество.

Доказательство. Возьмем $B(a,r)$ и $b \in B(a,r)$ и шар $B(b,\delta)$ как на Рис. 9.

$$\delta = r - \rho(a,b)$$

Возьмем $x \in B(b,\delta)$

$$\rho(a,x) \leqslant \rho(a,b) + \rho(b,x) < \rho(a,b) + (r - \rho(a,b)) = r$$

про замкнутый шар доказать самостоятельно. □

Утверждение 10. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство и $F \subset X$ - конечномерное подпространство. Тогда F - замкнуто.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

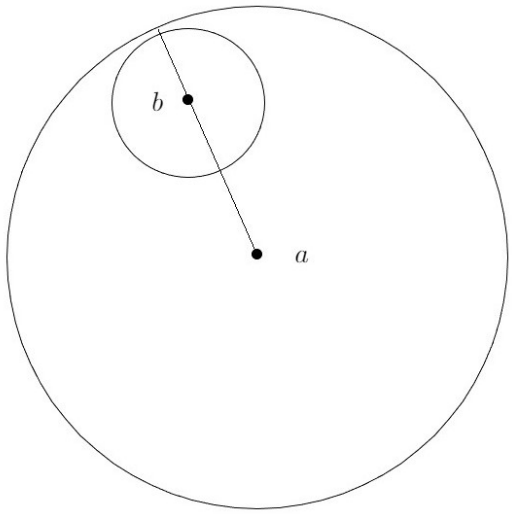

Рис. 9.

Доказательство. Пусть $F = L(e_1, ...e_n)$ - линейная оболочка, состоит из линейно независимых векторов.

$$L(e_1, ...e_n) = \{c_1e_1 + ... + c_ne_n |\ c_i \in \mathbb{R}\}$$

Возьмем $a \notin F$ и предъявим $B(a, r):\ B(a, r) \cap F = \emptyset$.

Рассмотрим

$$F_{n+1} = L(e_1, ...e_n)$$

$$e_{n+1} = a$$

Пусть $x \in F_{n+1}$, значит

$$x = c_1e_1 + ... + c_ne_n + c_{n+1}e_{n+1}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{c_1^2 + ... + c_n^2 + c_{n+1}^2}$$

$$F = \{c_{n+1} = 0\}$$

Пусть $x \in F$

$$\|x - e_{n+1}\|_2 = \sqrt{c_1^2 + ... + c_n^2 + 1} \geqslant 1$$

следовательно $\{x \in F_{n+1}:\ \|x - e_{n+1}\|_2 < 1\}$ не пересекается с F. Так как F_{n+1} - конечномерное, то $\|\cdot\|_2$ эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$ на F_{n+1}. В частности, существует C :

$$\|\cdot\|_2 \leqslant C\|\cdot\|$$

следовательно

$$B\left(e_{n+1}, \frac{1}{c}\right) \cap F_{n+1} = \{x \in F_{n+1}:\ \|x - e_{n+1}\|_2 < 1\}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

это множество не пересекается с F, значит

$$B\left(a, \frac{1}{c}\right) \cap F = \emptyset$$

□

Задача 10. Показать на примере, что конечномерность важна.

Теорема 10.

1) *Объединение всякого набора открытых множеств и пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством.*

2) *Пересечение всякого набора замкнутых множеств и объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство.

1) Рассмотрим $\{U_\alpha\}$, $a \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, значит $\exists \alpha_0 : \ a \in U_{\alpha_0}$, следовательно $\exists B(a,r) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_\alpha$

   Рассмотрим $\{U_1, ...U_n\}$, $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$, значит $a \in U_k \ \forall k$, следовательно $\forall k \ \exists B(a, r_k) \subset U_k$. Возьмем
   $$r = \min\{r_1, ...r_n\}$$
   $\forall k \ B(a,r) \subset U_k$, следовательно $B(a,r) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$.

2) Указание: рассмотреть $X \setminus F$ и применить формулы Моргана.

□

Замечание 6. Всякое открытое множество является объединением открытых шаров

$$U = \bigcup_{a \in U} B(a,r)$$

Пусть $A \subset X$

- точка $a \in A$ называется *внутренней*, если $\exists B(a,r) \subset A$
- точка a называется *граничной*, если $\forall B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ и $B(a,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$
- точка a называется *предельной*, если $\forall B(a,r) \ B(a,r) \cap A$ - бесконечное множество.

Утверждение 11. *Точка a - предельная точка A тогда и только тогда, когда* $\forall B(a,r)$

$$B^{'}(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\} \tag{7.2}$$
$$B^{'}(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Предположим противное, если в пересечении конечное число точек, то мы можем выбрать шар такой, что в нем нет точек из A.

□

Теорема 11. *Следующие утверждения равносильны*

1) *A - замкнуто*
2) *A содержит все свои граничные точки*
3) *A содержит все свои предельные точки*
4) *если $a_n \in A$ и $a_n \to a$, то $a \in A$.*

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) Если $a \in X \setminus A$, то $\exists B(a,r) \subset X \setminus X \setminus A$ и в этой окрестности нет точек из A.

2) $\Rightarrow$ 3) Если a - предельная точка и $a \notin A$, но если точка предельная, то она граничная, получили противоречие.

3) $\Rightarrow$ 4) $\exists a_n = a$, тогда очевидно, если $a_n \neq a$, то в любой $B^{'}(a,r)$ есть точка из A, следовательно a - предельная точка.

4) $\Rightarrow$ 1) Предположим противное. Берем шары $B\left(a, \frac{1}{n}\right)$, в каждом из них есть какое-то a_n

$$\rho(a_n, a) \to 0$$

$$a_n \to a$$

значит $a \in A$. Получили противоречие.

□

Множество

$$\overline{A} = A \cup \{\text{граничные точки} A\} \tag{7.3}$$

называется *замыканием множества A.*

Утверждение 12.

1) *$\overline{A}$ - замкнуто*
2) *$\overline{A}$ - наименьшее закнутое множество, содержащее A, то есть*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A} F \tag{7.4}$$

3) *A - замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

1) Пусть b - граничная точка $\overline{A}$, в любом шаре есть точка из $\overline{A}$, либо это точка из A, либо это граничная точка A, следовательно граничная точка A и $b \in \overline{A}$.

2) Если F - замкнуто и $A \subset F$, то и граничные точки A должны содержаться в F. Пусть $a \notin F$ - граничная точка A, тогда для F она граничная точка и она должна лежать в F.

3) уже доказали.

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8

Открытые и замкнутые множества

Вопрос:

$$\overline{B(a,r)} \stackrel{?}{=} \overline{B}(a,r)$$

Возьмем пространство X с дискретной метрикой, $B(a,1) = \{a\}$, $\overline{B}(a,1) = X$, но $\overline{B(a,1)} = \{a\}$, то есть в метрических пространствах это не так.

Задача 11. В нормированном пространстве

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$$

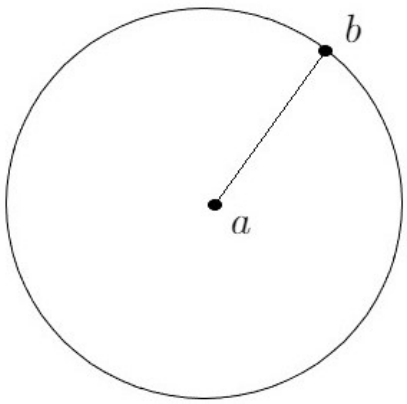

Рис. 10.

$$a + (b-a)t,\ t \in [0,1)$$

Очевидно, что сколь угодно близкая точка к b содержится в A, значит b - граничная точка.

(X,ρ) - метрическое пространство, $A \subset X$, (A,ρ) - метрическое пространство.

Утверждение 13. *U_A - открытое множество в (A,ρ) тогда и только тогда, когда существует открытое множество U в (X,ρ) :*

$$U_A = U \cap A \tag{8.1}$$

Доказательство. Возьмем

$$B^A(a,r) = \{x \in A |\ \rho(x,a) < r\}$$

$a \in A$

$$B^A(a,r) = B(a,r) \cap A$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Leftrightarrow$ U_A - открытое множество в A, следовательно

$$U_A = \bigcup_\alpha B_\alpha^A = \bigcup_\alpha (B_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) \cap A = U \cap A$$

где $U = \bigcup\limits_\alpha B_\alpha$

При доказательстве в одну сторону читать сначала, а в другую с конца. $\square$

Компакты

Определение 11. Множество $K \subset X$ ((X, ρ) - метрическое пространство) называется *компактом*, если для всякого набора открытых множеств $\{U_\alpha\}$, покрывающих K, существует конечный набор $U_{\alpha_1}, ...U_{\alpha_N}$, покрывающий K.

$$\{U_\alpha\} \ - \ \text{покрытие } K \ \Leftrightarrow \ K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$$

Пример 13. $\{a\}$, точка является компактом.

Утверждение 14. *$K \subset X$ ((X, ρ) - метрическое пространство) - компакт тогда и только тогда, когда K - компакт в метрическом пространстве (K, ρ).*

Доказательство.

$\Rightarrow$

$$K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha^K$$

$$U_\alpha^K = U_\alpha \cap K$$

В X

$$K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$$

$\exists \alpha_1, ...\alpha_N$:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$$

следовательно

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N (U_{\alpha_j} \cap K) = \bigcup_{j=1}^N U_{\alpha_j}^K$$

$\Leftarrow$ доказать самостоятельно.

$\square$

Пример 14. Брус $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ является компактом в $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_k (x_k - y_k)^2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Докажем для $n = 2$. Предположим противное, то есть $\exists U_\alpha$ из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие, делим прямоугольник на 4 части, хотя бы у одной из четвертей нет конечного подпокрытия, делим этот прямоугольник на 4 части, у одной из четвертей нет конечного подпокрытия и так далее (Рис. 11.)

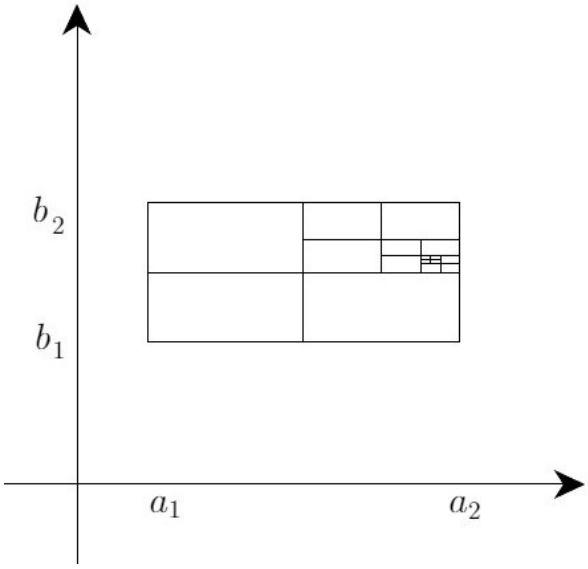

Рис. 11.

Полученная система вложенных отрезков по каждой координате и у каждой из систем есть общая точка. $c = (c_1, c_2)$ принадлежит всем построенным прямоугольникам. $\exists U_\alpha \ni c\ \exists B(c, r) \subset U_\alpha$, вписываем квадратик(Рис. 12.)

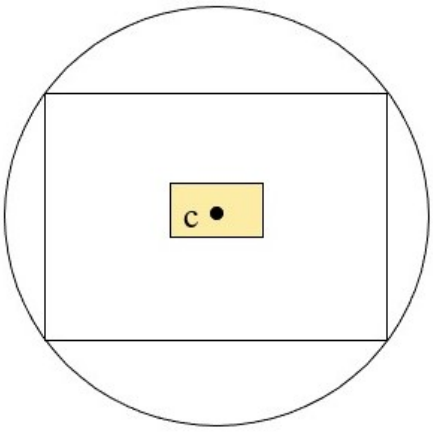

Рис. 12.

Ждем пока проекции построенных ранее прямоугольников попадут на стороны квадрата. Получили противоречие. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$B(c,r) = \left\{ x | \sum_{k=1}^{n} (x_k - c_k)^2 < r^2 \right\}$$
$$[c_1 - \delta, c_1 + \delta] \times ... \times [c_n - \delta, c_n + \delta]$$
$$\delta < \frac{r}{\sqrt{n}}$$

Теорема 12.

1) *Компакт является ограниченным множеством, то есть содержится в шаре.*

2) *Компакт является замкнутым множеством.*

3) *Замкнутое подмножество компакта - компакт.*

4) *Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку, принадлежащую компакту.*

Доказательство.

1) Берем точку $a \notin K$ и начинаем рисовать шарики радиуса 1, 2, 3, ... Эти шарики покрывают всё пространство целиком, а не только K, значит можно выбрать конечное подпокрытие, а так как они все вложены друг в друга, то это один может быть один шарик.

2) Возьмем $a \in X \setminus K$, строим вложенные замкнутые шары с центром в a и радиусом $\frac{1}{n}$. Дополнение к этим шарам открытое множество, объединение этих открытых множеств покрывает всё кроме a, $a \notin K$, можем выбрать конечное подпокрытие, берем самый маленький шарик, он лежит в дополнении к K.

3) $F \subset K$
$$F \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$
$$K \subset \bigcup_{\alpha} \cup (X \setminus F)$$
$$K \subset U_{\alpha_1} \cup ... \cup U_{\alpha_N} \cup (X \setminus F)$$
следовательно
$$F \subset U_{\alpha_1} \cup ... \cup U_{\alpha_N}$$

4) Предположим противное, предельной точки нет. То есть $\forall a \in K \ \exists B(a,r)$: в нем конечное множество точек нашего множества, но $K \subset \bigcup\limits_{a} B(a,r)$, тогда
$$K \subset B(a_1, r_1) \cup ... \cup B(a_N, r_N)$$
следовательно исходное множество конечное. Противоречие.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

□

Следствие(критерий компактности в $\mathbb{R}^n$). *$K \subset \mathbb{R}^n$ компакт тогда и только тогда, когда K - ограничено и замкнуто (евклидова метрика).*

Доказательство.

$\Rightarrow$ уже доказано.

$\Leftarrow$ K - ограничено, значит K содержится внутри некоторого бруса, а замкнутое подмножества компакта - компакт.

□

Пример 15. $\mathbb{N}$, ρ - дискретная метрика, $\mathbb{N}$ - ограниченное и замкнутое множество, не являющееся компактом. $\{n\} = B(n, 1)$.

Следствие. *Из всякой последовательности точек компакта можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к точке компакта. Обратное тоже верно (без доказательства).*

Доказательство. Пусть $x_n \in K$, существует два варианта

1) множество значений x_n бесконечно. Бесконечное подмножество K имеет предельную точку, пусть для множества значений x_n это a, берем $B\left(a, \frac{1}{k}\right) \ni x_{n_k}$, $n_1 < n_2 < ... < n_k$, $x_{n_k} \to a$.

2) множество значений x_n конечно. $\exists x_{n_k} \equiv a \subset K$ и $x_{n_k} \to a$.

□

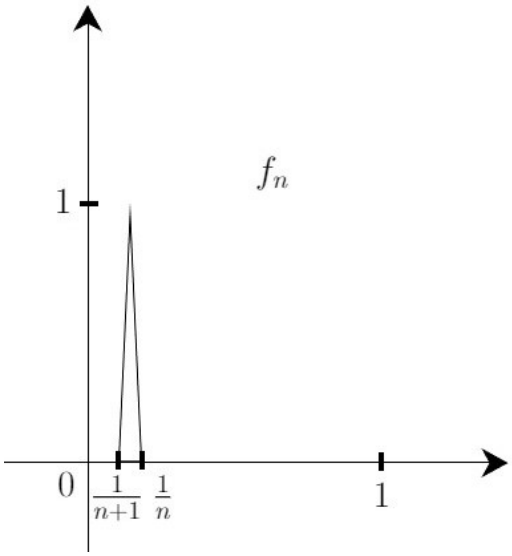

Рис. 13.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 16. Рассматриваем пространство $C[0,1]$.

$$\overline{B}(0,1) = \left\{ f : \max_{[0,1]} |f| \leqslant 1 \right\}$$

это ограниченное и замкнутое множество, этот шар не является компактом. Рассмотрим последовательность f_n, изображенную на Рис. 13.

$$\|f_n - f_m\| = 1,\ n \neq m$$

нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 13. *Если в нормированном пространстве замкнутый шар положительного радиуса является компактом, то это пространство конечномерно.*

Замечание 7. Если какой-то шар компакт, то все остальные компактны (если $\exists \overline{B}(a,r)$ - компакт, то любой замкнутый шар компакт).

$$\overline{B}(a,r) = \{x : \|x-a\| \leqslant r\}$$

$$\overline{B}(c,R) = \{x : \|x-c\| \leqslant R\}$$

$$x \to x + (c-a)$$

$$x \to \lambda x,\ \lambda = \frac{R}{r}$$

Задача 12. Доказать, что преобразования сохраняют компактность.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9

Компакты

Чтобы покрыть интервал длины 2, интервалами длины 1, то нам их необходимо минимум 2, если круг радиуса 2, то необходимо минимум 4, если шар, то минимум 8. Если увеличивать размерность до бесконечности, то конечного число шаром не хватит.

Доказательство теоремы 13. $\overline{B}(0,2)$ - компакт.

$$\bigcup_{a\in\overline{B}(0,2)} B(a,1) \supset \overline{B}(0,2)$$

можно выбрать конечное подпокрытие $B(a_1,1),...B(a_N,1)$, покрывающее $\overline{B}(0,2)$. Пусть L - линейная оболочка центров $a_1,...a_N$. Мы докажем, что L - это все пространство.

1) Пусть

$$B(0,r) \subset \bigcup_{a\in L} B(a,1)$$

Тогда докажем, что

$$B(0,2r) \subset \bigcup_{a\in L} B(a,1)$$

$x \in B(0,2r)$ это значит, что

$$\|x\| < 2r \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x}{2}\right\| < r$$

$$\left\|\frac{x}{2}\right\| \in B(0,r) \subset \bigcup_{a\in L} B(a,1)$$

следовательно $\exists a \in L$:

$$\left\|\frac{x}{2} - a\right\| < 1$$

$$\|x - 2a\| < 2$$

Получаем, что $x \in B(2a,a)$, $2a \in L$

$$B(2a,2) - 2a = B(0,2)$$

$$B(0,2) \subset \bigcup_{c\in L} B(c,1)$$

значит

$$B(2a,2) \subset \bigcup_{c\in L} B(c+2a,1)$$

$c + 2a \in L$

$$B(0,2) \subset \bigcup_{a\in L} B(a,1)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$B(0,4) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1)$$

$$B(0,8) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1)$$

$$\dots\dots$$

Итак, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$B(0,2^n) \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1)$$

следовательно

$$X \subset \bigcup_{a \in L} B(a,1)$$

Итак, $\forall x \in X \ \exists a \in L :$

$$\|x - a\| < 1$$

2) Покажем, что из 1) следует, что $X = L$. Предположим противное, пусть $X \neq L$, L - замкнутое подмножество в X, $\exists b \in X \setminus L$ и $\delta > 0 :$

$$B(b,\delta) \cap L = \emptyset$$

то есть

$$\|b - a\| \geqslant \delta \ \forall a \in L$$

$$\left\| \frac{2b}{\delta} - \frac{2a}{\delta} \right\| \geqslant 2$$

$\frac{2a}{\delta} \in L$, получили противоречие.

□

Функции нескольких переменных

Предел функций

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрические пространства, $a \in X$ - предельная точка X. Пусть $f : X \setminus \{a\} \to Y$.

Определение 12 (Гейне)**.** Элемент $b \in Y$ называется *пределом f при $x \to a$*, если $\forall \{x_n\} \in X : \ x_n \neq a, \ x_n \to a$

$$f(x_n) \to b$$

Обозначение

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \tag{9.1}$$

Теорема 14. *Предел определяется единственным образом.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. Возьмем $x_n \to a, \ x_n \neq a$, такая есть, так как a - предельная точка.

$$f(x_n) \to b$$

$$f(x_n) \to c$$

единственность следует из единственности предела последовательности. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 15 (арифметика)**.** *Пусть* $f,\ g:\ X \setminus \{a\} \to Y$, $\alpha:\ X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *и* Y *- нормированное пространство*

$$\rho_Y(u, v) = \|u - v\|$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = c,\ \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha_0$, *то*

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = b + c \tag{9.2}$$

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) \cdot f(x) = \alpha_0 b \tag{9.3}$$

Доказательство. Возьмем $x_n \to a,\ x_n \neq a$

$$f(x_n) \to b$$

$$g(x_n) \to c$$

$$\alpha(x_n) \to \alpha_0$$

по свойствам предела последовательности

$$f(x_n) + g(x_n) \to b + c$$

$$\alpha(x_n) \cdot f(x_n) \to \alpha_0 \cdot b$$

□

Теорема 16 (предел композиции)**.** $X,\ Y,\ Z$ *- метрические пространства,* $a \in X$ *- предельная точка* X, $b \in Y$ *- предельная точка* Y, $f:\ X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{b\},\ g: Y \setminus \{b\} \to Z$ *и* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{y \to b} g(y) = c$. *Тогда*

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = c \tag{9.4}$$

Доказательство. Возьмем $x_n \to a,\ x_n \neq a$

$$f(x_n) \to b,\ f(x_n) \neq b$$

$$g(f(x_n)) \to c$$

□

$X,\ Y$ - метрические пространства, a - предельная точка X, $f:\ X \setminus \{a\} \to Y$.

Определение 13 (Коши)**.** Число b называется *пределом* f *при* $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ 0 < \rho_X(x, a) < \delta$

$$\rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

Теорема 17. *Определения равносильны.*

Доказательство.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

К $\Rightarrow$ Г Возьмем $x_n \to a,\ x_n \neq a$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ 0 < \rho_X(x,a) < \delta$

$$\rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

$\exists N:\ \forall n > N$

$$0 < \rho_X(x_n, a) < \delta$$

следовательно

$$\rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon$$
$$f(x_n) \to b$$

Г $\Rightarrow$ К Предположим противное, пусть определение Коши не верно, то есть $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x:\ 0 < \rho_X(x,a) < \delta$

$$\rho_Y(f(x), b) \geqslant \varepsilon$$

Возьмем $\delta = \frac{1}{n}$, x_n :

$$0 < \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$$
$$x_n \to a,\ x_n \neq a$$

но для $f(x_n)$ выполняется

$$\rho(f(x_n), b) \geqslant \varepsilon$$

получаем противоречие.

□

Теорема 18 (об ограниченности)**.** *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. *Тогда* $\exists B(a,\delta),\ \delta > 0$ *и* $B(b,\varepsilon):\ f(x) \in B(b,\varepsilon)\ \forall x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$.

Доказательство. В определении берем δ и ε. □

Теорема 19 (отделимость)**.** *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $c \neq b,\ r = \rho(c,b)$. *Тогда* $\exists B(a,\delta):$ $\forall x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$ *верно, что* $f(x) \notin B\left(c, \frac{r}{2}\right)$.

Доказательство. В определении берем $\varepsilon = \frac{r}{2}$. □

Теорема 20 (критерий Коши)**.** *Пусть* (X, ρ_X) *- метрическое пространство, а - предельная точка* X, (Y, ρ_Y) *- полное метрическое пространство и* $f:\ X \setminus \{a\} \to Y$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ 0 < \rho_X(x_1, a) < \delta,\ 0 < \rho_X(x_2, a) < \delta$

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ доказать самим.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Leftarrow$ Проверим определение по Гейне. Пусть $\varepsilon > 0$ и выполняется условие Коши с $\delta > 0$. Возьмем $x_n \to a,\ x_n \neq a$, $\exists N:\ \forall n > N$

$$0 < \rho(x_n, a) < \delta$$

$\forall n,\ m > N$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

следовательно $\{f(x_n)\}$ - фундаментальная последовательность, так как Y - полное, то

$$f(x_n) \to b$$

Возьмем $x_n \to a,\ x_n \neq a,\ y_n \to a,\ y_n \neq a$. Рассмотрим $z_n:\ x_1, y_1, ...x_n, y_n, ...$ $z_n \to a,\ z_n \neq a$ и $f(z_n)$ сходится, а предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности.

$\square$

Непрерывность

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрическое пространство, $a \in X$. Пусть $f:\ X \to Y$.

Определение 14. *f непрерывна в точке a*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \rho_X(x, a) < \delta$

$$\rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Теорема 21 (доказательство повторяет доказательство из прошлого семестра)**.** *Следующие утверждения равносильны*

1) *f непрерывна в точке a*

2) *$\forall \{x_n\} \in X,\ x_n \to a$ следует*
$$f(x_n) \to f(a)$$

3) *a - изолированная точка или a - предельная точка и*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10

Функции нескольких переменных

Непрерывность

Пример 17. $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2)$

$$\rho_X(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\rho_Y(u, v) = |u - v|$$

f - непрерывна в точке a, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta$

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon$$

Вопрос:

$$x \to f(x, y) \text{ непрерывна в точке } a_1\ \forall y$$

$$y \to f(x, y) \text{ непрерывна в точке } a_2\ \forall x$$

Верно ли, что f непрерывна в точке $a = (a_1, a_2)$? Нет.

К примеру, если $a = (0, 0)$, а функция, изображенная на Рис. 14.

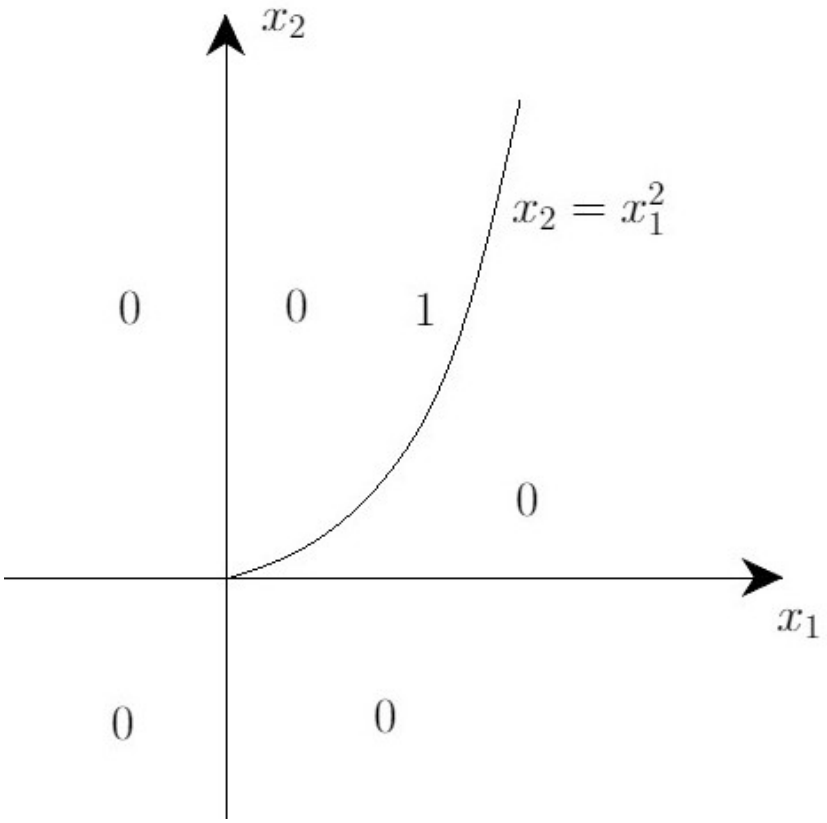

Рис. 14.

По прямым функция непрерывна (при фиксировании одной из переменных), но по совокупности она непрерывной не является.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 15. *Пусть $x_1 \to f(x_1, x_2)$ - непрерывна в точке a_1 равномерно по x_2, то есть*

$$\sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| \xrightarrow[x_1 \to a_1]{} 0 \ \left(f(x_1, x_2) \underset{x_1 \to a_1}{\overset{x_2}{\rightrightarrows}} f(a_1, x_2) \right)$$

Пусть $x_2 \to f(x_1, x_2)$ - непрерывна в точке a_2. Тогда f непрерывна в точке (a_1, a_2).

Доказательство.

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| \leqslant |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| + |f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)|$$

Возьмем $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x_1 - a_1| < \delta$

$$\sup_{x_2} |f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)| < \varepsilon$$

$|x_2 - a_2| < \delta$

$$|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon$$
$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta \ \Rightarrow \ |x_1 - a_1| < \delta \ |x_2 - a_2| < \delta$$

следовательно

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon$$

□

Утверждение 16. *Пусть (X, ρ_X) - метрическое пространство, $(Y, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство ($\rho_Y(u, v) = \|u - v\|$). Пусть $f, \ g : \ X \to Y, \ \alpha : \ X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, тогда $f + g$ и αf непрерывны в точке a.*

Доказательство.

$$x_n \to a$$
$$f(x_n) \to f(a)$$
$$g(x_n) \to g(a)$$
$$\alpha(x_n) \to \alpha(a)$$

Все следует из свойств предела последовательности. □

Утверждение 17. *Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) и (Z, ρ_Z) - метрические пространства, $f : \ X \to Y, \ g : \ Y \to Z$. Если f - непрерывна в точке a, g - непрерывна в $f(a)$, то $g(f)$ - непрерывна в точке a.*

Доказательство.

$$x_n \to a$$

следовательно

$$f(x_n) \to f(a)$$

следовательно

$$g(f(x_n)) \to g(f(a))$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 15. Функция $f: X \to Y$ - *непрерывна*, если f непрерывна в каждой точке X.

Теорема 22. *$f: X \to Y$ - непрерывна тогда и только тогда, когда для любого открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X |\ f(x) \in V\} \tag{10.1}$$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Пусть $a \in X$, возьмем $\varepsilon > 0$ $V = B(f(a), \varepsilon)$, по условию $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ - открыто, оно содержит точку a из-за открытости $\exists B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, то есть $\rho_X(a, x) < \delta$ следует

$$\rho_y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ доказать самостоятельно.

$\square$

Задача 13. Верно ли, что $f: X \to Y$ - непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнуто.

Задача 14. Доказать, что

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

Следствие. *Если $f: X \to Y$ непрерывная функция и $K \subset X$ - компакт, то $f(K)$ - компакт.*

Доказательство. Пусть $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, U_α - открытые. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} f^{-1}(U_\alpha)$, $f^{-1}(U_\alpha)$ - открытые, следовательно $\exists \alpha_1, ...\alpha_N$ $K \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup ... \cup f^{-1}(U_{\alpha_N})$, значит $f(K) \subset U_{\alpha_1} \cup ... \cup U_{\alpha_N}$ $\square$

Задача 15. Пусть $f: X \to Y$ - непрерывна. Верно ли, что

1) образ ограниченного множества является ограниченным множеством

2) образ замкнутого множества является замкнутым множеством.

Следствие(теорема Вейерштрасса). *Пусть K - компакт и $f: K \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Тогда f - ограничена и $\exists x_m,\ x_M \in K$:*

$$f(x_m) = \inf_K f(x)$$

$$f(x_M) = \sup_K f(x)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. $f(K)$ - компакт в $\mathbb{R}$, то есть ограниченное и замкнутое множество. Так как $\sup\limits_K f(x)$ и $\inf\limits_K f(x)$ - граничные точки $f(K)$, то они принадлежат $f(K)$. □

Теорема 23 (Кантора)**.** *Пусть K - компакт, Y - метрическое пространство. Если $f:\ K \to Y$ - непрерывна. Тогда f - равномерно непрерывна, то есть*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x,\ y \in K\ \rho_K(x,y) < \delta$

$$\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0\ \forall a \in K\ \exists B(a, \delta_a):\ \forall x,\ y \in B(a, \delta_a)$

$$\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$K \subset \bigcup\limits_{a \in K} B\left(a, \frac{\delta_A}{3}\right)$, в силу компактоности существует конечное подпокрытие:
$B\left(a_1, \frac{\delta_{a_1}}{3}\right), ...B\left(a_N, \frac{\delta_{a_N}}{3}\right)$. Пусть $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{a_1}}{3}, ...\frac{\delta_{a_N}}{3}\right\}$. Пусть $\rho_K(x,y) < \delta$,
$x \in B\left(a_j, \frac{\delta_{a_j}}{3}\right) \Rightarrow x,\ y \in B(a_j, \delta_{a_j})$, следовательно

$$\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

□

Задача 16. Доказать теорему 23 от противного.

Связные множества

Определение 16.

1) Метрическое пространство (X, ρ) *несвязно*, если существуют непустые открытые множества U и V такие, что $U \cap V = \emptyset$ и $X = U \cup V$.

2) Множество E в метрическом пространстве (X, ρ) *несвязно*, если существуют открытые множества U и V такие, что $E \cap U \neq \emptyset,\ E \cap V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset$ и $E \subset U \cup V$.

Теорема 24. *$E \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда E в E несвязно.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Если существуют U и V, $U \cap V = \emptyset,\ U \cap E \neq \emptyset,\ V \cap E \neq \emptyset$ и $E \subset U \cup V$, то $U_E = E \cap U$, $V_E = E \cap V$ - открыты в E, непустые, $U_E \cap V_E = \emptyset$ и $E = U_E \cup V_E$.

$\Leftarrow$ $E = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset$ - открыты в E и $U_E \cap V_E = \emptyset$.

$\forall a \in U_E\ \exists B(a, \delta_a):\ B(a, \delta_a) \cap E \subset U_E$ и не имеет общих точек с V_E.

$\forall b \in V_E\ \exists B(b, \delta_b):\ B(b, \delta_b) \cap E \subset V_E$ и не имеет общих точек с U_E.

$$U = \bigcup_{a \in U_E} B\left(a, \frac{\delta_a}{2}\right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$V = \bigcup_{b \in V_E} B\left(b, \frac{\delta_b}{2}\right)$$

Необходимо доказать, что $U \cap V = \emptyset$. Предположим противное. Пусть $x \in U \cap V$ $\exists a \in U_E$ и $b \in V_E :\ x \in B\left(a, \frac{\delta_a}{2}\right)$ и $x \in B\left(b, \frac{\delta_b}{2}\right)$, следовательно

$$\rho(a, x) < \frac{\delta_a}{2}$$

$$\rho(b, x) < \frac{\delta_b}{2}$$

значит

$$\rho(a, b) < \frac{\delta_a + \delta_b}{2} < \max\{\delta_a, \delta_b\}$$

Пусть $\delta_a > \delta_b$, значит

$$\rho(a, b) < \delta_a$$

следовательно $b \in B(a, \delta_a)$, а такого быть не может. Противоречие.

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Функции нескольких переменных

Связные множества

Метрическое пространство, которое не является несвязным, *связно.*

Теорема 25. *Метрическое пространство (X, ρ) тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$, принимающая ровно два значения: 0 и 1.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \in V \end{cases}$$

Пусть $a \in U,\ f(a) = 1$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ B(a, \delta) \subset U\ \forall x \in B(a, \delta)\ f(x) = 1$

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

Аналогично, для $a \in V$, значит f непрерывна.

$\Leftarrow$ $f : X \to \mathbb{R}$ имеет два значения 0 и 1

$$U_0 = \left\{x :\ f(x) < \frac{1}{2}\right\} = \{f(x) = 0\}$$

$$U_1 = \left\{x :\ f(x) > \frac{1}{2}\right\} = \{f(x) = 1\}$$

$$U_0 = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$U_1 = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$$

значит это открытые множества. $U_0 \cap U_1 = \emptyset,\ U_0 \neq \emptyset,\ U_1 \neq \emptyset,\ U_0 \cup U_1 = X$, получаем множество несвязно.

$\square$

Теорема 26. *Пусть X, Y - метрические пространства, $f : X \to Y$ - непрерывна. Тогда если X - связно, то $f(X)$ - связно.*

Доказательство.

I сп. Предположим противное, пусть $f(X)$ - несвязно, тогда существуют U, V :

$$U \cap f(X) \neq \emptyset,\ V \cap f(X) \neq \emptyset,\ f(X) \subset U \cup V$$

$f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ - открытые, $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),\ f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ и каждое из них непусто, следовательно X - несвязно, получили противоречие.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

II сп. Если $f(X)$ несвязно, то существует $g : f(X) \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, принимающая значения 0 и 1, следовательно $gf(x)$ - непрерывна и принимает значения 0 и 1. Противоречие.

□

Утверждение 18. *На $\mathbb{R}$ связными множествами являются только промежутки.*

Доказательство. Промежуток - связное множество, так как выполняется теорема о промежуточном значении. Если есть какая-то точка, то два луча его разрывают. □

Следствие. *Если (X, ρ) - связно и $f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывна, то $f(X)$ - промежуток, то есть если A и B лежат в образе, то любое C, лежащее между ними лежит в образе.*

Замечание 8. (X, ρ) - несвязно тогда и только тогда, когда

1) $F_1,\ F_2$ - замкнуты и непустые

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset,\ F_1 \cup F_2 = X\ (X \setminus F_1) = F_2)$$

2) Существует $E \subset X :\ E \neq \emptyset,\ E \neq X$ и E - открыто и замкнуто.

Определение 17. Непрерывное отображение $[0, 1] \to X$ называется *кривой* $x(t)$.

Метрическое пространство X (или его подмножество) называется *линейно связным*, если $\forall x_0,\ x_1 \in X\ (x_0,\ x_1 \in E)\ \exists$ кривая $x(t)$ в X (в E): $x(0) = x_0,\ x(1) = x_1$.

Теорема 27. *Если (X, ρ) - линейно связно, то оно связно. Обратное неверно.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существует непрерывное отображение $g : X \to \{0, 1\}$

$$g(x_0) = 0$$

$$g(x_1) = 1$$

$x : [0, 1] \to X$, функция $g(x(t))$ - непрерывная, но принимает два значения 0 и 1. Получили противоречие. □

Пример 18. График функции $\sin \frac{1}{x}$ - множество, которое связно, но не линейно связно.

Задача 17. Проверить этот факт.

Теорема 28. *Если E - открытое и связное множество в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$, то E - линейно связно.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Отношение эквивалентности $x \sim y$ (из E), если x можно соединить с y кривой. Проверим, что это отношение эквивалентности.

$$x_0 \sim x_0,\ x(t) \equiv x_0,\ t \in [0,1]$$

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1,\ x(t) \leftrightarrow x(1-t),\ x(1) = x_0,\ x(0) = x_1$$

$$x(t):\ x_0 \sim x_1 \text{ и } \tilde{x} : x_1 \sim x_2$$

$$\text{на } \left[0, \frac{1}{2}\right]\ x(2t),\ \text{на } \left[\frac{1}{2}, 1\right]\ \tilde{x}(2t-1)$$

Множество E - объединение попарно непересекающихся классов эквивалентности

$$E_{x_0} = \{x \in E |\ x \sim x_0\}$$

Если число классов эквивалентности равно один, то E линейно связно и все доказано. E_{x_0} - открытое множество, так как если x_0 можно соединить с x кривой, то x лежит вместе с шариком, так изначальное пространство открыто, и в шарике все точки можно соединить с центром отрезком и $B \subset E_{x_0}$.

Если классов эквивалентности больше одного, то E распадается в объединение двух непустых, непересекающихся открытых множеств, а это противоречит связности E. □

$f : X \to Y$ - *гомеоморфизм*, если $f,\ f^{-1}$ - непрерывны.

Задача 18. Существует ли гомеоморфизм

а) отрезка в квадрат

б) пересечения отрезков в отрезок.

Задача 19. GL_n - матрицы A: $\det A \neq 0,\ GL_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$.

Доказать, что $\{A :\ \det A > 0\}$ - линейно связное множество.

Доказать, что если в $\mathbb{R}^n$ есть два базиса с матрицей перехода $A :\ \det A > 0$, то существует непрерывное преобразование одного базиса в другой.

Задача 20. Доказать, что SL_n является линейно связным множеством.

Линейные функции

Пусть $X,\ Y$ - нормированные пространства.

Определение 18. Отображение $L : X \to Y$ - линейным (линейный оператор), если

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) \tag{11.1}$$

$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $e_1 = 1$.

$$L(x) = L(x_1 e_1) = x_1 L(e_1)$$

$$L(x) = kx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (линейный функционал)

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$

$$L(x) = x_1 L(e_1) + ... + x_n L(e_n) = a_1 x_1 + ... a_n x_n$$

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L(x) = x_1 L(e_1) + ... + x_n L(e_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

Очевидно, что L - непрерывное отображение для $\mathbb{R}$, но в общем случае линейная функция может быть разрывна.

Пример 19. Рассмотрим пространство $C^1[0,1]$ с нормой

$$\|f\| = \max_t |f(t)|$$

$$L(f) = f^{'}(0)$$

это линейное отображение $C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ Возьмем $f_n \rightrightarrows 0$, но $f^{'}(0) \to \infty$, например,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

$$L(f_n) = n \to \infty$$

Теорема 29. *Пусть $L : X \to Y$ - линейная функция, тогда следующие утверждения равносильны*

1) *L - непрерывна*

2) *L - непрерывна в 0*

3) $\exists C > 0 :$
$$\|Lx\|_Y \leqslant C\|x\|_X \ \forall x \tag{11.2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12

Функции нескольких переменных

Линейные функции

Доказательство теоремы 29.

$1 \Rightarrow 2$ очевидно.

$2 \Rightarrow 3$ L - непрерывна в 0, значит L - ограничена в окрестности 0: $\exists C_1 > 0\ \exists B(0,\delta)$:

$$\|L(x)\| \leqslant C_1\ \forall x \in B(0,\delta),\ x \neq 0$$

Рассмотрим вектор $\frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B(0,\delta)$

$$\left\| L\left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leqslant \frac{2C_1}{\delta}\|x\|$$

$$C = \frac{2C_1}{\delta}$$

$3 \Rightarrow 1$

$$\|L(x) - L(y)\| \leqslant C\|x - y\|$$

далее очевидно.

□

Замечание 9. $\mathcal{L}(X,Y)$ - пространство непрерывных(ограниченных) операторов. $L \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$$

Задача 21. Проверить, что $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство.

Замечание 10.

1) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$L(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = \langle a, x\rangle$$

$$|L(x)| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$$

$L(x)$ - непрерывное линейное отображение.

2) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L(x) = \begin{pmatrix} L_1(x) \\ ... \\ L_m(x) \end{pmatrix}$$

$$L_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ -\ \text{линейная}$$

$$|L_k(x)| \leqslant C_k\|x\|$$

$$\|L(x)\| \leqslant \sqrt{\sum_l C_k^2} \cdot \|x\|$$

L - непрерывное линейное отображение.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференцируемые отображения

Пусть X и Y - нормированные протстранства и $a \in X$. Предположим, что $f : U \to Y$, где U - открытое множество, содержащее a (f - определена в окрестности a).

Определение 19. f - дифференцируема в точке a, если существует непрерывное линейное отображение $L : X \to Y$ и функция $\alpha : X \to Y$ такие, что

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \alpha(h)\|h\| \text{ и } \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0 \tag{12.1}$$

Пример 20. Пусть $L : X \to Y$ - линейная непрерывная функция. Тогда L - дифференцируема в каждой точке

$$L(a+h) - L(a) = L(h) + 0 \cdot \|h\|$$

Утверждение 19. *Если f - дифференцируема в точке a, то f - непрерывна в точке a.*

Доказательство.

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \alpha(h) \cdot \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

следовательно

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ (x = a + h,\ h \to 0)$$

□

Теорема 30. *f - дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда существует линейное непрерывное отображение L :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{12.2}$$

в частности, если f - дифференцируема в точке a, L - линейная часть приращения f, то $\forall v$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L(v) \tag{12.3}$$

Доказательство. f - дифференцируема в точке a $\Leftrightarrow$

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \alpha(h)\|h\|, \text{ где } \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = \alpha(h) \to 0$$

Возьмем $h = tv,\ v \neq 0$

$$\frac{f(a+tv) - f(a) - L(tv)}{\|tv\|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot \frac{t}{|t|} \left(\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - L(v) \right) \to 0$$

значит

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L(v)$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 20. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ называется *производной функции f по вектору v* и обозначается $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Если $\|v\|=1$, то $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ называется *производной по напрвлению* (иногда требуют, чтобы $t\to 0+$).

Следствие.

$$L(v)=\frac{\partial f}{\partial v}(a)\ \forall v \tag{12.4}$$

и L - определено однозначно.

Определение 21. Линейный оператор L из определения дифференцируемости называется *дифференциалом f* и обозначается $df(a,h)$ или $df(h)$.

$$f(a+h)-f(a)=df(a,h)+\alpha(h)\|h\|$$

$h\mapsto df(a,h)$ - непрерывно

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0$$

$$df(v)=\frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

Частные случаи.

(I) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ f(x_1,...x_n),\ f$ - дифференцируема в точке a.

$$f(a_1+h_1,...a_n+h_n)-f(a)=df(\vec{h})+\alpha(\vec{h})\|\vec{h}\|$$

$df(h)$ - линейное отображение $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$df(h)=h_1df(e_1)+...+h_ndf(e_n)$$

$$df(e_k)=\frac{\partial f}{\partial e_k}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,...a_k+t,...a_n)-f(a_1,...a_n)}{t}$$

фиксируем все a_j кроме k-того и рассматриваем $x_k\mapsto f(a_1,a_2,...x_k,...a_n)$ и дифференцируем эту функцию одной переменной.

$\frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$ называется *частной производной функции f по переменной x_k в точке a* и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

$$df(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n$$

Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ называется *градиентом* и обозначается $\operatorname{grad} f$ или $\bigtriangledown f$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=df(v)=\langle\operatorname{grad} f,v\rangle$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 20. *Предположим, что* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* a *и* $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. *Тогда* $\max\limits_{\|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(a)$ *достигается на*

$$v = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}, \tag{12.5}$$

$\min\limits_{\|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(a)$ *достигается на*

$$v = -\frac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}. \tag{12.6}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle$$

$\|v\| = 1$, по неравенству Коши - Буняковского

$$-\|\operatorname{grad} f(a)\| \leqslant \frac{\partial f}{\partial v}(a) \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\|$$

□

Пример 21.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

График изображен на Рис. 15.

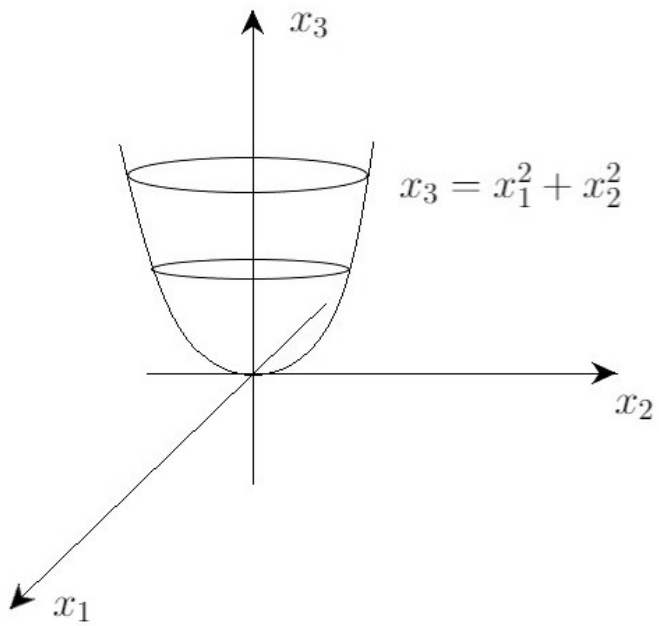

Рис. 15.

Линиии уровня $x_1^2 + x_2^2 = const$ (Рис. 16.)

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) = (2a_1, 2a_2)$$

На этом построен, например, метод градиентного спуска.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

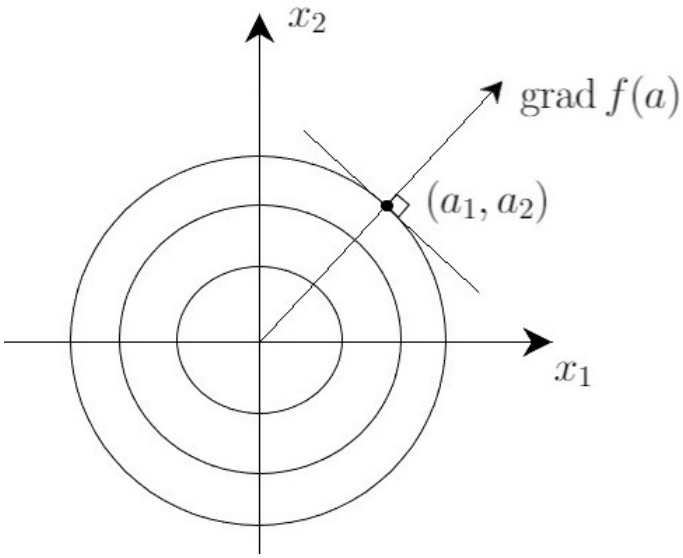

Рис. 16.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13

Функции нескольких переменных

Дифференцируемые отображения

Продолжение частных случаев.

(I) (продолжение)

Пример 22.

$$f(x_1, ...x_n) = x_k$$
$$df(h) = h_k$$
$$dx_k(h) = h_k$$

$dx_1, ...dx_n$ - базис в $(\mathbb{R}^n)^*$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Пример 23. $f(x_1, x_2)$ изображена на Рис. 17.

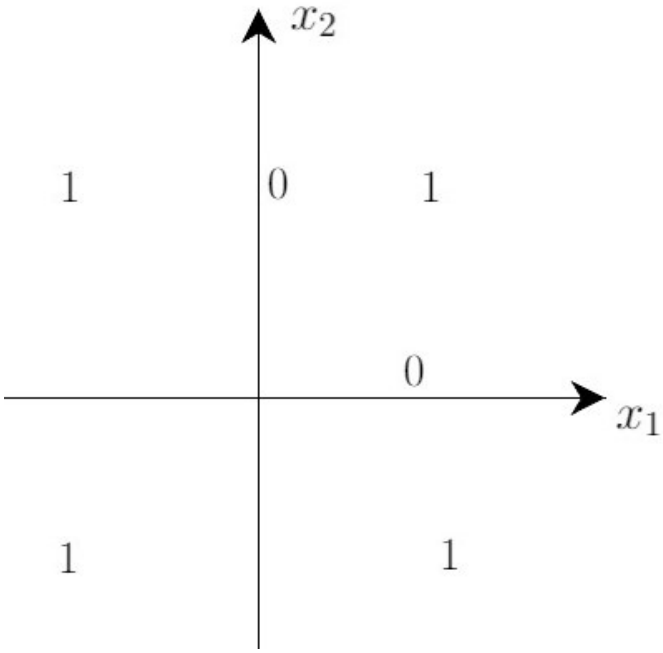

Рис. 17.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

но эта функция не дифференцируема в $(0,0)$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 31 (достаночное условие дифференцируемости)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в окрестности точки a и имеет в этой окрестности частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $k = 1, ...n$. Если частные производные непрерывны в точке a, то f дифференцируема в точке a.*

Доказательство. Докажем для $n = 2$.

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) +$$

$$= f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$$

Выбираем h так, что $(a_1 + h_1, a_2 + h_2)$ лежит в окрестности, где есть частные производные, в частности h достаточно мал, что на отрезке $x_1 \in [a_1, a_1 + h_1]$ и $x_2 = a_2 + h_2$ и на отрезке $x_2 \in [a_2, a_2 + h_2]$ и $x_1 = a_1$ в каждой точке существуют частные производные.

По теореме Лагранжа

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2 + h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2)$$

c_1 лежит между a_1 и $a_1 + h_1$, c_2 лежит между a_2 и $a_2 + h_2$

$$h_1 \to 0 \;\Rightarrow\; c_1 \to a_1$$

$$h_2 \to 0 \;\Rightarrow\; c_2 \to a_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2 + h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)h_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)h_2 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 + \|h\|\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)\frac{h_1}{\|h\|} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)\frac{h_2}{\|h\|}\right)$$

По непрерывности частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \to 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \to 0$$

$$\frac{h_1}{\|h\|} \leqslant 1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{h_2}{\|h\|} \leqslant 1$$

значит

$$\alpha(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)\frac{h_1}{\|h\|} +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)\frac{h_2}{\|h\|} \to 0$$

□

(II) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ ... \\ ... \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Утверждение 21. *f - дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда f_k дифференцируема в точке a. Если f дифференцируема в точке a, то*

$$df(h) = J_f h$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

называется матрица Якоби. Если f дифференцируема, то при $x \approx a$

$$f(x) \approx f(a) + J_f(x - a)$$

Доказательство. f - дифференцируема в точке a $\Leftrightarrow$

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + \alpha(h)\|h\|, \ \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$$

в векторной записи

$$\begin{pmatrix} f_1(a + h) - f_1(a) \\ ... \\ ... \\ f_m(a + h) - f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(h) \\ ... \\ ... \\ L_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ ... \\ ... \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix} \|h\| \ \Leftrightarrow$$

$$f_k(a + h) - f_k(a) = L_k(h) + \alpha_k(h)\|h\|, \ \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$$

$$L_k(h) = df_k(h) = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} h_n$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$L(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

□

Правила дифференцирования.

1) Линейность. Пусть X и Y - нормированные пространства, $f,\ g : X \to Y$ - дифференцируемы в точке a. Тогда $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке a и

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg \tag{13.2}$$

Доказательство.

$$\alpha f(a+h) + \beta g(a+h) - \alpha f(a) - \beta g(a) = \alpha(f(a+h) - f(a)) + \beta(g(a+h) - g(a)) =$$

$$= \alpha(df(h) + \gamma_1(h)\|h\|) + \beta(dg(h) + \gamma_2(h)\|h\|) =$$

$$= (\alpha df(h) + \beta dg(h)) + (\alpha\gamma_1(h) + \beta\gamma_2(h))\|h\|$$

$$\lim_{h\to 0} \gamma_1(h) = 0,\ \lim_{h\to 0} \gamma_2(h) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \alpha\gamma_1(h) + \beta\gamma_2(h) = 0$$

□

2) Правило Лейбница. Пусть X и Y - нормированные пространства, $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ - дифференцируемы в точке a. Тогда fg дифференцируема в точке a и

$$d(fg)(h) = f(a)dg(h) + g(a)df(h) \tag{13.3}$$

Доказательство.

$$f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = (f(a+h) - f(a))g(a+h) - f(a)(g(a+h) - g(a)) =$$

$$= (df(h) + \gamma_1(h)\|h\|)(g(a) + (g(a+h) - g(a))) + f(a)(dg(h) + \gamma_2(h)\|h\|) =$$

$$= g(a)df(h) + f(a)dg(h) + \|h\|\Bigg(g(a)\gamma_1(h) + (g(a+h) - g(a))\frac{df(h)}{\|h\|} +$$

$$+\gamma_1(h)(g(a+h) - g(a)) + f(a)\gamma_2(h)\Bigg)$$

$$g(a)\gamma_1(h) \to 0$$

$$g(a+h) - g(a) \to 0$$

$$\gamma_1(h)(g(a+h) - g(a)) \to 0$$

$$f(a)\gamma_2(h) \to 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По определению df - непрерывный линейный оператор

$$\|df(h)\| \leqslant C\|h\|$$

$$\frac{\|df(h)\|}{\|h\|} \leqslant C$$

$$(g(a+h) - g(a))\frac{df(h)}{\|h\|} \to 0$$

□

3) Дифференцирование сложной функции. Пусть X, Y, Z - нормированные пространства и $f : X \to Y$ - дифференцируема в точке $a \in X$, $g : Y \to Z$ - дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда $g(f(x))$ - дифференцируема в точке a

$$dg(f)(h) = dg(df(h)) \tag{13.4}$$

$$(d(g \circ f) = dg \circ df)$$

Доказательство.

$$f(a+h) - f(a) = df(h) + \alpha(h)\|h\|, \ \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

$$g(f(a) + v) - g(f(a)) = dg(v) + \beta(v)\|v\|$$

Доопределим функцию β в нуле нулем. Тогда β непрерывна в нуле.

$$v = f(a+h) - f(a)$$

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = dg(df(h) + \alpha(h)\|h\|) + \beta(f(a+h) - f(a))\|df(h) + \alpha(h)\|h\|\| =$$

$$= dg(df(h)) + \|h\|\left(dg(\alpha(h)) + \beta(f(a+h) - f(a))\left\|\frac{df(h)}{\|h\|} + \alpha(h)\right\|\right)$$

$$dg(\alpha(h)) \to 0$$

$$\beta(f(a+h) - f(a)) \to 0$$

$$\left\|\frac{df(h)}{\|h\|} + \alpha(h)\right\| \leqslant \frac{\|df(h)\|}{\|h\|} + \|\alpha(h)\|$$

$df(h)$ - непрерывный и ограниченый, значит

$$\|df(h)\| \leqslant C\|h\|$$

□

4) Дифференцирование обратной функции. Пусть X, Y - нормированные пространства, $U \subset X$, $V \subset Y$ - открытые множества, если $f : U \to V$ - гомеоморфизм, f - дифференцируема в точке $a \in U$ и $df : X \to Y$ имеет непрерывное обратное $(df)^{-1} : Y \to X$. Тогда $f^{-1} : V \to U$ - дифференцируема в точке $f(a)$ и

$$df^{-1} = (df)^{-1} \tag{13.5}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\lim_{v\to 0}\frac{f^{-1}(f(a)+v)-f^{-1}(f(a))-(df)^{-1}(v)}{\|v\|}=0$$

делаем замену

$$v=f(a+h)-f(a),\ h\to 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a-(df)^{-1}(df(h)+\alpha(h)\|h\|)}{\|df(h)+\alpha(h)\|h\|\|}=\lim_{h\to 0}\frac{-(df)^{-1}(\alpha(h))}{\left\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\right\|}$$

$(df)^{-1}$ - линейный непрерывный оператор

$$\|df(h)\|\geqslant C\|h\|$$

$$\left\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\right\|\geqslant C+\|\alpha(h)\|$$

значит

$$\lim_{h\to 0}\frac{-(df)^{-1}(\alpha(h))}{\left\|\frac{df(h)}{\|h\|}+\alpha(h)\right\|}=0$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14

Функции нескольких переменных

Дифференцируемые отображения

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$$df(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$df(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$g(f(x)) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(x_1, ...x_n), ...f_m(x_1, ...x_n)) \\ \dots \\ \dots \\ g_k(f_1(x_1, ...x_n), ...f_m(x_1, ...x_n)) \end{pmatrix}$$

$$dg(f)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(f)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1(g)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k(f)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_k(f)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$dg(df(h)) = dg(J_f h) = J_g(J_f h)$$

$$dg(f)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_l(f)}{\partial x_s} = \frac{\partial g_l}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_s} + ... + \frac{\partial g_l}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_s}$$

Частный случай. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$$

Рассматриваем функцию

$$f : t \mapsto g(x_1(t), x_2(t))$$

$x_1,\ x_2$ - дифференцируемые функции.

$$df(v) = dg\left(\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} v\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} v$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\dot{x_2}$$

Еще раз докажем последнее равенство.

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}g(x_1(t), x_2(t))\Big|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{g(x_1(t), x_2(t)) - g(x_1(t_0), x_2(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1(t_0), x_2(t_0))(x_1(t) - x_1(t_0)) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1(t_0), x_2(t_0))(x_2(t) - x_2(t_0))}{t - t_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(x_1(t) - x_1(t_0), x_2(t) - x_2(t_0))\sqrt{(x_1(t) - x_1(t_0))^2 + (x_2(t) - x_2(t_0))^2}}{t - t_0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{x_2(t) - x_2(t_0)}{t - t_0} + \right.$$

$$\left. + \alpha(x_1(t) - x_1(t_0), x_2(t) - x_2(t_0))\cdot\frac{1}{\operatorname{sgn}(t - t_0)}\sqrt{\left(\frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2(t) - x_2(t_0)}{t - t_0}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x_1}\dot{x_1}(t_0) + \frac{\partial g}{\partial x_2}\dot{x_2}$$

α доопределена в нуле нулем.

Дифференцирование обратной функции:

$$df^{-1} = (df)^{-1}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$df^{-1}(v) = J_f^{-1}v$$

Теорема об обратной функции

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y = f(x)$. Ищем f^{-1}. Построить f^{-1} это то же самое, что решить уравнение $y = f(x)$ относительно x.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ...x_n) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1, ...x_n) \end{cases}$$

Идея: свести решение уравнения к поиску неподвижной точки ($F(x) = x$).

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = x + Q(y - f(x))$$

Q - невырожденная матрица. Надо искать неподвижную точку

$$F(x) = x + Q(y - f(x))$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 32 (Банах)**.** *Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство и $F : X \to X$ - сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $0 < q < 1$, то есть*

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \leqslant q\rho(x_1, x_2)\ \forall x_1,\ x_2 \tag{14.1}$$

Тогда существует единственная $x_0 \in X$:

$$F(x_0) = x_0$$

x_0 назывется неподвижной точкой F.

Доказательство. Единственность. Пусть x_0 и y_0 - неподвижные точки.

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(F(x_0), F(y_0)) \leqslant q\rho(x_0, y_0),\ 0 < q < 1$$

$$(1 - q)\rho(x_0, y_0) \leqslant 0$$

значит

$$\rho(x_0, y_0) = 0\ \Rightarrow\ x_0 = y_0$$

Существование. Рассмотрим

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

x_1 - произвольная точка X

$$x_1,\ F(x_1),\ F(F(x_1)), ...$$

Докажем, что x_n сходится, покажем, что x_n - фундаментальна

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \rho(F(x_n), F(x_{n-1})) \leqslant q\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant q^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant ... \leqslant q^{n-1}\rho(x_2, x_1)$$

$n > m$

$$\rho(x_n, x_m) \overset{\text{н-во } \Delta}{\leqslant} \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + ... + \rho(x_{m+1}, x_m) \leqslant$$

$$\leqslant q^{m-1}\rho(x_2, x_1) + q^m\rho(x_2, x_1) + ... = \frac{\rho(x_2, x_1)q^{m-1}}{1 - q}$$

$n,\ m > N$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{\rho(x_2, x_1)q^{N-1}}{1 - q} < \varepsilon$$

Последовательность x_n - фундаментальна и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. F - непрерывное отображение, значит

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

Переходим к пределу

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x_0}}{x_{n+1}} = \underset{\substack{\downarrow \\ F(x_0)}}{F(x_n)}$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 11. Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство и $F,\ G : X \to X$ - сжимающее отображение с коэффициентом сжатия q. Пусть x_f и x_g неподвижные точки.

$$\rho(x_f, x_g) = \rho(F(x_f), G(x_g)) \leqslant \rho(F(x_f), F(x_g)) + \rho(F(x_g), G(x_g)) \leqslant$$

$$\leqslant q\rho(x_f, x_g) + \rho(F(x_g), G(x_g))$$

$$\rho(x_f, x_g) \leqslant \frac{1}{1-q}\rho(F(x_g), G(x_g))$$

Теорема 33 (об обратной функции)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - непрерывно дифференцируема в окрестности точки a, причем $J_f(a)$ - обратима. Тогда существуют открытые множества $U \ni a$ и $V \ni f(a)$ такие, что $f : U \to V$ - диффеоморфизм, то f - биекция и $f,\ f^{-1}$ - дифференцируемое отображение.*

Доказательство. Пусть $Q = J_f(a)^{-1}$. Рассмотрим отображение

$$F_y(x) = x + Q(y - f(x))$$

в окрестности точки a это дифференцируемое отображение.

$$dF_y(h) = dx(h) + dQ(y - f(x))(h) = h + dQ(d(y - f(x))(h)) = h - Q \cdot df(h) = h - QJ_f(h)$$

$$J_{F_y} = E - QJ_f$$

$$J_{F_y} = 0$$

Так как f - непрерывно дифференцируема, то есть ее частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ - непрерывные функции, то $x \mapsto J_f(x)$ - непрерывно, следовательно $x \mapsto J_{F_y}(x)$ - непрерывно и $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overline{B(a, \delta)},\ \forall y$

$$\|J_{F_y}(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

$x_1,\ x_2 \in \overline{B(a, \delta)}$

$$\|F_y(x_1) - F_y(x_2)\| \overset{?}{\leqslant} \max |\text{произв.}| \cdot \|x_1 - x_2\|$$

Продолжение в следующей лекции.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15

Функции нескольких переменных

Теорема об обратной функции

Продолжение доказательства.

Лемма 2. *Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в шаре $B(a,r)$ и $\|J_g(x)\| \leqslant q \ \forall x \in B(a,r)$. Тогда $\forall x_1,\ x_2 \in B(a,r)$*

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leqslant q\|x_1 - x_2\| \tag{15.1}$$

Доказательство. $n = 1$.

$$J_g(x) = g^{'}(x)$$

По теореме Лагранжа

$$g(x_1) - g(x_2) = g^{'}(c)(x_1 - x_2)$$

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|$$

$n > 2$. Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = \langle g(x_1 + t(x_2 - x_1)), g(x_2) - g(x_1)\rangle$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \langle J_g(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1), g(x_2) - g(x_1)\rangle$$

$$\left|\frac{d\phi}{dt}\right| \overset{\text{н-во К/Б}}{\leqslant} \|J_g(x_2 - x_1)\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\| \leqslant \|J_g\| \cdot \|x_2 - x_1\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant q\|x_1 - x_2\| \cdot \|g(x_1) - g(x_2)\|$$

По теореме Лагранжа

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi^{'}(c)$$

$$\phi(1) - \phi(0) = \langle g(x_2) - g(x_1), g(x_2) - g(x_1)\rangle = \|g(x_2) - g(x_1)\|^2 \leqslant q\|x_1 - x_2\| \cdot \|g(x_2) - g(x_1)\|$$

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leqslant q\|x_1 - x_2\|$$

□

$$Q = J_f^{-1}(a)$$

$$F(x) = x + Q(y - f(x))$$

$$J_F(x) = E - QJ_f(x)$$

$$J_F(a) = 0$$

Так как $x \to J_F(x)$ - непрерывна, то $\exists \overline{B(a,\delta)} : \forall x \in \overline{B(a,\delta)}$

$$\|J_F(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда по лемме 2

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \ \forall x_1,\ x_2 \in \overline{B(a,\delta)}$$

$$F : \overline{B(a,\delta)} \overset{?}{\to} \overline{B(a,\delta)}$$

Оценим $\|F(x) - a\|,\ x \in \overline{B(a,\delta)}$

$$\|F(x) - a\| = \|F(x) - F(a) + F(a) - a\| \leqslant \|F(x) - F(a)\| + \|F(a) - a\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|x - a\| + \|Q\| \cdot \|y - f(a)\|$$

Пусть $y \in B(f(a), \Delta)$, где $\|Q\| \cdot \Delta < \frac{\delta}{4}$, тогда

$$\|F(x) - a\| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \frac{3\delta}{4} < \delta$$

$$F : \overline{B(a,\delta)} \to \overline{B\left(a, \frac{3\delta}{4}\right)} \subset B(a,\delta)$$

$\overline{B(a,\delta)}$ - полное метрическое пространство.

$$F_y(x) = x + Q(y - f(x))$$

$\forall y \in B(f(a), \Delta)$ $F_y : \overline{B(a,\delta)} \to \overline{B(a,\delta)}$ - сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\frac{1}{2}$, значит по теореме Банаха существует единственная точка $x \in \overline{B(a,\delta)}$:

$$F_y(x) = x \ (y = f(x))$$

$$x \in \overline{B\left(a, \frac{3\delta}{4}\right)} \subset B(a,\delta)$$

$f(a) \in V = B(f(a), \Delta),\ a \in U = f^{-1}(B(f(a), \Delta)) \cap B(a,\delta)$.

$f : U \to V$ - биекция: сюръекция, так как $\forall y \in V\ \exists x \in U$, инъекция, так как $\forall y \in V\ \exists! x \in U$.

Проверим, что f^{-1} - непрерывна. $x_1 = f^{-1}(y_1)$ - неподвижная точка F_{y_1}, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ - неподвижная точка F_{y_2}.

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|F_{y_1}(x_2) - F_{y_2}(x_2)\| = 2\|Q(y_1 - y_2)\| \leqslant 2\|Q\| \cdot \|y_1 - y_2\|$$

$$y_1 \to y_2 \ \Rightarrow\ x_1 \to x_2$$

то есть отображение непрерывно, значит f - гомеоморфизм. $U \subset B(a,\delta)$, f в окрестности точки a непрерывно дифференцируема и ее матрица Якоби невырождена, значит $x \to \det J_f(x)$ - непрерывная функция, существует окрестность точки a: в этой окрестности $\det J_f(x) \neq 0$. Выбираем δ так, что U содержится в этой окрестности. Дифференцируемость f^{-1} следует из теоремы о дифференцируемости обратной функции. Так как $J_{f^{-1}} = (J_f)^{-1}$ - элементы этой матрицы непрывны, значит f^{-1} непрерывно дифференцируема. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

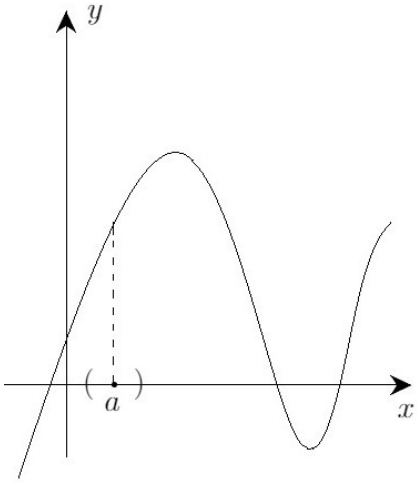

Рис. 18.

Доказательство в случае $n = 1$ (аналогичное предыдущему). Пусть $y = f(x)$ (Рис. 18.)
f - непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и

$$f^{'}(a) \neq 0$$

Тогда утверждается, что в квадрате это непрерывное взаимно однозначное отображение (Рис. 19.).

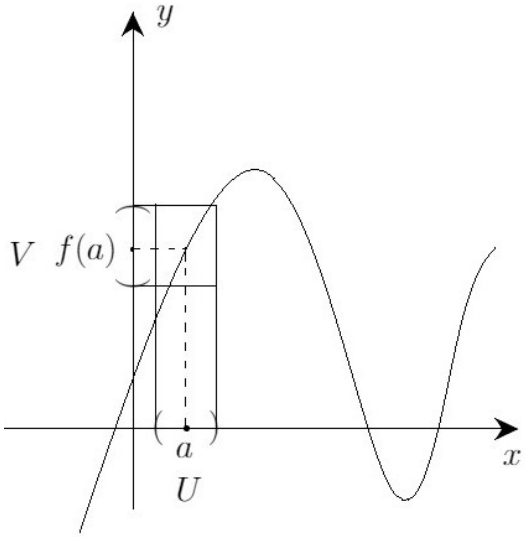

Рис. 19.

Доказательство приведено ниже.

$$F_y(x) = x + \frac{1}{f'(a)}(y - f(x))$$

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; F_y(x) = x$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Для F_y подбираем условия для применения теоремы Банаха. Ищем отрезок $[a-\delta, a+\delta]$ и такие y, что $F_y : [a-\delta, a+\delta] \to [a-\delta, a+\delta]$ - сжимающее отображение.

$$|F_y(x_1) - F_y(x_2)| = |F_y^{'}(c)| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$F_y^{'}(c) = 1 - \frac{f^{'}(c)}{f^{'}(a)}$$

Если $c = a$, то $F_y^{'}(a) = 0$, $\exists \delta > 0 :\ \forall c \in [a-\delta, a+\delta]$

$$|F_y^{'}(c)| \leqslant \frac{1}{2}$$

$\forall x_1,\ x_2 \in [a-\delta, a+\delta]$

$$|F_y(x_1) - F_y(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

$$|F_y(x) - a| \leqslant |F_y(x) - F_y(a)| + |F_y(a) - a| \leqslant \frac{1}{2}|x-a| + \left|\frac{1}{f^{'}(a)}\right| \cdot |y - f(a)|$$

Выбираем промежуток $y \in (f(a) - \Delta, f(a) + \Delta)$:

$$|F_y(x) - a| \leqslant \frac{3\delta}{4} < \delta$$

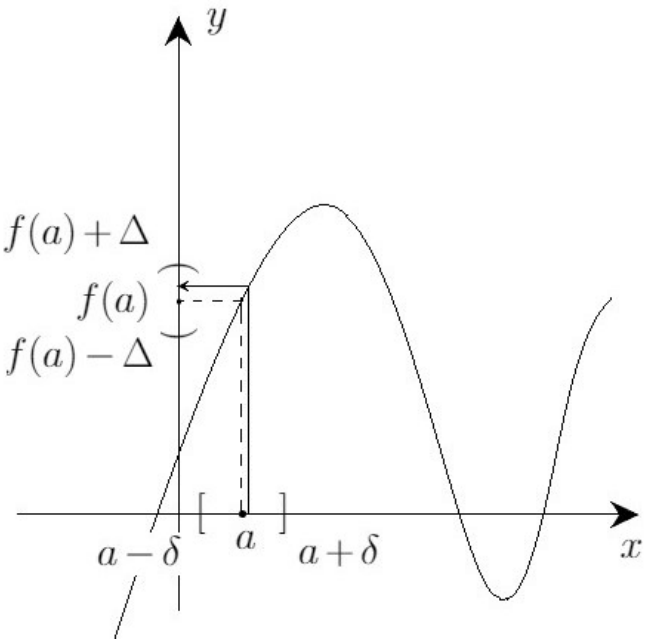

Рис. 20.

$F_y : [a-\delta, a+\delta] \to [a-\delta, a+\delta]$ и является сжимающим отображением с коэффициентом $\frac{1}{2}$, значит $\exists! x$:

$$F_y(x) = x$$

U - полный прообраз, $f^{'}(a) \neq 0 \ \Rightarrow\ f^{'}(x) \neq 0$ в окрестности.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

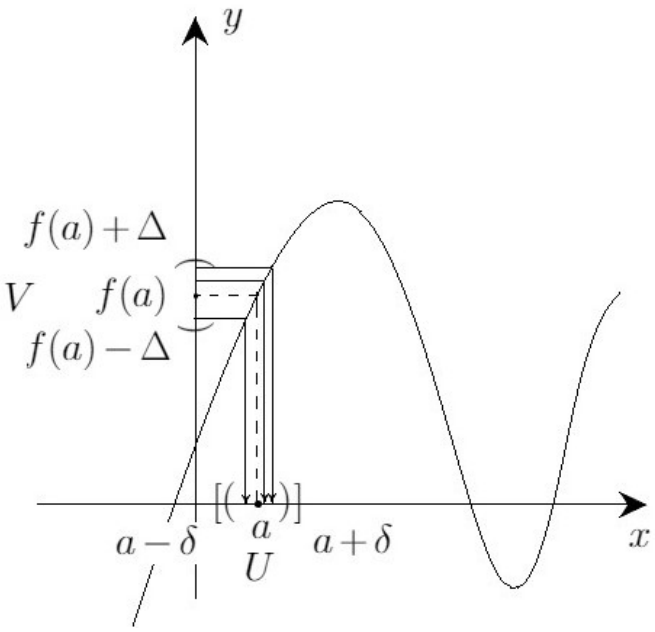

Рис. 21.

□

Теорема о неявной функции

Рассмотрим сначала $F(x,y)$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. $F(x,y)=const$ - линии уровня.

Утверждение 22. *Если F - непрерывно, то $\{(x,y)|\ F(x,y)=const\}$ - замкнуто.*

Доказательство. $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$, то значения в этих точках сходятся и они равны. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 16

Функции нескольких переменных

Теорема о неявной функции

Рассматриваем $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, y)$. Рассматриваем множества уровня:

$$\{(x, y)|\ F(x, y) = const\} \tag{16.1}$$

1) Если F - произвольная, то любое множество может быть множеством уровня, например
$$F = I_A = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A \end{cases}$$

2) Если F - непрерывна, то множество уровня - замкнутое множество (это так в любом метрическом пространстве).

Утверждение 23. *В метрическом пространстве (X, ρ) для любого замкнутого множества A существует непрерывная функция $F : X \to \mathbb{R}$:*

$$\{x : F(x) = 0\} = A$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(x) = \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

$$F(x) = 0 \ \Rightarrow\ \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

следовательно $\forall B(x, r)\ \exists y \in B(x, r) \cap A$. Если $x \notin A$, то x - граничная точка, но граничный точки принадлежат A.

$$F(x_1) - F(x_2) = \inf_{y \in A} \rho(x_1, y) - \inf_{y \in A} \rho(x_2, y)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists y_\varepsilon$:

$$\inf_{y \in A} \rho(x_2, y) > \rho(x_2, y_\varepsilon) - \varepsilon$$

$$\inf_{y \in A} \rho(x_1, y) - \inf_{y \in A} \rho(x_2, y) \leqslant \rho(x_1, y_\varepsilon) - \rho(x_2, y_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \rho(x_1, x_2) + \varepsilon$$

Устремим $\varepsilon \to 0$

$$F(x_1) - F(x_2) \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

следовательно

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

□

Утверждение 24. *Пусть A - замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, тогда существует непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n$:*

$$A = \{x|\ f(x) = 0\}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Идея доказательства. Докажем для $\mathbb{R}^2$, рассмотрим $\mathbb{R}^2 \setminus A$ и там возьмем шарики с центрами в рациональных точках и рациональными радиусами B_j

$$\mathbb{R}^2 \setminus A = \bigcup_j B_j$$

На каждом из B_j строим функцию ψ_j уходящую на 0, например, на основе $e^{-\frac{1}{1-r^2}}$ такие, что

$$|\psi_j| < \frac{1}{2^j}$$

$$|\text{производные } \psi_j| < \frac{1}{2^j}$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)$$

функция непрерывна, так как ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_j(x)$$

аналогично сходится равномерно. □

Теорема 34 (о неявной функции n = 2)**.** *Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируемая функция в окрестности точки (x_0, y_0) и выполняются условия*

1) $F(x_0, y_0) = 0$
2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда существует окрестность $U \ni x_0$ и окрестность $V \ni y_0$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : U \to V$: в $U \times V$

$$F(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = f(x)$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (u, v)$

$$\begin{cases} u = x \\ v = F(x, y) \end{cases}$$

$$J_\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$J_\Phi(x_0, y_0)$ - невырожденная. По теореме об обратной функции существуют окрестности $O_1((x_0, y_0))$ и $O_2((x_0, 0))$: $\Phi : O_1 \to O_2$ - диффеоморфизм.

$$\Phi^{-1}(u, v) : \begin{cases} x = u \\ y = \phi(u, v) \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

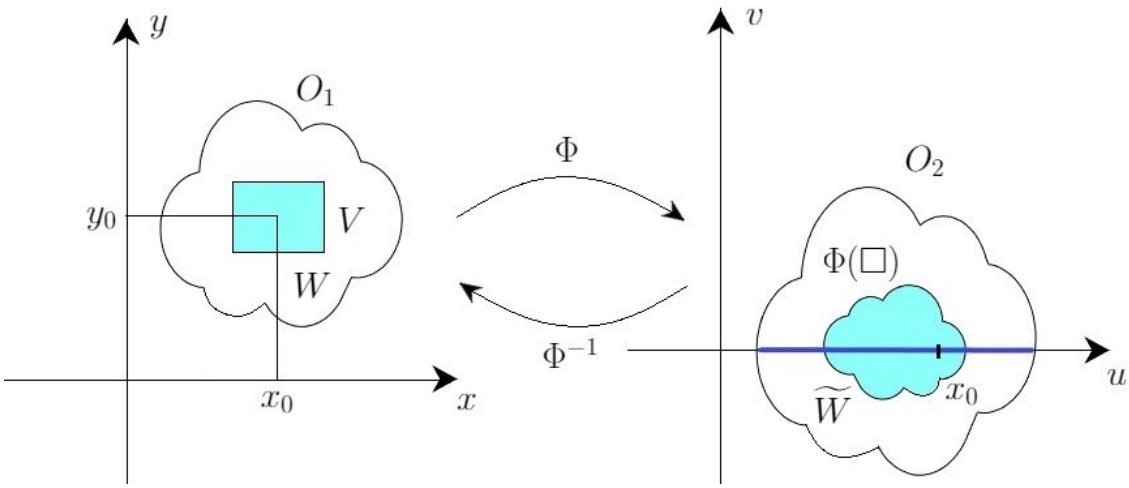

Рис. 22.

ϕ - непрерывно дифференцируема. На Рис. 22. синяя линия это $\Phi(\{(x,y)|\ F(x,y)=0\})$

$$\{(x,y)|\ F(x,y)=0\} = \Phi^{-1}(\Phi(\{(x,y)|\ F(x,y)=0\})) = \{(x,y)|\ y=\phi(x,0)\}$$

$\{(x,y)|\ y=\phi(x,0)\}$ - график функции.

$$y=\phi(x,0)=f(x)$$

$U = W \cap \widetilde{W},\ \forall (x,y) \in U \times V$

$$F(x,y)=0 \ \Leftrightarrow\ y=\phi(x,0)$$

$\square$

$$\widetilde{F}(u,v) = F(x(u,v), y(u,v)) = v$$

$v = const$ - линии уровня.

Теорема 35 (о неявных функциях)**.** *Пусть $F : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y \to \mathbb{R}^m$ - непрерывно дифференцируемо в точке (x_0, y_0) и выполняются условия:*

1) $F(x_0,y_0)=0$

2) *матрица Якоби отображения $y \mapsto F(x_0,y)$ невырождена в точке y_0.*

Тогда $\exists U \ni x_0,\ V \ni y_0$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \to V$: в $U \times V$

$$F(x,y)=0 \ \Leftrightarrow\ y=f(x)$$

Координатная запись:

$$\begin{cases} F_1(x_1,...x_n,y_1,...y_m)=0 \\ ..... \\ F_m(x_1,...x_n,y_1,...y_m)=0 \end{cases}$$

Хотим решить: выразить y_j через x_i. Условия:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

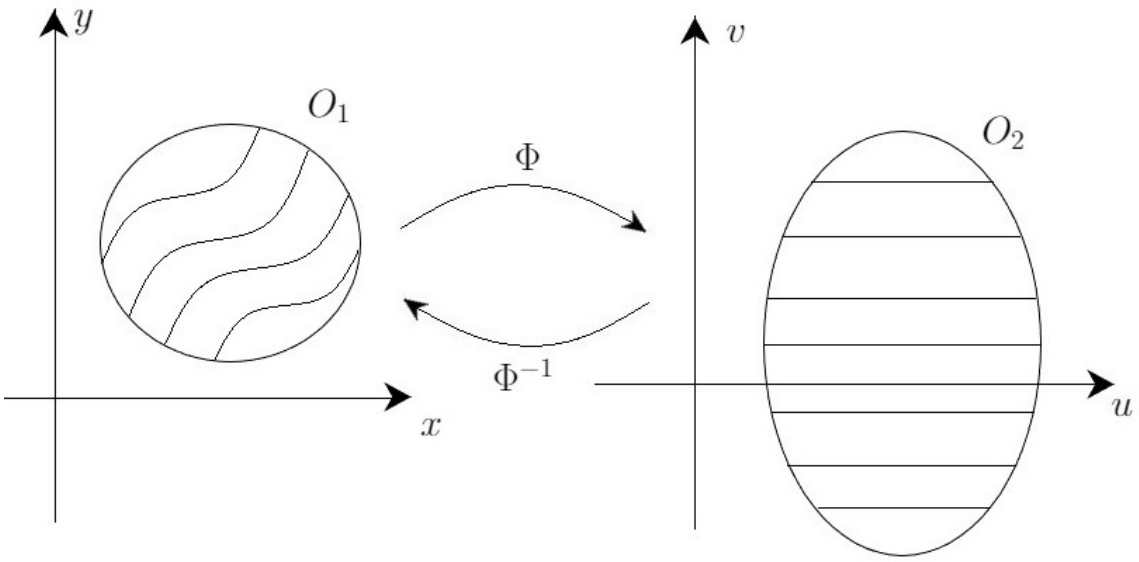

Рис. 23.

1) есть решение (x_0, y_0)

2) невырожденность матрицы Якоби

Тогда можно решить в окрестности точки (x_0, y_0).

Доказательство теоремы дословно повторяет случай $n = 1,\ m = 1$.

$$\Phi : \begin{cases} u = x \\ v = F(x, y) \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} x = u \\ y = \phi(u, v) \end{cases}$$

В новых координатах

$$\begin{cases} \widetilde{F}_1(u_1, ...u_n, v_1, ...v_m) = v_1 \\ ..... \\ \widetilde{F}_m(u_1, ...u_n, v_1, ...v_m) = v_m \end{cases}$$

$F = C$ для $\widetilde{F}$

$$\begin{cases} v_1 = c_1 \\ ..... \\ v_m = c_m \end{cases}$$

это плоскость размерности n.

Пример 24. $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = c$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ - градиент, вектор, перпендикулярный линиям уровня.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $\bigtriangledown f = \bigtriangledown g$, если будем рисовать линии уровня для этих функций, получатся одни и те же линии уровня, то есть

$$g = F(f)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 17

Функции нескольких переменных

Теорема о неявной функции

Замечание 12. $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x)$ в окрестности точки (x_0,y_0), f - непрерывно дифференцируемая. Для вычисления производной f надо продифференцировать выражение

$$F(x,f(x))=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))f^{'}(x)=0$$

$$f^{'}(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

Теорема о функциональной зависимости

Рассматриваем функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$, у них совпадают линии уровня, возьмем на линии уровня точку A

$$F(x,y)=F(A)$$

$$G(x,y)=G(A)$$

Градиенты лежат на одной прямой, значит

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}=1$$

Определение 22. Функции F и G *функционально независимы* в окрестности точки (x_0,y_0), если для всякой $f(u,v)$ из равенства

$$f(F(x,y),G(x,y))=0 \Rightarrow f(u,v)\equiv 0 \tag{17.1}$$

в окрестности точки $(F(x_0,y_0),G(x_0,y_0))$.

Если F и G не являются функционально независимыми в окрестности точки (x_0,y_0), то говорят, что они *функционально зависимы.*

Теорема 36. *Пусть $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности (x_0,y_0) b*

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}=k$$

постоянен в окрестности точки (x_0,y_0). Тогда

1) *если $k=2$, то функции функционально независимы*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) если $k = 1$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq (0,0)$, то

$$G(x,y) = h(F(x,y)) \tag{17.2}$$

h - непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство.

1) rk $= 2$. Рассмотрим

$$\Phi : \begin{cases} u = F(x,y) \\ v = G(x,y) \end{cases}$$

J_ϕ - невырождена, Φ - диффеоморфизм.

Пусть $f(F(x,y), G(x,y)) = 0$ в окрестности W точки (x_0, y_0), $\Phi : W \to \Phi(W)$ - биекция, то есть $\forall (u,v) \in \Phi(W)$

$$f(u,v) = 0$$

2) rk $= 1$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq (0,0)$. Считаем, что $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$. Сделаем замену

$$\Phi : \begin{cases} u = F(x,y) \\ v = y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - невырождена.}$$

Было: $F(x,y),\ G(x,y)$. Стало: $F(x(u,v), y(u,v)),\ G(x(u,v), y(u,v))$.

$$\widetilde{F}(u,v) = F(x(u,v), y(u,v)) = u,\ \widetilde{G}(u,v)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial v} \\ \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Значит

$$1 = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial v} = 0$$

значит

$$G(x(u,v), y(u,v)) = h(u)$$
$$G(x,y) = h(F(x,y))$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 37 (многомерный аналог)**.** *Пусть $f_1, ...f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируемы в окрестности точки a и*

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

постоянен в окрестности точки a. Тогда

1) *если $k = m$, то $f_1, ...f_m$ функционально независимы,*

2) *если $k < m$, то $f_1, ...f_m$ функционально зависимы, кроме того, если*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

то

$$f_{k+1} = h_{k+1}(f_1, ...f_k)$$
$$....$$
$$f_m = h_m(f_1, ...f_k)$$

Доказательство повторяет двумерный случай (разобрать в качестве упражнения) Например, для доказательства пункта 1), $n \geqslant m$, делаем замену:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, ...x_n) \\ ... \\ u_m = f_m(x_1, ...x_n) \\ u_{m+1} = x_{m+1} \\ ... \\ u_n = x_n \end{cases}$$

Матрица Якоби замены невырождена.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 18

Функции нескольких переменных

Теорема о функциональной зависимости

Пусть

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

то

$$f_{k+1} = h_{k+1}(f_1, ...f_k)$$

$$....$$

$$f_m = h_m(f_1, ...f_k)$$

В этом случае $df_1, ...df_k$ - базис в линейной оболочке $df_1, ...df_m$, значит

$$df_{k+1} = C_1 df_1 + ... + C_k df_k$$

Но с другой стороны

$$df_{k+1} = \frac{\partial g}{\partial y_1} df_1 + ... + \frac{\partial g_{k+1}}{\partial y_k} df_k$$

Производные высокого порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(...\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)\right) \tag{18.2}$$

Теорема 38 (Шварц)**.** *Пусть $f(x, y)$ в окрестности в точки $a = (a_1, a_2)$ имеет частны производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Если эти производные непрерывны в точке a, то они в этой точке равны.*

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t, s) = f(a_1 + t, a_2 + s) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + s) + f(a_1, a_2)$$

Пусть

$$\psi(\tau) = f(a_1 + \tau, a_2 + s) - f(a_1 + \tau, a_2)$$

$$F(t, s) = \psi(t) - \psi(0) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \psi'(c) \cdot t,\ 0 < c < t$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\psi^{'}(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2 + s) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2)$$

$$\phi(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2 + u)$$

$$\psi^{'}(c) = \phi(s) - \phi(0) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \phi^{'}(d) \cdot s$$

$$\phi^{'}(d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1 + c, a_2 + d),\ 0 < d < s,\ 0 < c < t$$

Для всех t и s из достаночно малой окрестности 0

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1 + c, a_2 + d) \cdot t \cdot s,\ 0 < d < s,\ 0 < c < t$$

Теперь группируем по-другому и получаем

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1 + \widetilde{c}, a_2 + \widetilde{d}) \cdot t \cdot s,\ 0 < \widetilde{d} < s,\ 0 < \widetilde{c} < t$$

следовательно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1 + \widetilde{c}, a_2 + \widetilde{d}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1 + c, a_2 + d)$$

$$t \to 0 \ \Rightarrow\ c \to 0,\ \widetilde{c} \to 0$$

$$s \to 0 \ \Rightarrow\ d \to 0,\ \widetilde{d} \to 0$$

В силу непрерывности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

□

Теорема 39 (Юнга)**.** *Пусть у функции $f(x, y)$ в окрестности точки $a = (a_1, a_2)$ существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, если эти частные производные дифференцируемы в точке a, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t, t) = f(a_1 + t, a_2 + t) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + t) + f(a_1, a_2)$$

$$\psi(\tau) = f(a_1 + \tau, a_2 + t) - f(a_1 + \tau, a_2)$$

$$F(t, t) = \psi(t) - \psi(0) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \psi^{'}(c) \cdot t =$$

$$= t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) h_1 +$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)h_2 + \alpha(h_1, h_2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\alpha(h_1, h_2) \xrightarrow[h_1, h_2 \to 0]{} 0$$

в первом слагаемом $h_1 = c,\ h_2 = t$, во втором слагаемом $h_1 = c,\ h_2 = 0$

$$t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + c, a_2)\right) =$$

$$= t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2)c + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)t + \alpha(c, t)\sqrt{c^2 + t^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) \cdot c - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2) \cdot 0 + \alpha(c, 0)\sqrt{c^2 + 0^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2) \cdot t^2 + \alpha(c, t) \cdot t \cdot \sqrt{c^2 + t^2} - \alpha(c, 0) \cdot |c| \cdot t,\ 0 < c < t$$

Аналогично, перегруппировывая, получаем

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) \cdot t^2 + \widetilde{\alpha}(t, \widetilde{c}) \cdot t \cdot \sqrt{t^2 + \widetilde{c}^2} - \widetilde{\alpha}(0, \widetilde{c}) \cdot |\widetilde{c}| \cdot t,\ 0 < \widetilde{c} < t$$

Приравниваем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) + \widetilde{\alpha}(t, \widetilde{c})\sqrt{1 + \left(\frac{c}{t}\right)^2} - \widetilde{\alpha}(0, \widetilde{c})\frac{|\widetilde{c}|}{t} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2) + \alpha(c, t)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{t}\right)^2} - \alpha(c, 0)\frac{|c|}{t}$$

$$\frac{c}{t} \leqslant 1,\ \frac{\widetilde{c}}{t} \leqslant 1$$

$$\frac{|c|}{t} \leqslant 1,\ \frac{|\widetilde{c}|}{t} \leqslant 1$$

$t \to 0 \ \Rightarrow\ c,\ \widetilde{c} \to 0$, следовательно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)$$

□

Определение 23. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки a. Говорят, что f *дважды дифференцируема в точке* a, если все её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ дифференцируемы в точке a.

Пусть f - m раз дифференцируема в окрестности точки a. Говорят, что f $(m+1)$ *раз дифференцируема в точке* a, если все частные производные m-того порядка $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}$ дифференцируемы в точке a.

Следствие. *Если f - m раз дифференцируема в точке a, то значения производных порядка m $\frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(a)$ не зависят от порядка дифференцирования.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. По индукции

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} ... \partial x_{i_m}} \right)$$

По предположению индукции в $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} ... \partial x_{i_m}}$ можно менять порядок местами, а первые две можно менять местами по теореме Юнга. $\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 19

Функции нескольких переменных

Производные высокого порядка

Теорема 40. *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $m+1$ раз дифференцируема в окрестности точки a, то для всех h из некоторой окрестности 0 верно*

$$f(a+h) = f(a) + df(a,h) + ... + \frac{d^m f(a,h)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(a+ch,h)}{(m+1)!} \tag{19.1}$$

$0 < c < 1$, *c зависит от a, h и m.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\phi(t) = f(a+th)$$
$$\phi^{(k)}(t) = d^k f(a+th,h)$$

подставим в формулу Тейлора для ϕ. □

Следствие. *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m раз дифференцируема в окрестности точки a и ее частные производные m-того порядка непрерывна в точке a*

$$f(a+h) = f(a) + df(a,h) + ... + \frac{df^m(a,h)}{m!} + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^m) \tag{19.2}$$

где

$$o(\|h\|^m) = \alpha(h)\|h\|^m \tag{19.3}$$
$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

Доказательство. По теореме 40

$$f(a+h) = f(a) + df(a,h) + ... + \frac{d^{m-1} f(a,h)}{(m-1)!} + \frac{d^m f(a+ch,h)}{m!},\ 0 < c < 1$$

$$\frac{d^m f(a+ch,h)}{m!} = \frac{d^m f(a,h)}{m!} + \frac{d^m f(a+ch,h) - d^m f(a,h)}{m!}$$

$$d^m f(a+ch,h) - d^m f(a,h) = \sum_{i_1,...i_m} \left(\frac{\partial^m f(a+ch)}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}} - \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}} \right) h_{i_1}...h_{i_m} =$$

$$= \|h\|^m \sum_{i_1,...i_m} \left(\frac{\partial^m f(a+ch)}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}} - \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}} \right) \frac{h_{i_1}}{\|h\|}...\frac{h_{i_m}}{\|h\|} = \|h\|^m \alpha(h)$$

так как

$$\frac{h_{i_1}}{\|h\|} \leqslant 1,\ ...\ \frac{h_{i_m}}{\|h\|} \leqslant 1$$

из-за непрерывности

$$\frac{\partial^m f(a+ch)}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}} - \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Локальный экстремум

Определение 24. Точка a называется точкой *локального (внутреннего) максимума функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, если f определена в окрестности точки a $U(a)$ и $\forall x \in U(a)$

$$f(x) \leqslant f(a)$$

Если при $x \neq a$

$$f(x) < f(a)$$

то *a точка строго локального максимума.*

Аналогично определяется *точка локального (внутреннего) минимума.*

Точки локального минимума и максимума называются *точками локального экстремума.*

Утверждение 25 (необходимое условие локального экстремума)**.** *Если a - точка локального экстремума функции f и f дифференцируема в точке a, то*

$$df(a,h) \equiv 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

Доказательство. Рассмотрим $x_k \to f(a_1, ...a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ...a_n)$ - точка a_k - точка локального экстремума и по теореме Ферма

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

□

Теорема 41 (достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и ее вторые производные непрерывны в точке a. Пусть $df(a,h) \equiv 0$, тогда*

1) *если $d^2f(a,h) > 0\ \forall h$, то a - точка строгого локального минимума*
2) *если $d^2f(a,h) < 0\ \forall h$, то a - точка строгого локального максимума*
3) *если $\exists v_+$ и v_-: $d^2f(a,v_+) > 0$, $d^2f(a,v_-) < 0$, то a не является точкой экстремума.*

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a,h) + \alpha(h)\|h\|^2 = f(a) + \|h\|^2\left(\frac{1}{2}d^2f\left(a, \frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$$

$\frac{h}{\|h\|}$ принадлежит единичной сфере $\{x : \ \|x\| = 1\}$ - это компакт. $v \to d^2f(a,v)$ - непрерывная, значит принимает минимальные и максимальные значения на единичной сфере.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Пусть мы знаем, что $d^2f(a,h) > 0\ \forall h \neq 0$

$$m = \min_{\|h\|=1} d^2f(a,h) > 0$$

$$f(a+h) \geqslant f(a) + \|h\|^2\left(\frac{m}{2} + \alpha(h)\right)$$

Так как $\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, то $\exists U(0):\ \forall h \in U(0)$

$$|\alpha(h)| < \frac{m}{4}$$

следовательно $\forall h \in U(0)$

$$f(a+h) \geqslant f(a) + \|h\|^2\frac{m}{4} > f(a),\ h \neq 0$$

2) Доказывается аналогично предыдущему пункту.

3) Пусть у нас есть v_- и v_+ такие, что $d^2f(a,v_-) < 0$, $d^2f(a,v_+) > 0$

$$f(a+tv_-) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a,tv_-) + \alpha(tv_-)\|tv_-\|^2 =$$

$$= f(a) + t^2\left(\frac{d^2f(a,v_-)}{2} + \alpha(tv_-)\|v_-\|^2\right)$$

$t \to 0$, при t близких к 0

$$f(a+tv_-) < f(a)$$

Аналогично, для всех t близких к 0

$$f(a+tv_+) > f(a)$$

□

Условный экстремум

Пусть $f,\ f_1, ...f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, m < n$, будем решать задачу

$$f(x)\ \to\ extr$$

$$\text{при условии } f_1(x) = ... = f_m(x) = 0$$

то есть ищем локальный экстремум на множестве

$$M = \{x:\ f_1(x) = ... = f_m(x) = 0\}$$

Определение 25. Точка $x_0 \in M$ - *точка локального условного максимума*, если $\exists U(x_0):\ \forall x \in U(x_0) \cap M$

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

Аналогично определяется *точка локального условного минимума.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) \ \to \ extr$$
$$f_1(x,y) = 0$$

в точке экстремума

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} f_1$$

Задача 22. Задача про кинотеатр, надо вычислить откуда экран будет видно под большим углом (Рис. 24.).

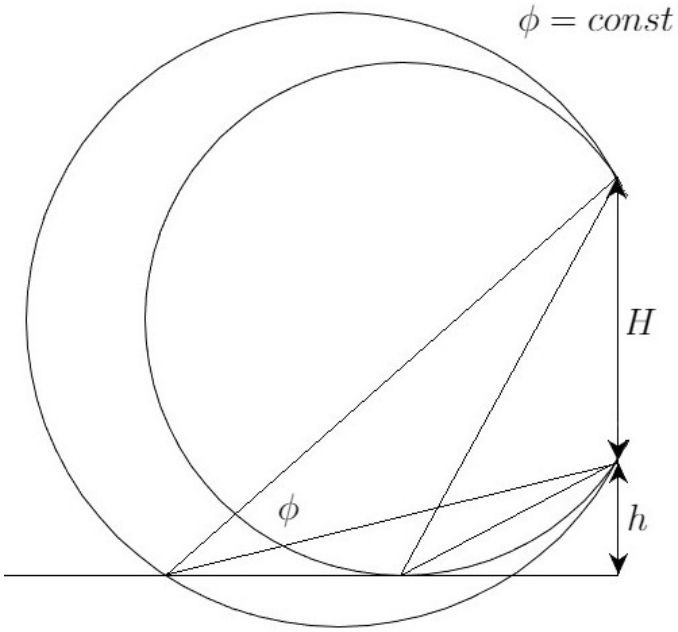

Рис. 24.

$$\phi \ \to \ extr$$

Надо брать точку, когда окружность касается.

Задача 23. Пусть у нас бусина катится по нитке (Рис. 25.).

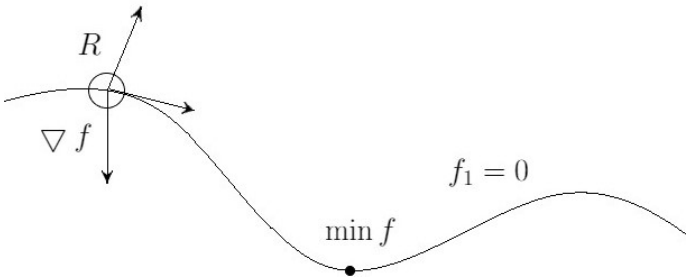

Рис. 25.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\ddot{x} = -\bigtriangledown f + R$$

домножим скалярно на $\dot{x}$

$$\langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle = -\langle \bigtriangledown f, \dot{x} \rangle$$

$$\frac{d}{dt}\frac{|\dot{x}|^2}{2} = -\frac{d}{dt} f(x(t))$$

Получаем закон сохранения энергии

$$\frac{|\dot{x}|^2}{2} + f(x(t)) = const$$

Точка минимума - точка равновесия

$$-\bigtriangledown f = R = \lambda \bigtriangledown f_1$$

Теорема 42 (необходимое условие условного экстремума)**.** *Пусть* $f,\ f_1, ...f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ m \leqslant n$ *- непрерывно дифференцируемые в окрестности точки* a*. Пусть*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = m$$

в окрестности точки a*. Если точка* a *- точка условного локального экстремума функции* f *на*

$$M = \{x :\ f_1(x) = 0, ...f_m(x) = 0\}$$

то $\exists \lambda_1, ...\lambda_m$

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1(a) + ... + \lambda_m \operatorname{grad} f_m(a) \tag{19.4}$$

Доказательство. Делаем замену координат, считаем, что отличается от 0 первый минор $m \times m$

$$\Phi : \begin{cases} u_1 = f_1(x_1, ...x_n) \\ ..... \\ u_m = f_m(x_1, ...x_n) \\ u_{m+1} = x_{m+1} \\ ..... \\ u_n = x_n \end{cases}$$

$$J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{f}(u_1, ...u_n) = f(x_1(u_1, ...u_n), ...x_n(u_1, ...u_n))$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\widetilde{f} \ \to \ extr$$

$$\text{при условии } u_1 = ... = u_m = 0$$

то есть

$$\widetilde{f}(0, ...0, u_{m+1}, ...u_m) \ \to \ extr$$

Если $\Phi(a)$ - экстремум, следовательно

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u_{m+1}}(\Phi(a)) = ... = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u_n}(\Phi(a))$$

То есть в точке $\Phi(a)$

$$\operatorname{grad} \widetilde{f}(\Phi(a)) = (\lambda_1, ...\lambda_m, 0, ...0)$$

$$\lambda_i = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u_i}(\Phi(a))$$

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} \cdot J_\Phi = \operatorname{grad} f$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & \lambda_m, & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ ... \\ ... \\ \operatorname{grad} f_m \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f$$

$$\lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + ... + \lambda_m \operatorname{grad}_m = \operatorname{grad} f$$

□

Правило множителей Лагранжа. Для нахождения условного экстремума функции f при условии $f_1 = ... = f_m = 0$ надо составить функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda_1 f_1(x) - ... - \lambda_m f_m(x) \tag{19.5}$$

и действовать как с обычным экстремумом

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{cases}$$

из системы находим подозрительные на экстремум точки и проверяем их.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 20

Интеграл Римана

У нас есть отрезок $[a, b]$.

Разбиение отрезка $[a, b]$

$$\mathbb{T} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b\} \tag{20.1}$$

отрезки разбиения

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k] \tag{20.2}$$

$$|\Delta_k| = x_k - x_{k-1} \tag{20.3}$$

Параметр или масштаб разбиения

$$\lambda(\mathbb{T}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\Delta_k| \tag{20.4}$$

Набор точек $\xi_k \in \Delta_k,\ k = 1, 2...N$ обозначается через ξ и называется *набором отмеченных точек.*

А пара $(\mathbb{T}, \xi)$ называется *отмеченным разбиением.*

Пусть f определена на отрезке $[a, b]$ и $(\mathbb{T}, \xi)$ отмеченное разбиение отрезка $[a, b]$. Выражение

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)|\Delta_k| \tag{20.5}$$

называется *суммой Римана (или интегральной суммой).*

Определение 26. Число I называется *интегралом Римана функции f на отрезке* $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall (\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ верно, что

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| < \varepsilon$$

Обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

то есть

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \int_a^b f(x)dx \tag{20.6}$$

Можно определить интеграл как предел по базе. X - множество, $\mathfrak{B}$ - *база* - набор подмножеств множества:

1) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$

2) $U,\ V \subset \mathfrak{B}\ \exists W \in \mathfrak{B} :\ W \subset U \cap V$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x) = b$ значит $\exists U \in \mathfrak{B}$:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \ \forall x \in U$$

То есть интеграл это предел по базе. X - всевозможные отмеченные разбиения отрезка $[a, b]$

$$\sigma(f, \cdot, \cdot) : X \to \mathbb{R}$$

База:

$$\mathfrak{B} = \{B_\delta = \{(\mathbb{T}, \xi) : \ \lambda(\mathbb{T}) < \delta\}, \ \delta > 0\}$$

$$B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2} = B_{\min\{\delta_1, \delta_2\}}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}} \sigma$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_\delta : \ \forall (\mathbb{T}, \xi) \in B_\delta$

$$\left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Пример 25.

1)
$$f(x) \equiv 1$$

Докажем, что

$$\int\limits_a^b 1 \cdot dx = b - a$$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| = \sum_k |\Delta_k| = b - a$$

2) Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| = \begin{cases} b - a, & \xi_k \in \mathbb{Q} \\ 0, & \xi_k \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

То есть предела нет и функция Дирихле неинтегрируема.

3) Пусть Δ - промежуток с концами c и d, $c \leqslant d$ внутри отрезка $[a, b]$

$$f(x) = I_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta \\ 0, & x \notin \Delta \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждается, что

$$\int\limits_a^b I_\Delta(x)dx = d - c$$

Разбиваем отрезок, c и d может быть либо концом отрезка разбиения, либо лежать внутри него.

$$\sigma(I_\Delta, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| = \sum_{k:\Delta_k \ni c \text{ или } \Delta_k \ni d} f(\xi_k)|\Delta_k| + \sum_{k:\Delta_k \subset (c,d)} 1 \cdot |\Delta_k|$$

$\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$d - c - 2\delta \leqslant \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant 4\delta + d - c$$

$\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - (d - c)| < \varepsilon$$

Теорема 43. *Если функция f интегрирума по Риману на отрезке $[a, b]$, то f ограничена на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. От противного. Пусть f неограничена. Возьмем $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ $\forall (\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$\int\limits_a^b f(x)dx - 1 < \sum_{k=1}^N f(\xi_k)|\Delta_k| < \int\limits_a^b f(x)dx + 1$$

f неограничена на каком-то из Δ_k, фиксируем отмеченные точки в остальных отрезках и меняем $\xi_k \in \Delta_k$. $f(\xi_k)$ на Δ_k принимает сколь угодно большие значения, что противоречит ограниченности Римановой суммы. □

Свойства интеграла Римана

1) Линейность. Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx \tag{20.7}$$

Доказательство.

$$\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) = \alpha\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) + \beta\sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 :$ $\forall (\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \right| < \varepsilon$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\left|\int\limits_a^b g(x)dx - \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)\right| < \varepsilon$$

Тогда $\forall(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$\left|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \left(\alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx\right)\right| \leqslant |\alpha| \cdot \left|\int\limits_a^b f(x)dx - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)\right| +$$

$$+|\beta| \cdot \left|\int\limits_a^b g(x)dx - \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)\right| \leqslant (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$$

□

Следствие. *Функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i I_{\Delta_i}(x) \tag{20.8}$$

Δ_i *- промежутки в отрезке* $[a, b]$ *интегрируема по Риману и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_i c_i \cdot |\Delta_i| \tag{20.9}$$

Такая функция называется простой.

2) Монотонность. Если f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f \leqslant g$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство.

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)|\Delta_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} g(\xi_k)|\Delta_k| = \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \varepsilon < \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$$

$$\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) < \int\limits_a^b g(x)dx + \varepsilon$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Так как $f \leqslant g$, то

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \varepsilon \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ и получаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$$

□

Следствие(первая теорема о среднем). *Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \ \forall x \in [a, b]$$

Тогда $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b - a) \tag{20.9}$$

Если f непрерывна на $[a, b]$, то $\mu = f(c)$ для некоторого $c \in [a, b]$.

Доказательство. Существование очевидно

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Надо лишь доказать, что $\mu \in [m, M]$, из монотонности

$$m(b - a) = \int\limits_a^b m dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx = M(b - a)$$

Для непрерывной функции $\mu = f(c)$ по теореме о промежуточных значениях.

□

Следствие. *Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f|(b - a) \tag{20.10}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Следует из теоремы о среднем, так как

$$-\sup_{[a,b]}|f| \leqslant f(x) \leqslant \sup_{[a,b]}|f|$$

$$-(b-a)\sup_{[a,b]}|f| \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$$

□

Теорема 44. *Пусть f_n интегрируемые на $[a,b]$ функции и $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ (то есть $\sup\limits_{[a,b]}|f_n - f| \to 0$). Тогда f интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{20.11}$$

Доказательство.

а) Покажем, что числовая последовательность $\int\limits_a^b f_n(x)dx$ сходится

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f_m(x)dx\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n - f_m| \xrightarrow[n,m\to 0]{} 0$$

Поличаем, что $\int\limits_a^b f_n(x)dx$ - фундаментальная и сходится к некоторому числу I.

б) f интегрируема и I - ее интеграл.

$$\sigma(f,\mathbb{T},\xi)-I = \sigma(f,\mathbb{T},\xi)-\sigma(f_n,\mathbb{T},\xi)+\sigma(f_n,\mathbb{T},\xi)-\int\limits_a^b f_n(x)dx+\int\limits_a^b f_n(x)dx-I$$

$$|\sigma(f,\mathbb{T},\xi)-\sigma(f_n,\mathbb{T},\xi)| \leqslant \sup_{[a,b]}|f-f_n|(b-a)$$

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - I\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\forall\varepsilon\ \exists n$:

$$|\sigma(f,\mathbb{T},\xi)-\sigma(f_n,\mathbb{T},\xi)| < \varepsilon \text{ и } \left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - I\right| < \varepsilon$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

n фиксируем и пользуемся интегрируемостью f_n, то есть $\exists \delta > 0 : \ \forall (\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$\left| \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \int\limits_a^b f_n(x)dx \right| < \varepsilon$$

получаем

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| < 3\varepsilon$$

$\square$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 21

Интеграл Римана

Свойства интеграла Римана

2) Продолжение обсуждения свойства монотонности.

Следствие 1. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то f интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[a,b]$, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ |x-y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ и будем рассматривать функцию

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) I_{\Delta_k}(x)$$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$
$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k)$$
$$\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$$

Пусть $x \in \Delta_k$

$$|f(x) - \phi_n(x)| = |f(x) - f(x_{k-1})|$$
$$|x - x_{k-1}| \leqslant \frac{b-a}{n}$$

$\forall\varepsilon > 0\ \delta > 0:\ |x-y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Пусть $N:\ \frac{b-a}{N} < \delta$, тогда $\forall n > N,\ \forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - \phi_n(x)| < \varepsilon$$

следовательно $\phi_n \rightrightarrows f$. □

Задача 24. Доказать, что кусочно-непрерывная функция, интегрируемая по Риману. f - кусочно-непрерывная, если есть конечное разбиение $[a,b]$ и

1) $f \in C(x_{k-1}, x_k)$
2) $\exists \lim\limits_{x\to x_k-} f$ и $\lim\limits_{x\to x_k+} f$

Следствие 2. *Если f - монотонна на $[a,b]$, то f интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Пусть для определенности f не убывает, $f(a) = f(b)$ не рассматриваем, считаем, что $f(a) < f(b)$. Измельчаем область значения

$$y_k = f(a) + (f(b) - f(a))\frac{k}{n}$$

$$\Delta_k = \{x : \ y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\}$$

$$\Delta_n = \{x : \ y_{n-1} \leqslant f(x) \leqslant y_n\}$$

0) $\Delta_k = \emptyset$ - такое может быть, но такие множества выбрасываем.
1) $\Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset$ при $k \neq l$, $[a, b] = \bigcup_k \Delta_k$
2) Δ_k - промежуток

$x_1 < x_2 \in \Delta_k, \ x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

$$y_{k-1} \leqslant f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \leqslant y_k$$

$$\phi_n = \sum_k y_{k-1} I_{\Delta_k}$$

$x \in \Delta_k$

$$|f(x) - \phi_n(x)| = |f(x) - y_k| \leqslant y_k - y_{k-1} = \frac{f(b) - f(a)}{n}$$

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - \phi_n(x)| \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{n} \to 0$$

□

Если брать не монотонную, а любую функцию приближать как в доказательстве выше, в прообразе промежутка $[y_{k-1}, y_k)$ может быть не отрезок, а какое-то множество A_k, то есть получаем

$$\int_a^b \sum_k y_{k-1} I_{A_k} dx = \sum_k y_{k-1} |A_k|$$

Возникает проблема, что нужно научиться приписывать разумную длину множеству, но не всем множествам можно ее приписать (это будет рассказано позже в разговоре про интеграл Лебега).

Замечание 13. Построим естественный класс интегрируемых по Риману функций - ограниченный функции, которые равномерно приближаются простыми ступеньками.

Этот класс является линейным пространством. Но он не исчерпывает все интегрируемые по Риману функции.

3) Аддитивность.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 45 (пока без доказательства)**.**

1) *Если f интегрируема на $[a,b]$, то f интегрируема на всяком $[c,d] \subset [a,b]$.*
2) *Если f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$.*

Следствие. *Если $a < c < b$ и f интегрируема на $[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Возьмем разбиения $\mathbb{T}_{[a,c]}$ и $\mathbb{T}_{[c,b]}$

$$\mathbb{T}_{[a,c]} \cup \mathbb{T}_{[c,b]} = \mathbb{T}_{[a,b]}$$

$$\sigma(f, \mathbb{T}_{[a,b]}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| = \sum_{k:\Delta_k \text{ из } [a,c]} f(\xi_k)|\Delta_k| + \sum_{k:\Delta_k \text{ из } [c,b]} f(\xi_k)|\Delta_k| =$$
$$= \sigma(f, \mathbb{T}_{[a,c]}, \xi_{[a,c]}) + \sigma(f, \mathbb{T}_{[c,b]}, \xi_{[c,b]})$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$$\lambda(\mathbb{T}_{[a,c]}) < \delta,\ \lambda(\mathbb{T}_{[c,b]}) < \delta \ \Rightarrow\ \lambda(\mathbb{T}_{[a,b]}) < \delta$$

$$\left|\sigma(f, \mathbb{T}_{[c,b]}, \xi) - \int\limits_c^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sigma(f, \mathbb{T}_{[a,c]}, \xi) - \int\limits_a^c f(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sigma(f, \mathbb{T}_{[a,b]}, \xi) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \left(\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\right)\right| < 3\varepsilon$$

Устремляем $\varepsilon \to 0$. □

Первообразная непрерывной функции

Пусть f - непрерывна на $[a,b]$. Положим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \tag{21.1}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 46.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x) \tag{21.2}$$

То есть $F(x)$ - первообразная функции f.

Доказательство. Для определенности пусть $h > 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)dt \overset{\text{т. о среднем}}{=} f(c),\ x \leqslant c \leqslant x+h$$

$h \to 0,\ c \to x$ и $f(c) \to f(x)$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

Аналогично получается при $h \to 0-$. □

Следствие 1.

1) *У всякой непрерывной функции f на $[a,b]$ есть первообразная.*

2) *Если $\widetilde{F}$ - первообразная функции f на $[a,b]$, то имеет место формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a) \tag{21.3}$$

Доказательство.

1) Уже доказано, первообразная:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

2) Положим

$$F(a) = 0$$

так как

$$|F(x)| \leqslant M|x-a|$$

$$\lim_{x\to a} F(x) = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Далее всегда считаем, что

$$\int\limits_a^a f(t)dt = 0$$

$$\widetilde{F} = F + C$$

$$\widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt$$

□

Следствие 2(формула интегрирования по частям). *Пусть f и g непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)g^{'}(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f^{'}(x)g(x)dx \tag{21.4}$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b (f(x)g^{'}(x) + f^{'}(x)g(x))dx = \int\limits_a^b (f(x)g(x))^{'}dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

□

Следствие 3(формула замены переменных). *Пусть $\phi : [\alpha, \beta] \xrightarrow{на} [a, b]$ - непрерывно дифференцируемая функция, причем $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Пусть f - непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt \tag{21.5}$$

Доказательство. Если F - первообразная функции f, то $F(\phi(t))$ - первообразная функции $f(\phi(t))\phi^{'}(t)$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 22

Интеграл Римана

Суммы Дарбу и интеграл Дарбу

Пусть f определена и ограничена на $[a, b]$. Пусть

$$\mathbb{T} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b\}$$

разбиение отрезка $[a, b]$.

Определение 27.

$$s(f, \mathbb{T}) = \sum_{k=1}^{N} \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| - \tag{22.1}$$

нижняя сумма Дарбу.

$$S(f, \mathbb{T}) = \sum_{k=1}^{N} \sup_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| - \tag{22.2}$$

верхняя сумма Дарбу.

Нижняя сумма Дарбу - площадь фигуры, изображенной на Рис. 26.

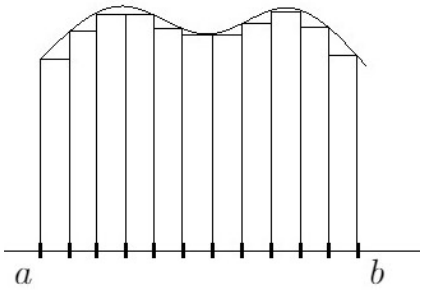

Рис. 26.

Верхняя сумма Дарбу - площадь фигуры, изображеннной на Рис. 27.

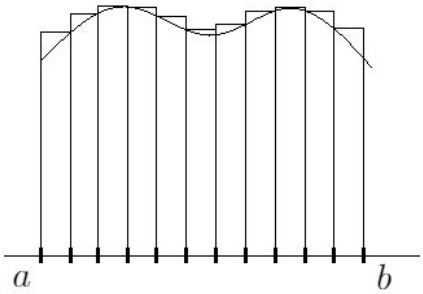

Рис. 27.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 26. *Свойства сумм Дарбу:*

1)

$$s(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \tag{22.3}$$

$$S(f, \mathbb{T}) = \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \tag{22.4}$$

2) Если $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ ($\mathbb{T}$ - измельчение $\mathbb{T}'$), то

$$s(f, \mathbb{T}) \leqslant s(f, \mathbb{T}') \tag{22.5}$$

$$S(f, \mathbb{T}') \geqslant S(f, \mathbb{T}) \tag{22.6}$$

3) $\forall \mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ верно

$$s(f, \mathbb{T}_1) \leqslant S(f, \mathbb{T}_2) \tag{22.7}$$

Доказательство.

1)

$$s(f, \mathbb{T}) = \sum_k \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| \leqslant \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k|$$

$\varepsilon > 0 \ \exists \xi_k :$

$$f(\xi_k) < \inf_{\Delta_k} f + \varepsilon$$

следовательно

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) < s(f, \mathbb{T}) + \varepsilon(b - a)$$

$$\inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant s(f, \mathbb{T}) + \varepsilon(b - a)$$

Устремляем $\varepsilon \to 0$.

Для верхней суммы аналогично.

2) $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$

$$\Delta_k' \subset \bigcup_j \Delta_{k_j}$$

$$s(f, \mathbb{T}') = \sum_k \inf_{\Delta_k'} f \cdot |\Delta_k'| = \sum_k \sum_j \inf_{\Delta_k'} f \cdot |\Delta_{k_j}| \leqslant \sum_k \sum_j \inf_{\Delta_{k_j}} = s(f, \mathbb{T})$$

Для верхних сумм аналогично.

3) Пусть есть $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$, рассмотрим $\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$

$$s(f, \mathbb{T}_1) \leqslant s(f, \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2) \leqslant S(f, \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2) \leqslant S(f, \mathbb{T}_2)$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 28. Число

$$\underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} s(f, \mathbb{T}) \tag{22.8}$$

называется *нижним интегралом Дарбу.*

$$\overline{I} = \inf_{\mathbb{T}} S(f, \mathbb{T}) \tag{22.9}$$

называется *верхним интегралом Дарбу.*

Утверждение 27.

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} s(f, \mathbb{T}) \tag{22.10}$$

то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall\mathbb{T}$ *с* $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ *верно*

$$\underline{I} - s(f, \mathbb{T}) < \varepsilon$$

Аналогично для $\overline{I}$.

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\mathbb{T}_\varepsilon:$

$$\underline{I} - s(f, \mathbb{T}_\varepsilon) < \varepsilon$$

Пусть $\mathbb{T}$ - произвольное разбиение с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta,\ \delta$ выберем позднее

$$\underline{I} - s(f, \mathbb{T}) = \underline{I} - s(f, \mathbb{T}_\varepsilon) + s(f, \mathbb{T}_\varepsilon) - s(s, \mathbb{T}) < \varepsilon + s(f, \mathbb{T}_\varepsilon \cup \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T})$$

$\widetilde{\Delta}_k$ - отрезки разбиения $\mathbb{T}_\varepsilon \cup \mathbb{T}$, Δ_k - отрезки разбиения $\mathbb{T}$.

$$\varepsilon + s(f, \mathbb{T}_\varepsilon \cup \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) = \varepsilon + \sum_{k:\widetilde{\Delta}_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon = \emptyset} \inf_{\widetilde{\Delta}_k} f \cdot |\widetilde{\Delta}_k| + \sum_{k:\widetilde{\Delta}_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon \neq \emptyset} \inf_{\widetilde{\Delta}_k} f \cdot |\widetilde{\Delta}_k| -$$

$$- \sum_{k:\Delta_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon = \emptyset} \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| - \sum_{k:\Delta_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon = \emptyset} \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| = \sum_{k:\widetilde{\Delta}_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon \neq \emptyset} \inf_{\widetilde{\Delta}_k} f \cdot |\widetilde{\Delta}_k| - \sum_{k:\Delta_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon \neq \emptyset} \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k|$$

Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|,\ K_\varepsilon$ - число точек разбиения

$$\sum_{k:\widetilde{\Delta}_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon \neq \emptyset} \inf_{\widetilde{\Delta}_k} f \cdot |\widetilde{\Delta}_k| - \sum_{k:\Delta_k \cap \mathbb{T}_\varepsilon \neq \emptyset} \inf_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k| \leqslant \varepsilon + 4M \cdot K_\varepsilon \cdot \lambda(\mathbb{T}) < \varepsilon + 4M \cdot K_\varepsilon \delta$$

Выбираем δ так, что

$$\varepsilon + 4M \cdot K_\varepsilon \delta < 2\varepsilon$$

□

Теорема 47 (критерий Дарбу)**.** *Ограниченная функция* f *интегрируема на* $[a, b]$ *по Риману тогда и только тогда, когда*

$$\underline{I} = \overline{I}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$$s(f,\mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \leqslant \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \leqslant \sup_{\xi} \sigma(f,\mathbb{T},\xi) = S(f,\mathbb{T})$$

$\Rightarrow$ Пусть f интегрируема и $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall (\mathbb{T},\xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$|\sigma(f,\mathbb{T},\xi) - I| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma(f,\mathbb{T},\xi) < I + \varepsilon$$

следовательно

$$I - \varepsilon < s(f,\mathbb{T}) \leqslant S(f,\mathbb{T}) < I + \varepsilon$$

значит

$$s(f,\mathbb{T}) \to I$$
$$S(f,\mathbb{T}) \to I$$

следовательно

$$\underline{I} = \overline{I} = I$$

$\Leftarrow$ Пусть $\underline{I} = \overline{I} = I$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall \mathbb{T}$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$I - \varepsilon < s(f,\mathbb{T}) \leqslant \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \leqslant S(f,\mathbb{T}) < I + \varepsilon$$

следовательно

$$|\sigma(f,\mathbb{T},\xi) - I| < \varepsilon$$

□

Замечание 14. Если f интегрируема, то

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Следствие. *Ограниченная функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbb{T}:$*

$$S(f,\mathbb{T}) - s(f,\mathbb{T}) < \varepsilon$$

Доказательство.

$\Rightarrow$

$$S(f,\mathbb{T}) - s(f,\mathbb{T}) \to \overline{I} - \underline{I} = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Leftarrow$

$$s(f, \mathbb{T}) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S(f, \mathbb{T})$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathbb{T}:$

$$S(f, \mathbb{T}) - s(f, \mathbb{T}) < \varepsilon$$

следовательно

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$$

значит

$$\overline{I} = \underline{I}$$

$\square$

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)| = \sup_E f - \inf_E f \tag{22.11}$$

колебания f на E.

Следствие. *Ограниченная функция f интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathbb{T}:$*

$$\sum_k \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k| < \varepsilon$$

Критерий Лебега

Определение 29. *Множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет меру 0 по Лебегу,* если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетная система интервалов $\{I_k\}: \ E \subset \bigcup\limits_k I_k$ и

$$\sum_k |I_k| < \varepsilon$$

$$\lambda^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup\limits_k I_k} \sum_k |I_k| -$$

верхняя мера Лебега.

Хотим:

$$E_n \cap E_m = \emptyset, \ E = \bigcup_n E_n$$

$$\lambda^*(E) = \sum_n \lambda^*(E_n)$$

Оказывается, что в общем слуаче это неверно. Лебег осознал, в каком классе множеств это выполняется, такие множества называются *измеримыми.*

Пример 26.

1) Точка - множество меры нуль.

2) Конечное число точек - множество меры нуль.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3) Счетный набор точек - множество меры нуль. $\{x_n\}$

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

4) $[0,1]$ - не является множеством меры нуль.

Доказательство. $[0,1] \subset \bigcup\limits_n I_n$, $\exists I_1, ...I_N : \ [0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} I_n$.
Доказываем по индукции. $N = 1$, $[0,1] \subset (\alpha_1, \beta_1)$, следовательно

$$\beta_1 - \alpha_1 > 1 - 0 = 1$$

Пусть для N доказано, докажем для $N+1$. Пусть $1 \ni (\alpha_{N+1}, \beta_{N+1})$, $[0, \alpha_{N+1}] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k)$

$$\alpha_{N+1} \leqslant \sum_{k=1}^{N} |I_k| + (\beta_{N+1} - \alpha_{N+1})$$

$$1 < \beta_{N+1} \leqslant \sum_{k=1}^{N+1} |I_k|$$

□

5) Множество Кантора - является множеством меры нуль (доказать самостоятельно).

Утверждение 28.

1) Если $E_1 \subset E_2$ и E_2 - множество меры нуль, то E_1 - множество меры нуль.

2) Если E_n - множества меры нуль, то $\bigcup\limits_n E_n$ - множество меры нуль.

3) В определении множества меры нуль интервалы можно заменить отрезками.

Доказательство.

1) Очевидно.

2) Очевидно.

3) $E \subset \bigcup\limits_n [\alpha_n, \beta_n]$

$$\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$$

Возьмем $\left(\alpha_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, \beta_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

□

Определение 30. Если некоторое свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль по Лебегу, то говорят, что *оно выполнено почти всюду.*

Теорема 48 (критерий Лебега)**.** *Функция f интегрируема на $[a, b]$ по Риману тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a, b]$ и почти всюду непрерывна на $[a, b]$.*

Лекция 23

Интеграл Римана

Критерий Лебега

Напоминание:

$$\omega(f, E) = \sup_E f - \inf_E f = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|$$

$$\omega(f, c) = \lim_{\delta \to 0+} \omega(f, U_\delta(c))$$

f - непрерывна в точке c тогда и только тогда, когда

$$\omega(f, c) = 0$$

$$\text{множество точек разрыва } = \bigcup_n \left\{ x : \ \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

Доказательство критерия Лебега.

$\Rightarrow$ Необходимость. Пусть f интегрируема на $[a, b]$, уже доказано, что f ограничена. Пусть $E = \bigcup\limits_n E_n$, где

$$E_n = \left\{ x : \ \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

Достаточно доказать, что E_n - множество меры нуль. По критерию Дарбу $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathbb{T}$:

$$\sum_n \omega(f, \Delta_k) |\Delta_k| < \varepsilon$$

Пусть $c \in E_n$ (n - фиксированное), если c - внутренняя точка Δ_k, то

$$\omega(f, \Delta_k) \geqslant \frac{1}{n}$$

Если $c \in \Delta_{k-1} \cap \Delta_k$, то

$$\omega(f, \Delta_k) \geqslant \frac{1}{3n}$$

Пусть $J = \left\{ k : \ \omega(f, \Delta_k) > \frac{1}{n} \right\}$, $E_n \subset \bigcup\limits_{k \in J} \Delta_k$

$$\sum_{k \in J} |\Delta_k| = 3n \sum_{k \in J} \frac{1}{3n} |\Delta_k| \leqslant 3n \sum_{k \in J} \omega(f, \Delta_k) |\Delta_k| \leqslant 3n \sum_k \omega(f, \Delta_k) |\Delta_k| < 3n\varepsilon$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{\Delta_k\}_{k \in J}$:

$$E_n \subset \bigcup_{k \in J} \Delta_k$$

и

$$\sum_{k \in J} |\Delta_k| < 3n\varepsilon$$

значит E_n - множество меры нуль.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Leftarrow$ Достаточность.

Впомогательные утверждения:

1) Δ - отрезок и $\Delta \subset \bigcup\limits_{i=1}^{P} I_i$, I_i - интервал, следовательно

$$|\Delta| \leqslant \sum_{i=1}^{P} |\Delta \cap I_i|$$

$\Delta = [\alpha, \beta]$. Возьмем $[\alpha + \delta, \beta - \delta]$,

$$[\alpha + \delta, \beta - \delta] \subset \bigcup_i I_i \cap (\alpha, \beta)$$

$$\beta - \alpha - 2\delta \leqslant \sum_i |\Delta \cap I_i|,\ \delta \to 0$$

2) Пусть $\Delta_1, ...\Delta_n$ - промежутки, которые попарно не пересекаются внутренностями. Если $\Delta_k \subset I$ - интервал $\forall k$, то

$$\sum_k |\Delta_k| \leqslant |I|$$

для доказательства вместо отрезков надо рассмотреть интервалы и применить индукцию.

Пусть E - множество точек разрыва функции f, по условию это множество меры нуль. Пусть $\varepsilon > 0$ $\exists \{I_k\}$ - интервалы

$$E \subset \bigcup_k I_k$$

$$\sum_k |I_k| < \varepsilon$$

Для всякой $x \in [a, b] \setminus E$ $\exists U_{\delta_x}(x)$:

$$\omega(f, U_{3\delta_x})(x) < \varepsilon$$

$[a, b]$ покрывается U_{δ_x} и I_k, существует конечное подпокрытие

$$U_{\delta_1}(x_1), ...U_{\delta_N}(x_N),\ I_1, ...I_p$$

Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\delta_k\}$ и $\mathbb{T}$ - разбиение $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$, Δ_k - отрезки разбиения.

$$\sum_k \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k| = \sum_{k:\exists j\ \Delta_k \cap U_{\delta_j}(x_j) \neq \emptyset} \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k| + \sum_{k:\forall j\ \Delta_k \cap U_{\delta_j}(x_j) = \emptyset} \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k|$$

Если $\Delta_k \cap U_{\delta_j}(x_j) \neq \emptyset$, то $\Delta_k \subset U_{3\delta_j}(x_j)$

$$\omega(f, \Delta_k) < \varepsilon$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sum_{k:\exists j\ \Delta_k \cap U_{\delta_j}(x_j) \neq \emptyset} \omega(f, \Delta_k) < \varepsilon(b-a)$$

Так как f ограничена, то

$$M = \sup_{[a,b]} |f| < \infty$$

$$\omega(f, \Delta_k) \leqslant 2M$$

Если $\Delta_k \cap U_{\delta_j}(x_j) = \emptyset\ \forall j$, то

$$\Delta_k \subset \bigcup_{i=1}^{P} I_i$$

$$\sum_{k:\Delta_k \subset \cup I_i} |\Delta_k| \leqslant \sum_{k:\Delta_k \subset \cup I_i} \sum_{i=1}^{P} |\Delta_k \cap I_i| = \sum_{i=1}^{P} \sum_{k:\Delta_k \subset \cup I_i} |\Delta_k \cap I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{P} |I_i| < \varepsilon$$

$$\sum_{k:\forall j\ \Delta_k \cap U_{\delta_j}(x_j) = \emptyset} \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k| < 2M\varepsilon$$

Получаем

$$\sum_k \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k| \leqslant \varepsilon(b-a+2M)$$

□

Следствие 1. *Если f интегрируема на $[a,b]$, $m \leqslant f \leqslant M$ и ϕ непрерывна на $[m, M]$, то $\phi(f)$ - интегрируема на $[a,b]$. В частности, если f - интегрируема, то $|f|$ - интегрируема.*

Доказательство.

1) $\phi(f)$ - ограничена, так как ϕ - ограничена по теореме Вейерштрасса.

2) Если x - точка непрерывности f, то x - точка непрерывности $\phi(f)$.

Следовательно, множество точек разрыва $\phi(f)$ содержится в множестве точек разрыва f и имеет меру нуль, значит, по критерию Лебега функция интегрируема. □

Замечание 15. Если f - интегрируема на $[a,b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \tag{23.1}$$

Доказательство.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 29. *Если f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $f = g$ почти всюду на $[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство.

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k|$$

$$\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k g(\xi_k)|\Delta_k|$$

$\lambda(\mathbb{T}) \to \delta$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \to \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) \to \int\limits_a^b g(x)dx$$

$\forall \Delta_k \ \exists \xi_k :$

$$f(\xi_k) = g(\xi_k)$$

так как Δ_k не является множеством меры нуль, выбираем такие ξ_k и получам

$$\sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| = \sum_k g(\xi_k)|\Delta_k|$$

и значит их пределы совпадают. □

Утверждение 30. *Если $f \geqslant 0$ - интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f = 0$ почти всюду.*

Доказательство. По критерию Лебега f почти всюду непрерывна. Предположим, что в c - точке непрерывности f $f(c) > 0$, тогда $\exists [c-\delta, c+\delta]$:

$$f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2} I_{[c-\delta, c+\delta]}$$

из-за монотонности интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \frac{f(c)}{2} 2\delta > 0$$

Получаем противоречие, следовательно $f = 0$ во всех точках непрерывности. □

Утверждение 31 (доказательство теоремы 45)**.**

1) *Если f интегрируема на $[a,b]$, то f интегрируема на всяком $[c,d] \subset [a,b]$.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Если f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$ $(a < c < b)$, то f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Применяем критерий Лебега. □

Замечание 16. Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$. Функции $f \cdot I_{[a,c)}$ и $f \cdot I_{[c,b]}$ интегрируема на $[a, b]$. Из-за линейности интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f \cdot I_{[a,c)}dx + \int\limits_a^b f \cdot I_{[c,b]}dx$$

На $[a, b]$

$$1 = I_{[a,c)} + I_{[c,b]}$$

Надо проверить

$$\int\limits_a^b f \cdot I_{[a,c)}dx \stackrel{?}{=} \int\limits_a^c f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f \cdot I_{[c,b]}dx \stackrel{?}{=} \int\limits_c^b f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f \cdot I_{\{c,d\}}dx \stackrel{?}{=} \int\limits_c^d f(x)dx$$

$\{c, d\} \subset [a, b]$ - промежуток. После проверки получаем, что аддитивность - это следствие линейности.

Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Пусть f - интегрируема на $[a, b]$

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Утверждение 32. *Существует число $M > 0$:*

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M|x - y| \tag{23.2}$$

В частности, F - непрерывная функция.

Доказательство.

$$M = \sup |f|$$

$x > y$

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int\limits_y^x f(t)dt\right| \leqslant M|x - y|$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 33. *Если c - точка непрерывности f, то F - дифференцируема в точке c и*

$$F^{'}(c) = f(c)$$

Таким образом, F - почти всюду дифференцируема.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 24

Интеграл Римана

Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Вопрос:

1) F - всюду дифференцируема и $F' = 0$ на $\mathbb{Q} \overset{?}{\Rightarrow}$

$$F = const$$

2) Привести пример интегрируемой по Риману функции f на $[0,1]$ такая, что $\int\limits_0^x f(t)dt$ не дифференцирума на континуальном множестве.

Доказательство утверждения 33. Пусть для определенности $h > 0$.

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h}\int\limits_c^{c+h} f(t)dt - f(c) = \frac{1}{h}\int\limits_c^{c+h}(f(t)-f(c))dt$$

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\right| \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_c^{c+h}|f(t)-f(c)|dt \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_c^{c+h}|\omega(f,[c,c+h])|dt \leqslant \omega(f,[c,c+h]) \to 0$$

так как f непрерывна в точке c. □

Утверждение 34. *Если F дифференцируема на $[a,b]$ и $f = F'$ интегрируема по Риману, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{24.1}$$

Доказательство.

$$F(b)-F(a) = \sum_k (F(x_k)-F(x_{k-1})) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| =$$

$$= \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \xrightarrow[\lambda(\mathbb{T})\to 0]{} \int\limits_a^b f(x)dx$$

□

Утверждение 35. *Пусть кусочно-непрерывная функция (можно не требовать существование пределов) на $[a,b]$. Тогда существует непрерывная функция F, которая дифференцируема всюду за исключением быть может конечного числа точек и $F' = f$ за исключением быть может конечного числа точек. Такая функция*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

называется обобщенной первообразной f. Для всякой обобщенной первообразной $\mathcal{F}$ функции f верна формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) \tag{24.2}$$

Доказательство. Берем

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Пусть $\mathcal{F}$ - обобщенная первообразная f. Тогда

$$(\mathcal{F} - F)' = 0$$

всюду за исключением конечного числа точек. Тогда, так как это разнисть непрерывных, получаем, что

$$\mathcal{F} - F = const$$

$$\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt$$

□

Утверждение 36. *Пусть ϕ удовлетворяет на $[a, b]$ условию липшеца, то есть*

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant M|x - y|$$

Тогда для всякого множества меры нуль E его образ $\phi(E)$ - множество меры нуль.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{(c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)\}_n :$

$$2\delta_n < \varepsilon$$

и также

$$E = \bigcup_n (c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)$$

$$\phi((c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)) \subset (\phi(c_n) - M\delta_n, \phi(c_n) + M\delta_n) = I_n$$

$x \in (c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)$

$$|\phi(x) - \phi(c_n)| \leqslant M|x - c_n| \leqslant M\delta_n$$

$$|I_n| = 2M\delta_n$$

$$\phi(E) \subset \bigcup_n I_n$$

$$\sum_n |I_n| = M \sum_n 2\delta_n < M\varepsilon$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 49. *Пусть $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ - диффеоморфизм (то есть ϕ - биекция, ϕ^{-1} - непрерывно дифференцируема). Если f - интегрируема на $[a, b]$, то $f(\phi(t))|\phi^{'}(t)|$ - интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))|\phi^{'}(t)|dt \tag{24.3}$$

Доказательство. Для определенности считаем, что $\phi^{'} > 0$. τ_k - отмеченные точки (выбираем их так, что можно проверять теорему Лагранжа).

$$\sum_k f(\phi(\tau_k))\phi^{'}(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sum_k f(\phi(\tau_k))(\phi(t_k) - \phi(t_{k-1}))$$

$$x_k = \phi(t_k)$$

$$\sum_k f(\phi(\tau_k))\phi^{'}(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_k f(\phi(\tau_k))(x_k - x_{k-1})$$

$$\max|t_k - t_{k-1}| \to 0 \ \Rightarrow \ \max|x_k - x_{k-1}| \to 0$$

$$\sum_k f(\phi(\tau_k))\phi^{'}(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) \to \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt$$

$$\sum_k f(\phi(\tau_k))(x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_a^b f(x)dx$$

□

Договоренность: если $a > b$

$$\int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)dx$$

$$\int\limits_a^a f(x)dx := 0$$

Приложения.

1) Пусть у нас есть две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, хотим найти площадь $S^{'}$ (Рис. 28.).

$$S^{'} = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

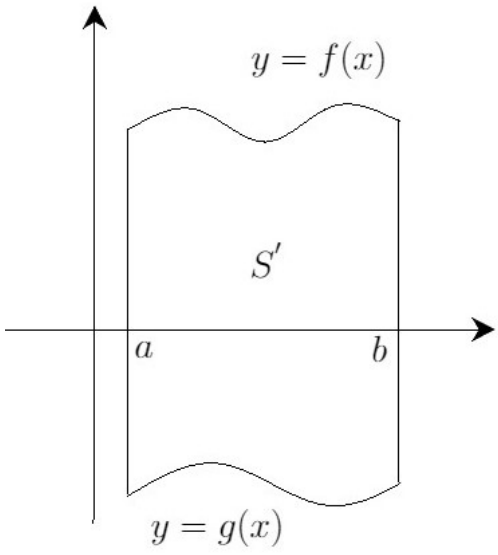

Рис. 28.

2) У нас есть функция $y = f(x)$, хотим найти объем тела вращения (Рис. 29.).

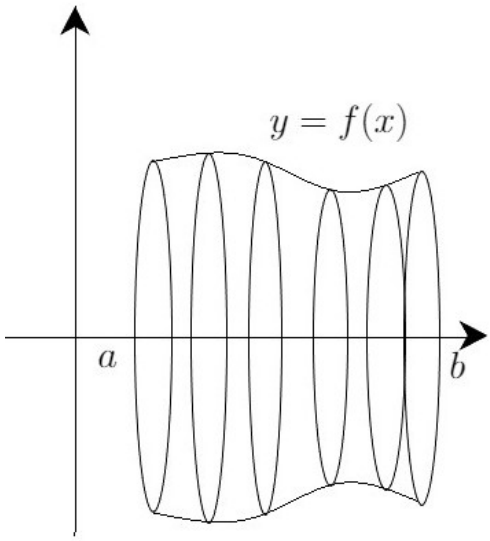

Рис. 29.

$$\sum_k \Delta_k \pi f^2(\xi_k) \to \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx = V$$

3) Хотим найти длину непрерывно дифференцируемой кривой в $\mathbb{R}^n$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\gamma(t),\ t \in [a, b]$

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 25

Интеграл Римана

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Пусть функция f - $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt = f(a) + \int\limits_a^x (t-x)' f'(t)dt \overset{\text{по частям}}{=}$$

$$\overset{\text{по частям}}{=} f(a) + (t-x)f'(t)\Big|_a^x - \int\limits_a^x (t-x)f''(t)dt = f(a) + f'(a)(x-a) - \int\limits_a^x (t-x)f''(t)dt =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) - \int\limits_a^x \left(\frac{(t-x)^2}{2}\right)' f''(t)dt \overset{\text{по частям}}{=}$$

$$\overset{\text{по частям}}{=} f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{(t-x)^2}{2} f''(x)\Big|_a^x + \int\limits_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int\limits_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt$$

Продолжая выполнять те же действия, мы доказали следующую теорему.

Теорема 50.

$$f(x) = f(a) + f(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \qquad (25.1)$$

Задача 25.

1) Теорема о среднем. Пусть f и g непрерывны на $[a, b]$, $g \geqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int\limits_a^b g(t)dt,\ c \in [a, b]$$

2) Вывести из формулы Тейлора с интегральным остаточным членом формулу с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пусть теперь $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $m+1$ раз непрерывно дифференцирумая в точке x_0.

$$\phi(t) = f(x_0 + th)$$

$$\phi^{(k)}(t) = d^k f(x_0 + th, h)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$a = 0,\ t = 1$

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi^{'}(0) + ... + \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{1}{m!}\int\limits_0^1 (1-t)^m \phi^{(m+1)}(t)dt$$

$$f(x+h) = f(x_0) + df(x_0,h) + ... + \frac{d^m f(x_0,h)}{m!} + \frac{1}{m!}\int\limits_0^1 (1-t)^m d^{m+1} f(x_0,h)dt$$

Частные случаи.

1) $m = 0,\ x_0 = 0,\ h = x$

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i dt$$

Следствие. *Если f непрерывно дифференцируемая в окрестности точки 0, то существует непрерывные в окрестности точки 0 $g_i(x)$ такие, что*

$$f(x) = \sum_i x_i g_i(x) \tag{25.2}$$

Доказательство.

$$g_i(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$$

$$|x-y| < \delta \ \Rightarrow\ |xt - yt| < \delta$$

значит

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(ty)\right| < \varepsilon\ \forall t \in [0,1]$$

□

$n = 1$

$$f(0) = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x) = xg(x)$$

2) $m = 1,\ x_0 = 0,\ h = x$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \int\limits_0^1 (1-t)\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)dt \cdot x_i x_j =$$

$$= f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j}\int\limits_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)dt \cdot x_i x_j$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$2g_{ij}(x) = \int\limits_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)dt$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n c_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{i,j}(x)x_i x_j$$

$$g_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$$

Лемма 3 (Морс)**.** *Пусть f - трижды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$ и $f(0) = 0$, $\operatorname{grad} f = 0$. Пусть матрица $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ - невырождена. Тогда существует диффеоморфизм $x = \phi(u)$ окрестности нуля на окрестность нуля такой, что*

$$f(\phi(u)) = u_1^2 + ... + u_r^2 - u_{r+1}^2 - ... - u_n^2,\ 0 \leqslant r \leqslant n \tag{25.3}$$

Доказательство.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}(x)x_i x_j$$

$$g_{ij}(x) = 2\int\limits_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)$$

$g_{ij}(x)$ - непрерывно дифференцируемая (без доказательства).

$$g_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$$

$$G = (g_{ij})$$

Пусть $x = Cy$

$$f(Cy) = \frac{1}{2}x^T G x\Big|_{x=Cy} = \frac{1}{2}y^T C^T G C y$$

$$\widetilde{G} = C^T G C$$

Так как $G(0)$ - невырождена, то существует C :

$$\widetilde{f}(y) = f(Cy) = \sum_{i,j} \widetilde{g}_{ij} y_i y_j$$

$$\sum_{i,j} \widetilde{g}_{ij}(0) y_i y_j = y_1^2 + ... + y_r^2 - y_{r+1}^2 - y_n^2$$

Пусть для определенности $\widetilde{g}_{ij}(0) = 1$ (может быть и -1).

$$\widetilde{g}_{11}y_1^2 + 2\widetilde{g}_{12}y_1y_2 + ... + 2\widetilde{g}_{1n}y_1y_n = \left(\sqrt{\widetilde{g}_{11}}y_1 + \frac{\widetilde{g}_{12}}{\sqrt{\widetilde{g}_1 1}}y_2 + ... + \frac{\widetilde{g}_{1n}}{\sqrt{\widetilde{g}_1 1}}y_n\right)^2 -$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$-\left(\frac{\widetilde{g}_{12}}{\sqrt{\widetilde{g}_{11}}}\right)^2 y_2^2 - ... - \left(\frac{\widetilde{g}_{1n}}{\sqrt{\widetilde{g}_{11}}}\right)^2 y_n^2$$

$$\widetilde{f}(y) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\widetilde{g}_{11}}y_1 + \frac{\widetilde{g}_{12}}{\sqrt{\widetilde{g}_{11}}}y_2 + ... + \frac{\widetilde{g}_{1n}}{\sqrt{\widetilde{g}_{11}}}y_n\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\widetilde{\widetilde{g}}_{ij}y_iy_j$$

Делаем замену

$$u_1 = \frac{\sqrt{\widetilde{g}_{11}}}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{\widetilde{g}_{12}}{\sqrt{2\widetilde{g}_1 1}}y_2 + ... + \frac{\widetilde{g}_{1n}}{\sqrt{2\widetilde{g}_1 1}}y_n$$

$$u_2 = y_2$$

$$.....$$

$$u_n = y_n$$

$$\widetilde{f}(u) = u_1^2 + \sum_{2\leqslant ij}\widetilde{\widetilde{g}}_{ij}(u)u_iu_j$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(0) = \frac{\sqrt{\widetilde{g}_{11}(0)}}{\sqrt{2}} > 0$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\widetilde{g}_{11}(0)}}{\sqrt{2}} & * & ... & ... & * \\ * & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ * & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, замена - диффеоморфизм. Для остальных переменных проделываем то же самое. □

$$\operatorname{grad} F(0) = 0$$

$$F(0) = 0$$

$F = C$ в $\mathbb{R}^2$ получаем

$$x^2 + y^2 = C$$

$$x^2 - y^2 = C$$

Замечание 17.

1) Несобственный интеграл Римана. Ищем длину полуокружности радиуса 1

$$(x, \sqrt{1-x^2})$$

$$\left(1, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$l = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ - \ \text{неограниченная функция}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1+} \int\limits_{c}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{c\to 1-} \int\limits_{0}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to b} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx$$

2) Интеграл - функционал. f - интегрируема на $[0,1]$. Можно устроить отображение $\phi \in C[0,1]$ $\phi \mapsto \int\limits_0^1 \phi(x)f(x)dx$ - непрерывный линейный функционал.

Задача 26. $\delta(\phi) = \phi(0)$ - не является таким.

$$F(x) - F(x_0) = \sum_i (F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

Возьмем

$$\sum_i f(\xi_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})) \to \int\limits_a^b f(x)dF$$

любой линейный функционал задается в виде такого интеграла.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ